Université Kasdi Merbah Ouargla
Faculté De Mathématiques et Sciences de la Matière
Département De Mathématiques

LMD Master 2022/2023

Option :Mathématiques et Analyse Numérique

Thème

Pour présenté en Vue De L'obtention Du Diplôme De Master

Titre :

Théorèmes du point Fixe Commun Dans l'espace Quasi-Métrique

Rèalisé par :

MEDJOUDJ Yousra

Version de :21.06.2023

Devant le jury composé de :

président	Dr.Mohamed-elhadi Mezabia
Examinateur	Dr.Mohamed-said Said
Rapporteur	Dr.Amara Guerfi

Dédicace

“

Cette étude est entièrement dédiée à mes ***parents*** *bien-aimes,qu ont été ma source de l'inspiration et m'a donné la force quand j'ai pensé a abandonner,que me fournissent continuellement leur soutien moral,spirituel,émotionnel pour leurs encouragement et leurs prières continuelles.*

Á mon ***mari Abdelmalek*** *qui m'a soutenu et encouragé pour finaliser ce travail.*

Á mon ange ,Mon seul fille ***Layan****.Dieu le protège*

*Á mes frères :****Nadir,Djamel,Bilal,Islam****.*

*Á mes sœurs :****Iman,Afaf,Basmala***

Á mon âme sœur ***Mayson,Wafa***

Á Mon l'amour de ma vie

Á toute ma famille et mes amis

Allah les protège et leur donne le bonheur.

”

- Yousra

Remerciements

Je remercie **Allah** le tout puissant de m'avoir donné le courage, la volenté, la santé, et la patience de mener à terme ce présent travail.

Mes plus vifs remerciements et ma profonde gratitude vont à **Mr. Amara Guerfi** notre promoteur de memoire pour sa grande patience, pour sa disponibilite, porer ses nombreus Conseils, porr ses corrections et son appréciation au Cours de l'elaboration de ce travail

Aussi, je tiens à exprimer mes remerciements à tout mes professeurs tout au long de mon parcours d'etudes

Entin, je remercie tous Ceuse qui ont participé directement on indirectement à la réalisation dece travail

Merci à tous et à toutes

Table des matières

Introduction Générale

Que signifie point fixe ? On dit que $u \in X, X$ est un ensemble non vide,est un point fixe de $T, X \to X$ Si $T(u) = u$. Autrement dit, l'action de l'application T sur le point u la laisse invariant le theoreme qui garantit l'existence de ce point stationnaire est le théoreme du point fixe. L'interêt de ce théorème dépasse Pargement le cadre purement geometrique, on l'on trouve son applications dans divers domaines des mathematiques, de la physique mathematique des réactions chimiques, de l'économie theorie, etc..

La première apparition du point fixe commence au dernier 19éme siecle, il a utilise pour trouver des solutions approchées et successives et l'existence d'une solution unique à l'equation en particulier les équations différentielles. Son histoire a commencé par les travaux de S. Banach dans son papier [4] publie en 1922. Banach a établi l'existence et l'unicite du point fixe d'une contraction dans un espace métrique complet il a appliqué son theórème à la résolution des équations integrales.
Un autre type de points fixes qui a connu des généralisations aux espaces quasi-métriques, c'est ce qu'on appelle point fixe commun pour une paire d'applications. Généralement pour établir un point fixe commun métrique, on a besoin d'une relation de commutativité entre les applications étudiées, la continuité et une condition contractive ainsi que la complétude ou la fermeture d'espace (ou sous espaces). En 1976, Jungck [7] a introduit et utilisé la commutativité de deux applications d'un espace métrique dans lui-même pour établir un point fixe commun. En 1986, dans son article [8] il a amélioré la propriété de commutativité à une nouvelle notion plus générale, c'est la propriété de compatibilité pour une paire d'applications. Plus tard Jungck et Rhoades [6] ont introduit un concept plus général de

compatibilité qui est la compatibilité faible. Ce mémoire est réparti en trois chapitres : Le premier chapitre est consacré aus définitions, notions et resultats qui nous servirent tout a long de ce travail, plus particulièrement : les espaces métriques, les espaces complets,Contractive, les espaces de Banach, point fixe et quelques theoremes de point fixe ...etc.

Dans le deuxieme chapitre, nous présentons deux cas de théoréme du point fixe :

$*1^{er}$ cas d'une seule fonction qui contient théoréme de Kannan et Ciric.

$*2^{me}$ cas de deux fonctions qui contient la contraction généralisée et quasi contraction.

Dans le troisiéme chapitre, nous construisons une théorie de point fixe dans l'espace quasi-métrique. Nous commonçons par la présentation de la notion de espace quasi métrique, et nous donnons quelques exemples ddéespace quasi métrique.Dans le deuxiéme partie de ce chapitre, nous présentons quelques résultats de point fixe commun.

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre est consacré à quelques definitions et des eléments basiques qui sont indispensables pour le reste de notre travail.

1.1 Métrique

Définition 1.1

([1]) Soit X un ensemble non vide. On appelle distance (métrique) sur X, toute application $d : X * X \to \mathbb{R}^+$ *verifiant pour tous* $x, y, z \in X$ *:*

1 : $d(x, y) = 0$ *si et seulment si* $x = y$

2 : $d(x, y) = d(y, x)$ *(symétrique)*

3 : $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *(inégalité trianglaire)*

Exemple 1.1

Soit $d(x, y) = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}|$ $\forall x, y \in R$ *est une distance, on a :*

1 : $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{y} \Longleftrightarrow x = y$

2 : $d(x, y) = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| = |(-1)(\frac{1}{y} - \frac{1}{x})| = |-1||\frac{1}{y} - \frac{1}{x}| = |\frac{1}{y} - \frac{1}{x}| = d(y, x)$

3 : $d(x,y) = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| = |\frac{1}{x} - \frac{1}{z} + \frac{1}{z} - \frac{1}{y}| \leq |\frac{1}{x} - \frac{1}{z}| + \frac{1}{z} - \frac{1}{y}| \leq d(x,z) + d(z,y)$

Exemple 1.2

Soit $\sigma(x,y) = \ln(1 + d(x,y))$ *est une distance sur un ensemble non vide* X *de* R *si* d *est un distance sur* X*, on a :*

1 $\sigma(x,y) = 0 \Longleftrightarrow \ln(1 + d(x,y)) = 0 \Longleftrightarrow 1 + d(x,y) = 1 \Longleftrightarrow d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$

2 $\sigma(x,y) = \ln(1 + d(x,y)) = \ln(1 + d(y,x)) = \sigma(y,x)$

3 Comme d *est une distance , alors* $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

$$\Longleftrightarrow 1 + d(x,z) \leq 1 + d(x,y) + d(x,z)$$

$$\Longleftrightarrow 1 + d(x,z) \leq 1 + d(x,y) + d(x,z) + d(x,y)d(y,z)$$

$$\Longleftrightarrow 1 + d(x,z) \leq (1 + d(x,y)) + (1 + d(y,z))$$

$$\Longleftrightarrow \ln(1 + d(x,z)) \leq \ln(1 + d(x,y)) + \ln(1 + d(y,z))$$

$$\Longleftrightarrow \sigma(x,z) \leq \sigma(x,y) + \sigma(y,z)$$

dans σ *est une distance*

Définition 1.2

On dit que deux distences d_1, d_2 *sur un ensemble* X *sont équivalentes s'il existe deux contentes réelles* $\beta \geq \alpha \geq 0$ *telles que :*

$$\alpha d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq \beta d_1(x,y).$$

pour tout $x, y \in X$

Exemple 1.3

soit $(d_i)_{1 \leq i \leq p}$ *une famille fini de* p *distences sur* X_i*, on pose* $X = \prod_{i=1}^{p} X_i$ *et on définit sur* *le produit cartésien* $X \times X$ *deux distences commes suit :*

$$D_1(x, y) = \sup_{1 \le i \le p} d_i(x_i, y_i)$$

$$D_2(x, y) = \sum_{i=1}^{p} d_i(x_i, y_i)$$

Pour tous $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ *et* $y = (y_1, y_2 \dots y_n)$ *de* X *on a*

$$\sup_{1 \le i \le p} d_i(x_i, y_i) \le \sum_{i=1}^{p} d_i(x_i, y_i) \le p \sup_{1 \le i \le p} d_i(x_i, y_i)$$

donc

$$D_1(x, y) \le D_2(x, y) \le pD_1(x, y)$$

Alors D_1 *et* D_2 *sont equivalentes pour* $\alpha = 1$, $\beta = p$

1.2 Espaces Metriques

Définition 1.3

On appelle espace métrique tout ensemble non vide X muni d'une distance d. Cet espace sera noté par (X,d)

Définition 1.4 (La Convergence)

Soit (X, d) un espace métrique . On dit qu'une suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *dans X Converge vers un point* $L \in X$, *Si pour tout* $\epsilon > 0$ *il exist* $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ *telque*

$$d(x_n, l) < \epsilon$$

pour tout $n \ge N_\epsilon$

On écrit $\lim_{n \to \infty} x_n = l$ *ou* $x_n \to l$

Remarque 1.1

Tout suite Comvergente est bornée.

Définition 1.5 (la Continuite)

Soient (E, d_E) *et* (F, d_F) *deux espaces métrique f une application de E dans F, et a un point de E. On dit que f est continue en a si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \sigma > 0, \forall x \in E : d_E(x, a) < \sigma \Longrightarrow d_F(f(x), f(a)) < \epsilon$$

Si l'application f est continue en tout point a de E, on dit qu'elle est continuce sur E ou tout simplement Continue.

Propriété 1.1

Soient (E, d_E) *et* (F, d_F) *deux espaces métriques, et f une application de E dans F.*

Les deux assertions suivantes sont équivalents

1 : f est continue en un point $a \in E$

2 : pour tout suit $\{x_n\}_{n \in N}$ *de E converge vers a, la suite* $\{f(x_n)\}_{n \in N}$ *converge vers f(a).*

Définition 1.6 (La Continuite uniforme)

Soient (E, d_E) *et* (F, d_F) *deux espaces métriques.*

Une application $f : E \to F$ *est dite uniformement continue si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \sigma > 0, \forall x, y \in E : d_E(x, y) < \sigma \Longrightarrow d_F(f(x), f(y)) < \epsilon$$

Remarque 1.2

Il est clair que la continuite uniforme sur E implique la continuté sur E.par contre,la réciproque est fausse.

Exemple 1.4

$f(x) = x^2$ est Continue sur R mais ne pas uniformêment continue.

Définition 1.7 (Suites de cauchy)

On dit qu'une suite $\{x_n\}_{n\in N}$ dans un espace métrique (X,d) est de cauchy si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_E \in N, \forall n, m \in N : d(x_n, x_m) < \epsilon, n > m \geq N_\epsilon$$

et on ecrit

$$d(x_n, x_m) \to 0$$

$$n, m \to \infty$$

Exemple 1.5

On munit l'espace C([0,1],R) de la distence fondamental d_1 et on considère la suite $\{f_n\}_{n\in N}$ définie par : $f_n(x) = min(n, \frac{1}{\sqrt{x}})$= $\begin{cases} n \ si \ 0 \leq x \leq \frac{1}{n^2} \\ \frac{1}{\sqrt{x}} \ si \ \frac{1}{n^2} \leq x \leq 1 \end{cases}$

Soit $E > 0$ pour tout n,m de $\mathbb{N}^*$ avec $n > m$ on a :

$$d_1(f_n, fm) = \int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)| dx$$

$$= \int_0^{1/n2} (n-m)dx + \int_{1/n^2}^{1/m^2} (\frac{1}{\sqrt{x}} - m)dx + \int_{1/m^2}^{1} (\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}})dx$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{m}{n^2} + 2(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}) - m(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2})$$

$$= \frac{1}{m} - \frac{1}{n} < \frac{1}{m}$$

on prend $N_\epsilon = \frac{1}{\epsilon} + 1$, on trouve $n > m \geq N_\epsilon \Longrightarrow d(f_n, f_m) < \epsilon$

Remarque 1.3

Toute suite convergente d'un espace métrique(X,d) est de couchy.

1.3 Espace Normé

Définition 1.8

Une norme sur ensemble X est une fonction continue de X à $\mathbb{R}^+$ vérfiant les propriétès suivantes :

1 $\forall x \in X : \|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ *(Séparation)*

2 $\forall \lambda \in K, \forall x \in K : \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ *(k=Rou C),(homogenété)*

3 $\forall x, y \in X : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(inégalité triangulaire)*

Exemple 1.6

L'espace $C([0,1], \mathbb{R})$ *est normé,lorsqu'il est muni d'une des nomes suivantes :*

1 : $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$

2 : $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$

3 : $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2 dt}$

1.4 Convexité

Définition 1.9

Un sous ensemble $\mathbb{S}$ de $\mathbb{R}$ est dite convexe si pour tout $x, y \in \mathbb{S}$ et pour tout $\lambda \in [0,1]$ on a $\lambda x + (1 - \lambda)y \in \mathbb{S}$

Exemple 1.7 *1 : L'ensemble X aussi que la partié vide sont convexes.*

2 : Les boules d'un espace normé sont convexes.

3 : Tout sous-ensemble dans l'espace $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *sont convexe parceque :*

$M = \{x \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \|x\| \leq L\}$ *est convexe parceque :*

Soit $x, y \in C : \|\lambda x + (1 - \lambda)y\| \leq \lambda\|x\| + (1 - \lambda)\|y\| \leq \lambda L + (1 - \lambda)L \leq L$

Donc M est convexe.

Définition 1.10

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ .On dit que f est convexe sur I. Si pour tous x,y de I et tout $\lambda \in [0,1]$ on a :

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

Exemple 1.8

La fonction $x \to |x|$ est convexe sur $\mathbb{R}$ car si $\lambda \in [0,1]$ alors

$$|\lambda x + (1-\lambda)y| \leq |\lambda x| + |(1-\lambda)y| \leq \lambda|x| + (1-\lambda)|y|$$

1.5 Espaces Complets

Définition 1.11

On dit qu'un espace métrique (X,d) est complet si toute suite couchy de X est convergente dans X.

Remarque 1.4

Si X est complet alors tout sous espace fermé de X est complet.

1.6 Espace de Banach

Définition 1.12

Un espace de Banach est un espace normé complet pour la distance associé a sa normé.

Exemple 1.9

Soit $E = C([a,b], \mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions continues de [a,b] dans $\mathbb{R}^n$.

l'application $\| \cdot \| = E \to \mathbb{R}_+, f \to \|f\| = max_{a \leq t \leq b}|f(t)|$

Où $\|\cdot\|$ *est la norme dans* $\mathbb{R}^n$, *définit une norme rendant* $(E, \|\cdot\|)$ *un espace de Banach.*

1.7 Application Contractive

1.7.1 Application Lipschitzienne

Définition 1.13

([5]) On dit qu'une fonction $f : (E, d_E) \to (F, d_F)$ *est de Lipschitz (ou Lipschitzienne) de rapport* $k > 0$ *(ou k-Lipschitzienne),Si elle satisfait :*

$$d_F(f(x), f(y)) \leq k d_E(x, y)$$

Exemple 1.10

Soit $E \subset \mathbb{R}_+$, *et on a l'application :*$f(x) = \frac{x}{1+x}$ *on a pour tout* $x \in \mathbb{R}_+$:

$$|f(x) - f(y)| = |\frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y}|$$

$$= |\frac{x(1+y) - y(1+x)}{(1+x)(1+y)}|$$

$$= |\frac{x + xy - y - yx}{(1+x)(1+y)}|$$

$$= \frac{|x-y|}{(1+x)(1+y)}$$

$$\leq |x-y|$$

c'est a dire f est Lipschitziemnne de rapport 1 sur $\mathbb{R}_+$ *donc elle l'est aussi sur* $\mathbb{R}$

1.7.2 Application Contractante

Définition 1.14

([10]) On dit qu'une application f est contractante Si f est lipachtzienne de rapport k avec

0< k <1.

Exemple 1.11

Soit $E = \left[\frac{2}{3}, +\infty\right[$ *muni de la distance usuelle , avec* $f(x) = \frac{2x+6}{3x+2}$ *application de E dans R*

$$\forall x, y \epsilon E, |f(x) - f(y)| = \left|\frac{2x+6}{3x+2} - \frac{2y+6}{3y+2}\right| = \left|\frac{14(y-x)}{(3x+2)(3y+2)}\right| \leq \frac{14}{16}|x-y| = \frac{7}{8}|x-y|$$

Alors $k = \frac{7}{8}$ *Donc f est une contraction*

Remarque 1.5

(f est une contraction) $\rightarrow$ *(f est Lipschitzienne)* $\rightarrow$ *(f est uniformément continue)* $\rightarrow$ *(f continue)*

1.8 Compacité

1.8.1 Les espaces métriques compacts

Définition 1.15

On dit que (X, d) est un espace métrique compact si tout suit $\left\{X_n\right\}_{n\epsilon N}$ *d'éléments de X admet une suite extraite converge vers un point de X*

Définition 1.16

Le Sous-ensemble M d'un espace métrique (X, d) est dit Compact si n'importe quelle séquence $\left\{X_n\right\}_{n\epsilon N}$ *de M admet sous-séquence convergent vers une limite appartenant a M*

Exemple 1.12

Toute partie fermeé et bornée de R^n *est compacte.*

1.8.2 Application compacts

Définition 1.17 (Les parties relativement compactes)

Une partie S d'un espace métrique (X, d) est dite relativement compacte si son adhérence *est une partie compacte de X.*

Exemple 1.13

Les parties relativement compactes de R^n sont les parties bornées

1.9 Point Fixe

Définition 1.18

([5]) On dit que x est un point fixe d'une application f :X $\rightarrow$ X Si : f(x)=x

Exemple 1.14

Soit g : $R \rightarrow R$ définie par : g(x)=1+2x On a $g(x) = x \Leftrightarrow 1 + 2x = x \Leftrightarrow x = -1$ Alors g admet un seul point fixe dans R

Exemple 1.15

Soit h : $R \rightarrow R$ definie par :$h(x) = x + \frac{\pi}{2} - \arctan x$

on a

$$h(x) = x \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{2} - \arctan x = x \Leftrightarrow \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

Ce qui est impossible, car l'application tan n'est pas définie à $\pi/2$

Alors h n'a pas de point fixe dans R

Théorème 1.1

On dit principe de Banach si tout les contraction dans un espace métique complet admet un seul point fixe

Remarque 1.6

Tout contraction est continue. De plus, Il y a des applications qui ne sont continues mais qui ont un point fixe.

1.10 Quelques théorèmes du point fixe

Théorème 1.2 (L.Brower 1910)
Soit $k \in \mathbb{X}$ un ensemble non vide, Compacte et convexe partie de R^n et f :$k \to k$ fonction continue.
Alors il existe $x \in \mathbb{X}$ tel que f(x)=x

Théorème 1.3 (S.Banach 1922)
([17]) Soit T :$X \to X$ est un contraction dans un espace métrique complet (X,d),c-à-d, il existe $\lambda\epsilon[0,1)$ tel que :

$$d(Tx,Ty) \leq \lambda d(x,y)$$

pour tous $x, y\epsilon X$. Alors T a un point fixe unique

preuve
Définir la séquence d'itération $x_{n+1} = T(x_n)$. par indiction sur n, on a

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq K^n d(x_1, x_0)$$

Si $n\epsilon N, m \geq 1$ on a

$$d(x_{n+m}, x_n) \leq d(x_{n+m}, x_{n+m-1}) + ... + d(x_{n+1}, x_n) \leq (K^{n+m} + ... + K^n) d(x_1, x_0) \leq \frac{K^n}{1-K} d(x_1, x_0)$$

Donc

$$|d(x_{n+m}, x_n)| \leq \frac{K^n}{1-K} |d(x_1, x_0)| \to 0$$

comme $n \to \infty$

Ainsi, x_n est une suite de cauchy et admet une limit $z\epsilon X$ car X est Complet Puisque T est continue, on a $S(z) = \lim_{n\to\infty} S(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = z$

L'unicité : Supposons que $w\epsilon X$ est un autre point fixe de T.

Donc

$$d(z, w) = d(S(z), S(w)) \leq K.d(z, w)$$

Ainsi

$$d(z, w) \leq 0$$

que est un contraction, Alors T admet un unique point fixe.
Le thémème du point fixe de schauder est une extension de théorème du point fixe de Brower aux espaces vectoriels topologiques, que prevent être de dimension infinée.

Théorème 1.4 (J. Schauder 1930)
Soit K un sous-ensemble fermé convexe compact non vide d'un espace vectoriel topologique. de Hausdorff V et T est une application continue de K sur lui-même telle que T(K) est Contenu dans un sous ensemble compact de K, Alors T a um point fixe.
D. Boyd et J. Wong on 1969 out tenté de généraliser le principe de contraction de Banach en remplaçant le constante de lipschitz par des fonctions valuées réelles.

Théorème 1.5 (Boyd - Wong 1969)
([19]) Soit (X. d) un espace métrique complete et T :$x \to x$ une application satisfaisant la suivant φ Contraction

$$\forall x, y \epsilon X : d(T(x), T(y)) \leq \varphi(d(x, y))$$

Alors T a un point fixe $u \epsilon X$ et $\lim_{n \to \infty} T^n(x) = u$ pour tout $x \epsilon X$
Le théoreme suivant étend le résultat de Boyd-wong il généralise la contraction de Banach.

Théorème 1.6 (Meir-Keeler 1969)
([2]) Soit (X, d) un espace métrique complet et T : $X \to X$ un application satisfisant les conditions Suivants :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \varepsilon \leq d(x, y) < \varepsilon + \delta \Rightarrow d(T(x), T(y)) < \varepsilon$$

Alors T admit un point fixe unique u dans x.

Théorème 1.7 (J Caristi 1976)
([9]) Soit (X,d) un espace métique Complet et T :$X \to X$ un application satisfisant les conditions suivants :
Il'y une fonction $\phi : x \to R_+$ Semi-continue telle que :

$$d(x, Tx) < \phi(x) - \phi(Tx)$$

pour tout $x \epsilon X$
Alors T admet un point fixe.
Maintenant, on présentons be théorème de Kannan. C'est le premier résultat de la littérature qui garantisse l'existence et l'unicité des pointes fixes pour les applications non-continue.

Théorème 1.8 (R. Kannan 1968)
([16]) Soit (X,d) un espace métrique complet et T :$X \to X$ un application. Supposons qu'il existe $\alpha \epsilon [0, \frac{1}{2})$ tel que :

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha(d(x, Tx) + d(y, Ty))$$

pour tout $x, y \epsilon X$
Alors T a un unique point fixe dans X

Chapitre 2

Généralisation du théoréme de Banach

2.1 Cas d'une seule fonction

2.1.1 Théorème du point fixe de Kannan

Dans le théoréme de Banach, n'importe quelle contraction est continue sur X . Il est normal de poser la question s'il existe des conditions contractives qui n'impliquent pas la continuité de T. Cette question a été répondue d'une maniére affirmative par R. Kannan [15] en 1968.

Définition 2.1
Soient (X,d) un espace métrique et $T : X \to X$. On dit que T est une application de Kannan s'il existe un nombre réel $\alpha \epsilon [0, \frac{1}{2}[$ tel que pour tout $x, y \epsilon X$, on a :

$$d(Tx, Ty) \leqslant \alpha(d(x, Tx) + d(y, Ty)) \tag{2.1}$$

Exemple 2.1

Soit $X = [0,2] \subset \mathbb{R}$, l'ensemble des nombres réels muni de la distance usuelle et $T : X \to X$ défine par :

$$Tx = \begin{cases} \frac{x}{9} & x \epsilon X_1 = [0,1] \\ \frac{x}{10} & x \epsilon X_2 =]1,2] \end{cases}$$

On vérifier que T satisfait (2.1).soient $x, y \epsilon X_1$ .On a

$$d(x,Tx) = |x - \frac{x}{9}| = \frac{8x}{9}$$

$$d(y,Ty) = |y - \frac{y}{9}| = \frac{8y}{9}$$

et

$$d(Tx,Ty) = |\frac{x}{9} - \frac{y}{9}| = (\frac{1}{9})(x+y)$$

$$= \frac{1}{8}(\frac{8}{9})(x+y)$$

$$= \frac{1}{8}[d(x,Tx) + d(y,Ty)]$$

si $x, y \epsilon X_2$

$$d(x,Tx) = |x - \frac{x}{10}| = \frac{9x}{10}$$

$$d(y,Ty) = |y - \frac{y}{10}| = \frac{9y}{10}$$

et

$$d(Tx,Ty) = |\frac{x}{10} - \frac{y}{10}| = (\frac{1}{10})(x+y)$$

$$= \frac{1}{9}(\frac{9}{10})(x+y)$$

$$= \frac{1}{9}[d(x,Tx) + d(y,Ty)]$$

soient maintenant $x \epsilon X_1$ *et* $y \epsilon X_2$, *alors :*

$$d(x,Tx) = |x - \frac{x}{9}| = \frac{8x}{9}$$
$$d(y,Ty) = |y - \frac{y}{10}| = \frac{9y}{10}$$

et

$$d(Tx,Ty) = |\frac{x}{9} - \frac{y}{10}| \leqslant \frac{x}{9} + \frac{y}{10} \leqslant \frac{1}{8}\frac{8x}{9} + \frac{1}{9}\frac{9x}{10}$$
$$\leqslant \frac{1}{8}(\frac{8x}{9} + \frac{9y}{10})$$
$$= \frac{1}{8}[d(x,Tx) + d(y,Ty)]$$

Par conséquent, T satisfait sur X la condition

$$d(Tx,Ty) \leqslant \frac{1}{8}[d(x,Tx) + d(y,Ty)]$$

c.a.d T satisfait (2.1) avec $\alpha = \frac{1}{8}$, mais ne vérifie pas la condition que

$$d(Tx,Ty) = \alpha d(x,y) \tag{2.2}$$

Maintenant on va donner un exemple où T vérifie (3.2) mais T ne satisfait pas la condition (3.1).Soient $(X, |.|)$ un espace métrique $X = [0,10] \subset R$ et T définie par $Tx = \frac{3}{4}x$, pour tout $x \epsilon X$. On a pour tout $x, y \epsilon X$

$$d(Tx,Ty) = |\frac{3}{4}x - \frac{3}{4}y|$$

$$= \frac{3}{4}d(x,y)$$

d'où T est vérifie (2.2).

si $x = 0$ et $y = 8$,

$$d(T(0), T(8)) = |0 - 6| = 6$$

et

$$d(0, T(0)) + d(8, T(8)) = |0 - 0| + |8 - 6| = 2$$

donc il n'existe pas $\alpha \epsilon [0, \frac{1}{2}[$ tel que $d(T(0), T(8)) \leqslant \alpha[d(0, T(0)) + d(8, T(8))]$. Alors T n'est pas un application de Kannan

Théorème 2.1

(kannan 1968 [15]) Soient (X, d) un espace métrique complet et $T : X \to X$ une application de Kannan. Alors

(1) : T admet un point fixe unique $u \epsilon X$

(2) : $lim_{n\to\infty} T^n x = u$

(3) : pour tout $x \epsilon X$ on a

$$d(T^n x, u) \leqslant \frac{\beta^n}{1 - \beta} d(x, Tx), \beta \epsilon [0, 1[$$

preuve

(1) soient x_0 un point arbitraire de X et $\{x_n\}_{n \epsilon N}$ la suite définie par $x_{n+1} = f x_n$ alors,la condition (2.1) donne

$$d(x_1, x_2) = d(Tx_0, Tx_1) \leqslant \alpha[d(x_0, Tx_0) + d(x_1, Tx_1)]$$

$$= \alpha d(x_0, Tx_0) + \alpha d(x_1, x_2)$$

Donc

$$d(x_1, x_2) \leqslant \frac{\alpha}{1 - \alpha} d(x_0, Tx_0)$$

De la méme maniére, on a

$$d(x_2, x_3) \leqslant \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x_1, x_2)$$
$$\leqslant (\frac{\alpha}{1-\alpha})^2 d(x_0, x_1)$$

par récurrence, on trouve

$$d(x_n, x_{n+1}) \leqslant (\frac{\alpha}{1-\alpha})^n d(x_0, x_1) = \beta^n d(x_0, x_1) \quad (2.3)$$

où $\beta = \frac{\alpha}{1-\alpha} < 1$.En appliquant l'inégalité triangulaire,on a pour des entiers arbitraires n,$p \epsilon N^*$

$$d(x_n, x_{n+p}) \leqslant d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + ... + d(x_{n+p-1}, x_{n+p})$$

En utilisant l'inégalité (2.3), on trouve

$$d(x_n, x_{n+p}) \leqslant \frac{\beta^n(1-\beta^p)}{1-\beta} d(x_0, x_1) < \frac{\beta^n}{1-\beta} d(x_0, x_1) \to 0.sin \to \infty \quad (2.4)$$

par conséquence $\{x_n\}_n \epsilon N$ est une suite de Cauchy et comme (X,d) est complet , elle converge vers une limite $u \epsilon X$, c-à-d $lim_{n\to\infty} x_n = u$.On va montrer maintenant que $Tu = u$. En faisant $x = x_n$ et $y = u$ dans (3.1). on obtient

$$d(Tx_n, Tu) \leqslant \alpha d(x_n, Tx_n) + \alpha d(u, Tu)$$

si $n \to \infty$ on trouve

$$d(u, Tu) \leqslant \alpha d(u, Tu)$$

ce qui implique

$$0 \leqslant (1-\alpha) d(u, Tu) \leqslant 0$$

avec $\alpha \epsilon [0, \frac{1}{2}[$, d'où $Tu = u$.

pour trouver l'unicité.supposons que l'on a deux points fixes u,v. Alors

$$d(u,v) = d(Tu,Tv) \leqslant \alpha[d(u,Tu) + d(v,Tv)] = 0$$

et donc $u = v$.

Ainsi nous avons prouvé(1),(2) car x_0 est arbitraire dans X.Lorsque $p \to \infty$ dans (2.4) on obtient l'inégalité (3).

Exemple 2.2

soient $X = [0,2]R$,l'ensemble des nombres réels muni de la distance usuelle et $T : X \to$ définie par

$$Tx = \begin{cases} \frac{x}{9} & x\epsilon X_1 = [0,1] \\ \frac{x}{10} & x\epsilon X_2 =]1,2] \end{cases}$$

D'aprés l'exemple 3.1, T satisfait (2.1) et 0 es un point fixe unique de T.

2.1.2 Théoréme du point fixe de Ciric

L'une des conditions plus générale des contractions obtenu a été donné par Ciric [12,11] en 1974.

Contraction généralisée

Définition 2.2

On dit que $T : X \to X$ est une contraction généralisée s'il existe des fonctions positives q,s,r,t vérifiant :

$$sup(q(x,y) + s(x,y) + r(x,y) + 2t(x,y)) < 1$$

tel que pour tout $x, y\epsilon X$ on a

$$d(Tx,Ty) \leqslant q(x,y)d(x,y) + r(x,y)d(x,Tx) + s(x,y)d(y,Ty) + t(x,y)[d(x,Ty) + d(y,Tx)] \tag{2.5}$$

Exemple 2.3

Soient $(X, |.|)$ *un espace métrique,* $X = [0, 10][R$ *et* T *définie par* $Tx = \frac{3}{4}x$ *pour tout* $x\epsilon X$*. D'apres l'exemple 3.1,* T *n'est pas une application de Kannan . Maintenant on va montrer que* T *satisfait (2.5). Pour tout* $x, y\epsilon X$*, on a*

$$d(Tx,Ty) = |\frac{3}{4}x - \frac{3}{4}y| = \frac{3}{4}d(x,y)$$

$$\frac{3}{4}d(x,y) + rd(x,Tx) + sd(y,Ty) + t[d(x,Ty) + d(y,Tx)]$$

avec $\frac{3}{4} + s + r + 2t < 1 \Rightarrow s + r + 2t < \frac{1}{4}$

En posant $r = s = t$*, alors* $4t < \frac{1}{4} \Rightarrow t < \frac{1}{16} \Rightarrow t = \frac{1}{20}$

D'où T *satisfait (2.5) sur* X *avec* $q = \frac{3}{4}, r = s = t = \frac{1}{20}$*, pour tout* $x, y\epsilon X$

Exemple 2.4

Soient $(X, |.|)$ *un espace métrique,* $X = [0.2] \subset R$*, et* T *définie par*

$$Tx = \begin{cases} \frac{x}{9} & x\epsilon X_1 = [0,1] \\ \frac{x}{10} & x\epsilon X_2 =]1,2] \end{cases}$$

L'application T *n'est pas contractante sur* X*, par exemple si* $x = \frac{999}{1000}, y = \frac{1001}{1000}$*,alors*

$$d(Tx,Ty) = \frac{981}{90000} > 5.\frac{180}{90000} = 5d(x,y)$$

puisque T *satisfait (2.1)(d'apres l'exemple 2.1), alors* T *satisfait (2.5) avec* $q = \frac{1}{10}, r = s =$

$\frac{1}{4}, t = \frac{1}{6}$, *pour tout* $x, y \epsilon X$

Théorème 2.2

([11]) Soit T une contraction généralisée d'un espace métrique complet (X,d) dans lui-meme.Alors :

(i) T admet un point fixe unique $u \epsilon X$

(ii) $lim_{n \to \infty} T^n x = u$

(iii) pour tout $x \epsilon X$ *on a*

$$d(T^n x, u) \leqslant \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x, Tx), \lambda \epsilon [0, 1[$$

preuve

(i) soit x un point arbitraire de X. On définit la suite $\{x_n\}_{n \epsilon N}$ par $x_{n+1} = f x_n$.Puisque T est une contraction généralisée on a

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(Tx_{n-1}, Tx_n)$$

$$\leqslant qd(x_{n-1}, Tx_{n-1}) + rd(x_{n-1}, Tx_{n-1}) + sd(x_n, Tx_n) + t[d(x_{n-1}, Tx_n) + d(x_n, Tx_{n-1})]$$

$$= qd(x_{n-1}, x_n) + rd(x_{n-1}, x_n) + sd(x_n, x_{n+1}) + td(x_{n-1}, x_{n+1})$$

D'aprés l'inegalité triangulaire on trouve

$$d(x_n, x_{n+1}) \leqslant (q+r)d(x_{n-1}, x_n) + sd(x_n, x_{n+1}) + t[d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})]$$

Par conséquent

$$d(x_n) \leqslant \frac{q+r+t}{1-s-t} d(x_{n-1}, x_n) = \lambda d(x_{n-1}, x_n) \tag{2.6}$$

puisque $q + s + r + 2t < 1$, alors $\lambda < 1$. Par récurrence, on trouve

$$d(x_n, x_{n+1}) \leqslant \lambda^n d(x_0, x_1)$$

Comme dans la preuve du théoréme de Kannan,$\{x_n\}_{n\epsilon N}$ est une suite de Cauchy et comme (X,d) est cmplet, elle converge vers une limite $u\epsilon X$, c-à-d (ii).Maintenant nous montrons que u est un point fixe de T, c-à-d, $Tu \neq u$.
Si $Tu = u$,supposons $x = u$ et $y = x_n$ dans (2.5) on obtient

$$d(Tu, Tx_n) \leqslant qd(u, x_n)+r[d(u, x_{n+1})+d(x_{n+1}, Tu)]+sd(x_n, x_{n+1})+t[d(u, Tx_n)+d(x_n, Tu)]$$

Lorsque $n \to \infty$ on obtien

$$d(Tu, u) \leqslant (r + t)d(Tu, u) < d(Tu, u)$$

qui est contradiction et d'où $Tu = u$.
Montrons enfin que u est unique. Supposons que v est un autre point fixe de T. Alors d'aprés la condition (2.5),on trouve

$$d(u, v) = d(Tu, Tv)$$

$$\leqslant qd(u, v) + rd(u, Tu) + sd(v, Tv) + t[d(u, Tv) + d(v, Tv)]$$

$$= (q + 2t)d(u, v) < d(u, v)$$

or ceci est absurde. Enfin,(iii) suite comme dans la preuve du théoréme de Kannan.

Théorème 2.3
Soient (X,d) un espace métrique complet et $T : X \to X$ *une application satisfait la condition suivante :pour tout* $x, y\epsilon X$, *on a*

$$d(Tx, Ty) \leqslant qmax\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), \frac{d(x, Ty) + d(y, Tx)}{2}\}, 0 < q < 1 \qquad (2.7)$$

Alors T *admet un point fixe unique* $u\epsilon X$

preuveVoir [3].

Quasi-contraction

Soient T une application définie sur un espace métrique (X,d) dans lui meme et $A \subset X$. On note $\delta(A)$ le diamétre de A définie par

$$\delta(A) = sup\{d(a,b) : a, b\epsilon A\}$$

Définition 2.3

Soit $T : X \to X$, un orbit de T à x_0 est une suite définie par $\{x_n : x_n\epsilon Tx_{n-1}, n = 1, 2, ...\}$

$$O(x; n) = \{x, Tx, ..., T^n x\}, n = 1, 2, ...$$

$$O(x, \infty) = \{x, Tx, ..., T^n x, ...\}$$

Définition 2.4

Soit T une application d'un espace métrique (X,d) dans lui-meme. T est dite quasi-contraction s'il existe un nombre réel $q\epsilon[0, 1[$,tel que pur tout $x, y\epsilon X$, on a

$$d(T(x), T(y)) \leqslant qmax\{d(x, y), d(x, T(x)), d(y, T(y), d(x, T(y)), d(y, T(x))\} \tag{2.8}$$

Remarque

Il est clair que (2.1) implique (2.5). L'exemple suivant prouve qu'une quasi-contraction n'a pas une contraction généralisée.

Exemple 2.5

Soient :

$$X_1 = \{\frac{m}{n}, m = 0, 1, 3, 9, ...; n = 1, 4, ..., 3k + 1, ..\}$$

$$X_2 = \{\frac{m}{n}, m = 1, 3, 9, 27, ...; n = 2, 5, ..., 3k + 2, ..\}$$

et $X = X_1 \bigcup X_2$, est un espace métrique muni de la distance usuel, on définie $T : X \to X$, *par :*

$$Tx = \begin{cases} \frac{3x}{5} & x\epsilon X_1 \\ \frac{x}{8} & x\epsilon X_2 \end{cases}$$

L'application T est un quasi-contraction avec $q = \frac{3}{5}$.En effet si x, y dans X_1 ou X_2,alors :

$$d(Tx, Ty) = \begin{cases} |\frac{3x}{5} - \frac{3y}{5}| = \frac{3}{5}|x-y| si & x, y\epsilon X_1 \\ |\frac{x}{8} - \frac{y}{8}| = \frac{1}{8}|x-y| si & x, y\epsilon X_2 \end{cases}$$

Donc,$d(Tx, Ty) \leqslant \frac{3}{5}d(x, y)$ pour tout $x, y\epsilon X$.

Soient maintenant $x\epsilon X_1$ et $x\epsilon X_2$, alors :

si $x > \frac{5}{24}y \implies d(Tx, Ty) = |\frac{3x}{5} - \frac{y}{8}| = \frac{3}{5}|x - \frac{5}{24}y| \leqslant \frac{3}{5}(x - \frac{1}{8}y) = \frac{3}{5}d(x, Ty)$

si $x < \frac{5}{24}y \implies d(Tx, Ty) = |\frac{3x}{5} - \frac{y}{8}| = \frac{3}{5}|\frac{5}{24}y - x| \leqslant \frac{3}{5}(y - x) = \frac{3}{5}d(x, y)$

Par conséquent,T sur X satisfait la condition

$$d(Tx, Ty) \leqslant \frac{3}{5} max\{d(x, y), d(x, Ty), d(y, Tx)\}$$

d'où (2.5).Pour prouver que T n'est pas une contraction généralisée sur X.posons $x = 1$ et $y = \frac{1}{2}$, alors on trouve :

$$qd(x, y) + rd(x, Tx) + sd(y, Ty) + t[d(x, Ty), d(y, Tx)]$$

$$= q\frac{1}{2} + r\frac{2}{5} + s\frac{7}{16} + t\frac{83}{80}$$

$$< (q + r + s + t)\frac{83}{160}$$

$$< \frac{83}{160} < \frac{43}{160} = d(Tx, Ty)$$

puisque $q + r + s + 2t < 1$.Donc la condition de contraction généralisée n'est pas satisfait.

Théorème 2.4

(Ciric 1974 [11]) Soit T une quasi-contraction díun espace métrique complet (X,d) dans

lui-méme. Alors :

(a) T admet un unique point fixe $u \epsilon X$.

(b) $lim_{n\to\infty} T^n(x) = u$.

(c) $d(T^n(x), u) \leqslant (\frac{q^n}{1-q}) d(x, T(x))$ *pour tout* $x \epsilon X$

preuve([12]).

2.2 cas de plusieurs fonctions

Dans cette section nous énonçons et prouvons des théorémes généraux de point fixe commun pour des application satisfaisant quelques conditions et états (généralisés des types quasi-contraction et contraction généralisée,..).

Soient X un espace métrique complet, f une application continue sur X et S une application sur X tels que

$$S(X) \subset T(X) \tag{2.9}$$

Nous définissons une suite des points $\{x_n\}$ comme suite :

pour $x_0 \epsilon X$ arbitraire, comme $S(X) \subset T(X)$ nous pouvons choisir un point x_1 dans X tel que $S(x_0) = T(x_1)$. En général pour le point $x_n \epsilon X$ nous pouvons prendre le point $x_{n+1} \epsilon X$, tel que $S(x_n) = T(x_{n+1})$.Posons que

$$S(x_n) = T(x_{n+1}) = y_n (n = 0, 1, 2, ...) \tag{2.10}$$

Notons par $O(y_k; n)$ l'ensemble des points $\{y_k, y_{k+1}, ..., y_{k+n}\}$.

Maintenant on suppose que T et S satisfont la condition suivante :

il existe une constante $q \epsilon (0, 1)$ tel que pour chaque $x, y \epsilon X$:

$$d(S(x), S(y)) \leqslant qmax\{d(T(x), T(y)), d(T(x), S(x)), d(T(y), S(y)), d(T(x), S(y)), d(T(y), S(x)) \tag{2.11}$$

lemme

pour tout $k \geq 0$ et $n\epsilon N$, supposons $\delta[O(y_k;n)] \geq 0$, alors

$$\delta(y_k;n)] = d(y_k, y_j)$$

tel que $k < j \leqslant k+n$. En autre :

$$\delta[O(y_k;n)] \leqslant q\delta[O(y_{k-1};n+1)], (k \leqslant 1) \tag{2.12}$$

lemme

Sous les hypothéses du lemme précédent :

$$\delta[O(y_k;n)] \leqslant \frac{q^k}{1-q} d(y_0, y_1) \tag{2.13}$$

Théorème 2.5

Soient (X,d) un espace métrique complet, Si $T : X \to X$ deux applications faiblement compatibles satisfaisant les conditions (2.12) et (2.13) alors S et T admettent un point fixe commun unique dans X

preuve

On remarque d'abord qu'il est suffisant de prenant un point y tel que $T(y) = S(y)$,alors :
$d(S(Sy), S(y)) \leqslant qmax\{d(T(Sy), Ty)), d(T(Sy), S(Sy)), d(T(y), S(y)), d(T(Sy), S(y)), d(Ty, S(Sy))\}$
$= qd(S(Sy), Sy)$.

Par conséquent Sy est un point fixe de S. Comme S et T sont faiblement compatibles, on obtient :

$$T(Sy) = S(Ty) = S(Sy) = S(y)$$

Donc Sy est un point fixe de T.D'aprés (2,9),on définit la suite des points $\{x_n\}_n$ par (2.10).Si $\delta[O(y_k,n)] = 0$ pour un certains n et k , alors $y_k = y_{k+1}$.C-à-d, $T(x_{k+1}) = S(x_{k+1})$. Autrement, si $\delta[O(y_k, n)] > 0$ d'aprés (2.13)et pour $\epsilon > 0$,on peut prendre $n_0 \epsilon N$ tel que :

$$q^{n_0} d(y_0, y_1) < (1-q)\epsilon$$

Avec $m > n > n_0$

$$d(y_m, y_n) \leqslant \delta[O(y_{n0}, m - n_0)] < \epsilon$$

Ce qui montre que $\{y_n\}$ est une suite de Cauchy et comme X est complet, elle converge vers une limite $y \epsilon X$, C-à-d :

$$lim_{n\to\infty} y_n = lim_{n\to\infty} S(x_n) = lim_{n\to\infty} f(x_{n+1}) = y \tag{2.14}$$

comme $S(X) \subseteq f(X)$,il existe un point $u \epsilon X$ tel que $y = T(u)$.D'aprés (2.11) on obtient :

$$d(S(u), y) \leqslant d(S(u), S(x_{n+1})) + d(S(x_{n+1}), y)$$

$$\leqslant qmax\{d(T(u), T(x_{n+1})), d(T(x_{n+1}), S(x_n)), d(T(u), S(u)), d(T(x_{n+1}, S(u)), d(T(u), S(x_{n+1}))\} + d(S(x_{n+1}$$

Quand $n \to \infty$ nous avons :

$$d(S(u), y) \leqslant qd(S(u), y)$$

D'où $T(u) = S(u) = y$. Comme S et T sont faiblement compatibles, on obtient

$$T(Su) = S(Ty) = S(Su) = S(u) = y$$

Donc Su est un point fixe commun de S et T.

L'unicité du point fixe commun est immédiate de (2.11).supposons que l'on a deux points fixesy, y^* différents tels que :

$$d(S(y), S(y^*)) \leqslant qmax\{d(T(y), T(y^*)), d(T(y), S(y)), d(T(y^*), S(y^*)), d(T(y), S(y^*)), d(T(y^*), S(y))\}$$

$$= qd(T(y), T(y^*)) = qd(S(y), S(y^*))$$

ce qui implique

$$(1-q)d(S(y), S(y^*)) \leqslant 0$$

ce qui est une contradiction.Donc $y = y^*$

Chapitre 3

Théorèmes du point fixe commun dans les espaces quasi-métriques

Dans ce chapitre, nous présentons la notion d'espaces quasi-métriques. Nous commençons aux début par quelques définitions concernant ces espaces, par la suite nous introduisons d'autre concept comme le point fixe, point fixe commun dans cet espaces...etc.

3.1 Quasi-métrique

Définition 3.1

([21]) Soit X un ensemble non vide. On appelle une quasi métrique sur X toute application $d : X * X \to [0.\infty)$ *satisfaisant les propriétés suivants :*

$(d_1) : d(x, y) = 0$ *si et seulement si* $x = y$ *pour tout* $x, y \epsilon X$

$(d_2) : d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *pour tout* $x, y \epsilon X$

Remarque 3.1

IL est clair que tout espace métrique est un espace quasi-métrique mais le contraire n'est pas nécessairement vrai.

.

Exemple 3.1

([18]) soit $X = \mathbb{N} \cup 0$ *et on définie la fonction* d *sur* X *comme suit :*

$d(0,n) = \frac{1}{n}$ *Pour tout* $n \epsilon N$

$d(n,x) = n$ *pour tout* $n \epsilon N$ *avec* $n \neq x$

$d(x,x) = 0$ *pour tout* $x \epsilon X$

Alors (X,d) n'est pas espace métrique parce que $d(0,2) = \frac{1}{2} \neq d(2,0) = 2$ *mais il est espace quasi-métrique. Il est clair que le premier condition est satisfaite. Donc on va vérifier l'inégalité triangulaire* $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$ *Note que , si x=z ou z=y alors l'inégalité teint. Supposons que* $x \neq y \neq z$ *Si x=0 Alors* $y \neq 0$ *donc* $d(0,y) = \frac{1}{y}$

$$d(0,z) + d(z,y) = \frac{1}{z} + z \geqslant \frac{1}{y} = d(0,y)$$

Aussi, Si $x \neq 0$ *alors*

$$d(x,z) + d(z,y) = x + d(z,y) \geqslant x = d(x,y)$$

une quasi métrique d induit une métrique comme suit :

$$d_n(x,y) = max\{d(x,y), d(y,x)\}$$

M. Jleli et B. Samet [14] définissent la convergence et la complétude dans un quasi métrique espace comme suit :

Définition 3.2

([14]) Soit (X,d) un espace quasi- métrique. x_n *une suite dans X, et* $x \in X$ *. La suite* x_n *Converge vers x si et seulement si*

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,x) = \lim_{n\to\infty} d(x,x_n) = 0$$

. .

Définition 3.3

([14]) Soit (X,d) un espace quasi-métrique, (x_n) *une suit dans X. On dit que* (x_n) *est Cauchy-Gauche si et seulement si pour tout* $\epsilon > 0$ *, Il existe un entier positif* $N = N(\epsilon)$ *tel que* $d(x_n, x_n) < \epsilon$ *pour tout* $n \geqslant m > N$

Définition 3.4

([14]) Soit (X,d) un espace quasi-métrique, (x_n) *une suit dans X. On dit que* (x_n) *est Cauchy-Droite si et seulement si pour tout* $\epsilon > 0$ *, Il existe un entier positif* $N = N(\epsilon)$ *tel que.* $d(x_n, x_m) < \epsilon$ *pour tout* $m \geqslant n > N$

Définition 3.5

([14]) On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in N}$ *d'un espace métrique (X,d) est de Cauchy .si pour tout* $\epsilon > 0$ *il existe* $N_\epsilon \in N$ *tel que pour tous* $m, n \geqslant N_\epsilon$ *on a* $d(x_m, x_n) \leqslant \epsilon$ *, C'est à dire dans R, on a* $\lim_{n,m\to\infty} d(x_m, x_n) = 0$

Remarque 3.2

une suite (x_n) *dans un espace quasi-métrique est de Cauchy Si et seulement si elle est Cauchy-Droite et Cauchy-Gauche.*

Définition 3.6

Soit (X,d) un espace quasi-métrique. On dit que

(1) : (X,d) est Complet-Gauche si et seulement si chaque suite de Cauchy-Gauche dans X est convergente.

(2) : (X,d) est Complet-Droite si et seulement si chaque suite de Cauchy-Droite dans X est convergente.

(3) : (X,d) est Complet si et seulement si chaque suite de Cauchy dans X est convergente.

Définition 3.7

Soit f et g deux applications d'un ensemble non vide X. Si W=fx=gx alors x est point de coïncidence de f et g.

Définition 3.8

([6]) Soit f et g deux applications d'un ensemble non vide X. Si f et g commutent aux point Coïncidence alors on dit que sont application faiblement compatibles.

Exemple 3.2

Soit X=[0,2] muni de la métrique euclidienne, définissions f et g par :

f(x) =

$$\begin{cases} 2-x \ si \ 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \ si \ x > 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{2} \ si \ 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2} \ si \ 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \tag{3.1}$$

Si x=1 alors f(1) = g(1) = 1 et f(g(1)) = g (f(1)) = 1 donc x= 1 est un point de coïncidence de f et g. Alors f,g sont application faiblement compatibles.

Lemme 3.1([13])

Soit f et g application faiblement compatibles dans un ensemble non-vide X. si f et g avoir un unique point de coïncidence w= fx= gx, Alors w est un point fixe commun de f et g

3.1.1 Relation implicite

Définition 3.9

([20]) Considérons Γ_o *l'ensemble des fonctions continues* $F(t_1, ...t_t) : R_+^6 \to R$ *telque :*

(A_1) : ***F*** *est décroissante aux variables* t_5

(A_2) : *Il existé un certain fonction* h_1 *tel que pour tout* $u, v \geqslant 0$ *avec*

$$F(u, v, v, u, u+v, 0) \leqslant 0 \text{ implique } u \leqslant h_1(v)$$

(A_3) : *Il existé un certain fonction* h_2 *tel que pour tout t,s > 0 avec*

$$F(t, t, 0, 0, t, s) \leqslant 0 \text{ implique } t \leqslant h_2(s)$$

Nous désignons Ψ *l'ensemble des fonctions* $\Psi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)]$ *satisfaisant :*

$(\Psi_1) : \Psi$ *est croissante.*

$(\Psi_2) : \sum_{i=1}^{\infty} \Psi(t) < \infty$ *pour tout* $t \in [0, +\infty)$

.

Définition 3.10

Considérons Γ *l'ensemble des fonctions continues* $f(t_1, ..., t_6) : R_+^6 \rightarrow R$ *tel que :*

(F_1) : ***F*** *est décroissante aux variables* t_5

(F_2) : *Il existe* $h_1 \in \Psi$*tel que pour tout* $u, v \geqslant 0 : F(u, v, v, u, u + v, 0) \leqslant 0$ *implique* $u \leqslant h_1(v)$

(F_3) : *Il existe* $h_2 \in \Psi$ *tel que pour tout* $t, s > 0 : F(t, t, 0, 0, t, s) \leqslant 0$ *implique* $t \leqslant h_2(s)$

Exemple 3.3

$F(t_1, ..., t_6) = t_1 - at_2 - bt_3 - ct_4 - dt_5 - ct_6$ *où* $a, b, c, d, e \geqslant 0$ *,a+b+c+2d+e < 1*

(F_1) : *Évidente*

(F_2) : *soit* $u, v \geqslant 0$ *et* $F(u, v, v, u, u, v, 0) = u - av - bv - cu - d(u + v) \leqslant 0$ *qui implique* $u \leqslant \frac{a+b+d}{1-c-d} v$ *avec* $h_1(t) = \frac{a+b+d}{1-c-d} t$

(F_3) : *Soit* $t, s > o$ *et* $F(t, t, 0, 0, t, s) = t - at - t - es <= o$ *que implique* $t \leqslant \frac{e}{1-a-d} s$ *avec* $h_2(t) = \frac{c}{1-a-d} s$

.

Exemple 3.4

$F(t_1, ..., t_6) = t_1 - kmax\{t_2, ..., t_6\}$ *où* $K \in [0, \frac{1}{2})$

(F_1) : *Evidente*

(F_2) : *Soit* $u, v \geqslant 0$ *et* $F(u, v, v, u, u, v, 0) = u - Kmax\{u, v, u, v\} \leqslant 0$ *que implique* $u \leqslant \frac{k}{1-k}v$ *avec* $h_1(t) = \frac{k}{1-k}t$

(F_3) :*Soit* $t, s > o$ *et* $F(t, t, 0, 0, t, s) = t - Kmax\{t, s\} \leqslant 0$ *Si* $t > s$ *alors* $t(1-k) \leqslant 0$ *une contradiction, Donc si* $t \leqslant s$ *alors* $t \leqslant ks$ *avec* $h_2(s) = KS$.

.

3.2 Théorème de point Fixe

3.2.1 Unicité

Lemme 3.2

Soit (x, d) un espace quasi-métrique et $f, g : (X, d) \to (X, d)$ deux fonctions tel que :

$$F(d(fx, fy), d(gx, gy), d(gx, fx), d(gy, fy), d(gx, fy), d(gy, fx)) \leqslant o \forall x, y \in X \qquad (3.2)$$

et F satisfaisant propreté F_3. Alors f et g avoir au plus un point de coïncidence.

preuve

On supposons que **f** et **g** ont deux points de coïncidence u et v $(u \neq v)$ Dans ce cas, Il existe $p, q \in X$ tel que u=fp = gp et v = fq = gq puis en utilisant (3.2) nous avons

$$F(d(fp.fq), d(gp, gq), d(gp, fp), d(gq, fq), d(gp.fq).d(gq, fp)) \leqslant 0$$

C'est

$$F(d(gp, gq), d(gp, gq), d, 0, d(gp.gq), d(gq, gp)) \leqslant 0$$

Depuis **F** satisfaisant propriété (**F3**) donc

$$d(gp,gq) \leqslant h_2(gq,gp) \tag{3.3}$$

analogue, on obtient

$$d(gq,gp) \leqslant h_2(gp,gq) \tag{3.4}$$

en combinant (3.3) et (3.4) on obtient en utilisant le fait que h_2 est non-décroissant et $h_2(t) < t$ pour t > 0

$$0 < d(gp,gq) \leqslant h_2(d(gq,gp) \leqslant h_2^2(d(gp,gq)) < d(gp,gq) \tag{3.5}$$

C'est un contradiction. Ainsi $gp = gq$ Donc $u = fp = gp = gq = fq = v$

3.2.2 Existence

Théorème 3.1

Soit (X, d) un espace quasi-métrique et $f, g : (X,d) \to (X,d)$ satisfaisant l'inégalité :

$$F(d(fx,fy), d(gx,gy), d(gx,fx), d(gy,fy), d(gx,fy), d(gy,fx)) \leq 0 \tag{3.6}$$

Pour tout $x, y \in X$,oú $F \in \Gamma$ si $f(X) \subseteq g(X)$ et g(X) est un sous espace quasi-métrique complète de (X,d), alors f et g ont un unique point de coïncidence. De plus, Si f et g sont faiblement compatibles. alors f et g ont un unique point fixe commun

Preuve

soit x_0 un point aléatoire de X et en utilisant $f(X) \subseteq g(X)$, nous pouvons choisir $x_1 \in X$ tel que $fx_0 = gx_1$. Si nous continuons comme ça, on trouve x_{n+1} tel que $fx_n = gx_{n+1}$ Alors d'après (3.6) on trouve :

$$F(d(fx_{n-1}, fx_n), d(gx_{n-1}, gx_n), d(gx_{n-1}, fx_{n-1}), d(gx_n, fx_n), d(gx_{n-1}, fx_n), d(gx_n, fx_{n-1})) \leqslant 0$$

C'est

$$F(d(gx_n, gx_{n+1}), d(gx_{n-1}, gx_n), d(gx_{n-1}, gx_n), d(gx_n, gx_{n+1}), (d(gx_{n-1}, gx_{n+1}), 0) \leqslant 0$$

Par (F_1) et (d_2) on trouve :

$$F(d(gx_n, gx_{n+1}), d(gx_{n-1}, gx_n), d(gx_{n-1}, gx_n), d(gx_n, gx_{n+1}), d(gx_{n-1}, gx_n)d(gx_n, gx_{n+1}), 0) \leqslant 0)$$

Par (F2) on trouve :

$$d(gx_n, gx_{n+1}) \leqslant h_1(d(gx_{n-1}, gx_n)$$

si on continue comme ça, on trouve

$$d(gx_n, gx_{n+1}) \leqslant h_1^n(d(gx0, gx1)$$

Ainsi, par(d_2) pour m > n

$$\begin{aligned} d(gx_n, gx_m) &\leqslant d(gx_n, gx_{n+1}) + d(gx_{n+1}, gx_{n+2}) + ... + d(gx_{m-1}, gx_m) \\ &\leqslant (h_1^n + h_1^{n+1} + ... + h_1^{m-1})(d(gx_0, gx_1)) \\ &\leqslant \frac{h_1^n}{1-h_1}(d(gx_0, gx_1) \end{aligned}$$

Ce que implique que $d(gx_n, gx_m) \to 0$ comme n,m $\to \infty$ Il s'ensuit que gx_n une suite de Cauchy-Droite. De la même manière, par (3.6) on trouve

$$F(d(fx_n, fx_{n-1}), d(gx_n, gx_{n-1}), d(fx_{n-1}, gx_{n-1}), d(fx_n, gx_n), d(fx_n, gx_{n-1}), d(fx_{n-1}, gx_n)) \leqslant 0$$

C'est

$$F(d(gx_{n+1}, gx_n), d(gx_n, gx_{n-1}), d(gx_n, gx_{n-1}), d(gx_{n+1}, gx_n), d(gx_{n+1}, gx_{n-1}), 0) \leqslant 0$$

utilisent (F1) et (d2)

$$F(d(gx_{n+1}, gx_n), d(gx_n, gx_{n-1}), d(gx_n, gx_{n-1}), d(gx_{n+1}, gx_n), d(gx_{n+1}, gx_n)+d(gx_n, gx_{n-1}), 0) \leqslant 0$$

Par (F2) on trouve

$$d(gx_{n+1}, gx_n) \leqslant h_1(d(gx_n, gx_{n-1})$$

Si on continuous comme ça, nous obtien

$$d(gx_{n+1}, gx_n) \leqslant h_1^n(d(gx_1, gx_0)$$

Ainsi, on utilisent (d_2) pour n > m

$$\begin{aligned} d(gx_n, gx_m) &\leqslant d(gx_n, gx_{n-1}) + d(gx_{n-1}, gx_{n-2}) + ... + d(gx_{m+1}, gx_m) \\ &\leqslant (h_1^{n-1} + h_1^{n-2} + ... + h_1^m)(d(gx_1, gx_0)) \\ &\leqslant \frac{h_1^m}{1-h_1}(d(gx_1, gx_0)) \end{aligned}$$

Ce que implique $d(gx_n, gx_m) \to o$ comme $n, m \to \infty$. Il s'ensuit que gx_n une suite de Cauchy-Gauche. Ainsi, gx_n est une suit de Cauchy. Depuis $g(X)$ est quasi complet, It existe un point $q = gp$ dans $g(X)$ tel que $gx_n \to q = gp$ comme $n \to \infty$. Nous prouverons que $fp = gp$

Par (3.6) ,on obtient

$$F(d(fx_{n-1}, fp), d(gx_{n-1}, gp), d(gx_{n-1}, fx_{n-1}), d(gp, fp), d(gx_{n-1}, fp), d(gp, fx_{n-1})) \leq 0$$

C'est

$$F(d(gx_n, fp), d(gx_{n-1}, gp), d(gx_{n-1}, gx_n), d(gp, fp), d(gx_{n-1}, fp), d(gp, gx_n)) \leq 0$$

laisse n tendre vers l'infini, on obtient

$F(d(gp, fp), o, o, d(gp, fp), d(gp, fp), o) \leq 0$

Par (F_2), Il s'ensuit que d(gp, pp)=0 que implique gp = fp

Ainsi, w=fp=gp est un point de coïncidence de f et g. par lemme 3.2, w est un unique Point de coïncidence. De plus, depuis f et g sont faiblement compatible, alors par lemme 3.1 W est un unique point fixe commun de f et g.

corollaire

Soit (x, d) un espace quasi- métrique Complet. Supposer que

$F(d(fx, fy), d(x, y), d(x, fx), d(y, fy), d(x, fy), d(y, fx)) \leq 0$ $\forall x, y \epsilon X$ et $F \epsilon \Gamma$

Alors f est un point fixe unique

Preuve

Si nous choisissons g la fonction d'identité. Alors par la théorème 3-1, c'est facile que f a un unique point fixe.

Corollaire ([11])

Soit (X, d) un espace quasi- métrique et f,g :$(X, d) \to (X, d)$ satisfaisant :

$d(fx, fy) \leq K \max\{d(gx, gy), d(gx, fx), d(gy, fy), d(gx, fy), d(gy, fx)\}$

Pour tout $x, y \epsilon X$,où $K \epsilon [0.\frac{1}{2})$. Si $f(X) \subseteq g(X)$ et $g(X)$ sous-espace quasi-métrique Complete de (X, d), Alors f et g a un unique point de coincidence. De plus, Si f et g sont faiblement compatible. Alors f et g a un unique point fixe commun.

Preuve

il suffit de prendre F comme l'exemple 3.4, Ce que $F(t_1...t_6) = t_1 - K \max\{t_2....t_6\}$ ou $K \epsilon [0.\frac{1}{2})$. Alors, on applique le théorème 3.1

3.3 Problème de point fixe bien posé pour deux applications dans des espaces quasi-métriques

Définition 3.11

Soit (X, d) *un espace quasi-métrique et* $f(X) : (X, d) \to (X, d)$ *un application donné. Le problème de point fixe f est dit bien posé si :*

(1) : f a un point fixe unique $x_0 \epsilon X$.

(2) : Pour tout suit $\{x_n\} \subseteq X$ *avec* $\lim_{n\to\infty} d(x_n, fx_n) = \lim_{n\to\infty} d(fx_n, x_n) = 0$

alors nous avons $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_0) = \lim_{n\to\infty} d(x_0, x_n) = 0$

Définition 3.12

Soit (X,d) un espace quasi- métrique et $f, g : (X, d) \to (X, d)$ *Le problème de point fixe commun de f et g est dit bien posé si :*

(1) : f et g ont un point fixe commun unique.

(2) : Pour tout suit $\{x_n\} \subseteq X$ *avec :*

$lim_{n\to\infty} d(x_n, fx_n) = lim_{n\to\infty} d(fx_n, x_n) = 0$ *et*

$lim_{n\to\infty}(x_n.gx_n.) = lim_{n\to\infty} d(gx_n, x_n) = 0$ *Alors*

$lim_{n\to\infty}(x_n, x) = lim_{n\to\infty}(x, x_n) = 0.$

Définition 3.13

Une fonction F :$(R^6_+ \in R)$ *a la propriété* (F_p) *Si pour* $u, v, w \geqslant 0$ *et* $F(u, v, o, w, u, v) \leqslant 0$ *il existe* $p \in (0, 1)$ *tel que* $u \leqslant pmax\{v, w\}$

Théorème 3.2

Soit (X,d) un espace quasi-métrique. Suppose que $f, g : (X, d) \to (X, d)$ *satisfaisant les hypothèses de théorème 3-1 et F a propriétés (Fp). Donc, le problème de point fixe commun de f et g est bien posé.*

Preuve

Par la théorème 3-1 .f et$g$ a un point fixe commun unique x. Soit$\{x_n\}$ un suit de (X, d) tel que

$\lim_{n\to\infty} d(x_n, fx_n) = \lim_{n\to\infty} d(fx_n, x_n) = 0$ et

$\lim_{n\to\infty} d(x_n, gx_n) = \lim_{n\to\infty} d(gx_n, x_n) = 0$

Par (3.6) on obtient

$$F(d(fx, fx_n), d(gx, gx_n), d(gx, fx), d(gx_n, fx_n), d(gx, fx_n), d(fx, gx_n)) \leqslant 0$$

C'est

$$F(d(x, fx_n), d(x, gx_n), 0, d(gx_n, fx_n), d(x.fx_n), d(x, gx_n)) \leqslant 0$$

utilisent la propriété (F_p) on obtient

$$d(x, fx_n) \leqslant pmax\{d(x, gx_n), d(gx_n, fx_n)\} \leqslant P(d(x, gx_n) + d(gx_n, fx_n))$$

Alors, par(d_2) on a

$$d(x, x_n) \leqslant d(x, fx_n) + d(fx_n, x_n)$$

$$\leqslant p(d(x, gx_n) + d(gx_n, fx_n)) + d(fx_n, x_n)$$

.

$$\leqslant p(d(x, x_n) + d(x_n, gx_n) + d(gx_n, x_n) + d(x_n, fx_n)) + d(fx_n.x_n)$$

$$\leqslant \frac{p}{1-p}(d(x_n, gx_n) + d(gx_n, x_n) + d(x_n, fx_n)) + \frac{1}{1-p}d(fx_n.x_n)$$

prenant $n \to \lim$,on obtenir $\lim_{n\to\infty} d(x, x_n) = 0$

De la même manière, par (3.6)

$$F(d(fx_nfx), d(gx_n, gx), d(fx.gx), d(fx_n, gx_n), d(fx_n, gx), d(gx_n, fx)) \leqslant 0$$

C'est

$$F(d(fx_n, x), d(gx_n, x), 0, d(fx_n, gx_n), d(fx_n, x), d(gx_n, x)) \leqslant 0$$

utilisant (F_p) propriété on obtenir

$$d(fx_x, x) \leqslant pmax\{d(gx_n, x), d(fx_n, gx_n)\}$$

$$\leqslant p(d(gx_n, x) + d(fx_n, gx_n)$$

Alors, par (d_2) on obtenir

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, fx_n) + d(fx_n, x)$$

$$\leq d(x_n, fx_n) + p(d(gx_n, x) + d(fx_n, gx_n))$$

$$\leq d(x_n, fx_n) + p(d(gx_n, x_n) + d(x_n, x) + d(fx_n, x_n) + d(x_n, gx_n))$$

$$\leq \frac{1}{1-p}d(x_n, fx_n) + \frac{p}{1-p}(d(gx_n, x_n) + d(fx_n, x_n) + d(x_n, gx_n))$$

Prenant $n \to \infty$, on obtenir $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$

Donc, la preuve complet, le problème de point fixe commun de f et g est bien posé

Conclusion

Dans ce travail on s'intéresse aux théorème de point fixe commun dans l'espace quasi-métrique avec différentes conditions et propriétés pour éclairer le concept de point fixe avec un ou plusieurs applications et ensuite pour établir l'existence et l'unicité de point fixe commun. Où, après d'analyse profonde dans l'espace quasi-métrique,on a pu parvenir à ces résultats :

1. Obtenir des théorèmes de point fixe pour des applications de contraction dans l'espace quasi-métrique complet.
2. Obtenir des théorèmes de point fixe commun utilisant la contraction rationnelle dans l'esapce quasi-métrique complet et application au système d'équations linéaires et aussi d'équations intégrales.
3. Obtenir des théorèmes de point fixe commun pour deux applications faiblement compatibles dans l'esapce quasi-métrique complet

On signale que beaucoup de problèmes intéressants pour mieux enrichir cette étude restent ouverts, on cite ici quelques uns : Théorèmes du point fixe commun pour des applications faiblement compatibles dans l'esapce quasi-métrique complet avec les différents conditions contractives. 43

Bibliographie

[1] A. Branciari,**A fixed point theorem of Banach-Caccioppoli type on a class of generalized metric spaces**, Publ.Math. Debrecen, 57 (2000) ; 31-37.1,2.7

[2] A. Umit, E. Karapinar, I. M. Erhan, **Meir-Keeler type contractions on modular metric spaces**, Filmat 32 : 10 (2018), 3697 3707:

[3] B. E. Rhoades,**A Comparison of various defnitions of contractive mappings** , Amer. Math.Soc. 224, (1977), 257-289.

[4] D. R. Smart, **"Fixed Point Theorems"**, Cambridge Univ. Press 1973.

[5] F.Abbas,**Étude de Quelques Théorèmes du point fixe et leurs applications**, Mémoire de Master Académique en Mathématiques, Univ. Saïda,2015.

[6] G. Jungck and B. E. Rhoades,**Fixed point for set valued functions without continuity**, Indian J. Pure Appl. Math., 29 (3) (1998) ; 227 238

[7] G. Jungck,,**Commuting Mappings and Fixed Point**, American Mathematical Monthly, Vol. 83,pp. 261-363, 1976.

[8] G. Jungck, **Common fixed Point for Non-Continuous Non-Self Mappings on NonMetric Spaces**, Far East Journal Mathematical Sciences, Vol. 4,No. 2,pp.199-215,1996.

[9] J. Caristi,**Fixed p oint theorems for mappings satisfying inwardness conditions**, Trans. Amer.Math. So c., 215 (1976), 241- 251.

[10] Jong Soo Jung,**Convergence of Iterative Algorithms for Continuous Pseudo-contractive Mappings**, University of Nis, Serbia, Vol. 7, 2016, 1767-1777.

[11] L.B. C´iric´,**A generalization of Banach's contraction principle**, Proc. Am. Math. Soc. 45 (2) (1974) 267–273.

[12] Lj. B. Ciric,**Generalized contractions and fixed-point theorem** , Publ. Inst. Math., 12 (26) (1971), 19-26.

[13] M.Abbas, B .E. Rhoades,**Common fixed point results for noncommuting mappings without continuity in generalized metric spaces**, Appl.Math.Comput.215 (2009) 262-269.

[14] M. Jleli, and B. Samet,**Remarks on G-metric spaces and fixed point theorems**. Fixed Point Theory Appl. 2012, Article ID 210 (2012)

[15] R. Kannan,**Some results on fixed-point II** , Amer. Math. Monthly, 76 (1969), 405-408.

[16] R. Kannan,**Some results on fixed points**, Bull. Calcutta Math. So c., 60 (1968), 71-76.

[17] S. Banach,**Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur application aux Èquations intégrales**. Fund. Math. 3 (1922). 133 -181 (french) .

[18] V. Gregoria and S. Romaguerab,**Fixed point theorems for fuzzy mappings in quasimetric spaces**,Fuzzy Sets and Systems 115 477–483, (2000).

[19] V. Pata,**A fixed point theorem in metric spaces**,Fixed Point Theory Appl., 10 (2011) ;299-305.1, 2.1, 4.

[20] V.Popa,A.M.Patriciu,**A general fixed point theorem for pairs of weakly compatible mappings in G-metric spaces**,J.Nonlinear Sci.Appl.5 (2012) 151-160.

[21] Wilson, W.A.**On quasi metric spaces**. Am. J. Math. 1931, 53, 675–684. [CrossRef]

Résumé

Résumé L'objectif de notre travail et de trouver des points fixe commun pour une suites des fonctions satisfait certaines conditions dans les espaces quasi métriques . On a présenté quelques résultats de la théorie du point fixe de Banach pour les fonctions contractantes défnies sur les espaces métriques, les espaces quasi métriques, et on a terminé par des généralisations sur l'existence d'un point fixe commun d'une suite des fonctions sur l'espaces quasi métrique .

Mots clés : espace quasi-métrique,point fixe , application contractive

---

Abstract The objective of our work is to find fixed points for a sequence of functions satisfies certain conditions in quasi-metric spaces. We presented some results of Banach fixed point theory for contracting functions defined on metric spaces, quasi-metric spaces, and we ended with generalizations on the existence of a common fixed point of a sequence of functions on the quasi-metric space.

Keywords : quasi-metric space, fixed point, contractive mappings.

ملخص

الهدف من عملنا هو إيجاد نقاط ثابتة لسلسلة من الوظائف في شروط معينة في المساحات شبه المترية. قدمنا بعض نتائج نظرية النقطة الثابتة لبناخ للدوال التعاقدية المحددة على المساحات المترية ، والمسافات شبه المترية ، وانتهينا بالتعميمات حول وجود نقطة ثابتة مشتركة لسلسلة من الوظائف في الفضاء شبه المتري

كلمات مفتاحية : الفضاء شبه متري، النقطة الثابتة، التعيينات الانقباضية