REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DE OUARGLA
FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET SCIENCES DE LA NATURE ET DE LA VIE
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N° d'ordre :
Série :

Mémoire
Présenté pour obtenir le diplôme de
Master En Sciences
OPTION
Physique Rayonnement
Par
HAYAT Bachi

THEME

Particule Relativiste Sans Spin Dans L'espace Non-Commutatif Avec Potentiel Dépendant De L'énergie

Soutenu le : 26/05/2015

Président:	T. Chohra	M.C.A.	Univ. Ouargla
Rapporteur:	H. Benzair	M.C.A.	Univ. Ouargla
Examinateur:	M.A. Benbitour	M.C.A.	Univ. Ouargla

Table des matières

Dédicace

Je veux dédier mon travail a mes cher parents et toute ma famille.

HAYAT

Remerciements

Nous remercions le bon dieu qui nous a donné la force le courage et la volonté pour accomplir notre travail.

Nous adressons nos plus sincères remerciments à notre encadreur Mlle HADJIRA BENZAIR et tous les enseignants du département de physique et Mlle Hadda Goussa .

Nous tenons aussi à remercier personnellement mon frére l'ingénieur Bachi kouider et sa famme Halima et ma soeur Kheira pour ses aides pertinents dans la préparation de ce mémoire.

Enfin, nous remerciemente à tous ceux et toutes celles qu'ont participé de prés ou de boin à la réalisation de ce modeste travail.

Hayat Bachi

Résumé

Nous allons présenter dans ce mémoire, les définitions nécessaires de la structure algébrique de l'espace non commutative. Puis, selon l'équation de continuité on peut vérifier et solutionner exactement le problème de normalisation de la fonction d'onde au travers de l'équation de continuité. Après, nous allons essayer d'étudier explicitement un exemple simple; c'est la particule de Klein-Gordon soumise dans un champs magnétique constant et dépendant de l'énergie perpendiculaire au plan non-commutatif avec deux approches méthode direct et méthode de Feynman.

Mots-clés : Particule de Klein-Gordon, La géométrie Non-commutative, Formalisme de l'intégrale de chemin, Propagateur relative.

Summary

We will present in this project the required définitions of algebric structure in the non-commutative space.

Than,according to the équation of continuity,we can verify and solve the probleme of normalization of the wave fonction through the équation of continuity.

After,we will try to study explicitly a simple example,il is the Klein -Gordon particle subjected in a constant magnetic field,and depending on perpendiculer energy to a non-commtative plan

using two méthods,directe méthode and Feynman méthode.

Key words: Klein-Gordon particle,The non-commutative geometry,Formalization the path integral ,Relativistic propagator.

[redacted]

[redacted] .

[redacted] .

[redacted] - [redacted] - [redacted] - [redacted]

[redacted] : [redacted]

1

Introduction générale:

Pendant longtemps, et comme il est bien connu la physique générale est un outil fondamental afin de comprendre le monde dans ses macros et micros-dimensions. Pour macro-dimension, on a les planètes, les étoiles, les galaxies et les amas de galaxies voire même ce qui est en extra-univers, elle explique la force de gravité dans le macro-monde. Elle utilise principalement la géométrie Riemannienne comme formalisme mathématique. Mais par contre exemple (le micro-dimension), les atomes voire même les infimes composants de cette dernière, tels que les électrons et les quarks; et elle explique les trois forces principales dans le micro-monde. (Les forces faibles, électromagnétiques, et fortes). Qui sont régies par une nouvelle mécanique a pu de trouver les meilleures solutions, comme; Planck, de-Broglie, Niels-Bor, Einstein, Schrödinger et Heisenberg, ... etc. Cette mécanique dite mécanique quantique, elle utilise la théorie des algèbres d'opérateur agissant sur un espace de Hilbert (les algèbres de Von Neumann).

Récemment, la géométrie non-commutative (GNC) a reçu un accueil chaleureux de la part des chercheurs dans le domaine de physique et mathématique. Ses racines se trouvent dans la mécanique quantique, décrivant des échantillons microscopiques des lois de la nature. La mécanique quantique a également motivé dans la première moitié du XXe siècle un développement important dans la théorie des algèbres d'opérateurs, comme l'étude de C^*-algèbre et l'algèbres de Von Neumann. Nous savons que de la mécanique classique à la mécanique quantique, algèbre commutative des fonctions sur l'espace des phases se change à une algèbre d'opérateur non-commutative sur un espace de Hilbert. Une procédure similaire pouvait être réalisée en géométrie, où les notions classiques perdent leur applicabilité et leur pertinence et pouvait aussi être remplacée par une nouvelle idée de l'espace, représentée par les algèbres non-commutatives [1].

En même temps, l'approche de Feynman est d'un intérêt particulier dans ce contexte, plusieurs formulations ont été présentés, par exemple, nous trouvons une version de l'action Berezin–Marinov [2]. D'autre part, la difficulté de l'espace des phases non-commutative peut être éviter en travaillant soit dans la base de l'espace des phases mixtes $\{|q_1, p_2\rangle\}$, ou encore dans d'autre base de l'espace de phase mixte $\{|q_2, p_1\rangle\}$ [3]. En outre, les auteurs [4, 5] ont formulé les intégrales du chemin de Feynman sur un plan non-commutatif en utilisant des états cohérents, une formulation qui a conduit à des résultats différents à ceux des traitements mentionnés ci-dessous.

Ici, nous avons l'objectif de développer le travail [6], pour étudier en détail la dynamique d'un système relativiste de la particule de Klein-Gordon soumis à un champs magnétique constant $\mathcal{B}$ dépendants de l'énergie et perpendiculaire au plan non-commutatif $(\tilde{x}, \tilde{y})$. Ainsi nous allons apporter une clarification au problème de la constante de normalisation des fonctions d'onde relatives à l'équation de Klein-Gordon, suivant deux approches; méthode différentiel et le formalisme d'intégrale de chemins [7, 8].

Concernant le paragraphe précédent, plusieurs applications ont été étudiées les équations d'onde avec les potentiels dépendants de l'énergie de la mécanique quantique non-relativiste et relativiste, on peut citer par exemple dans le cas non-relativiste: l'équation de Schrödinger avec les dimensions 1D, 3D et D [10, 11, 12], le problème à plusieurs corps avec des potentiels dépendants de confinement de l'énergie [13], la transformation de Darboux utilisée dans l'équation de Schrödinger avec un potentiel dépendant de l'énergie [14]. En plus l'extension relativiste de ce problème a limité certaines tentatives, parmi eux nous citons: la méthode Nikiforov-Uvarov [15] et par la méthode d'intégrale de chemin [9].

Ce mémoire se compose essentiellement de trois chapitres:

Dans le premier chapitre, on exposera quelques définitions nécessaire comme un bref rappel sur la mécanique classique et quantique ordinaire ainsi sa généralisation de la géométrie non-commutative. Et à la fin de ce chapitre nous allons traiter le système de particule de Klein-Gordon soumis d'un champs magnétique constant.

Dans le 2ème chapitre, nous allons suggérer de traiter le problème de l'équation de K-G à deux dimensions dans la représentation des position en présence de cette gémotrie NC, et ce via la fonction de Green qui nous permet d'avoir toutes les informations concernant ce système.

Dans le 3ème chapitre, nous allons solutionner le problème de la normalisation des fonctions d'onde, lorsque les interactions décrites par les potentiels dépendants de E sont présentes dans l'équation de Klein-Gordon par l'équation de continuité encore avec les mêmes étapes du deuxième chapitre nous allons solutionner le problème de normalisation de la fonction d'onde directement par le formalisme des intégrales de chemins.

2

Géométrie Non-commutative

2.1 Introduction

La représentation de l'espace non-commutatif, pouvait être réalisé par les opérateurs de coordonnées $\tilde{x}^\mu, \mu = 0, 1, 2$, satisfaisant les relations de commutation (nous adoptons les unités naturelles $\hbar = c = 1$):

$$[\tilde{x}^\mu, \tilde{x}^\nu] = i\theta^{\mu\nu}, \tag{2.1.1}$$

où $\theta^{\mu\nu}$ est une matrice anti-symétrique à (2+1)-dimensionnelle avec les éléments constants, où la matrice anti-symétrique peut-être tout simplement choisie comme $\theta^{\mu\nu} = \theta\epsilon^{\mu\nu}$ et $\theta^{\mu 0} = \theta^{0\mu} = 0$, où $\epsilon^{\mu\nu}$ est le symbole de Levi-Civita et θ est un paramètre qui mesure la non-commutativité sur l'espace de coordonné, (voir, par exemple, la référence de la base de la géométrie non-commutative [16]). Le résultat (2.4.13) qui est mentionné dans la dernière section, est un point de passage de l'affaire non-commutative au cas commutatif, (c'est-à-dire, le $*$-produit peut être transformé en un produit ordinaire en décalant $\tilde{x}$ par $x - \frac{\mathcal{P}}{2}$).

L'un des plus grands succès de la géométrie non-commutative a été l'unification des forces de la nature en une seule action gravitationnelle [17]. En outre, la géométrie non-commutative joue un rôle important dans la théorie des cordes et la M-théorie [18]. En addition, les espaces non-commutatifs ont été inclus dans la théorie quantique des champs par un grand nombre de chercheurs scientifiques, voir par exemple [19, 20, 21, 22, 23].

Dans ce chapitre, nous allons rappeler quelques définitions nécessaires de la physique générale comme la mécanique classique et mécanique quantique, puis on va solutionné le problème de la particule relativiste soumis dans un champs magnétique constant dans l'espace non-commutatif suivant l'approche d'équation

2.2 Un bref rappel de la mécanique classique (MC) ordinaire:

La mécanique classique est gouvernée par les *équations de Newton:* Le mouvement d'une particule de masse $m \in \mathbb{R}$ strictement positive dans un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est décrit par le système d'équations différentielles d'ordre 2 suivant:

$$m\frac{d^2x_i}{dt^2} = F_i\left(x_1, ..., x_n\right), \tag{2.2.1}$$

où $x := (x_1, ..., x_n)$ désignent les n coordonnées de la particule et $F = (F_1, ..., F_n) : U \to \mathbb{R}^n$ est une application de classe C^2, le "champ de force". S'il y a plusieurs particules de masses strictement positives $m_1, ..., m_N$ le système (2.2.1) se généralise de façon évidente aux Nn coordonnées, à savoir $(x_{11}, ..., x_{nN})$, où le champ de force est maintenant une application $\mathbb{R}^{Nn} \supset U \to \mathbb{R}^{Nn}$ de classe C^2 où U est un ouvert de $\mathbb{R}^{Nn}$. L'exemple canonique est le système solaire avec 10 particules, à savoir les neuf planètes et le soleil, où U est égal à $\mathbb{R}^{30}$ privé de tous les sous-espaces vectoriels décrivant toutes les situations où deux positions (dans $\mathbb{R}^3$) de deux particules distinctes coincident, et F est le champ de force gravitationnelle de Newton. Ce dernier est un exemple d'un champ conservateur, c'est-à-dire pour lequel il existe une fonction (l'énergie potentielle) $V : U \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que F soit donnée par le gradient de V

$$F_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \text{ quel que soit } 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{2.2.2}$$

L'idée principale de la mécanique Hamiltonienne est la transformation du système d'ordre 2 (2.2.1) à n variables en un système d'ordre 1 à $2n$ variables

$$(q, p) := \left(q^1, ..., q^n, p_1, ..., p_n\right) := \left(x_1, ..., x_n, m\tfrac{dx_1}{dt}, ..., m\tfrac{dx_n}{dt}\right), \tag{2.2.3}$$

en introduisant la fonction de Hamilton (somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle)

$$H\left(q, p\right) := \sum_{i=1}^{n} \tfrac{p_i^2}{2m} + V\left(q\right). \tag{2.2.4}$$

Le système (2.2.1) se reécrit de façon suivante $(1 \leqslant i \leqslant n)$:

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{p_i}{m} = \frac{\partial H}{\partial p_i}\left(q, p\right) =: X_{H_{q^i}}\left(q, p\right). \tag{2.2.5}$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial q^i}\left(q\right) = -\frac{\partial H}{\partial q^i}\left(q, p\right) =: X_{H_{p^i}}\left(q, p\right). \tag{2.2.6}$$

Où $X_H := \left(X_{H_q}, X_{H_p}\right) := \left(X_{H_{q^1}}, ..., X_{H_{q^n}}, X_{H_{p^1}}, ..., X_{H_{p^n}}\right) : U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{2n}$ s'appelle le champ hamiltonien associé à la fonction H. Un tel champ peut être associé à une fonction arbitraire $H : U \to \mathbb{R}$. Il est évident que la fonction hamiltonienne H est une intégrale première du système (2.2.4), c'est-à-dire $H(q(t), p(t)) = H(q(0), p(0))$, ce qui correspond bien à la conservation de l'énergie. On appelle l'espace $\mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}) := \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \ \ \mathcal{C}^\infty\}$ l'ensemble des observables classiques. Les éléments $(q, p) \in U$ s'appellent les états (purs) du système [24].

2.3 Un bref rappel de la mécanique quantique (MQ) ordinaire:

Dans la mécanique quantique, les états et les lois de mouvement est remplacé par des structures plus compliquées, selon la philosophie suivante: d'après de Broglie toute particule (comme, par exemple, un électron) a toujours l'aspect d'une onde, et il associe à son énergie E la formule de Planck $E = \hbar\omega^{(\theta)}$ où $\omega^{(\theta)}$ est la fréquence de l'onde et $\hbar$ la constante de Planck, et à sa quantité de mouvement p le vecteur $\hbar k$ où la longueur du vecteur k est donnée par $2\pi/\lambda$ et λ étant la longueur d'onde. Une particule libre (pour laquelle l'énergie potentielle V s'annule) est décrite par une onde plane

$$(t, q) = \Psi(t, q) = \exp\left(-i\omega^{(\theta)}t + ik.q\right), \tag{2.3.1}$$

où $k.q := \sum_{j=1}^{n} k_j q_j$. La fonction d'onde Ψ est évidemment une solution de l'équation

$$E\Psi = i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\Delta\Psi = \frac{p^2}{2m}\Psi, \tag{2.3.2}$$

où $\Delta := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial q_j^2}$ est l'opérateur de Laplace et $p^2 := p \cdot p$. Schrödinger a généralisé cette équation pour inclure des forces par son équation de Schrödinger

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t}(t, q) = -\frac{1}{2m}\Delta\Psi(t, q) + V(q)\Psi(t, q) =: \left(\hat{H}\Psi\right)(t, q), \tag{2.3.3}$$

où l'opérateur différentiel $\hat{H}$ s'appelle opérateur hamiltonien du système par son analogie évidente avec la fonction hamiltonienne H. Cette description de Schrödinger avait un grand succès pour l'atome d'hydrogène pour lequel $V(q) = -\alpha/|q|$, α étant une constante: l'ensemble des valeurs propres de $\hat{H}$ correspondait exactement au spectre mesuré. Ici $\hat{H}$ est considéré comme un opérateur auto-adjoint, défini sur un domaine dense $D(\hat{H})$ dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H} := L^2(\mathbb{R}^3, d^3q)$. Les (classes des) fonctions d'onde dans $\mathcal{H}$ –à un multiple complexe près– sont interprétées comme des états purs du système quantique, c'est-à-dire elles donnent déjà une description complète du système. Le carré du module de Ψ, $|\Psi|^2$, est considéré comme une distribution de probabilité pour la position au cas où la norme de Ψ vaut 1. Evidemment, la fonction d'onde pour la particule libre ne fait pas partie de $\mathcal{H}$: vue comme distribution tempérée (au sens de Laurent Schwartz) elle s'obtient par approximation avec des éléments de $\mathcal{H}$, le dernier espace étant dense dans l'espace de distributions. En général, comme déjà dans la mécanique classique, on peut considérer d'autres observables quantiques comme par exemple la position

$$Q_k : \Psi \to (q \to q_k \Psi(q)). \tag{2.3.4}$$

Où l'impulsion (qui est proportionelle à la vitesse pour les systèmes non-relativistes)

$$P_l : \Psi \to \tfrac{1}{i}\tfrac{\partial \Psi}{\partial q_l}. \tag{2.3.5}$$

En général tous les opérateurs auto-adjoints A définis sur un domaine de définition $D(A) \subset \mathcal{H}$ dense (pour lesquels on a une bonne définition du spectre). Un espace d'observables mathématiquement plus commode est $B(\mathcal{H})$, l'espace de tous les opérateurs linéaires bornés: $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Heisenberg observa que l'effet de dispersion d'une onde se traduit dans la fameuse relation d'incertitude entre la position et l'impulsion. Il en déduisit que les seules valeurs que l'on puisse mesurer dans une expérience sans aucune déviation sont les valeurs propres (plus général: les valeurs spectrales) de l'opérateur hamiltonien [24].

2.4 L'espace non-commutatif

La mécanique quantique non-commutative est formée de la même manière que la mécanique ordinaire avec des variables dynamiques $\tilde{x}_i$ et $\tilde{p}_j$ représentées par des opérateurs dans un espace de Hilbert et vérifient les relations de commutation suivantes:

$$\left[\widehat{\tilde{x}}_i, \widehat{\tilde{p}}_j\right] = i\delta_{ij}, \quad \left[\widehat{\tilde{x}}_i, \widehat{\tilde{x}}_j\right] = i\theta_{ij}, \quad \left[\widehat{\tilde{p}}_i, \widehat{\tilde{p}}_j\right] = 0, \quad \text{et } i, j = 0, 1, 2, \tag{2.4.1}$$

où $\theta_{ij} = \epsilon_{ijk}\theta^k$ est un paramètre constant qui décrit la non-commutativité de l'espace, il est réel, anti-symétrique et a la dimension (longueur)^2.

La quantification de Weyl [25] consiste à faire une correspondance biunivoque entre l'algèbre des fonctions $f(x)$ définies sur deux dimensions et l'algèbre des opérateurs. On définit le symbole de Weyl par:

$$W(f) = \hat{f} = \tfrac{1}{(2\pi)} \textstyle\int d^2k e^{ik_\nu \tilde{x}^\nu} \tilde{f}(k), \tag{2.4.2}$$

et $\tilde{f}(k)$ est la transformation de Fourier de $f(x)$:

$$\tilde{f}(k) = \tfrac{1}{(2\pi)} \textstyle\int d^2x e^{-ik_\nu x^\nu} f(x). \tag{2.4.3}$$

La multiplication des deux opérateurs $W(f)$ et $W(g)$ obtenue à partir de Eq.(2.4.2) donne un autre opérateur $W(f*g)$:

$$W(f) \bullet W(g) = \hat{f} \bullet \hat{g} = W(f*g), \tag{2.4.4}$$

avec $f*g \in (A,*)$, une fonction classique qui est bien définie, comme indiqué dans le suivant. En substituant Eq.(2.4.2) dans Eq.(2.4.4) nous obtenons:

$$W(f*g) = W(f) \bullet W(g) = \tfrac{1}{(2\pi)^2} \int d^2k d^2p e^{ik_\mu \tilde{x}^\mu} e^{ip_\nu \tilde{x}^\nu} \tilde{f}(k)\tilde{g}(p). \tag{2.4.5}$$

Dans le cas de non-commutativité canonique donnée par Eq.(2.4.1), le produit des deux exponentielles dans la formule ci-dessus donne une exponentielle d'une combinaison linéaire de la $\tilde{x}_\mu$ après l'application de la formule de Baker-Campbell-Hausdorff

$$e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} = e^{\hat{A}+\hat{B}+\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]+\frac{1}{12}\left([\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]]+[[\hat{A},\hat{B}],\hat{B}]+...\right)}, \tag{2.4.6}$$

et considérant la relation commutateur $[[\tilde{x}^\mu, \tilde{x}^\nu], \tilde{x}^\rho] = 0$ permet ainsi tous les termes, y compris plus d'un commutateur de Eq.(2.4.6) disparus:

$$e^{ik_\mu \tilde{x}^\mu} e^{ip_\nu \tilde{x}^\nu} = e^{i(k_\nu+p_\nu)\tilde{x}^\nu - \frac{i}{2} k_\mu p_\nu \theta^{\mu\nu}}. \tag{2.4.7}$$

Nous obtenons $f*g$ en comparant Eq.(2.4.5) avec Eq.(2.4.2) et en remplaçant l'opérateur $\tilde{x}_\mu$ par la coordonnée x_μ:

$$(f*g) = \tfrac{1}{(2\pi)^2} \int d^2k d^2p e^{i(k_\nu+p_\nu)\tilde{x}^\nu - \frac{i}{2} k_\mu p_\nu \theta^{\mu\nu}} \tilde{f}(k)\tilde{g}(p). \tag{2.4.8}$$

Ainsi, le Moyal-Weyl $*$-produit est défini par:

$$f(x) * g(x) = \exp\left[\tfrac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_{x_\mu}\partial_{y_\nu}\right] f(x)g(y)_{|x=y}, \tag{2.4.9}$$

avec ∂_{x_μ} est l'opérateur partiel dérivé. Montrons que le produit star induit par la non-commutativité et est remplacé par le produit d'habitude, plus une correction non locale dans la fonction scalaire $f(x)$.

En effet, il est facile de montrer que:

$$f(x) * g(x) = f(x) . g(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n!} \left(\frac{i}{2}\right)^n \partial_{\mu_1}...\partial_{\mu_n} f(x)\, \theta^{\mu_1\nu_1}...\theta^{\mu_n\nu_n}$$
$$\partial_{\nu_1}...\partial_{\nu_n} g(x). \tag{2.4.10}$$

Maintenant, nous remplaçons ∂_{j_k} par $ip_{j_k} = \frac{\partial}{\partial x^{j_k}}$ et introduire $\mathcal{P}_{i_k} = \theta^{i_k j_k} p_{j_k}$. Nous prenons la transformée de Fourier $f(x)$, alors

$$\partial_{\mu_1}...\partial_{\mu_n} f(x)\, \mathcal{P}_{\mu_1}...\mathcal{P}_{\mu_n} g(x) = i^n \int d^3k e^{ikx} f(k) (k\mathcal{P})^n g(x). \tag{2.4.11}$$

En sommant sur n dans (2.4.10), nous obtenons:

$$f(x) * g(x) = \int d^2k e^{ikx} e^{\frac{i}{2}\mathcal{P}k} f(k)\, g(x)\,. \tag{2.4.12}$$

Maintenant, en utilisant $[p_i, x_j] = -i\delta_{ij}$, nous obtenons:

$$f(x) * g(x) = f\left(x - \tfrac{\mathcal{P}}{2}\right).g(x)\,. \tag{2.4.13}$$

Ce résultat (2.4.13) est un point de passage du cas non-commutatif au cas commutatif, (c'est-à-dire, le $*$-produit peut être transformé en un produit ordinaire en décalant $\tilde{x}$ par $x - \frac{\mathcal{P}}{2}$) qui est appelé Décalage de Bopp [26].

2.5 Méthode d'équation

Considerons une particule sans spin et relativiste dans un espace à deux démensions, mais non-commutatives, soumis à un champs magnétique perpendiculeur aux plan (x, y).

Dans ce cas l'équation de Klein-Gordon dans un champs magnétique constant (où le vecteur poteniel est: $\vec{A}(\hat{x}_i) = (-By/2, Bx/2, 0)$ s'écrit par:

$$\left(\left(\overrightarrow{\hat{p}} - e\vec{A}(\hat{x}_i)\right)^2 + m^2\right) \star \Phi(x) = E^2\Phi(x_i)\,. \tag{2.5.1}$$

où le produit-$\star$ représente un produit n'est pas normale. Selon [27], le système physique décrit par (2.5.1) est équivalent à l'équation des coordonnées cannoniques habitueles décrit par l'Hamiltonienne suivant: (remplaçant les coordinnées non-commutatives $\hat{x}_i$ par $\left(\hat{x}_i - \frac{\theta_{ij}\hat{p}_j}{2}\right)$):

$$\hat{H} = \left(1 + \frac{eB\theta}{4}\right)^2 \left(p_x^2 + p_y^2\right) + m^2 + \frac{e^2B^2}{4}\left(x^2 + y^2\right) + \left(1 + \frac{eB\theta}{4}\right)\frac{eB}{2}\left(yp_x - xp_y\right). \tag{2.5.2}$$

Ainsi à propos du problème de valeur propre $\hat{H}\Phi(x) = E^2\Phi(x)$. Dans l'espace du position $(\hat{x} = x, \hat{p} = -i\partial/\partial x)$, nous allons introduire les coordinnées polair à deux dimensions, l'eq (2.5.2) s'obtient:

$$\hat{H} = -\left(1 + \frac{eB\theta}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) - \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right) + m^2 + \frac{e^2B^2}{4}\rho^2 - i\left(1 + \frac{eB\theta}{4}\right)\frac{eB}{2}\frac{\partial}{\partial\varphi}. \tag{2.5.3}$$

Les solutions exactes sont

$$\Phi_{n_r,m_\ell}(\rho,\varphi) = \frac{e^{im_\ell\varphi}}{\sqrt{2\pi}}\Psi(\rho)\,, \tag{2.5.4}$$

on trouve

$$\left[-\left(1 + \tfrac{eB\theta}{4}\right)^2 \left(\tfrac{1}{\rho}\tfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\tfrac{\partial}{\partial\rho}\right)\right) + \frac{\left(1+\frac{eB\theta}{4}\right)^2 m_\ell^2}{\rho^2} + m^2 + \tfrac{e^2B^2}{4}\rho^2 + \left(1 + \tfrac{eB\theta}{4}\right)\tfrac{eB}{2}m_\ell\right]\Psi(\rho) = E^2\Psi(\rho)\,. \tag{2.5.5}$$

on peut écrire la fonction radiale par multiplication à deux fonctions $\Psi(\rho) = f(\rho)\mathcal{R}_{n_r,m_\ell}$, alors on peut écrire le terme $\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)\right)$ comme suit:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)f(\rho)\mathcal{R}(\rho) = \left[\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho} + \frac{d^2}{d\rho^2}\right]\left(f(\rho)\hat{\mathcal{R}}(\rho)\right). \tag{2.5.6}$$

qui donne

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)f(\rho)\mathcal{R}(\rho) = f(\rho)\mathcal{R}''(\rho) + \left(f'' + \frac{1}{\rho}f'\right)\mathcal{R}(\rho) + \left(\frac{f}{\rho} + 2f'\right)\mathcal{R}'(\rho). \tag{2.5.7}$$

En supposant que $\frac{f(\rho)}{\rho} + 2f'(\rho)' = 0$, la fonction $f(\rho)$ s'écrit par $f(\rho) = \frac{1}{\sqrt{\rho}}$, l'eq(2.5.5) s'obtient:

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{(m_l^2 - 1/4)}{\rho^2} - \kappa^2 + \beta_\theta - 2\kappa m_l\right]\mathcal{R}_{n_r,m_\ell} = 0, \tag{2.5.8}$$

avec

$$\kappa = \frac{eB}{2\left(1 + \frac{eB\theta}{4}\right)},\ \beta_\theta = \frac{E^2 - m^2}{\left(1 + \frac{eB\theta}{4}\right)^2}. \tag{2.5.9}$$

On peut facilement trouver la solution exacte de cette équation radiale [28, 29], comme suit:

$$\mathcal{R}_{n_r,m_\ell} = c\exp(-x/2)\,x^{\frac{1}{2}(\mu+1/2)}L_n^\mu(x). \tag{2.5.10}$$

où nous avons fait,

$$x = \frac{eB}{2\left(1 + \frac{eB\theta}{4}\right)}\rho^2, \mu = m_l. \tag{2.5.11}$$

et le spectre d'énergie

$$E_n^{(\theta)} = \pm\sqrt{2eB\left(1 + \tfrac{eB\theta}{4}\right)(2n_\rho + |l| + 1) - 2eBl\left(1 + \tfrac{eB\theta}{4}\right) + m^2}. \tag{2.5.12}$$

avec c est la constante de normalisation,

$$\int \Phi^*_{n_r,m_\ell}(\rho,\varphi)\,\Phi_{n_r,m_\ell}(\rho,\varphi)\,\rho d\rho d\varphi = 1 \tag{2.5.13}$$

$$= |c|^2\int \tfrac{1}{2\pi\rho}\exp(-x)\,x^{(\mu+1/2)}L_n^\mu(x)\,L_n^\mu(x)\,\rho d\rho d\varphi = 1. \tag{2.5.14}$$

En utilisant la relation suivante:

$$\int_0^\infty e^{-x}x^\alpha L_n^\alpha(x)\,L_m^\alpha(x)\,dx = \left\{\begin{matrix} 0, m \neq n \\ \Gamma(1+\alpha)\binom{n+\alpha}{n}, m = n\end{matrix}\right\}. \tag{2.5.15}$$

avec $\binom{n+\alpha}{n}$ est un coefficient binomial et $\Gamma(1+\alpha)$ est la fonction de Gamma, qui donne ce resultat:

$$\int_0^\infty e^{-x} x^\mu L_n^\mu(x)\, L_n^\mu(x)\, dx = \frac{(n+\mu)!}{n!}. \tag{2.5.16}$$

on peut démonter que la constante de normalisation donnée par:

$$c = \left(\frac{n!}{(n+\mu)!} 2 \sqrt{\frac{eB}{2(1+\frac{eB\theta}{4})}} \right)^{1/2}. \tag{2.5.17}$$

Alors la fonction d'onde devient:

$$\begin{aligned}\Phi^{(\theta)}_{n_r,m_\ell}(\rho,\varphi) &= \sum_{m_l} \left(\frac{m^{(\theta)}\omega^{(\theta)}}{\pi} \frac{n_\rho!}{(n_\rho + \mid m_l \mid)!} \right)^{\frac{1}{2}} \left(m^{(\theta)}\omega^{(\theta)}\rho^2 \right)^{|m_l|/2} \\ &\times \exp\left(i m_l \phi - \frac{m^{(\theta)}\omega^{(\theta)}}{2}\rho^2 \right) L_{n_\rho}^{(|m_l|)}\left(m^{(\theta)}\omega^{(\theta)}\rho^2 \right). \end{aligned} \tag{2.5.18}$$

avec

$$m^{(\theta)} = \frac{1}{2\left(1+\frac{eB\theta}{4}\right)^2}, \omega^{(\theta)} = 2eB\left(1+\frac{eB\theta}{4}\right). \tag{2.5.19}$$

En conclusion, nous avons présenté, dans ce chapitre, les définitions nécessaires de la géométrie non-commutative. Puis, selon le formalisme de méthode d'équation nous avons déterminées les solutions exactes de fonctions d'ondes et les specters des énergies dans l'espace non-commutatif.

3

Construction des propagateurs

3.1 Introduction

En1933 Dirac a considère que la formulation lagrangienne est plus essentiel que la formulation hamiltonienne qui a été développée par Bohr,Pauli ,Shrödinger en 1925-1926 cette formulation basée sur le fait que la probabilité de trouve une particule au point x a l'instant t est égale à $|\psi(x,t)|^2$ où la fonction d'onde $\psi(x,t)$ est une solution de l'équation de Schrödinger est l'implitude de probabilité de la particule au point (x,t),en 1948 Feynman à montré que ‹‹que le propagateur de la mécanique quantique est identique à $exp(iS)$, ou S est l'action classique évaluée le longe de chemin et a réussi à dériver une troisième formulation de la mécanique quantique désigné formulation des intégrale de chemin le coeur de cette formulation est le propagateur (noté par K) qui contient toutes les information du système physique, ce dernier qui définit l'amplitude de la probabilité d'évolution d'une particule du point A vers point B, est formulé comme étant une somme d'une infinité d'implitude partielle licenciées a chacun des chemin noté Γ, qui raccordé $A(x_i, t_i)$ et $B(x_f, t_f)$ dans la phase est proportionnelle à la quantité $exp[iS\left(x(t)\right)]$ c'est-à-dire $S = \int L\left(x, \dot{x}, t\right) dt$ où $L\left(x, \dot{x}, t\right)$ est le Lagrangien de systeme physique

$$K\left(b, a; T, 0\right) = \sum_{\substack{\text{tous les chemins} \\ \text{possible da A vers B}}} \Phi\left[x\left(t\right)\right] = \sum_{\substack{\text{tous les chemins} \\ \text{possible da A vers B}}} \exp\left(iS\left(x\left(t\right)\right)\right). \tag{3.1.1}$$

De ce fait, Dirac considérée seulement le chemin classique Γ, alors que Feynman a démontré que tous les chemins contribuent dans le sens où la particule quantique contrairement à la particule classique, et selon le "*Principe de Superposition*" de la mécanique quantique. Le lagrangienne s'écrit :

$$L\left(x, \dot{x}\right) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - V\left(x\right). \tag{3.1.2}$$

Nous avons que:

$$\langle x_2 \mid \psi (t+\varepsilon)\rangle = \psi (x_2, t+\varepsilon) = \int dx_1 \langle x_2, t+\varepsilon\rangle\langle x_1, \psi (t)\rangle. \tag{3.1.3}$$

Feynman exige alors une expression de proportionnalités

$$\psi (x_2, t+\varepsilon) = A \int dx_1 \exp (iS (x (t)))\, \psi (x_1, t). \tag{3.1.4}$$

Ou A une constant inconnue, Feynman suppose que cette équation appliqué que (x, t) obéit à l'équation de Schrodinger

$$\left[-\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V (x)\right] \psi (x, t) = \frac{i\partial}{\partial t}\psi (x, t). \tag{3.1.5}$$

A la condition que la constant inconnue, A soit égale à:

$$A = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\varepsilon}}. \tag{3.1.6}$$

Ensuite nous allons clarifier la méthode mathématique pour obtenir le propagateur non-relativiste.

3.2 Cas de l'espace ordinaire (Formulat de Trotter)

Dans le cas d'un Hamiltonien indépendant du temps. La solution formelle de l'équation de Schrodinger peut s'ecrire comme suit:

$$\mid \psi (t_b)\rangle = \exp \left[-i\hat{H} (t_b, t_a)\right] \mid \psi (t_a)\rangle$$

avec $\exp \left[-i\hat{H} (t_b, t_a)\right]$ est appelé l'opérateur d'évolution.

Officiellement, il est pas difficile de voir que dans la limite $N \to \infty$ nous avons seulement besoin de savoir ce particule de courte durée $K (x_{k+1}, x_k; \varepsilon)$ à l'ordre ε,

$$\exp (x) = \left(\exp \left(\frac{x}{N}\right)\right)^N = \left(1 + \frac{x}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right)\right)^N. \tag{3.2.1}$$

En comparaison avec la formule

$$\exp (x) = \lim_{N\to\infty} \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N. \tag{3.2.2}$$

de conclure que, les corrections à l'ordre $O\left((N^{-2})\right)$ dans l'eq 3.2.1 il peut être supprimées. Bien sûr, d'établir un résultat analogue pour les opérateurs (non bornés) exige une certaine analyse fonctionnelle.

Nous allons maintenant supposer que la forme d'hamiltonien standard donnée par

$$H = T(p) + V(x) = \frac{p^2}{2m} + V(x). \tag{3.2.3}$$

Alors le propagateur infinitésimale s'écrit par

$$K(x_{k+1}, x_k; \varepsilon) = \left\langle \mathbf{x}_{k+1} \left| \exp\left\{-i\varepsilon\left(\widehat{T} + \widehat{V}\right)\right\} \right| \mathbf{x}_k \right\rangle. \tag{3.2.4}$$

Pourvu que nous pouvons justifier l'abandon des termes $O(\varepsilon^2)$ pour simplifier quelques étapes des calcules. Anisi, comme on a fait, $\widehat{T}$ et $\widehat{V}$ sont des opérateurs non-commute pas, on peut écrire :

$$\exp\left\{-i\varepsilon\left(\widehat{T} + \widehat{V}\right)\right\} = \exp\left(-i\varepsilon\widehat{T}\right)\exp\left(-i\varepsilon\widehat{V}\right) + O\left(\varepsilon^2\right). \tag{3.2.5}$$

Concrètement, ce que l'on a besoin est la validité de produit la formule de Trotter

$$\exp\left(\widehat{A} + \widehat{B}\right) = \lim_{N\to\infty}\left(\exp\widehat{A}\exp\widehat{B}\right)^N. \tag{3.2.6}$$

avec $\widehat{T} = \widehat{A}$ et $\widehat{V} = \widehat{B}$. Les hypothèses ci-dessus, à l'ordre ε, nous pouvons écrire le propagateur infinitisimal comme :

$$K(x_{k+1}, x_k; \varepsilon) = \left\langle \mathbf{x}_{k+1} \left| \exp\left(-i\varepsilon\widehat{T}\right)\exp\left(-i\varepsilon\widehat{V}\right) \right| \mathbf{x}_k \right\rangle. \tag{3.2.7}$$

Pour diagonaliser l'opérateur $\widehat{T}$ nous utilisons la relation de fermeture $\int |p\rangle\langle p|\, dp = 1$, on obtient :

$$K(x_{k+1}, x_k; \varepsilon) = \int dp_k \left\langle \mathbf{x}_{k+1} \left| \exp\left(-i\varepsilon\widehat{T}\right) p_k\right\rangle \left\langle p_k \exp\left(-i\varepsilon\widehat{V}\right) \right| \mathbf{x}_k \right\rangle \tag{3.2.8}$$

$$K(x_{k+1}, x_k; \varepsilon) = \int dp_k \left\langle \mathbf{x}_{k+1} \,|\, p_k\right\rangle \left\langle p_k \,|\, \mathbf{x}_k\right\rangle \exp\left(-i\varepsilon\frac{p_k^2}{2m}\right)\exp\left(-i\varepsilon V(\mathbf{x}_k)\right), \tag{3.2.9}$$

nous avons : $\langle \mathbf{x}_{k+1}|\, p_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(ip_k\mathbf{x}_{k+1})$, alors :

$$K(x_{k+1}, x_k; \varepsilon) = \frac{1}{2\pi}\int dp_k \exp\left\{i\varepsilon\left[p_k\frac{(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k)}{\varepsilon} - H(p_k, \mathbf{x}_k)\right]\right\} \tag{3.2.10}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int dp_k \exp\left\{i\left[p_k(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k) - \varepsilon\left(\frac{p_k^2}{2m} + V(\mathbf{x}_k)\right)\right]\right\}. \tag{3.2.11}$$

on peut écrire aussi

$$K(x_f, x_i; t_f, t_i) = \int_{-\infty}^{+\infty}\prod_{k=1}^{N} dx_k \prod_{k=1}^{N+1} K(x_{k+1}, x_k; \varepsilon)\,; \text{ avec } \varepsilon = \frac{t_f - t_i}{N+1} = \frac{T}{N+1} \tag{3.2.12}$$

À une dimension, nous considérons l'expression du propagateur de la mécanique quantique (MQ) non-relativiste ordinaire à la forme intégrale de chemin discontinue.

$$K\left(x_f, x_i; t_f, t_i\right) = A_N \int \exp\left\{i \sum_{k=1}^{N+1} S_k\right\} \prod_{k=1}^{N} dx_k, \tag{3.2.13}$$

avec $A_N = \left(\sqrt{\frac{m}{2\pi i\varepsilon}}\right)^{N+1}$, et l'action discrétisé dans intervalle $[k-1, k]$, prenant la forme

$$S_k = \tfrac{m}{2\varepsilon}\left(x_k - x_{k-1}\right)^2 - \varepsilon V\left(x_k\right). \tag{3.2.14}$$

3.2.1 Particule libre à deux dimensions

Le propagateur de la particule libre à deux dimensions s'écrit par:

$$K\left(x_f, x_i; y_f, y_i, T\right) = \int_{x_i}^{x_f} Dx\left(t\right) \int_{y_i}^{y_f} Dy\left(t\right) \exp\left\{i \int_0^T \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) dt\right\}. \tag{3.2.15}$$

dans la forme discontinue

$$\begin{aligned} K\left(x_f, x_i; y_f, y_i, T\right) = \left(\frac{m}{2\pi i\varepsilon}\right)^{\frac{N+1}{2}} \int dx_1 ... dx_N \exp\left\{i \sum_{j=1}^{N+1} \frac{m}{2\varepsilon}\left(x_{j+1} - xj\right)^2\right\} \\ \times \left(\frac{m}{2\pi i\varepsilon}\right)^{\frac{N+1}{2}} \int dy_1 ... dy_N \exp\left\{i \sum_{j=1}^{N+1} \frac{m}{2\varepsilon}\left(y_{j+1} - y_j\right)^2\right\}, \end{aligned} \tag{3.2.16}$$

où $A = \frac{m}{2\pi i\varepsilon}$, l'intégration sur les variables cartésiannes donnent une forme Gaussiennes, nous utilisons l'dentité suivante:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} du \sqrt{\frac{a}{\pi}} e^{-a(x-u)^2} \sqrt{\frac{b}{\pi}} e^{-b(u-y)^2} = \sqrt{\frac{ab}{\pi\left(a+b\right)}} \exp\left(\frac{-ab}{a+b}\left(x-y\right)^2\right), \tag{3.2.17}$$

alors l'intégral sur (x_1, y_1) donne:

$$\begin{aligned} K\left(x_f, x_i; y_f, y_i, T\right) = \int \left(\frac{m}{2\pi i\varepsilon}\right)^{1/2} dx_1 \exp\left\{i \sum_{j=1}^{N+1} \frac{m}{2\varepsilon}\left[\left(x_1 - x_0\right)^2 + \left(x_2 - x_1\right)^2\right]\right\} \\ \times \int \left(\frac{m}{2\pi i\varepsilon}\right)^{\frac{N}{2}} dx_2 ... dx_N \exp\left\{i \sum_{j=1}^{N+1} \frac{m}{2\varepsilon}\left[\left(x_3 - x_2\right)^2 + ... + \left(x_{N+1} - x_N\right)^2\right]\right\} \\ \times \int \left(\frac{m}{2\pi i\varepsilon}\right)^{1/2} dy_1 \exp\left\{i \sum_{j=1}^{N+1} \frac{m}{2\varepsilon}\left[\left(y_1 - y_0\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2\right]\right\} \\ \times \int \left(\frac{m}{2\pi i\varepsilon}\right)^{\frac{N}{2}} dy_2 ... dy_N \exp\left\{i \sum_{j=1}^{N+1} \frac{m}{2\varepsilon}\left[\left(y_3 - y_2\right)^2 + ... + \left(y_{N+1} - y_N\right)^2\right]\right\}, \end{aligned} \tag{3.2.18}$$

on trouve:

$$K\left(x_f,x_i;y_f,y_i,T\right)=\lim_{N\to\infty}\int\left(\frac{m}{4\pi i\varepsilon}\right)^{1/2}dx_2\exp\left\{i\sum_{j=1}^{N+1}\frac{m}{4\varepsilon}\left[\left(x_2-x_0\right)^2+2\left(x_3-x_2\right)^2\right]\right\}$$
$$\times\int\left(\frac{m}{2\pi i\varepsilon}\right)^{\frac{N}{2}}dx_3...dx_N\exp\left\{i\sum_{j=1}^{N+1}\frac{m}{2\varepsilon}\left[\left(x_4-x_3\right)^2+...+\left(x_{N+1}-x_N\right)^2\right]\right\}$$
$$\times\int\left(\frac{m}{4\pi i\varepsilon}\right)^{1/2}dy_2\exp\left\{i\sum_{j=1}^{N+1}\frac{m}{4\varepsilon}\left[\left(y_2-y_0\right)^2+2\left(y_3-y_2\right)^2\right]\right\}$$
$$\times\int\left(\frac{m}{2\pi i\varepsilon}\right)^{\frac{N}{2}}dy_3...dy_N\exp\left\{i\sum_{j=1}^{N+1}\frac{m}{2\varepsilon}\left[\left(y_4-y_3\right)^2+...+\left(y_{N+1}-y_N\right)^2\right]\right\}, \tag{3.2.19}$$

Jusquà N intégration, nous obtenons:

$$K\left(x_f,x_i;y_f,y_i,T\right)=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{m}{2\pi i\left(N+1\right)\varepsilon}\right)$$
$$\exp\left\{i\sum_{j=1}^{N+1}\frac{m}{2\varepsilon}\left(x_{N+1}-x_0\right)^2\right\}\exp\left\{i\sum_{j=1}^{N+1}\frac{m}{2\varepsilon}\left(y_{N+1}-y_0\right)^2\right\}. \tag{3.2.20}$$

Enfin, le propagateur de la particule libre à deux dimension s'écrit par:

$$K\left(x_f,x_i;y_f,y_i,T\right)=\frac{m}{2\pi iT}\exp\left\{\frac{im}{2T}\left[\left(x_f-x_i\right)^2+\left(y_f-y_i\right)^2\right]\right\}. \tag{3.2.21}$$

3.2.2 L'oscillateur Harmonique à deux dimensions

Dans ce cas on va calculer le propagateur de l'oscillateur harmonique à deux dimensions, mais en utilisant les coordonnées cartésiennes. Supposant les paramètres suivants:

$$H_0=\frac{p^2}{2m}+\frac{m\omega^2}{2}(x^2+y^2)\text{ avec }p^2=p_x^2+p_y^2;\ \bar{x}_k^2=\frac{x_k^2+x_{k-1}^2}{2}\text{ et }\bar{y}_k^2=\frac{y_k^2+y_{k-1}^2}{2}. \tag{3.2.22}$$

Alors le propagateur de l'oscillateur harmonique à deux dimentions s'écrit par:

$$K\left(x_f,x_i;y_f,y_i,T\right)=\left(\frac{m}{2\pi i\varepsilon}\right)^{N+1}\int dx_1...dx_Ndy_1...dy_N$$
$$\times\exp\left\{\frac{im}{2\varepsilon}\left[\left(x_1-x_0\right)^2+...+\left(x_{N+1}-x_N\right)^2+\left(y_1-y_0\right)^2+...+\left(y_{N+1}-y_N\right)^2\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{2\varepsilon^2\omega^2}{4}\left(x_1^2+x_0^2+..+x_{N+1}^2+x_N^2\right)-\frac{2\varepsilon^2\omega^2}{4}\left(y_1^2+y_0^2+..+y_{N+1}^2+y_N^2\right)\right]\right\}. \tag{3.2.23}$$

En utilisant la méthode de séparation des variables;

$$K\left(x_f,x_i;y_f,y_i,T\right)=\left(\frac{m}{2\pi i\varepsilon}\right)^{N+1}\int dx_1...dx_N\int dy_1..dy_N$$
$$\times\exp\left\{\frac{im}{2\varepsilon}\left[(x_1-x_0)^2+..+(x_{N+1}-x_N)^2\right]-\frac{2\varepsilon^2\omega^2}{4}\left(x_1^2+x_0^2+..+x_{N+1}^2+x_N^2\right)\right\}$$
$$\times\exp\left\{\frac{im}{2\varepsilon}\left[(y_1-y_0)^2+..+(y_{N+1}-y_N)^2\right]-\frac{2\varepsilon^2\omega^2}{4}\left(y_1^2+y_0^2+..+y_{N+1}^2+y_N^2\right)\right\},\tag{3.2.24}$$

avec les changemants suivantes; $x_i=\sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}}X_i$ et $y_i=\sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}}Y_i$, on peut optenire:

$$K\left(x_f,x_i;y_f,y_i,T\right)=\left(\frac{m}{2\pi i\varepsilon}\right)^{N+1}\sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}}\int dX_1...dX_N\sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}}\int dY_1...dY_N$$
$$\times\exp\left\{i\left[(X_1-X_0)^2..+(X_{N+1}-X_N)^2-2\left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^2\left(X_1^2+X_0^2+..X_{N+1}^2+X_N^2\right)\right]\right\}$$
$$\times\exp\left\{i\left[+(Y_1-Y_0)^2+..(Y_{N+1}-Y_N)^2-2\left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^2\left(Y_1^2+Y_0^2+..Y_{N+1}^2+Y_N^2\right)\right]\right\}.\tag{3.2.25}$$

Pour déterminer le resultat de ce propagateur, nous allons essayer le cas: $N=1$, l'eq. (3.2.25) s'écrit

$$K\left(x_2,x_0.t_2,t_0\right)=\left(\sqrt{\frac{m}{2\pi i\varepsilon}}\right)^2\sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}}\int dX_1\sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}}\int dY_1$$
$$\times\exp\left\{i\left[(X_1-X_0)^2+(X_2-X_1)^2-2\left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^2\left(X_1^2+X_0^2+X_2^2+X_1^2\right)\right]\right\}$$
$$\times\exp\left\{i\left[(Y_1-Y_0)^2+(Y_2-Y_1)^2-2\left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^2\left(Y_1^2+Y_0^2+Y_2^2+Y_1^2\right)\right]\right\}$$
$$=\left(\sqrt{\frac{m}{2\pi i\varepsilon}}\right)^2\frac{2\varepsilon}{m}\left[\int dX_1\exp\left\{i\left[2X_1^2\left(1-2\left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^2\right)-2X_1\left(X_0+X_2\right)\right]\right\}\right]$$
$$\times\left[\int dY_1\exp\left\{i\left[2Y_1^2\left(1-2\left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^2\right)-2Y_1\left(Y_0+Y_2\right)\right]\right\}\right]$$
$$\times\exp\left\{i\left[\left(1-2\left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^2\right)\left(X_0^2+X_2^2\right)\right]\right\}\exp\left\{i\left[\left(1-2\left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^2\right)\left(Y_0^2+Y_2^2\right)\right]\right\}\tag{3.2.26}$$

Après l'utilisation de la relation $2\left(1-2\left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)^2\right)\approx2\left(1-2\sin^2\left(\frac{\omega\varepsilon}{2}\right)\right)\approx\frac{\sin2\omega\varepsilon}{\sin\omega\varepsilon}$ et comme nous pouvons utiliser l'intégration suivante: $\int_{-\infty}^{+\infty}dX\ e^{iaX^2}=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{-ia}}$. Nous pouvons obtenir au résultat suivant :

$$K\left(2,0\right)=\sqrt{\frac{m\sin\omega\varepsilon}{2\pi i\varepsilon\sin2\omega\varepsilon}}\exp\left\{i\left[\sin\omega\varepsilon\frac{\cos2\omega\varepsilon}{\sin2\omega\varepsilon}\left(X_0^2+X_2^2\right)-\frac{2\sin\omega\varepsilon}{\sin2\omega\varepsilon}X_2X_0\right]\right\}.\tag{3.2.27}$$

Et nous pouvons trouver la même façon pour le propagateur $K\left(3,0\right)$:

$$K\left(3,0\right)=\sqrt{\frac{m\sin\omega\varepsilon}{2\pi i\varepsilon\sin 3\omega\varepsilon}}\exp\left\{i\left[\sin\omega\varepsilon\frac{\cos 2\omega\varepsilon}{\sin 3\omega\varepsilon}\left(X_0^2+X_2^2\right)-\frac{2\sin\omega\varepsilon}{\sin 3\omega\varepsilon}X_3X_0\right]\right\}. \quad (3.2.28)$$

Ainsi de suite l'intégration sur toutes les variables donnent le resultat suivant:

$$K\left(N+1,0\right)=\sqrt{\frac{m\sin\omega\varepsilon}{2\pi i\varepsilon\sin(N+1)\omega\varepsilon}}$$
$$\times\exp\left\{i\left[\sin\omega\varepsilon\frac{\cos 2\omega\varepsilon}{\sin(N+1)\omega\varepsilon}\left(X_0^2+X_2^2\right)-\frac{2\sin\omega\varepsilon}{\sin(N+1)\omega\varepsilon}X_3X_0\right]\right\}. \quad (3.2.29)$$

Nous pouvons également obtenir le même résultat pour la variable Y. Alors le résultat final de propagateur de l'oscillateur harmonique à deux dimensions s'écrit par:

$$\begin{aligned}K\left(x_f,x_i;y_f,y_i,T\right) &= \frac{m\omega}{2\pi i\sin\omega T}\exp\left\{i\left[\frac{m\omega}{2}\frac{\cos\omega\varepsilon}{\sin T\omega}\left(x_f^2+x_i^2\right)-\frac{m\omega}{\sin T\omega}x_fx_i\right]\right\}\\ &\quad\times\exp\left\{i\left[\frac{m\omega}{2}\frac{\cos\omega\varepsilon}{\sin T\omega}\left(y_f^2+y_i^2\right)-\frac{m\omega}{\sin T\omega}y_fy_i\right]\right\}. \quad (3.2.30)\end{aligned}$$

3.3 Cas de l'espace non-commutatif (NC)

Dans cette section, nous allons utiliser le formalisme de l'intégrale du chemin pour construire la fonction de propagation (un symbole de l'opérateur d'évolution) dans la mécanique quantique (MQ) non-relativiste sur un espace non-commutatif, qui réalise l'algèbre de commutations suivante:

$$\left[\widehat{\tilde{x}}_i,\widehat{\tilde{p}}_j\right]=i\delta_{ij},\quad \left[\widehat{\tilde{x}}_i,\widehat{\tilde{x}}_j\right]=i\theta_{ij},\quad \left[\widehat{\tilde{p}}_i,\widehat{\tilde{p}}_j\right]=0,\quad \text{et } i,j=0,1,2. \quad (3.3.1)$$

En conventionnel de la MQ non-relativiste, nous allons construire une représentation de l'intégrale du chemin pour les éléments de la matrice de l'opérateur d'évolution $U(t,t')$ (dans une représentation de coordonnées). Dans la MQ prise en considération, nous avons aussi commencé par le même opérateur. Il obéit à l'équation de Schrödinger et pour le H indépendant du temps (que nous considérons pour plus de simplicité dans ce qui suit) à la forme:

$$U(t',t)=\exp\left[-i\hat{H}(t'-t)\right]. \quad (3.3.2)$$

Puis ce que les opérateurs de coordonnés $\widehat{\tilde{x}}_i$ ne commutent pas, ils ne possèdent pas un ensemble commun complet de vecteurs propre. Pour cette raison, il n'ya pas de représentation de $\tilde{x}-$coordonnées et on ne peut pas parler des éléments de matrice de l'opérateur d'évolution dans une telle représentation. Par conséquent, on ne peut pas définir une amplitude de probabilité d'une transition entre deux points dans l'espace de position.

Néanmoins, on peut envisager d'autres types d'éléments de matrice de l'opérateur d'évolution qui sont des amplitudes de probabilité et qui peuvent être représentées via trois types de la représentation d'intégrales de chemin, à savoir; les espaces des moments $|\tilde{p}\rangle$, les espaces usuels des coordonnés $|x\rangle$ et les espaces mixtes entre les coordonnées et les impulsions $|\tilde{x},\tilde{p}_y\rangle$ ou $|\tilde{y},\tilde{p}_x\rangle$, qui forment des ensembles complet de vecteurs propres. Dans ce cas, nous allons choisir les opérateurs de $\hat{x}_i$ [30] définis par:

$$\begin{aligned} \hat{x}^i &= \widehat{\tilde{x}}^i + \tfrac{\theta^{ij}}{2}\hat{p}_j,\ \left[\hat{x}^i,\hat{x}^j\right]=0,\ \left[\hat{x}^i,\hat{p}_j\right]=i\delta^i_j \\ \hat{x}^i\,|x\rangle &= x^i\,|x\rangle\,,\quad \langle x\mid x'\rangle=\delta^D\left(x-x'\right),\quad \textstyle\int |x\rangle\,\langle x|\,dx=I. \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

Dans ce type d'éléments, nous dérivons une représentation intégrale de chemin pour la fonction d'évolution G. Comme d'habitude, nous divisons l'intervalle de temps $T=t_b-t_a$ dans $N+1$ parties égales $t=T/\left(N+1\right)$ au moyen des points t_n, $n=1,...,N$ tel que $t_n=t_a+n\Delta t$. En utilisant la propriété du groupe de l'opérateur d'évolution et de la relation de fermeture (voir (3.3.3)) pour l'ensemble $|x_i\rangle$, on peut écrire Le propagateur $G^\theta_x\left(\mathbf{x}_b,t_b;\mathbf{x}_a,t_a\right)$, relatives aux particules sans spin est sa solution s'écrit par l'équation suivant

$$\left[\left(p_\mu-eA_\mu\left(x\right)\right)^2-m^2\right]\star G^\theta_x\left(\mathbf{x}_b,t_b;\mathbf{x}_a,t_a\right)=\delta\left(x_b-x_a\right)\delta\left(t_b-t_a\right). \tag{3.3.4}$$

et son expression est

$$G^\theta_x\left(\mathbf{x}_b,t_b;\mathbf{x}_a,t_a\right)=\lim_{N\to\infty}\int_0^\infty dT\int\limits_{-\infty}^{\infty}dx_1...dx_n\prod_{n=1}^{N+1}\left\langle\mathbf{x}_n\left|\exp\left(-i\hat{H}^{*(\theta)}\left(t_n-t_{n-1}\right)\right)\right|\mathbf{x}_{n-1}\right\rangle, \tag{3.3.5}$$

avec $\hat{H}^{*(\theta)}$ représente l'opérateur hamiltonien dans l'espace non-commutative définit comme suit:

$$\hat{H}^{*(\theta)}=\left(p_{t_n}-eV\left(x^i-\tfrac{\theta^{ij}}{2}\hat{p}_j\right)\right)^2-\left(\vec{p}-e\vec{A}\left(x^i-\tfrac{\theta^{ij}}{2}\hat{p}_j\right)\right)^2+m^2. \tag{3.3.6}$$

En utilisant la relation de fermeture pour les vecteurs propres de moment $|p\rangle$, on peut calculer la représentation Hamiltonienne de l'intégrale de chemins pour le propagateur G_x, à partir de (3.3.5),

$$\begin{aligned} G^\theta_x\left(\mathbf{x}_b,t_b;\mathbf{x}_a,t_a\right)&=\int\prod_{n=1}^{N}d\mathbf{x}_j dt_j\int\prod_{n=1}^{N+1}\tfrac{d\mathbf{p}_j}{(2\pi)}\tfrac{dp_{tj}}{\sqrt{2\pi}} \\ &\times e^{\left\{i\sum\limits_{n=1}^{N+1}\left[\mathbf{p}_n\Delta\mathbf{x}_n-p_{t_n}\Delta t_n-\varepsilon\left(\left(\mathbf{p}_n-eA\left(x^i-\frac{\theta^{ij}}{2}\hat{p}_j\right)\right)^2-\varepsilon m^2+\left(p_{t_n}-eV\left(x^i-\frac{\theta^{ij}}{2}\hat{p}_j\right)\right)^2\right)\right]\right\}}. \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

Comme il est bien apparent, à partir de cette expression il y a peu de cas où on peut le résoudre exactement; à savoir, le cas d'un potentiel linéaire ($V(x) = gx$) et le cas d'un potentiel harmonique. Mais dans ce travail on applique le $\left(V(x) = 0, \vec{A} = \left(-\frac{B}{2}y, \frac{B}{2}x, 0\right)\right)$. Ils ont trouvés la forme Hamiltonienne de l'intégrale de chemins pour le propagateur G_x^θ comme suivant:

$$G_x^\theta\left(\mathbf{x}_b, t_b; \mathbf{x}_a, t_a\right) = \int_0^\infty dT \int \prod_{n=1}^{N} dt_n \int \prod_{n=1}^{N+1} \frac{dp_{tj}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(i \sum_{n=1}^{N+1} \left[-p_{t_n}\Delta t_n + p_{t_n}^2 - m^2\right]\right)$$
$$\times \int \prod_{n=1}^{N} d\mathbf{x}_n \int \prod_{n=1}^{N+1} \frac{d\mathbf{p}_j}{(2\pi)} e^{\left\{i \sum_{n=1}^{N+1}\left[\mathbf{p}_n \Delta \mathbf{x}_n - \varepsilon\left(\left(1+\frac{eB\theta}{4}\right)^2 \left(p_x^2+p_y^2\right) + \frac{e^2B^2}{4}\left(x^2+y^2\right) + \left(1+\frac{eB\theta}{4}\right)eB(yp_x - xp_y)\right)\right]\right\}}. \tag{3.3.8}$$

Les intégrations sur t_n donnent N fonctions de delta de Dirac $\delta\left(p_{t_n} - p_{t_{n-1}}\right)$; ce qui implique

$$p_{t_1} = p_{t_2} = p_{t_3} = ... = p_{t_{N+1}} = E. \tag{3.3.9}$$

Aussi, on peut l'intégrer sur les variables de l'impulsion car elle est d'une forme quadratique, nous arrivons à la forme lagrangienne:

$$G_x^\theta\left(\mathbf{x}_b, t_b; \mathbf{x}_a, t_a\right) = \int_0^\infty dT \mathcal{N} \int \frac{dE}{\sqrt{2\pi}} e^{iET} e^{iT\left[E^2-m^2\right]} \int \prod_{n=1}^{N} d\mathbf{x}_n$$
$$\times \exp\left\{i \sum_{n=1}^{N+1}\left[\frac{m^{(\theta)}}{2}\left[\frac{\left(\Delta \mathbf{x}_n\right)^2}{\varepsilon} + \omega^{(\theta)} \frac{eB}{\left(1+\frac{eB\theta}{4}\right)} \epsilon^{ij} x_{ni} \Delta x_{nj}\right]\right]\right\}, \tag{3.3.10}$$

avec

$$m^{(\theta)} = \frac{1}{2\left(1+\frac{eB\theta}{4}\right)^2}, \omega^{(\theta)} = 2eB\left(1+\frac{eB\theta}{4}\right). \text{ et } \epsilon^{ij} = -\epsilon^{ji} = \begin{cases} 1 \text{ si } i \neq j \\ 0 \text{ si } i = j \end{cases}, \tag{3.3.11}$$

et

$$\mathcal{N} = \int \prod_{n=1}^{N+1} \frac{d\mathbf{p}_n}{(2\pi)^2} \exp\left(i\varepsilon \sum_{n=1}^{N+1}\left(1+\frac{eB\theta}{4}\right)^2 \mathbf{p}_n^2\right) = \prod_{n=1}^{N+1} \frac{1}{\left(4\pi i\varepsilon\left(1+\frac{eB\theta}{4}\right)^2\right)}. \tag{3.3.12}$$

Ce propagateur est le même propagateur de particule non-relativiste dans un champ magnétique constant B sur le direction Z, et nous allons utiliser les mêmes étapes qui existe dans travail [31]. Alors, le propagateur est exprimée comme :

$$G_x^\theta\left(\mathbf{x}_b, t_b; \mathbf{x}_a, t_a\right) = \int_0^\infty dT \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{\sqrt{2\pi}} e^{iET} e^{iT\left[E^2-m^2\right]} \int_a^b \int_a^b \exp\left[(i)\, S\left[b,a\right]\right] Dx\left(t\right) Dy\left(t\right). \tag{3.3.13}$$

avec l'action $S\left[b,a\right]$ s'écrit:

$$S\left[b,a\right] = \int_{t_a}^{t_b} \left[\frac{m^{(\theta)}}{2}\left[\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right) + \omega^{(\theta)}\left(x\dot{y} - y\dot{x}\right)\right]\right] dt. \tag{3.3.14}$$

où $Dx\left(t\right)Dy\left(t\right)$ est la mesure à deux dimensions

$$Dx\left(t\right)Dy\left(t\right)=\int\prod_{n=1}^{N}d\mathbf{x}_{n}\prod_{n=1}^{N+1}\frac{1}{\left(4\pi i\varepsilon\left(1+\frac{eB\theta}{4}\right)^{2}\right)}. \tag{3.3.15}$$

on peut montrer facilement que :

$$\begin{aligned}G_{x}^{\theta}\left(\mathbf{x}_{b},t_{b};\mathbf{x}_{a},t_{a}\right) &= \int_{0}^{\infty}dT\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dE}{\sqrt{2\pi}}e^{iET}e^{iT\left[E^{2}-m^{2}\right]}\exp\left[\left(im^{(\theta)}\omega^{(\theta)}\diagup 2\right)\left(x_{a}y_{a}-x_{b}y_{b}\right)\right]\\ &\times\int_{a}^{b}\exp\left[\left(im^{(\theta)}\diagup 2\right)\int_{t_{a}}^{t_{b}}\dot{y}^{2}dt\right]T\left[y\left(t\right)Dy\left(t\right)\right],\end{aligned} \tag{3.3.16}$$

avec le propagateur $T\left[y\left(t\right)Dy\left(t\right)\right]$ donné par :

$$T\left[y\left(t\right)\right]=\int_{a}^{b}\exp\left[\left(im^{(\theta)}\diagup 2\right)\int_{t_{a}}^{t_{b}}\left(\dot{x}^{2}+2\omega^{(\theta)}\dot{y}x\right)dt\right]Dx\left(t\right), \tag{3.3.17}$$

c'est un propagateur d'une particule libre dans une force externe dépendant du temps $m^{(\theta)}\omega^{(\theta)}\dot{y}\left(t\right)$, qui est liée avec le mouvement de particules de coordonnée y. Maintenant, en utilisant les résultats connus [32], on obtient

$$\begin{aligned}T\left[y\left(t\right)\right] &= \left(m^{(\theta)}\diagup 2\pi iT\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left[\left(im^{(\theta)}\diagup 2T\right)\left(x_{b}-x_{a}\right)^{2}\right]\exp\left[\left(im^{(\theta)}\omega^{(\theta)}\right)\left(x_{b}y_{b}-x_{a}y_{a}\right)\right]\\ &\times\int_{a}^{b}e^{\left[\left(im^{(\theta)}\diagup 2\right)\int_{t_{a}}^{t_{b}}\left[\left(2\omega^{(\theta)}\diagup T\right)\left(x_{a}-x_{b}\right)y-\omega^{(\theta)2}y^{2}+\left(2\omega^{(\theta)2}\diagup T\right)y\int_{t_{a}}^{t}y(s)ds\right]dt\right]}Dy\left(t\right).\end{aligned} \tag{3.3.18}$$

Après intégrations par parties. En combinant l'eq.(3.3.18) dans (3.3.16), le propagateur (3.3.16) s'écrit par:

$$\begin{aligned}G_{x}^{\theta}\left(\mathbf{x}_{b},t_{b};\mathbf{x}_{a},t_{a}\right) &= \int_{0}^{\infty}dT\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dE}{\sqrt{2\pi}}e^{iET}e^{iT\left[E^{2}-m^{2}\right]}\left(m^{(\theta)}\diagup 2\pi iT\right)\\ &\times\exp\left[\left(im^{(\theta)}\diagup 2T\right)\left[\left(x_{b}-x_{a}\right)^{2}\right]\right]\exp\left[\left(im^{(\theta)}\omega^{(\theta)}\diagup 2\right)\left(x_{b}y_{b}-x_{a}y_{a}\right)\right]H\left[b,a\right].\end{aligned} \tag{3.3.19}$$

où $H\left[b,a\right]$ donné comme suit:

$$\begin{aligned}H\left[b,a\right] &= \int_{a}^{b}Dy\left(t\right)\\ &\times e^{\left[\left(im^{(\theta)}\diagup 2\right)\int_{t_{a}}^{t_{b}}\left[\dot{y}^{2}+\left(2\omega^{(\theta)}\diagup T\right)\left(x_{a}-x_{b}\right)y-\omega^{(\theta)2}y^{2}+\left(2\omega^{(\theta)2}\diagup T\right)y\int_{t_{a}}^{t}y(s)ds\right]dt\right]}.\end{aligned} \tag{3.3.20}$$

Le dernier résultat représente le propagateur d'un oscillateur harmonique forcé à une dimension avec une force externe constante $m^{(\theta)}\omega^{(\theta)}\left(x_{a}-x_{b}\right)\diagup T$. Maintenant, nous pouvons d'évaluer l'expression de propagateur.(3.3.20) , after integration par des parties,nous pouvons écrire l'eq.(3.3.20) comme suit:

$$\begin{aligned} H[b,a] &= \int_a^b \exp\left[\left(im^{(\theta)}\diagup 2\right)\int_{t_a}^{t_b}\left[\dot{y}^2+\left(2\omega^{(\theta)}\diagup T\right)(x_a-x_b)\,y-\omega^{(\theta)2}y^2\right]dt\right] \\ &\quad\times\exp\left[\left(im^{(\theta)}\omega^{(\theta)2}\diagup 2T\right)\left[\int_{t_a}^{t_b}y(t)\,dt\right]^2\right]Dy(t). \end{aligned} \tag{3.3.21}$$

Comme nous voyons que la partie plus difficile dans l'eq.(3.3.21) est la dernière exponentielle fonctionnelle. Maintenant, nous introduisons l'intégrale gaussienne suivante [33]

$$\begin{aligned} \exp\left[\left(im^{(\theta)}\omega^{(\theta)2}\diagup 2T\right)\left[\int_{t_a}^{t_b}y(t)\,dt\right]^2\right] &= \left(im^{(\theta)}\diagup 2\pi T\right)^{\frac{1}{2}} \\ \times\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\left(im^{(\theta)}\diagup 2T\right)f^2+\left(im^{(\theta)}\omega^{(\theta)}\diagup T\right)f\int_{t_a}^{t_b}y(t)\,dt\right]df. \end{aligned} \tag{3.3.22}$$

Par substituant l'eq (3.3.22) dans (3.3.21), nous trouvons

$$H[b,a] = \left(im^{(\theta)}\diagup 2\pi T\right)^{\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}H[b,a;f]\exp\left[-\left(im^{(\theta)}\diagup 2T\right)f^2\right]df. \tag{3.3.23}$$

où l'intégrale de chemin $H[b,a;f]$

$$H[b,a;f] = \int_a^b \exp\left[\left(im^{(\theta)}\diagup 2\right)\int_{t_a}^{t_b}\left[\dot{y}^2+2\omega^{(\theta)}(x_a-x_b+f)\,y\diagup T-\omega^{(\theta)2}y^2\right]dt\right]Dy(t) \tag{3.3.24}$$

c'est le propagateur d'un oscillateur harmonique forcée à une dimension avec une force externe constante $m^{(\theta)}\omega^{(\theta)}(x_a-x_b+f)\diagup T$. Alors le term enregistré dans eq.(3.3.21) a été retiré par introduisant d'abord un terme supplémentaire à force constante $m^{(\theta)}\omega^{(\theta)}f\diagup T$ et que par l'intégration sur f à partir de $-\infty$ vers ∞.

Maintenant, nous appliquons le résultat bien connu dans [32] on peut trouver

$$\begin{aligned} H[b,a;f] &= \left(m^{(\theta)}\omega^{(\theta)}\diagup 2\pi i\sin\omega^{(\theta)}T\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left[\left(i\frac{m^{(\theta)}\omega^{(\theta)}}{2\sin\omega^{(\theta)}T}\right)\left[\left(y_a^2+y_b^2\right)\cos\omega^{(\theta)}T-2y_ay_b\right]\right] \\ &\quad\times\exp\left\{\left(im^{(\theta)}\diagup 2\omega^{(\theta)}T^2\right)\left[2\omega^{(\theta)}T(x_a-x_b)(y_a-y_b)\tan\left(\omega^{(\theta)}T\diagup 2\right)\right.\right. \\ &\quad\left.\left.+\left(\omega^{(\theta)}T-2\tan\left(\omega^{(\theta)}T\diagup 2\right)\right)(x_a-x_b)^2\right]\right] \\ &\quad\times\exp\left\{\left(im^{(\theta)}\diagup 2\omega^{(\theta)}T^2\right)\left[\left(\tan\left(\omega^{(\theta)}T\diagup 2\right)-\left(\omega^{(\theta)}T\diagup 2\right)\right)\left(-f^2\right)\right.\right. \\ &\quad\left.\left.+f\left(\omega^{(\theta)}T-2\tan\left(\omega^{(\theta)}T\diagup 2\right)\right)(x_a-x_b)+f\omega^{(\theta)}T(y_a-y_b)\tan\left(\omega^{(\theta)}T\diagup 2\right)\right]\right\} \end{aligned} \tag{3.3.25}$$

Après de longs des calculs mais très simples. En substituant l'eq. (3.3.25) dans l'équation (3.3.23), nous pouvons facilement montrer que

$$\begin{aligned}H\left[b,a\right] &= \left(m^{(\theta)}\diagup 2\pi iT\right)^{\frac{1}{2}}\left[\left(\omega^{(\theta)}T\diagup 2\right)\diagup\sin\left(\omega^{(\theta)}T\diagup 2\right)\right]\\ &\times\exp\left\{\left(im^{(\theta)}\omega^{(\theta)}\diagup 2\sin\omega^{(\theta)}T\right)\left[\left(y_a^2+y_b^2\right)\cos\omega^{(\theta)}T-2y_ay_b\right]\right\}\\ &\times e^{\left\{\left(im^{(\theta)}\diagup 2\omega^{(\theta)}T^2\right)\left[2\omega^{(\theta)}T(x_a-x_b)(y_a+y_b)\tan\left(\omega^{(\theta)}T\diagup 2\right)+\left(\omega^{(\theta)}T-2\tan\left(\omega^{(\theta)}T\diagup 2\right)\right)(x_a-x_b)^2\right]\right\}}\\ &\times e^{\left\{\left[im^{(\theta)}\diagup 4\omega^{(\theta)}T^2\tan\left(\omega^{(\theta)}T\diagup 2\right)\right]\left[\left(\omega^{(\theta)}T-2\tan\left(\omega^{(\theta)}T\diagup 2\right)\right)(x_a-x_b)+\omega^{(\theta)}T(y_a+y_b)\tan\left(\omega^{(\theta)}T\diagup 2\right)\right]^2\right\}},\end{aligned}\tag{3.3.26}$$

après l'intégration sur f à partir de $-\infty$ vers ∞, nous arrivons le résultat suivant

$$\begin{aligned}G_x^\theta\left(\mathbf{x}_b,t_b;\mathbf{x}_a,t_a\right) &= \int_0^\infty dT\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dE}{\sqrt{2\pi}}e^{iET}e^{iT\left[E^2-m^2\right]}\left(m^{(\theta)}\diagup 2\pi iT\right)\left[\left(\omega^{(\theta)}T\diagup 2\right)\diagup\sin\left(\omega^{(\theta)}T\diagup 2\right)\right]\\ &\times e^{\left\{\left(im^{(\theta)}\omega^{(\theta)}\diagup 2\right)\left(\left[\cot\left(\omega^{(\theta)}T\diagup 2\right)\diagup 2\right]\left[(x_b-x_a)^2+(y_b-y_a)^2\right]+(x_ay_b-x_by_a)\right)\right\}}.\end{aligned}\tag{3.3.27}$$

Nous utilisons les coordonnées polaires suivantes

$$x=\rho\cos\theta\ ,y=\rho\sin\theta.\tag{3.3.28}$$

On trouve

$$\begin{aligned}G_x^\theta\left(\mathbf{x}_b,t_b;\mathbf{x}_a,t_a\right) &= \int_0^\infty dT\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dE}{\sqrt{2\pi}}e^{iET}e^{iT\left[E^2-m^2\right]}\left(m^{(\theta)}\omega^{(\theta)}\diagup 2\pi i\sin\omega^{(\theta)}T\right)\\ &\times e^{\left\{\left(im^{(\theta)}\omega^{(\theta)}\diagup 2\right)\left\{\left[\cot\left(\omega^{(\theta)}T\diagup 2\right)\diagup 2\right]\left[\rho_b^2+\rho_a^2-2\rho_b\rho_a\cos(\theta_b-\theta_a)\right]+\rho_a\rho_b\sin(\theta_b-\theta_a)\right\}\right\}}.\end{aligned}\tag{3.3.29}$$

L'équation (3.3.29) s'écrit par

$$\begin{aligned}G_x^\theta\left(\mathbf{x}_b,t_b;\mathbf{x}_a,t_a\right) &= \int_0^\infty dT\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dE}{\sqrt{2\pi}}e^{iET}e^{iT\left[E^2-m^2\right]}\left(m^{(\theta)}\omega^{(\theta)}\diagup 2\pi i\sin\omega^{(\theta)}T\right)\\ &\times\exp\left(im^{(\theta)}\omega^{(\theta)}\diagup 2\right)\left\{\frac{\cos\omega^{(\theta)}\frac{T}{2}}{\sin\omega^{(\theta)}\frac{T}{2}}\left(\rho_b^2+\rho_a^2\right)-\frac{2\rho_a\rho_b}{\sin\omega^{(\theta)}\frac{T}{2}}\left(\cos\left(\theta_b-\theta_a+\left(\omega^{(\theta)}T\diagup 2\right)\right)\right)\right\}.\end{aligned}\tag{3.3.30}$$

Comme on a fait:

$$e^{a\cos\phi}=\sum_{l=-\infty}^{+\infty}e^{il\phi}I_l\left(a\right).\tag{3.3.31}$$

L'eq. (3.3.30) s'obtient

$$G_x^\theta\left(\mathbf{x}_b,t_b;\mathbf{x}_a,t_a\right)=\int_0^\infty dT\int_{-\infty}^{+\infty}\tfrac{dE}{\sqrt{2\pi}}e^{iET}e^{iT\left[E^2-m^2\right]}\left(m^{(\theta)}\omega^{(\theta)}\diagup 2\pi i\sin\omega^{(\theta)}T\right)$$
$$\times\exp\left\{\left(im^{(\theta)}\omega^{(\theta)}\diagup 2\right)\left(\tfrac{\cos\omega^{(\theta)}\frac{T}{2}}{\sin\omega^{(\theta)}\frac{T}{2}}\left(\rho_b^2+\rho_a^2\right)\right)\right\}$$
$$\times\sum_l^{+\infty}e^{il\cos\left(\phi_b-\phi_a+\left(\omega^{(\theta)}T\diagup 2\right)\right)}I_l\left(-\tfrac{2im^{(\theta)}\omega^{(\theta)}\rho_a\rho_b}{2\hbar\sin\omega^{(\theta)}\frac{T}{2}}\right). \tag{3.3.32}$$

Aussi on utilise la relation suivante [34]:

$$\sum_{n=0}^{\infty}n!\frac{L_n^\alpha\left(x\right)L_n^\alpha z^n}{\Gamma\left(n+\alpha+1\right)}=\frac{\left(xyz\right)^{-\frac{1}{2}\alpha}}{1-z}\exp\left(-z\frac{x+y}{1-z}\right)I_\alpha\left(2\frac{\sqrt{xyz}}{1-z}\right). \tag{3.3.33}$$

avec

$$x=m^{(\theta)}\omega^{(\theta)}\rho_a^2,\ y=m^{(\theta)}\omega^{(\theta)}\rho_b^2\text{ et }z=\exp\left(-i\omega^{(\theta)}T\right). \tag{3.3.34}$$

on trouve

$$G_x^\theta\left(\mathbf{x}_b,t_b;\mathbf{x}_a,t_a\right)=\int_0^\infty dT\int_{-\infty}^{+\infty}\tfrac{dE}{\sqrt{2\pi}}e^{iET}\exp\left\{-iT\left[\omega^{(\theta)}\left(2n_\rho+|l|+1\right)-l\omega^{(\theta)}-E^2+m^2\right]\right\}$$
$$\times\sum_{n_\rho}\sum_l\Phi_{n_\rho,l}\left(\rho_b,\phi_b\right)\Phi_{n_\rho,l}^*\left(\rho_a,\phi_a\right). \tag{3.3.35}$$

où

$$\Phi_{n_\rho,l}\left(\rho,\phi\right)=\left(\frac{m^{(\theta)}\omega^{(\theta)}}{\pi}\frac{n_\rho!}{(n_\rho+\mid l\mid)!}\right)^{\frac{1}{2}}\left(m^{(\theta)}\omega^{(\theta)}\rho^2\right)^{|l|\diagup 2}$$
$$\times\exp\left(il\phi-\frac{m^{(\theta)}\omega^{(\theta)}}{2}\rho^2\right)L_{n_\rho}^{(|l|)}\left(m^{(\theta)}\omega^{(\theta)}\rho^2\right). \tag{3.3.36}$$

Pour déterminer les niveaux d'énergie, nous pouvons intégrer sur le temps propre T, nous arrivons

$$G_x^\theta\left(\mathbf{x}_b,t_b;\mathbf{x}_a,t_a\right)=\sum_{n_\rho}\sum_l\int_{-\infty}^{+\infty}\tfrac{dE}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{iET}}{E^2-E_{n_\rho,l}^2}\Phi_{n_\rho,l}\left(\rho_b,\theta_b\right)\Phi_{n_\rho,l}^*\left(\rho_a,\theta_a\right). \tag{3.3.37}$$

avec

$$E_{n_\rho,l}^2=\omega^{(\theta)}\left(2n_\rho+|l|+1\right)-l\omega^{(\theta)}+m^2.$$

où $L_{n_\rho}^{(|l|)}$ est la généralisée de polynômes de Laguerre

Pour évaluer les fonctions d'onde et le spectre d'énergie, nous allons intégrer sur la variable E, ça peut être converti en une intégration complexe le long du contour spécial C, puis en utilisant le théorème des résidus, on obtient:

$$\oint\tfrac{dE}{\sqrt{2\pi}}\tfrac{e^{-iET}}{E^2-E_{n_\rho,l}^2}=-i\left[\Theta\left(T\right)\tfrac{e^{-iE_n^{(\theta)}T}}{2E_n^{(\theta)}}+\Theta\left(-T\right)\tfrac{e^{iE_n^{(\theta)}T}}{2E_n^{(\theta)}}\right], \tag{3.3.38}$$

où les valeurs propres d'énergie sont données par

$$E_n^{(\theta)} = \pm\sqrt{\omega^{(\theta)}\left(2n_\rho + |l| + 1\right) - l\omega^{(\theta)} + m^2}. \tag{3.3.39}$$

Dans (3.3.38), nous avons deux types de propagations, l'une avec l'énergie positive $(+E_n^{(\theta)})$ se propageant vers le futur et l'autre avec une énergie négative $(-E_n^{(\theta)})$ se propageant vers le passé. à partir de ce résultat, on en déduit le spectre d'énergie et les fonctions d'onde correspondantes à partir (3.3.37) en écrivant

$$\begin{gathered} G^{(\theta)}\left(r_f, \varphi_f, r_i, \varphi_i; T\right) = \\ -\sum_{n_\rho}\left[\Theta\left(T\right)\xi_{n_\rho}^{(\theta)}\left(r_f, \varphi_f\right)\xi_{n_\rho}^{*(\theta)}\left(r_i, \varphi_i\right)e^{-iE_n^{(\theta)}T} + \Theta\left(-T\right)\xi_{n_\rho}^{(\theta)}\left(r_f, \varphi_f\right)\xi_{n_\rho}^{*(\theta)}\left(r_i, \varphi_i\right)e^{iE_n^{(\theta)}T}\right], \end{gathered} \tag{3.3.40}$$

où $E_n^{(\theta)}$ est défini dans Eq.(3.3.39) et $\xi_n^{(\theta)}\left(r, \varphi\right)$ est donné par

$$\begin{aligned} \xi_{n_\rho}^{(\theta)}\left(r, \varphi\right) = \sum_l &\left(\frac{m^{(\theta)}\omega^{(\theta)}}{\pi}\frac{n_\rho!}{\left(n_\rho + |l|\right)!}\right)^{\frac{1}{2}}\left(m^{(\theta)}\omega^{(\theta)}\rho^2\right)^{|l|/2} \\ &\times \exp\left(il\phi - \frac{m^{(\theta)}\omega^{(\theta)}}{2}\rho^2\right)L_{n_\rho}^{(|l|)}\left(m^{(\theta)}\omega^{(\theta)}\rho^2\right). \end{aligned} \tag{3.3.41}$$

avec (r, φ) sont des coordonnées polaires dans l'espace ordinaire.

4

Particule de Klein-Gordon avec des interactions dépendantes de l'énergie

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons développer le travail [6], pour étudier en détail la dynamique d'un système relativiste pour les particules de Klein-Gordon à deux dimensions soumis à un champs magnétique constant $\mathcal{B}$ dépendants de l'énergie et perpendiculaire au plan non-commutatif $(\tilde{x}, \tilde{y})$. Ainsi nous allons apporter une clarification au problème de la constante de normalisation des fonctions d'onde relatives à l'équation de Klein-Gordon, suivant deux approches; méthode différentiel et le formalisme d'intégrale de chemins [7, 8].

Au lieu de résoudre ce problème nous allons utiliser la procédure de produit-star à travers le changement de Bopp [35]. Il est connu que l'oscillateur harmonique non-relativiste dans un espace non-commutatif, a un comportement similaire au problème de Landau dans un espace commutatif [36]. Nous généralisons cette idée sur la mécanique quantique relativiste et l'état de l'équation de Klein-Gordon dans l'espace non-commutatif, a un comportement similaire aux l'équation de Klein-Gordon dans l'espace commutatif avec la présence d'un champ magnétique constant.

4.2 Problème de normalisation

Dans un cadre de l'espace non-commutatif, la forme de l'équation de Klein-Gordon au quadri-potentiel $(V(\hat{x}, i\frac{\partial}{\partial t}), \vec{A}(\hat{x}, i\frac{\partial}{\partial t}))$ dépendant d'énergie est définit par:

$$\left(\left(\overrightarrow{p} - e\vec{A}\left(\hat{x}_i, i\frac{\partial}{\partial t}\right)\right)^2 - \left(i\frac{\partial}{\partial t} - V(\hat{x}, i\frac{\partial}{\partial t})\right)^2 + m^{(\theta)2}\right) \star \Phi\left(\hat{x}_i\right) = 0. \tag{4.2.1}$$

Comme on a fait, le "*Moyal-Weyl*" $\star$-produit est défini par:

$$f(x)\star g(x) = \exp\left[\tfrac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_{x_\mu}\partial_{y_\nu}\right] f(x)g(y)_{|x=y} \tag{4.2.2}$$

$$= f(x).g(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{1}{n!}\left(\frac{-1}{2}\right)^n \partial_{\mu_1}...\partial_{\mu_n} f(x)\,\mathcal{P}_{\mu_1}...\mathcal{P}_{\mu_n} g(x)\,. \tag{4.2.3}$$

où $\mathcal{P}_{i_k} = \theta^{i_k j_k} p_{j_k}$.

En effet, il est facile de montrer que:

$$\left(\left(\overrightarrow{\hat{p}} - e\vec{A}\left(\hat{x}_i, i\frac{\partial}{\partial t}\right)\right)^2 - \left(i\frac{\partial}{\partial t} - V(\hat{x}, i\frac{\partial}{\partial t})\right)^2 + m^2\right)\star\Phi(x_i)$$

$$= H\left(x, i\frac{\partial}{\partial t}\right)\Phi(x_i) + \sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{1}{n!}\left(\frac{-1}{2}\right)^n \partial_{\mu_1}...\partial_{\mu_n} H\left(x, i\frac{\partial}{\partial t}\right)\mathcal{P}_{\mu_1}...\mathcal{P}_{\mu_n}\Phi(x_i) = 0. \tag{4.2.4}$$

Cherchons la densité de probabilité de ce système. Multiplions à gauche par $\Phi^*(x_i)$, on obtient:

$$\Phi^*(x_i)\left(\left(\overrightarrow{\hat{p}} - e\vec{A}\left(\hat{x}_i, i\frac{\partial}{\partial t}\right)\right)^2 - \left(i\frac{\partial}{\partial t} - V(\hat{x}, i\frac{\partial}{\partial t})\right)^2 + m^{(\theta)2}\right)\Phi(x_i)$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{1}{n!}\left(\frac{-1}{2}\right)^n \Phi^*(x_i)\left[\partial_{\mu_1}...\partial_{\mu_n} H\left(x, i\frac{\partial}{\partial t}\right)\mathcal{P}_{\mu_1}...\mathcal{P}_{\mu_n}\right]\Phi(x_i) = 0. \tag{4.2.5}$$

puis conjuguons l'équation (4.2.4), après nous multiplions par $\Phi^*(x_i)$, on trouve:

$$\Phi(x_i)\left(\left(\overrightarrow{\hat{p}} - e\vec{A}^*\left(\hat{x}_i, -i\frac{\partial}{\partial t}\right)\right)^2 - \left(-i\frac{\partial}{\partial t} - V^*(\hat{x}, -i\frac{\partial}{\partial t})\right)^2 + m^{(\theta)2}\right)\Phi^*(x_i)$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{1}{n!}\left(\frac{-1}{2}\right)^n \Phi(x_i)\left[\partial_{\mu_1}...\partial_{\mu_n} H\left(x, -i\frac{\partial}{\partial t}\right)\mathcal{P}_{\mu_1}...\mathcal{P}_{\mu_n}\right]\Phi^*(x_i) = 0. \tag{4.2.6}$$

on fait la différence, on peut trouver l'experssion de $\frac{\partial}{\partial t}\rho$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\rho &= -i\left[\Phi^*(x,t)\left(i\frac{\partial}{\partial t} - V(\hat{x}, i\frac{\partial}{\partial t})\right)^2\Phi(x,t) - \Phi(x,t)\left(-i\frac{\partial}{\partial t} - V^*(\hat{x}, -i\frac{\partial}{\partial t})\right)^2\Phi^*(x,t)\right] \\ &\quad + ie^2\left[\Phi^*(x,s)\vec{A}^2\left(x, i\frac{\partial}{\partial s}\right)\Phi(x,s) - \Phi(x,s)\vec{A}^2\left(x, -i\frac{\partial}{\partial s}\right)\Phi^*(x,s)\right].\end{aligned} \tag{4.2.7}$$

Si le système indépendant du temps, on remplace la fonction d'onde $\Phi(x,t)$ par $\sum\limits_n \exp(-iE_n t)\Phi(x)$, on trouve:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\rho &= \sum_{n,m}\Phi^*(x)\Phi(x)\left\{-i\left[(E_n - V(x_n))^2 - (E_m - V(x_m))^2\right]e^{-i(E_n-E_m)t}\right. \\ &\quad \left. + ie^2\cdot e^{-i(E_n-E_m)t}\left[\vec{A}^2(x,E_n) - \vec{A}^2(x,E_m)\right]\right\}.\end{aligned} \tag{4.2.8}$$

la solution de cette équation est

$$\rho = \sum_{n,m} \Phi^* (x) \Phi (x) e^{-i(E_n - E_m)t} \left\{ \frac{\left[(E_n - V(x_n))^2 - (E_m - V(x_m))^2 \right]}{(E_n - E_m)} - e^2 \frac{\left[\vec{A}(x, E_n) - \vec{A}(x, E_m) \right]}{(E_n - E_m)} \cdot \left[\vec{A}(x, E_n) + \vec{A}(x, E_m) \right] \right\} + Cst. \tag{4.2.9}$$

et après intégration sur tout l'espace, nous obtenons ($E_n \to E_m$). On peut trouver la condition de normalisation à la forme suivante:

$$\int \Phi (x) \Phi^* (x) \left[1 - \frac{V(x, E_n)}{E_n} \right] \left[1 - e \frac{\partial V(x, E_n)}{\partial E_n} - e^2 \frac{\frac{\partial \vec{A}(x,E_n)}{\partial E_n} \cdot \frac{\vec{A}(x,E_n)}{E_n}}{1 - \frac{V(x,E_n)}{E_n}} \right] dv = 1. \tag{4.2.10}$$

dv est le volume d'espace à trois dimensions.

Remarque: si le champ électrique égual à zéro, l'eq.(4.2.10) devient

$$\int \Phi (\vec{x}) \Phi^* (\vec{x}) \left[1 - e^2 \frac{\partial \vec{A}(\vec{x}, E_n)}{\partial E_n} \cdot \frac{\vec{A}(\vec{x}, E_n)}{E_n} \right] dxdydz = 1. \tag{4.2.11}$$

Nous conclusion si le vecteur potentiel dépendant de l'énergie, il sera une modification sur la constante de normalisation des fonctions d'onde. Aussi la densité de probabilité n'est pas définie positive.

4.3 Méthodes de calcul

4.3.1 Méthode d'équation

L'équation de Klein-Gordon indépendant du temps avec le vecteur potentiel $\vec{A} = \left(-\frac{B_E}{2} y, \frac{B_E}{2} x, 0 \right)$ dépendant d'énergie est défini par

$$\left(\left(\overrightarrow{\hat{p}} - e\vec{A} \left(\hat{x}_i, i \frac{\partial}{\partial t} \right) \right)^2 + m^2 \right) \star \Phi (x) = E^2 \Phi (x_i) . \tag{4.3.1}$$

Comme on a fait dans le chapitre precédent l'eq. (4.3.1) est équivalent à l'équation des coordonnées cannoniques habitueles décrit par l'Hamiltonien suivant:

$$\hat{H} = \left(1 + \frac{eB_E\theta}{4} \right)^2 \left(p_x^2 + p_y^2 \right) + m^2 + \frac{e^2 B_E^2}{4} \left(x^2 + y^2 \right) + \left(1 + \frac{eB_E\theta}{4} \right) \frac{eB_E}{2} \left(yp_x - xp_y \right) . \tag{4.3.2}$$

avec $B_E = B(1+\gamma E)^q$ et q, γ sont paramètres constant.

Ainsi à propos du problème de valeur propre $\hat{H}_E\Phi(x) = E^2\Phi(x)$. Dans l'espace du position $(\hat{x} = x, \hat{p} = -i\partial/\partial x)$, nous allons introduire les coordonnées polaire à deux dimensions, l'eq (2.5.2) s'obtient:

$$\hat{H} = -\left(1+\frac{eB_E\theta}{4}\right)^2\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) - \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right) + m^2 + \frac{e^2B_E^2}{4}\rho^2 - i\left(1+\frac{eB_E\theta}{4}\right)\frac{eB_E}{2}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

Les solutions exactes sont

$$\Phi_{n_r,m_\ell}(r,\varphi) = c_E\frac{e^{im_\ell\varphi}}{\sqrt{2\pi\rho}}\exp(-x/2)\,x^{\frac{1}{2}(\mu+1/2)}L_n^\mu(x), \tag{4.3.3}$$

avec

$$x = \frac{eB_E}{2\left(1+\frac{eB_E\theta}{4}\right)}r^2, \mu = m_l \tag{4.3.4}$$

et on peut déterminer le spectre d'énergie à travers cette relation

$$E^2 = 2eB_E\left(1+\tfrac{eB_E\theta}{4}\right)(2n_\rho + |l| + 1) - 2eB_E l\left(1+\tfrac{eB_E\theta}{4}\right) + m^2. \tag{4.3.5}$$

avec c_E est la constante de normalisation vérifié l'équation suivante:

$$\int \Phi(x)\Phi^*(x)\left[1 - e^2\frac{\partial\vec{A}(x,E_n)}{\partial E_n}\cdot\frac{\vec{A}(x,E_n)}{E_n}\right]rdrd\phi = 1. \tag{4.3.6}$$

qui équivalent la relation suivante

$$\int_0^{2\pi}\int_0^\infty \Phi(x)\Phi^*(x)\left(1 - \frac{e^2B_E}{4E}\frac{\partial B_E}{\partial E}r^2\right)rdrd\phi = 1. \tag{4.3.7}$$

Puis on trouve:

$$\begin{aligned}&= |c_E|^2\left\{\int \tfrac{1}{2\pi r}\exp(-x)\,x^{(\mu+1/2)}L_n^\mu(x)\,L_n^\mu(x)\,rdrd\varphi\right.\\ &\left.-\frac{e^2B_E}{4E}\frac{\partial B_E}{\partial E}\int \tfrac{r}{2\pi}\exp(-x)\,x^{(\mu+1/2)}L_n^\mu(x)\,L_n^\mu(x)\,rdrd\varphi\right\} = 1.\end{aligned} \tag{4.3.8}$$

En utilisant les relations suivantes:

$$\left\{\begin{array}{c}\int_0^\infty e^{-x}x^\alpha L_n^\alpha(x)\,L_m^\alpha(x)\,dx = \frac{(n+\alpha)!}{n!}\\ \int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha+1}L_n^\alpha(x)\,L_m^\alpha(x)\,dx = \frac{(n+\alpha)!}{n!}(2n+\alpha+1)\end{array}\right. . \tag{4.3.9}$$

On trouve

$$\begin{aligned}&= |c_E|^2\left\{\int \tfrac{1}{2\pi r}\exp(-x)\,x^{(\mu+1/2)}L_n^\mu(x)\,L_n^\mu(x)\,rdrd\varphi\right.\\ &\left.-\frac{e^2B_E}{4E}\frac{\partial B_E}{\partial E}\int \tfrac{r}{2\pi}\exp(-x)\,x^{(\mu+1/2)}L_n^\mu(x)\,L_n^\mu(x)\,rdrd\varphi\right\} = 1.\end{aligned} \tag{4.3.10}$$

On peut démonter que :

$$c_E = \left(2\sqrt{\kappa}\frac{n!}{(n+\mu)!}\left(1+\frac{e^2 B_E}{4E}\frac{\partial B_E}{\partial E}\left(2n+\mu+1\right)\right)\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.3.11}$$

Alors la fonction d'onde devient:

$$\begin{aligned}\Phi^{(\theta)}_{n_\rho,m_\ell}(r,\varphi) &= \sum_{m_l}\left(1+\tfrac{e^2 B_E}{4E}\tfrac{\partial B_E}{\partial E}\left(2n+m_l+1\right)\right)^{1/2}\left(\frac{m^{(\theta,E)}\omega^{(\theta,E)}}{\pi}\frac{n!}{(n_\rho+\mid m_l\mid)!}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\times\left(m^{(\theta)}\omega^{(\theta)}\rho^2\right)^{|m_l|/2}\exp\left(im_l\phi-\frac{m^{(\theta)}\omega^{(\theta)}}{2}\rho^2\right)L^{(|m_l|)}_{n_\rho}\left(m^{(\theta)}\omega^{(\theta)}\rho^2\right)\end{aligned} \tag{4.3.12}$$

on remarque que la constane de normalisation de ce cas est différent du cas ordinaire (dans chapitre 2).

Ensuite nous allons étudier le même problème suivant le formalisme de Feynman.

4.3.2 Méthode d'intégrale de chemin

Le propagateur $G^\theta_x(\mathbf{x}_b,t_b;\mathbf{x}_a,t_a)$, relatives aux particules de Klein-Gordon et sa solution donnée par:

$$\left[\left(\hat{p}_b - eA_b\left(x,i\frac{\partial}{\partial t}\right)\right)^2 - M^2\right]\star G^\theta_x(\mathbf{x}_b,t_b;\mathbf{x}_a,t_a) = \delta(x_b-x_a)\,\delta(t_b-t_a). \tag{4.3.13}$$

et son expression est

$$G^\theta_x(\mathbf{x}_b,t_b;\mathbf{x}_a,t_a) = -i\int_0^\infty d\lambda\langle x_a,t_a\mid e^{i\lambda\left[\left(\hat{p}-eA\left(x,i\frac{\partial}{\partial t}\right)\right)^2-M^2\right]}\mid x_b,t_b\rangle. \tag{4.3.14}$$

où M^2 doit être comprise comme $M^2 - i0^+$

En suivant la procédure habituelle de construction de l'intégrale de chemin: d'abord l'intervalle de temps est divisée en $N+1$ parties égales infinitesimales $\varepsilon = \frac{\lambda}{N+1}$ et l'exponentielle est décomposée en $N+1$ exponentielle (selon Trotter (voir par exemple [32])) et les relations de fermeture

$$\int\int dtdx\mid x,t\rangle\langle x,t\mid = 1. \tag{4.3.15}$$

et

$$\int\int dp_x dp_0\mid p_x,p_0\rangle\langle p_x,p_0\mid = 1. \tag{4.3.16}$$

sont insérées entre chaque paire d'exponentielles. Ensuite, les vecteurs de base $\mid x\rangle, \mid p_x\rangle, \mid t\rangle, \mid p_0\rangle$ kets propres respectivement de $\hat{x}, \hat{p}, \hat{t}$ et $\hat{p}_0 = \hat{E}$ sont utilisés pour éliminer les opérateurs et la transition $\mid x\rangle \rightarrow\mid p\rangle, \mid t\rangle \rightarrow\mid p_0\rangle$ étant effectuée au moyen de produits scalaires

$$\langle t, x \mid p_0, p_x\rangle = \frac{1}{2\pi} e^{-i(p_0 t - p_x x)}. \tag{4.3.17}$$

et en utilisant la relation de fermeture pour les vecteurs propres de moment $|p\rangle$, on peut calculer la représentation Hamiltonienne de l'intégrale de chemins pour le propagateur G_x, à partir de (3.3.5),

$$\begin{aligned} G_x^\theta\left(\mathbf{x}_b, t_b; \mathbf{x}_a, t_a\right) &= -i \int_0^\infty d\lambda \int \prod_{n=1}^{N} d\mathbf{x}_j dt_j \int \prod_{n=1}^{N+1} \tfrac{d\mathbf{p}_j}{(2\pi)} \tfrac{dp_{0j}}{\sqrt{2\pi}} \\ \exp\Bigg\{ i \sum_{n=1}^{N+1} \Bigg[&\mathbf{p}_n \Delta \mathbf{x}_n - p_{0j} \Delta t_n - \varepsilon \left(\mathbf{p}_n - eA\left(p_{0j}, x^i - \tfrac{\theta^{ij}}{2} p_j \right)\right)^2 . \\ &-\varepsilon m^2 + \left(p_{t_n} - eV\left(p_{0j}, x^i - \tfrac{\theta^{ij}}{2} p_j \right)\right)^2 \Bigg] \Bigg\} \end{aligned} \tag{4.3.18}$$

Dans ce travail on applique le $\left(V(x) = 0, \vec{A} = \left(-\frac{B_E}{2} y, \frac{B_E}{2} x, 0\right)\right)$ et nous pouvons trouver la forme Hamiltonienne de l'intégrale de chemins pour le propagateur G_x^θ comme suit:

$$\begin{aligned} G_x^\theta\left(\mathbf{x}_{B_E}, t_b; \mathbf{x}_a, t_a\right) &= -i \int_0^\infty d\lambda \int \prod_{n=1}^{N} dt_n \int \prod_{n=1}^{N+1} \tfrac{dp_{tj}}{\sqrt{2\pi}} \\ \exp\left(i \sum_{n=1}^{N+1} \left[-p_{t_n} \Delta t_n + p_{t_n}^2 - m^2 \right] \right) &\int \prod_{n=1}^{N} d\mathbf{x}_n \int \prod_{n=1}^{N+1} \tfrac{d\mathbf{p}_j}{(2\pi)} \\ \times \exp\Bigg\{ i \sum_{n=1}^{N+1} \Bigg[&\mathbf{p}_n \Delta \mathbf{x}_n - \varepsilon \Bigg(\left(1 + \tfrac{eB_E\theta}{4}\right)^2 \left(p_x^2 + p_y^2\right) \\ + \frac{e^2 B_E^2}{4}\left(x^2 + y^2\right) &+ \left(1 + \frac{eB_E\theta}{4}\right) eB_E\left(yp_x - xp_y\right) \Bigg) \Bigg\}, \end{aligned} \tag{4.3.19}$$

les intégrations sur t_n donnent N fonctions de délta de Dirac $\delta\left(p_{0j} - p_{0j-1}\right)$; ce qui implique aussi la conservation de l'énergie:

$$p_{0_1} = p_{0_2} = p_{0_3} = ... = p_{0_{N+1}} = E. \tag{4.3.20}$$

Aussi, on peut l'intégrer sur les variables de l'impulsion car elle est d'une forme quadratique, nous arrivons à la forme lagrangienne:

$$\begin{aligned} G_x^\theta\left(\mathbf{x}_b, t_{B_E}; \mathbf{x}_a, t_a\right) &= -i \int_0^\infty d\lambda \mathcal{N} \int \tfrac{dE}{\sqrt{2\pi}} e^{iET} e^{i\lambda\left[E^2 - m^2\right]} \\ \times \int \prod_{n=1}^{N} d\mathbf{x}_n \exp\left\{ i \sum_{n=1}^{N+1} \left[\frac{m^{(\theta,E)}}{2} \left[\frac{\left(\Delta \mathbf{x}_n\right)^2}{\varepsilon} + \varepsilon \omega^{(\theta,E)} \epsilon^{ij} x_{ni} \Delta x_{nj} \right]\right]\right\}&, \end{aligned} \tag{4.3.21}$$

avec

$$m^{(\theta,E)} = \frac{1}{2\left(1+\frac{eB_E\theta}{4}\right)^2}, \omega^{(\theta,E)} = 2eB_E\left(1+\frac{eB_E\theta}{4}\right). \tag{4.3.22}$$

et

$$\mathcal{N} = \int \prod_{n=1}^{N+1} \frac{d\mathbf{p}_n}{(2\pi)^2} \exp\left(i\varepsilon \sum_{n=1}^{N+1}\left(1+\frac{eB_E\theta}{4}\right)^2 \mathbf{p}_n^2\right) = \prod_{n=1}^{N+1} \frac{1}{\left(4\pi i\varepsilon\left(1+\frac{eB_E\theta}{4}\right)^2\right)}. \tag{4.3.23}$$

Ce propagateur est le même propagateur de particule non-relativiste dans un champ magnétique constant B_E dans la direction Z, et nous allons utiliser les mêmes étapes qui existe dans le chapitre précédent. On obtient le resultat suivant:

$$\begin{aligned} G_x^\theta(\mathbf{x}_b, t_b; \mathbf{x}_a, t_a) &= -i\int_0^\infty d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{\sqrt{2\pi}} e^{iET} e^{-i\lambda\left[\omega^{(\theta,E)}(2n_\rho+|l|+1)-l\omega^{(\theta,E)}-E^2+m^2\right]} \\ &\quad \times \sum_{n_\rho}\sum_l \Phi_{n_\rho,l}(\rho_b,\phi_b)\,\Phi^*_{n_\rho,l}(\rho_a,\phi_a). \end{aligned} \tag{4.3.24}$$

où

$$\begin{aligned} \Phi_{n_\rho,l_k}(\rho_b,\phi_b) &= \left(\frac{m^{(\theta)}\omega^{(\theta,E)}}{\pi}\frac{n_\rho!}{(n_\rho+\mid l_k\mid)!}\right)^{\frac{1}{2}} \left(m^{(\theta)}\omega^{(\theta,E)}\rho^2\right)^{|l_k|/2} \\ &\quad \times \exp\left(il_k\phi - \frac{m^{(\theta)}\omega^{(\theta,E)}}{2}\rho^2\right) L_{n_\rho}^{(|l|)}\left(m^{(\theta)}\omega^{(\theta,E)}\rho^2\right). \end{aligned} \tag{4.3.25}$$

Pour déterminer les niveaux d'énergie, nous intégrons sur le temps propre T, nous arrivons

$$G_x^\theta(\mathbf{x}_b, t_b; \mathbf{x}_a, t_a) = \sum_{n_\rho}\sum_l \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{iET}}{E^2 - E^2_{n_\rho,l}(E)} \Phi_{n_\rho,l,E}(\rho_b,\theta_b)\,\Phi^*_{n_\rho,l,E}(\rho_a,\theta_a). \tag{4.3.26}$$

avec

$$E^2_{n_\rho,l}(E) = \omega^{(\theta,E)}(2n_\rho+\mid l\mid+1) - l\omega^{(\theta,E)} + m^2. \tag{4.3.27}$$

où $L_{n_\rho}^{(|l|)}$ sont les polynômes généralisés de Laguerre.

Pour évaluer les fonctions d'onde et les spectres d'énergie, on choisie les cas simples de $B^{(E)} = B(1+\gamma E)^q$, l'équation de l'énergie s'écrit par:

$$\begin{aligned} E_{n_\rho,l}(E) &= 2eB(1+\gamma E)^q\left(1+\frac{eB(1+\gamma E)^q\theta}{4}\right)(2n_\rho+\mid l\mid+1) \\ &\quad -l2eB(1+\gamma E)^q\left(1+\frac{eB(1+\gamma E)^q\theta}{4}\right)+m^2. \end{aligned} \tag{4.3.28}$$

Si $q=1$, on trouve

$$\begin{aligned} G_x^\theta(\mathbf{x}_b, t_b; \mathbf{x}_a, t_a) &= \sum_{n_\rho}\sum_l \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{A\sqrt{2\pi}} \frac{e^{iET}}{E^2+BE+C} \\ &\quad \times \Phi_{n_\rho,l,E}(\rho_b,\theta_b)\,\Phi^*_{n_\rho,l,E}(\rho_a,\theta_a). \end{aligned} \tag{4.3.29}$$

avec

$$\begin{aligned}
A &= \left[1 - 2eB\left[2n_\rho + \mid l \mid +1 - l\right] \tfrac{eB\theta}{4}\gamma^2\right]. && (4.3.30)\\
B &= \left[2eB\gamma\left[2n_\rho + \mid l \mid +1 - l\right]\left(1 + \tfrac{eB\theta}{2}\right)\right]/A. && (4.3.31)\\
C &= \left[2eB\left(1 + \tfrac{eB\theta}{4}\right)\left[2n_\rho + \mid l \mid +1 - l\right] + m^2\right]/A. && (4.3.32)
\end{aligned}$$

Alors ses solutions

$$E_{1,2} = eB\gamma\left[2n_\rho + \mid l \mid +1 - l\right]\left(1 + \tfrac{eB\theta}{2}\right) \pm D_{n,l,\theta}. \qquad (4.3.33)$$

et

$$D_{n,l,\theta} = \sqrt{\frac{\left[2eB\gamma[2n_\rho+|l|+1-l]\left(1+\frac{eB\theta}{2}\right)\right]^2}{A^2} - 4\frac{\left[2eB\left(1+\frac{eB\theta}{4}\right)[2n_\rho+|l|+1-l]+m^2\right]}{A}}. \qquad (4.3.34)$$

Nous allons intégrer sur la variable E, ça peut être converti en une intégration complexe le long du contour spécial C, puis en utilisant le théorème des résidus, on obtient:

$$\begin{aligned}
&\oint \tfrac{dE}{2\pi} \tfrac{e^{-iET}}{E^2 - E^2_{n_\rho,l}(E)} \Phi_{n_\rho,l,E}\left(\rho_b,\theta_b\right) \Phi^*_{n_\rho,l,E}\left(\rho_a,\theta_a\right)\\
&= -i\left[\Theta\left(T\right) \tfrac{e^{-iE_1T}}{2D_{n,l,\theta}} \Phi_{n_\rho,l,E_1}\left(b\right) \Phi^*_{n_\rho,l,E_1}\left(a\right) + \Theta\left(-T\right) \tfrac{e^{-iE_2T}}{2D_{n,l,\theta}} \Phi_{n_\rho,l,E_2}\left(b\right) \Phi^*_{n_\rho,l,E_2}\left(a\right)\right], \qquad (4.3.35)
\end{aligned}$$

où les valeurs propres d'énergie sont données par l'équation (4.3.33)

$$\begin{aligned}
&G^{(\theta)}\left(r_f,\varphi_f,r_i,\varphi_i;T\right) =\\
&-\sum_n \left[\Theta\left(T\right) \xi^{(\theta,E_1)}_{n,l}\left(r_f,\varphi_f\right) \xi^{*(\theta,E_1)}_n\left(r_i,\varphi_i\right) e^{-iE^{(\theta,E_1)}_{n,l}T} + \Theta\left(-T\right) \xi^{(\theta)}_n\left(r_f,\varphi_f\right) \xi^{*(\theta)}_n\left(r_i,\varphi_i\right) e^{iE^{(\theta)}_nT}\right],
\end{aligned}$$

(4.3.36)

où $E^{(\theta)}_n$ est défini dans Eq.(3.3.39) et $\xi^{\left(\theta,E_{n;l}\right)}_n(r,\varphi)$ est donné par

$$\begin{aligned}
\xi^{\left(\theta,E_{n,l}\right)}(r,\varphi) &= \frac{1}{\sqrt{2D_{n,l,\theta}A}} \left(\frac{m^{\left(\theta,E_{n;l}\right)}\omega^{\left(\theta,E_{n;l}\right)}}{\pi} \frac{n_\rho!}{(n_\rho + \mid l \mid)!}\right)^{\frac{1}{2}} \left(m^{\left(\theta,E_{n;l}\right)}\omega^{\left(\theta,E_{n;l}\right)}\rho^2\right)^{|l|/2}\\
&\times \exp\left(il\phi - \frac{m^{\left(\theta,E_{n;l}\right)}\omega^{\left(\theta,E_{n;l}\right)}}{2}\rho^2\right) L^{(|l|)}_{n_\rho}\left(m^{\left(\theta,E_{n;l}\right)}\omega^{\left(\theta,E_{n;l}\right)}\rho^2\right). \qquad (4.3.37)
\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant comparer ce résultat (4.3.37) avec celui obtenu dans la section précédente de la théorie de l'équation differentiel, même si les deux méthodes donnent le même résultat des niveaux d'énergie.

5

Conclusion

Suivant deux méthodes (l'équation différentielle et l'approche de Feynman), nous avons étudié dans ce mémoire le problème de la particule relativiste sans spin (Klein-Gordon) dans l'espace non-commutatif soumi dans un champs magnétique constant dépendant de l'énergie E.

Dans le deuxième chapitre, nous avons exposé les outils fondamentaux de la physique générale ainsi un rapport sur l'espace non-commutatif et son application sur la mécanique quantique suivant méthode différentielle; par exemple une particule relativiste sans spin soumi dans un champs magnétique constant.

Dans le troisième chapitre, nous avons exposé le formalisme de l'intégrales de chemin appliqué à la mécanique quantique pour le système de particule soumis dans un champs magnétique constant Nous avons déterminé la fonction de Green, les fonctions des ondes et le spectre énergétique sont bien déduits.

Dans le quatrième chapitre et dans le cadre de la géométrie non-commutative, nous avons reconstruit les fonctions de Green relative au particule relativistes (Klein Gordon) à deux dimensions avec champs magnétique dépendant d'energie, le calcul a été éffectué et comparé aux cas ordinaires. Le cas de l'équation de Klein-Gordon dans l'espace non-commutatif est équivalent au cas ordinaire en présence d'un champ magnétique constant. En exigeant que la densité de probabilité relative à l'équation de KG doit être positive ou négative respectivement pour des énergies positives ou négatives. Finallement, si le vecteur potentiel dépendant de l'énergie, il sera une modification sur la constante de normalisation des fonctions d'onde. Aussi la densité de probabilité n'est pas définie positive.

Il est remarquable, que tous les résultats obtenus concordent exactement à ceux dans la littérature dans le cas où les paramètres de déformation sont nuls.

Bibliographie

[1] M. Dubois Violette, R. Kerner, J. Madore, J. Math. Phys. 31, (1990) 323; A. Connes, Noncommutative Geometry, New York, London, 1994.

[2] D.M. Gitman and V.G. Kupriyanov, Eur. Phys. J. C 54, (2008) 325.

[3] C. Acatrinei, JHEP 0109, (2001) 007.

[4] A. Smailagic, E. Spalucci, Feynman Path integral on the noncommutative plane, J. Phys. A 36, (2003) 467.

[5] Sunandan Gangopadhyay and Frederik G. Scholtz, Phys. Rev. Lett 102, (2009) 241602.

[6] A. Benchikha and L. Chetouani, Cent. Eur. J. Phys. DOI: 10.2478/s11534-014-0457-8.

[7] Benzair H, Merad M, Boudjedaa T, and Makhlouf A. ; ZeitschriftfürNaturforschung A 67 a77 – 88 (2012)

[8] Benzair H, Merad M, and Boudjedaa T. ; Mod. Phys. Lett A 281350144-1350162 (2013)

[9] A. Benchikha and L. Chetouani, Modern Physics Letters A **28**, No. 18 (2013) 1350079

[10] J. Formanek, J. Mares and R. Lombard, Czech. J. Phys. 54, 289 (2004)

[11] J. Garcia-Martinez, J. Garcia-Ravelo, J. J. Pena, A. Schulze-Halberg, Phys. Lett. A 373, 3619 (2009)

[12] H. Hassanabadi, S. Zarrinkamar, A. A. Rajabi, Commun. Theor. Phys. 55, 541 (2011)

[13] R. J. Lombard, J. Mares, Phys. Lett. A 373, 426 (2009)

[14] J. Lin, Y. S. Li, X. M. Qian, Phys. Lett. A 362, 212 (2007)

[15] H. Hassanabadi, S. Zarrinkamar, H. Hamzavi and A. A. Rajabi, Arab. J. Sci. Eng.37, 209 (2012)

[16] M R. Douglas and N A. Nekrasov, Rev. Mod. Phys. 73, (2001) 977.

[17] H. Figueroa, J. M. Gracia-Bondia, F. Lizzi, J. C. Varilly and J. Geom. Phys. 26, (1998) 329.

[18] E. Witten Nucl. Phys. B 460, (1996) 33; A. Connes, M. R. Douglas and A. Schwarz, JHEP 9802 (1998), 003; N. Seiberg and E. Witten, JHEP 09, (1999) 1126.

[19] Snyder H S phys. Rev. **71** 38 (1947) .

[20] K. Li and J. Wang, Eur. Phys. J. C 50, (2007) 1007.

[21] M. Rosenbaum, J. David Vergara and L. Roman Juarez, Phys. Letts. A 367, (2007)1.

[22] Jian Jing, Shi-Hua Zhao, Jian-Feng Chen and Zheng-Wen Long. Eur. Phys. J. C 54, (2008) 685.

[23] S. Bellucci, A. Nersessian and C. Sochichiu, Phys. Lett. B 522, (2001) 345.

[24] M. Bordemann, African Journal Of Mathematical Physics 2, (2005) 21.

[25] H. Weyl. Quanten mechanik und Gruppen theorie. Z. Physik, 46, (1927) 1.

[26] F. Bopp and Werner Heisenberg und die Physik unserer Zeit (Vieweg, Braunschweig), 128 (1961).

[27] L. Mezincescu. Star product in quantum mechanics (2000). arXiv: hep-th/0007046.

[28] E. Kamke, Differentialgleichungen L¨osungsmethoden und L¨osungen (Leipzig, 1959)

[29] Handbook of Mathematical Functions, Natl. Bur. Stand. Appl. Math. Ser. No. 55, edited by M. Abramowitz and I. Stegun (U.S. GPO, Washington, D.C., 1965).

[30] M. Chaichian, M. M. Sheikh-Jabbari, and A. Tureanu. Phys. Rev. Lett. 86, 2716 (2001).

[31] Bin. Kang. Cheng, Physica Scripta. **29**, 351-352 (1984)

[32] D. C. Khandekar, S. V. Lawande, and K. V. Bhagwat, Path Integral Methods and their Applications (World Scientific, Singapore, 1993).

[33] Papadopoulos, G. J., J. Phys. A7, 183 (1974).

[34] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, Table of Integrals, Series, and Products (Academic, New York, 1980) (Corrected and enlarged edition).

[35] T. Curtright, D. Fairlie and C. Zachos, Phys. Rev. D 58, (1998) 025002.

[36] G. Magro (2003) arXiv:quant-ph/0302001v1.