UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matière
Département de physique

Mémoire

Master En Sciences

Filière : Physique
Spécialité : Physique de rayonnement

Présenté par : Farida Beeregui

Thème

Particule Non-Relativiste (Spin1/2) dans l'Espace Non-Commutatif avec Potentiel Dépendant de l'Energie

Soutenu publiquement

Le : 26 /05/2015

Devant le jury

Mme	L. Zeghichi	Président	UKM Ouargla
Mme	H. Benzair	Encadreur	UKM Ouargla
Mme	A. Naim	Examinateur	UKM Ouargla
Mme	L. Benmabrouk	Co-encadreur	UKM Ouargla

Année Universitaire : 2014/2015

Remerciements

Tout d.abord; je remercie Dieu le tout puissant de mavoir donnée la patience, la volonté et l'énergie pour poursuivre ce travail.

Je tiens à remercier le Dr. Hadjira BENZAIR de mavoir fait l'honneur d'examiner ce mémoire et den être rapporteur. Je tiens à le remercier aussi pour la pertinence de ses remarques et sa patience pendant ce travail. Jadmire beaucoup ses travaux et sa manière de diriger qui furent pour moi une grande source dinspiration et de motivation. Il a su m'encourager lorsque je doutais et il ma permis de travailler dans une ambiance scienti.que exceptionnelle et je tiens à lui témoigner ma gratitude et ma reconnaissance.

J'adresse également de vifs remerciements le Dr: Amal. Naim pour l'aide, les conseils, les remarques, les discussions scientifiques trèsriches.Je remercie d'avoir présidé le jury de soutenance, et lui adresse toute ma gratitude.J'adresse mes remerciements à Dr : Lalai. Zeghichiqui ma fait l'honneur de juger ce travail, Je tiens à la remerciée aussi pour son aide et son soutien scienti.que.Je ne pourrais terminer sans remercier ma mère et mon père son frère et sa soeur et tout famille qui m.ont soutenue et encouragée pour terminer ce travail. Je remercie tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire.

Farida Beeregui

Dédicaces

SOURIRE ALLAH UTERUS HUMAIN

Je dédie ce travail :

Aux prunelles des mes yeux, les deux premiers amours de ma vie : mon père et ma mère
*A mes frères :AZZ ALDIN –Fatah_*
maseode Yacine -Djamel -
_et à mes sœurs :fatuma,saida,latifa,dalila,sabeha
Badera,et ma famill
-A toutes mes amis : Amele,Nabila ,Seade ,Hayat ,
chahenase,cherifa,naima, Khadra ,

-A tous ceux qui me connaissent de loin ou de prés.
-A tous ceux qui m 'ont aidé ;

A tous enseignants .

farida

Table des matières

Résumé

Nous allons présenter dans ce mémoire, les définitions nécessaires de la structure algébrique de l'espace non commutative. Puis, selon l'équation de continuité on peut vérifier et solutionner exactement le problème de normalisation de la fonction d'onde à travers de l'équation de continuité. Après, nous allons essayer d'étudier explicitement un exemple simple; c'est la particule de l'équation de Pauli (cas non-relativiste) soumis dans un champ magnétique constant et dépendant de l'énergie perpendiculaire au plan non-commutatif avec deux approches méthode direct et méthode de Feynman.

Mots-clés: L'équation de Pauli, La géométrie Non-commutative, Formalisme de l'intégrale de chemins, Propagateur non-relativiste.

1

Introduction générale:

Tel que c'est connu, la physique moderne repose sur deux fondements principaux; le premier est celui de la théorie relativiste générale d'Albert Einstein qui nous met dans le contexte théorique afin de comprendre le monde dans ses macros-dimensions: les planètes, les étoiles, les galaxies et les amas de galaxies voire même ce qui est en extra-univers, elle explique la force de gravité dans le macro-monde. Elle utilise principalement la géométrie Riemannienne comme formalisme mathématique. Le second fondement est celui de la mécanique quantique, elle nous renseigne, dans le cadre théorique, sur le monde dans ses micro-dimensions: les molécules, les atomes voire même les infimes composants de cette dernière, tels que les électrons et les quarks; et elle explique les trois forces principales dans le micro-monde. (Les forces faibles, électromagnétiques, et fortes). Elle utilise la théorie des algèbres d'opérateur agissant sur un espace de Hilbert (les algèbres de Von Neumann). Le but de citer ces deux fondements chacune à part est une réussite, mais si on les rassemble, elles deviennent non fiables sur toutes les prévisions. Les génies du monde moderne ont essayé de rassembler ces deux théories en une seule, mais en vain. Les tentatives sont toujours d'actualité pour résoudre ce problème, plusieurs solutions sont apparues mais se montrent contradictoires après un moment. On cite par exemple le modèle Standard qui a connu une grande réussite dans la fusion des trois interactions principales. (les interactions fortes, électromagnétiques et faibles), puis, il y a eu d'autres modèles de fusion des quatre forces en un seul modèle, tel que: le modèle super-symétrique, le modèle avec dimensions supplémentaires, théorie des cordes et la M-théorie.

Toutes ces tentatives font intervenir ou conduisent l'émergence de la géométrie non-commutative. Où l'idée est basée sur la généralisation des relations de commutation canonique ordinaire.

Les racines de cette géométrie non-commutative, remontent à la découverte de la mécanique quantique par Heisenberg, puis Snyder a innové en 1947 dans la notion de l'espace-temps non commutatif en physique des particules [1]. Cette non-commutativité de l'espace géométrique et algébrique au cas plus général où l'algèbre n'est pas commutative. qu'il était de pouvoir se débarrasser des divergences UV de la théorie quantique des champs, tout en conservant la covariance de Lorentz. Mais, parallèlement à cela, la théorie de la normalisation produisant des résultats remarquables, la théorie de Snyder tomba dans l'oubli. Récemment, le concept des coordonnées non-commutatives est réapparu dans le contexte des théories des super-cordes, la longueur intrinsèque des cordes induisant une structure non-commutative dans l'espace-temps à très petite échelle. Les applications de la géométrie non-commutative dans la mécanique quantique relativiste et non-relativiste ont été traitées par un grand nombre de problèmes déjà étudiés [2, 3, 4, 5, 6, 7].

En 1942, il a apparu une troisième méthode aux méthodes de matricielles de Heisenberg et la formulation différentielle de Schrödinger. Cette méthode a introduit en physique comme on a fait Feynman dans sa thèse qui appelée la formulation d'intégrale de chemin et elle est basée sur le Lagrangien, c'est plus compliquée du point de vue mathématique. Qui offre un point de vue alternatif sur la mécanique quantique qui s'est rapidement imposée en physique théorique avec son extension sur la théorie quantique des champs et les théories de jauge. Grâce à l'idée de Dirac, celui qui est arrivé à la conclusion suivante: le propagateur de la mécanique quantique est identique à $\exp(iS/\hbar)$, S est l'action classique évaluée le long de chemin classique qui est vérifié le principe de moindre action pour décrire un système ne possède pas nécessairement à la forme hamiltonienne, donné par:

$$S = \int_{t_a}^{t_b} dt \left[\frac{m\dot{x}^2}{2} - V(x) \right]. \tag{1.0.1}$$

où $x(t)$ et $\dot{x}(t)$ sont la coordonnée et la vitesse de la particule.

L'objectif de ce mémoire est étudié les potentiels dépendants de l'énergie et d'apporter une clarification au problème de la constante de normalisation des fonctions d'onde non-relatives à l'équation de pauli, en utilisant cette approche des intégrales de chemins et dans un espace non-commutatif que remontent à la découverte de la mécanique quantique par Heisenberg.

Concernant le but de ce mémoire, plusieurs applications de système relativiste et non-relativiste ont été étudiées citer par exemple en cas non-relativiste: l'équation de Schrödinger avec les dimensions 1D, 3D et D [8, 9], le problème des potentiels locaux équivalents [10], les potentiels dépendants de l'énergie de manière linéaire discutées semi-classiquement [11] le problème à plusieurs corps avec des potentiels dépendants de confinement de l'énergie [12], la transformation de Darboux utilisée dans l'équation de Schrödinger avec un potentiel dépendant de l'énergie [13]. En plus l'extension relativiste de ce problème a limité certaines tentatives, parmi eux nous citons: la méthode Nikiforov-Uvarov [14], et par la méthode d'intégrale de chemins [15].

Après cette brève introduction, notre mémoire traitant des problèmes physiques dépendants de l'énergie dans l'espace non-commutative se compose essentiellement de trois chapitres.

Au 1er chapitre, nous allons présenter les définitions nécessaires de la géométrie non-commutative. Puis, selon la méthode d'équation nous allons déterminées les solutions exactes de fonctions d'ondes et les specters des énergies dans l'espace non-commutatif consacré aux particules non-relativistes avec spin $1/2$ soumie dans un champs magnétique constant.

Ensuit dans le 2ème chapitre, nous allons calculer les spectres d'énergies et les fonctions d'ondes dans le même espace et le problème physique mais par utiliser une autre approche qui s'appalle l'approche des intégrales de chemins.

Dans le 3ème chapitre et avec les mêmes étapes du priemer chapitre, nous allons traiter le problème de la normalisation des fonctions d'onde, lorsque les interactions décrites par les potentiels dépendants de énergies sont présentes dans l'équation de Pauli est reconsidéré par le formalisme des intégrales de chemins. Les corrections sont déterminées encore via l'équation de continuité. Après cette clarifie nous allons calculer les spectres d'énergies et les fonctions d'ondes dans un champs magnétique constant.

2

Mécanique quantique déformé

2.1 Introduction

En physique classique, nous savons que les particules peut être décrit à l'instant t très précis exactement avec deux variables, à savoir les coordonnées de l'espace des phases comme les positions et les impulsions. Qui sont régies par les lois de Newton, qui peuvent être extraites tous les équations de movements concernent aux variables cannonique $(\vec{r}, \vec{p})$. Cependant, elle est bien adaptée à l'étude de systèmes à grand nombre de degrés de liberté a généralisé aux les équations de Hamiltonien

$$\overrightarrow{\dot{r}} = \frac{\partial H\left(\vec{p}, \vec{r}, t\right)}{\partial \vec{p}}, \overrightarrow{\dot{p}} = -\frac{\partial H\left(\vec{p}, \vec{r}, t\right)}{\partial \vec{r}}. \tag{2.1.1}$$

où H est la fonction d'hamiltonien du système, et les équations de movements pour la particule non-relativiste donnent comme suit:

$$\overrightarrow{\dot{r}} = \frac{\vec{p}}{m}, \quad \overrightarrow{\dot{p}} = -\vec{\nabla} V\left(\vec{r}, t\right). \tag{2.1.2}$$

Qu'il permet de prédire l'avenir de la particule à l'instant t_b superieur à l'instant initial t_a.

Mais à la fin du 19ème siècle, il a apparait certains problèmes physique très difficiles, où la mécanique classique ne peut pas leur solutionnes, par exemple; le rayonnement du corps noir, l'effet de photoélectrique et discontinuité des niveaux d'énergie ... etc. Merci aux groupes de chercheurs scientifiques ont pu de trouver les meilleures solutions, comme; Planck, de-Broglie, Niels-Bor, Einstein, Schrödinger et Heisenberg, ... etc. Cette mécanique dite physique quantique, et nous allons décrire très brievement les éléments essentiels de la mécanique quantique dans la section prochaine.

2.2 La mécanique quantique (MQ) dans l'espace ordinaire:

Pour passer de mécanique classique à mécanique quantique, il faut remplacer les grandeurs physique par des observables, ainsi des états et des lois de mouvement par des structures plus compliquées, selon la philosophie suivante: d'après de Broglie toute particule (comme, par exemple, un électron) a toujours l'aspect d'une onde, et il associe à son énergie E la formule de Planck $E = \hbar\omega$ où ω est la fréquence de l'onde et $\hbar$ la constante de Planck, et à sa quantité de mouvement p le vecteur $\hbar k$ où la longueur du vecteur k est donnée par $2\pi/\lambda$ et λ étant la longueur d'onde. Une particule libre (pour laquelle l'énergie potentielle V s'annule) est décrite par une onde plane

$$\Psi\left(t,q\right) = \exp\left(-i\omega t + ik.q\right), \tag{2.2.1}$$

où $k.q = \sum_{j=1}^{n} k_j q_j$. La fonction d'onde Ψ est évidemment une solution de l'équation

$$E\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi = \frac{p^2}{2m}\Psi, \tag{2.2.2}$$

où $\Delta = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial q_j^2}$ est l'opérateur de Laplace et $p^2 = p\cdot p$. Schrödinger a généralisé cette équation pour inclure des forces par son équation de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}\left(t,q\right) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi\left(t,q\right) + V\left(q\right)\Psi\left(t,q\right) =: \left(\hat{H}\Psi\right)\left(t,q\right), \tag{2.2.3}$$

où l'opérateur différentiel $\hat{H}$ s'appelle opérateur hamiltonien du système par son analogie évidente avec la fonction hamiltonienne H. Cette description de Schrödinger avait un grand succès pour l'atome d'hydrogène pour lequel $V(q) = -\alpha/\left|q\right|$, α étant une constante: l'ensemble des valeurs propres de $\hat{H}$ correspondait exactement au spectre mesuré. Ici $\hat{H}$ est considéré comme un opérateur auto-adjoint, défini sur un domaine dense $D(\hat{H})$ dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H} := L^2\left(\mathbb{R}^3, d^3q\right)$. Les (classes des) fonctions d'onde dans $\mathcal{H}$ –à un multiple complexe près– sont interprétées comme des états purs du système quantique, c'est-à-dire elles donnent déjà une description complète du système. Le carré du module de Ψ, $\left|\Psi\right|^2$, est considéré comme une distribution de probabilité pour la position au cas où la norme de Ψ vaut 1. Evidemment, la fonction d'onde pour la particule libre ne fait pas partie de $\mathcal{H}$: vue comme distribution tempérée (au sens de Laurent Schwartz) elle s'obtient par approximation avec des éléments de $\mathcal{H}$, le dernier espace étant dense dans l'espace de distributions. En général, comme déjà dans la mécanique classique, on peut considérer d'autres observables quantiques comme par exemple la position

$$Q_k : \Psi \rightarrow \left(q \rightarrow q_k\Psi\left(q\right)\right). \tag{2.2.4}$$

Où l'impulsion (qui est proportionelle à la vitesse pour les systèmes non-relativistes)

$$P_l : \Psi \rightarrow \tfrac{\hbar}{i}\tfrac{\partial \Psi}{\partial q_l}. \tag{2.2.5}$$

En général tous les opérateurs auto-adjoints A définis sur un domaine de définition $D(A) \subset \mathcal{H}$ dense (pour lesquels on a une bonne définition du spectre). Un espace d'observables mathématiquement plus commode est $B(\mathcal{H})$, l'espace de tous les opérateurs linéaires bornés: $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$. Heisenberg observa que l'effet de dispersion d'une onde se traduit dans la fameuse relation d'incertitude entre la position et l'impulsion. Il en déduisit que les seules valeurs que l'on puisse mesurer dans une expérience sans aucune déviation sont les valeurs propres (plus général: les valeurs spectrales) de l'opérateur hamiltonien [16].

2.3 L'espace non-commutatif

La mécanique quantique non-commutative est formée de la même manière que la mécanique ordinaire avec des variables dynamiques $\tilde{x}_i$ et $\tilde{p}_j$ représentées par des opérateurs dans un espace de Hilbert et vérifient les relations de commutation suivantes:

$$\left[\widehat{\tilde{x}}_i, \widehat{\tilde{p}}_j\right] = i\delta_{ij}, \quad \left[\widehat{\tilde{x}}_i, \widehat{\tilde{x}}_j\right] = i\theta_{ij}, \quad \left[\widehat{\tilde{p}}_i, \widehat{\tilde{p}}_j\right] = 0, \quad \text{et } i,j = 0,1,2, \tag{2.3.1}$$

où $\theta_{ij} = \epsilon_{ijk}\theta^k$ est un paramètre constant qui décrit la non-commutativité de l'espace, il est réel, anti-symétrique et a la dimension (longueur)^2.

La quantification de Weyl [17] consiste à faire une correspondance biunivoque entre l'algèbre des fonctions $f(x)$ définies sur deux dimensions et l'algèbre des opérateurs. On définit le symbole de Weyl par:

$$W(f) = \hat{f} = \tfrac{1}{(2\pi)}\int d^2k e^{ik_\nu \tilde{x}^\nu} \tilde{f}(k), \tag{2.3.2}$$

et $\tilde{f}(k)$ est la transformation de Fourier de $f(x)$:

$$\tilde{f}(k) = \tfrac{1}{(2\pi)}\int d^2x e^{-ik_\nu x^\nu} f(x). \tag{2.3.3}$$

La multiplication des deux opérateurs $W(f)$ et $W(g)$ obtenue à partir de Eq.(2.3.2) donne un autre opérateur $W(f * g)$:

$$W(f) \bullet W(g) = \hat{f} \bullet \hat{g} = W(f * g), \tag{2.3.4}$$

avec $f * g \in (A, *)$, une fonction classique qui est bien définie, comme indiqué dans le suivant. En substituant Eq.(2.3.2) dans Eq.(2.3.4) nous obtenons:

$$W(f * g) = W(f) \bullet W(g) = \tfrac{1}{(2\pi)^2}\int d^2k d^2p e^{ik_\mu \tilde{x}^\mu} e^{ip_\nu \tilde{x}^\nu} \tilde{f}(k)\tilde{g}(p). \tag{2.3.5}$$

Dans le cas de non-commutativité canonique donnée par Eq.(2.3.1), le produit des deux exponentielles dans la formule ci-dessus donne une exponentielle d'une combinaison linéaire de la $\tilde{x}_\mu$ après l'application de la formule de Baker-Campbell-Hausdorff

$$e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} = e^{\hat{A}+\hat{B}+\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]+\frac{1}{12}\left([\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]]+[[\hat{A},\hat{B}],\hat{B}]+...\right)}, \tag{2.3.6}$$

et considérant la relation commutateur $[[\tilde{x}^\mu, \tilde{x}^\nu], \tilde{x}^\rho] = 0$ permet ainsi tous les termes, y compris plus d'un commutateur de Eq.(2.3.6) disparus:

$$e^{ik_\mu \tilde{x}^\mu} e^{ip_\nu \tilde{x}^\nu} = e^{i(k_\nu+p_\nu)\tilde{x}^\nu - \frac{i}{2}k_\mu p_\nu \theta^{\mu\nu}}. \tag{2.3.7}$$

Nous obtenons $f * g$ en comparant Eq.(2.3.5) avec Eq.(2.3.2) et en remplaçant l'opérateur $\tilde{x}_\mu$ par la coordonnée x_μ:

$$(f * g) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^2k d^2p e^{i(k_\nu+p_\nu)\tilde{x}^\nu - \frac{i}{2}k_\mu p_\nu \theta^{\mu\nu}} \tilde{f}(k)\tilde{g}(p). \tag{2.3.8}$$

Ainsi, le Moyal-Weyl $*$-produit est défini par:

$$f(x) * g(x) = \exp\left[\tfrac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_{x_\mu}\partial_{y_\nu}\right] f(x)g(y)_{|x=y}, \tag{2.3.9}$$

avec ∂_{x_μ} est l'opérateur partiel dérivé. Montrons que le produit star induit par la non-commutativité et est remplacé par le produit d'habitude, plus une correction non locale dans la fonction scalaire $f(x)$.

En effet, il est facile de montrer que:

$$f(x) * g(x) = f(x).g(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{i}{2}\right)^n \partial_{\mu_1}...\partial_{\mu_n} f(x)\,\theta^{\mu_1\nu_1}...\theta^{\mu_n\nu_n}$$
$$\partial_{\nu_1}...\partial_{\nu_n} g(x). \tag{2.3.10}$$

Maintenant, nous remplaçons ∂_{j_k} par $ip_{j_k} = \frac{\partial}{\partial x^{j_k}}$ et introduire $\mathcal{P}_{i_k} = \theta^{i_k j_k} p_{j_k}$. Nous prenons la transformée de Fourier $f(x)$, alors

$$\partial_{\mu_1}...\partial_{\mu_n} f(x)\,\mathcal{P}_{\mu_1}...\mathcal{P}_{\mu_n} g(x) = i^n \int d^3k e^{ikx} f(k)\,(k\mathcal{P})^n g(x). \tag{2.3.11}$$

En sommant sur n dans (2.3.10), nous obtenons:

$$f(x) * g(x) = \int d^2k e^{ikx} e^{\frac{i}{2}\mathcal{P}k} f(k)\, g(x). \tag{2.3.12}$$

Maintenant, en utilisant $[p_i, x_j] = -i\delta_{ij}$, nous obtenons:

$$f(x) * g(x) = f\left(x - \tfrac{\mathcal{P}}{2}\right).g(x). \tag{2.3.13}$$

Ce résultat (2.3.13) est un point de passage du cas non-commutatif au cas commutatif, (c'est-à-dire, le $*$-produit peut être transformé en un produit ordinaire en décalant $\tilde{x}$ par $x - \frac{\mathcal{P}}{2}$) qui est nappale Décalage de Bopp [18].

2.4 L'équation de Pauli dans l'espace non-commutative

L'équation de Pauli est une équation de l'électron de spin. Sa charge est $(-e)$, sa masse est m_e, son spin est $\vec{S} = \frac{1}{2}\hbar\vec{\sigma}$, et son moment magnétique est

$$\vec{M} = -2\mu_\beta\vec{S}, \tag{2.4.1}$$

où B est le magnéton de Bohr.

$$-\vec{M}.\vec{B} = \mu_\beta\vec{\sigma}.\vec{B}. \tag{2.4.2}$$

Dans un champ magnétique B, le moment magnétique donne lieu à une énergie.

Et nous notons que $\vec{\sigma}$ est une matrice 2×2.

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.4.3}$$

L'hamiltonien est défini par

$$\hat{H} = \frac{1}{2m_e}\left(\vec{p} - e\vec{A}\right)^2 - eV + \mu_\beta\vec{\sigma}.\vec{B}. \tag{2.4.4}$$

Ici, nous considérons le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique B constante et uniforme pointant dans le $(+z)$ direction pour la particule non-relativiste soumis dans un espace NC.

Comme il est très difficile de résoudre ces équations pour le cas de $V(x) \neq 0$, il est habituel d'écrire $V(x) = 0$ afin de résoudre le problème. Sous ces hypothèses l'équation différentielle de Pauli dans l'espace NC s'écrit comme suit:

$$\left(\left(\frac{\left(\vec{p} - e\vec{A}\right)^2}{2m}\right) + \mu_\beta\vec{\sigma}.\vec{B}\right) \star \Psi(x) = E\Psi(x). \tag{2.4.5}$$

où le produit-$\star$ représent un produit n'est pas normale. Selon [19], le système physique décrit par (2.4.5) est équivalent à l'équation des coordonnées cannoniques habitueles décrit par l'Hamiltonienne suivante; (en remplaçant les coordonnées non-commutatives $\hat{x}_i$ par $\left(\hat{x}_i - \frac{\theta_{ij}\hat{p}_j}{2}\right)$:

$$\left(\left(\frac{\left(\vec{p} - e\vec{A}\left(\hat{x}_i - \frac{\theta_{ij}\hat{p}_j}{2}\right)\right)^2}{2m}\right) + \mu_\beta\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{B}\right)\Psi(x) = E\Psi(x). \tag{2.4.6}$$

avec la jauge symétrique, $\vec{A}(x) = \frac{1}{2}B(-y, x, 0)$, l'eq(2.4.6) devient:

$$\left(\left(\left(p_x^2 + p_y^2\right)\right) + \frac{e^2B^2}{4\left(1+\frac{eB\theta}{4}\right)^2}\left(x^2 + y^2\right) + \frac{eB(yp_x - xp_y)}{\left(1+\frac{eB\theta}{4}\right)} + 2m\frac{\varepsilon\mu_\beta B - E}{\left(1+\frac{eB\theta}{4}\right)^2}\right)\Psi_\varepsilon(x) = 0. \tag{2.4.7}$$

avec $\varepsilon = \pm 1$ représent le spin de particule.

Ainsi à propos du problème de valeur propre $\hat{H}\Psi(x) = E\Psi(x)$. A la représentation du position $\hat{x} = x$ et $\overrightarrow{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$, et ∇^2 est l'opérateur Laplacien en coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z), si le problème a une symétrie cylindrique.

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ L_z &= -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}, \kappa = \frac{eB}{2\left(1 + \frac{eB\theta}{4}\right)}. \end{aligned} \tag{2.4.8}$$

Nous pouvons partager $\Psi(x)$ comme suit:

$$\Psi_{\uparrow}(x) = \begin{pmatrix} \Psi_+(x) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \Psi_{\downarrow}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \Psi_-(x) \end{pmatrix}. \tag{2.4.9}$$

alors l'équation de $\Psi(x)$ dans l'Eq. (2.4.7) devient:

$$\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \kappa\rho^2 - 2\kappa i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi} + \beta_\varepsilon\right]\Psi_\varepsilon(\rho, \phi, z) = 0, \tag{2.4.10}$$

où Ψ_ε signifie composants supérieurs (inférieurs) de la spinoriel. Pour $\lambda = +1(-1)$, qui est, le spineur peut être développé en termes des états de spin-up et les états de spin-down, respectivement.

C'est-à-dire, le spinor peut être augmenté en termes de tournent-vers le haut et tournent-vers le bas des états. $\beta_\varepsilon(\theta) = 2m\left(E_\theta - \varepsilon\mu_\beta B_\theta\right)$ est une valeur dépendant de paramètre déformé θ avec:

$$E_\theta = \frac{E}{\left(1 + \frac{eB\theta}{4}\right)^2}, B_\theta = \frac{B}{\left(1 + \frac{eB\theta}{4}\right)^2}. \tag{2.4.11}$$

Les solutions exactes sont définit par

$$\Psi_\varepsilon(\rho, \phi, z) = \frac{e^{\frac{i}{\hbar}m_\ell\varphi}e^{ip_z z}}{\sqrt{2\pi}}\Phi_\varepsilon(\rho), \tag{2.4.12}$$

on trouve

$$\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) - \frac{m_\ell^2}{\rho^2} - p_z^2 - \kappa\rho^2 + 2\kappa m_l + \beta_\varepsilon(\theta)\right]\Phi_\varepsilon(\rho) = 0. \tag{2.4.13}$$

Ensuite nous pouvons écrire la fonction radiale par multiplication à deux fonctions $\Phi(\rho) = f(\rho)\mathcal{R}(\rho)$, le terme $\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)\right)$ s'obtient:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)f(\rho)\mathcal{R} = f(\rho)\mathcal{R}'' + \left(f'' + \frac{1}{\rho}f'\right)\mathcal{R} + \left(\frac{f}{\rho} + 2f'\right)\mathcal{R}'. \tag{2.4.14}$$

Peut être choisi la fonction $f(\rho)$ suivant la condition suivante ($\frac{f}{\rho} + 2f' = 0$), qui donne l'expression $f = \frac{1}{\sqrt{\rho}}$, alors l'eq(2.4.13) s'obtient:

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{(m_\ell^2 - 1/4)}{\rho^2} - p_z^2 - \kappa^2\rho^2 + 2\kappa m_l + \beta_\varepsilon\right] \mathcal{R}_{\varepsilon,m_l,n}(\rho) = 0. \tag{2.4.15}$$

on peut facilement trouver la solution exacte de cette équation radial [**?**, 21]:

$$\mathcal{R}_{n_r,m_\ell,\varepsilon} = c_\varepsilon \exp\left(-\frac{x}{2}\right) x^{\frac{m_l+1/2}{2}} L_n^{m_l}(x), \tag{2.4.16}$$

avec c_ε est la constante de normalisation et $L_n^{m_l}(x)$ sont les Polynômes de Laguerre et

$$x = \kappa r^2, \mu = m_l. \tag{2.4.17}$$

Cela implique que l'énergie non-relativiste est donnée par

$$2m\left(E_\theta - \varepsilon\mu_\beta B_\theta\right) = p_z^2 + 2\kappa\left(2n_\rho + |m_l| - m_l + 1\right) \tag{2.4.18}$$

où les fonctions d'onde sont écrit comme fonction (ρ, ϕ, z) multiplié par les états de spin-up ou des états de spin-down:

$$\Psi_+(x) = c_+ \frac{e^{\frac{i}{\hbar}m_\ell\varphi}e^{ip_z z}}{\sqrt{2\pi\rho}} \exp\left(-\tfrac{x}{2}\right) x^{\frac{m_l+1/2}{2}} l_n^{m_l}(x). \tag{2.4.19}$$

$$\Psi_-(x) = c_- \frac{e^{\frac{i}{\hbar}m_\ell\varphi}e^{ip_z z}}{\sqrt{2\pi\rho}} \exp\left(-\tfrac{x}{2}\right) x^{\frac{m_l+1/2}{2}} l_{n-1}^{m_l}(x). \tag{2.4.20}$$

Après ce point, nous considérons l'électron se déplacer uniquement sur le plan (xy), qui est, $p_z = 0$. Dans ce cas, ces énergies sont appelés les niveaux de Landau. Nous exigeons que les états propres $|\pm; m>$ être normalisées à l'unité, de sorte que

$$\sum_{\varepsilon=\pm1} \int\int \Psi_\varepsilon^*(\rho,\phi)\,\Psi_\varepsilon(\rho,\phi)\,rdrd\varphi = 1 \tag{2.4.21}$$

$$\Rightarrow |c_+|^2 \int \tfrac{1}{2\sqrt{\kappa}} \exp(-x)\, x^{m_l} \left[L_n^{m_l}(x)\right]^2 rdr + |c_-|^2 \int \tfrac{1}{2\sqrt{\kappa}} \exp(-x)\, x^{m_l} \left[L_{n-1}^{m_l}(x)\right]^2 rdr = 1 \tag{2.4.22}$$

La condition de normalisation implique une relation éxité dans [22]. l'eq. (2.4.22) devient

$$= |c_+|^2 \int \tfrac{1}{2\sqrt{\kappa}} \exp(-x)\, x^{m_l} \left[L_n^{m_l}(x)\right]^2 dx + |c_-|^2 \int \tfrac{1}{2\sqrt{\kappa}} \exp(-x)\, x^{m_l} \left[L_{n-1}^{m_l}(x)\right]^2 dx = 1 \tag{2.4.23}$$

$$= \tfrac{|c_+|^2}{2\sqrt{\kappa}} \tfrac{(n+m_l)!}{n!} + \tfrac{|c_-|^2}{2\sqrt{\kappa}} \tfrac{(n-1+m_l)!}{(n-1)!} = 1 \tag{2.4.24}$$

$$\Rightarrow c_- = \sqrt{\frac{2\sqrt{\kappa} - |c_+|^2 \frac{(n+m_l)!}{n!}}{\frac{(n-1+m_l)!}{(n-1)!}}}. \tag{2.4.25}$$

Finalement nous pouvons obtenir les fonctions d'onde pour l'électron

$$\Psi_{\uparrow}=c_{+}\frac{e^{\frac{i}{\hbar}m_{\ell}\varphi}e^{ip_{z}z}}{\sqrt{2\pi\rho}}\begin{pmatrix} l_{n}^{m_{l}}\left(x\right) \\ 0 \end{pmatrix}x^{\frac{m_{l}+1/2}{2}}\exp\left(-\frac{x}{2}\right). \tag{2.4.26}$$

$$\Psi_{\downarrow}=c_{+}\frac{e^{\frac{i}{\hbar}m_{\ell}\varphi}e^{ip_{z}z}}{\sqrt{2\pi\rho}}\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{2\sqrt{\kappa}-\left|c_{+}\right|^{2}\frac{(n+m_{l})!}{n!}}{\frac{(n-1+m_{l})!}{(n-1)!}}}\,l_{n-1}^{m_{l}}\left(x\right) \end{pmatrix}x^{\frac{m_{l}+1/2}{2}}\exp\left(-\frac{x}{2}\right). \tag{2.4.27}$$

En conclusion, nous avons présenté, dans ce chapitre, les définitions nécessaires de la géométrie non-commutative. Puis, selon la méthode d'équation nous avons déterminé les solutions exactes de fonctions d'ondes et les specters des énergies dans l'espace non-commutatif pour la particule non-relativiste possède spin 1/2.

3

Formalisme des intégrales de chemins dans l'espace non-commutatif

3.1 Introduction

Avant de déterminer la représentation de l'amplitude de transition dans l'espace non-commutative par l'intégrale de chemin, récapitulons quelques définitions nécessaires pour construire cette approche de formulation qui montré par Feynman. Comme on le voit, la phénomène d'interférence des électrons dans l'expérience des fentes Young; par exemple, quand un éléctron a deus trajets possibles pour aller de A vers B,

$$\text{L'expérience des fentesYoung} \tag{3.1.1}$$

On peut déterminer l'amplitudes de probapilité comme suit:

$$\phi_{AB} = \phi_{AB}(1) + \phi_{AB}(2). \tag{3.1.2}$$

La probabilité de l'événement est,

$$P_{AB} = |\phi_{AB}|^2 = |\phi_{AB}(1)|^2 + |\phi_{AB}(2)|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(\phi_{AB}(1)\,\phi_{AB}^*(2)\right), \tag{3.1.3}$$

avec $\mathrm{Re}\left(\phi_{AB}(1)\,\phi_{AB}^*(2)\right)$ c'est un facteur d'interférence. C'est par ce terme que la mécanique quantique se démarque de l'approche classique .cette proprieté des amplitudes est comme sous le nom "*du principe de superposition*". Ces amplitudes de probapilité obeissent aussi au principe dit de "*l'état intermédiaire*", qui stipule que l'amplitude de probapilité pour aller de A vers B sachant qu'on passe par C est:

$$\phi_{AB}\mid_C = \phi_{AC}\phi_{CB}. \tag{3.1.4}$$

Pour faire ces propriétes, Feynman a pu élaboré en 1942 un nouveau formalisme de la mécanique quantique dit "*Intégrale de chemin*". Dans ce formalisme, il n'est plus nécessaire d'utiliser des quantités mathématiques qui ne commutent pas telles opérateurs et à leur place on recourt on concept de trajectoires, comme dans le cas classique pour décrire les phénomènes quantiques. Que consacré aux les postulas suivants:

Pour une particule se propageant d'un point spatiotemporel à un autre, l'amplitude de probapilité de l'évènement est donnée par

$$K(b,a) = \sum_{\substack{\text{tous les chemins}\\ \text{possibles }(a,b)}} \Phi\left[x(t)\right]. \tag{3.1.5}$$

avec $\Phi\left[x(t)\right]$ est l'amplitude assaciée au chemin $x(t)$ pour évaluer cette amplitude, Feynman utilise une remarque de dirac dans laquelle il montre un lien intime entre cette amplitude et l'action classique relative au chemin $x(t)$ quand le temps de propagation est trés court. Pour ce faire, Feynman utillise la technique discrétisation. C'est à dire, il discutise le temps en uns toutes a "la durée de propagation $[t_i, t_f]$, il associe de points $(t_i = t_0, t_1, t_2..., t_N, t_{N+1} = t_f)$, et au chemin continu $x(t)$. De cette manière on écrit l'amplitude comme

$$\Phi\left[x(t)\right] \rightarrow \Phi\left[x_0, x_1, ...x_N, x_{N+1}\right]. \tag{3.1.6}$$

Suivant le principe de l'état intermédiaire cette dernière s'écrit par

$$\Phi\left[x_0, x_1, ...x_N, x_{N+1}\right] = \prod_{k=1}^{N+1} \Phi(x_k, x_{k-1}). \tag{3.1.7}$$

Alors l'amplitude de probabilité d'aller de A vers B sachant qu'on est passe par $x_1, x_2, ..., x_N$,pour t_{j-1} très proche de t_j ,ou bien x_{j-1} très proche de x_j, il postule encore que:

$$\Phi\left(x_{j-1}, x_j\right) = A\exp\left(\frac{i}{\hbar}S\left(x_{j-1}, x_j\right)\right), \tag{3.1.8}$$

où $S\left(x_{j-1}, x_j\right)$ est l'action "classique" et A est un paramètre constant. Puis pour sommer sur tous les chemins possibles, Feynman intégré sur tous les points intermédiaires pour balayer toutes les poosibilités

$$K\left(x_f, t_f, x_i, t_i\right) = \int dx_1..dx_N\ A^{N+1}\exp\left[\frac{i}{\hbar}\sum_{j=1}^{N+1} S\left(x_{j-1}, x_j\right)\right], \tag{3.1.9}$$

avec $S\left(x_{j-1},x_j\right)$ est prend la forme suivante

$$S(x_{j-1},x_j)=\frac{m}{2}\left(t_j-t_{j-1}\right)\left(\tfrac{x_j-x_{j-1}}{t_j-t_{j-1}}\right)^2-\left(t_{j+1}-t_j\right)V(\bar{x}_j). \tag{3.1.10}$$

Feynmen rajoute une limite: $t_{j-1}-t_j\to 0$; c'est à dire qu il revieut à la trajectoire continue, par conséquent, on trouve le propagateur suivant:

$$K\left(x_f,t_f,x_i,t_i\right)=\lim_{N\twoheadrightarrow\infty}\int\prod_{k=1}^{N}dx_jA^{N+1}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{j=1}^{N+1}S\left(x_{j-1},x_j\right)\right\}, \tag{3.1.11}$$

pour obtenir la constante A indépendante de la dynamique du système, Feynman a utilise la relation est bien connu de la mécanique quantique:

$$\Psi\left(x,t\right)=\int dyK\left(x,t,y,t'\right)\Psi\left(y,t'\right), \tag{3.1.12}$$

localement elle s'écrit:

$$\Psi\left(x,t+\varepsilon\right)=\int dyk\left(x,t+\varepsilon,y,t\right)\Psi\left(y,t\right), \tag{3.1.13}$$

pour $\varepsilon\to 0$, le propagateur devient la fonction de delta de Dirac

$$\lim_{\varepsilon\to 0}K\left(x,t+\varepsilon,y,t\right)=\delta\left(x-y\right), \tag{3.1.14}$$

cette condition de normalisation d'identifier la constante A à

$$A=\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\bigtriangleup t_j}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.1.15}$$

Alors la forme définitive du propagateur à une dimension devient:

$$K\left(x_f,t_f,x_i,t_i\right)=\lim_{N\twoheadrightarrow\infty}\int\prod_{k=1}^{N}dx_k\prod_{k=1}^{N+1}\left(\tfrac{m}{2\pi i\hbar\bigtriangleup t_j}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{k=1}^{N+1}\left[\tfrac{m}{2\varepsilon}\left(x_k-x_{k-1}\right)^2-\varepsilon V\left(\bar{x}_k\right)\right]\right\}. \tag{3.1.16}$$

Ainsi on peut généraliser ce propagateur à D dimensions

$$\vec{x}=\left(x_1,..x_D\right);\quad d\vec{x}=d^Dx. \tag{3.1.17}$$

$$K\left(\vec{x}_f,t_f,\vec{x}_i,t_i\right)=\lim_{N\twoheadrightarrow\infty}\int\prod_{k=1}^{N}d\vec{x}_k\prod_{k=1}^{N+1}\left(\tfrac{m}{2\pi i\hbar\bigtriangleup t_j}\right)^{\frac{D}{2}}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{k=1}^{N+1}\left[\frac{m}{2\varepsilon}\left(\vec{x}_k-\vec{x}_{k-1}\right)^2-\varepsilon V\left(\bar{x}_k\right)\right]\right\}. \tag{3.1.18}$$

Ensuite, on va re-construire le propagateur à deux dimensions suivant des étapes très simple comme formulat de Trotter.

3.2 Formulat de Trotter à deux dimensions

Dans le cas d'un Hamiltonien indépendant du temps. La solution formelle de l'équation de Schrodinger peut s'ecrire comme:

$$\mid \psi\left(t_{b}\right)\rangle=\exp \left[-\frac{i}{\hbar} \hat{H}\left(t_{b}, t_{a}\right)\right] \mid \psi\left(t_{a}\right)\rangle. \tag{3.2.1}$$

L'opérateur $\exp \left[-\frac{i}{\hbar} \hat{H}\left(t_{b}, t_{a}\right)\right]$ est appelé l'opérateur d'évolution, qui satisfé les proprités suivants:

1)- l'inverse de l'opérateur:

$$\hat{U}^{-1}\left(t_{b}, t_{a}\right)=U\left(t_{b}, t_{a}\right). \tag{3.2.2}$$

2)- cet opérateur est un opérateur unitarité ainsi vérifie la loi de composition

$$\hat{U}^{+}\left(t_{b}, t_{a}\right)=U^{-1}\left(t_{b}, t_{a}\right). \tag{3.2.3}$$

$$\hat{U}\left(t_{b}, t_{a}\right)=\hat{U}\left(t_{b}, t_{c}\right) \hat{U}\left(t_{c}, t_{a}\right). \tag{3.2.4}$$

3)- L'operateur d'évalution vérifie l'équation de Schrodinger

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t_{b}} U\left(t_{b}, t_{a}\right)=\hat{H} \hat{U}\left(t_{b}, t_{a}\right). \tag{3.2.5}$$

4)- Le propagateur est un élément de matrice de l'opérateur d'evolution

$$K\left(x_{b}, t_{b}, x_{a}, t_{a}\right)=\left\{\begin{array}{ll}\langle x_{b} \mid U\left(t_{b}, t_{a}\right) \mid x_{a}\rangle, & \text{si } t_{b}>t_{a} \\ 0, & \text{si } t_{b}<t_{a}\end{array}\right\}. \tag{3.2.6}$$

Ce propagateur est l'évolution causal:

$$K\left(x_{b}, t_{b}, x_{a}, t_{a}\right)=\theta\left(t_{b}-t_{a}\right)\langle x_{b} \mid U\left(t_{b}, t_{a}\right) \mid x_{a}\rangle. \tag{3.2.7}$$

5)- Cet élément de matrice verifie la relation suivante:

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t_b}-\hat{H}_b\right)K\left(x_b,t_b,x_a,t_a\right)=i\hbar\delta\left(t_b-t_a\right)\delta\left(x_b-x_a\right). \tag{3.2.8}$$

6)- $K\left(x_b,t_b,x_a,t_a\right)$ se développe, dans le cas d'un Hamiltonien stationnaire, suivant la base des fonctions propres de cet Hamiltonien

$$K\left(x_b,t_b,x_a,t_a\right)=\sum_n\Psi_n\left(x_b\right)\Psi_n^*\left(x_a\right)\exp\left[-\frac{i}{\hbar}E_n\left(t_b-t_a\right)\right]. \tag{3.2.9}$$

3.2.1 Calcul du propagateur

Pour obtenir le propagateur nous allons suivre les étapes suivantes, on a,

$$\hat{U}\left(T\right)=\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\hat{H}T\right]\text{ avec }T=t_b-t_a. \tag{3.2.10}$$

En subdiffisant, la durés T en $(N+1)$ intervalles segments infinitésimaux de longueur $\varepsilon=T/\left(N+1\right)$

$$\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\hat{H}T\right]=\left(\exp\left[-\frac{i\varepsilon}{\hbar}\hat{H}\right]\right)^{N+1}, \tag{3.2.11}$$

avec l'opérateur d'hamiltonien donné par:

$$\hat{H}=\frac{\hat{P}^2}{2m}+V\left(\hat{x}\right), \tag{3.2.12}$$

à lordre ε on peut développer la fonction exponentielle comme suit,

$$\exp\left[-\frac{i\varepsilon}{\hbar}\hat{H}\right]=1-\frac{i\varepsilon}{\hbar}\left(\frac{\hat{P}^2}{2m}+V\left(\hat{x}\right)\right)+O\left(\varepsilon^2\right). \tag{3.2.13}$$

Où l'on a introduit la relation de fermeture $\int dx_k\mid x_k\rangle\langle x_k\mid=1$ à chaque instant t_k.

$$\langle x_b\mid\hat{U}\left(t_b,t_a\right)\mid x_a\rangle=\lim_{N\to\infty}\langle x_b\mid\left[e^{\left[-\frac{i}{\hbar}\left(\hat{P}^2/2m\right)\frac{T}{N+1}\right]}e^{\left[-\frac{i}{\hbar}V(\hat{x})\frac{T}{N+1}\right]}\right]^{N+1}|x_a\rangle$$

$$=\lim_{N\to\infty}\int\prod_{k=1}^{N}dx_k\prod_{k=1}^{N+1}\langle x_k\mid\left[1-\frac{i\varepsilon}{\hbar}\left(\frac{\hat{P}^2}{2m}+V\left(\hat{x}\right)\right)+O\left(\varepsilon^2\right)\right]\mid x_{k-1}\rangle \tag{3.2.14}$$

$$=\lim_{N\to\infty}\int\prod_{k=1}^{N}dx_k\prod_{k=1}^{N+1}\left[1-\frac{i\varepsilon}{\hbar}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}+V\left(x_{k-1}\right)\right)+O\left(\varepsilon^2\right)\right]\langle x_k\mid x_{k-1}\rangle. \tag{3.2.15}$$

On a

$$\langle x_k\mid x_{k-1}\rangle=\int\frac{dp_k}{\sqrt{2\pi\hbar}}\langle x_k\left|p_k\right\rangle\left\langle p_k\right|x_{k-1}\rangle=\int\frac{dp_k}{\sqrt{2\pi\hbar}}\exp\left[\frac{i}{\hbar}p_k\left(x_k-x_{k-1}\right)\right], \tag{3.2.16}$$

après l'injection des opérateurs nous trouvons

$$K\left(x_b,x_a,t\right)=\lim_{N\to\infty}\int\prod_{k=1}^{N}dx_k\prod_{k=1}^{N+1}\int\frac{dp_k}{\sqrt{2\pi\hbar}}\prod_{k=1}^{N+1}e^{\frac{i}{\hbar}p_k(x_k-x_{k-1})}\left[1-\frac{i\varepsilon}{\hbar}\left(\frac{p_k^2}{2m}+V\left(x_{k-1}\right)\right)+O\left(\varepsilon^2\right)\right]$$
$$=\lim_{N\to\infty}\int\prod_{k=1}^{N}dx_k\prod_{k=1}^{N+1}\int\frac{dp_k}{\sqrt{2\pi\hbar}}\exp\left[\frac{i}{\hbar}\sum_{k=1}^{N+1}\left[p_k\left(x_k-x_{k-1}\right)-\varepsilon\left(\frac{p_k^2}{2m}+V\left(x_{k-1}\right)\right)\right]\right].\quad(3.2.17)$$

Comme on le voit il est possible choisir quel point dans l'interval $\bar{x}_k\in\left[x_{k-1},x_k\right]$ pour le potentiel ($V\left(x_k\right)$ à la place $V\left(x_{k-1}\right)$). Alors le resultat devient,

$$K\left(x_b,x_a,t\right)=\lim_{N\to\infty}\int\prod_{k=1}^{N}dx_k\prod_{k=1}^{N+1}\frac{dp_k}{\sqrt{2\pi\hbar}}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{k=1}^{N+1}\left[p_k\left(\Delta x_k\right)-\varepsilon\left(\frac{p_k^2}{2m}+V\left(\bar{x}_k\right)\right)\right]\right\},\quad(3.2.18)$$

l'intégration sur les p_k s'effectue facilement (forme gaussienne) ,son résultat donne exactemeut le resultat déjà trouvé dans l'introduction de ce chapitre $(3.1.18)$, et on peut récrire à la forme intégrale de chemin discontinue.

$$K_N=A_N\int\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{k=1}^{N+1}S_k\right\}\prod_{k=1}^{N}dx_k,\quad(3.2.19)$$

avec $A_N=\left(\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon}}\right)^{N+1}$, et l'action discrétisé dans intervalle $[k-1,k]$, prenant la forme

$$S_k=\frac{m}{2\varepsilon}\left(x_k-x_{k-1}\right)^2-\varepsilon V\left(x_k\right).\quad(3.2.20)$$

3.3 Les corrections quantique en coordinnée polaire

L'objectif de cette section, nous allons étudier le propagateur et leurs corrections quantiques via la technique standard de Feynman, pour le système non-relativiste dans le contexte de la mécanique quantique ordinaire.

À deux dimension, nous considérons l'expression du propagateur de la mécanique quantique (MQ) non-relativiste ordinaire à la forme intégrale de chemin discontinue.

$$K\left(x_b,x_a,T\right)=\left(\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon}\right)^{3/2}\right)^{N+1}\int\prod_{k=1}^{N}d\vec{x}_k\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{k=1}^{N+1}S_k\right\}.\quad(3.3.1)$$

L'action discrétisé dans intervalle $[k-1,k]$, prenant la forme suivante.

$$S_k=\frac{m}{2\varepsilon}\left(\vec{x}_k-\vec{x}_{k-1}\right)^2-\varepsilon V\left(x_k\right),\quad(3.3.2)$$

où $\vec{x}_0=\vec{x}_a$ et $\vec{x}_{N+1}=\vec{x}_b$. Il y a deux prescriptions à suivre pour la mise en œuvre de la transformation de coordonnées cartésien (x,y) à coordonnées polaire (r,ϕ): la règle première est mi-point, qui est, toutes les quantités doivent être exprimées au mi-point. La seconde est que les termes jusqu'à commander ε doivent être conservés dans l'action et dans la transformation de la mesure. La règle à mi-point implique l'utilisation de Stratonovich calcul. La rétention des termes jusqu'à commander ε exige que dans l'expansion autour des termes mi-point jusqu'à quatrième ordre que besoin d'être conservé.

Considérons d'abord l'expression

$$(\triangle\vec{x}_k)^2 = (\vec{x}_k - \vec{x}_{k-1})^2 = \left((\triangle\vec{x}_k)^2 + (\triangle\vec{x}_{k-1})^2 - 2\vec{x}_k.\vec{x}_{k-1}\right), \tag{3.3.3}$$

qui donne en coordonnées polaire

$$(\triangle\vec{x}_k)^2 = (\triangle r_k)^2 + (1 - 2r_k r_{k-1}\cos\Delta\theta_k), \tag{3.3.4}$$

on définit $\bar{r}_k = \frac{r_k + r_{k-1}}{2}$ (mid-point), l'expression de terme cinétique s'écrit par:

$$(\triangle\vec{x}_k)^2 = \triangle r_k^2 + 2\left(\tilde{r}_k + \frac{\triangle r_k}{2}\right)\left(\tilde{r}_k - \frac{\triangle r_k}{2}\right)\left(1 - 1 - \frac{1}{2}\triangle\theta_k^2 - \frac{1}{24}\triangle\theta_k^4 + ...\right), \tag{3.3.5}$$

on trouve:

$$\triangle\vec{x}^2 = \triangle r_k^2 - \tilde{r}_k^2\triangle\theta_k^2 + \frac{1}{4}\triangle r_k^2\triangle\theta_k^2 - \frac{\tilde{r}_k^2}{12}\triangle\theta_k^4 + ..., \tag{3.3.6}$$

Le terme de potentiel $V(x,y)$ peut être simplement remplacé par $V = V(r,\phi)$. L'action S_n se lit maintenant comme

$$S_n = \tfrac{m}{2\varepsilon}\left(\triangle r_k^2 - \tilde{r}_k^2\triangle\theta_k^2\right) - \varepsilon V\left(\bar{r}_k, \bar{\phi}_k\right) - \tfrac{m}{8\varepsilon}\left(\triangle r_k^2\triangle\theta_k^2 - \frac{\tilde{r}_k^2}{3}\triangle\theta_k^4\right), \tag{3.3.7}$$

donc nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \exp\left\{\tfrac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N+1} S_n\right\} &= \exp\left\{\tfrac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N+1}\left[\tfrac{m}{2\varepsilon}\left(\triangle r_k^2 - \tilde{r}_k^2\triangle\theta_k^2\right) - \varepsilon V\left(\bar{r}_k, \bar{\phi}_k\right)\right]\right\} \\ &\times\left[1 - \tfrac{i}{\hbar}\tfrac{m}{8\varepsilon}\left(\triangle r_k^2\triangle\theta_k^2 - \frac{\tilde{r}_k^2}{3}\triangle\theta_k^4\right)\right]. \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

La mesure est transformé comme

$$\prod_{k=1}^{N} dx_k dg_k = \prod_{k=1}^{N} r_k dr_k d\theta_k = \frac{1}{\sqrt{r_f r_i}}\sqrt{r_i r_1 r_1 r_2 r_2 ... r_N r_N r_f}\prod_{k=1}^{N} dr_k d\theta_k. \tag{3.3.9}$$

Cette expression qui décrit la cartographie de l'intervalle de k_{th} doit être symétrisée sur les points $(k-1,k)$, nous écrivons

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{N} dx_k dy_k &= \frac{1}{\sqrt{r_f r_i}}\prod_{k=1}^{N+1}\sqrt{r_k r_{k-1}}\prod_{k=1}^{N} dr_k d\theta_k \\ &= \frac{1}{\sqrt{r_f r_i}}\prod_{k=1}^{N}\left[\left(\tilde{r}_k + \tfrac{\triangle r_k}{2}\right)\left(\tilde{r}_k - \tfrac{\triangle r_k}{2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\prod_{k=1}^{N} dr_k d\theta_k. \end{aligned} \tag{3.3.10}$$

L'eq(3.3.10) devient:

$$\prod_{k=1}^{N} dx_k dy_k = \frac{1}{\sqrt{r_f r_i}} \prod_{k=1}^{N} \tilde{r}_k \left(1 - \frac{\triangle r_k^2}{8\tilde{r}_k^2}\right). \tag{3.3.11}$$

Nous insérons Eqs.(3.3.11) et (3.3.8) dans l'expression (3.3.1) pour arriver à la forme du propagateur en coordonnées polaires:

$$\begin{aligned} K(x_b, x_a, T) = \lim_{N\to\infty} (r_f r_i)^{\frac{-1}{2}} \prod_{k=1}^{N} dr_k d\theta_k \left(\tfrac{m\bar{r}_k}{2\pi i\hbar\varepsilon}\right)^{N+1} \prod_{k=1}^{N+1} e^{\frac{i}{\hbar}\left[\frac{m}{2\varepsilon}\left(\triangle r_k^2 - \tilde{r}_k^2 \triangle\theta_k^2\right) - \varepsilon V(x_k)\right]} \\ \times \prod_{k=1}^{N+1} \left(1 - \frac{1}{8}\triangle r_k^2 \tilde{r}_k^{-2} - \frac{im}{8\hbar\varepsilon}\left[\triangle r_k^2 \triangle\theta_k^2\right]\right). \end{aligned} \tag{3.3.12}$$

Afin de lancer ce sous une forme plus utile, nous faisons l'identité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mu^{2n} \exp\left[\frac{-\alpha}{2\beta}\mu^2\right] d\mu = \frac{(2n-1)!!}{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[\frac{-\alpha}{2\beta}\mu^2\right] d\mu. \tag{3.3.13}$$

Dans notre cas, $\beta = \sqrt{m/2\pi i\hbar\varepsilon}$ et α est soit 1 or $\tilde{r}_k^2$ et les formes approximatives des diverses $(\Delta q_k)^n$ sont:

$$\triangle r_k^2 = \frac{i\hbar\varepsilon}{m}; \triangle\theta_k^2 = \frac{i\hbar\varepsilon}{m}\tilde{r}_k^{-2}; \triangle\theta_k^4 = 3\left(\frac{i\hbar\varepsilon}{m}\right)^2 \tilde{r}_k^{-4}. \tag{3.3.14}$$

Si nous insérons (3.3.14) dans (3.3.12), nous obtenons la forme du propagateur discrétisé en coordonnées polaire

$$\begin{aligned} K(x_b, x_a, T) = \lim_{N\to\infty} (r_f r_i)^{\frac{-1}{2}} \prod_{k=1}^{N} dr_k d\theta_k \left(\frac{m\bar{r}_k}{2\pi i\hbar\varepsilon}\right)^{N+1} \\ \times \prod_{k=1}^{N+1} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[\frac{m}{2\varepsilon}\left(\triangle r_k^2 - \tilde{r}_k^2 \triangle\theta_k^2\right) - \varepsilon V_{eff}(r_k, \phi_k)\right]\right\}, \end{aligned} \tag{3.3.15}$$

avec le potentiel effective s'écrit par:

$$V_{eff} = V(r, \phi) - \frac{\hbar^2}{8m\tilde{r}_k^2}. \tag{3.3.16}$$

Dans la prochaine section nous allons calculer les propagateurs de particule libre et l'oscillateur harmonique dans l'espace des coordonées polaires.

3.4 Applications

Nous listons dans cette section quelques exemples simples solutionné par les intégrales de chemin peuvent être évalués explicitement à donner des résultats analytiques exactes [23].

3.4.1 Particule libre

En coordonnées polaires et après nous remplaçons $V(x) = 0$, le propagateur libre à deux dimensions (3.3.1) s'obtient:

$$K\left(\vec{x}_b, \vec{x}_a, T\right) = \prod_{n=1}^{N} \int r_k dr_k d\phi_k \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon}\right)^{N+1} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N+1}\frac{m}{2\varepsilon}\left[\left(r_k^2 + r_{k-1}^2\right) - 2r_k r_{k-1}\cos\Delta\phi_k\right]\right\}, \tag{3.4.1}$$

où $\Delta\phi_k$ est l'angle entre les vecteurs $\vec{x}_k$ and $\vec{x}_{k-1}$. On utilise la formule:

$$\exp\left\{z\cos\phi\right\} = \sum_l \exp\left(il\phi\right) I_l\left(z\right), \tag{3.4.2}$$

avec I_{l_k} est la fonction de Bessel modifiée, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int \prod_{k=1}^{N} d\phi_k \prod_{k=1}^{N+1} \sum_{l_k=-\infty}^{+\infty} \exp^{il_k\triangle\phi_k} I_{l_k}\left(\frac{-imr_k r_{k-1}}{2\hbar\varepsilon}\right) \\
&= \int d\phi_1 ... d\phi_N \sum_{l_1=-\infty}^{+\infty} \exp^{il_1(\phi_1-\phi_0)} ... \sum_{l_{N+1}=-\infty}^{+\infty} \exp^{il_{N+1}\left(\phi_{N+1}-\phi_N\right)} \\
&\quad \times I_{l_1}\left(-\tfrac{im}{2\hbar\varepsilon} r_1 r_0\right) ... I_{l_{N+1}}\left(-\tfrac{im}{2\hbar\varepsilon} r_{N+1} r_N\right).
\end{aligned} \tag{3.4.3}$$

Les intégrations sur les variables angulaires intermédiaires peuvent être réalisées facilement en utilisant la propriété d'orthogonalité des fonctions $\left(\exp^{il\phi}\right)$ sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.

$$\int_0^{2\pi} d\phi_1 \exp^{il_1(l_1-l_2)\phi_1} = 2\pi\delta_{l_1,l_2}. \tag{3.4.4}$$

Alors le propagateur s'écrit comme

$$K\left(\vec{x}_b, \vec{x}_a, T\right) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} K_l\left(r_b, r_a, T\right) \exp^{il(\phi_b-\phi_a)}, \tag{3.4.5}$$

où le propagateur radial $K_l\left(r_b, r_a, T\right)$ s'écrit comme

$$K_l\left(r_b, r_a, T\right) = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{m}{i\hbar\varepsilon}\right)^{N+1} \prod_{n=1}^{N}\int r_k dr_k \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N+1}\frac{m}{2\varepsilon}\left[\left(r_k^2 + r_{k-1}^2\right)\right]\right\} I_l\left(-\tfrac{im}{2\hbar\varepsilon} r_k r_{k-1}\right), \tag{3.4.6}$$

Pour faire les intégrations fonctionelles sur les variables radial on utilise cette relation:

$$\int_0^{+\infty} \exp^{-\alpha x^2} I_\upsilon\left(-ibx\right) I_\upsilon\left(-icx\right) x dx = \frac{i}{2\alpha}\exp^{-i\frac{b^2+c^2}{4\alpha}}, \tag{3.4.7}$$

valable pour $Re(\alpha) > 0, Re(\nu) > -1$. Cela conduit au résultat du propagateur $K_l\left(r_2, r_0, T\right)$, par exemple:

$$\begin{aligned}
K_l\left(r_2, r_0, T\right) = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{m}{i\hbar\varepsilon}\right)^2 \int_0^\infty r_1 dr_1 \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N+1}\frac{m}{2\varepsilon}\left[\left(2r_1^2 + r_0^2 + r_2^2\right)\right]\right\} \\
\times I_l\left(-\tfrac{im}{2\hbar\varepsilon} r_1 r_2\right) I_l\left(-\tfrac{im}{2\hbar\varepsilon} r_1 r_0\right),
\end{aligned} \tag{3.4.8}$$

on trouve

$$\int \exp^{i\frac{m}{2\varepsilon\hbar}\left(x_1^2-x_0^2\right)} I_v\left(\tfrac{-im}{\hbar\varepsilon}r_1r_0\right) I_v\left(\tfrac{-im}{\hbar\varepsilon}r_2r_1\right) x_1dx_1$$
$$= \frac{i\hbar\varepsilon}{m}\exp^{-i\frac{2m^2\varepsilon\hbar}{4\varepsilon^2\hbar^2\left(\frac{m}{2}\right)}\left(r_2^2+r_0^2\right)} I_v\left(\tfrac{-im}{\hbar\varepsilon}r_2r_0\right), \tag{3.4.9}$$

qui donne

$$K_l\left(r_2,r_0,T\right) = \frac{i\hbar\varepsilon}{m}\exp^{-i\frac{2m^2\varepsilon\hbar}{4\varepsilon^2\hbar^2\left(\frac{m}{2}\right)}\left(r_2^2+r_0^2\right)} I_v\left(\frac{-im}{\hbar\varepsilon}r_2r_0\right), \tag{3.4.10}$$

après N intégration sur r_k, que nous arrivons à le propagateur de particule libre

$$K\left(x_f,x_i,T\right) = (2\pi)^N\left(\tfrac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon}\right)^{N+1}\cdot\frac{m}{iT\hbar}\exp\left\{\frac{im}{2\hbar T}\left(r_f^2+r_i^2\right)\right\}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\exp^{il\left(\theta_f-\theta_i\right)} I_l\left(\tfrac{-im}{T\hbar}r_fr_i\right), \tag{3.4.11}$$

qui est écrit par

$$K\left(x_f,x_i,T\right) = \left(\tfrac{m}{2\pi i\hbar T}\right)\exp\left\{\tfrac{im}{2\hbar T}\left(r_f^2+r_i^2\right)-2r_fr_i\cos\left(\theta_f-\theta_i\right)\right\}, \tag{3.4.12}$$

ou une autre forme

$$K\left(x_f,x_i,T\right) = \left(\tfrac{m}{2\pi i\hbar T}\right)\exp\left\{\tfrac{im}{2\hbar T}\left(\vec{x}_f-\vec{x}_i\right)^2\right\}. \tag{3.4.13}$$

3.4.2 L'oscillateur Harmonique à deux dimensions

Le propagateur quantique de $K\left(\vec{x}_b,\vec{x}_a,T\right)$, pour le SHO dans deux dimensions de la position x_i au temps t_i dans la position x_f au temps t_f est donné par:

$$K\left(\vec{x}_b,\vec{x}_a,T\right) = \prod_{n=1}^{N}\int d\vec{x}_n\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon}\right)^{N+1}\exp\left\{\tfrac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N+1}\left[\tfrac{m}{2\varepsilon}\left(\vec{x}_n-\vec{x}_{n-1}\right)^2-\varepsilon\frac{m\omega^2}{2}\vec{x}_n^2\right]\right\}. \tag{3.4.14}$$

La transformation de coordonnées cartésien (x,y) à coordonnées polaire (r,ϕ)

$$x_k = r_k\cos\theta_k, y_k = r_k\sin\theta_k, \tag{3.4.15}$$

on trouve

$$K\left(\vec{x}_b,\vec{x}_a,T\right) = \prod_{n=1}^{N}\int r_kdr_kd\phi_k\left(\tfrac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon}\right)^{N+1}$$
$$\times\exp\left\{\tfrac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N+1}\tfrac{m}{2\varepsilon}\left[\left(1-\tfrac{(m\omega)^2}{2}\right)\left(r_k^2+r_{k-1}^2\right)-2r_kr_{k-1}\cos\Delta\phi_k\right]\right\}, \tag{3.4.16}$$

et après intégration sur ϕ, on obtient

$$K\left(\vec{x}_b,\vec{x}_a,T\right)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}e^{il(\phi_b-\phi_a)}\int\prod_{k=1}^{N}K_l\left(r_k,r_{k-1},\varepsilon\right)dr_k. \tag{3.4.17}$$

avec le propagateur radial donné par:

$$K_l\left(r_k,r_{k-1},\varepsilon\right)=\left(\frac{m}{i\hbar\varepsilon}\right)\sqrt{r_kr_{k-1}}e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2\varepsilon}\left[\left(1-\frac{(m\omega)^2}{2}\right)\left(r_k^2+r_{k-1}^2\right)\right]}I_l\left(\frac{-imr_kr_{k-1}}{\hbar\varepsilon}\right), \tag{3.4.18}$$

pour faire l'intégration fonctionnel sur les trajectoires radiales $r(t)$ dans l'équation (3.4.18), nous définisons les paramètres suivantes

$$A=\frac{m}{i\hbar\varepsilon};a=\frac{m}{2\varepsilon}\left(1-\tfrac{(\omega\varepsilon)^2}{2}\right);b=\frac{m}{\hbar\varepsilon} \tag{3.4.19}$$

Alors

$$K_l\left(r_f.r_i.T\right)=A_{N+1}\sqrt{r_fr_i}\exp\frac{i}{\hbar}\left(a_{N+1}\left(r_f^2+r_i^2\right)\right).I_l\left(-ib_{N+1}r_fr_i\right) \tag{3.4.20}$$

qui donne

$$K_l\left(r_f.r_i.T\right)=\int dr_NK_l\left(r_f,r_N,\varepsilon\right)K_l\left(r_N,r_i,N\varepsilon\right) \tag{3.4.21}$$

$$=AA_N\sqrt{r_fr_i}\int_0^{\infty}r_Ndr_N\ e^{\frac{i}{\hbar}a\left(r_f^2+r_N^2\right)}.I_l\left(-ibr_fr_N\right)e^{\frac{i}{\hbar}a_N\left(r_N^2+r_i^2\right)}.I_l\left(-ib_Nr_0r_N\right) \tag{3.4.22}$$

après l'intgration sur r_N on trouve

$$K_l\left(r_f.r_i.T\right)=AA_N\sqrt{r_fr_i}e^{\frac{i}{\hbar}\left(a_Nx_0^2+ax_{N+1}^2\right)}\frac{i\hbar}{2(a+a_N)}e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\left(b_N^2r_0^2+b^2r_{n+1}^2\right)\hbar^2}{4(a+a_N)}}.I_l\left(\frac{-i\hbar bb_N}{2(a+a_N)}r_0r_{N+1}\right), \tag{3.4.23}$$

avec

$$\begin{aligned} b_{N+1}&=\frac{\hbar bb_N}{2\left(a+a_N\right)};A_{N+1}=AA_N\frac{i\hbar}{2\left(a+a_N\right)}, &(3.4.24)\\ \text{et }a_{N+1}&=a_N-\frac{b_N^2\hbar^2}{4\left(a+a_N\right)}=a-\frac{b^2\hbar^2}{4\left(a+a_N\right)}. &(3.4.25)\end{aligned}$$

De l'eq.(3.4.25) on obtient

$$4a_N^2=b_N^2\hbar^2+4a^2-b^2\hbar^2, \tag{3.4.26}$$

$$b_{N+1} = \frac{\hbar b b_N}{2\left(a + \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + \hbar^2\left(b_N^2 - b^2\right)}\right)}, \tag{3.4.27}$$

puis on fait $(1/b_{N+1})$;

$$\frac{1}{b_{N+1}} = \frac{\left(2a+\sqrt{4a^2+\hbar^2\left(b_N^2-b^2\right)}\right)}{\hbar b b_N} = \frac{2a}{\hbar b b_N} + \sqrt{\frac{4a^2}{\hbar^2 b^2 b_N^2} + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{b_N^2}\right)}, \tag{3.4.28}$$

comme on a

$$b = \frac{m}{\hbar\varepsilon} \implies a = \frac{\hbar}{2} b \cos\left(\omega\varepsilon\right), \tag{3.4.29}$$

donc

$$\frac{1}{b_{N+1}} = \frac{\cos\left(\omega\varepsilon\right)}{b_N} + \sqrt{\frac{-\sin^2\left(\omega\varepsilon\right)}{b_N^2} + \frac{1}{b^2}}, \tag{3.4.30}$$

avec le changement suivant $(b \to \beta)$, il est donné par

$$b = \frac{m}{\hbar\varepsilon} \twoheadrightarrow \beta = \frac{\hbar\varepsilon}{m} b, \tag{3.4.31}$$

et

$$\implies \frac{1}{\beta_{N+1}} = \frac{\cos\left(\omega\varepsilon\right)}{\beta_N} + \sqrt{1 - \frac{\sin^2\left(\omega\varepsilon\right)}{\beta_N^2}}, \tag{3.4.32}$$

En particulier

$$\frac{1}{\beta_2} = \cos\left(\omega\varepsilon\right) + \cos\left(\omega\varepsilon\right) = 2\cos\left(\omega\varepsilon\right) = \frac{\sin 2\left(\omega\varepsilon\right)}{\sin\left(\omega\varepsilon\right)}, \tag{3.4.33}$$

$$\frac{1}{\beta_3} = \frac{\sin 3\left(\omega\varepsilon\right)}{\sin\left(\omega\varepsilon\right)}, \tag{3.4.34}$$

$$...\frac{1}{\beta_{N+1}} = \frac{\sin\left(N+1\right)\left(\omega\varepsilon\right)}{\sin\left(\omega\varepsilon\right)} \implies b_{N+1} = \frac{m}{\hbar\varepsilon}\frac{\sin\left(\omega\varepsilon\right)}{\sin\left(N+1\right)\left(\omega\varepsilon\right)}. \tag{3.4.35}$$

De l'eq.(3.4.26) on trouve l'expression de a_{N+1} :

$$4a_{N+1}^2 = \frac{m^2}{\varepsilon^2}\frac{\sin^2\left(\omega\varepsilon\right)}{\sin^2\left(N+1\right)\left(\omega\varepsilon\right)} + \frac{m^2}{\varepsilon^2}\cos^2\left(\omega\varepsilon\right) - \frac{m^2}{\varepsilon^2}, \tag{3.4.36}$$

alors

$$4a_{N+1}^2 = \frac{m^2}{\varepsilon^2}\sin^2\left(\omega\varepsilon\right)\frac{\cos^2\left(\omega T\right)}{\sin^2\left(\omega T\right)} \implies a_{N+1} = \frac{m}{\varepsilon}\sin\left(\omega\varepsilon\right)\frac{\cos\left(\omega T\right)}{\sin\left(\omega T\right)}. \tag{3.4.37}$$

Aussi

$$A_{N+1} = AA_N \frac{i\hbar}{2\left(a + a_N\right)} = \frac{m}{i\hbar\varepsilon} A_N \frac{i\hbar}{2\left(\frac{m}{2\varepsilon}\cos\omega\varepsilon + \frac{m}{2\varepsilon}\sin\omega\varepsilon\frac{\cos\omega N\varepsilon}{\sin\omega N\varepsilon}\right)}, \tag{3.4.38}$$

$$= A_N \frac{\sin\omega N\varepsilon}{\sin\omega\left(N+1\right)\varepsilon} = \frac{m\sin\omega\varepsilon}{i\hbar\varepsilon\sin\omega N\varepsilon}\frac{\sin\omega N\varepsilon}{\sin\omega T}. \tag{3.4.39}$$

on trouve

$$A_{N+1} = \frac{m\sin\omega\varepsilon}{i\hbar\varepsilon\sin\omega T}. \tag{3.4.40}$$

Donc

$$K\left(r_f.r_i.T\right) = \frac{m\sin\omega\varepsilon}{i\hbar\varepsilon\sin\omega T}\sqrt{r_f r_i}\exp\frac{i}{\hbar}\left(\left(\frac{m}{2\varepsilon}\sin\omega\varepsilon\frac{\cos\omega T}{\sin\omega T}\right)\left(r_f^2 + r_i^2\right)\right) \times I_l\left(\frac{-im\sin\omega\varepsilon}{\hbar\varepsilon\sin\left(N+1\right)\omega\varepsilon} r_f r_i\right), \tag{3.4.41}$$

sachant que $\varepsilon \prec\prec \omega_\varepsilon = \sin\omega\varepsilon$

$$K_l\left(r_f.r_i.T\right) = \frac{m\omega}{i\hbar\sin\omega T}\sqrt{r_f r_i}\exp\frac{i}{\hbar}\left(\frac{m\omega}{2}\cot\omega T\right).I_l\left(\frac{mwr_f r_i}{i\hbar\sin\,\omega T}\right). \tag{3.4.42}$$

3.5 Propagateurs spinoriel dans l'espace non-commutatif (NC)

Dans cette section, nous allons utiliser le formalisme de l'intégrale du chemin pour construire la fonction de propagation (un symbole de l'opérateur d'évolution) dans la mécanique quantique (MQ) non-relativiste sur un espace non-commutatif, qui réalise l'algèbre de commutations suivante:

$$\left[\widehat{\tilde{x}}_i, \widehat{\tilde{p}}_j\right] = i\delta_{ij}, \quad \left[\widehat{\tilde{x}}_i, \widehat{\tilde{x}}_j\right] = i\theta_{ij}, \quad \left[\widehat{\tilde{p}}_i, \widehat{\tilde{p}}_j\right] = 0, \quad \text{et } i,j = 0,1,2. \tag{3.5.1}$$

En conventionnel de la MQ non-relativiste, nous allons construire une représentation de l'intégrale du chemin pour les éléments de la matrice de l'opérateur d'évolution $U(t,t')$ (dans une représentation de coordonnées). Dans la MQ prise en considération, nous avons aussi commencé par le même opérateur. Il obéit à l'équation de Schrödinger et pour le H indépendant du temps (que nous considérons pour plus de simplicité dans ce qui suit) à la forme:

$$U(t',t) = \exp\left[-\tfrac{i}{\hbar}\hat{H}(t'-t)\right]. \tag{3.5.2}$$

Puis ce que les opérateurs de coordonnés $\widehat{\tilde{x}}_i$ ne commutent pas, ils ne possèdent pas un ensemble commun complet de vecteurs propre. Pour cette raison, il n'ya pas de représentation de $\tilde{x}-$coordonnées et on ne peut pas parler des éléments de matrice de l'opérateur d'évolution dans une telle représentation. Par conséquent, on ne peut pas définir une amplitude de probabilité d'une transition entre deux points dans l'espace de position.

Néanmoins, on peut envisager d'autres types d'éléments de matrice de l'opérateur d'évolution qui sont des amplitudes de probabilité et qui peuvent être représentées via trois types de la représentation d'intégrales de chemin, à savoir; les espaces des moments $|\tilde{p}\rangle$, les espaces usuels des coordonnés $|x\rangle$ et les espaces mixtes entre les coordonnées et les impulsions $|\tilde{x},\tilde{p}_y\rangle$ ou $|\tilde{y},\tilde{p}_x\rangle$, qui forment des ensembles complet de vecteurs propres. Dans ce cas, nous allons choisir les opérateurs de x_i définis par:

$$\begin{aligned} \hat{x}^i &= \widehat{\tilde{x}}^i + \tfrac{\theta^{ij}}{2\hbar}\hat{p}_j, \left[\hat{x}^i,\hat{x}^j\right]=0, \left[\hat{x}^i,\hat{p}_j\right]=i\hbar\delta^i_j \\ \hat{x}^i\left|x\right\rangle &= x^i\left|x\right\rangle, \quad \left\langle x \mid x'\right\rangle=\delta^D\left(x-x'\right), \quad \textstyle\int\left|x\right\rangle\left\langle x\right|dx=I. \end{aligned} \tag{3.5.3}$$

le propagateur $G^\theta_x\left(\mathbf{x}_b,t_b;\mathbf{x}_a,t_a\right)$, que nous proposons de déterminer est solution de l'équation suivante

$$\left(H_b-i\hbar\frac{\partial}{\partial t_b}\right)G^\theta_x\left(\mathbf{x}_b,t_b;\mathbf{x}_a,t_a\right)=i\hbar\delta\left(x_b-x_a\right)\delta\left(t_b-t_a\right) \tag{3.5.4}$$

qui il équivalent l'opérateur suivant

$$\hat{G}^\theta_x=\textstyle\int_0^{+\infty}dT\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\left(\hat{H}_b-i\hbar\frac{\partial}{\partial t_b}\right)T\right) \tag{3.5.5}$$

Dans ce type d'éléments, nous dérivons une représentation intégrale de chemin pour la fonction d'évolution G. Comme d'habitude, nous divisons l'intervalle de temps $T=t_b-t_a$ dans $N+1$ parties égales $t=T/\left(N+1\right)$ au moyen des points t_n, $n=1,...,N$ tel que $t_n=t_a+n\Delta t$. En utilisant la propriété du groupe de l'opérateur d'évolution et de la relation de fermeture (voir (3.5.3)) pour l'ensemble $|x_i\rangle$, on peut écrire

$$G^\theta_x=\lim_{N\to\infty}\textstyle\int_0^{+\infty}dT\int\limits_{-\infty}^{\infty}dx_1...dx_n\prod\limits_{n=1}^{N+1}\left\langle \mathbf{x}_n,t_b\left|\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\left(\hat{H}-\hat{E}\right)\varepsilon\right)\right|\mathbf{x}_{n-1},t_a\right\rangle, \tag{3.5.6}$$

avec l'Hamiltonien de ce system c'est une particule nonrelativiste avec spin comme l'équation de Pauli, s'écrit par:

$$\hat{H}=\frac{\left(\mathbf{p}-e\mathbf{A}\right)^2}{2m}+V(x)+\mu_b\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{B} \tag{3.5.7}$$

La fonction de Green G^θ_x est une matrice diagonale 2×2 dans la représentation de l'espace de position, est écrit par

$$G^\theta_x\left(b,a\right)=\left\langle \mathbf{x}_n,t_b\left|\hat{G}^\theta_x\right|\mathbf{x}_{n-1},t_a\right\rangle=\begin{bmatrix} G^+_\theta\left(b,a\right) & 0 \\ 0 & G^-_\theta\left(b,a\right)\end{bmatrix} \tag{3.5.8}$$

ainsi on peut écrire de la forme suivante

$$G^{(\theta)}\left(r_f,\varphi_f,r_i,\varphi_i;T\right)=\sum_n\sum_{s=\pm1}\int_0^\infty d\lambda\frac{1}{2}\left[1+s\sigma_z\right]e^{-\frac{i}{\hbar}\lambda s\mu_b B}\int\prod_{k=1}^{N}d\vec{x}_k dt_k$$

$$\times\int\prod_{k=1}^{N+1}d\vec{p}_k dp_{0k}e^{\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{k=1}^{N+1}\left(\mathbf{p}_k.\Delta\mathbf{x}_k-p_{0k}\dot{t}_k-\varepsilon\left(\frac{\left(1+\frac{eB\theta}{4}\right)^2}{2m}\left(p_x^2+p_y^2\right)+eB\left(1+\frac{eB\theta}{4}\right)(yp_x-xp_y)-E\right)\right)\right\}}. \quad (3.5.9)$$

suivant la procédure de Trotter, puis en utilisant la relation de fermeture pour les vecteurs propres de moment $|p,p_0\rangle$, on peut calculer la représentation Hamiltonienne de l'intégrale de chemins pour les elements de propagateur G_x^θ donné par:

$$G_\theta^\pm(b,a)=\lim_{N\to\infty}\int_0^{+\infty}d\lambda\int\prod_{k=1}^{N}d\vec{x}_k dt_k\int\prod_{k=1}^{N+1}d\vec{p}_k dp_{0k}$$

$$\times\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{k=1}^{N+1}\left(\mathbf{p}_k.\Delta\mathbf{x}_k-p_{0k}\dot{t}_k-\varepsilon\left(\frac{(\mathbf{p}-e\mathbf{A})^2}{2m}+V(x_k)\pm\mu_b B-E\right)\right)\right\}. \quad (3.5.10)$$

Comme il est bien apparent, à partir de cette expression il y a peu de cas où on peut le résoudre exactement; à savoir, le cas d'un potentiel linéaire ($V(x)=gx$) et le cas d'un potentiel harmonique $\left(V(x)=\frac{m\omega^2}{2}x^2\right)$ .Mais dans ce travail on applique le $\left(V(x)=0,\vec{A}=\left(-\frac{B}{2}y,\frac{B}{2}x,0\right)\right)$. Ils ont trouvés la forme Hamiltonienne de l'intégrale de chemins pour le propagateur G_x^θ comme suivant:

$$G_\theta^\pm(b,a)=\lim_{N\to\infty}\int_0^{+\infty}dT\int\prod_{k=1}^{N}d\vec{x}_k dt_k\int\prod_{k=1}^{N+1}d\vec{p}_k dp_{0k}$$

$$\times\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{k=1}^{N+1}\left(\mathbf{p}_k.\Delta\mathbf{x}_k-p_{0k}\dot{t}_k-\varepsilon\left(\frac{\left(1+\frac{eB\theta}{4}\right)^2}{2m}\left(p_x^2+p_y^2\right)+eB\left(1+\frac{eB\theta}{4}\right)(yp_x-xp_y)\pm\mu_b B-E\right)\right)\right\}. \quad (3.5.11)$$

les intégrations sur t_n donnent N fonctions de Dirac $\delta\left(p_{t_n}-p_{t_{n-1}}\right)$; ce qui implique

$$p_{t_1}=p_{t_2}=p_{t_3}=...=p_{t_{N+1}}=E. \quad (3.5.12)$$

Aussi, on peut l'intégrer sur les variables de l'impulsion car elle est d'une forme quadratique, nous arrivons à la forme lagrangienne:

$$G_\theta^\pm(b,a)=\lim_{N\to\infty}\int_0^\infty dT\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dE}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{\frac{i}{\hbar}ET}e^{\frac{iT}{\hbar}[E\mp\mu_b B]}$$

$$\times\prod_{n=1}^{N+1}\frac{m^{(\theta)}}{(2\pi i\hbar\varepsilon)}\int\prod_{n=1}^{N}d\mathbf{x}_n\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N+1}\left[\frac{m^{(\theta)}}{2}\left[\frac{(\Delta\mathbf{x}_n)^2}{\varepsilon}+\omega^{(\theta)}\epsilon^{ij}x_{ni}\Delta x_{nj}\right]\right]\right\}, \quad (3.5.13)$$

avec

$$m^{(\theta)}=\frac{m}{\left(1+\frac{eB\theta}{4}\right)^2},\omega^{(\theta)}=\frac{2eB\left(1+\frac{eB\theta}{4}\right)}{m}. \quad (3.5.14)$$

et la mesure

$$\mathcal{N}=\int\prod_{n=1}^{N+1}\frac{d\mathbf{p}_n}{(2\pi\hbar)}\exp\left(\frac{i\varepsilon}{\hbar}\sum_{n=1}^{N+1}\frac{\mathbf{p}_n^2}{2m^{(\theta)}}\right)=\prod_{n=1}^{N+1}\frac{m^{(\theta)}}{(2\pi i\hbar\varepsilon)}. \tag{3.5.15}$$

Ce propagateur est le même propagateur de particule non-relativiste dans un champ magnétique constant, et nous allons utiliser les coordonnées polaires, pour obtenir la forme finale de ce propagateur.

$$G_\theta^{\pm}\left(\vec{x}_b,\vec{x}_a,T\right)=\lim_{N\to\infty}\int_0^{+\infty}dT\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dE}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{\frac{i}{\hbar}ET}e^{\frac{iT}{\hbar}[E\mp\mu_bB]}\prod_{n=1}^{N}\int r_kdr_kd\phi_k\left(\frac{m^{(\theta)}}{2\pi\varepsilon i\hbar}\right)^{N+1}$$
$$\times\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N+1}\left[\frac{m^{(\theta)}}{2\varepsilon}\left(r_k^2+r_{k-1}^2-2r_kr_{k-1}\cos\Delta\phi_k+2\omega^{(\theta)}r_kr_{k-1}\sin\Delta\phi_k\right)\right]\right\}, \tag{3.5.16}$$

Pour intégrer sur les trajectoires $\phi(t_k)$, il faut écrire le propagateur infinitisimale à la forme suivante

$$G_\theta^{\pm}\left(\vec{x}_k,\vec{x}_{k-1},\varepsilon\right)=\int r_kdr_kd\phi_k\left(\frac{m^{(\theta)}}{2\pi\varepsilon i\hbar}\right)e^{\frac{i}{\hbar}\left[\frac{m^{(\theta)}}{2\varepsilon}\left(r_k^2+r_{k-1}^2-2r_kr_{k-1}\cos\Delta\phi_k+2\omega^{(\theta)}r_kr_{k-1}\sin\Delta\phi_k\right)\right]} \tag{3.5.17}$$

$$=\int r_kdr_kd\phi_k\left(\frac{m^{(\theta)}\omega^{(\theta)}}{2\pi i\hbar\sin\left(\omega^{(\theta)}\varepsilon\right)}\right)e^{\frac{i}{\hbar}\left[\frac{m^{(\theta)}\omega^{(\theta)}}{2\sin\left(\omega^{(\theta)}\varepsilon\right)}\left[\left(r_k^2+r_{k-1}^2\right)\cos\left(\omega^{(\theta)}\varepsilon\right)-2r_kr_{k-1}\cos\left(\Delta\phi_k+\omega^{(\theta)}\varepsilon\right)\right]\right]}, \tag{3.5.18}$$

puisque $\sin\left(\omega^{(\theta)}\varepsilon\right)\sim\omega^{(\theta)}\varepsilon$ et $\cos\left(\omega^{(\theta)}\varepsilon\right)\sim 1$. Puis nous utilisons la relation suivante

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{m^{(\theta)}\omega^{(\theta)}}{\sin\left(\omega^{(\theta)}\varepsilon\right)}r_kr_{k-1}\cos\left(\Delta\phi_k+\omega^{(\theta)}\varepsilon\right)}=\sum_{l_k}e^{\frac{i}{\hbar}l_k\left(\Delta\phi_k+\omega^{(\theta)}\varepsilon\right)}I_{l_k}\left(-\frac{im^{(\theta)}\omega^{(\theta)}}{\hbar\sin\left(\omega^{(\theta)}\varepsilon\right)}r_kr_{k-1}\right). \tag{3.5.19}$$

L'intégration sur l'angle ϕ_k donnent ce resultat:

$$G_\theta^{\pm}\left(\vec{x}_k,\vec{x}_{k-1},\varepsilon\right)=(2\pi)^N\sum_l e^{\frac{i}{\hbar}l\left(\phi_b-\phi_a+\omega^{(\theta)}T\right)}\int_0^{\infty}r_kdr_k\left(\frac{m^{(\theta)}\omega^{(\theta)}}{2\pi i\hbar\sin\left(\omega^{(\theta)}\varepsilon\right)}\right)$$
$$\times I_l\left(-\frac{im^{(\theta)}\omega^{(\theta)}}{\hbar\sin\left(\omega^{(\theta)}\varepsilon\right)}r_kr_{k-1}\right)\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[\frac{m^{(\theta)}\omega^{(\theta)}\cos\left(\omega^{(\theta)}\varepsilon\right)}{2\sin\left(\omega^{(\theta)}\varepsilon\right)}\left[\left(r_k^2+r_{k-1}^2\right)\right]\right]\right\}, \tag{3.5.20a}$$

on peut construire le propagateur radial par:

$$G_l^{\pm}\left(r_b,r_a,T\right)=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{m^{(\theta)}\omega}{2i\hbar\sin\omega^{(\theta)}\varepsilon}\right)^{N+1}(2\pi)^N\int\prod_{k=1}^{N}r_kdr_k$$
$$\times\prod_{k=1}^{N+1}e^{\left[\frac{im\omega^{(\theta)}}{2\hbar\sin\omega^{(\theta)}\varepsilon}\left[\left(r_k^2+r_{k-1}^2\right)\cos\omega\varepsilon\right]\right]}I_l\left(-\frac{-im^{(\theta)(\theta)}\omega^{(\theta)}}{\hbar\sin\left(\omega^{(\theta)}\varepsilon\right)}r_kr_{k-1}\right). \tag{3.5.21}$$

on peut essaier à le cas de propagateur $G^{\pm}\left(r_2,r_0\right)$:

$$\begin{aligned}
G^{\pm}(r_2, r_0) &= \left(2\pi.\tfrac{m^{(\theta)}\omega^{(\theta)}}{2\pi i\hbar\sin\left(\omega^{(\theta)}\varepsilon\right)}\right)\int r_1 dr_1 e^{\frac{i}{\hbar}\left[\frac{m^{(\theta)}\omega^{(\theta)}}{2}\cot g\omega^{(\theta)}\varepsilon\left(2r_1^2+r_2^2+r_0^2\right)\right]} \\
&\quad \times I_l\left(-\tfrac{-im^{(\theta)}\omega^{(\theta)}}{\hbar\sin\left(\omega^{(\theta)}\varepsilon\right)}r_1r_0\right) I_l\left(-\tfrac{-im^{(\theta)}\omega^{(\theta)}}{\hbar\sin\left(\omega^{(\theta)}\varepsilon\right)}r_2r_1\right). \qquad (3.5.22)\\
&= \left(2\pi.\tfrac{m^{(\theta)}\omega^{(\theta)}}{2\pi i\hbar\sin\left(\omega^{(\theta)}\varepsilon\right)}\right)\exp\left[\tfrac{im^{(\theta)}\omega^{(\theta)}}{2\hbar}\cot g\omega^{(\theta)}\varepsilon\left(r_2^2+r_0^2\right)\right] \\
&\quad \times \int r_1 dr_1 \exp\left\{\tfrac{i}{\hbar}\left(m^{(\theta)}\omega^{(\theta)}\cot g\omega^{(\theta)}\varepsilon\left(r_1^2\right)\right)\right\} \\
&\quad \times I_l\left(-\tfrac{-im^{(\theta)}\omega^{(\theta)}}{\hbar\sin\left(\omega^{(\theta)}\varepsilon\right)}r_1r_1\right) I_l\left(-\tfrac{-im^{(\theta)}\omega^{(\theta)}}{\hbar\sin\left(\omega^{(\theta)}\varepsilon\right)}r_2r_1\right). \qquad (3.5.23)
\end{aligned}$$

Utilisant le formalisme (3.4.7) avec

$$\alpha = \frac{m^{(\theta)}\omega^{(\theta)}}{\hbar}\cot g\omega^{(\theta)}\varepsilon ; b = \frac{m^{(\theta)}\omega^{(\theta)}}{\hbar\sin\omega^{(\theta)}\varepsilon}r_0 ; c = \frac{m^{(\theta)}\omega^{(\theta)}}{\hbar\sin\omega^{(\theta)}\varepsilon}r_2. \qquad (3.5.24)$$

on obtient,

$$\begin{aligned}
G^{\pm}(r_2, r_0) &= \left(2\pi.\tfrac{m^{(\theta)}\omega^{(\theta)}}{2\pi i\hbar\sin\left(\omega^{(\theta)}\varepsilon\right)}\right).\frac{i}{2.\frac{m^{(\theta)}\omega^{(\theta)}}{\hbar}\cot g\omega^{(\theta)}} \\
&\times \exp\left\{-i\frac{\left(\frac{m^{(\theta)}\omega^{(\theta)}}{\hbar\sin\omega^{(\theta)}\varepsilon}r_0\right)^2+\left(\frac{m^{(\theta)}\omega^{(\theta)}}{\hbar\sin\omega^{(\theta)}\varepsilon}r_2\right)^2}{4.\frac{m^{(\theta)}\omega^{(\theta)}}{\hbar}\cot g\omega^{(\theta)}\varepsilon}\right\} \\
\times I_v &\left(\frac{-i\left(\frac{m^{(\theta)}\omega^{(\theta)}}{\hbar\sin\omega^{(\theta)}\varepsilon}\right)^2}{2.\frac{m^{(\theta)}\omega^{(\theta)}}{\hbar}\cot g\omega^{(\theta)}\varepsilon}r_2r_0\right) e^{\frac{im^{(\theta)}\omega^{(\theta)}}{2\hbar}\cot g\omega^{(\theta)}\varepsilon\left(r_0^2+r_2^2\right)}. \qquad (3.5.25)
\end{aligned}$$

Utilisant les propritées de relations entre fonctions trigonométriques,

$$\sin^2\left(\omega^{(\theta)}\varepsilon\right).\cot g\omega^{(\theta)}\varepsilon = \sin^2\left(\omega^{(\theta)}\varepsilon\right).\frac{\cos\left(\omega^{(\theta)}\varepsilon\right)}{\sin\left(\omega^{(\theta)}\varepsilon\right)} = \sin\left(\omega^{(\theta)}\varepsilon\right).\cos\left(\omega^{(\theta)}\varepsilon\right) = \frac{1}{2}\sin 2\omega^{(\theta)}\varepsilon. \qquad (3.5.26)$$

qui simplifié par:

$$\begin{aligned}
G^{\pm}(r_2, r_0) &= \left(\tfrac{m^{(\theta)}\omega^{(\theta)}}{i\hbar\sin\left(\omega^{(\theta)}\varepsilon\right)}\right)^2\left(\tfrac{i\hbar}{2m^{(\theta)}\omega^{(\theta)}\cot g\omega^{(\theta)}\varepsilon}\right) \\
\times I_l&\left(-\tfrac{-im^{(\theta)}\omega^{(\theta)}}{\hbar\sin 2\left(\omega^{(\theta)}\varepsilon\right)}r_2r_0\right)\exp\left[\tfrac{im^{(\theta)}\omega^{(\theta)}\cos 2\omega^{(\theta)}\varepsilon}{\hbar\sin 2\omega^{(\theta)}\varepsilon}\left(r_0^2+r_2^2\right)\right]. \qquad (3.5.27)
\end{aligned}$$

pour $G^{\pm}(r_3, r_0)$, on trouve

$$G^{\pm}\left(r_3,r_0\right)=\left(\frac{m^{(\theta)}\omega^{(\theta)}}{i\hbar\sin 3\left(\omega^{(\theta)}\varepsilon\right)}\right)\left(\frac{i\hbar}{2m^{(\theta)}\omega^{(\theta)}\cot g\omega^{(\theta)}\varepsilon}\right)$$
$$\times I_l\left(-\frac{-im^{(\theta)}\omega^{(\theta)}}{\hbar\sin 3\left(\omega^{(\theta)}\varepsilon\right)}r_3r_0\right)\exp\left[\frac{im^{(\theta)}\omega^{(\theta)}}{\hbar}\cot g3\omega^{(\theta)}\varepsilon\left(r_0^2+r_3^2\right)\right]. \tag{3.5.28}$$

Jusqu'à N intégrals on obtient

$$G^{\pm}=\int_0^{\infty}dt\exp^{\frac{i}{\hbar}T\left(E\pm\mu_\beta\beta\right)}.\frac{m^{(\theta)}\omega^{(\theta)}}{2\pi i\hbar\sin\omega^{(\theta)}T}\times e^{\left[\frac{im^{(\theta)}\omega^{(\theta)}}{2\hbar\sin\omega^{(\theta)}T}\left[\left(r_b^2+r_a^2\right)\right]\cos\omega^{(\theta)}T-2r_br_a\cos\left(\theta_b-\theta_a+\frac{\omega^{(\theta)}T}{2}\right)\right]}, \tag{3.5.29}$$

$$=\int_0^{\infty}dt\exp^{\frac{i}{\hbar}T\left(E\pm\mu_\beta\beta\right)}.\frac{m^{(\theta)}\omega^{(\theta)}}{2\pi i\hbar\sin\omega^{(\theta)}T}\exp\left[\frac{im^{(\theta)}\omega^{(\theta)}}{2\hbar\sin\omega^{(\theta)}T}\left[\left(r_b^2+r_a^2\right)\right]\cot g\omega^{(\theta)}T\right]$$
$$\times\sum_l\exp^{il\left(\theta_b-\theta_a+\omega^{(\theta)}T\right)}I_l\left(\frac{m^{(\theta)}\omega^{(\theta)}}{i\hbar\sin\omega^{(\theta)}T}r_ar_b\right). \tag{3.5.30}$$

Aussi nous devons utiliser la formule Hille-Hardy [22]:

$$\sum_{n=0}^{\infty}n!\frac{L_n^{\alpha}(x)\,L_n^{\alpha}(y)\,z^n}{\Gamma(n+\alpha+1)}=\frac{(xyz)^{\frac{-1}{2}}}{1-z}\exp\left(-z\frac{x+y}{1-z}\right)I\alpha\left(2\frac{\sqrt{xyz}}{1-z}\right), \tag{3.5.31}$$

avec

$$x=\frac{m^{(\theta)}\omega^{(\theta)}}{\hbar}r_a^2,\ y=\frac{m^{(\theta)}\omega^{(\theta)}}{\hbar}r_b^2\text{ et }z=\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\omega^{(\theta)}T\right). \tag{3.5.32}$$

nous obtenons

$$G_x^{\pm\theta}\left(\mathbf{x}_b,t_b;\mathbf{x}_a,t_a\right)=\int_0^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dE}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{\frac{i}{\hbar}E(t_b-t_a)}\times e^{-i\lambda\left[\omega^{(\theta)}(2n_\rho+|l|+1)-l\omega^{(\theta)}+E\mp\mu_bB\right]}$$
$$\times\sum_{n_\rho}\sum_{n_\rho,l}\Phi\left(r_b,\phi_b\right)\Phi^*_{n_\rho,l}\left(r_a,\phi_a\right). \tag{3.5.33}$$

avec

$$\Phi_{n_\rho,l}\left(r_b,\phi_b\right)=\left(\frac{m^{(\theta)}\omega^{(\theta)}}{\pi\hbar}\frac{n_\rho!}{(n_\rho+\mid l\mid)!}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{m^{(\theta)}\omega^{(\theta)}}{\hbar}r^2\right)^{|l|/2}$$
$$\times\exp\left(il\phi-\frac{m^{(\theta)}\omega^{(\theta)}}{2\hbar}r^2\right)L_{n_\rho}^{(|l|)}\left(\frac{m^{(\theta)}\omega^{(\theta)}}{\hbar}r^2\right). \tag{3.5.34}$$

alors l'eq.(3.5.9) devient:

$$G^{(\theta)}\left(r_f,\varphi_f,r_i,\varphi_i;T\right)=\sum_n\sum_{s=\pm1}\int_0^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dE}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{\frac{i}{\hbar}E(t_b-t_a)}\frac{1}{2}\left[1+s\sigma_z\right]e^{-\frac{i}{\hbar}\lambda s\mu_bB}$$
$$\times e^{-i\lambda\left[\omega^{(\theta)}(2n_\rho+|l|+1)-l\omega^{(\theta)}+E\right]}\Phi\left(r_b,\phi_b\right)\Phi^*_{n_\rho,l}\left(r_a,\phi_a\right). \tag{3.5.35}$$

Ensuite, en écrivant la matrice $\frac{1}{2}\left[1+s\sigma_z\right]$ dans (3.5.35) comme un produit d'un spinoriel U et son conjugué $\bar{U}$

$$G^{(\theta)}\left(r_f,\varphi_f,r_i,\varphi_i;T\right)=\sum_n\sum_{s=\pm1}\int_0^\infty d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dE}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{\frac{i}{\hbar}E(t_b-t_a)}U_s\bar{U}_s$$
$$\times e^{-i\lambda\left[\omega^{(\theta)}(2n_\rho+|l|+1)-l\omega^{(\theta)}+s\mu_bB+E\right]}\Phi\left(r_b,\phi_b\right)\Phi^*_{n_\rho,l}\left(r_a,\phi_a\right). \tag{3.5.36}$$

avec

$$U_s=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{1+s}\\ \sqrt{1-s}\end{pmatrix}, \tag{3.5.37}$$

Pour déterminer les niveaux d'énergie et des fonctions d'onde, nous intégrons sur le temps propre T: Nous arrivons

$$G_x^{\pm\theta}\left(\mathbf{x}_b,t_b;\mathbf{x}_a,t_a\right)=\sum_{n_\rho}\sum_l\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dE}{\sqrt{2\pi\hbar}}\frac{e^{\frac{i}{\hbar}ET}}{E-E_{n_\rho,l}}\Phi_{n_\rho,l}\left(\rho_b,\theta_b\right)\Phi^*_{n_\rho,l}\left(\rho_a,\theta_a\right). \tag{3.5.38}$$

où $E_{n_\rho,l}$ sont les pôles

$$E_{n_\rho,l,s}=\omega^{(\theta)}\left(2n_\rho+\mid l\mid+1\right)-l\omega^{(\theta)}-s\mu_bB. \tag{3.5.39}$$

avec $L_{n_\rho}^{(|l|)}$ sont polynômes de Laguerre.généralisées.

Pour évaluer les fonctions d'onde et le spectre d'énergie, nous allons intégrer la variable E, ça peut être converti en une intégration complexe le long du contour spécial C, puis en utilisant le théorème des résidus, on obtient:

$$\oint\frac{dE}{2\pi}\frac{e^{-iET}}{E-E_{n_\rho,l}}=-i\left[\Theta\left(T\right)e^{-iE_n^{(\theta)}T}+\Theta\left(-T\right)e^{iE_n^{(\theta)}T}\right], \tag{3.5.40}$$

où les valeurs propres d'énergie sont données par

$$E_n^{(\theta)}=\omega^{(\theta)}\left(2n_\rho+\mid l\mid+1\right)-l\omega^{(\theta)}\mp\mu_bB. \tag{3.5.41}$$

puis

$$G^{(\theta)}\left(r_f,\varphi_f,r_i,\varphi_i;T\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dE}{\sqrt{2\pi\hbar}}\frac{e^{\frac{i}{\hbar}ET}}{E-E_{n_\rho,l}}e^{il\phi}e^{-\frac{m^{(\theta)}\omega^{(\theta)}}{2\hbar}\left(r_b^2+r_a^2\right)}\left(\frac{m^{(\theta)}\omega^{(\theta)}}{\hbar}r_b^2\right)^{|l|/2}\left(\frac{m^{(\theta)}\omega^{(\theta)}}{\hbar}r_b^2\right)^{|l|/2}$$
$$\times\left[\frac{m^{(\theta)}\omega^{(\theta)}}{\pi\hbar}\frac{n_\rho!}{(n_\rho+|l|)!}\right]\begin{bmatrix}L_{n_\rho}^{(|l|)}\left(b\right)L_{n_\rho}^{(|l|)}\left(a\right) & 0\\ 0 & \frac{(n_\rho+|l|)}{n}L_{n_\rho-1}^{(|l|)}\left(b\right)L_{n_\rho-1}^{(|l|)}\left(a\right)\end{bmatrix}. \tag{3.5.42}$$

à partir de ce résultat, on en déduit le spectre d'énergie et les fonctions d'onde correspondantes, où $E_n^{(\theta)}$ est défini dans Eq.(3.5.41) et $\Psi_{n,s}^{(\theta)}\left(r,\varphi\right)$ est donné par:

$$\Psi_1=\frac{e^{\frac{i}{\hbar}m_\ell\varphi}e^{ip_zz}}{\sqrt{2\pi\rho}}\begin{pmatrix}l_n^{m_l}\left(x\right)\\ 0\end{pmatrix}x^{\frac{m_l+1/2}{2}}\exp\left(-\frac{x}{2}\right). \tag{3.5.43}$$

$$\Psi_{\downarrow} = \frac{e^{\frac{i}{\hbar} m_{\ell} \varphi} e^{i p_z z}}{\sqrt{2\pi\rho}} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{2\sqrt{\kappa} - \frac{(n+m_l)!}{n!}}{\frac{(n-1+m_l)!}{(n-1)!}}} \, l_{n-1}^{m_l}(x) \end{pmatrix} x^{\frac{m_l+1/2}{2}} \exp\left(-\frac{x}{2}\right). \tag{3.5.44}$$

4

Particule de Pauli avec des interactions dépendantes de l'énergie

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous suggérons de développer l'article [15] que d'utiliser le formalisme d'intégrale de chemin pour les systèmes qui possède le potentiel dépendant d'énergie. Mais dans la présence d'un champ magnétique constant $\mathcal{B}$ dépendant d'énergie perpendiculaire au plan non-commutatif $(\tilde{x}, \tilde{y})$. Nos résultats seront comparés avec ceux obtenus par le formalisme de Schrödinger comme nous allons déterminer dans ce chapitre.

4.2 Problème de normalisation

Dans un cadre de l'espace non-commutatif, la forme de l'équation de pauli pour le système que possède un champ magnétique dépendant de l'énergie donné par:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi\left(x,t\right)=\left[\frac{\left(\vec{P}-e\vec{A}\left(x,i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)\right)^{2}}{2m^{(\theta)}}+\mu_{B}\vec{\sigma}.\vec{B}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)\right]*\Psi\left(x,t\right) \tag{4.2.1}$$

Comme on a fait, le Moyal-Weyl $*$-produit est défini par:

$$\begin{aligned} f(x)*g(x) &= \exp\left[\tfrac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_{x_{\mu}}\partial_{y_{\nu}}\right]f(x)g(y)_{|x=y} \\ &= f\left(x\right).g\left(x\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{1}{n!}\left(\frac{-1}{2}\right)^{n}\partial_{\mu_{1}}...\partial_{\mu_{n}}f\left(x\right)\mathcal{P}_{\mu_{1}}...\mathcal{P}_{\mu_{n}}g\left(x\right), \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

où $\mathcal{P}_{i_k}=\theta^{i_kj_k}p_{j_k}$. On va appliquer le vecteur potentiel $\vec{A}(x)$ dépendant de l'énergie.

En effet, il est facile de montrer que:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t)=\left[\frac{\left(\vec{P}-e\vec{A}\left(x,i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)\right)^2}{2m}+\mu_B\vec{\sigma}.\vec{B}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)\right]\Psi(x,t)+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{1}{n!}\left(\frac{-1}{2}\right)^n\partial_{\mu_1}...\partial_{\mu_n}H\left(x,i\frac{\partial}{\partial t}\right)\mathcal{P}_{\mu_1}...\mathcal{P}_{\mu_n}\Psi(x,t)=0. \tag{4.2.3}$$

On multiplie à gauche par $\Psi^*(x,t)$, puis en conjuguant de cette équation, on multiplie par $\Psi(x,t)$ et on fait la différence, puis on peut trouver l'experssion de $\frac{\partial}{\partial t}\rho$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho=|\Psi(x,t)|^2+\frac{ie^2}{2m\hbar}\int^t\left[\Psi^*(x,s)\vec{A}^2\left(x,i\hbar\frac{\partial}{\partial s}\right)\Psi(x,s)-\Psi(x,s)\vec{A}^2\left(x,-i\hbar\frac{\partial}{\partial s}\right)\Psi^*(x,s)\right]ds$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{1}{n!}\left(\frac{-1}{2}\right)^n\Psi(x,s)\left[\partial_{\mu_1}...\partial_{\mu_n}H\left(x,-i\frac{\partial}{\partial t}\right)\mathcal{P}_{\mu_1}...\mathcal{P}_{\mu_n}\right]\Psi^*(x,t)=0. \tag{4.2.4}$$

Si le système indépendant du temps, on remplace la fonction d'onde par $\sum_n\exp(-\frac{i}{\hbar}E_nt)\Psi(x)$, on trouve la solution de cette équation est

$$\rho=\sum_{n,m^{(\theta)}}\Psi(x)\Psi^*(x)\left[e^{-\frac{i}{\hbar}\left(E_n-E_{m^{(\theta)}}\right)t}+\frac{ie^2}{2m\hbar}\left[\vec{A}^2(x,E_n)-\vec{A}^2(x,E_m)\right]\int^t e^{-\frac{i}{\hbar}(E_n-E_m)s}ds\right]$$
$$=\sum_{n,m^{(\theta)}}\Psi(x)\Psi^*(x)e^{-\frac{i}{\hbar}(E_n-E_m)t}\left[1-\frac{e^2}{2m^{(\theta)}}\frac{\left[\vec{A}^2(x,E_n)-\vec{A}^2(x,E_m)\right]}{(E_n-E_m)}\right]$$
$$=\sum_{n,m^{(\theta)}}\Psi(x)\Psi^*(x)e^{-\frac{i}{\hbar}(E_n-E_m)t}\left[1-\frac{e^2}{2m}\frac{\left[\vec{A}(x,E_n)-\vec{A}(x,E_m)\right]}{(E_n-E_m)}.\left[\vec{A}(x,E_n)+\vec{A}(x,E_m)\right]\right], \tag{4.2.5}$$

et après intégration sur tout l'espace, nous obtenons ($E_n\to E_{m^{(\theta)}}$).

Remarque si un champ électrique égual à zéro le résultat devient

$$\int\Psi(x)\Psi^*(x)\left[1-\frac{e^2}{m}\frac{\partial\vec{A}(x,E_n)}{\partial E_n}.\vec{A}(x,E_n)\right]dx=1 \tag{4.2.6}$$

et après intégration sur tout l'espace, nous obtenons ($E_n\to E_m$). On peut trouver la condition de normalisation:

$$\int\Psi(x)\Psi^*(x)\left[1-\frac{V(x,E_n)}{E_n}\right]\left[1-e\frac{\partial V(x,E_n)}{\partial E_n}-e^2\frac{\partial\vec{A}(x,E_n)}{\partial E_n}\cdot\frac{\vec{A}(x,E_n)}{E_n}\right]dx=1. \tag{4.2.7}$$

Si le vecteur potentiel dépendant de l'énergie, qui modifie la constante de normalisation des fonctions d'onde. Aussi la densité de probabilité n'est pas définie positive.

4.3 Méthodes de calcul

4.3.1 Méthode d'équation

L'équation de Pauli pour les intéractions dependant d'énergie s'écrit comme suit

$$\left(\left(\frac{\left(\overrightarrow{p}-e\vec{A}(\hat{x},i\hbar\partial_t)\right)^2}{2m}\right)+\mu_\beta\vec{\sigma}.\vec{B}\left(\hat{x},i\hbar\partial_t\right)\right)\star\Psi\left(x\right)=E\Psi\left(x\right). \tag{4.3.1}$$

où le produit-$\star$ represent un produit n'est pas normale. Selon, le système physique décrit par (2.4.5) est équivalent à l'équation des coordinnées cannoniques habitueles décrit par l'Hamiltonienne (remplaçant les coordinnées non-commutatives $\hat{x}_i$ par $\left(\hat{x}_i-\frac{\theta_{ij}\hat{p}_j}{2}\right)$:

$$\left(\left(\frac{\left(\overrightarrow{p}-e\vec{A}(\hat{x},i\hbar\partial_t)\right)^2}{2m}\right)+\mu_\beta\boldsymbol{\sigma}.\mathcal{B}_{\mathbf{E}}\right)\Psi\left(x\right)=E\Psi\left(x\right). \tag{4.3.2}$$

Ici, nous considérons le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme constant $\mathcal{B}_E$se dirigeant dans la direction de +z pour non-relativiste spinoriel de particules sur l'espace NC. Alors dans la mesure symétrique, on a $\vec{A}(x)=\frac{1}{2}\vec{B}\times\vec{r}=\frac{1}{2}\mathcal{B}_E(-y,x,0)$.Puisqu'il est très difficile de résoudre ces équations pour le cas de $V(x)\neq 0$, il est habituel pour écrire $V(x)=0$ afin de résoudre le problème.Dans ces acceptations de l'équation differenial de Pauli sur NC l'espace est

$$\left(\left(\left(p_x^2+p_y^2\right)\right)+\frac{e^2\mathcal{B}_E^2}{4\left(1+\frac{e\mathcal{B}_E\theta}{4}\right)^2}\left(x^2+y^2\right)+\frac{e\mathcal{B}_E(yp_x-xp_y)}{\left(1+\frac{e\mathcal{B}_E\theta}{4}\right)}+2m^{(\theta)}\frac{\varepsilon\mu_\beta\mathcal{B}_{\mathbf{E}}-E}{\left(1+\frac{e\mathcal{B}_E\theta}{4}\right)^2}\right)\Psi_\varepsilon\left(x\right)=0 \tag{4.3.3}$$

On peut facilement trouver la solution exacte de cet équation radial [**?**, 21], comme suit:

$$\mathcal{R}_{n_r,m_\ell,\varepsilon}=c_\varepsilon^{(E)}\frac{e^{\frac{i}{\hbar}m_\ell\varphi}e^{ip_zz}}{\sqrt{2\pi\rho}}\exp\left(-\frac{x}{2}\right)x^{\frac{m_l+1/2}{2}}L_n^{m_l}\left(x\right), \tag{4.3.4}$$

$c_\varepsilon^{(E)}$ est la constante de normalisation et

$$x=\kappa^{(\theta,E)}r^2,\mu=m_l \tag{4.3.5}$$

Ceci implique que l'énergie relativiste est donnée par

$$2m^{(\theta,E)}\left(E_\theta-\varepsilon\mu_\beta\mathcal{B}^{(\theta,E)}\right)=p_z^2+2\kappa^{(\theta,E)}\left(2n_\rho+|m_l|-m_l+1\right). \tag{4.3.6}$$

ainsi nous avons trouvé les mêmes resultat de la fonction d'onde mais la constante de normalisation est différent

$$\Psi_{\uparrow}(x) = c_{+}^{(E)} \frac{e^{\frac{i}{\hbar}m_{\ell}\varphi}e^{ip_z z}}{\sqrt{2\pi\rho}} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) x^{\frac{m_l+1/2}{2}} \begin{pmatrix} L_n^{m_l}(x) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.3.7}$$

$$\Psi_{\downarrow}(x) = c_{-}^{(E)} \frac{e^{\frac{i}{\hbar}m_{\ell}\varphi}e^{ip_z z}}{\sqrt{2\pi\rho}} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) x^{\frac{m_l+1/2}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ L_{n-1}^{m_l}(x) \end{pmatrix}. \tag{4.3.8}$$

et on peut de normaliser avec cette condition

$$\int \Psi(x)\Psi^{*}(x)\left[1 - \frac{e^2}{m}\frac{\partial\vec{A}(x,E_n)}{\partial E_n}.\vec{A}(x,E_n)\right] dv = 1 \tag{4.3.9}$$

on trouve

$$\sum_{\varepsilon=\pm1}\int \Psi_{\varepsilon}^{*}(\rho,\phi)\Psi_{\varepsilon}(\rho,\phi)\left[1 - \frac{e^2}{m}\frac{\partial\vec{A}(x,E_n)}{\partial E_n}.\vec{A}(x,E_n)\right] rdrd\varphi = 1, \tag{4.3.10}$$

s'obtient

$$\begin{gathered}\left\{\tfrac{1}{2\sqrt{\kappa}}\left[|c_{+}|^2\int_0^{\infty}\exp(-x)\,x^{m_l}\left[L_n^{m_l}(x)\right]^2\right.\right. \\ \left.\left. +|c_{-}|^2\int_0^{\infty}\exp(-x)\,x^{m_l}\left[L_{n-1}^{m_l}(x)\right]^2\right]\right]\left[1 - e^2\frac{\mathcal{B}_E}{4m^{(\theta)}}\frac{\partial\mathcal{B}_E}{\partial E_n}r^2\right] rdrd\varphi = 1,\end{gathered} \tag{4.3.11}$$

puis

$$\begin{gathered}\left\{\tfrac{1}{2\sqrt{\kappa}}\left[|c_{+}|^2\int_0^{\infty}\exp(-x)\,x^{m_l}\left[L_n^{m_l}(x)\right]^2\right.\right. \\ \left.\left. +|c_{-}|^2\int_0^{\infty}\exp(-x)\,x^{m_l}\left[L_{n-1}^{m_l}(x)\right]^2\right]\right]\left[1 - e^2\frac{\mathcal{B}_E}{4m^{(\theta)}\kappa}\frac{\partial\mathcal{B}_E}{\partial E_n}x\right] dx = 1,\end{gathered} \tag{4.3.12}$$

on trouve

$$\left[\tfrac{|c_+|^2}{2\sqrt{\kappa}}\frac{(n+m_l)!}{n!} + \tfrac{|c_-|^2}{2\sqrt{\kappa}}\frac{(n-1+m_l)!}{(n-1)!}\right]\left[1 - e^2\frac{\mathcal{B}_E}{4m^{(\theta)}\kappa}\frac{\partial\mathcal{B}_E}{\partial E_n}(2n+m_l+1)\right] = 1, \tag{4.3.13}$$

alors

$$\Rightarrow c_{-} = \sqrt{\frac{2\sqrt{\kappa}(n-1)!}{\left[1-e^2\frac{\mathcal{B}_{E}E}{4m^{(\theta)}\kappa}\frac{\partial\mathcal{B}_{E}E}{\partial E_n}(2n+m_l+1)\right](n-1+m_l)!} - |c_+|^2\,\frac{(n+m_l)}{n}}, \tag{4.3.14}$$

on trouve

$$\Psi_{+}(x) = c_{+}^{(E)}\frac{e^{\frac{i}{\hbar}m_{\ell}\varphi}e^{ip_z z}}{\sqrt{2\pi\rho}}\exp\left(-\frac{x}{2}\right)x^{\frac{m_l^{(\theta)}+1/2}{2}}\begin{pmatrix} L_n^{m_l}(x) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.3.15}$$

$$\begin{gathered}\Psi_{-}(x) = \sqrt{\frac{2\sqrt{\kappa}(n-1)!}{\left[1-e^2\frac{\mathcal{B}_E}{4m^{(\theta)}\kappa}\frac{\partial\mathcal{B}_E}{\partial E_n}(2n+m_l+1)\right](n-1+m_l)!} - |c_+|^2\,\frac{(n+m_l)}{n}\,\frac{e^{\frac{i}{\hbar}m_{\ell}\varphi}e^{ip_z z}}{\sqrt{2\pi\rho}}} \\ \times\exp\left(-\tfrac{x}{2}\right)x^{\frac{m_l+1/2}{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ L_{n-1}^{m_l}(x)\end{pmatrix}.\end{gathered} \tag{4.3.16}$$

Ensuite nous allons étudier le même problème suivant le formalisme de Feynman.

4.3.2 Méthode d'intégrale de chemin

Dans cette section, nous allons utiliser le formalisme de l'intégrale du chemin pour construire la fonction de propagation (un symbole de l'opérateur d'évolution) dans la mécanique quantique (MQ) non-relativiste avec spin 1/2 sur un espace non-commutatif et champs magénteique d'épendant d'énergie.

Alors le propagateur $G_x^\theta(\mathbf{x}_b, t_b; \mathbf{x}_a, t_a)$, que nous proposons de déterminer est solution de l'équation suivante

$$\left(H_b(\hat{x}, i\hbar\partial_t) - i\hbar\frac{\partial}{\partial t_b}\right) \star G_x^\theta(\mathbf{x}_b, t_b; \mathbf{x}_a, t_a) = i\hbar\delta(x_b - x_a)\,\delta(t_b - t_a) \tag{4.3.17}$$

qui il équivalent l'opérateur suivant

$$\hat{G}_x^\theta = \int_0^{+\infty} dT \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\left(\hat{H}_b(\hat{x}, i\hbar\partial_t) - i\hbar\tfrac{\partial}{\partial t_b}\right)T\right) \tag{4.3.18}$$

Dans ce type d'éléments, nous dérivons une représentation intégrale de chemin pour la fonction d'évolution G. Comme d'habitude, nous divisons l'intervalle de temps $T = t_b - t_a$ dans $N+1$ parties égales $t = T/(N+1)$ au moyen des points t_n, $n = 1, ..., N$ tel que $t_n = t_a + n\Delta t$. En utilisant la propriété du groupe de l'opérateur d'évolution et de la relation de fermeture (voir (3.5.3)) pour l'ensemble $|x_i\rangle$, on peut écrire

$$G_x^\theta = \lim_{N\to\infty}\int_0^{+\infty} dT \int_{-\infty}^{\infty} dx_1...dx_n \prod_{n=1}^{N+1}\left\langle \mathbf{x}_n, t_b \left| \exp\left(-\tfrac{i}{\hbar}\left(\hat{H} - \hat{E}\right)\varepsilon\right)\right| \mathbf{x}_{n-1}, t_a\right\rangle, \tag{4.3.19}$$

avec

$$\hat{H} = \frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A}(\hat{x}, i\hbar\partial_t))^2}{2m^{(\theta)}} + V(x, i\hbar\partial_t) + \mu_b\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{B}(\hat{x}, i\hbar\partial_t). \tag{4.3.20}$$

La fonction verteG_x^θest une matrice 2×2 diagonale dans une représentation de l'espace de position,

$$G_x^\theta(b,a) = \left\langle \mathbf{x}_n, t_b \left| \hat{G}_x^\theta \right| \mathbf{x}_{n-1}, t_a \right\rangle = \begin{bmatrix} G_\theta^+(b,a) & 0 \\ 0 & G_\theta^-(b,a) \end{bmatrix}. \tag{4.3.21}$$

En utilisant la relation de fermeture pour les vecteurs propres de moment $|p, p_0\rangle$, on peut calculer la représentation Hamiltonienne de l'intégrale de chemins pour les elements de propagateur G_x^θ est alors:

$$G_\theta^\pm(b,a) = \lim_{N\to\infty}\int_0^{+\infty} dT \int \prod_{k=1}^{N} d\vec{x}_k dt_k \int \prod_{k=1}^{N+1} d\vec{p}_k dp_{0k}$$
$$\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{k=1}^{N+1}\left(\mathbf{p}_k.\Delta\mathbf{x}_k - p_{0k}\dot{t}_k - \varepsilon\left(\frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A}(x_k, p_{0k}))^2}{2m} + V(x_k) \pm \mu_b B^{(E)} - p_{0k}\right)\right)\right\}. \tag{4.3.22}$$

Avec le même champs dans le chapitre précedant $\left(V(x)=0, \vec{A}=\left(-\frac{B}{2}y, \frac{B}{2}x, 0\right)\right)$. Ils ont trouvés la forme Hamiltonienne de l'intégrale de chemins pour le propagateur G_x^{θ} comme suivant:

$$G_{\theta}^{\pm}(b,a)=\lim_{N\to\infty}\int_0^{+\infty}dT\int\prod_{k=1}^{N}d\vec{x}_k dt_k\int\prod_{k=1}^{N+1}d\vec{p}_k dp_{0k}$$
$$\times e^{\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{k=1}^{N+1}\left(\mathbf{p}_k.\Delta\mathbf{x}_k-p_{0k}t_k-\varepsilon\left(\frac{\left(1+\frac{eB^{(E)}\theta}{4}\right)^2}{2m^{(\theta)}}\left(p_x^2+p_y^2\right)+eB^{(E)}\left(1+\frac{eB^{(E)}\theta}{4}\right)(yp_x-xp_y)\pm\mu_b B^{(E)}-E\right)\right)\right\}}. \quad (4.3.23)$$

les intégrations sur t_n donnent N fonctions de Dirac $\delta\left(p_{t_n}-p_{t_{n-1}}\right)$; ce qui implique

$$p_{t_1}=p_{t_2}=p_{t_3}=...=p_{t_{N+1}}=E. \quad (4.3.24)$$

Aussi, on peut l'intégrer sur les variables de l'impulsion car elle est d'une forme quadratique, nous arrivons à la forme lagrangienne:

$$G_{\theta}^{\pm}(b,a)=\lim_{N\to\infty}\int_0^{\infty}dT\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dE}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{\frac{i}{\hbar}ET}e^{\frac{iT}{\hbar}\left[E\mp\mu_b B^{(E)}\right]}$$
$$\times\prod_{n=1}^{N+1}\frac{m^{(\theta)}}{(2\pi i\hbar\varepsilon)}\int\prod_{n=1}^{N}d\mathbf{x}_n\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N+1}\left[\frac{m^{(\theta)}}{2}\left[\frac{(\Delta\mathbf{x}_n)^2}{\varepsilon}+\omega^{(\theta,E)}\epsilon^{ij}x_{ni}\Delta x_{nj}\right]\right]\right\}, \quad (4.3.25)$$

avec

$$m^{(\theta,E)}=\frac{m}{\left(1+\frac{eB^{(E)}\theta}{4}\right)^2}, \omega^{(\theta,E)}=\frac{2eB^{(E)}\left(1+\frac{eB^{(E)}\theta}{4}\right)}{m}. \quad (4.3.26)$$

où

$$\mathcal{N}=\int\prod_{n=1}^{N+1}\frac{d\mathbf{p}_n}{(2\pi\hbar)}\exp\left(\frac{i\varepsilon}{\hbar}\sum_{n=1}^{N+1}\frac{\mathbf{p}_n^2}{2m^{(\theta,E)}}\right)=\prod_{n=1}^{N+1}\frac{m^{(\theta,E)}}{(2\pi i\hbar\varepsilon)}. \quad (4.3.27)$$

Ce propagateur est le même propagateur de particule non-relativiste dans un champ magnétique constant, et nous allons utiliser les coordonnées polaires, pour obtenir la forme finale de ce propagateur.

$$G_{\theta}^{\pm}(\vec{x}_b,\vec{x}_a,T)=\lim_{N\to\infty}\int_0^{+\infty}dT\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dE}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{\frac{i}{\hbar}ET}e^{\frac{iT}{\hbar}\left[E\mp\mu_b B^{(E)}\right]}\prod_{n=1}^{N}\int r_k dr_k d\phi_k\left(\frac{m^{(\theta,E)}}{2\pi\varepsilon i\hbar}\right)^{N+1}$$
$$\times\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N+1}\left[\frac{m^{(\theta,E)}}{2\varepsilon}\left(r_k^2+r_{k-1}^2-2r_k r_{k-1}\cos\Delta\phi_k+2\omega^{(\theta,E)}r_k r_{k-1}\sin\Delta\phi_k\right)\right]\right\}, \quad (4.3.28)$$

Les intégrations sur les trajectoires $\phi(t_k)$ et $r(t_k)$ sont faire dans le chapitre 3, l'eq(4.3.28) devient comme suit:

$$G_x^{\pm\theta}(\mathbf{x}_b,t_b;\mathbf{x}_a,t_a)=\int_0^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dE}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{\frac{i}{\hbar}E(t_b-t_a)}\times e^{-i\lambda\left[\omega^{(\theta,E)}(2n_r+|l|+1)-l\omega^{(\theta,E)}+E\mp\mu_b B\right]}$$
$$\times\sum_{n_r}\sum_{l}\Psi_{n_r,l}(r_b,\phi_b)\Psi_{n_\rho,l}^{*}(r_a,\phi_a). \quad (4.3.29)$$

avec

$$\Psi_{n_r,l}\left(r_b,\phi_b\right)=\left(\frac{m^{(\theta,E)}\omega^{(\theta,E)}}{\pi\hbar}\frac{n_r!}{(n_r+|l|)!}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{m^{(\theta,E)}\omega^{(\theta,E)}}{\hbar}r^2\right)^{|l|/2}$$
$$\times\exp\left(il\phi-\frac{m^{(\theta,E)}\omega^{(\theta,E)}}{2\hbar}r^2\right)L_{n_\rho}^{(|l|)}\left(\frac{m^{(\theta)(\theta)}\omega^{(\theta,E)}}{\hbar}r^2\right). \quad (4.3.30)$$

Pour déterminer les énergie-niveaux et les fonctions d'onde, nous devons employer la formule de Hille-Hardy et les propriétés des séries de polynômex de Laguerre [22], puis nous intégrons au cours du temps approprié T: Nous obtenons finalement

$$G_x^{\pm\theta}\left(\mathbf{x}_b,t_b;\mathbf{x}_a,t_a\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dE}{\sqrt{2\pi\hbar}}\frac{e^{\frac{i}{\hbar}ET}}{E-E_{n_r,l}\left(E\right)}\sum_{n_r}\sum_{l}\Phi_{n_r,l,(E)}\left(r_b,\theta_b\right)\Phi^*_{n_r,l,(E)}\left(r_a,\theta_a\right). \quad (4.3.31)$$

où $E_{n_\rho,l}$ sont les pôles

$$E_{n_r,l}=\omega^{(\theta,E)}\left(2n_r+\mid l\mid+1\right)-l\omega^{(\theta,E)}\mp\mu_bB. \quad (4.3.32)$$

là où $L_{n_\rho}^{(|l|)}$ sont des polynômex généralisés de Laguerre.

Pour évaluer les fonctions d'onde et le spectre d'énergie, nous allons intégrer sur la variable E, ça peut être converti en une intégration complexe le long du contour spécial C, puis en utilisant le théorème des résidus, on obtient:

$$\oint\frac{dE}{2\pi}\frac{e^{-iET}}{E-E_{n_r,l}(E)}=2\pi i\sum_j\operatorname{Res}\left(\frac{e^{-iET}}{E-E_{n_r,l}(E)},E_j\right), \quad (4.3.33)$$

avec E_j sont les poles de l'équation $\left(E-E_{n_r,l}\left(E\right)\right)$ avec $E_{n_r,l}\left(E\right)$:

$$E^{(\theta)}=\omega^{(\theta,E)}\left(2n_r+\mid l\mid+1\right)-l\omega^{(\theta,E)}\mp\mu_bB_E. \quad (4.3.34)$$

$$=\frac{2eB^{(E)}\left(1+\frac{eB^{(E)}\theta}{4}\right)}{m}\left(2n_r+\mid l\mid+1\right)-l\frac{2eB^{(E)}\left(1+\frac{eB^{(E)}\theta}{4}\right)}{m}\mp\mu_bB_E. \quad (4.3.35)$$

sa solution donnée par fixier l'expréssion de B_E égual $B_E=B\left(1+\gamma E\right)^q$.

Si $q=1$, les poles de l'eq(4.3.35) sont:

$$E=\frac{2eB(1+\gamma E)^q\left(1+\frac{eB(1+\gamma E)^q\theta}{4}\right)}{m}\left(2n_\rho+\mid l\mid+1\right)-l\frac{2eB(1+\gamma E)^q\left(1+\frac{eB(1+\gamma E)^q\theta}{4}\right)}{m}\mp\mu_BB\left(1+\gamma E\right)^q, \quad (4.3.36)$$

qui donne

$$E\left(1\pm\mu_BB\gamma-\frac{2e\beta\gamma}{m}\left(2n_\rho+\mid l\mid+1\right)-\frac{2(e\beta)^2\theta\gamma}{4m}\left(2n_\rho+\mid l\mid+1\right)+l\frac{2(e\beta)^2\theta\gamma}{4m}+l\frac{2e\beta\gamma}{4m}\right)$$
$$-E^2\left(\left(\frac{2(e\beta)^2\theta\gamma^2}{4m}\left(2n_\rho+\mid l\mid+1\right)-l\frac{2(e\beta)^2\theta\gamma^2}{4m}\right)-\left(\frac{2e\beta}{m}+\frac{2(e\beta)^2\theta}{4m}\left(2n_\rho+\mid l\mid+1\right)\right)\right)$$
$$+l\frac{2e\beta}{m}+l\frac{2\left(e\beta\right)^2}{4m}\pm\mu_BB=0. \quad (4.3.37)$$

on trouve

$$\Rightarrow \quad AE^2 - BE - C = 0 \tag{4.3.38}$$

$$\Rightarrow \quad E^2 - BE - C = 0 \tag{4.3.39}$$

avec

$$A = \left(\tfrac{2(e\beta)^2\theta\gamma^2}{4m}\left(2n_\rho + \mid l \mid +1\right) - l\tfrac{2(e\beta)^2\theta\gamma^2}{4m}\right) - \left(\tfrac{2e\beta}{m} + \tfrac{2(e\beta)^2\theta}{4m}\left(2n_\rho + \mid l \mid +1\right)\right). \tag{4.3.40}$$

$$B = \left(1 \pm \mu_B B\gamma - \tfrac{2e\beta\gamma}{m}\left(2n_\rho + \mid l \mid +1\right) - \tfrac{2(e\beta)^2\theta\gamma}{4m}\left(2n_\rho + \mid l \mid +1\right) + l\tfrac{2(e\beta)^2\theta\gamma}{4m} + l\tfrac{2e\beta\gamma}{4m}\right). \tag{4.3.41}$$

$$C = l\frac{2e\beta}{m} + l\frac{2\left(e\beta\right)^2}{4m} \pm \mu_B B. \tag{4.3.42}$$

et

$$E_1 = \frac{\left(1 \pm \mu_B B\gamma - \frac{2e\beta\gamma}{m}(2n_\rho+|l|+1) - \frac{2(e\beta)^2\theta\gamma}{4m}(2n_\rho+|l|+1) + l\frac{2(e\beta)^2\theta\gamma}{4m} + l\frac{2e\beta\gamma}{4m}\right) + \sqrt{D_{n,l,\theta}}}{2\left(\frac{2(e\beta)^2\theta\gamma^2}{4m}(2n_\rho+|l|+1) - l\frac{2(e\beta)^2\theta\gamma^2}{4m}\right) - \left(\frac{2e\beta}{m} + \frac{2(e\beta)^2\theta}{4m}(2n_\rho+|l|+1)\right)}. \tag{4.3.43}$$

et

$$E_2 = \frac{\left(1 \pm \mu_B B\gamma - \frac{2e\beta\gamma}{m}(2n_\rho+|l|+1) - \frac{2(e\beta)^2\theta\gamma}{4m}(2n_\rho+|l|+1) + l\frac{2(e\beta)^2\theta\gamma}{4m} + l\frac{2e\beta\gamma}{4m}\right) - \sqrt{D_{n,l,\theta}}}{2\left(\frac{2(e\beta)^2\theta\gamma^2}{4m}(2n_\rho+|l|+1) - l\frac{2(e\beta)^2\theta\gamma^2}{4m}\right) - \left(\frac{2e\beta}{m} + \frac{2(e\beta)^2\theta}{4m}(2n_\rho+|l|+1)\right)}. \tag{4.3.44}$$

et

$$\begin{aligned} D_{n,l,\theta} = {} & \left(1 \pm \mu_B B\gamma - \tfrac{2e\beta\gamma}{m}\left(2n_\rho + \mid l \mid +1\right) - \tfrac{2(e\beta)^2\theta\gamma}{4m}\left(2n_\rho + \mid l \mid +1\right) + l\tfrac{2(e\beta)^2\theta\gamma}{4m} + l\tfrac{2e\beta\gamma}{4m}\right)^2 \\ & -4\left(\left(\tfrac{2(e\beta)^2\theta\gamma^2}{4m}\left(2n_\rho + \mid l \mid +1\right) - l\tfrac{2(e\beta)^2\theta\gamma^2}{4m}\right) - \left(\tfrac{2e\beta}{m} + \tfrac{2(e\beta)^2\theta}{4m}\left(2n_\rho + \mid l \mid +1\right)\right)\right) \\ & \times \left(l\frac{2e\beta}{m} + l\frac{2\left(e\beta\right)^2}{4m} \pm \mu_B B\right). \end{aligned} \tag{4.3.45}$$

alors le propagateur devient

$$\begin{aligned} G^{(\theta)}\left(r_f, \varphi_f, r_i, \varphi_i; T\right) = {} & \int_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{dE}{\sqrt{2\pi\hbar}} \frac{e^{\frac{i}{\hbar}ET}}{E - E_{n_\rho,l}\left(E\right)} e^{il\phi - \frac{m^{(\theta.E)}\omega^{(\theta,E)}}{2\hbar}r^2} \left[\tfrac{m^{(\theta.E)}\omega^{(\theta,E)}}{\pi\hbar} \tfrac{n_\rho!}{(n_\rho+|l|)!}\right] \\ & \times \begin{bmatrix} L_{n_\rho}^{(|l|)}\left(\frac{m^{(\theta.E)}\omega^{(\theta,E)}}{\hbar}r^2\right) & 0 \\ 0 & L_{n_\rho-1}^{(|l|)}\left(\frac{m^{(\theta)(\theta)}\omega^{(\theta,E)}}{\hbar}r^2\right) \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{4.3.46}$$

Dans (3.5.40), nous avons deux types de propagations, l'une avec l'énergie positive ($E_1^{(\theta)}$) se propageant vers le futur et l'autre avec une énergie négative ($E_2^{(\theta)}$) se propageant vers le passé. à partir de ce résultat, on en déduit le spectre d'énergie et les fonctions d'onde correspondantes à partir (**??**) en écrivant

$$G^{(\theta.E)}\left(r_f,\varphi_f,r_i,\varphi_i;T\right)=$$
$$-\sum_n\sum_{s=\pm1}\left[\Theta\left(T\right)\xi_{n,s}^{(\theta.E)}\left(r_f,\varphi_f\right)\bar{\xi}_{n,s}^{(\theta.E)}\left(r_i,\varphi_i\right)e^{-iE_1^{(\theta.E)}T}+\Theta\left(-T\right)\xi_{n,s}^{(\theta.E)}\left(r_f,\varphi_f\right)\bar{\xi}_{n,s}^{(\theta.E)}\left(r_i,\varphi_i\right)e^{iE_n^{(\theta.E)}T}\right], \tag{4.3.47}$$

où $E_n^{(\theta)}$ est défini dans Eq.(3.5.41) et $\xi_{n,s}^{(\theta)}\left(r,\varphi\right)$ est donné les mêmes résultats qui sont définis dans l'eq.(4.3.15), (4.3.16).

5

Conclusions

Suivant deux méthodes (l'équation différentielle et l'approche de Feynman), nous avons étudié dans ce mémoire le problème de la particule non-relativiste spin (1/2) dans l'espace non-commutatif lorsque le champ magnétique dépendants de l'énergie. Suivant deux cas spéciaux qui définissent comme suit:

Au premier chapitre, nous avons présenté les définitions nécessaires de la géométrie non-commutative. Puis, selon la méthode d'équation nous avons déterminé les solutions exactes de fonctions d'ondes et les spectres des énergies dans l'espace non-commutatif consacré aux particules non-relativistes avec spin 1/2 soumis dans un champ magnétique constant.

Ensuit dans le 2ème chapitre, nous avons calculé les spectres d'énergies et les fonctions d'ondes dans le même espace mais par utiliser une autre approche qui s'appelle l'approche des intégrales de chemins.

Dans le 3ème chapitre et avec les mêmes étapes du deuxième chapitre, nous avons traité le problème de la normalisation des fonctions d'onde, lorsque les interactions décrites par les potentiels dépendants de E sont présentes dans l'équation de Pauli est reconsidéré par le formalisme des intégrales de chemins. Les corrections sont déterminées encore via l'équation de continuité. Après cette clarifie nous avons calculé les spectres d'énergies et les fonctions d'ondes dans un champ magnétique constant.

Bibliographie

[1] Snyder H S phys. Rev. **71** 38 (1947).

[2] K. Li and J. Wang, Eur. Phys. J. C 50, (2007) 1007.

[3] M. Rosenbaum, J. David Vergara and L. Roman Juarez, Phys. Letts. A 367, (2007)1.

[4] Jian Jing, Shi-Hua Zhao, Jian-Feng Chen and Zheng-Wen Long. Eur. Phys. J. C 54, (2008) 685.

[5] M. Falek and M. Merad, Commun. Theor. Phys. 50, (2008) 587.

[6] Agnieszka Kijanka and Piotr Kosi´nski . Phys. Rev. D 70, (2004) 127702.

[7] M. Chaichian, M. M. Sheikh-Jabbari, and A. Tureanu. Phys. Rev. Lett. 86, 2716 (2001).

[8] Formanek, J. Mares and R. Lombard, Czech. J. Phys. 54, 289 (2004)

[9] J. Garcia-Martinez, J. Garcia-Ravelo, J. J. Pena, A. Schulze-Halberg, Phys. Lett. A 373, 3619 (2009)

[10] R. Yekken, R. J. Lombard, J. Phys. A : Math. Theor. 43, 125301 (2010)

[11] A. Schulze-Halberg, Cent. Eur. J. Phys. 9, 57 (2011)

[12] R. J. Lombard, J. Mares, Phys. Lett. A 373, 426 (2009)

[13] J. Lin, Y. S. Li, X. M. Qian, Phys. Lett. A 362, 212 (2007)

[14] H. Hassanabadi, S. Zarrinkamar, H. Hamzavi and A. A. Rajabi, Arab. J. Sci. Eng. 37, 209 (2012)

[15] A. Benchikha and L. Chetouani, Modern Physics Letters A **28**, No. 18 (2013) 1350079

[16] M. Bordemann, African Journal Of Mathematical Physics 2, (2005) 21.

[17] H. Weyl. Quanten mechanik und Gruppen theorie. Z. Physik, 46, (1927) 1.

[18] F. Bopp and Werner Heisenberg und die Physik unserer Zeit (Vieweg, Braunschweig), 128 (1961).

[19] L. Mezincescu. Star product in quantum mechanics (2000). arXiv: hep-th/0007046.

[20] E. Kamke, Differentialgleichungen L¨osungsmethoden und L¨osungen (Leipzig, 1959)

[21] Handbook of Mathematical Functions, Natl. Bur. Stand. Appl. Math. Ser. No. 55, edited by M. Abramowitz and I. Stegun (U.S. GPO, Washington, D.C., 1965).

[22] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, Table of Integrals, Series, and Products (Academic, New York, 1980) (Corrected and enlarged edition).

[23] D. C. Khandekar, S. V. Lawande, and K. V. Bhagwat, Path Integral Methods and their Applications (World Scientific, Singapore, 1993).

[24] C. Grosche and F. Steiner, Handbook of Feynman Path Integrals (Springer, Berlin, 1998).

Résumé

Nous allons présenter dans ce mémoire, les définitions nécessaires de la structure algébrique de l'espace non commutative. Puis, selon l'équation de continuité on peut vérifier et solutionner exactement le problème de normalisation de la fonction d'onde à travers de l'équation de continuité. Après, nous allons essayer d'étudier explicitement un exemple simple; c'est la particule de l'équation de Pauli (cas non-relativiste) soumis dans un champ magnétique constant et dépendant de l'énergie perpendiculaire au plan non-commutatif avec deux approches méthode direct et méthode de Feynman.

Mots-clés: L'équation de Pauli, La géométrie Non-commutative, Formalisme de l'intégrale de chemins, Propagateur non-relativiste.

summary

Mémoire de la CE de dans de présenter d'allons de Nous, algébrique de l'espace de définitions nécessaires de la structure de les non commutatif. Puis, selon l'équation de continuité sur le peut vérifier et d'onde à travers de l'équation de continuité. Apres, exemple d'étudier de de la fonction de normalisation de solutionner exactement le problème de l'explicitement un d'essayer nous d'allons simple; le magnétique de champ des dans un de soumis de la particule de l'équation de c'est Pauli (non-relativiste de cas) constant et le méthode dépendant d'approches de deux d'avec de non-commutatif de plan d'Au de perpendiculaire de l'énergie direct et le méthode de Feynman.

Mots-clés L'équation de Pauli, géométrie de La non commutatif, Formalisme de l.intégrale de chemins, non-relativiste de Propagateur.

ملخص

سنعرض في هذه الدراسة، التعاريف اللازمة للهيكل جبري من المساحة غير تبادلي. بعد ذلك، وفقا لمعادلة الاستمرارية يمكن التحقق منها وحلها بدقة وظيفة موجة من مشكلة التوحيد من خلال معادلة الاستمرارية. بعد، سنحاول دراسة صراحة مثال بسيط. هذا هو الجسيمات من المعادلة باولي (حالة غير النسبية) المقدمة في مجال مغناطيسي ثابت والتي تعتمد على الطاقة عمودي على خطة غير تبادلي مع النهجين الطريقة المباشرة وطريقة فاينمان.

الكلمات المفتاحية. معادلة باولي.الهندسة في فضاء غير تبادلي.شكل بطريقة التكامل .الانتشار الغير النسبى.