UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matière

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation et Analyse Numérique

Par :TATI Hawa

Thème

Les matrices opérationnelles des polynômes de Bernstein et leurs applications.

Soutenu publiquement le : 01/06/2016

Devant le jury composé de :

Tellab Brahim	M.A.Université KASDI Merbah- Ouargla	Président
Bencheikh Abdelkrim	M.A. Université KASDI Merbah- Ouargla	Rapporteur
Abassi Hossine	M.A. Université KASDI Merbah- Ouargla	Examinateur
Kouidri Mohammed	M.A. Universié KASDI Merbah- Ouargla	Examinateur

l'année universitaire :2015/2016

Dédicaces

Je dédie ce mémoire à :

Mes parents :

Ma mère, qui a oeuvré pour ma réussite, de par son amour, son soutien, tous les sacrifices consentis et ses précieux conseils, pour toute son assistance et sa présence dans ma vie, reçois à travers ce travail aussi modeste soit-il, l'expression de mes sentiments et de mon éternelle gratitude.

Mon père, qui peut être fier et trouver ici le résultat de longues années de sacrifices et de privations pour m'aider à avancer dans la vie. Puisse Dieu faire en sorte que ce travail porte son fruit ; Merci pour les valeurs nobles, l'éducation et le soutient permanent venu de toi.

Mes frères et soeurs qui n'ont cessé d'être pour moi des exemples de persévérance, de courage et de générosité.

Mes encadreur Bencheikh Abdelkrim de qui doivent voir dans ce travail la fierté d'un savoir bien acquis.

Remerciements

Avant toute considération,je remercie le Grand Dieu le tout puissant qui, m'a aidé pour achever ce travail.

Je tiens à exprimer ma vive reconnaissance à M^r ***Bencheikh Abdelkrim***, M.A. université de Kasdi Merbah Ouargla, pour avoir accepté de diriger ces travaux. Je le remercie infiniment pour avoir toujours été présent par ses conseils, ses encouragements et sa gentillesse. Je voudrai aussi le remercier pour sa disponibilité et du temps consacré à mon travail de m'avoir fait bénéficier tout au long de ce travail.

Je voudrais remercier chaleureusement M^r **Abassi Hossine** , M.A.université de Kasdi Merbah Ouargla, qui m'encouragée et conseillée pour terminer mes études.

J'adresse mes plus vifs remerciements et j'exprime ma profonde gratitude à M^r **kouidrie Mohammed**, M.A.Université de Kasdi Merbah Ouargla, lequel m'a fait le grand honneur d'accepter la présidence de mon jury de thèse.

Je me sens redevable auprès de M^r **Chacha Djamel Ahmed** , Professeur à l'université de Kasdi Merbah Ouargla, lesquel, en dépit de leur nombreuse occupation, ont bien accepté d'examiner ce travail.

Je remercie aussi toute personne de prés ou de loin a contribué à la finalisation de ce travail.

Table des matières

Notations

- ➤ $\forall$: quelque soit
- ➤ $\exists$: il existe
- ➤ $\langle , \rangle$: Le produit scalaire.
- ➤ $B_{i,n}(x)$ polynôme de Bernstein.
- ➤ $\phi(x)$ la base de polynôme de Bernstein .
- ➤ P la matrice opérationnelle d'intégration
- ➤ D la matrice opérationnelle de différentiation..
- ➤ $\widehat{C}$ la matrice opérationnelle de produit
- ➤ $|e_m|$ erreur absolue..

Introduction

Les fonctions orthogonales et les séries de polynômes ont suscitée une attention considérable en faisant aux divers problèmes des systèmes dynamiques. La caractéristique principale de cette technique est qu'elle ramène ces problèmes à la résolution des systèmes d'équations algébriques, ce qui simplifie considérablement les problèmes. L'approche est basée sur la conversion des équations fondamentales en équations intégrales par une intégration approchée des divers signaux impliqués dans l'équation série de polynômes tronquée et en employant les matrices opérationnelles pour éliminer l'intégrale, dérivation et opérations de produit.

Dans ce mémoire, nous avons étudié les matrices opérationnelles des polynômes de Bernstein et leurs applications. Ce mémoire se compose de quatre chapitres.

Dans le premier chapitre, nous définissons les polynômes de Bernstein et ses plus importantes propriétés, telles que l'unité, la récurrence, la dérivation, et l'intégration ... etc. les polynômes de Bernstein forment une base de $\mathbb{P}$, et peuvent se développer en termes de la base de Taylor ; ce chapitre et principalement basé sur les travaux [1], [2], [3], [6] ,[7].

Dans le deuxième chapitre, nous approchons la solution exacte, et examinons l'analyse d'erreur et l'erreur absolue. Ce chapitre est principalement basé sur les travaux [2], [4] , [9], [5].

Dans le troisième chapitre, nous avons étudié les matrices opérationnelles des polynômes de Bernstein d'intégration P et de différentiation D et du produit $\widehat{C}$ respectivement :

$$\int_0^x \phi(t) \simeq P\phi(x)$$
$$\frac{d}{dx}\phi(x) \simeq D\phi(x)$$
$$c^T \phi(x)\phi(x)^T \simeq \phi(x)^T \widehat{C}$$

Où $\phi(x) = \{\phi_0(x), \phi_1(x), \ldots, \phi_n(x)\}$ et c un vecteur arbitraire. Ce chapitre et principalement basé sur les travaux [2] [8].

Dans le dernier chapitre, nous avons fait une application numérique des matrices opérationnelles d'intégration P et de différentiation D. Ce chapitre est principalement basé sur les travaux [9].

Chapitre 1

Les polynômes de Bernstein

1.1 Les polynômes de Bernstein

Dans ce chapitre nous allons présenter les polynômes de Bernstein, nommés ainsi en l'honneur du mathématicien Ukrainien Sergeï Natanovich Bernstein $(1880-1968)$. Ces polynôme vont nous servir par la suite les matrices opérationnelles.

Définition 1.1.1 *Les polynômes de Bernstein de degré n sont définis sur* $[0,1]$ *:*

$$B_{i,n}(x) = \begin{cases} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \; si \; 0 \leq i \leq n \\ 0 \;\; si \; non \end{cases} \tag{1.1}$$

avec

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

Algorithm 1 Algorithme avec matlab

1: n(un nombre entier)
2: **for** $0 \leq i \leq n$ **do**
3: $\quad b_{i+1} = nchoosek(n,i) * (1-x)^{n-i} * x^i$;
4: **end for**

Exemple 1 :

Dans le cas(n=4) les polynômes de Bernstein sont donnés par

$$B_{0,4}(x) = (1-x)^4$$
$$B_{1,4}(x) = 4x(1-x)^3$$
$$B_{2,4}(x) = 6x^2(1-x)^2$$
$$B_{3,4}(x) = 4x^3(1-x)$$
$$B_{4,4}(x) = x^4$$

On remarque qu'ils sont tous positifs pour $x \in [0,1]$, et que leur est somme égale 1.

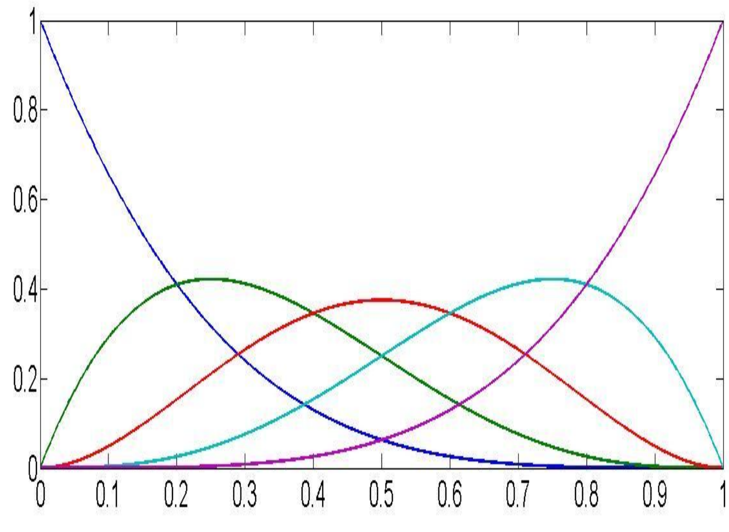

Figure 1.1 : polynômes de Bernstein de degré 4.

1.2 propriétés des polynômes de Bernstein

Les polynômes de Bernstein ont des propriétés importantes : [1], [3], [6]

Unité

Les polynômes de Bernstein de degré n de la somme égale 1

$$\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(x) = 1$$

Preuve.

Application directe de la loi binomial

$$\begin{aligned} 1 &= [(1-x)+x]^n \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \\ &= \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(x) \end{aligned}$$

■

Positivité

Les polynômes de Bernstein sont positifs sur $[0,1]$

$$\forall x \in [0,1], B_{i,n}(x) \geq 0$$

Preuve.

$$B_{i,n}(x) = \begin{cases} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \; si \; 0 \leq i \leq n \\ 0 \;\; si \; non \end{cases} \tag{1.2}$$

$\binom{n}{i} > 0$ et pour $x \in [0,1], x \geq 0$ et $1-x \geq 0 \Longrightarrow x^i \geq 0$ et $(1-x)^{n-i} \geq 0$

donc $\forall x \in [0,1], B_{i,n}(x) \geq 0$ ■

Symétrie

Si $0 \leq i \leq n$ alors $B_{i,n}(1-x) = B_{n-i,n}(x)$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\forall i \in \{0,\dots,n\}, B_{i,n}(u) &= \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i} \\
\Longrightarrow B_{i,n}(1-x) &= \binom{n}{i} (1-x)^i [1-(1-x)]^{n-i} \\
&= \binom{n}{i} x^{n-i} (1-x)^i
\end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned}
\binom{n}{i} &= \frac{n!}{i!(n-i)!} \\
&= \frac{n!}{(n-i)!(n-(n-i))!} \\
&= \binom{n}{n-i}
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
B_{i,n}(1-x) &= \binom{n}{n-i} x^{n-i} (1-x)^i \\
&= B_{n-i,n}(x)
\end{aligned}$$

■

Récurrence :

Les polynômes de Bernstein de degré n peuvent être exprimés en termes des polynômes de degré $(n-1)$:

$$B_{i,n}(x) = (1-x)B_{i,n-1}(x) + xB_{i-1,n-1}(x)$$

pour $i = 0, \dots, n$ où $B_{-1,n-1}(x) = 0$ et $B_{n,n-1}(x) = 0$

Preuve.

On a

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1} &= \frac{(n-1)!}{i!(n-i-1)!} + \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} \\
&= \frac{(n-1)!(n-i)}{i!(n-i-1)!(n-i)} + \frac{(n-1)!i}{(i-1)!(n-i)!i} \\
&= \frac{(n-1)!(n-i)}{i!(n-i)!} + \frac{(n-1)!i}{i!(n-i)!} \\
&= \frac{(n-1)!(n-i) + (n-1)!i}{i!(n-i)!} \\
&= \frac{n(n-1)! - i(n-1)! + i(n-1)!}{i!(n-i)!} \\
&= \binom{n}{i}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1-x)B_{i,n-1}(x) + xB_{i-1,n-1}(x) &= (1-x)\binom{n-1}{i}x^i(1-x)^{n-1-i} + x\binom{n-1}{i-1}x^{i-1}(1-x)^{n-1-(i-1)} \\
&= \binom{n-1}{i}x^i(1-x)^{n-i} + \binom{n-1}{i-1}x^i(1-x)^{n-i} \\
&= \left[\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1}\right]x^i(1-x)^{n-i} \\
&= \binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i} \\
&= B_{i,n}(x)
\end{aligned}$$

■

Les polynômes de Bernstein comme une base

Pourquoi utiliser les polynômes de Bernstein d'ordre n comme base pour l'espace des polynômes de degré $\leq n$?

1. Ils couvrent l'espace des polynômes, n'importe quel polynôme de degré inférieur ou égal n, peut être écrit comme combinaison linéaire des polynômes de Bernstein.

$$\begin{aligned}
B_{i,n}(x) &= \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \\
&= \binom{n}{i} x^i \sum_{k=0}^{n-i} (-1)^k \binom{n-i}{k} x^{k+i} \\
&= \sum_{k=0}^{n-i} (-1)^k \binom{n}{i}\binom{n-i}{k} x^{k+i} \\
&= \sum_{k=i}^{n} (-1)^{k-i} \binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i} x^{k} \\
&= \sum_{k=i}^{n} (-1)^{k-i} \binom{n}{k}\binom{k}{i} x^{k}
\end{aligned}$$

2. Ils sont linéairement indépendants, s'il existe des constantes $c_0, c_1, ..., c_n$ tel que

$$0 = c_0 B_{0,n}(x) + c_1 B_{1,n}(x) + \ldots + c_n B_{n,n}(x)$$

$\forall x \in [0,1]$, les C_i doivent être nuls.

Si cela était correcte, alors nous pourrions écrire

$$\begin{aligned}
0 &= c_0 B_{0,n}(x) + c_1 B_{1,n}(x) + \ldots + c_n B_{n,n}(x) \\
&= c_0 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{k}{0} x^k + c_1 \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k}\binom{k}{1} x^k + \cdots + c_n \sum_{k=n}^{n} (-1)^{k-n} \binom{n}{k}\binom{k}{n} x^k \\
&= c_0 + \left[\sum_{k=0}^{1} c_k \binom{n}{1}\binom{1}{1} \right] x^1 + \cdots + \left[\sum_{k=0}^{n} c_k \binom{n}{n}\binom{n}{n} \right] x^k
\end{aligned}$$

$$\begin{gathered} c_0 = 0 \\ \left[\sum_{k=0}^{1} c_k \binom{n}{1}\binom{1}{1}\right] = 0 \\ \vdots \\ \left[\sum_{k=0}^{n} c_k \binom{n}{n}\binom{n}{n}\right] = 0 \end{gathered}$$

ce qui implique que $c_0 = c_1 = \cdots = c_n = 0$($c_0$ est clairement zéro, en substituant ceci dans la deuxième équation donne $c_1 = 0$, en remplaçant ces deux dans la troisième équation donne ...)

1.3 Dérivation des polynômes de Bernstein

Théorème 1.3.1 *Les premières et deuxièmes dérivées des fonctions de base de Bernstein $B_{i,n}(x)$ de degré n satisfont : [1]*

$$B'_{i,n}(x) = \frac{i - nx}{x(1-x)} B_{i,n}(x) \tag{1.3}$$

$$B''_{i,n}(x) = \frac{i(i-1) - 2i(n-1)x + n(n-1)x^2}{x^2(1-x)^2} B_{i,n}(x) \tag{1.4}$$

$$B'_{i,n}(x) = n\left[B_{i-1,n-1}(x) - B_{i,n-1}(x)\right] \tag{1.5}$$

Preuve.

En Différenciant $B_{i,n}(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}$ selon la règle de produit, on obtient :

$$\begin{aligned}
B'_{i,n}(x) &= \binom{n}{i}\left[i x^{i-1}(1-x)^{n-i} - x^i (n-i)(1-x)^{n-i-1}\right] \\
&= \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \left(\frac{i}{x} - \frac{n-i}{1-x}\right) \\
&= \left(\frac{i}{x} - \frac{n-i}{1-x}\right)\binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \\
&= \frac{(1-x)i - x(n-i)}{x(1-x)} B_{i,n}(x) \\
&= \frac{i - nx}{x(1-x)} B_{i,n}(x)
\end{aligned}$$

Ce qui établit la première formule (1.3) La deuxième formule est obtenue en différenciant la première formule (1.3).

$$\begin{aligned}
B''_{i,n}x &= [B'_{i,n}(x)]' \\
&= \left[\frac{i-nx}{x(1-x)}B_{i,n}(x)\right]' \\
&= \frac{-nx(1-x)-(i-nx)(1-2x)}{x^2(1-x)^2}B_{i,n}(x) + \frac{i-nx}{x(1-x)}B'_{i,n}(x) \\
&= \frac{-nx(1-x)-(i-nx)(1-2x)}{x^2(1-2x)^2}B_{i,n}(x) + \frac{(i-nx)^2}{x^2(1-x)^2}B_{i,n}(x) \\
&= \frac{-nx(1-x)-(i-nx)(1-2x)+(i-nx)^2}{x^2(1-x)^2}B_{i,n}(x) \\
&= \frac{-nx+nx^2+2ix-i-2nx^2+nx+i^2-2inx+n^2x^2}{x^2(1-x)^2}B_{i,n}(x) \\
&= \frac{(i^2-i)+(2ix-2inx)+(n^2x^2-nx^2)}{x^2(1-x)^2}B_{i,n}(x) \\
&= \frac{i(i-1)-2i(n-1)x+n(n-1)x^2}{x^2(1-x)^2}B_{i,n}(x)
\end{aligned}$$

Enfin, on démontre la relation(1.5)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}B_{i,n}(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{n!}{i!(n-i)!}x^i(1-x)^{n-i}\right) \\
&= \frac{in!}{i!(n-i)!}x^{i-1}(1-x)^{n-i} - \frac{(n-i)n!}{i!(n-i)!}x^i(1-x)^{n-i-1} \\
&= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}x^{i-1}(1-x)^{n-i} - \frac{n!}{i!(n-i-1)!}x^i(1-x)^{n-i-1} \\
&= n\left[\frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!}x^{i-1}(1-x)^{n-i} - \frac{(n-1)!}{i!(n-i-1)!}x^i(1-x)^{n-i-1}\right] \\
&= n[B_{i-1,n-1}(x) - B_{i,n-1}(x)]
\end{aligned}$$

■

1.4 Intégration des polynômes Bernstein

Les polynômes de Bernstein sont intégrés sur l'intervalle [0,1]. Alors, on a la forme suivante :

$$\int_0^1 B_{i,n}(x) = \frac{1}{n+1}$$

On a $B_{i,n}(0) = \delta_{i,0}$ et $B_{i,n}(1) = \delta_{i,n}$

Preuve. : On suppose que

$$\sum_{j=i+1}^{n+1} B_{j,n+1}(x) = [B_{i+1,n+1}(x) + B_{i+2,n+1}(x) + B_{i+3,n+1}(x), \ldots, B_{n+1,n+1}(x)]. \tag{1.6}$$

D'après la dérivation des polynômes de Bernstein

$$\frac{d}{dt} B_{i,n}(x) = n\left[B_{i-1,n-1}(x) - B_{i,n-1}(x)\right] \tag{1.7}$$

on dérive la formule (1.6) :

$$\frac{d}{dx}\sum_{j=i+1}^{n+1} B_{j,n+1}(x) = \left[\frac{d}{dx}B_{i+1,n+1}(x) + \frac{d}{dt}B_{i+2,n+1} + \frac{d}{dx}B_{i+3,n+1}(x) + \cdots + \frac{d}{dx}B_{n+1,n+1}(x)\right].$$

En récupérant dans l'équation (1.7) nous, constatons que :

$$= (n+1)[B_{i,n}(x) - B_{i+1,n}(x) + B_{i+1,n}(x) - B_{i+2,n}(x) + \cdots + B_{n,n}(x) - \underbrace{B_{n+1,n}}_{0}(x)].$$

Donc

$$\frac{d}{dx}\sum_{j=i+1}^{n+1} B_{j,n+1} = (n+1)B_{i,n}(x).$$

Par l'intégration, nous constatons que :

$$\int_0^1 B_{i,n}(x) = \left[\frac{1}{n+1}\sum_{j=i+1}^{n+1} B_{j,n+1}(x)\right]_0^1.$$

Alors

$$\int_0^1 B_{i,n}(x) = \frac{1}{n+1}$$

■

1.5 Le développement de polynôme-B en termes de la base de Taylor

En utilisant le développement du binôme $(1-t)^{n-i}$ nous avons : [2]

$$\begin{aligned} B_{i,n}(x) &= \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \\ &= \binom{n}{i} x^i \left(\sum_{k=0}^{n-i} (-1)^k \binom{n-i}{k} x^k \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-i} (-1)^k \binom{n}{i} \binom{n-i}{k} x^{i+k} \end{aligned}$$

Pour $i = 0, ..., n$

Maintenant, si nous définissons le vecteur A_{i+1},

$$A_{i+1} = \left[\quad 0, 0, \ldots, 0, (-1)^0 \tbinom{n}{i}, (-1)^1 \tbinom{n}{i} \tbinom{n-i}{1}, \ldots, (-1)^{n-i} \tbinom{n}{i} \tbinom{n-i}{n-i} \quad \right],$$

alors $B_{i,n}(x) = A_{i+1} T_n(x)$, pour $i = 0, 1, ..., n$ où

$$T_n(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}.$$

Maintenant, si nous définissons la matrice $\mathrm{A}(n+1) \times (n+1)$ telle que

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_{n+1} \end{bmatrix},$$

alors

$$\phi(x) = A T_n(x), \tag{1.8}$$

où

$$\phi(x) = \begin{bmatrix} B_{0,n}(x) \\ B_{1,n}(x) \\ \vdots \\ B_{n,n}(x) \end{bmatrix}.$$

Et la matrice A est une matrice triangulaire supérieure donnée par

$$\begin{bmatrix} (-1)^0\binom{n}{0} & (-1)^1\binom{n}{0}\binom{n-0}{1} & ,\ldots, & (-1)^{n-0}\binom{n}{0}\binom{n-0}{n-0} \\ \ddots & \ddots & \vdots & \\ 0 & (-1)^0\binom{n}{i} & \ldots & (-1)^{n-i}\binom{n}{i}\binom{n-i}{n-i} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & \ldots & & (-1)^0\binom{n}{n} \end{bmatrix}$$

et $|A| = \Pi_{i=0}^{n}\binom{n}{i}$, ainsi A une matrice inversible .

Nous pouvons obtenir A^{-1} en utilisant la formule suivante : [7]

$$\left\{A^{-1}\right\}_{i,j=0}^{n} = \begin{cases} \dfrac{\binom{n-i}{j-i}}{\binom{n}{j}} \; si \; i \leq j \\ 0 \quad si \qquad i > j \end{cases}$$

Chapitre 2

Analyse de l'erreur

Dans ce chapitre, nous parlons pour approximation de fonction et analyse d'erreur et l'erreur absolue.

2.1 Approximation de fonction

Soit $X = (X, \|.\|)$ un espace normé et supposons que $x \in X$ donné qui doit être approché par $y \in Y$, où Y est un sous-espace fixe de X. Nous notons par δ la distance de x à Y.

$$\delta = \delta(x, Y) = \inf_{y \in Y} \|x - y\|$$

Clairement δ dépend de x et Y que nous gardons fixes, de sorte que le simple notation δ soit en règle S'il existe $y_0 \in Y$ tel que

$$\|x - y_0\| = \delta,$$

Alors y_0 s'appelle une meilleure approximation de x de Y.

Théorème 2.1.1 *Soit X un espace préhilbertien et $M \neq \emptyset$ un sous ensemble convexe et fermé. Alors pour chaque $x \in X$ il existe y unique, $y \in M$, tel que*

$$\delta = \inf_{\tilde{y} \in M} \|x - \tilde{y}\| = \|x - y\|$$

Preuve.

Existence : on pose

$$\delta = \inf_{\tilde{y}\in M} \|x - \tilde{y}\|$$
$$\delta_n = \inf_{\tilde{y_n}\in M} \|x - \tilde{y_n}\|$$

soit $\delta_n = \|\tilde{y}_n - x\|$ une suite minimisante, c-à-d, $\delta_n \longrightarrow \delta$ quand $n \longrightarrow \infty$. On montre que $(\tilde{y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente il suffit de montrer qu'elle est de Cauchy soit $\tilde{y}_n, \tilde{y}_m \in M$.

Identité du parallélogramme :

$$\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2$$

On prend : $a = x - \tilde{y}_n$, $b = x - \tilde{y}_m$

Alors

$$\|2x - (\tilde{y}_n + \tilde{y}_m)\|^2 + \|\tilde{y}_n - \tilde{y}_m\|^2 = 2\|x - \tilde{y}_n\|^2 + 2\|x - \tilde{y}_m\|^2$$
$$4\|x - \frac{(\tilde{y}_n + \tilde{y}_m)}{2}\|^2 + \|\tilde{y}_n - \tilde{y}_m\|^2 = 2\|x - \tilde{y}_n\|^2 + 2\|x - \tilde{y}_m\|^2$$

Comme $\frac{(\tilde{y}_n + \tilde{y}_m)}{2} \in M$ $\|x - \frac{(\tilde{y}_n + \tilde{y}_m)}{2}\| \geq \delta$.

Par conséquent :

$$\|\tilde{y}_n - \tilde{y}_m\|^2 \leq 2\|x - \tilde{y}_n\|^2 + 2\|x - \tilde{y}_m\|^2 - 4\delta^2$$

Comme $\lim_{n\longrightarrow\infty} \|x - \tilde{y}_n\| = \delta$ et $\lim_{m\longrightarrow\infty} \|x - \tilde{y}_m\| = \delta$

$$\lim_{(n,m)\longrightarrow\infty} \|\tilde{y}_n - \tilde{y}_m\|^2 \leq 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2 = 0$$
$$\Rightarrow \lim_{(n,m)\longrightarrow\infty} \|\tilde{y}_n - \tilde{y}_m\|^2 = 0$$

$\Rightarrow (\tilde{y}_n)_{(n\in N)}$ est donc de Cauchy de M qui est supposé complet.

Unicité :

Nous supposons que $y, z \in M$ tel que

$\|x - y\| = \delta$ et $\|x - z\| = \delta$

et on montre que $y = z$, par l'égalité de parallélogramme

$$\begin{aligned}\|y - z\|^2 &= \|(y - x) - (z - x)\|^2 \\ &= 2\|y - x\|^2 + 2\|x - z\|^2 - \|(y + z) - 2x\|^2 \\ &= 2\|y - x\|^2 + 2\|x - z\|^2 - 4\|\frac{(y+z)}{2} - x\|^2.\end{aligned}$$

À droite $\frac{1}{2}(y+z) \in M$ pour que

$$\|\frac{1}{2}(y+z)-x\| \geq \delta$$

Cela implique que la partie droite est inférieure au égala. $2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2$. Nous avons l'inégalité $\|y-z\| \leq 0$, et clairement $\|y-z\| \geq 0$ de sort que nous devons avoir l'égalité $y = z$. ■

Lemme 2.1.1 *Dans le théorème (2.1), soit M sous espace complet de Y et $x \in X$ fixé, puis $z = x - y$ et orthogonal à Y théorème(2.1) et le lemme(2.1) impliquent l'ensemble théorème suivant :*

Preuve. voir [4] ■

Théorème 2.1.2 *Pour chaque x dans un espace de Hilbert H et chaque sous espace fermé Y de H il existe une unique meilleure approximation de x sur Y.*

Le déterminant de Gram $y_1, y_2, \ldots, y_n$ est défini par :

$$G(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} \langle y_1, y_1 \rangle & \langle y_1, y_2 \rangle & \ldots & \langle y_1, y_n \rangle \\ \langle y_2, y_1 \rangle & \langle y_2, y_2 \rangle & \ldots & \langle y_2, y_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle y_n, y_1 \rangle & \langle y_n, y_2 \rangle & \ldots & \langle y_n, y_n \rangle \end{vmatrix}$$

où $\langle , \rangle$ désigne le produit scalaire. Nous notons également un critère utile impliquant G.

Théorème 2.1.3 *Les éléments $y_1, y_2 ..., y_n$ d'un espace Hilbert H constituent un ensemble linéairement indépendant dans H si et seulement si :*

$$G(y_1, y_2, ..., y_n) \neq 0.$$

Preuve.

Notre discussion précédente montre que dans le cas linéaire l'indépendance, $G \neq 0$. D'autre part, si $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ des vecteurs linéairement dépendante, y_j, est une combinaison linéaire des autres vecteurs. Alors la colonne j de G est une combinaison linéaire des autres colonnes, de sorte que $G = O$. ■

Il est intéressant que la distance $\|x - y_0\|$ entre x et sa meilleure approximation y_0 (l'erreur de l'approximation) peut aussi être exprimée par le déterminants Gram.

Théorème 2.1.4 *Supposons que H est un espace de Hilbert et Y est un sous-espace fermé de H tel que* $\dim Y < \infty$, *et* $\{y_1, y_2..., y_n\}$ *une base quelconque pour Y. Soit x un élément arbitraire dans H et y_0 la meilleure approximation unique de x dans Y. Alors*

$$\|x - y_0\|^2 = \frac{G(x, y_1, y_2, \dots, y_n)}{G(y_1, y_2, \dots, y_n)}, \tag{2.1}$$

où

$$G(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} \langle y_1, y_1\rangle & \langle y_1, y_2\rangle & \dots & \langle y_1, y_n\rangle \\ \langle y_2, y_1\rangle & \langle y_2, y_2\rangle & \dots & \langle y_2, y_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle y_n, y_1\rangle & \langle y_n, y_2\rangle & \dots & \langle y_n, y_n\rangle \end{vmatrix}.$$

Preuve. Voir [4] ■

Maintenant, supposons que $H = L^2[0,1]$ et $Y =$ sous espace engendré $\{B_{0,n}, B_{1,n}, ..., B_{n,n}\}$. H est l'espace de Hilbert avec le produit scalaire défini par :

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

Puisque H est l'espace de Hilbert et Y est un sous espace de dimension finie, donc Y est un sous-espace fermé de H, donc Y est un sous-espace complet de H. Ainsi si f est un élément arbitraire dans H, par le Théorème 2, f admet y_0 comme unique meilleure approximation dans Y, qui est

$$\exists y_0 \in Y; \forall y \in Y : \|f - y_0\| \leq \|f - y\|.$$

Le lemme 1 implique

$$\forall y \in Y \langle f - y_0, y\rangle = 0, \tag{2.2}$$

comme $y_0 \in Y$ il existe des coefficients $c_0, c_1..., c_n$ tel que

$$y_0 = \sum_{i=0}^{m} c_i B_{i,n} = c^T \phi,$$

où

$$c^T = [c_0, c_1, \dots, c_n].$$

Par (2.2)

$$\langle f - c^T \phi, B_{i,n} \rangle = 0,$$

où $i = 0, 1, \dots, n$. Pour simplifier, nous écrivons

$$c^T \langle \phi, \phi \rangle = \langle f, \phi \rangle,$$

où

$$\begin{aligned} \langle f, \phi \rangle &= \int_0^1 f(x)\phi(x)^T dx \\ &= [\langle f, B_{0,n} \rangle, \langle f, B_{1,n} \rangle, \dots, \langle f, B_{n,n} \rangle]. \end{aligned}$$

La matrice (ϕ, ϕ) $(n+1) \times (n+1)$ est une matrice carrée de ϕ.Soit

$$Q = \langle \phi, \phi \rangle = \int_0^1 \phi(x)\phi(x)^T dx,$$

alors

$$c^T = \left(\int_0^1 f(x)\phi(x)^T dx \right) Q^{-1}, \tag{2.3}$$

ou

$$c = Q^{-1} \int_0^1 f(x)\phi(x) dx.$$

Par le Théorème (2.1.3) la matrice Q est symétrique et inversible.En utilisant

$$\int_0^1 (1-x)^r x^i dt = \frac{1}{(r+i+1)\binom{r+i}{i}} \quad , i, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \tag{2.4}$$

nous pouvons écrire les éléments de Q comme :

$$\begin{aligned} Q_{(i+1),(j+1)} &= \int_0^1 B_{i,n}(x) B_{j,n}(x) dx \\ &= \binom{m}{i}\binom{m}{j} \int_0^1 (1-x)^{2n-(i+j)} x^{i+j} dx \\ &= \frac{\binom{n}{i}\binom{n}{j}}{(2n+1)\binom{2n}{i+j}}, \end{aligned}$$

où $i, j = 0, 1..., n$.

Aussi par (1.8), nous avons

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^1 \phi(x)\phi(x)^T dx = \int_0^1 (AT_n(x))(AT_n(x))^T dx \\ &= A\left[\int_0^1 T_n(x)T_n(x)^T dx\right]A^T = AHA^T, \end{aligned}$$

où H est une matrice de Hilbert célèbre,

$$H = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \dfrac{1}{n+1} \\ \dfrac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \frac{1}{n+3} & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{bmatrix}.$$

2.2 Analyse d'erreur et l'erreur absolue

Dans cette section nous donnerons la méthode de l'analyse de l'erreur. Soit $y(x)$ la solution exacte et $y_m(x)$ la solution approchée. Maintenant, nous définissons l'erreur e_m comme $e_m = y(x) - y_m(x)$. Alors $|e_m| = |y(x) - y_m(x)|$ comme erreur absolue. [9]

Corollaire 2.2.1 *soient y_m et y_{m+1} des solutions approchées. Alors, on peut trouver l'analyse de l'erreur en utilisant l'inégalité de triangulaire,*

$$||y(x) - y_{m_1}(x)| - |y(x) - y_{m_2}(x)|| \leq |y_{m_1}(x) - y_{m_2}(x)|$$

Si les erreurs ne sont pas trop rapprochées, nous pouvons trouver une limite supérieure approximative pour les erreurs. Nous pouvons examiner la limite supérieure comme suit. Si l'ordre d'erreur est inférieure alors

$$\begin{aligned} ||y(x) - y_{m+1}(x)| - |y(x) - y_m(x)|| &= (1-c)|y(x) - y_m(x)| \qquad (2.5) \\ &\leq |y_{m+1}(x) - y_m(x)|, 0 \leq c < 1 \qquad (2.6) \end{aligned}$$

où

$$|y(x) - y_{m+1}(x)| < |y(x) - y_m(x)| \leq \frac{1}{1-c}|y_{m+1}(x) - y_m(x)| \qquad (2.7)$$

où

$$|y(x) - y_{m+1}(x)| = c|y(x) - y_m(x)| \qquad (2.8)$$

Chapitre 3

Les matrices opérationnelles

Dans ce chapitre, nous allons parler pour des matrices opérationnelles des polynômes de Bernstein d'intégration P, différentiation D et produit $\widehat{C}$ respectivement sont donnés par :

$$\int_0^x \phi(t) \simeq P\phi(x)$$
$$\frac{d}{dx}\phi(x) \simeq D\phi(x)$$
$$c^T\phi(x)\phi(x)^T \simeq \phi(x)^T\widehat{C}$$

Où $\phi = \{\phi_0(x), \phi_1(x), \ldots, \phi_n(x)\}$ et c un vecteur arbitraire.

3.1 La matrice opérationnelle des polynômes-B d'intégration

Soit P est une matrice opérationnelle d'intégration, d'ordre $(n+1)\times(n+1)$ alors : [2]

$$\int_0^x \phi(t)dt \simeq P\phi(x), \ \ 0 \le x \le 1$$

Par (1.8), nous avons

$$\begin{aligned}
\int_0^x \phi(t)dt = A\int_0^x T_n(t)dt &= A\begin{bmatrix} \int_0^x 1dt \\ \int_0^x tdt \\ \vdots \\ \int_0^x t^n dt \end{bmatrix} \\
&= A\begin{bmatrix} x \\ \frac{x^2}{2} \\ \vdots \\ \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{n+1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ x^2 \\ \vdots \\ x^{n+1} \end{bmatrix} \\
&= A\Lambda X,
\end{aligned}$$

où Λ est une matrice $(n+1)\times(n+1)$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{n+1} \end{bmatrix}$$

et

$$X = \begin{bmatrix} x \\ x^2 \\ \vdots \\ x^{n+1} \end{bmatrix}.$$

Maintenant, nous rapprochons les éléments du vecteur X par les termes de$\{B_{i,n}\}_{i=0}^n$.

Par (1.8), nous avons $T_n(x) = A^{-1}\phi(x)$, alors pour $k = 0, 1..., n$,

$$x^k = A_{k+1}^{-1}\phi(x), \tag{3.1}$$

où A_{k+1}^{-1}est le rang $(k+1)$ de A^{-1} pour $k = 0, 1, ..., n$, c'est - à-dire

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} \\ A_2^{-1} \\ \vdots \\ A_{n+1}^{-1} \end{bmatrix}.$$

Ainsi nous devons juste approcher x^{n+1}.

En utilisant (2.3) et (2.4), nous avons $x^{n+1} \simeq c_{n+1}^T\phi(x)$.

Où

$$c_{n+1} = Q^{-1}\int_0^1 x^{n+1}\phi(x)dx = \frac{Q^{-1}}{2n+2}\begin{bmatrix} \frac{\binom{n}{0}}{\binom{2n+1}{n+1}} \\ \frac{\binom{n}{i}}{\binom{2n+1}{n+2}} \\ \vdots \\ \frac{\binom{n}{n}}{\binom{2n+1}{2n+1}} \end{bmatrix},$$

et ensuite

$$X \simeq \begin{bmatrix} A_2^{-1} \\ A_3^{-1} \\ \vdots \\ A_{n+1}^{-1} \\ c_{n+1}^T \end{bmatrix}\phi(x).$$

Soit

$$B = \begin{bmatrix} A_2^{-1} \\ A_3^{-1} \\ \vdots \\ A_{n+1}^{-1} \\ c_{n+1}^T \end{bmatrix}.$$

Nous avons

$$\int_0^x \phi(t)dt \simeq A\Lambda B\phi(x), \tag{3.2}$$

et donc nous avons la matrice opérationnelle d'intégration comme

$$P = A\Lambda B. \tag{3.3}$$

Exemple :la matrice opérationnelle d'intégration pour (n = 3) : [8]

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{280} & \frac{263}{840} & \frac{193}{840} & \frac{71}{280} \\ \frac{-3}{280} & \frac{17}{280} & \frac{87}{280} & \frac{67}{280} \\ \frac{3}{280} & \frac{-17}{280} & \frac{53}{280} & \frac{73}{280} \\ \frac{-1}{280} & \frac{17}{840} & \frac{-53}{840} & \frac{69}{280} \end{bmatrix}$$

3.2 La matrice opérationnelle des polynômes-B de différentiation

Dans cette section, nous voulons obtenir une formule explicite pour les polynômes-B de matrice opérationnelle degrée n de la différentiation. Supposons que D est une matrice opérationnelle de différentiation, d'ordre $(n+1)\times(n+1)$ alors : [2]

$$\frac{d}{dx}\phi(x) = D\phi(x) \;\; 0 \leq x \leq 1.$$

De (1.8) nous avons,

$$\phi(x) = AT_n(x),$$

et ensuite

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\phi(x) &= A\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2x \\ \vdots \\ nx^{n+1} \end{bmatrix}, \\
&= A\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0\cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0\cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0\cdots & n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ \vdots \\ x^{n-1} \end{bmatrix}, \\
&= A\Lambda' X',
\end{aligned}$$

où Λ' est la matrice $(n+1)\times(n)$

$$\Lambda' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0\cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0\cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0\cdots & n \end{bmatrix}$$

et

$$X' = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ \vdots \\ x^{n-1} \end{bmatrix}$$

Maintenant, nous élargissons le vecteur X' en termes de $\{B_{i,n}\}_{i=0}^{n}$ en utilisant (3.1) nous pouvons écrire $X' = B'\phi(x)$ où

$$B' = \begin{bmatrix} A_1^{-1} \\ A_2^{-1} \\ A_3^{-1} \\ \vdots \\ A_n^{-1} \end{bmatrix},$$

ensuite

$$\frac{d}{dx}\phi(x) = A\Lambda' B'\phi(x),$$

donc, nous avons la matrice opérationnelle de différentiation comme :

$$D = A\Lambda' B'.$$

Si nous approchons $y_0(x) \simeq c^T\phi(x)$ alors pour $n \geq 2$ (n l'ordre des dérivées), nous obtenons

$$y^{(n)}(x) \simeq c^T\phi^{(n)}(x) = c^T D^n \phi(x)$$

Exemple :la matrice opérationnelle de différentiation : [8]

- pour n = 2

$$D = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- pour n = 3

$$D = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

3.3 La matrice opérationnelle des polynômes-B du produit

Dans cette section, nous cherchons à obtenir une formule explicite pour les polynômes-B de matrice opérationnelle du produit de degré n. Supposons que c est une matrice arbitraire $(n+1)\times 1$, alors la matrice opérationnel de produit $\widehat{C}$ est une matrice d'ordre $(n+1)\times(n+1)$ chaque fois que : [2]

$$c^T\phi(x)\phi(x)^T \simeq \phi(x)\widehat{C}.$$

Par (1.8) et comme $c^T\phi(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i B_{i,n}(x)$, nous avons $c^T\phi(x)\phi(x)^T$

$$= (c^T\phi(x))T_n(x)^T A^T), \tag{3.4}$$

$$= [c^T\phi(x), x(c^T\phi(x)), x^2(c^T\phi(x)), \ldots, x^n(c^T\phi(x))]A^T, \tag{3.5}$$

$$= \left[\sum_{i=0}^{n} c_i B_{i,n}(x), \sum_{i=0}^{n} c_i(xB_{i,n}(x)), \sum_{i=0}^{n} c_i(x^2 B_{i,n}(x)), \ldots, \sum_{i=0}^{n} c_i(x^n B_{i,n}(x))\right] A^T. \tag{3.6}$$

Maintenant, nous approchons toutes les fonctions $x^k B_{i,n}(x)$ en termes de $\{B_{i,n}\}$ pour $i,k = 0,1...,n$. Soit

$$e_{k,i} = \begin{bmatrix} e_0^{k,i} \\ e_1^{k,i} \\ e_2^{k,i} \\ \vdots \\ e_n^{k,i} \end{bmatrix}. \tag{3.7}$$

Par (2.3), nous avons

$$x^k B_{i,n}(x) \simeq e_{k,i}^T\phi(x), \quad i,k = 0,1,\cdots,n. \tag{3.8}$$

En utilisant (2.3) et (2.4),

$$
\begin{aligned}
e_{k,i} &= Q^{-1}\int_0^1 (x^k B_{i,n}(x))\phi(x)dx \\
&= Q^{-1}\begin{bmatrix} \int_0^1 x^k B_{i,n}(x)B_{0,n}(x)dx \\ \int_0^1 x^k B_{i,n}(x)B_{1,n}(x)dx \\ \vdots \\ \int_0^1 x^k B_{i,n}(x)B_{n,n}(x)dx \end{bmatrix}, \\
&= \frac{\binom{n}{i}Q^{-1}}{2n+k+1}\begin{bmatrix} \frac{\binom{n}{0}}{\binom{2n+k}{i+k}} \\ \frac{\binom{n}{1}}{\binom{2n+k}{i+k+1}} \\ \vdots \\ \frac{\binom{n}{n}}{\binom{2n+k}{i+k+n}} \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

pour $i,k = 0,1,\cdots,n$.

Donc,

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} c_i(x^k B_{i,n}(x)) &\simeq \sum_{i=0}^{n} c_i\left(\sum_{j=0}^{n} e_j^{k,i} B_{j,n}(x)\right), && (3.9)\\
&= \sum_{j=0}^{n} B_{j,n}(x)\left(\sum_{i=0}^{n} c_i e_j^{k,i}\right) && (3.10)\\
&= \phi(x)^T \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n} c_i e_0^{k,i} \\ \sum_{i=0}^{n} c_i e_1^{k,i} \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{n} c_i e_n^{k,i} \end{bmatrix}, && (3.11)\\
&= \phi(x)^T [e_{k,0}, e_{k,1}, \cdots, e_{k,n}]c && (3.12)\\
&= \phi(x)^T \tilde{C}_{k+1}, && (3.13)
\end{aligned}
$$

où $\tilde{C}_{k+1} = [e_{k,0}, e_{k,1}, \cdots, e_{k,n}]c$ et $k = 0, 1, \cdots, n$. Si nous définissons une matrice $(n+1) \times (n+1)$ $\tilde{C} = [\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \cdots, \tilde{C}_{n+1}]$ alors par (3.6) et (3.13) nous aurons

$$\begin{aligned}
c^T \phi(x)\phi(x)^T &= \left[\sum_{i=0}^{n} c_i B_{i,n}(x), \sum_{i=0}^{n} c_i(x, B_{i,n}(x)), \sum_{i=0}^{n} c_i(x^2, B_{i,n}(x)), \cdots, \sum_{i=0}^{n} c_i(x^n, B_{i,n}(x))\right] A^T \\
&\simeq \phi(x)^T \left[\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \cdots, \tilde{C}_{n+1}\right] A^T \\
&= \phi(x)^T \tilde{C} A^T.
\end{aligned}$$

Donc

$$c^T \phi(x)\phi(x)^T \simeq \phi(x)^T \tilde{C} A^T \tag{3.14}$$

donc nous avons la matrice opérationnelle de produit comme

$$\widehat{C} = \tilde{C} A^T.$$

Chapitre 4

Tests numériques sous matlab

Dans ce chapitre, nous appliquons quelques exemples en utilise logiciel MATLAB.

4.1 Exemples

4.1.1 Premier exemple :

En considérant l'équation d'Emden-Fowler :

$$\begin{cases} y''(x) + \dfrac{2}{x}y' + y(x) = 0 \\ y'(0) = 0 \quad y(0) = 1 \end{cases} \tag{4.1}$$

La solution exacte de cette équation et $y(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

Applications de la matrice opérationnelle d'intégration :

Nous supposons que la fonction inconnue $y(x)$est rapprochée de

$$y''(x) = c^T\phi(x) \tag{4.2}$$

En utilisant (3.3) et la condition initiale

$$y'(x) = c^T P\phi(x) \tag{4.3}$$

$$y(x) = c^T P^2\phi(x) + d\phi(x) \tag{4.4}$$

Où $d^T\phi(x) = 1$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{60} & \frac{5}{12} & \frac{19}{60} \\ \frac{-1}{30} & \frac{1}{6} & \frac{11}{30} \\ \frac{1}{60} & \frac{-1}{12} & \dfrac{19}{60} \end{pmatrix} \qquad P^2 = \begin{pmatrix} 0.00392 & 0.0500 & 0.2583 \\ 0.0550 & -0.0167 & 0.1667 \\ 0.0583 & 0.0292 & 0.1225 \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

En remplaçant les équations (4.2)-(4.3) dans (4.4), nous obtenons

$$\begin{cases} c^T\phi(x) + \dfrac{2}{x}c^T P\phi(x) + c^T P^2\phi(x) = 0 \\ c^T P\phi(0) = 0 \quad c^T P^2\phi(0) + 1 = 1 \end{cases} \tag{4.6}$$

Ainsi , nous avons

$$c_0(1-x)^2 + 2xc_1(1-x) + c_2x^2 + \tfrac{2}{x}(c_0, c_1, c_2)\begin{pmatrix} \frac{1}{60} & \frac{5}{12} & \frac{19}{60} \\ \frac{-1}{30} & \frac{1}{6} & \frac{11}{30} \\ \frac{1}{60} & \frac{-1}{12} & \dfrac{19}{60} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (1-x)^2 \\ 2x(1-x) \\ x^2 \end{pmatrix} +$$

$$(c_0, c_1, c_2)\begin{pmatrix} 0.00392 & 0.0500 & 0.2583 \\ 0.0550 & -0.0167 & 0.1667 \\ 0.0583 & 0.0292 & 0.1225 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (1-x)^2 \\ 2x(1-x) \\ x^2 \end{pmatrix} + 1 = 0$$

D'après la condition initiale on a

$$\frac{1}{60}c_0 - \frac{1}{30}c_1 + \frac{1}{60}c_2 = 0$$

$$0.0392c_0 + 0.0550c_1 + 0.0583c_2 = 0$$

On a $x \in [0, 1]$ si on pose que $x = \frac{1}{4}$ implique que

$$5.210c_0 + 0.9778c_1 + 0.0583c_2 = -1$$

$c_0 = -0.1918;\ c_1 = -0.0213;\ c_2 = 0.1491$

Alors la solution approchée

$$y_0''(x) = (-0.1918, -0.0213, 0.1491)\begin{pmatrix} (1-x)^2 \\ 2x(1-x) \\ x^2 \end{pmatrix}$$

$$y_0''(x) = -0.1918 + 0.341x - 10^{-4}x^2$$

$$y_0(x) = -0.1918\frac{x^2}{2} + 0.314\frac{x^3}{6} - 10^{-4}\frac{x^4}{12} + 1$$

En appliquant la même méthode pour $n = 3$ nous obtenons :

$$y_1(x) = -0.6661\frac{x^2}{2} + 2.1528\frac{x^3}{6} - 2.1528\frac{x^4}{12} + 10^{-4}\frac{x^5}{20} + 1$$

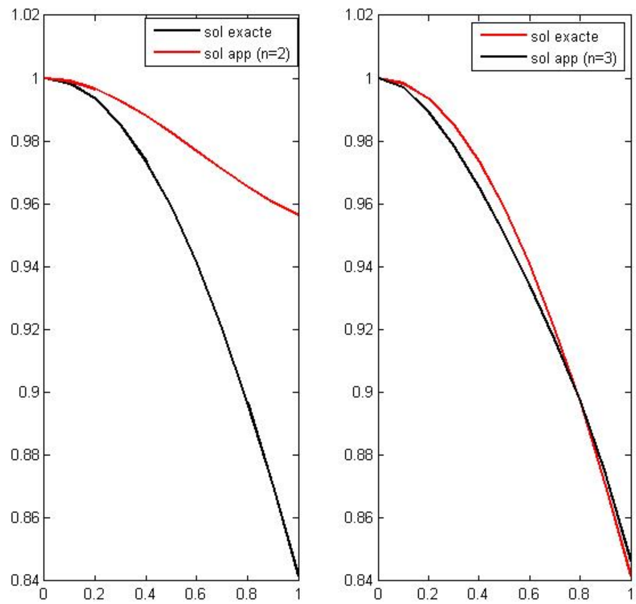

FIGURE 4.1 : La solution exacte et les solutions approchées de l'exemple 1 pour n = 2 et n = 3.

x	y(x)	$n=2$	$\lvert y(x)-y_0(x)\rvert$	$n=3$	$\lvert y(x)-y_1(x)\rvert$
0.1	0.998334166	1.000453999	$2.119833\times10^{-}3$	0.99701036	$1.233806\times10^{-}3$
0.2	0.993346666	0.996582653	$3.235987\times1^{-}3$	0.989261361	$4.085305\times10^{-}3$
0.3	0.9850675	0.99278119	$7.71369\times10^{-}3$	0.962275432	0.022792068
0.4	0.973546666	0.9800512	$6.504534\times10^{-}3$	0.9665082611	$7.0384049\times10^{-}3$
0.5	0.958854166	0.982566145	0.023711997	0.95034360336	$8.49901\times10^{-}3$
0.6	0.94108	0.97677892	0.03569892	0.934360336	$6.719664\times10^{-}3$
0.7	0.920334166	0.970957332	0.0506293166	0.9168008	$3.533366\times10^{-}3$
0.8	0.896746666	0.965415253	0.068668587	0.897072998	$3.26332\times10^{-}3$
0.9	0.8704675	0.960466532	0.089999032	0.874093312	$3.625812\times10^{-}3$
1	0.841666660	0.956425	0.11475835	0.846355	$4.688334\times10^{-}3$

TABLE 4.1 : Les résultats numériques pour l'exemple 1

4.1.2 Deuxième exemple :

En considérant le problème de valeur singulier : [9]

$$\begin{cases} y''(x)+e^{\frac{1}{x}}y'(x)+y(x)=g(x) \\ y(0)=0\;; \quad y(1)=1 \end{cases} \tag{4.7}$$

La solution exacte de ce problème est $y(x) = x^3$ avec $g(x) = 6x + x^3 + 3x^2 e^{\frac{1}{x}}$

Application de la matrice opérationnelle de différentiation

On cherche la solution approchée on utiles polynôme de Bernstein avec $n = 2$

$$y_0(x) = c_0 B_{0.2}(x) + c_1 B_{1.2}(x) + c_2 B_{2.2}(x) = c^T \phi(x) \tag{4.8}$$

$$y_0'(x) = c^T D^1 \phi(x) \tag{4.9}$$

$$y_0''(x) = c^T (D^1)^2 \phi(x) \tag{4.10}$$

$$D^1 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad (D^1)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -4 & -4 & -4 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \tag{4.11}$$

En remplaçant les équations (4.8), (4.9), (4.10) dans le problème :

$$\begin{cases} c^T (D^1)^2 \phi(x) + e^{\frac{1}{x}} c^T D^1 \phi(x) + c^T \phi(x) = 6x + x^3 + 3x^2 e^{\frac{1}{x}} \\ c^T \phi(0) = 0 \; ; \quad c^T \phi(1) = 1 \end{cases} \tag{4.12}$$

D'après les conditions aux limites, on a : $c_0 = 0$; $c_2 = 1$

$$(0, c_1, 1) \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -4 & -4 & -4 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1-x)^2 \\ 2x(1-x) \\ x^2 \end{pmatrix} + e^{\frac{1}{x}} (0, c_1, 1) \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1-x)^2 \\ 2x(1-x) \\ x^2 \end{pmatrix} + (0, c_1, 1) \begin{pmatrix} (1-x)^2 \\ 2x(1-x) \\ x^2 \end{pmatrix}$$
$$- 6x - x^3 - 3x^2 e^{\frac{1}{x}} = 0$$

On pose $x = \frac{1}{2}$ on a l'équation suivante :

$$\frac{-7}{2} c_1 - 0.27773 = 0 \Leftrightarrow c_1 = -0.18515$$

$$y_0(x) = (0, -0.18515, 1) \begin{pmatrix} (1-x)^2 \\ 2x(1-x) \\ x^2 \end{pmatrix} = -0.3703x + 1.3703x^2$$

En appliquant la même méthode pour $n = 5$ nous obtenons :($c_0 = 0$; $c_1 = 0.11661 \times 10^{-9}$; $c_2 = 0.7 \times 10^{-10}$; $c_3 = 0.10$; $c_4 = 0.40$; $c_5 = 1$)

$$y_1(x) = -1.17 \times 10^{-10} x^5 - 2.32 \times 10^{-10} x^4 + 1.000000001 x^3 - 1.6322 \times 10^{-9} x^2 + 0.58305 \times 10^{-9} x$$

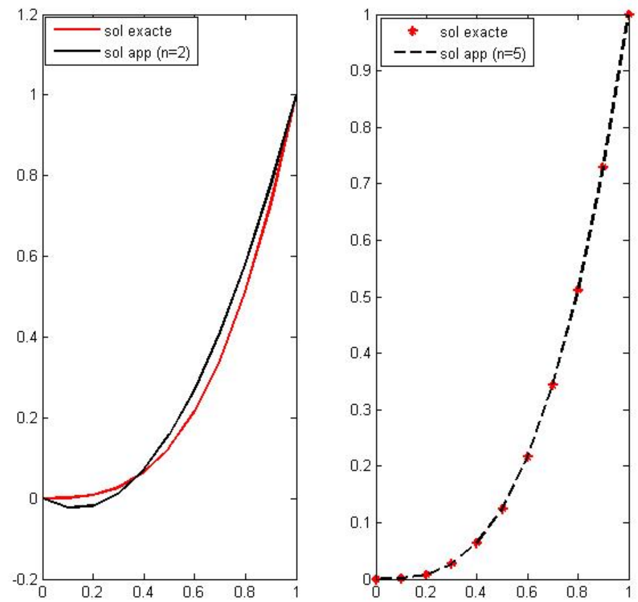

FIGURE 4.2 : La solution exacte et les solutions approchées de l'exemple 2, pour n = 2 et n = 5.

x	y(x)	$n=2$	$\lvert y(x)-y_0(x)\rvert (n=2)$	$n=5$	$\lvert y(x)-y_1(x)\rvert (n=5)$
0	0	0	0	0	0
0.1	10^{-3}	-0.023327	0.24327	$1.000000043\times 10^{-3}$	4.3×10^{-11}
0.2	8×10^{-3}	-0.019248	0.027248	$8.000000059\times 10^{-3}$	5.9×10^{-11}
0.3	9×10^{-3}	0.012273	0.077727	0.0270	0.018
0.4	64×10^{-3}	0.071128	0.007128	0.063999	10^{-7}
0.5	125×10^{-3}	0.157425	0.032425	0.124999	10^{-6}
0.6	216×10^{-3}	0.271128	0.055128	0.215999	10^{-6}
0.7	343×10^{-3}	0.412237	0.069237	0.342999	10^{-6}
0.8	512×10^{-3}	0.80752	0.068752	0.5119999	10^{-6}
0.9	729×10^{-3}	0.776673	0.047673	0.728999	10^{-6}
1	1	1	0	0.999999	10^{-6}

TABLE 4.2 : Les résultats numériques pour l'exemple 2

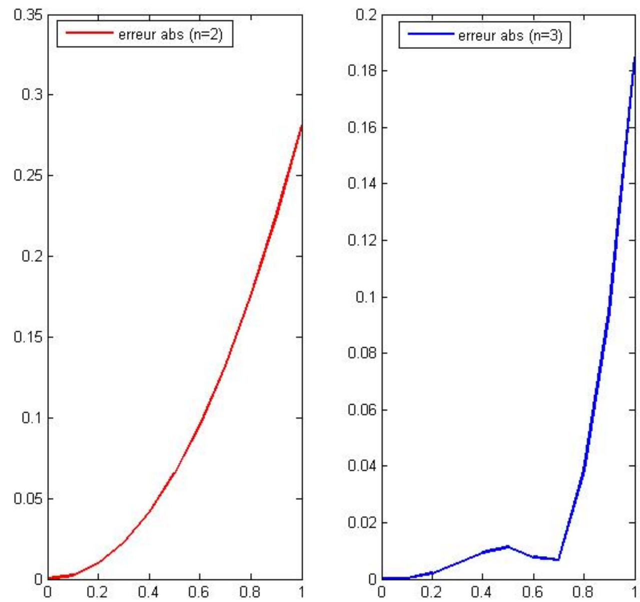

Figure 4.3 : L'erreur absolue de l'exemple 1, pour n = 2 et n = 3.

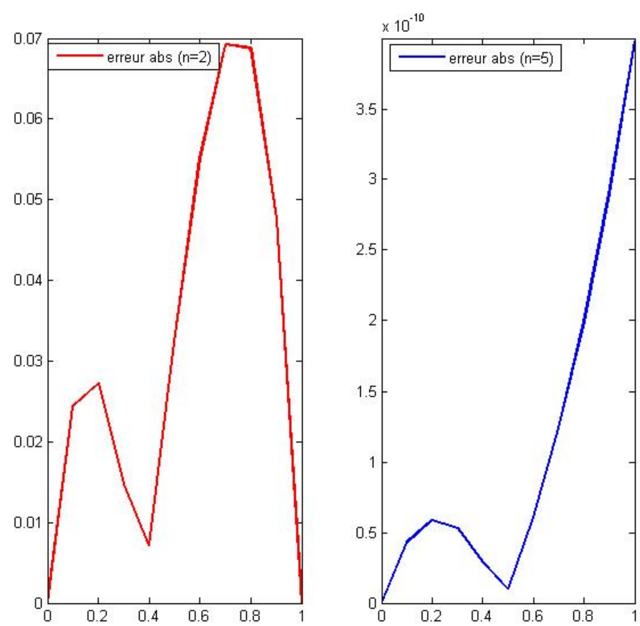

Figure 4.4 : L'erreur absolue de l'exemple 2, pour n = 2 et n = 5.

Conclusion

Dans ce mémoire, et à partir des propriétés des polynômes de Bernstein, nous avons déterminé les matrices opérationnelles des polynômes de Bernstein, d'intégration P, de différentiation D et du produit $\widehat{C}$.

Ces matrices nous ont aidés dans les méthodes numériques utilisées pour résoudre les problèmes mathématiques tel que, équation différentielles, équations intégrales,calcul de différentielles, calcul d'intégrales.

A partir des matrices opérationnelles définies ci-dessus, nous avons trouvé des méthodes numériques facilement à appliquer pour résoudre les problèmes mathématiques, et qui nous ont fourni des résultats très précis, comme le montre les exemples précédents dans le mémoire, on a remarqué que chaque fois que n grandit, le convergence vers la solution et très rapide.

Bibliographie

[1] Duncan Marsh, *Applied geometry for computer graphics and CAD.springer -verlag Londres*,2005.

[2] Yousefi S.A., Behroozifar.M. *Operational matrices of Bernstien polynomials and thier application .Int J Syst Sci 2010*

[3] Gerald Farin ,*Curves and Surfaces for Computer -Aided Geometric Design ,Fifth edition.Academic press Etats-unies ,2002*

[4] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley and sons. Inc., 1978.*

[5] H.Brizzs, *Analyse fonctionnelle théorie et application. Dunad 1991*

[6] Kenneth I. Joy, *Berntein polynomials, Visualization and Graphics Research Group Department of Computer Science University of California (1996), Davis*.

[7] K.Parand, Sayyed A. Kaviani, *Application of the Exact Operational Matrices Based on the Bernstein Polynomials,Journal of mathematics and computer Science,2013*

[8] Basirat.B.,Shahdadi.M.A.*Numerical Solution of Nonlinear Integro-Differential Equations with Initial Conditions by Bernstein Operational Matrix of Derivativ, International Journal of Modern Nonlinear Theory and Application, 2013*

[9] M.H.T. Alshbool1 , A.S. Bataineh2, I. Hashim3, Osman Rasit Isik4, *Approximate solutions of singular differntial equation with estimation error by using Bernstein polynomials*

Résumé

Dans ce mémoire, on s'appuie sur plusieurs propriétés des polynômes Bernstein. On a pu trouver que les matrices opérationnelles de l'intégration p, de la différentiation D et du produit $\hat{C}$ sont dérivés. Un procédé général de former ces matrices est donné. Ces matrices peuvent être employées pour résoudre des problèmes tel que le calcul des variations, des équations différentielles, de contrôle optimal, et des équations intégrales

Mots clés : polynôme Bernstein ; matrice opérationnelle ; équation différentielle

ملخص

في هذا المذكرة استناد إلى خصائص كثير حدود برنشتاين تمكنا من إيجاد مصفوفات العمليات التكامل P والاشتقاق D والضرب $\hat{C}$ وكلها مشتقة. هذه المصفوفات يمكن استخدامها في حساب التفاضل والتكامل والمعادلات التفاضلية والمعادلات التكاملية وذالك للتخلص من اشتقاق والتكامل وتحويل المسائل إلى جمل معادلات جبرية وقدمنا أمثلة تثبت دقة وفاعلية تلك المصفوفات

الكلمات المفتاحية: كثير حدود برنشتاين , مصفوفات عمليات ,معادلات التفاضلية

Abstract

In this memory , by pressing propertiers polynomial Bernstein ,one could find that, operational matrices of integration P, differentiation D and product $\hat{C}$ bare derived. A general procedure of forming these matrices are given. These matrices can be used to solve problems such as calculus of variations, differential equations, optimal control and integral equations.

Keywords : Bernstein polynomial; operational matrix; differential equation