

Dédicace

Merci **Allah** (mon dieu) de m'avoir donné la capacité d'écrire et de réfléchir, la force d'y croire, la patience d'aller jusqu'au bout du rêve et le bonheur de lever mes mains vers le ciel et de dire " Ya Kayoum "

Je dédie ce mémoire à celle qui m'a donné la vie, le symbole de tendresse, qui s'est sacrifiée pour mon bonheur et ma réussite, à ma mère "Khadija"

A mon père "Djmoai", école de mon enfance, qui a été mon ombre durant toutes les années des études, et qui a veillé tout au long de ma vie à encouragement, à me donner l'aide et à me protéger.

A mes soeurs " Soumya et Mounira et Cherifa" et femme mes frère " Salma et Dalila "

A mes frère " Hasane et Housin et Nabil et Djmel "

A me chéri "Nour dine "

A ma famille "Mabroka et Laid"

A toute la grande familles **KADI** et **SAOUDE** et **LABOZE**

A mes amies " Randa et Imane et Salma et Wahiba..."

A " Mohammed, bobker, Manare, Yaser, Takai dinne"

A tous ceux qui me sont chères

A tous ceux que j'aime

Je dédie ce travail

Remerciements

Tout d'abord, je remercie Dieu qui nous guident pour terminer ce travail humble.

J'exprime ma gratitude, mes remerciements à mes parents qui ont fait de leur mieux pour m'aider.

Je tiens à remercier vivement :

Mon encadreur Mr.Mohammed Mammeri qui a proposé le thème de ce mémoire, pour ses conseils et ses dirigés du début à la fin de ce travail.

Merci pour la qualité du sujet, merci pour vos conseils et la confiance que vous conseils et la confiance que vous m'avez accordée au cours de cette année.

Je tiens à exprimer ma gratitude envers les membres de jury pour leurs disponibilités

Mr .Kouidri Mohammed M.C à l'université de KASDI Merbah-Ouargla , pour avoir bien voulu me faire l'honneur d'accepter de présider le jury.

Mr. Telleb Brahime M.C à l'université de KASDI Merbah-Ouargla qui ont bien voulu faire partie du jury.

Mes remerciements vont bien entendu à toutes les personnes de département de mathématiques.

Je remercie aussi les personnes qui m'ont aidé et encouragé le long de ce travail.

Enfin, ces remerciements ne serait pas compléts sans mentionner mes parents, mes frères, mes amis.

Table des figures

Table des matières

Dédicace	i
Remerciements	ii
Table des figures	iii
Notations et conventions	vi
Introduction	1
1 Généralités sur les systèmes dynamiques	3
1.1 Système dynamique	3
1.2 Système dynamique continu	4
1.2.1 Système autonome et non autonome	4
1.2.2 Le Flot	5
1.2.3 La trajectoire	6
1.2.4 L'espace de phases	7
1.2.5 Systèmes conservatifs et systèmes dissipatives	7
1.2.6 Point critique	8
1.2.7 Solution périodique	8
1.3 Système dynamique discret	9
1.3.1 Définitions et notations	9

1.3.2	Orbite périodique	10
1.3.3	Orbites négatives et orbites positives	11
1.3.4	Stabilité des points fixes	11
2	Chaos et Attracteurs chaotique	15
2.1	Chaos	15
2.1.1	Définition du chaos	16
2.2	Attracteurs	16
2.2.1	Ensemble invariant	17
2.2.2	Définitions d'attracteurs	17
2.2.3	Bassin d'attraction	18
2.2.4	propriétés d' attracteur	18
2.2.5	Différents type d'attracteur	19
2.3	Définitions Attracteurs chaotique	21
2.4	Exposant de Lyapunov	23
2.4.1	Cas d'une application discrète unidimensionnelle	23
2.4.2	Cas d'une application discrète multidimensionnelle	25
2.5	Bifurcations	26
2.5.1	Différents types des bifurcations	26
2.5.2	Diagramme de bifurcation	27
3	Détermination des exposants de Lyapunov d'un système discret	28
3.1	Matrices semblables	29
3.1.1	Matrice diagonale	30
3.1.2	Matrice triangulaire	30
3.2	L'exposant de Lyapunov en dimension 2	31
3.3	L'exposant de Lyapunov en dimension 3	33
	Conclusion générale	36
	Bibliographie	36

Notations et conventions

- \dot{X} : dérivable de X
- O : Orbite
- λ_i : les valeurs propres
- DG : le jacobien de G
- J : Matrice de Jacobian
- $d(f^t(u), A)$: la distance
- G : Application
- δ, ε : réels
- n : entier
- T : période

Introduction

Les systèmes dynamiques représentent des phénomènes qui évoluent dans l'espace et de temps. Ces systèmes viennent de Biologie, Physique, Chimie, ou même des sciences sociales, le système dynamique est le sujet qui fournit des outils mathématiques pour son analyse. Ils sont développés et spécialisés au cours du XIX siècle. Au cours de la fin de ce siècle, le mathématicien, philosophe français [**Henri Poincaré, 1881**] avait déjà mis en évidence le phénomène de sensibilité aux conditions initiales lors de l'étude astronomique du problème des trois corps.

Toujours au XIX siècle, le mathématicien russe [**Alexandre Lyapunov, 1892**] effectue des recherches sur la stabilité du mouvement. Il introduit l'idée de mesure de l'écart entre deux trajectoires ayant des conditions initiales voisines. Lorsque cet écart évolue exponentiellement on parle de sensibilité aux conditions initiales. Le météorologue **Edward Lorenz** venait de découvrir le phénomène de sensibilité aux conditions initiales. Les systèmes répondant à cette propriété seront à partir de **1975** dénommés : systèmes chaotiques.

Les travaux fondateurs de **Lorenz** en **1963**, ont donné un aperçu des scientifiques de reconnaissance un nouveau type de mouvement appelé Chaos. La meilleure façon de décrire la sensibilité aux conditions initiales est à travers les exposants positifs de Lyapunov, qui ont été introduit d'abord par Oseledec. Les exposants de Lyapunov jouent un rôle important dans les systèmes non linéaires, en particulier dans les systèmes chaotiques, essentiellement dû au fait que les systèmes chaotiques peuvent être caractérisés par la positivité de l'un des principaux (ou le plus grand) exposant de Lyapunov. Pour les systèmes dynamiques paramétrés, les exposants de Lyapunov sont bénéfiques pour l'identification de certains types de bifurcations. Ces exposants de Lyapunov sont commodés pour l'analyse et le calcul .

Aujourd'hui, il existe de nombreux algorithmes numériques pour le calcul de l'exposant de Lyapunov.

Ce travail réalisé dans le cadre de ce mémoire porte "l'exposant de Lyapunov d'un système dynamique discret". L'objectif de cette mémoire est la détermination des exposants de Lyapunov d'un système dynamique discret. Ce mémoire se présente comme suit :

Le premier chapitre a pour principal objectif d'introduire quelques notions sur les systèmes dynamiques (continue et discret) et les définitions de la trajectoire, le flot, l'espace de phase et les orbites périodiques (négatives et positives), les points fixes.

Le deuxième chapitre est consacré à la définition de la théorie de chaos et aux attracteurs chaotiques tels que : attracteurs, le bassin d'attraction, les différents types d'attracteurs, attracteurs étranges, les différents types d'attracteurs étranges, en passant à la théorie de bifurcation, et l'exposant de Lyapunov.

Le troisième chapitre est consacré à la détermination des exposants de Lyapunov, on utilise la notion avec des exemples à temps discret en dimension 2 et 3 et on s'intéresse à la présentation de l'étude analytique et numérique de calcul de l'exposant de Lyapunov.

Chapitre 1

Généralités sur les systèmes dynamiques

Ce chapitre a essentiellement pour objectif de présenter quelques rappels sur les systèmes dynamiques. D'autre façon ce chapitre est consacré aux propriétés des systèmes dynamique continue et discret. On étudiera exactement : l'existence des domaines des paramètres pour lesquels les orbites positives et négatives, et étudie les points fixes et stabilité.

Les systèmes dynamiques désignent couramment la branche de recherche active des mathématiques, à la frontière de la topologie, de l'analyse, de la géométrie, de la théorie de la mesure et des probabilités. Les systèmes dynamiques n'ont été étudiés en tant que tels qu'assez tardivement. Il sont néanmoins apparus assez tôt dans l'histoire scientifique puisqu'on peut les reconnaître dans les premiers travaux de la mécanique donnant lieu à des équations différentielles.

1.1 Système dynamique

Définition 1.1 *Pour définir un système dynamique ; on doit spécifier :*

- *un espace de configurations du système ; ou " espace des phases "*
- *une loi d'évolution, qui donne l'état futur du système en fonction de l'état .[9]*

Etant donné un espace de configuration et une loi d'évolution, le dynamiqueur s'intéresse au comportement asymptotique du système : que se passe-t-il quand on attend un temps infini ?

1.2 Système dynamique continue

Un système dynamique est un modèle permettant de décrire l'évolution au cours du temps d'un ensemble des objets en interaction, il est défini par un triplet (X, T, G) constitué de l'espace d'état X du domaine temporel T , et d'une application (champ de vecteurs) de transition d'état $G : X \times T \longrightarrow X$ qui permet de définir à partir d'un vecteur de conditions initiales l'état du système à tout instant.

Dans le cas où la composante du temps est continue le système dynamique est présenté par un système d'équations différentielles de la forme :

$$\frac{dX}{dt} = G(X, t, \mu) \quad \text{où } X \in \mathbb{R}^n \text{ et } \mu \in \mathbb{R}^r \quad (1.1)$$

- X représente "l'état du système"
- G fonction vectorielle de X , en général non-linéaire
- G ne dépend, explicitement ou implicitement, que du temps, pas de l'espace
- Les "propriétés du système varient avec μ , en général continûment, parfois

brutalement

voir [9]

1.2.1 Système autonome et non autonome

Système dynamique autonome

Définition 1.2 *un système autonome est un système à évolution temporelle continue qui a une indépendance explicite du temps t :*

$$\frac{dX}{dt} = G(X) \quad (1.2)$$

Système dynamique non autonome

Définition 1.3 *un système non autonome est un système à évolution temporelle continue qui dépend explicitement du temps t :*

$$\frac{dX}{dt} = G(X, t) \quad (1.3)$$

1.2.2 Le Flot

Définition 1.4 *On appelle flot de l'équation (1.3) l'application φ définie par :*

$$\begin{aligned} \varphi & : \quad \mathbb{R} \times X \longrightarrow X \\ (t, x_0) & \longrightarrow \varphi(t, x_0) = \varphi_t(x_0) = x(t, x_0) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Définition 1.5 *Soit $x_0 \in X$ une condition initiale et $x(t, x_0)$ la solution de l'équation (3). L'ensemble des points $\{x(t, x_0), t \in \mathbb{R}\}$ est la trajectoire (ou orbite) dans l'espace d'état passant par le points x_0 à l'instant $t = 0$.*

- Deux trajectoires identiques émanent obligatoirement du même état initial.
- La trajectoire d'un système dynamique autonome ne dépend que l'état initial.[9]

L'existence et L'unicité

les résultats d'existence et d'unicité sont locaux en temps et en espace. Aussi peuventils être énoncés pour un système différentiel du type

$$\frac{dx}{dt} = v(x) \quad (1.5)$$

où $x = x(t)$ appartient à un ouvert U (un ouvert de l'espace des phases paramétré par les coordonnées locales x) de \mathbb{R}^n et v est une application régulière de U dans \mathbb{R}^n . L'application v est appelée champ de vecteurs (vitesse). Comme v ne dépend

pas du temps, le système est dit autonome. Tout système non autonome $\frac{dx}{dt} = v(x, t)$ peut être vu comme une partie d'un système autonome de plus grande dimension. Il suffit de poser $\tilde{x} = (x, t)$ et $\tilde{v}(\tilde{x}) = (v(x), 1)$ et de considérer le système étudié $\frac{d\tilde{x}}{dt} = \tilde{v}(\tilde{x})$.

1.2.3 La trajectoire

Définition 1.6 Une trajectoire $x(t)$ de ce système est une application de $I \subset \mathbb{R}$ dans \mathbb{R}^n :

$$x : \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R}^n, \\ t \rightarrow x(t), \end{cases} \quad (1.6)$$

qui vérifie à tout instant $t \in I$ la relation $x' = f(x, \lambda)$. C'est en d'autres termes une solution des équations du système

L'existence et L'unicité

Théorème 1.1 Si f est C^r ($r \geq 1$) dans un voisinage $V(x_0)$, alors il existe un réel $a > 0$ tel que le problème :

$$\begin{cases} x' = f(x, \lambda) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.7)$$

admet une solution unique $x(t)$ sur $[-a, a]$.

L'existence et l'unicité d'une solution, dans le cas où l'application f n'est pas continûment différentiable, restent des problèmes ouverts. Un cas particulier, celui où la fonction f et sa matrice jacobienne sont Lipschitziennes, est toutefois résolu : le théorème des fonctions implicites peut être appliqué, et on retrouve les résultats d'existence et d'unicité. On parlera indistinctement dans la suite de la trajectoire $x(t)$, au sens du trajet parcouru dans l'espace des phases au cours du temps, ou de la solution $x(t)$ (sous-entendu : des équations du système).

1.2.4 L'espace de phases

Dès que la dimension n du système dépasse l'unité, il devient assez difficile de se représenter "mentalement" comment le système évolue. L'outil de base pour y palier est l'espace de phase. On considère chaque composante X_i de X comme une coordonnée d'un point dans un espace de dimension n . L'évolution suivant t du système se traduit alors par un déplacement du point représentatif dans l'espace de phase, traçant ainsi une trajectoire de phase.

1.2.5 Systèmes conservatifs et systèmes dissipatives

Chez les physiciens, un système conservatif est un système qui conserve l'énergie totale, par contre un système dissipatif est un système qui dissipe de l'énergie. Donc le premier possède une intégrale première (ou constante) du mouvement, et l'autre possède au moins un terme dépendant de la vitesse. Mais n'oublions pas que les systèmes considérés sont des systèmes déterministes, alors pour préciser cette définition, on arrive à dire qu'un système déterministe est conservatif, si et seulement si la dynamique du système associée à chaque condition initiale x_0 un et un seul état final $x(t)$, il faut pour cela qu'il existe une application bijective φ de l'espace des phases

$$\begin{aligned}\phi & : X \times \mathbb{R} \rightarrow X & (1.8) \\ (x, t) & \mapsto \phi_t(x) = \phi(x, t)\end{aligned}$$

Qu'on appelle flot et qui possède les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}\phi_t(x_0) &= x_0 \\ \phi_{t+s}(x_0) &= \phi_t(\phi_s(x_0)) \text{ pour tous } t, s \in \mathbb{R}\end{aligned}\tag{1.9}$$

Si le système est dissipatif, le flot n'est pas bijectif et il existe en général un (ou plusieurs) attracteurs dans l'espace des phases du système.[9]

Exemple 1.1 *cas continu(L'oscillateur de Duffing)*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = x - x^3 - \delta y + \gamma \cos \varpi t \end{cases}\tag{1.10}$$

Où δ, γ, ϖ sont des paramètres physiques réels (variables statiques)

L'espace des phases est : \mathbb{R}^2 , l'espace des paramètres est : \mathbb{R}^3

Ce système est non linéaire, non autonome, il peut être dissipatif ou conservatif (suivant le mouvement avec ou sans frottement).

1.2.6 Point critique

Définition 1.7 *Un point critique (ou point singulier, ou point stationnaire) de l'équation $\dot{X} = F(X)$ est un point \bar{X} de l'espace des phases vérifiant $F(\bar{X}) = 0$.*

Remarque 1.1 *Par un changement de variable $z = x - a$ on peut ramener le point à l'origine (0)*

1.2.7 Solution périodique

Définition 1.8 *une solution du système (1.1) passant au point x_0 est appelée solution périodique de période T s'il existe $T > 0$ tel que :*

$$\{x(0) = x_0, \forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t + T) = x(t), \quad (1.11)$$

on prendra naturellement pour T la période minimale, s'il existe bien que n'importe quel multiple entier de T vérifie également la définition.

Branche de solutions périodiques On peut montrer, en appliquant le théorème des fonctions implicites, l'existence de branches de solutions périodiques, lorsque le paramètre λ varie continûment, de la même manière que pour les solutions statiques.

Stabilité On étudie la stabilité asymptotique d'une solution périodique par analyse linéaire des trajectoires au voisinage de cette solution.

Soit $x_0(t)$ une solution périodique de (1.1), de période T_0 , pour une valeur donnée du paramètre λ_0 . Construisons une solution perturbée $x(t)$ arbitrairement proche de $x_0(t)$: $x(t) = x_0(t) + y(t)$, $|y(0)| \ll |x_0(0)|$. On linéarise alors l'équation d'évolution du système autour de la trajectoire $x_0(t)$, par développement de Taylor à l'ordre 1 en chaque instant :

$$y'(t) = J(x_0(t), \lambda_0)y(t) \quad (1.12)$$

où l'on néglige les termes d'ordre supérieur en y . On obtient ainsi un système dynamique linéaire dont la matrice d'évolution $J(x_0(t), \lambda_0)$ est périodique de période T_0 . [9]

1.3 Système dynamique discret

1.3.1 Définitions et notations

Définition 1.9 *Un système dynamique discret est de la forme :*

$$x_{k+1} = G(x_k) \quad (1.13)$$

Définition 1.10 [Difféomorphisme] *Un difféomorphisme de classe \mathbf{C}^r est une application bijective de classe \mathbf{C}^r dont la réciproque est aussi de classe \mathbf{C}^r .*

Définition 1.11 *On définit un système dynamique discret dans \mathbb{R}^n par une application itérative continue G , telle que :*

$$\begin{cases} G : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x_{k+1} = G(x_k) \end{cases}, \quad x_k \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{Z} \quad (1.14)$$

Elle opère de la façon suivante : étant donné une condition initiale x_0 de l'état du système, le premier état suivant est $x_1 = G(x_0)$, le second état qui suit immédiatement le premier est $x_2 = G(x_1) = G(G(x_0)) = G \circ G(x_0) = G^2(x_0)$, et ainsi de suite de telle sorte que la $(k + 1)$ -ième état est donné par

$$x_{k+1} = G(x_k) = \dots G^{k+1}(x_0) \quad (1.15)$$

1- On définit le flot du système à temps discret par :

$$\varphi_k(x) = G \circ G \circ \dots \circ G(x) = G^k(x), \quad k > 0 \quad (1.16)$$

2- $\varphi_k(x)$ est défini pour $k < 0$ lorsque G est inversible.

3- dans la pratique : $x_0, x_1 = G(x_0), x_2 = G(x_1), \dots, x_{k+1} = G(x_k)$, représentent les valeurs d'une certaine quantité au temps $t = 0, 1, 2, \dots$

4- La valeur de la quantité au temps $m + 1$ dépend de sa valeur au temps m .

1.3.2 Orbite périodique

Définition 1.12 *On appelle cycle (ou trajectoire périodique ou orbite périodique) une trajectoire $\varphi_t(x)$ qui n'est pas réduite à un point et telle qu'il existe $T > 0$ vérifiant $\varphi_T(x) = x$. Le plus petit réel T strictement positif tel que $\varphi_T(x) = x$ est appelé période, il est indépendant du point x pris sur la trajectoire.*

Définition 1.13 *une orbite $(G_k(x))^{K \geq 0}$ du système (1.11) est dite périodique si $G(x) \neq x$ et s'il existe $K > 2$ tel que $G^K(x) = x$. le plus petit entier $K \geq 2$ tel que $G^K(x) = x$ est alors appelé période.*

Comme pour les cycles limites, on peut définir une notion de stabilité (asymptotiquement) autour d'une orbite périodique.

1.3.3 Orbites négatives et orbites positives

Définition 1.14 *Une orbite positive O^+ d'un point x_0 dans \mathbb{R}^n est la suite des images de x_0 par les composées successives de G :*

$$O^+(x_0) = \{x_0, G(x_0), G^2(x_0), \dots, G^k(x_0), \dots\} \quad (1.17)$$

Si G inversible alors :

$$\underbrace{G^{-k}(x_0) = G^{-1} \circ G^{-1} \circ \dots \circ G^{-1}(x_0)}_{k \text{ -fois}}$$

Définition 1.15 *Une orbite négative O^- d'un point x_0 dans \mathbb{R}^n est la suite des images de x_0 par les composées successives de G :*

$$O^-(x_0) = \{x_0, G^{-1}(x_0), G^{-2}(x_0), \dots, G^{-k}(x_0), \dots\} \quad (1.18)$$

Définition 1.16 *Si $O^+(x_0)$ et $O^-(x_0)$ existent alors l'orbite $O(x_0)$ de x_0 est l'ensemble :*

$$O(x_0) = O^+(x_0) \cup O^-(x_0) \quad (1.19)$$

1.3.4 Stabilité des points fixes

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction réel définie une application disecrèt, Soit $Df(x_0)$ sa matrice Jacobienne évaluée au point fixe x_0 de l'application f , pour simplifier les notions de la stabilité locale du point fixe x_0 on introduit la notion de multiplicateur et pour caractériser la nature de ce point fixe nous donnons les définitions :

Définition 1.17 *Les valeurs propres du Jacobien $Df(x_0)$ sont appelées multiplicateurs caractéristiques de f en x_0 .*

Définition 1.18 *Le point fixe x_0 de f est dit asymptotiquement stable si ses multiplication caractéristiques sont tous de module strictement inférieur à 1.*

Définition 1.19 *Le point fixe x_0 de f est dit instable si l'un des multiplication caractéristiques et de module strictement supérieur à 1.*

Définition 1.20 *Le point fixe x_0 de f est dit point selle si au moins un multiplication est de module strictement inférieur à 1 et les autres multiplication caractéristiques sont tous de module strictement supérieur à 1*

Exemple 1.2

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} x_{n+1} = -ah(y_n) + x_n \\ y_{n+1} = x_n \end{cases} \quad (1.20)$$

et h est un fonction définit par :

$$h(y) = \begin{cases} by - c \text{ si } y \geq 0, \\ by + c \text{ si } y < 0, \end{cases} \quad (1.21)$$

Pour tout les valeurs $a \geq 0, c > 0$ et $b > 0$ le système (*) admet deux points fixes, sont défini par :

$$P_1 = \left(\frac{c}{b}, \frac{c}{b}\right), \quad P_2 = \left(-\frac{c}{b}, -\frac{c}{b}\right) \quad (1.22)$$

Proof. les points fixes du système (*) est les solutions réel du système :

$$-ah(y) + x = x, \quad x = y \quad (1.23)$$

Donc, on peut facilement obtient l'equation

$$h(y) = 0, \quad x = y \quad (1.24)$$

finalement, on obtenir

$$y_1 = \frac{c}{b} > 0, y_2 = -\frac{c}{b} < 0 \text{ et } x_i = y_i, i = 1, 2. \quad (1.25)$$

La matrice Jacobian de le système présedent évalué aux points fixes P_1 et P_2 sont le même et il est donnée par

$$J_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & -ab \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

Et le polynômes caractéristique pour $J_{1,2}$ sont donnée par :

$$\lambda^2 - \lambda + ab = 0 \quad (1.27)$$

Nous avons prouvé le résultat suivant :

Les deux équilibre montre P_1 et P_2 sont la même stabilité.

Puisqu'ils ont le même polynôme caractéristique.

La stabilité locale de P_1 et de P_2 est étudiée par le fait d'évaluer l'eigenvalues de la correspondance jacobian la matrice, où nous le supposons $a > 0, c > 0$ et $b > 0$,

on a le résultat suivant :

- (1) Si $0 \leq a \leq \frac{1}{b}$, alors les deux points fixés $P1$ et $P2$ sont stable.
- (2) If $a > \frac{1}{b}$, alors tous les deux ont points fixés $P1$ et $P2$ sont instables. ■

Alors résumez les caractérisés des points fixes dans le tableaux suivante :

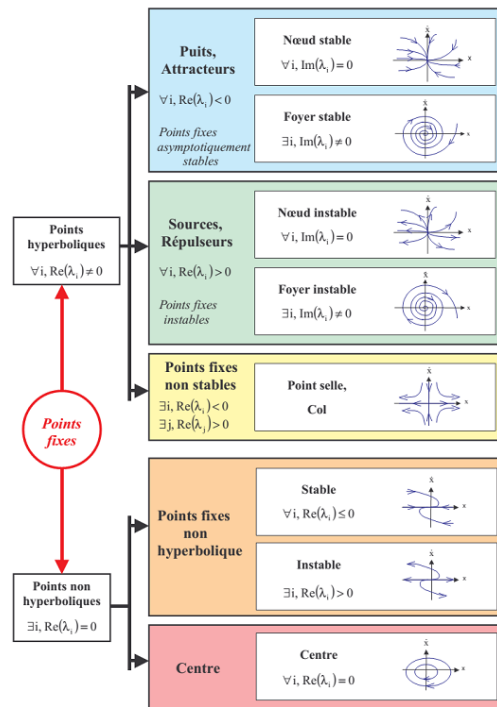


FIG. 1.1 - Les différents types d'états d'équilibre.

Chapitre 2

Chaos et Attracteurs chaotique

Dans ce chapitre nous donnons des notions de base dont nous avons besoin, concernant : Attracteurs, Ensemble invariant, Bassin d'attraction, propriétés d'attracteur, Différents type d'attracteur, Attracteurs chaotique, Exposant de Lyapunov

Dans l'étude des systèmes dynamiques, un attracteur (ou ensemble-limite) est un ensemble ou un espace vers lequel un système évolue de façon irréversible en l'absence de perturbations. Constituants de base de la théorie du chaos.

2.1 Chaos

Des systèmes dynamiques non linéaire, ou simplement linéaires par morceau, peuvent faire preuve de comportements complètement imprévisibles, qui peuvent même sembler aléatoire (alors qu'il s'agit de systèmes parfaitement déterministes). Cette imprédictibilité est appelée chaos. La branche des systèmes dynamiques qui s'attache à définir clairement et à étudier le chaos s'appelle la théorie du chaos.

Cette branche des mathématiques décrit qualitativement les comportements à long terme des systèmes dynamiques. Dans ce cadre, on ne met pas l'accent sur la recherche de solutions précises aux équations du système dynamique (ce qui, de toute façon, est souvent sans espoir), mais plutôt sur la réponse à des questions comme " Le système convergera-t-il vers un état stationnaire à long terme, et dans

ce cas, quels sont les états stationnaires possibles ? " ou " Le comportement à long terme du système dépend-il des conditions initiales ? "

2.1.1 Définition du chaos

Il n'ya aucune définition standard du chaos néanmoins, les dispositifs du chaos incluent :

- **La non-linéarité** : Si le système est linéaire, il ne peut pas être chaotique.
- **La déterminisme** : Un système chaotique a des règles fondamentales déterministes (plutôt que probabilistes).
- **La sensibilité aux conditions** : De très changements sur l'état initial peuvent mener à un comportement radicalement différent dans son état final.
- **L'imprévisible** : En raison de la sensibilité aux conditions initiales, qui peuvent être connues seulement à un degré fini de précision.
- **L'irrégularité** : Ordre caché comprenant un nombre infini de modèles périodiques instables.

Définition 2.1 Soit un ensemble V . L'application $f : V \rightarrow V$ est dite chaotique sur V si :

1. f possède une sensibilité aux conditions initiales.
2. f est topologiquement transitive.
3. Les points périodiques sont denses dans V

Définition 2.2 $f : V \rightarrow V$ est dite topologiquement transitive si pour n'importe quelles paires d'ensembles ouverts $U, J \subset V$ il existe un nombre entier $k > 0$ telque :
 $f^k(U) \cap J \neq \emptyset$

2.2 Attracteurs

Lors de l'étude du comportement asymptotique des solutions d'un système dynamique, on trouve des objets dans l'espace des phases qui attirent un grand nombre de

solutions issues de conditions initiales différentes. Ces objets sont appelés attracteurs et ensembles attractants. plus formellement :

2.2.1 Ensemble invariant

Définition 2.3 *Un ensemble $M \subset X$ est dit invariant par un champ de vecteurs si toute solution $X(t)$ du système différentiel associée au champ de vecteurs issue de M vérifie $X(t) \subset M$ pour tout t pour lequel cette solution est définie.*

2.2.2 Définitions d'attracteurs

Dans la littérature on trouve plusieurs définitions. En général, un attracteur est défini comme une sous partie fermée de l'espace des phases qui "attire" toutes les autres orbites vers elle.

Définition 2.4 *Un attracteur est un objet géométrique vers lequel tendent toutes les trajectoires points de l'espace des phases, c'est-à-dire une situation (ou un ensemble de situation) vers lesquelles évolue un système, quelle que soient ses conditions initiales.*

Mathématiquement, l'ensemble A est un attracteur si :

- pour tout voisinage U de A , il existe un voisinage V de A tel que toute solution $x(x_0, t) = \varphi_t(x_0)$ restera dans U si $x_0 \in V$
- $\bigcap_{t \geq 0} \varphi_t(V) = A$, $t \geq 0$
- il existe une orbite dense dans A .

Définition 2.5 *soit (x, f) un système dynamique discret. Une sous-partie A de x est appelée attracteur si et seulement si les conditions suivantes sont réalisées :*

1. A est fermée ;
2. A est positivement invariante,
3. A est attractive, c'est-à-dire, il existe un voisinage ouvert U de A tel que :
 - a) U est positivement invariant

b) U est attiré par A

$$\forall u \in U, \lim_{t \rightarrow \infty} d(f^t(u), A) = 0. \quad (2.1)$$

2.2.3 Bassin d'attraction

Tout voisinage ouvert qui satisfait les conditions 3.a) et 3.b) est appelé voisinage attiré par A . Il faut remarquer que bien qu'il existe un voisinage attiré U , on peut pas affirmer qu'il est unique : en effet A peut admettre plusieurs voisinages attirés par lui-même. On donne quelques définitions du bassin d'attraction :

Définition 2.6 On appelle bassin d'attraction $B(A)$ de A le plus grand des tels voisinages attirés, c'est à dire $B(A) = \cup \{U \in p(x) : U \text{ est un voisinage attiré par } A\}$.

Définition 2.7 Le bassin d'attraction d'un attracteur S_E est l'ensemble B_E qui comprend les conditions initiales X_0 telles que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(X_0) \rightarrow S_E \quad (2.2)$$

2.2.4 propriétés d' attracteur

1- un sus ensemble borné A de l'espace est de volume nul invariant par flot- autrement dit tout point de l'espace d'état qui appartient à un attracteur demeure à l'intérieur de cet attracteur pour tout t .

2- Il existe un ensemble $A \subset B$ tel que pour voisinage de A , la trajectoire qui prend son origine dans B se trouve au bout d'un temps fini dans ce voisinage de A . Autrement dit, toute trajectoire qui a son origine dans B tend vers l'attracteur cette "zone d'influence" est le (Bassin d'attraction).

3- un attracteur est indécomposable c'est-à-dire que la réunion de deux attracteurs s'est pas un attracteur.

2.2.5 Différents type d'attracteur

Il existe deux types d'attracteurs : les attracteurs réguliers et les attracteurs étranges ou chaotiques.

Attracteurs réguliers

Les attracteurs réguliers caractérisent l'évolution de système non chaotiques, et peuvent être de trois sortes :

1- les points fixes :

Tout solution x_e vérifiant la relation $g(x_e) = 0$ est appelée position d'équilibre, point singulier, point fixe, ou encore solution stationnaire.

On distingue seulement deux types d'attracteurs qui sont des points fixes. Il s'agit des noeuds stables et des foyers stables.

2- Les cycle limites : solutions périodiques

Une solution $x(t)$ d'un système dynamique autonome ou non est périodique s'il existe un entier T pour lequel :

$$\text{pour tout } t, \quad x(t+T) = x(t) \quad \text{et} \quad x(t+\bar{T}) \neq x(t) \quad \text{pour } 0 < \bar{T} < T$$

T est alors appelé la période de la solution. La représentation d'une telle solution dans le plan de phase nous donne une trajectoire fermée appelée cycle limite et telle qu'aucune trajectoire commençant suffisamment proche d'elle, ne soit également fermée.

On a trois types de cycle limite :

- (a) cycle limite stable
- (b) cycle limite instable
- (c) cycle limite semi-stable (en partie instable).

3- Le cycle limite quasi-périodique :

Un comportement quasi-périodique peut être vu comme la somme d'un nombre fini de termes périodiques dont le rapport des périodes deux à deux n'est pas rationnel. Il existe des systèmes dont la solution orbitale en régime permanent (dans le plan de phase) oscille entre deux cycle limites relativement proches sans jamais deux fois de suite exactement sur la même trajectoire : on parle alors d'attracteur quasi-périodique.

Les systèmes quasi-périodiques les plus simples sont basés sur deux fréquences incommensurables ω_{q_1} et ω_{q_2} (on dit que le degré de la quasi-périodicité est égale à 2) .

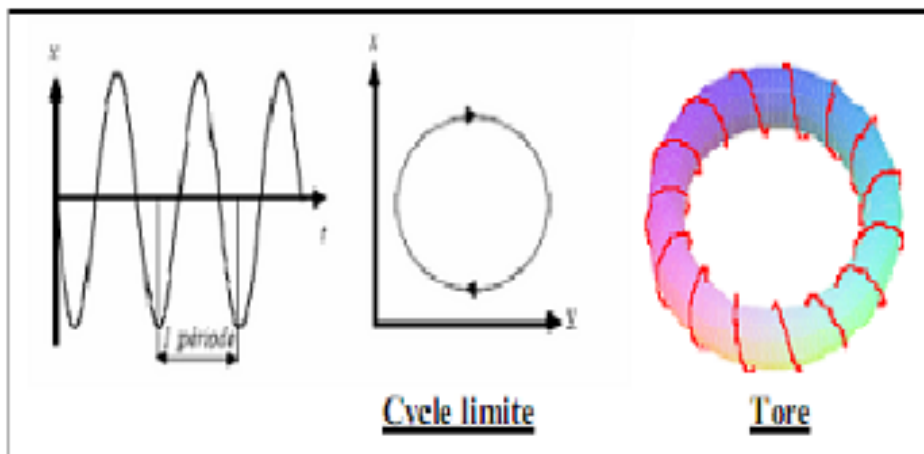


FIG. 2.1 - Les différents types des attracteurs réguliers

Attracteurs étrange(chaotique) : Il n'existe pas à proprement parler de définition positive des orbites chaotiques. Un mouvement chaotique est non déterministe mais il ne s'agit pas d'un mouvement aléatoire. Il possède un spectre fréquentiel continu (caractère erratique) et présente en outre une extrême sensibilité aux conditions initiales. En effet deux orbites chaotiques initiées avec des conditions initiales

très voisines vont diverger et s'écarter l'une de l'autre très rapidement. La vitesse de divergence de deux orbites initialement voisines peut être étudiée à partir des exposants de Lyapunov afin de caractériser la nature du chaos observé.

On peut définir un attracteur chaotique (ou attracteur étrange) comme étant un attracteur de volume nul qui n'est ni un point fixe, ni cycle limite, ni quasi-périodique. Dans une section de Poincaré, un attracteur chaotique décrit une infinité de points dont l'ensemble possède une structure topologique auto-similaire avec une dimension fractale non entière. De ce fait, on ne peut pas réduire un mouvement chaotique à un point fixe ou un cycle limite comme pour les autres comportements asymptotiques. Néanmoins, les solutions chaotiques présentent des propriétés de périodicité dans l'espace non pas euclidien mais celui d'Hausdorff.

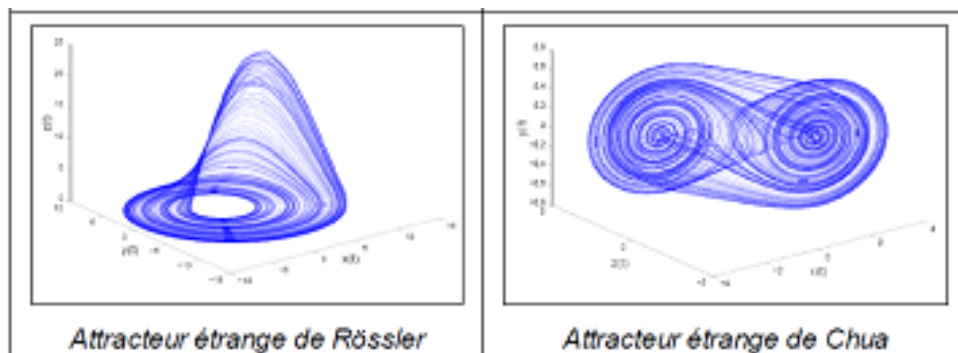


FIG. 2.2 - Quelques exemples d'attracteurs étranges

2.3 Définitions Attracteurs chaotique

Définition 2.8 *L'attracteur chaotique (ou étrange) est une forme géométrique plus complexe qui caractérise l'évolution des systèmes dynamiques chaotiques.*

Définition 2.9 *Un sous-ensemble borné A de l'espace est un attracteur étrange ou chaotique pour une transformation T de l'espace s'il existe un voisinage R de A , c'est à dire que pour tout point de A il existe une boule contenant ce point et contenue dans R vérifiant les propriétés suivantes :*

1- *Attraction* : R est une zone de capture , ce qui signifie que toute orbite par T dont le point initial est dans R , est entièrement contenue dans R .De plus , toute orbite de ce type devient et reste aussi proche de A que l'on veut.

2- Il est contenu dans un espace fini . son volume est nul.sa dimension est fractale(non entière).

3- Presque toute trajectoire sur l'attracteur à la propriété de ne jamais passer deux fois sur le même point, chaque trajectoire est presque sûrement apériodique.

4- Deux trajectoires proches à l'instant t voient localement leur distance augmenter à une vitesse exponentielle (sensibilité aux conditions initiales)

Exemple 2.1 : l'attracteur de Hénon

L'attracteur de M.Hénon (1976), associé à une application $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de la forme $(x, y) \rightarrow (X = 1 - ax^2 + y, Y = bx)$, est initialement issu d'un problème d'astronomie concernant les amas globulaire.Le système différentiel initial (système de Hénon-Heiles) est un système hamiltonien non intégrable; une application du plan dans lui-même dont l'étude plus abordable permet d'analyser le problème initial et ici de décrire son comportement chaotique par l'attracteur de Hénon.

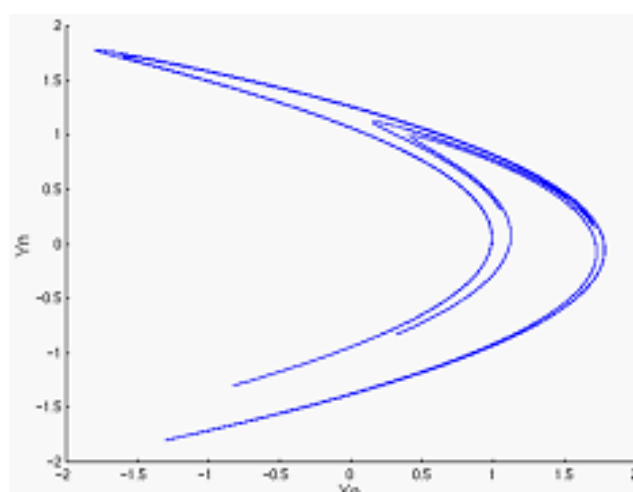


FIG. 2.3 - Attracteur de Hénon : $(a, b) = (1.4, 0.3)$

2.4 Exposant de Lyapunov

Certains systèmes dynamiques sont très sensibles aux variations de leurs conditions initiales, ces variations peuvent rapidement prendre d'énormes proportions.

Le mathématicien russe Alexander Markus-Lyapunov (1857-1918) s'est penché sur ce phénomène et a développé une quantité permettant de mesurer la vitesse ces petites variations peuvent s'amplifier, cette quantité appelée "exposant de Lyapunov" mesure en fait le degré de sensibilité d'un système dynamique, autrement dit, le taux de divergence entre l'évolution de trajectoires issues de conditions initiales proches au sein de cet espace borné qu'est l'attracteur étrange.

L'exposant de Lyapunov est une mesure quantitative possible du chaos, et Lyapunov a démontré que le nombre d'exposants de Lyapunov est égale à la dimension de l'espace des phases.

Par ailleurs, parmi les exposants retenus pour un système donné on considère généralement l'exposant le plus élevé.

Considérons la formule suivante :

$$\left| \frac{d_n}{d_0} \right| = \left| \frac{d_n}{d_{n-1}} \right| \left| \frac{d_{n-1}}{d_{n-2}} \right| \dots \left| \frac{d_1}{d_0} \right| \quad \text{d'où} : \quad \frac{1}{n} \ln \left| \frac{d_n}{d_0} \right| = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \frac{d_i}{d_{i-1}}$$

Où $\frac{d_i}{d_{i-1}}$ décrit en fait de quelle façon une petite erreur d_i à la $i^{\text{ème}}$ itération, est augmentée ou diminuée dans l'itération suivante. Lyapunov a montré en suite que cette erreur tendait vers une limite "Exposant de Lyapunov".

2.4.1 Cas d'une application discrète unidimensionnelle

Soit une application discrète f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui applique x_n sur x_{n+1} . Choisissons deux conditions initiales très proches, soit x_0 et $x_0 + \varepsilon$ et regardons comment se comportent les trajectoires qui en sont issue. Supposons qu'elles s'écartent en moyenne à un rythme exponentielle. On pourra trouver un réel λ tel que après n itérations on a :

$$|f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)| \cong \varepsilon e^{n\lambda} \quad \text{d'ou} \quad n\lambda \cong \ln \frac{|f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)|}{\varepsilon}$$

et pour $\varepsilon \rightarrow 0$ on a :

$$\begin{aligned} \lambda &\cong \ln \frac{|f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)|}{\varepsilon} = \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n(x_0)}{dx_0} \right| \\ &\cong \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n(x_0)}{df^{n-1}(x_0)} \cdot \frac{df^{n-1}(x_0)}{df^{n-2}(x_0)} \cdots \frac{df^1(x_0)}{dx_0} \right| \\ &\cong \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df(x_{n-1})}{dx_{n-1}} \cdot \frac{df(x_{n-2})}{dx_{n-2}} \cdots \frac{df(x_0)}{dx_0} \right| \cong \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \frac{df(x_i)}{dx_i} \right| \\ &\cong \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df(x_{n-1})}{dx_{n-1}} \cdot \frac{df(x_{n-2})}{dx_{n-2}} \cdots \frac{df(x_0)}{dx_0} \right| \cong \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \frac{df(x_i)}{dx_i} \right| \end{aligned}$$

finalement pour $n \rightarrow +\infty$ on a :

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| \quad (2.3)$$

avec la notation $f'(x_i) = \frac{df(x_i)}{dx_i}$, λ est appelé exposant de lyapunov il indique le taux moyen de divergence.

- Si $\lambda > 0$ alors il y a une sensibilité aux conditions initiales.

- Si $\lambda < 0$ les trajectoires se rapprochent et on perd l'information sur les conditions initiales.

Appliquant la formule précédente pour $x_i = x^*$ tel que x^* est le point d'équilibre, il faut que $\lambda = \ln |f'(x^*)|$.

Exemple 2.2 (*l'application logistique*)

$$f(x_i) = 4x_i(1 - x_i) ; x_i \in [0, 1] \quad (2.4)$$

calculer l'exposant de Lyapunov de f

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \ln |f'(x_i)| \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \ln |4(1 - 2x_i)|\end{aligned}\tag{2.5}$$

Soit $\lambda = \ln 2 > 0$ d'où le comportement est chaotique

2.4.2 Cas d'une application discrète multidimensionnelle

Soit f une application discrète de \mathbb{R}^m dans \mathbb{R}^m :

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

Un système m -dimensionnel possède m exposants de Lyapunov, chacun d'entre eux mesure le taux de divergence suivant un des axes du système, de sorte qu'en moyenne un hyper-volume initial V_0 évolue selon une loi de type :

$$V = V_0 \exp((\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m)n)\tag{2.6}$$

pour avoir du chaos, il est nécessaire qu'au moins un λ_i soit positif, pour avoir étirement selon au moins un axe. Mais il faut aussi que la somme des λ_i soit négative. Puisque, dans le cas contraire, le volume initial finirait par remplir tout l'espace dans lequel il est immergé et on n'aurait plus un attracteur de faible dimension, ce qui signifie qu'on n'aura pas du chaos déterministe. Tout d'abord nous devons calculer les λ_i . Dans ce but, nous fixons une hyper sphère dans notre espace m -dimensionnel de rayon ε (petit) de conditions initiales, et examinons son évolution. Comme précédemment, nous nous intéressons à :

$$f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)\tag{2.7}$$

posons $x' = x_0 + \varepsilon$, on a le développement en série limite d'ordre 1 de $f^n(x_0)$ au voisinage de x'_0 suivant :

$$\begin{aligned}
x_n - x'_n &\approx \frac{df^n(x_0)}{dx_0}(x_0 - x'_0) \\
&\approx J(x_0)J(x_1)\dots J(x_n)(x_0 - x'_0) \\
&\approx \prod_{i=1}^n J(x_i) (x_0 - x'_0)
\end{aligned} \tag{2.8}$$

on note $\prod_{i=1}^n J(x_i)$ par $J^n(x_0)$, ainsi

$$x_n - x'_n \approx J^n(x_0) (x_0 - x'_0) \tag{2.9}$$

$$x_n - x'_n \approx J^n(x_0) (x_0 - x'_0) \tag{2.10}$$

$J^n(x_0)$ dénote la matrice jacobienne de f^n au point x_0 . Il s'agit d'une matrice carrée $m \times m$, si elle est diagonalisable, alors il existe une matrice inversible P_n telle que $D_m^t = P_n^{-1} J^n P_n$, D_m^t est une matrice diagonale des valeurs propres $u_i(f^n(x_0))$, $i = 1, \dots, m$ de J^n .

On définit alors les m exposants de Lyapunov de la manière suivante :

$$\lambda_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln |u_i(f^n(x_0))|, \quad i = 1, 2, \dots, m \tag{2.11}$$

pour le point d'équilibre x^* la formule (2.2) devient

$$\lambda_i = \ln |u_i(x^*)|, \quad i = 1, 2, \dots, m \tag{2.12}$$

2.5 Bifurcations

2.5.1 Différents types des bifurcations

Dans cette section, on considère trois types de bifurcations locales : La bifurcation de doublement de période, la bifurcation point selle (ou noeud-col) et la bifurcation de Neimark. Ces bifurcations sont locales car elles peuvent être analysées par la

linéarisation de la application au voisinage d'un point fixe ou d'un cycle limite. Tous les types de bifurcations étudiées correspondent toujours à $|\lambda_i| = 1$ (où λ_i représente les multiplicateurs).

Bifurcation flip ou doublement de période ($\lambda = -1$)

Cette bifurcation a lieu lorsqu'un des multiplicateurs est égales à -1 . Un cycle d'ordre k qui subie cette bifurcation va changer de nature et crée un cycle d'ordre $2k$ de la même nature. C'est-à-dire, un point fixe stable d'ordre 1, par exemple, devient instable en même temps que l'apparition d'un cycle d'ordre 2 stable.

Bifurcation fold ou noeud-col ($\lambda = +1$)

La bifurcation $\lambda = +1$ correspond à la situation où l'un des multiplicateurs est égale à $+1$. Ce type de bifurcation donne naissance à deux cycle d'ordre k en même temps, l'un est attractif et l'autre est instable.

Bifurcation de Neimark ($\rho = 1$)

Cette bifurcation se produit lorsque la matrice Jacobienne possède deux multiplicateurs complexes conjuguées $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$ et de plus $|\lambda_{i=1,2}| = 1$.

2.5.2 Diagramme de bifurcation

Le diagramme de bifurcation est un tracé des points de l'état stationnaire du système en fonction du paramètre du contrôle. Typiquement, on choisit un état variable et on trace la valeur limite de celui-ci en fonction d'un seul paramètre de contrôle. Pour les systèmes discontinus, on trace simplement les valeurs successives d'un état variable. Un diagramme de bifurcation résume l'information sur l'espace d'état et la variation en fonction du paramètre peut être visualisée. La transition d'un état stationnaire vers le chaos peut être observée.

Chapitre 3

Détermination des exposants de Lyapunov d'un système discret

Cette section présente la détermination des exposants de Lyapunov d'un système dynamique discret. Il existe plusieurs définitions des exposants de Lyapunov, on donnera définition à temps discret a dimension 2 et 3 et on présente les exemples qui montrent que la méthode pour calculer le plus grand exposant de Lyapunov. D'autre façon ce chapitre est consacré aux propriétés des matrices semblables.

Définition 3.1 [*Exposants de lyapunov*]

On considère le système discret du plan suivant :

$$X_{k+1} = f(X_k), \quad X_k \in \mathbb{R}^2, k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

où la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est le champ de vecteurs(ou difféomorphisme) associé avec le système(3.1) .soit $J(X_k)$ sa Jacobienne en $X_k \in \mathbb{R}^2, k = 0, 1, 2, \dots$, et de définir la matrice

$$T_n(X_0) = J(X_{n-1})J(X_{n-2})\dots J(X_1)J(X_0) \quad (3.2)$$

par ailleurs,soit $J_i(X_0, n)$ le module de la i^{ieme} valeur propre de la n^{ieme} matrice $T_n(X_0)$, où $i = 1, 2$ et $n = 0, 1, 2, \dots$

Maintenant, les exposants de Lyapunov pour le système discret en dimension deux sont définis par la relation :

$$l_i(X_0) = \ln \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} J_i(X_0, n)^{\frac{1}{n}} \right), i = 1, 2. \quad (3.3)$$

Exemple 3.1 Soit l'équation discrète quadratique suivant :

$$\begin{cases} x_{n+1} = \alpha x_n(1 - x_n) \\ y_{n+1} = (\beta - x_n)(1 - y_n) \end{cases} \quad (3.4)$$

La matrice jacobienne de l'équation est :

$$\begin{pmatrix} \alpha(1 - 2x) & 0 \\ (y - 1) & -\beta + x \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

parce que la matrice jacobienne est triangulaire, les exposants de Lyapunov sont

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{n=N} \ln \alpha |1 - 2x_n| \\ \lambda_2 = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{n=N} \ln |-\beta + x_n| \end{cases} \quad (3.6)$$

3.1 Matrices semblables

Définition 3.2 On dit que deux matrices J et A sont dites semblables s'il existe une matrice inversible P telle que :

$$J = PAP^{-1}$$

On a les propriétés suivantes :

- c'est une relation d'équivalence
- Deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent un même endomorphisme dans deux bases prises simultanément comme base de départ et d'arrivée.
- Des matrices semblables sont équivalentes.

3.1.1 Matrice diagonale

Définition 3.3 *Matrice diagonalisable est une matrice carrée semblable à une matrice diagonale. Cette propriété est équivalente à l'existence d'une base de vecteurs propres, ce qui permet de définir de manière analogue un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel.*

Exemple 3.2 *soit A une matrice réelle carrée de dimension 2. Alors il existe une matrice réelle inversible P telle que $J = P^{-1}AP$ est de l'une des formes suivantes :*

$$(a) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \lambda_1 \neq \lambda_2 \quad (b) \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Proposition 3.1 *où $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$, est des réelles, en relation directe avec les valeurs propres de la matrice A .*

On dit que J est semblable à A

3.1.2 Matrice triangulaire

Définition 3.4 *Les matrices triangulaire sont des matrices carrées dont une partie triangulaire des valeurs, délimitée par la diagonale principale, est nulle. Une matrice triangulaire à la fois inférieure et supérieure est une matrice diagonale.*

Exemple 3.3 *soit A une matrice réelle carrée de dimension 2. Alors il existe une matrice réelle inversible P telle que $J = P^{-1}AP$ est de l'une de forme suivantes :*

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Proposition 3.2 *où λ_0 sont des réels, en relation directe avec les valeurs propres de la matrice A .*

On dit que J est semblable à A

Les valeurs propres de la matrice A (et de la matrice J) sont les valeurs λ solutions de l'équation caractéristique :

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad I : \text{matrice identité}$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0 \quad \text{équation caractéristique}$$

Exemple 3.4 Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. $\text{tr}(A) = 1$ et $\det(A) = -20$. L'équation caractéristique est donc $\lambda^2 - \lambda - 20 = 0$ avec $\Delta = 81 = 9^2$. Les valeurs propres de A sont alors : $\lambda_1 = -4$ et $\lambda_2 = 5$. Le calcul des vecteurs propres associés à λ_1 et λ_2 conduit à $u_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a alors : $P = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ avec $P^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$. On vérifie enfin que $J = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. alors :

$$J(X_0) = \begin{pmatrix} (-4)^n & 0 \\ 0 & (5)^n \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

$$T_n(X_0) = \begin{pmatrix} (-4)^{n-1} & 0 \\ 0 & (5)^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-4)^{n-2} & 0 \\ 0 & (5)^{n-2} \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} (-4)^0 & 0 \\ 0 & (5)^0 \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

$$l_1(X_0) = \ln\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} |-4^n|^{\frac{1}{n}}\right) = \ln |4| \tag{3.11}$$

$$l_2(X_0) = \ln\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} |5^n|^{\frac{1}{n}}\right) = \ln |5| \tag{3.12}$$

3.2 L'exposant de Lyapunov en dimension 2

Considérons le système dynamique discret en 2 dimension défini par :

$$\begin{cases} x_{n+1} = ax_n + \sin y_n \\ y_{n+1} = b + c \cos y_n \end{cases} \tag{3.13}$$

Où une a, b, c sont paramètres constants, et $X_n = (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ est la variable

Le Système dynamique à temps discret donné par l'équation (3,13) a un ou plusieurs exposants de Lyapunov positifs pour certaines valeurs des paramètres. Nous utilisons la méthode pour calculer le plus grand exposant de Lyapunov.

La matrice jacobienne du système (3,13) est donnée par :

$$J(X_n) = \begin{pmatrix} a & \cos y_n \\ 0 & -c \sin y_n \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

La matrice $T_n(X_0)$ donné par :

$$T_n(X_0) = \begin{pmatrix} a & \frac{\partial \sin y_{n-1}}{\partial y} \\ 0 & c \frac{\partial \cos y_{n-1}}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{\partial \sin y_{n-2}}{\partial y} \\ 0 & c \frac{\partial \cos y_{n-2}}{\partial y} \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} a & \frac{\partial \sin y_0}{\partial y} \\ 0 & c \frac{\partial \cos y_0}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

On pose : $\alpha_k = \frac{\partial \sin y_n}{\partial y}$, $\beta_k = c \frac{\partial \cos y_n}{\partial y}$ $k = 0, 1, \dots, n$

$$T_n(X_0) = \begin{pmatrix} a & \alpha_{k-1} \\ 0 & \beta_{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \alpha_{k-2} \\ 0 & \beta_{k-2} \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} a & \alpha_0 \\ 0 & \beta_0 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Maintenant, un peu d'algèbre conduit à la forme simplifiée suivante de la matrice $T_n(X_0)$

$$T_n(X_0) = \begin{pmatrix} a^n & A \\ 0 & \beta_k \beta_{k-1} \dots \beta_0 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

Où A est une élément dans la matrice triangulaire supérieure ci-dessus n'est pas important pour le calcul, les valeurs propres dans $T_n(X_0)$ est définis par :

$$\delta_1 = a^n \quad (3.18)$$

$$\delta_2 = \beta_k \beta_{k-1} \dots \beta_0 \quad (3.19)$$

$$J_1(X_0, n) = |\delta_1| = |a^n| \tag{3.20}$$

$$J_2(X_0, n) = |\delta_2| = |\beta_k \beta_{k-1} \dots \beta_0| \tag{3.21}$$

et suivre à la définition de l'exposant de Lyapunov :

$$l_1(X_0) = \ln \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} J_1(X_0, n)^{\frac{1}{n}} \right) = \ln \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} |a^n|^{\frac{1}{n}} \right) = \ln |a| \tag{3.22}$$

$$l_2(X_0) = \ln \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} J_2(X_0, n)^{\frac{1}{n}} \right) = \ln \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} |\beta_k \beta_{k-1} \dots \beta_0|^{\frac{1}{n}} \right) \tag{3.23}$$

Conclusion 3.1 Si $|a| > 1$ le système (3.14) est chaotique .

3.3 L'exposant de Lyapunov en dimension 3

Considérons le système dynamique discret en 3 dimension défini par :

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_n - y_n^2 - z_n \\ \alpha + by_n - z_n^2 \\ \beta + cz_n \end{pmatrix} \tag{3.24}$$

Où a, b, c sont paramètres constants, et $X_n = (x_n, y_n, z_n) \in \mathbb{R}^3$ est la variable d'état, X_0 est le état initial, et $n = 0, 1, 2, \dots$ est le temps discret.

La matrice jacobienne donner par :

$$J(X_n) = \begin{pmatrix} a & -2y_n & -1 \\ 0 & b & -2z_n \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \tag{3.25}$$

La matrice $T_N(X_0)$ donné par :

$$T_n(X_0) = \begin{pmatrix} a & \frac{-2\partial y_{N-1}}{\partial y} & -1 \\ 0 & b & \frac{-2\partial z_{N-1}}{\partial z} \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{-2\partial y_{N-2}}{\partial y} & -1 \\ 0 & b & \frac{-2\partial z_{N-2}}{\partial z} \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} a & \frac{-2\partial y_0}{\partial y} & -1 \\ 0 & b & \frac{-2\partial z_0}{\partial z} \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

Alors la forme de la matrice $T_N(X_0)$

$$T_N(X_0) = \begin{pmatrix} a^N & A & B \\ 0 & b^N & C \\ 0 & 0 & c^N \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

Où A, B et C sont éléments dans la matrice triangulaire supérieure ci-dessus ne sont pas importants pour le calcul, les valeurs propres dans $T_n(X_0)$ sont définis par :

$$\delta_1 = a^N \quad (3.28)$$

$$\delta_2 = b^N \quad (3.29)$$

$$\delta_3 = c^N \quad (3.30)$$

et par conséquent, on a :

$$J_1(X_0, N) = |\delta_1| = |a^N| \quad (3.31)$$

$$J_2(X_0, N) = |\delta_2| = |b^N| \quad (3.32)$$

$$J_2(X_0, N) = |\delta_3| = |c^N| \quad (3.33)$$

et suivre à la définition de l'exposant de Lyapunov :

$$l_1(X_0) = \ln\left(\lim_{N \rightarrow +\infty} J_1(X_0, N)^{\frac{1}{N}}\right) = \ln\left(\lim_{N \rightarrow +\infty} |a^N|^{\frac{1}{N}}\right) = \ln |a| \quad (3.34)$$

$$l_2(X_0) = \ln\left(\lim_{N \rightarrow +\infty} J_2(X_0, N)^{\frac{1}{N}}\right) = \ln\left(\lim_{N \rightarrow +\infty} |b^N|^{\frac{1}{N}}\right) = \ln |b| \quad (3.35)$$

$$l_3(X_0) = \ln\left(\lim_{N \rightarrow +\infty} J_3(X_0, N)^{\frac{1}{N}}\right) = \ln\left(\lim_{N \rightarrow +\infty} |c^N|^{\frac{1}{N}}\right) = \ln |c| \quad (3.36)$$

Exemple 3.5 Dans cette section, nous donnons un exemple élémentaire de l'analyse analytique ci-dessus. En effet, nous choisissons les paramètres :

$$a = 2, b = 5, c = \frac{1}{2}, \alpha = 1 \text{ et } \beta = \frac{1}{2}$$

le système a deux exposants de Lyapunov positifs, $l_1 = 0.693$, $l_2 = 1.609$ et seul exposant de Lyapunov négatif $l_3 = -0,693$. la matrice jacobienne est donné par :

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

et son polynôme caractéristique est $(2 - \lambda)(5 - \lambda)(\frac{1}{2} - \lambda) = 0$. alors $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 5$, $\lambda_3 = \frac{1}{2}$.

Conclusion

Les exposants de Lyapunov jouent un rôle très important pour décrire le comportement des systèmes dynamiques discrets. Dans ce mémoire, nous donnons une idée générale sur les exposants de Lyapunov et la motivation essentielle de ce travail est de calculer rigoureusement les exposants de Lyapunov, nous considérons une approche basée sur la notion l'exposants de Lyapunov pour décrire le comportement dynamique de ces systèmes et les conditions sur les paramètres du bifurcations pour l'existence d'attracteurs.

Bibliographie

- [1] Andreyev. Y. V., Belskry, Y. L., Dmitriev, A. S., Kuminov, D.A. Information processing using dynamical chaos : Neural networks implementation. IEEE Transactions on Neural Networks, 7, 290-299 (1996)
- [2] C. P.Li and G. Chen, Chaos, Solitons Fractals 18, 807 (2003).
- [3] G. A. Leonov, Lyapunov Exponents and Problems of Linearization. From Stability to Chaos, (St. Petersburg University Press, St. Petersburg, 1997).
- [4] D. Lai, and G. Chen, Making a discrete dynamical system chaotic : Theoretical results and numerical simulations, International Journal of Bifurcation and Chaos, 13(11),3437-3442(2003).
- [5] Gabriela A. Casas et Paulo C. Rech.Numerical Study of a Three-Dimensional Hénon Map.Departamento de Física, Universidade do Estado de Santa Catarina, 89223-100 Joinville, Brazil.Received 19 September 2010.
- [6] Guckenheimer J. and Holmes P., Non-Linear Oscillations, Dynamical Systems And Bifurcations Of Vector Fields (Applied Mathematical Sciences, 42), Springer Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1986.
- [7] Hemanta Kr. Sarmah and Ranu Paul .Period doubling route to chaos in a two parameter invertible map with constant Jacobian ,Guwahati – 781014, Assam, India.
- [8] Li, C., Xia, X. Estimating the Lyapunov exponents of continuous systems. Chaos. 14(3), 557-561 (2004).

-
- [9] M.Tidjani.Synchronisation des systèmes dynamiques dérivées fractionnaires.Universite Mentouri constantine
- [10] M. Misiurewicz, Bull. Acad. Polo.Sci. Ser. Sci. Math. 27, 167 (1979).
- [11] M.A.RAHUMAN Ahmed.Analyse des Systèmes Non-linéaires à Dynamiques Complexes.
- [12] Newcomb, R. W., Sathyan, S. An RC op amp chaos generator . IEEE trans, Circuits & Systems, vol CAS-30, 54-56 (1983).
- [13] Peitgen H. O., Jurgen H. and Saupe D., Chaos and Fractals, Springer Verlag, New York 1992.
- [14] R. Seydel, Practical Bifurcation and Stability : From Equilibrium to Chaos, 2nd ed. Elsevier Science, New York, (1994).
- [15] Sami Karkar.M ethodes num eriques pour les syst emes dynamiques non lin eaires. Application aux instruments de musique auto-oscillants. Acoustique [physics.class-ph]. Aix-Marseille Universit e, 2012. Francais.
- [16] S. Wiggins, Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos, Springer- Werlag, 89-100,(1990).