UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des mathématiques et sciences de la matière

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Master

Spécialité: Mathématiques

Option: M et AN

Par: Bey kamel

Thème

Intégration sur les groupes de Lie et espaces homogènes

Version de: 16 juin 2014

Devant le jury composé de:

Mr. Yacine Gurboussa	grade	M(A) université - Ouargla	Président
Mr. Rgiaat Miloud	grade	M(A) université - Ouargla	Examinateur
Mr. Ben Moussa M.Tayeb	grade	M(A) université - Ouargla	Rapporteur

Dedicace

Je dédie ce modeste travail.

A ma mére avec toute mon affection.

A mon pére avec toute ma reconnaissance.

A mes fréres et mes soeurs.

A tout ma famille.

A tous mes amis chaqu'un à son nom.

Remerciements

Tout d'abord on remercie le bon dieu puissant de la bonne santé, la volonté et de la patience qu'il nous a donnée tout au long de notre étude.

Nous remercions Trés sincérement Mr. BEN MOUSSA Mohamed Tayeb notre promoteur de ce travail, pour ses conseils pertinents, et ses orientations ,judicieuses sa patience et diligence, et par ses suggestions à grandement facilité ce travail.

Nous remercions RGUIAAT Miloud, de nous faire l'honneur de présider le jury de cette thése.
Nous lui exprimons notre respectueuse reconnaissance. Nous remercions trés sincérement Messieurs YACINE Gurboussa a bien voulu mobiliser leur temps et leur compétence pour juger ce travail .

Nous tenons à exprimer nos sincéres remerciements à ceux qui nous ont apporté leur soutien et ont contribué à l'élaboration de cette thése de prés ou de loin, et particulier les professeurs : GURBOUSSA Yacine, BAHAOU Amine et MEHDI Salah

Un remerciement spécial aux étudiants de la 2^{eme} année Master de la spécialité de mathematiques spécifiquement mathematiques analyse.

BEY Kamel

Notations et Conventions

1. $SO(n) = \{A \in O(n) \diagup detA = 1\}$
2. $SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \diagup detA = 1\}$
3. X un champ de vectuer
4. $[,]$ croch de Lie
5. L_g, R_g translation à gauche et à droit.
6. Ad représentation du group de Lie
7. ad représentation d'une algéber de Lie
8. M une variété différentielle
9. (U_i, φ_i) une carte
10. G un group de Lie

11. H un sous group fermé de G

12. T_xM espace tangent au point x

13. TM fibré tangent

Table des matières

Introduction

En mathématiques, un groupe de Lie est un groupe doté d'une structure de variété différentielle, pour la quelle les opération de groupe :

1. $(x, y) \longmapsto^f x.y$
2. $x \longmapsto^g x^{-1}$

sont différentiables. Les groupe de Lie sont nommés ainsi en l'honneur du mathématicien norvégien sophus Lie qui les introduisit afin d'étudier certaines propriétés des équation différentielles.
La théorie de groupe de Lie décrit la symétrie continue en mathématiques. C'est le cas de la symétrie de rotation $SO(3), SO(2)$ qui est associée au groupe de rotation dans l'espace par exemple.
Un espace homogène est un espace sur le quel le groupe opére de façon transitive.
Dans ce travail on a montré l'imprtance des groupes de Lie et les espaces homogènes dans la théorie des mesures et intégration .
Nous avons le plaisir de fair l'exercice proposé à nous par le professeur Jacques Lafontaine cet exercice est autour l'intégration sur l'ensemble des droites.
Nous remercions lui trés chaleuresement.

Ce mémoire contient 4 chapitres :
- La premiére chapitre est distinée aux : notion de base sur la géométrie différentielle
- La deuxiemé est distineé aux : groupes de Lie linéaire
-La troisieme est distinée : espaces homogènes
-La quatriéme : l'intégration sur les groupe de Lie et espaces homogènes.

Chapitre 1

Notion de base sur la géométrie différentielle

1.1 Variétié différentielle

La notion de variété différentiable essaie de généraliser le calcul différentiel qu'on sait définir sur $\mathbb{R}^n$. Pour cela, nous allons introduire des objets mathématiques qui ressemblent localement à $\mathbb{R}^n$, afin d'y transférer ce que nous savons déjà y faire (i.e. continuité, dérivabilité, vecteurs, applications diverses...), mais qui globalement ne seront pas topologiquement identiques à $\mathbb{R}^n$.
De tels objets nous sont familiers dans $\mathbb{R}^3$: une sphére, un tore, un cylindre, une selle, une nappe... ressemblent localement à $\mathbb{R}^2$. Nous voyons toujours ces objets comme sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$. Ce que nous allons définir ne peut a priori pas être vu comme sousensemble d'un $\mathbb{R}^n$. Nous voulons en donner une définition intrinséque, que nous appellerons variétés, sans faire référence à un espace plus grand. Nous sommes dans la situation d'habitants d'une sphére qui voudraient définir leur habitat sans connaître ni se référer à $\mathbb{R}^3$. Un habitant d'une sphére, s'il était mathématicien, se rendrait compte que localement (et seulement localement) son habitat ressemble à un ouvert de $\mathbb{R}^2$. C'est cette propriété qui va être à la base de la construction des variétés. Nous allons recoller ensemble des ouverts de $\mathbb{R}^n$. Globalement, nous n'auront pas nécessairement $\mathbb{R}^n$, mais localement, nous aurons à notre disposition tout ce que nous savons faire sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

1.2 Sous-variétés

Un sous-ensemble N d'une variété M est une sous-variété s'il existe un entier $k \leq n$ tel que pour tout $p \in N$, il existe une carte locale (U, ϕ) de M autour de p telle que

$$\phi(U \cap N) = \phi(U) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$$

oú $\mathbb{R} \times \{0\}$ est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$constitué des éléments de la forme $(x^1, ..., x^k, 0, ..., 0)$. Alors N est une variété de dimension k dont les cartes locales ont pour ouverts les $U \cap N$ et pour homéomorphismes associés les applications $\phi_N = \phi|_{U \cap N}$ que l'on considére comme allant de $U \cap N$ dans un ouvert de $\mathbb{R}^k$.
Nous avons la notion évidente de sous-variété différentiable, oú la structure différentiable est héritée de celle de la variété ambiante.

Exemple 1 • *Les sphéres. Soit n dans $\mathbb{N}$. La sphére de dimension n est le sous-espace topologique compact $\mathbb{S}_n$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ défini par*

$$\mathbb{S}_n = \{x = (x_0, x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_0^2 + ... + x_n^2 - 1 = 0\}.$$

Certains ouvrages, voire la plupart, notent $\mathbb{S}^n$ la sphére de dimension n, mais nous préférons la notation en indice plutôt qu'en exposant, pour ne pas confondre avec les produits (que penser de $(\mathbb{S}^1)^n \neq \mathbb{S}^n$?. Comme l'application $(x_0, ..., x_n) \longmapsto x_0^2 + ... + x_n^2 - 1$ est une submersion analytique réelle en tout point de $\mathbb{S}_n$, la sphére est une sous-variété analytique réelle de $\mathbb{R}^{n+1}$, de codimension 1 et de dimension n.

Exemple 2 • *Les tores. Le tore de dimension n est le sous-espace topologique compact de $\mathbb{C}^n$ défini par*

$$\mathbb{T}^n = \{z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_1| = ... = |z_n| = 1\}.$$

Comme l'application $(z_1, ..., z_n) \longmapsto (|z_1| - 1, ...|z_n| - 1)$ de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ est une submersion analytique réelle en tout point de $\mathbb{T}^n$, celui-ci est une sous-variété analytique réelle de $\mathbb{C}^n$, de codimension n et de dimension n.

1.3 Applications différentielles

1.3.1 Immersion

Définition 1 *Nous dirons que l'application différentiable* $F : M \longrightarrow N$ *est une immersion si* $T_pF : T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$ *est injective pour tout* $P \in M$.
Dans ce cas $dimM \leq dimN$*et le rang de* F *est égal à la dimension de* M *en tout point* p *de* M.

1.3.2 Plongement

Définition 2 *Nous dirons que* F *est un plongement si* F *est une immersion et si* F *réalise un homéomorphisme de* $MsurF(M)$ *(pour la topologie induite). Ceci permet de caractériser les sous-variétés* $MdeN$ *: ce sont les sous-ensembles* $M \subset N$ *tel que l'inclusion* $i : M \hookrightarrow N$ *soit un plongement. Si* F *est un plongement, alors* $F(M)$ *est trivialement une sous-variété de* N.

1.3.3 Submersion

Définition 3 *Enfin,* F *est une submersion si* $T_pF : T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$ *est surjective pour tout* $p \in M$. *Dans ce cas,* $dimM \geqslant dimN$ *et le rang de* F *est égal à* $dimN$ *en tout point* p *de* M.

1.4 Espace projectif

Deux points p et p' de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ sont dis p-équivalent s'ils sont sur la même droite passant par 0.

On démontre que c'est une relation d'équivalence

a) Il est claire que cette relation est reflexive

b) Symétrique $p \Re p' \Longrightarrow p' \Re p$

c) p, p', p'' trois points tels que $p \Re p' \wedge p' \Re p'' alors\ p \Re p''$, d'ou $\Re$ est transitive.
C'est à dire : $\mathbb{R}^{n+1}/\{0\} \simeq S^n$

Définition 4 *L'espace projectif à n dimensions P^n est le quotient de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ par la relation d'équivalence p.*
Un point de P^n est donc d'efini par $n+1$ nombres x^i, non tous nuls, qui sont appelés coordonnées homogènes du point x.
Pour que deux systémes de coordonnées homogènes $\{x'^i\}$ et $\{x^i\}$ définissent le même point de P^n, il faut et il suffit qu'il existe un nombre λ tel que $x'^i = \lambda x^i$ pour $i = 1, ..., n+1$.
On note πl'application canonique de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ dans P^n. Un ensemble U de P^n sera dit ouvert, si et seulement si, son image réciproque $\pi^{-1}(U)$ est un ensemble ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}$.
On d'efinit ainsi une topologie sur P^n, appelée topologie quotient.

Une représentation importante de P^n peut s'obtenir de la maniére suivante : Les points de P^n sont en correspondance avec les droites de $\mathbb{R}^{n+1}$ passant par l'origine. On peut donc identifier P^n avec l'espace des directions de droites passant par 0 de $\mathbb{R}^{n+1}$. Or, une telle droite coupe la sphére S^n en deux points diamétralement opposés.
L'espace P^n s'obtient donc en identifiant les points dimaetralement opposés de la sphére S^n. Si on note σ la relation : deux points de S^n sont σ équivalents s'ils sont identiques ou symétriques par rapport à 0, alors $P^n = S^n/\sigma$.
Si on note ρ' la relation d'équivalence : deux points de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ sont ρ'-équivalents s'ils sont sur une même demi-droite d'origine 0, alors $S^n = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \diagup \rho'$.
Notons π' la projection de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ sur S^n.

1.5 Le théoréme de Whitney

Le théoréme de Whitney dit la chose suivante :

Théorème 5 *(Whitney)Toute variété différentiable M de dimension n, peut être plongée dans $\mathbb{R}^{2n+1}$.*

1.6 Espece tangent et champs de vecterurs

L'analyse sur les variétés suit l'étude classique des graphes de fonctions, ou plus généralement des courbes et surfaces dans $\mathbb{R}^3$.
Un outil essentiel de l'analyse locale de ces objets et la tangente à la courbe ou plan tangent

à la surface.
Intuitivement, ils donnent une approximation linéaire de l'objet sur un petit domaine. Cette idée se généralise à l'étude des variétés et conduit à la notion d'espace tangent, et de fibré tangent. Cette construction permet l'introduction de deux objets importants : les champs de vecteurs et les groupes à un paramétre de difféomorphismes.

1.7 Fibré tangent

1.7.1 Germes de fonctions

L'analyse locale sur une variété demande la définition de l'algébre des fonctions sur lequel nous allons travailler sur le voisinage d'un point de la variété.
La notion de germe prend en compte cet aspect local.

Soient M et N deux variétés et x un point de M. On considére l'ensemble des applications f : $U_f \longrightarrow N$, de classe C^∞, définies sur un voisinage U_f de x dans M.

On peut définir une relation d'équivalence sur cet ensemble, en posant : $f\tilde{x}g$ s'il existe un voisinage V de x tel que $f|V = g|V$: C'est une relation d'équivalence (à faire en exercice).

Une classe d'equivalence d'une application f est appelée le germe de f en x. On le note germx. L'ensemble de tous ces germes est noté $C_x^\infty(M; N)$.

Tout germe de fonctions dans $C_x^\infty(M;\mathbb{R})$ admet un représentant dans $C^\infty(M)$. Cette e propriété n'est pas vrai pour les germes de fonctions analytiques ou holomorphes. L'algèbre $C_x^\infty(M;\mathbb{R})$ est donc le quotient de l'algèbre $C^\infty(M)$ par l'idéal de toutes les fonctions $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe C^∞ qui s'annulent sur un voisinage (dépendant de f) de x.

1.7.2 Espace tangent à $\mathbb{R}^n$

Un vecteur tangent en un point $p \in \mathbb{R}^n$ est l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ partant de p. C'est donc la donnée d'une paire (p, X), où $X \in \mathbb{R}^n$, que l'on note aussi X_p.

On définit une action de X_p sur l'algèbre $C^\infty(\mathbb{R}^n), X_p : C^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ en posant

$$X_p(f) = df(p).X_p$$

On note que l'action de X_p sur f dépend seulement de la valeur du germe de f au point p.

Cette action est une dérivation sur $C^\infty(M)$. En effet, on a :

$$X_p(fg) = X_p(f)g(p) + f(p)X_p(g).$$

Réciproquement, il est possible d'associer à toute dérivation de $C^\infty(M)$ en un point p de M, un vecteur tangent.

Définition 6 *Une dérivation en un point $p \in M$ sur $C^\infty(M)$, est une application D_p : $C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}, \mathbb{R}$ linéaire, qui vérifie*

$$D_p(fg) = D_p(f)g(p) + f(p)D_p(g),$$

pour toutes fonctions $f; g \in C^\infty(M)$.

On note que pour toute constante $c \in \mathbb{R}$, on a

$$D_p(c) = 0.$$

Toute dérivation D_p en un point $p \in \mathbb{R}^n$ est associé au champ de vecteur

$$(p, \sum_{i=1}^{n} D_p(x^i)e_i),$$

où les x^i sont les fonctions coordonnées sur $\mathbb{R}^n$ et e_i représente la base canonique sur $\mathbb{R}^n$.

Preuve. Pour toute fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, on a

$$f(x) = f(p) + \int_0^1 \frac{d}{dt} f(p + t(x-p))dt,$$

$$= f(p) + \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(p + t(x-p))dt(x^i - p^i),$$

$$= f(p) + \sum_{i=1}^{n} h_i(x)(x^i - p^i)$$

avec $h_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(p + t(x-p))dt$.

Par l'action de D, on obtient

$$D(f) = \sum_{i=1}^{n} D(h_i)(p^i - p^i) + \sum_{i=1}^{n} h_i(p)D(x^i),$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)D(x^i).$$

on a donc

$$D = \sum_{i=1}^{n} D(x^i)\frac{\partial}{\partial x^i}|p..$$

Un simple calcul montre alors que la dérivation D est induite par le champ de vecteurs

$$(p, \sum_{i=1}^{n} D(x^i)e_i),$$

où (e_i)*est la base canonique usuelle.* ■

Définition 7 *On appelle espace tangent au point x, et on note T_xM, l'ensemble de toutes les dérivations en x de $C_x(M, \mathbb{R}.)$*

C'est lénsemble des applications $\mathbb{R}$ linéaires $X_x : C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $X_x(fg) = X_x(f)g(x) \longrightarrow f(x)X_x(g)$.

L'espace tangent en un point x hérite de la structure de $\mathbb{R}$ espace vectoriel de l'ensemble des dérivations.

Soit (U, ϕ) une carte de M avec $x \in U$.A toute fonction $f \in C_x^\infty(M, \mathbb{R})$, on peut associer la fonction $\phi^*(f)$ définie par

$$\phi^*(f) = f \circ \phi^{-1}$$

On a donc un isomorphisme d'algèbres entre $C_{\phi(x)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et $C_x^\infty(M, \mathbb{R})$. Cela induit un isomorphisme $T_{x\phi} : T_x M \longrightarrow T_{\phi(x)}\mathbb{R}^N$, défini par

$$(T_x\phi.X_x)(f) = X_x(f \circ \phi).$$

L'espace tangent T_xM est donc un espace vectoriel de dimension n.
On peut exhiber une base de cet espace vectoriel. On note $\phi = (\phi^1, ..., \phi^n)$, ou ϕ^i est la i-éme fonction coordonnée sur U, et

$$\frac{\partial}{\partial \phi^i}|_x = (T_x\phi)^{-1}(\frac{\partial}{\partial x^i}|_{\phi(x)}) = (T_x\phi)^{-1}(\phi(x), e_i),$$

où $(\phi(x), e_i)$ désigne le champ de vecteur.
Le champ de vecteur $\frac{\partial}{\partial \phi^i}|_x$ est donc défini par

$$\frac{\partial}{\partial \phi^i}|_x(f) = \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x^i}(\phi(x)).$$

Lemme 1 *Soit (U, ϕ) une carte de M, et $x \in U$. Une base de l'espace tangent T_xM est donnée par les vecteurs tangents $\frac{\partial}{\partial \phi^i}|_x, i = 1, ..., n$.*

Preuve.

On utilise encore l'isomorphisme induit par $T_x\phi$. On a

$$T_x\phi.X_x = \sum_{i=1}^{n}(T_x\phi.X_x)(x^i)\frac{\partial}{\partial x^i}|_{\phi(x)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} X_x(x^i \circ \phi)\frac{\partial}{\partial x^i}|_{\phi(x)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} X_x(\phi^i)\frac{\partial}{\partial x^i}|_{\phi(x)}.$$

On en déduit

$$X_x = (T_x\phi)^{-1}.T_x\phi.X_x = \sum_{i=1}^{n} X_x(\phi^i)\frac{\partial}{\partial \phi^i}|_x$$

■

1.8 Définition géométrique de l'espace tangent á une variété.

On note $C^\infty(\mathbb{R}, M)$ l'ensemble des germes en 0 des courbes $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow M$ de classe C^∞. On définit la relation d'équivalence suivante sur ces germes :

Définition 8 *Deux germes γ_1 et γ_2 de $C^\infty(\mathbb{R}, M)$ sont équivalents si et seulement si $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ et pour toute carte (U, ϕ) de M telle que $\gamma_1(0), \gamma_2(0) \in U$, on a*

$$\frac{d\gamma_1}{dt}(0) = \frac{d\gamma_2}{dt}(0).$$

Une classe d'équivalence s'appelle un vecteur vitesse.

On définit un isomorphisme de $C^\infty(\mathbb{R}, M)/\sim$ sur TM en posant pour toute courbe $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow M$, le champ de vecteurs $\alpha(\gamma)$ défini par

$$\alpha(\gamma)(f) = \frac{df \circ \gamma}{dt}(0),$$

et une application β de TM dans $C^\infty(\mathbb{R}, M)$ par $\beta(T\phi)^{-1}(y, Y)$ est le germe en zéro de la courbe $t \longrightarrow \phi^{-1}(y + tY)$.

On a donc le diagramme suivant :

$$C^\infty(\mathbb{R}, M)/\sim \longleftarrow C^\infty(\mathbb{R}, M),$$

$$\downarrow \downarrow$$

$$TM \quad \longrightarrow^{\pi M} \quad M.$$

L'ensemble TM s'identifie donc à l'ensemble des vecteurs vitesses possibles pour les courbes sur M.

1.8.1 Application linéaire tangente.

Soit $f : M \longrightarrow N$ une application de classe C^∞ entre variétés. L'application f induit une application linéaire $T_xf : T_xM \longrightarrow T_xN$ pour tout $x \in M$ en posant

$$(T_xf.X_x)(h) = X_x(h \circ f)$$

pour $h \in C^\infty_{f(x)}(N, \mathbb{R})$.

Cette application est bien définie et linéaire. En effet, l'application $f^* : C^\infty_{f(x)}(N, \mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty_x(M, \mathbb{R})$, définie par $h \longrightarrow h \circ f$, est linéaire et un homomorphisme d'algèbre, et T_xf est l'application adjointe, restreinte au sous-espace des dérivations.
Soit (U, ϕ) une carte en x et (V, ψ) une carte en $f(x)$, alors
$(T_xf.\frac{\partial}{\partial \phi^i}|_x)(\psi^j) = \frac{\partial}{\partial \phi^i}|_x(\psi^j \circ f) = \frac{\partial}{\partial x^i}(\psi^j \circ f \circ \phi^{-1})(\phi(x))$.
On en déduit,

$$T_xf.\frac{\partial}{\partial \phi^i}|_x = \sum_j (T_xf.\frac{\partial}{\partial \phi^i}|_x)(\psi^j)\frac{\partial}{\partial \psi^j}|_{f(x)},$$

$$= \sum_j \frac{\partial(\psi^j \circ f \circ \phi^{-1})}{\partial x^i}(\phi(x))\frac{\partial}{\partial \psi^j}|_{f(x)}.$$

La matrice de $T_xf : T_xM \longrightarrow T_{f(x)}N$ dans les bases $\partial/\partial\phi^i|_x$ et $\partial/\partial\psi^j|_{f(x)}=$ est la matrice Jacobienne de $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ au point $\phi(x)$.

On note $Tf : TM \longrightarrow TN$ l'application définie par $Tf|T_xM = T_xf$.
Si $f : M \longrightarrow N$ et$g : N \longrightarrow P$ sont des applications de classe C^∞, alors on a

$$T(g \circ f) = Tg \circ Tf.$$

C'est une conséquence directe de l'égalité

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*.$$

On a de plus $T(id_M) = id_{TM}$.

Si $f \in C^\infty(M)$, alors $Tf : TM \longrightarrow T\mathbb{R} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. On définit la différentielle de f par $df = \pi_2 \circ Tf : TM \longrightarrow \mathbb{R}, o\pi_2(x, y) = y$ est la projection sur la seconde composante de $T\mathbb{R}$. Soit $id : t \longrightarrow$ l'application identité de $\mathbb{R}$. On a $(Tf : X_x)(id) = X_x(id \circ f) = X_x(f)$. On en déduit

$$df(X_x) = X_x(f)$$

1.8.2 Fibré tangent.

Soit M une variété de dimension n. On pose

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_x M,$$

l'union disjointe de tous les espaces tangents à M. C'est le fibré tangent à M.

C'est une famille d'espaces vectoriels paramétrisés par la variété M. On peut le munir d'une projection $\pi_M : TM \longrightarrow M$ définie par $\pi_M(T_x M) = x$. Il n'est pas a priori évident que cet espace soit encore muni d'une structure de variété.

Soit (U, ϕ) une carte de M. On définit une carte sur TM en posant $(\pi_M^{-1}(U), T\phi)$, où $T\phi : \pi_M^{-1}(U) \longrightarrow \phi(U) \times \mathbb{R}^n$ est définie par

$$T\phi.X = (\phi(\pi_M)), T_{\pi M(X)}\phi.X)$$

Le fibré tangent est donc une variété. Pour étudier sa régularité, on doit étudier les changements de cartes. On a :

$$T\phi_j \circ (T\phi_i)^{-1} : T\phi_i(\pi_M^{-1}(U_{i,j})) = \phi_i(U_{i,j}) \times \mathbb{R}^n$$

$$\longrightarrow \phi_j(U_{i,j}) \times \mathbb{R}^n = T\phi_j(\pi_M^{-1}(U_{i,j})),$$

$$((T\phi_j \circ (T\phi_i)^{-1})(y, Y))(f) = ((T\phi_I)^{-1}(y, Y))(f \circ \phi_j),$$

$$(y, Y)(f \circ \phi_j \circ \phi_i^{-1}) = d(f \circ \phi_j \circ \phi_i^{-1})(y).Y,$$

$$df(\phi_j \circ \phi_i^{-1}(y)).d(\phi_j \circ \phi_i^{-1})(y).Y,$$

$$(\phi_j \circ \phi_i^{-1}(y), d(\phi_j \circ d\phi_i^{-1})(y).Y)(f).$$

Les changements de cartes sont donc de classe C^∞. On choisit une topologie sur TM telle que tous les $T\phi_i$ soient des homéomorphismes.

En fait, la construction du fibré tangent illustre une structure géométrique très générale appellée fibré vectoriel.

1.9 Champs de vecteurs

Définition 9 *Un champ de vecteur X est une section C^∞ du fibré tangent, i.e. une application $X : M \longrightarrow TM$ de classe C^∞ et $\pi_M \circ X = Id_M$. Un champ de vecteur local est une section lisse définie sur un voisinage ouvert. On note $H(M)$ l'ensemble de tous les champs de vecteurs.*

On peut munir $H(M)$ d'une structure d'espace vectoriel, induite par celle de l'espace tangent.

Lemme 2 *Soit X un champ de vecteur sur M et (U, ϕ) une carte locale de M. Soit $x \in U$, on a*

$$X(x) = \sum_{i=1}^{n} X(x)(\phi^i) \frac{\partial}{\partial \phi^i}|_x.$$

On écrit aussi

$$X|U = \sum_{i=1}^{n} X(x)(\phi^i) \frac{\partial}{\partial \phi^i}.$$

Preuve. *Ce lemme découle de la définition même des vecteurs tangents $\partial/\partial\phi^i$.*

■

De la même façon, on a le lemme suivant, qui provient de la définition algébrique des vecteurs tangents :

Lemme 3 *L'ensemble $H(M)$ des champs de vecteurs sur M coincide avec l'ensemble $Der(M)$ des dérivations sur l'algèbre des fonctions $C^\infty(M)$.*

On se rapelle la construction algèbrique. A tout champ de vecteurs $X \in H(M)$, on associe une dérivation en posant $X(f)(x) = X(x).f = df.X(x)$.

1.9.1 Crochet de Lie

L'ensemble des dérivations, muni de l'adition de deux dérivations, et de la multiplication par les scalaires, forme un espace vectoriel. Une opération naturelle sur les dérivations (ou tout opérateur différentiel) est la composition : soient D_1 et D_2 deux d'erivations, on définit $D_2 \circ D_1$ en posant

$$D_2 \circ D_1(f) = D_2(D_1(f))$$

L'ensemble $Der(M)$ muni de la composition $\circ$ ne forme pas une algèbre. Pour le voir, il suffit de voir si $D_2 \circ D_1$ vérifie la relation de Leibniz. Or, on a :
$\star$ $D_2 \circ D_1(df) = D_2(D_1f.g + f.D_1g) = D_2 \circ D_1f.g + D_1fD_2g + D_2fD_1g + f.D_2 \circ D_1g$.
On voit donc, qu'il y a deux termes en trop : D_1fD_2g et D_2fD_1g.

On peut remédier á ce probléme en symétrisant la situation. Pour cela, on introduit une nouvelle loi $[,]$, appellé crochet de Lie, et qui a l'avantage de faire de $(Der(M), [,])$ une algèbre.

Définition 10 *On appelle crochet de Lie, et on note $[.,.]$, la loi interne sur $Der(M)$ définie par*

$$[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1.$$

Proposition 11 *$(Der(M), [,])$ est une algébre.*

Preuve. Il suffit de vérifier que le crochet de deux dérivations est une dérivation. Comme $D_1 \circ D_2(df) = D_1(D_2f.g + f.D_2g) = D_1 \circ D_2f.g + D_2fD_1g + D_1fD_2g + f.D_1 \circ D_2g$

on voit que la soustraction avec $(\star)$ fait disparaître les termes symétriques. On a ainsi

$$[D_1, D_2](fg) = [D_1, D_2](f).g + f.[D_1, D_2](g).$$

C'est donc bien une dérivation.

Autrement dit, le crochet de Lie de deux champs de vecteurs X et Y, est encore un champ de vecteurs, que l'on note $[X, Y]$.
L'expression locale du crochet de Lie de deux champs s'obtient facilement.
Soit (U, ϕ) une carte locale de la variété M et $X|U = \sum_{i=1}^{n} X^i \partial \diagup \partial\phi^i, Y|U = \sum_{i=1}^{n} Y^i \partial/\partial\phi^i$l'expression locale de deux champs de vecteurs X et Y sur M.
On a :

$$[X, Y]|U = \sum_{i,j=1}^{n} (X^i(\frac{\partial Y^i}{\partial\phi^i}) - Y^i(\frac{\partial X^J}{\partial\phi^i}))\frac{\partial}{\partial\phi_j}$$

On a donc bien une dérivation comme prévu (faire le calcul en exercice pour voir que les termes faisant intervenir les dérivées seconde $\partial^2 \diagup \partial\phi^i\phi^j$ s'annulent par commutation).

Le crochet de Lie de deux champs de vecteurs possède de nombreuses propri étés : ■

Proposition 12 *Le crochet de Lie* $[.,.] : H(M) \times H(M) \longrightarrow H(M)$ *a les prorpiétés suivantes :*

i) $[X, Y] = -[Y, X]$,

ii) *[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X, Y]] =0 (identité de Jacobi),*

iii) *[fX, Y]=[f[X, Y]]-(Yf)X,*

iv) *[X,fY]=f[X, Y]+(Xf)Y.*

Chapitre 2

Introduction aux groupes de Lie linéaires

2.1 Groupe de Lie

Définition 13 *Un group de Lie est un groupe G muni d'une structure de variete lisse tell que les applications*

$$\begin{array}{rcl} (g,h) & \rightarrow & gh \quad \quad de\ G*G \quad dans\ G \\ & & et \\ g & \rightarrow & g^{-1} \quad \quad de\ G \quad dans\ G \end{array}$$

soient lisse.
il revient aux même bien sûr de suppose que l'application

$$(g,h) \rightarrow gh^{-1} \ de\ G*G \quad dans\ G \quad est\ lisse$$

Définition 14

1. *Un morphisme entre deux groupes de Lie G et H est une application $f : G \rightarrow H$ qu'est à la foit un morphisme de groupe est une application lisse.*
2. *Les groupes de Lie G et H seront dits isomorphes si f est à la fois un isomorphisme de groupes et un difféomorphisme .*
3. *Un sous groupe de Lie de G est une sous varite qui est aussi un sous groupe.*

2.1.1 Groupe de Lie linéaire

On appelle groupe de Lie linéaire tout soue-groupe ferme d'un groupe linéaire $GL_n(\mathbb{R})$.

Comme $GL_n(\mathbb{C})$ est un sous groupe ferme de $GL_{2n}(\mathbb{R})$.

On peut remplacer $GL_n(\mathbb{R})$ par $GL_n(\mathbb{C})$, où même par $GL_n(V/K)$ de dimension finie dans la définition ci-desus.

On s'intéresse dans ce chapitre avec les groupes de Lie linéaires $GL(n, \mathbb{R})$.

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \,/\, \det A \neq 0\}$$

Exemple 3 *Parmi ces groupes c'est le groupe orthogonale $O(n)$:*

Le groupe $O(n)$ est donc une sous variété de dimension :

$$n^2 - n(n+1)/2 = n((n-1)/2)$$

$O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R})/AA^T = I\}$

Lemme 4 *le groupe $O(n)$est compact.*

Preuve.

Le groupe $O(n)$est l'image réciproqe de Id par l'application continue :

$M \to^t MM$;c'est donc un fermé de $M_n(\mathbb{R})$,D'autr part ,si l'on pose :

$||M|| = (tr\,({}^tMM))^{\frac{1}{2}}$, $||o|| = \sqrt{n}$ pour tout élément de O de $O(n)$,

et$O(n)$est borné dans $M_n(\mathbb{R})$ (ne pas commettre l'erreur de dire :‹‹dans$GL(n, \mathbb{R})$››,ce qui ne prouve qroupe

$O(n)$est donc un compact de $M_n(\mathbb{R})$ ■

Exemple 4 1. *Le groupe additif $\mathbb{R}^n$ est groupe de Lie.*

2. *Si G et H sont deux groupes de Lie $G * H$. muni de structure de groupe produit et de la structure de varite prouduit est groupe de Lie.*

3. *Le cercle S', va comme le groupe multiplcatif des complexes de module 1 est groupe de Lie.*
   Le groupe de Lie produit, $(S')^n$ s'appelle le tore de dimontion n (par analogie avec le cas $n = 2$). Nous revons que c' est -à-dire isomorphisme prés, le seule groupe de Lie compacte convexe abélien de dimension n.

4. *Le groupe $A(n, \mathbb{R})$ des automrphismes affines de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire des transformation*

   $$x \rightarrow ax + b \quad \text{où } GL(n, \mathbb{R}),$$

   est un groupe de Lie.
   En effet $A(n, \mathbb{R})$ s'identifie à $GL(n, \mathbb{R}) * \mathbb{R}^n$ muni de la loi de composition

   $$(A, b) * (A', b') = (AA', Ab' + b).$$

   En particulier

   $$(A, b)^{-1} = \left(A^{-1}, -A^{-1}b\right).$$

   Il est commode de voir $A(n, \mathbb{R})$ comme le sous-groupe de $GL(n+1, \mathbb{R})$ forme de matrice

   $$\begin{pmatrix} A & \dots & b \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

2.2 Le group $Sl(2, \mathbb{R})$

On va à present etudier le groupe de Lie $G = SL(2, \mathbb{R})$ des matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ à coefficient réels de détrminent 1 i.e.

$ad - bc = 1$.

On voit $SL(2, \mathbb{R})$ comme une hyprsurface de l'espace vectoriel $V = M(2, \mathbb{R})$ des matrice carre d'ordre 2. On détermine

l'algebre de Lie G en derivant le chemins lisse $t \rightarrow A(t)$ inclus dans $SL(2, \mathbb{R})$, et passant par d'en 0.or

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}(\det(A(t)) = Tr(A'(0)).$$

Définition 15 *Le groupe $SL(2,\mathbb{R})$ muni de la forme de killing s'appelle l'espace anti de sitter de dimention 3 .On le note Ads_3.*
Le groupe $SL(2,\mathbb{R})$ muni de la métrique de killing est une varite lorentzinne de dimension 3 à courbure sectionnelle constante egaleà -1.

Preuve.

On va commencer par prouver que $(SL(2,\mathbb{R}), \langle .,. \rangle)$ est à courbure sectionnelle constante sur les plans de type espace (ceux où la métrique de Killing induit un produit scalaire défini positif), et sur les plans lorentziens (ceux où la forme de Killing induit une forme bilinéaire de signature $(-,+)$).
Par homogénéité, il suffit de le montrer pour les plans de l'algébre de Lie G. Nous allons montrer ce résultat en prouvant que $Ad(G)$ agit transitivement sur les plans de type

espace de G, ainsi que sur les plans de type lorentzien.
Chaque plan de type espace (resp. de type lorentzien) est l'orthogonal pour la forme de Killing sur G d'un vecteur $X \in G$ tel que $\langle X, X\rangle = -1$ (resp $\langle X, X\rangle = 1$). Il suffit donc de montrer que l'action de $Ad(G)$ est transitive sur les ensembles $Q_{-1} = \{X \in G \ \ |\langle X, X\rangle| = -1 \}$ et $Q_{+1} = \{X \in G \ \ |\langle X, X\rangle| = +1 \}$.
Malheureusement, ce résultat n'est pas tout à fait exact : Q_{-1} a deux composantes connexes Q^+_{-1} et Q^-_{-1}, envoyEes l'une sur l'autre par l'application $X \to -X$.
Nous allons montrer que $Ad(G)$ agit transitivement sur Q^+_{-1} et sur Q_{+1}, ce qui suffit pour notre propos. ■

2.3 Algebres de Lie

Définition 16 *Une algèbre de Lie* $\eth$ *de dimension* n *sur* $\Bbbk$ *est un espace vectoriel de dimension* n *sur* $\Bbbk$ *muni d'une application bilinéaire*

$[,] : \eth \times \eth \to \eth$,*appelée crochet de Lie, qui posséde les propriétés :*

(i) $[X, X] = 0$,*pour tout* $X \in g$ (*antisymétrie*) ;

(ii) $[X, [Y, Z]]+[Y, [Z, X]]+[Z, [X, Y]] = 0$,*pour tous* X, Y *et* Z *dans* g (*identité de Jacobi*).

Exemple 5 *L'algèbre de Lie* $Aff(\mathbb{R})$ *des transformations affines de la droite réelle est l'espace vectoriel réel de dimension 2*

engendré par les matrices $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *muni du crochet* $[X, Y] = Y$

.

Exemple 6 *: Soient* R_x, R_y *et* R_z*"rotations infinitésimales" de* $\mathbb{R}^3$*autour des axes* x, y *et* z *respectivement,i.e*

$$R_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ R_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } R_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple 7 *En utilisant le crochet défini par le produit matriciel, on vérifie que*$[R_x\ ,\ R_y] = R_z$ *,*$[R_y\ ,\ R_z] = R_x$ *et*$[R_z\ ,\ R_x] = R_y$ *.*

Ainsi l'espace vectoriel réel de dimension 3 engendré par les trois matrices R_x R_y *et* R_z *est une algébre de Lie réelle*

de dimension 3,appelée l'algébre de Lie des "rotations infinitésimales" de l'espace, et notée $O(3)$ *.*

Exemple 8 *Les éléments* $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ *,* $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *engendrent l'algébre de Lie (de dimension 3)* $sl\ (2, \mathbb{R})$ *et satisfont les relations de commutation :*

$[H, X] = -2X$, $[H, Y] = 2Y$ *et* $[X, Y] = -H$.

2.4 Les actions de groupes

Soit G un groupe, d' élément neutre notée, et X un ensemble.

Une action (a gauche) du groupe G sur X est un morphisme de groupes

$$\varphi : G \longrightarrow GX$$

$$g \longrightarrow (x \longrightarrow g.x)$$

SI $x \in X$ .Le stabilisateur de x est $G_x = \{g \in G, g.x = x\}$.
C'est un sous-groupe de G.

L'orbite de x est $\theta_x = \{g.x,\ \ g \in G\}$. Les orbites sont les classes d' equivalence pour la relation d' equivalence définie par : $x \sim y$ si, et seulement s'il existe $g \in G$ tel que $y = g.x$. Cette relation est appelée conjugaison.

Soit E un ensemble quelconque et soit $S(E)$ l'ensemble des bijections de E sur E.

L'action (ou opération) d'un groupe G sur l'ensemble E est la donnée d'un homomorphisme ρ de G dans $S(E)$.

Si ρ est injectif, l'action est dite fidèle.Si $\rho(g) = id_E$ pour tout $g \in G$, l'opération est appelée action triviale.

2.4.1 L'action simple

$\diamondsuit$ L'action est dite *simple* si tous les stabilisateurs sont triviaux :$\forall x \in X$, $G_x = \{e\}$.

2.4.2 l'action libre

$\diamondsuit$ L'action est *libre* si pour tout couple $(x, y) \in X^2$, il existe au plus un élément $g \in G$ tel que $y = g.x$. Donc, si y est dans l'orbite de x, l' el ement g tel que $y = g.x$ est unique.

2.4.3 l'action fidéle

$\diamondsuit$ L'action est dite $fidéle$ si, de façon equivalente,

1- Le morphisme $\varphi : G \to Gx$ est injectif.

2- $\bigcap\limits_{x \in X} G_x = \{e\}$

2.4.4 l'action transitive

$\diamondsuit$ L'action est transitive s'il n'y a qu'une seule orbite. Autrement dit, pour tous x et y $\in X$, il esciste $g \in G$ tel que $y = g.x$

$\star$ Lorsque $X \neq \phi$ et que l'action ne fixe pas les elements de X point par point (i.e. il existe un element $x \in X$ dont l'orbite n'est pas reduite au singleton $\{x\}$), on a les implications :

SIMPLE $\Rightarrow$ FIDELE.

2.4.5 Attention

: la reciproque est fausse en general.

Exemple 9 *et contre-exemples : L'action de G sur lui-même par translation a gauche est simple et transitive.*
Puisque l'orbite de l'élément neutre est un singleton, l'action par conjugaison n'est pas transitive, et les orbites sont les classes de conjugaison.

2.5 forme de killing

soit $K(X,Y) : ð * ð \to \Bbbk \; (X,Y) \to tr(ad(X) \circ ad(Y))$ est

(i) bilinéaire,

(ii) symétrique,

(iii) $ad-$ invariante, i.e $k(ad(X)(Y), Z) + k(Y, ad(X)(Z)) = 0$ pour tous X, Y et Z dans ð.

Définition 17 *: L'application bilinéaire k est appelée la forme de Killing de g.*

Exemple 10 *Pour tous A et M dans $gl(n,\mathbb{R})$,nous avons $ad(A)^2(M) = A^2M - 2AMA - MA^2$ de sorte*
que $k(A,A) = 2nTr\left(A^2\right) - 2Tr(A)^2$.

Exemple 11 *En utilisant l'exemple précédent, nous trouvons que $k(A,A) = 2n\ TrA^2$ pour tout A dans*
l'algébre de Lie $sl(n,\mathbb{R})$.

Exemple 12 *Pour l'algébre de Lie $Aff(\mathbb{R})$,nous avons, dans les notations de l'exemple 5, $k(X,X) = 1, k(X,Y) = 0$ et $k(Y,Y) = 0$.*

2.6 Représentation adjointe :

L'application $c_g : G \to G$ définie par $x \longrightarrow gxg^{-1}$ est différentiable en e.

Sa différentielle est une application linéaire de $GL(ð)$,que l'on note $Ad(ð)$ .En fait, si$X \in (ð)$ et désigne le champ de vecteurs invariant à gauche associé.

Définition 18 *L'application* $Ad : G \to GL(\eth)$ *est un morphisme de groupes.*

Cette représentation de G*sur son algébre de Lie s'appelle la représentation adjointe.*

Comme $(R_{g^{-1}}) * [.,.] = [(R_{g^{-1}}) * (.) , (R_{g^{-1}}) * (.)]$ *,on remarque que pour tout* X *et* Y *dans,*

$[Ad\,(g)\,(X)\,, Ad\,(g)\,(Y)] = Ad\,([X, Y])$ *.L'application* $Ad\,(g)$ *est ce qu'on appelle un automorphisme d'algèbre de Lie.*

Lemme 5 *: Pour tout* X *et* Y *dans, on a*$\frac{d}{dt}\mid_{t=0} (Ad\,(\exp\,(tX))\,(Y)) = [X, Y]$ *.*

Preuve. : si l'on d´esigne par $\varnothing^t$ le flot local associé à $-X$, alors $\varnothing^t\,(g) = g.\exp\,(-tX)$.

Autrement dit, $\varnothing^t = R_{\exp}\,(-tX)$ .Par conséquent,

$[X, Y] = [Y, -X] = \frac{d}{dt}\mid_{t=0} \varnothing^t\ {}_*Y = \frac{d}{dt}\mid_{t=0} \left(R_{\exp(-tX)}\right)_* Y = \frac{d}{dt}\mid_{t=0} (Ad\,(\exp\,(tx))\,(Y))$

Définition 19 *:La différentielle en e de l'application Ad est une application linéaire de dans On la note ad*

Lemme 6 *On a* $ad(X)(Y) = [X, Y]$

Preuve. C'est une simple conséquence de la définition de *ad* et du lemme 5 ■

Chapitre 3

Espaces homogènes

1. : Soit G un qroup de Lei et $H \subset G$ un sous groupe fermé àlors l'espace quotient G/H des classes à gauche de G modulo H est un espace topologique séparé, et que les trauslations à gauche de G passent au quotient, en donnant une action à gauche transitive de G sur G/H.

2. : En géométrie, un espace homogéne est un espace sur lequel un groupe agit de façon transitive, le groupe représente des symétries préservant la géometrie de l'espace, et le caractére homogéne se manifeste par l'indiscernabilité des poits , et exprime une notion d'isotropie.
   Les éléments de l'espace forment une seule orbite selon G.

3. Nous verons encore dans les exemples suivantes une propriété élémentaire et importante des groupes de Lie ; l'éxistence d'une mesure invariante par translation cette mesure, appelée mesure de Haar qui existe pour tout groupe localement compact.

4. On conclut que : si G est un groupe de Lie et $H \subset G$ un sons groupe fermé alors l'espace G/H est une variété lisse de dimension $dimG - dimH$.

5. Il existe de nombreuses variétés différentiables qui sont des espaces homogénes, en particulier les sphéres : Le groupe $SO(n)$ agit transitivement sur la sphére S^{n-1}.

Le groupe d'isotropie d'un point de la sphére est $SO(n-1)$. Donc

$$SO(n)/SO(n-1) \simeq \mathbb{S}^{n-1}$$

On peut montrer que cela fait de $SO(n)$ un fibré principal de groupe de structure $SO(n-1)$ et de base S^{n-1}.
Le groupe $U(n)$ agit transitivement sur $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$et on a

$$U(n)/U(n-1) \simeq S^{2n-1}$$

Théorème 20 *Soit X une variété munie d'une action lisse et transitive d'un groupe de Lie G ayant un nombre fini de composantes connexes .*
Pour $a \in X$, le stabilisateur

$$G_a = \{g \in G, g.a = a\}$$

de a est un suos groupe de Lie, et l'application $F : g \longrightarrow g.a$ passe au quotient en un difféomorphisme de G/G_a sur X

Lemme 7 *Soit F l'application ci-dessus définie. Alors F est une submersion.*

Preuve. Du fait que les applications $x \longrightarrow g.x$ sont des difféomorphismes de X, le rang r de F est constant.
Posons $n = dimG, p = dimX$. D'aprés le théoréme du rang constant (voir l'exercice 10 du chapitre I), il existe pour tout $g \in G$ un ouvert U de G contenant g, un ouvert V de X contenant $g.a$, et des difféomorphismes $\phi, \psi deU$ et V sur des ouvert de $\mathbb{R}^n et \mathbb{R}^p$ respectivement tels que

$$(\psi \circ F \circ \phi^{-1})(u_1, ..., u_n) = (u_1, ..., u_r, 0, ..., 0).$$

Cette formule montre que $F(U)$ est une sous-variété de X de dimension $p - r$, donc une partie négligeable de X si $r < p$. Mais les ouverts U forment un recouvrement de G, dont on peut extraire un sous-recouvrement dénombrable
Donc $F(G)$ est une partie négligeable de X. Comme d'autre part $F(G) = X$ en raison de la transitivité, on aboutit à une contradiction $\blacksquare$

3.0.1 démonstration du théoréme (20)

- D'aprés le lemme ,$G_a = F^{-1}(a)$ est une sous-variété de dimension $n-p$ (notons que l'utilisation du théoréme du rang constant rend inutile l'utilisation du résultat général sur les sous-groupes fermés des groupes de Lie).
Si$h \in G_a$, on a

$$F(gh) = gh.a = g.(h.a) = g.a = F(g),$$

donc F passe au quotient , et donne une application lisse f de G/G_a dans X . Comme

$$T_gF = T_{p(g)}f \circ T_gp,$$

on voit que f est une submersion, donc un difféomorphisme local pour des raisons de dimension, et enfin du difféomorohisme, puisque c'est une bijection.

■

3.1 Mesure de Haar

Soit E un espace où opére un groupe de transformations G ; on dira qu'une mesure mA, définie sur une tribu de parties A de E, est invariante par G, si, quel que soit A mesurable et $s \in G$, le transformé sA de A par s est mesurable et si l'on a $m(sA) = mA$.
L'intégrale est alors aussi invariante ;si on la note $\int f(P)dP, P$ désignant un point générique de E, et si sP est le transformé de P par $sf(sP)$ sera mesurable en même temps que $f(P)$, et l'on aura, si $f(P)$ est intégrable (ou bien mesurable et $\geq$0) :

$$\int f(P)dP = \int f(sP)dP$$

Une différentielle étant pour nous, dans ce fascicule, un symbole de mesure, nous exprimerons symboliquement l'égalité ci-dessus, c'est-à-dire l'invariance de la mesure, par

$$d(sP) = dP.$$

Nous n'aurons à nous occuper dans ce fascicule que d'espaces homogénes. Si en particulier m est une mesure dans l'espace d'un groupe G, elle sera dite invariante(ou, plus précisément, invariante à gauche) si l'on a l'une des égalités équivalentes $mA = m(sA)$,

$$\int f(x)dx = \int f(sx)dx, d(sx) = dx.$$

Théorème 21 *(Weil) · Il exist sur G une mesure de Radon (positive, non nulle) invariante par translations à gauche. Une telle mesure est appelée mesure de Haar invariante à gauche sur G. De plus toutes les mesures de Haar invariantes à gauche sur G sont proportionnelles.*
· Convention : Si G est compact, il y a un choix canonique de mesure de Haar sur G, à savoir la mesure de Haar invariante à gauche qui est une mesure de probabilité sur G (i.e. pour laquelle la mesure de G est égale à 1). En général, on choisit une mesure de Haar invariante à gauche sur G, qu'on appelle (abusivement) la mesure de Haar de G et qu'on note G ou plus simplement λ *. Autres notations :* $d\lambda(x) = d_l x = dx$*.*
· Idem pour les mesures de Haar invariantes à droite sur G.

Exemple 13 •$G = \mathbb{R}$ *(ou plus généralement* $\mathbb{R}^n$*) : La mesure de Lebesgue est une mesure de Haar (à gauche et à droite).*
•$G = \mathbb{Z}$ *: La mesure de comptage est une mesure de Haar (á gauche et á droite).*
•$G = \mathbb{S}^1$ *: La fonctionnelle de Haar (à gauche et à droite) normalisée est donnée par*

$$I(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta f(exp^{i\theta})$$

•$G = \mathbb{R}^*$ *: Une fonctionnelle de Haar (à gauche et à droite) est donnée par*

$$I(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\mid x \mid} f(x)$$

•$G = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}\}$.
En d'autres termes,G est le groupe des transformations affines $x \longmapsto ax + b$ *de*$\mathbb{R}$.
∘ *Fonctionnelle de Haar à gauche :*

$$I(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{da}{a^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dbf(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}).$$

∘ *Fonctionnelle de Haar à droite :*

$$I(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{da}{|a|} \int_{-\infty}^{+\infty} dbf(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$$

$\bullet G = GL(n, \mathbb{R})$:*Une fonctionnelle de Haar,à gauche et à droite, est donnée par*

$$I(f) = \int_{M(n,\mathbb{R})} \frac{dX}{|detX|^n} f(X).$$

$\bullet G = GL(n, C)$: *Une fonctionnelle de Haar, à gauche et à droite, est donnée par*

$$I(f) \int_{M(n,\mathbb{C})} \frac{dX}{|detX|^{2n}} f(X).$$

3.2 formes invariantes à gauche

Plaçons nous maintenant dans le cas où g est l'algébre de Lie d'un groupe G.
Alors, de la même façon que g est l'espace vectoriel des champs de vecteurs invariants à gauche,g^* est l'espace vectoriel des 1-formes différentielles invariantes à gauche sur G.
En effet, si E_1 est une base de g, considérée comme l'algébre de Lie des champs de vecteurs invariants à gauche, alors tout vecteur $Y_{|h} \in T_h G$ se décompose sur cette base au dessus de h en : $Y_{|h} = Y^i_{|h} E_{ih}$, où $Y^i_{|h} \in \mathbb{R}$.
Tout $\alpha \in g^*$ définit alors une 1-forme différentielle sur G par la relation

$$\alpha_{|h}(Y_{|h}) = Y^i_{|h} \alpha_{|h}(E_{i|h}) = Y^i_{|h} \langle \alpha, E_i \rangle$$

où nous utilisons le crochet de dualité entre g et g^*.
Par linéarité de $T_h L_g$, nous avons $T_h L_g Y_{|h} = Y^i_{|h} T_h L_g E_{i|h}$, donc

$$(L^*_g \alpha_{|gh})(Y_{|h}) = Y^i_{|h} \alpha_{|gh}(T_H L_g E_{i|h})$$

Pour montrer l'invariance à gauche de cette 1-forme différentielle, il suffit donc de prouver que pour tout $X \in g$

$$\alpha_{|gh}(T_h L_g X_{|h}) = \alpha_{|h}(X_{|h})$$

Or, la dualité entre g et g^* se fait sur $\mathbb{R}$, c'est à dire que h,Xi est un réel et non un élément de $F(G)$. Donc, pour tout $h \in G, \alpha_{|h}(X_{|h})$ est indépendant de h.
Ainsi

$$\alpha_{|h}(X_{|h}) = \alpha_{|gh}(X_{|gh}) = \alpha_{|gh}(T_h L_g X_{|h})$$

puisque X est invariant à gauche. Ceci finit de prouver que

$$\alpha_{|h} = L^*_g \alpha_{|gh}$$

ou encore

$$\alpha = L_g^* \alpha$$

Chapitre 4

mesure et intégration sur $S^1 \times \mathbb{R}$ et $SL_2(\mathbb{R})\backslash SO(2)$

Proposition 22 *supposons que G opere transitivement sur X et soit H le stabilisater d'un point $x_0 \in X$*

1. *l'application :*
$$\varphi : G/H \longrightarrow X.$$
$$\xi H \longmapsto \xi x$$
est une bijection qui commute avec l'action de G, c a' d :
$$\varphi(g\xi H) = g\varphi(\xi H)$$

2. *si $x_1 \in X$,soit $H_1 = a \in G, ax_1 = x_1$ alors $H_1 = gHg^{-1}$, ou g est un element de G tel gue $gx_0 = x_0$*

3. *un element ξ $fixe$ tout point de X si seulement si : $\xi \in \bigcap\limits_{g\in G} gHg^{-1}$*

Preuve.

1.

(a) φ est une injective si :
$$\varphi(gH) = \varphi(g'H) \Longrightarrow gH = g'H$$

$$\varphi(gH) = \varphi(g'H)$$
$$gx = g'x$$
$$g^{-1}gx = g^{-1}g'x$$
$$g^{-1}g'x = x$$

donc $g^{-1}g' \in H \Longrightarrow gH = g'H$

Donc φ est injective

(b) φ est surjective.

Soit $z \in O_x,\ z = gx,\ g \in G$

$\varphi(gh) = gx = z$

Donc G est transitive sur X : $O_x = X$

$G/H \simeq X$

2. Si $x' = gx \Longrightarrow g^{-1}x' = x$

Alor :

$$G_x = g\ G_{x'}g^{-1}$$
$$H = g\ H'g^{-1}$$

$H = g^{-1}H'g = \{g^{-1}h'g,\ h' \in H'\}$

Soit $h \in H,\ hx = x$

$$ghx = gx = x'$$
$$ghg^{-1}x' = x'$$
$$\Downarrow$$
$$ghg^{-1} \in H'$$
$$ghg^{-1} = h'$$

Donc $h = g^{-1}h'g \in g^{-1}H'g$. donc $H \subseteq g^{-1}Hg$.

Soit $y \in g^{-1}H'g$.

∃h'∈ H' : $y = g^{-1}h'g$

$$yx = g^{-1}h'gx$$

$$yx = g^{-1}h'x'$$

$$= g^{-1}x'$$

$$yx = x \Longrightarrow y \in H$$

Donc $g^{-1}H'g \subseteq H$

$$Doncg^{-1}H'g = H$$

3. nous avon $g^{-1}x \in X$
   $Donc\ \xi g^{-1}x = g^{-1}x$

$$g\xi g^{-1}x = x \Longrightarrow g\xi g^{-1} \in H$$

$g\xi g^{-1} = h$ tel que $h \in H$
ξ =g^{-1} $h\ g \in g^{-1}\ H\ g.$
Inversement , suposone que $\xi \in \bigcap_{g\in G} g^{-1}Hg.$
soit $a \in X$.
or l'action de G sur X est transitive $a \in O_x$, c a' d :$a = gx$
pour on a g∈G.
$\xi a = \xi gx$

$$\xi a = \xi gx$$

on

$$\xi = ghg^{-1}$$

$$\xi a = ghg^{-1}gx$$

$$\xi a = ghx = gx = a$$

■

4.1 Intégration sur l'espace homogéne $SL_2(\mathbb{R})/SO(2)$

Nous essayons d'ullustrer l'ideé d'intégrals sur les espaces homogéne par cet exemple que nous voyons inportant.

Soit $G = SL_2(\mathbb{R}), K = SO(2)$ la mesure invariante sur G/K est comme le suivant :

$$P = \{z \in ; Imz > 0\}$$

qui s'appelle le demi plan de poincaré.

G agit sur P avec la transformation linéaire

$$(g, z) \longmapsto g.z = \frac{az + b}{cz + d}$$

$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G, z \in P$

le stabilisateur au point i c'est k

$G_i = \{g \in G/g.i = i\}$

$\frac{az+b}{cz+d} = i$ on $z = i \Longrightarrow \dfrac{ai + b}{ci + d} = i$

Donc :

$$G_i = k = SO(2)$$

l'application :

$$G/k \longrightarrow P$$

$$g.k \longrightarrow gi$$

a identifier G/k et$P$

Le mesure ; $d\mu(x, y) = y^{-2}dxdy$ sur P est G invariant En effet, soit $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$ on note M_g la tronsformation associé.

$Im(M_g z) =| cz + d |^{-2} Im(z)$

D'autre part

$\int_P f(g^{-1}z)\dfrac{dxdy}{y^2} = \int_P f(z)\dfrac{1}{|cz + d|^4}.\dfrac{|cz + d|^4}{y^2}dxdy = \int_P f(z)\dfrac{dxdy}{y^2}$

Le mesure de Haar à gauche dg sur $G = SL_2(\mathbb{R})$ est donné par

$\int_G f(g)dg = \int_P \dfrac{dxdy}{y^2}. \int_{SO(2)} f(gk)dk$

oú $gk \equiv gi = x + iy$ et dk est le mesure de lebegue normalizé sur $SO(2) = S^1$.

■

4.2 Intégration sur l'ensemble des droites

Proposition 23 *:Formul de Cauchy-Crofton*

a) *On représente l'ensemble des droites orientées du plan euclidien par $s^1 \times R$,en associant à chaque droite orientée son "équation d'Euler"*

$$xcos\theta + ysin\theta - p = 0$$

Montrer que pour l'action naturalle du groupe des isométries affines directes du plan,la forme différentielle $dp \wedge d\theta$ est invariante .

b) *Soit C une courbe fermée du plan, de lonqueure L,paramétrée par son abscisse curviligne s. Soit F l'application de $[0, L] \times [0, \pi]$ dans $S^1 \times R$ qui à (s, φ) associe la droite qui passe par le point d'abcisse curviligne s et fait l'angle φ avec la tangente (orientée) á la courbe en ce point.*
Montrer que

$$F^*(dp \wedge d\theta) = sin\varphi ds \wedge d\varphi.$$

c) *En déduire que pour presque toute droit D, l'ensemble $D \cap C$ est fini, et que*

$$\int_{s^1 \times R} card(D \cap C) dp \wedge d\theta = 2L$$

Il existe une foul de formules de ce type

Preuve.

a) puisque on a : $M(x, y), M_0(pcos\theta, psin\theta)$ où p est la distance entre la droite (D) et l'origine O on a :
$\overrightarrow{M_0M}\binom{x-pcos\theta}{y-psin\theta} \perp \overrightarrow{OM_0}\binom{pcos\theta}{psin\theta} \Longrightarrow pcos\theta(x - pcos\theta) + psin\theta(y - psin\theta) = 0.$
D'ou : $xcos\theta + ysin\theta - p = 0.$

Il suffit vérifier l'invariance pour les rotations autour de l'origine et les translations. Notant (p, θ) une droit orentée, une telle rotation d'angle α transforme (p, θ) en $(p, \theta + \alpha)$. La translation de vecteur (a, b) transforme (p, θ) en $(p + acos\theta + bsin\theta, \theta)$.

On introduit l'angle α de la tangente orientée à la courbe au point d'abcisse curviligne c avec l'axe Ox. Ainsi,$(x'(s), y'(s)) = (cos\alpha, sin\alpha)$, et l'on voit que F est lisse puisque

$$F(s,\varphi) = (x(s)sin(\alpha+\varphi) - y(s)cos(\alpha+\varphi), \varphi+\alpha-\pi/2)$$

.

Notons que p est aussi égal à $x(s)cos\theta + y(s)sin\theta$, donc (avec quelques abus de notations) $p = x(s)cos\theta + y(s)sin\theta \Longrightarrow dp = \dfrac{\partial p}{\partial s}ds + \dfrac{\partial p}{\partial \theta}d\theta$

$\dfrac{\partial p}{\partial s} = x'(s)cos\theta + y'(s)sin\theta$
$\dfrac{\partial p}{\partial \theta} = -x(s)sin\theta + y(s)cos\theta$

$$\begin{aligned} dp &= (x'(s)cos\theta + y'(s)sin\theta)ds + \frac{\partial p}{\partial \theta}d\theta \\ &= cos(\alpha-\theta)ds + \frac{\partial p}{\partial \theta}d\theta = sin\varphi ds + \frac{\partial p}{\partial \theta}d\theta. \end{aligned}$$

puisque on a : $\alpha - \theta + \varphi = \pi/2$
Mais $F^*d\theta = d\varphi$, d'oú

$$F^*(dp \wedge d\theta) = sin\varphi ds \wedge F^*d\theta = sin\varphi ds \wedge d\varphi.$$

Cette formule montre que (s,φ) est un point critique si et seulement si $\varphi = k\pi$:les valeurs critiques sont les droites tangentes à la courbe.
Elles forment un ensemble de mesure nulle. Il n'est pas nécessaire pour le voir d'invoquer le théoréme de Sard, puisque l'ensemble des points critiques est déjà de mesure nulle. Maintenant, si une droite D n'est tangente à C en aucun point, $D \cap C$ est fini : autrement, s'agissant d'un ensemble compact, il aurait un point d'accumulation, qui serait nécessairement un point de tangence de D avec C .
Comme nous ne ferons pas usage du théoréme de StoKes, nous pouvons considérer $dp \wedge d\theta$ et $sin\varphi ds \wedge d\varphi$ comme des mesures positives ($\varphi \in [0,\pi]$!).
Soient M_k l'ensemble des droites telles que $card(D \cap C) = K$, et M'_k son image réciproque par F.
Alors :

$$\int_{M'_k} sin\varphi ds \wedge d\varphi = K \int_{M_k} dp \wedge d\theta,$$

d'oú

$$\sum_k \int_{M'_k} sin\varphi ds \wedge d\varphi = \int_M card(D \cap C) dp \wedge d\theta.$$

Le membre de gauche vaut

$$\int_{[0,L]\times[0,\pi]} sin\varphi ds \wedge d\varphi = L \int_0^\pi sin\varphi d\varphi = 2L.$$

■

Conclusion

Sur les groupes de Lie localement compacts, il existe toujours une telle mesure, (c'est le théoréme de Haar).
Pour les espaces homogènes G/H, il y a une condition à vérifier sur les fonctions modulaires des groupes G et H. Pour certaines familles importantes de groupes, cette condition est automatiquement vérifiée. .

Bibliographie

[1] Integral geometry and geometrie probability luis A.SantalÒ

[2] Introduction aux variétés Différentielles Jacques lafontaine

[3] Cours sur les algébres de Lie Salah Mehdi

[4] Géométrie différentielle, groupes et algébres de Lie, fibrés et connexions

[5] Groupes et géométries Frédéric Paulin

[6] Quelques notes sur les espaces homogènes par CHARLES FRANCES

[7] Analysis on Homogeneous Spaces Class Notes Spring 1994 Royal Institute of Technology Stockholm Ralph Howard

[8] Géométrie différentielle élémentaire Frédéric Paulin

[9] Géométrie affine. Préparation la l'Agrégation, ENS de Cachan. Claire Renard. Novembre 2012

[10] PROMENADE VERS LA GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE Jacky Cresson