



UNIVERSITE KASDI MERBAH  
OUARGLA  
Faculté des Mathématiques et des Sciences  
de la Matière

N° d'ordre :  
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation et Analyse Numérique

Par : Noura Khellafi

Thème

**Étude d'un problème gouverné par L'équation de Navier-Stokes.**

Soutenu publiquement le : 11/06/2014

Devant le jury composé de :

Amara Abdalkader	M.C. Université KASDI Merbah- Ouargla	Président
Dobbi Abdalmadjid	M.C. Université KASDI Merbah- Ouargla	Examineur
Meflah Mabrouk	M.C. Université KASDI Merbah- Ouargla	Rapporteur

# Dédicaces

Je dédie ce travail : à mes parents pour leur encouragement qu'ils trouvent le témoignage de ma profonde affection et gratitude.....

# Remerciement

Avant toute considération, je remercie le Grand Dieu le tout puissant qui, m'a aidé pour achever ce travail.

Je tiens tout a remercier premier lieu mon encadreur M.C Meflah Mabrouk de m'avoir proposé un des plus importants thèmes et pour sa continuité à me soutenir et à m'encourager. Je voudrai aussi le remercier pour sa gentillesse, sa disponibilité et du temps consacré à mon travail.

Comme je tiens à remercier vivement, M.C. Amara Abdalkader, pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de ce mémoire.

Mes remerciements vont également à M.C Dobb Abdalmadjid, d'avoir accepter de juger mon travail.

Je remercie également les membres du département de Mathématique et Informatique de m'avoir permis de travailler dans de bonnes conditions pendant la réalisation de mon travail.

Merci également a tous les enseignants qui m'ont aidé pendant mon cursus, sans oublier leurs conseils précieux.

Je remercie aussi toute personne de prés ou de loin a contribué à la finalisation de ce travail.

# Table des matières

Dédication	i
Remerciement	ii
Notations	1
Introduction	4
<b>1 Rappels d'analyse fonctionnelle</b>	<b>5</b>
1.1 Espace de Hilbert . . . . .	5
1.1.1 Théorème de Lax- Milgram . . . . .	5
1.2 Les espace $L^p(\Omega)$ . . . . .	7
1.2.1 L'espace $L^2(\Omega)$ . . . . .	7
1.2.2 L'espace $L^p(\Omega)$ . . . . .	7
1.3 Les espaces de sobolev $H^1(\Omega)$ , $H_0^1(\Omega)$ . . . . .	8
1.3.1 L'espace $H^1(\Omega)$ . . . . .	8
1.3.2 L'espace $H_0^1(\Omega)$ . . . . .	9
1.3.3 Théorème de trace . . . . .	9
1.3.4 Théorème de poincarée . . . . .	9
1.4 Condition " inf- sup" continue . . . . .	10
1.4.1 Théorème des Condition " inf- sup" continue . . . . .	10
<b>2 L'équation de Stokes</b>	<b>14</b>
2.1 Adimensionalisation . . . . .	14

2.2	Réductions des équations . . . . .	15
2.3	L'équation de Stokes . . . . .	16
2.3.1	Formulation mixte du problème de stokes . . . . .	16
2.3.2	Existence et unicité de la solution de l'équation de Stokes . . . . .	17
2.3.3	Le problème Approchée . . . . .	19
2.4	Algorithme de résolution du problème de Stokes . . . . .	19
2.4.1	La méthode du gradient conjugué . . . . .	20
2.4.2	La méthode GMRES . . . . .	21
2.4.3	La méthode d'Uzawa . . . . .	22
2.5	Le logiciel FreeFem ++ . . . . .	22
2.5.1	Pression à moyenne nulle . . . . .	23
2.6	Résolution numérique du problème de Stokes . . . . .	25
2.6.1	K-test avec solution exacte . . . . .	25
2.7	Annexe : code FreeFem ++ des tests . . . . .	28
2.7.1	K-test sur Solution Exact . . . . .	28
<b>3</b>	<b>L'équation de Navier-Stokes</b>	<b>31</b>
3.1	Formulation du problème de Navier-Stokes . . . . .	31
3.2	Formulation mixte du problème de Navier-Stokes . . . . .	31
3.3	Quelques lemmes pour la démonstration de l'existence et l'unicité de 2D . . . . .	33
3.4	Propriétés de la solution . . . . .	34
3.4.1	solution faible . . . . .	35
3.5	Existence et unicité de la solution de l'équation de Navier-Stokes de dimension deux . . . . .	35

# Notations

$u = u(x, t)$  la vitesse du fluide au point  $X = (x_1, \dots, x_N) \in \Omega$  et à l'instant  $t$ .

$p = p(x, t)$  la pression du fluide au point  $X = (x_1, \dots, x_N) \in \Omega$  et à l'instant  $t$ .

$f$  représente la forces extérieures du fluide.

$\mu$  représente la viscosité dynamique du fluide.

$Re$  le nombre de Reynolds.

$\tilde{u}(\tilde{X}, \tilde{t})$  les nouvelles vitesse.

$\tilde{p}(\tilde{X}, \tilde{t})$  les nouvelles pression.

$$(u \cdot \nabla)u = \sum_{i=1}^N u_i \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_N} \right).$$

$$\Delta u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

$\nabla u : \nabla v$  le problème mixte

$\bar{\Omega}$  l'adhérence de  $\Omega$ .

$\partial\Omega$  la frontière de  $\Omega$  supposée régulière.

$X'$  l'espace dual de  $X$ .

$$u' = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

$2D$  représente la diminution deux.

$NS$  représente le équation de Navier-Stokes.

$$\nu = \{v \in C_c^\infty(\Omega)^n, \operatorname{div}(v) = 0\}.$$

$H^{-1}(\Omega)$   $[H_0^1(\Omega)]'$   $V = \{v \in H_0^1(\Omega), \operatorname{div}(v) = 0\}$  la fermeture de  $\nu$  dans  $H_0^1(\Omega)$ .

$H$  la fermeture de  $V$  dans  $L^2(\Omega)$ .

$D(\Omega)$  l'espace des fonctions réele indéfiniment différentiables et à support compact continu dans  $\bar{\Omega}$ .

$D'(\Omega)$  l'espace de distributions sur  $\Omega$ .

$\langle \cdot, \cdot \rangle_{X' \times X}$  le produit entre  $X'$  et  $X$ .

$\mathcal{L}(V; V)$  l'espace des applications linéaires et continues de  $V$  dans  $V$ .

Si de plus  $[0, T]$  un intervalle de temps,  $K \in \mathbb{N}$  et  $1 \leq p \leq +\infty$ , on note par.

$C([0, T]; H)$  l'espace des fonctions continues de  $[0, T]$  dans  $H$ .

$\|\cdot\|_{0,H}$  la norme de  $C^0([0, T]; H)$ .

$\|\cdot\|_{1,H}$  la norme de  $C^1([0, T]; H)$ .

$L^2(0, T; H)$  l'espace des fonctions  $f$  mesurables de  $[0, T]$  dans  $H$ .

$L^2(0, T; V)$  l'espace des fonctions  $f$  mesurables de  $[0, T]$  dans  $V$ .

$L^2(0, T; V')$  l'espace des fonctions  $f$  mesurables de  $[0, T]$  dans  $V'$ .

# Introduction

L'étude du comportement des fluides (liquides ou gaz) remonte au moins à Archimède et à la Grèce Antique, mais c'est à partir du *XVI<sup>e</sup>* siècle que la mathématisation de la Physique permet une étude systématique de la mécanique des fluides. C'est bien sûr à I. Newton que l'on doit l'essor des mathématiques en Physique, avec notamment les lois fondamentales de la dynamique qu'il introduit en 1687. De nombreux phénomènes physiques peuvent ainsi être mis en équations pour la mécanique des fluides il faut citer par exemple D. Bernoulli, qui analyse la conservation de l'énergie des fluides non visqueux dès 1738. Ce sont J. d'Alembert et L. Euler qui ont pu établir les équations fondamentales de la mécanique des fluides, appelées aujourd'hui équations d'Euler. Ces équations voient le jour suite à un Prix de Mathématiques proposé en 1748 par l'Académie des sciences de Berlin, il s'agit de « déterminer la théorie de la résistance que souffrent les corps solides dans leur mouvement, en passant par un fluide, tant par rapport à la figure et aux divers degrés de vitesse des corps qu'à la densité et aux divers degrés de compression du fluide ». En d'autres termes, il s'agit d'établir une théorie permettant d'interpréter, voir d'anticiper, le mouvement des fluides (ici en présence d'un obstacle solide). J. d'Alembert soumet en 1749 qui propose une nouvelle vision de l'hydrodynamique. L'académie lui refuse le prix, qui est attribué à un protégé de L. Euler, J. Adami, dont le manuscrit a aujourd'hui disparu. On doit néanmoins à d'Alembert, dans ce manuscrit, d'avoir introduit dans l'étude de la dynamique des fluides les notions fondamentales dans les dérivées partielles et le champ de vitesses. Son étude est cependant incomplète, du fait qu'il ne parvient pas à dégager correctement la notion dépression, fondamentale pour comprendre le caractère incompressible des fluides. En 1755, L. Euler publie un traité dans lequel apparaît pour la première fois le système complet d'équations aux dérivées partielles



décrivant les fluides parfaits incompressibles. Il a incontestablement lu le manuscrit de d'Alembert et s'en est sans nul doute inspiré. Néanmoins son travail est complètement abouti, contrairement à celui de d'Alembert, et en outre il parvient à dégager la notion de gradient de pression. Si nous notons par  $u$  le champ de vitesse du fluide, qui dépend du temps  $t$  et de la position  $x$  (la formulation de ces équations est donc eulérienne et non lagrangienne, au sens où l'on ne décrit pas la trajectoire de chacune des particules du fluide, mais plutôt le champ de vitesses en chaque point et à chaque instant) et si  $p$  désigne sa pression, les équations d'Euler s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \nabla u = -\nabla p + f, \\ \operatorname{div}(u) = 0 \end{cases}$$

La première équation représente la conservation de la quantité de mouvement, alors que la seconde correspond à la conservation de la masse (le fluide est incompressible). Dès 1752 cependant, d'Alembert aperçoit qu'un corps plongé dans un liquide satisfaisant aux principes décrits par ces équations peut se déplacer sans se voir opposer aucune résistance, ce qui est manifestement contraire à l'intuition et à l'expérience physique. C'est ce qu'on appelle le « paradoxe de d'Alembert », qu'il formule ainsi (traduction libre), «Il me semble que la théorie, développée avec toute la rigueur possible, donne, au moins dans plusieurs cas, une résistance nulle, paradoxe singulier». Pour comprendre pourquoi un solide plonge dans un liquide va subir en général une force de résistance, tendant à le freiner, il faut en fait prendre en compte des phénomènes de frottement au niveau moléculaire dans le fluide : lors de son évolution, un fluide va en effet avoir tendance à dissiper de l'énergie, sous forme de chaleur, et ce simplement par le frottement d'une couche de fluide sur l'autre. Inclure un tel phénomène dans les équations d'Euler semble difficile puisque les équations d'Euler formulent l'écoulement de la vitesse macroscopique du fluide, alors que cette dissipation d'énergie a lieu à un niveau microscopique. On doit à C.Navier l'idée, en 1820, d'introduire un terme supplémentaire à l'équation d'Euler, censé représenter cette perte d'énergie dans le fluide. En simplifiant à outrance sa démarche, on peut considérer qu'il a cherché à incorporer aux équations d'Euler précisément une équation dite de la chaleur. Cette équation s'écrit ainsi , si  $T$  est la température d'un solide, son évolution

au cours du temps obéit à :

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \Delta T = 0.$$

Ainsi C. Navier, suivi par G. Stokes en 1845 propose le modèle suivant pour décrire l'évolution d'un fluide visqueux (ce terme rendant compte précisément de cette dissipation d'énergie sous forme de chaleur) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} - \mu \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p = f, \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ \operatorname{div} u = 0 \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u|_{t=0} = u_0 \quad \text{dans } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Les principales difficultés pour étudier et résoudre les équations de Navier-Stokes, sont d'une part le couplage vitesse/pression et d'autre part la présence du terme de convection non linéaire  $(u \cdot \nabla)u$ .

Dans le premier chapitre, nous présentons d'abord quelques définitions et théories sur l'espace de Hilbert et les espaces Sobolev également traitée avec les théories et les propriétés donnent importante.

Dans le second chapitre on s'intéresse à l'étude d'un problème de Stokes pour les fluides, d'abord sous une approche théorique et ensuite de manière plus pratique par la résolution de quelques classiques en dimension deux avec différentes méthodes sur le logiciel FreeFem++.

En fin, le dernier chapitre du mémoire est consacré à l'étude d'un problème de Navier-Stokes pour l'existence et l'unicité en dimension deux.

# Chapitre 1

## Rappels d'analyse fonctionnelle

Dans ce chapitre nous rappelons quelques définitions et résultats utiles dans l'étude de ce problème de l'équation de Navier-Stokes.

### 1.1 Espace de Hilbert

**Définition 1** [8] *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel  $V$  muni d'un produit scalaire, qui est complet; (i.e tout suite de Cauchy est convergente) pour la norme induite par le produit scalaire.*

#### 1.1.1 Théorème de Lax- Milgram

On appelle  $x_k$  la projection orthogonale sur  $K$  de  $x$ . Nous décrivons une théorie abstraite pour obtenir l'existence et l'unicité de la solution variationnelle dans un espace de Hilbert.

On note  $V$  un espace de Hilbert réel de produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et de norme  $\|\cdot\|$ .

Nous considérons une formulation variationnelle de la forme :

$$a(u, v) = L(v) \quad \text{telle que} \quad u \in H$$

Les hypothèses sur  $a$  et  $L$  sont

**Définition 2**  $L(\cdot)$  est une forme linéaire continue sur  $H$ , c'est-à-dire que  $L(v)$  est linéaire de  $H$  dans  $\mathbb{R}$  et il existe  $c > 0$  telle que :

$$|L(v)| \leq c\|v\|,$$

pour tout  $v \in H$ .

**Définition 3**  $a(.,.)$  est forme bilinéaire sur  $H$ , c'est-à-dire que

$$(u, v) \longrightarrow a(u, v)$$

est une forme bilinéaire de  $H$  dans  $\mathbb{R}$  pour tout  $u \in H$

et

$$(u, v) \longrightarrow a(u, v)$$

est un forme bilinéaire de  $H$  dans  $\mathbb{R}$  pour tout  $v \in H$ .

**Définition 4**  $a(.,.)$  est continue, c'est-à-dire qu'il existe  $M > 0$  telle que :

$$|a(u, v)| \leq M\|u\|\|v\|.$$

Pour tout  $u, v \in H$ .

**Définition 5**  $a(.,.)$  est coercive c'est -à-dire qu'il existe  $\alpha > 0$  telle que :

$$a(v, v) \geq \alpha\|v\|^2.$$

Pour tout  $v \in H$ .

**Théorème 1.1.1 (Lax-Milgram)** Soit  $H$  un espace de Hilbert réel,  $L(.)$  un forme linéaire continue sur  $H$ ,  $a(.,.)$  est forme continue bilinéaire coercive sur  $H$ . Alors la formulation variationnelle admet une unique solution. De plus cette solution dépend continûment de la forme linéaire  $L$ .

## 1.2 Les espace $L^p(\Omega)$

### 1.2.1 L'espace $L^2(\Omega)$

**Définition 6** [1] Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $n \in \mathbb{N}^2$ , alors l'espace  $L^2(\Omega)$  est une espace Hilbert définie par :

$$L^2(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}/f \text{ mesurable } \int_{\Omega} |f|^2 d\Omega < +\infty\}.$$

On note :

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

**Proposition 1.2.1** [1] Si  $f \in L^2(\Omega)$  et  $g \in L^2(\Omega)$  alors  $f, g \in L^1(\Omega)$  car l'intégrale de Cauchy Schwarz est vérifie :

$$\int_{\Omega} |fg| \leq \left( \int_{\Omega} |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} |g|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.1)$$

On le note aussi :

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|g\|_{L^2(\Omega)}. \quad (1.2)$$

### 1.2.2 L'espace $L^p(\Omega)$

**Définition 7** [1] Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $1 \leq p \leq \infty$ , on définit l'espace  $L^p(\Omega)$  par :

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}/f \text{ mesurable et } \int_{\Omega} |f|^p d\Omega < +\infty\}.$$

On définit sur  $L^p(\Omega)$  la norme :

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

**Remarque 1.2.2** Si  $p = \infty$  donc

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} / f \text{ mesurable et } \sup |f| < +\infty\}. \quad (1.3)$$

On note :

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{c > 0, |f(x)| \leq c \text{ p.p. sur } \Omega\}. \quad (1.4)$$

$\|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)}$  est une norme.

**Théorème 1.2.3** [1] [Inégalité de Hölder] Soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $p, q \in [1, +\infty]$  telle que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , alors  $\forall f \in L^p(\Omega), \forall g \in L^q(\Omega)$ , alors  $f.g \in L^1(\Omega)$ , de plus :

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}. \quad (1.5)$$

*cas particularité*

si  $p = 1, q = \infty$ , on a

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \|g\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega} |f| dx. \quad (1.6)$$

## 1.3 Les espaces de sobolev $H^1(\Omega)$ , $H_0^1(\Omega)$

### 1.3.1 L'espace $H^1(\Omega)$

**Définition 8** [4] Soit  $\Omega$  un ouvert et borné de  $\mathbb{R}^n$ , l'espace de Sobolev  $H^1(\Omega)$  est défini par :

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : \forall i = 1, \dots, n, \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)\}.$$

Muni du produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle_{1,\Omega} = \int_{\Omega} (uv + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}) dx$$

et la norme :

$$\|u\|_{1,\Omega} = \left( \int_{\Omega} |u|^2 + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

**Remarque 1.3.1** [5] Si  $u_i$  est un champ scalaire dans l'espace  $H^1(\Omega)$ , alors par définition de la norme  $H^1(\Omega)$  :

$$\|\nabla u_i\|_{L^2(\Omega)} = \left( \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|u_i\|_{H^1(\Omega)}. \quad (1.7)$$

### 1.3.2 L'espace $H_0^1(\Omega)$

**Définition 9** [4] Soit  $D(\Omega)$  l'espace des fonctions de classe  $C^\infty$  à support compact dans  $\Omega$ . L'espace de sobolev  $H_0^1(\Omega)$  est défini comme l'adhérence de  $D(\Omega)$  dans  $H^1(\Omega)$  :

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) / \exists \phi_n \in D(\Omega) \text{ tq } : \phi_n \longrightarrow u \text{ dans } H^1(\Omega)\}.$$

C'est-à-dire

$$\overline{D(\Omega)} = H_0^1(\Omega).$$

### 1.3.3 Théorème de trace

**Théorème 1.3.2** [4] Soit  $\Omega$  un ouvert borné régulier, ou bien  $\Omega = \mathbb{R}_+^n$ , on définit l'application de trace  $\gamma_0$  comme suit

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \longrightarrow L^2(\partial\Omega) \cap C(\partial\Omega) \quad (1.8)$$

$$v \longrightarrow \gamma_0 = v|_{\partial\Omega}$$

cette application  $\gamma_0$  se prolonge par continuité en une application linéaire continue de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^2(\partial\Omega)$ , notée encore  $\gamma_0$ . En particulier, il existe une constant  $c > 0$  telle que, pour tout fonction  $v \in H^1(\Omega)$ , on a

$$\|\gamma_0\|_{0,\partial\Omega} \leq c\|v\|_{1,\Omega}.$$

### 1.3.4 Théorème de poincarée

**Théorème 1.3.3** [4] On suppose que  $\Omega$  un domaine ouvert et borné dans  $\mathbb{R}^n$ , alors il existe une constant  $c > 0$  telle que pour tout  $u \in H_0^1(\Omega)$ , on a

$$\int_{\Omega} |u(x)|^2 \leq c \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 \quad (1.9)$$

*c'est-à-dire*

$$\|u\|_{0,\Omega} \leq c_1 \|\nabla u\|_{0,\Omega}.$$

*Dans le cas où  $\Omega$  est un ouvert et borné dans  $\mathbb{R}^n$ , alors il existe une constante  $c > 0$  telle que :*

$$\|u\|_{0,\Omega} \leq c \|u'\|_{0,\Omega}.$$

**Corollaire 1.3.4** *Si  $\Omega$  est un ouvert dans  $\mathbb{R}^n$ , alors la semi-norme*

$$|u|_{1,\Omega} = \|\nabla u\|_{0,\Omega} \tag{1.10}$$

*devient une équivalente à la norme de  $\|u\|_{1,\Omega}$ , dans l'espace  $H_0^1(\Omega)$ .*

## 1.4 Condition "inf- sup" continue

Soit  $X$  et  $Y$  deux espace de Hilbert et deux formes bilinéaires

$$\begin{aligned} a &: X \times X \longrightarrow \mathbb{R} \\ b &: X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Les formes  $a$  et  $b$  sont supposées continues. Étant donné  $f \in X'$ . On cherche  $(u, p) \in X \times Y$  tels que

$$\begin{aligned} a(u, v) + b(v, p) &= \langle f, v \rangle_{X', X} \quad \forall v \in X \\ b(u, q) &= 0 \quad \forall q \in Y. \end{aligned} \tag{1.12}$$

### 1.4.1 Théorème des Condition "inf- sup" continue

**Théorème 1.4.1** [6] *On fait les hypothèses suivantes :*

(1) *La forme  $a$  est coercive sur  $X$  :*

*il existe  $\alpha > 0$  telle que*

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_X^2 \quad \forall v \in X. \tag{1.13}$$

(2) *La forme  $b$  satisfait la condition "inf-sup" :*

*il existe  $\beta > 0$  telle que*

$$\sup_{u \in X, v \neq 0} \frac{b(v, q)}{\|v\|_X} \geq \beta \|q\|_Y \quad \forall q \in Y. \tag{1.14}$$



Alors le problème (1.12) admet une unique solution  $(u, v) \in X \times Y$ .

**Remarque 1.4.2** La condition (2) du théorème précédent implique

$$\inf_{q \in Y, q \neq 0} \sup_{v \in X, v \neq 0} \frac{b(v, q)}{\|v\|_X \|q\|_Y} \geq \beta. \quad (1.15)$$

**Proposition 1.4.3** [6] Soit  $\Omega$  un ouvert régulier de  $\mathbb{R}^N$  et  $u, v : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^N$  des fonctions de classe  $C^2$ . Alors

$$-\int_{\Omega} \Delta(u.v) = \int_{\Omega} \nabla u : \nabla v - \int_{\Omega} ((\nabla u)n).v \quad (1.16)$$

où  $n = (n_1, \dots, n_N)$  est le vecteur normal unitaire à  $\partial\Omega$ .

**Proposition 1.4.4** [6] Soit  $\Omega$  un ouvert régulier de  $\mathbb{R}^N$  et  $p : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$  et  $v : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^N$  un champ vectoriel de classe  $C^2$ . Alors

$$\int_{\Omega} \nabla p.v = - \int_{\Omega} p.\operatorname{div} v + \int_{\partial\Omega} (pn).v. \quad (1.17)$$

Où  $n = (n_1, \dots, n_N)$  est le vecteur normal unitaire à  $\partial\Omega$ .

**Proposition 1.4.5** [5] Si  $\ker B^T = 0$ , alors la matrice  $C$  est inversible. Telle que

$$C = \begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

**Preuve.** On a le système linéaire suivante

$$Au + B^T p = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} Bu = 0 \quad (1.19)$$

et la matrice  $A$  est inversible, alors l'équation (1.19) se réécrit

$$u = A^{-1}(F - B^T p) \quad (1.20)$$

$$BA^{-1}B^T p = BA^{-1}F \quad (1.21)$$

Nous considérons l'équation (1.21) ne dépend que de l'inconnue  $p$ . De plus on peut observer que la matrice  $R = BA^{-1}B^T$  est symétrique et définie positive si  $\text{Ker}B^T = 0$ . En effet, pour tout  $p \in p_h$  non nul,

$$p^T BA^{-1}B^T p > 0$$

car  $A^{-1}$  est symétrique et définie positive puisque  $A$  l'est. Donc la matrice  $R$  est inversible, alors le problème (1.21) est bien posé et il admet une unique solution  $p$ . En reconsidérant l'équation (1.20), puisque  $A$  est inversible,  $u$  est donc uniquement déterminé car  $p$  l'est aussi. Par conséquent, le problème ci-dessus est bien posé et la matrice  $C$  est inversible.

■

**Définition 10 (Espace de Krylov)** [5] Soit  $n \in N$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^N$  et  $r_0 = b - Ax_0$ . L'espace de Krylov d'ordre  $n$  du vecteur initial  $r_0$ , noté  $K_n(r_0)$ , est défini par

$$K_n(r_0) := \text{span}\{r_0, Ar_0, \dots, A^{n-1}r_0\}.$$

On a  $\dim K_{n-1} \leq \dim K_n \leq N$  pour  $0 \leq n \leq N$ .

De plus  $K_{n-1} \subset K_n$

**Lemme 1.4.1 (de Gronwall)** [6] Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $t_0 \in I$ . On considère une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  positive et intégrable sur  $I$  ainsi que  $\phi$  et  $g$  deux fonctions positives et continues sur  $I$ . Si  $g$  est croissante et si

$$\phi(t) \leq g(t) + \int_{t_0}^t f(s)\phi(s)ds \quad \forall t \in I,$$

alors

$$\phi(t) \leq g(t)\exp\left(\int_{t_0}^t f(s)ds\right) \quad \forall t \in I. \quad (1.22)$$

**Théorème 1.4.6** [2][de compacité] Soit  $B_0, B, B_1$  trois espaces de Banach

$$B_0 \subset B \subset B_1, B_i \text{ réflexif}, i = 0, 1 \quad (1.23)$$

*l'injection  $B_0 \longrightarrow B$  est compacte* (1.24)

*et on définit*

$$W = \{v/v \in L^{p_0}(0, T; B_0), v' = \frac{dv}{dt} \in L^{p_1}(0, T; B_1)\}$$

*où  $T$  est fini et où  $1 < p_i < \infty, i = 0, 1,$*

*et si  $1 < p_i < \infty, i = 0, 1,$  l'injection de  $W$  dans  $L^{p_0}(0, T; B)$  est compacte.*

# Chapitre 2

## L'équation de Stokes

L'équation de Stokes permet de décrire un fluide visqueux coulant lentement dans un lieu étroit on autour d un petit objet. La viscosité domine donc sur les effets inertiels.

### 2.1 Adimensionalisation

Nous utilisons l'adimensionalisation des équations de Navier-Stokes nous obtenons les équations de Stokes et d'Euler comme cas limites (formelles) des équations de Navier-Stokes. Pour l'adimensionalisation, on introduit une vitesse caractéristique  $U \in \mathbb{R}$  de l'écoulement étudié (par exemple liée à une condition limite non-homogène) et  $L$  une longueur caractéristique (par exemple le diamètre de  $\Omega$ ). Nous considérons le temps caractéristique  $T = L/U$  et on pose :

$$\tilde{x} = \frac{x}{L}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{T}, \quad \tilde{u}(\tilde{X}, \tilde{t}) = \frac{u(X, t)}{U}, \quad \tilde{p}(\tilde{X}, \tilde{t}) = \frac{p(X, t)}{\rho U^2}. \quad (2.1)$$

Les nouvelles vitesse et pression  $\tilde{u}$  et  $\tilde{p}$  vérifient alors

$$\rho \left( \frac{U}{T} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \frac{U^2}{L} (\tilde{u} \cdot \nabla) \tilde{u} \right) - \mu \frac{U}{L^2} \Delta \tilde{u} + \frac{\rho U^2}{L} \nabla \tilde{p} = f \quad \text{dans} \quad \tilde{\Omega} \times \mathbb{R}^+. \quad (2.2)$$

Les (nouveaux) opérateurs différentiels  $\nabla$  et  $\Delta$  sont relatifs à la (nouvelle) variable  $\tilde{X}$ .

On obtient ainsi

$$\frac{U^2}{L^2} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + (\tilde{u} \cdot \nabla) \tilde{u} - \frac{1}{Re} \Delta \tilde{u} + \nabla \tilde{p} = \tilde{f} \quad \text{dans} \quad \tilde{\Omega} \times \mathbb{R}^+, \quad (2.3)$$

$$\operatorname{div}(\tilde{u}) = 0 \quad \text{dans} \quad \tilde{\Omega} \times \mathbb{R}^+. \quad (2.4)$$

Telle que

$$\tilde{f} = \frac{L}{\rho U^2} f, \quad Re = \frac{LU}{\mu} \rho \quad \text{et} \quad \tilde{\mu} = \mu/\rho$$

.

## quelques valeurs du nombre de Reynolds

Dans Le tableau suivant nous donné quelques valeurs du nombre de Reynolds

	$U$	$L$	$Re = LU/\tilde{\nu}$
bactérie (dans l'eau)	100 $\mu m/s$	0.1 $\mu m$	$10^{-5}$
protozoaire	$10^{-1}$ $cm/s$	$10^{-2}$ $cm$	$10^{-1}$
poisson (hareng)	1.67 $m/s$	30 $cm$	$5.10^5$
poisson (saumon)	12.5 $m/s$	1 $m$	$1, 25.10^7$
automobile	100 $km/h$	3 $m$	$5.10^6$
avion (airbus A330)	860 $km/h$	60 $m$	$\simeq 10^9$

## 2.2 Réductions des équations

Nous obtentions les équations de Stokes et d'Euler d'apre le nombre de Reynolds.

Si  $Re$  très petite, dans ce cas on prend la viscosité est dominante.

Si on pose

$$\dot{p} = LU \rho \tilde{p} = \mu Re \tilde{p} \quad \text{et} \quad f' = \mu Re \tilde{f},$$

donc l'équation(2.3) devient

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u - \frac{1}{Re} \Delta u + \frac{1}{\mu Re} \nabla \dot{p} = \frac{1}{\mu Re} f'. \quad (2.5)$$

En faisant tendre  $Re$  vers 0, alors nous obtentions les équations de Stokes suivant :

$$\begin{cases} -\mu \Delta u + \nabla p = f & \text{dans } \Omega, \\ \text{div}(u) = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (2.6)$$

Si  $Re$  gronde, le terme de convection non linéaire  $(u \cdot \nabla)u$  est dominant, dans ce cas, en faisant tendre  $Re$  vers  $+\infty$  dans l'équation (2.3), (ou bien en prenant directement  $\mu = 0$

dans (2.6)), donc l'équation d'Euler sont la forme suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = f & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ \operatorname{div}(u) = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+. \end{cases} \quad (2.7)$$

## 2.3 L'équation de Stokes

Nous considérons le problème de Stokes sous la forme suivante

$$\begin{cases} -\mu \Delta u + \nabla p = f & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div}(u) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.8)$$

Telle que  $\Omega$  un domaine bornée et régulier dans  $\mathbb{R}^2$ , étant donné une fonction  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ . On cherche des fonction  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  la vitesse et  $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  la pression du fluide, avec  $\mu > 0$ . Ici nous intéresserons uniquement au cas des fluides incompressibles, régi par l'équation  $\operatorname{div}(u) = 0$ .

### 2.3.1 Formulation mixte du problème de stokes

Nous considérons le problème de stokes (2.8).

Nous supposons que  $f \in (L^2(\Omega))^2$ , et  $\mu > 0$ . Nous multiplions la première équation par un champ vectoriel  $v$  dans  $[H_0^1(\Omega)]^2$  et nous intégrons sur  $\Omega$ . donc

$$-\mu \int_{\Omega} \Delta u \cdot v \, dx + \int_{\Omega} \nabla p \cdot v \, dx = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx \quad \forall v \in [H_0^1(\Omega)]^2. \quad (2.9)$$

On pose l'espace

$$X = [H_0^1(\Omega)]^2$$

et l'espace

$$L_0^2(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} q \, dx = 0\} = Y.$$

Telle que l'espace des fonction de  $L^2(\Omega)$  à moyenne nulle. Pour l'équation d'incompressibilité,  $\operatorname{div} u = 0$ , nous la multiplions par une fonction scalaire  $q : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  dans l'espace  $Y$

et nous intégrons. Nous obtenons

$$-\int_{\Omega}(\operatorname{div}u)qdx = 0 \quad \forall q \in Y. \quad (2.10)$$

Donc on définissant les formes bilinéaires suivant :

$$\begin{aligned} a : X \times X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longrightarrow a(u, v) = \mu \int_{\Omega} \nabla u : \nabla v dx, \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} b : X \times Y &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, q) &\longrightarrow b(u, q) = -\int_{\Omega}(\operatorname{div}u)qdx. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Ainsi que la fonctionnelle linéaire  $F : v \longrightarrow \mathbb{R}$

$$F(v) = \int_{\Omega} f.v dx. \quad (2.13)$$

Finalement, la formulation mixte du problème de Stokes s'écrit :

Trouve  $(u, p) \in X \times Y$  telles que

$$\begin{cases} a(u, v) + b(u, v) = F(v) & \forall v \in X \\ b(u, q) = 0 & \forall q \in Y. \end{cases} \quad (2.14)$$

### 2.3.2 Existence et unicité de la solution de l'équation de Stokes

Nous souhaitons à présent vérifier les hypothèses du théorème (1.4.1) Pour le problème de Stokes et les formes  $a$  et  $b$  définies par (2.11) et (2.12)

1- la forme bilinéaire  $a(u, v)$  est continue sur  $v$ . En effet pour tout  $u, v \in X$  et inégalités de Hölder(1.2.3) (dans  $L^2(\Omega)$ ) et de Cauchy-Schwarz(1.2.1) (dans  $\mathbb{R}$ ) et le remarque(1.3.1) on a

$$|a(u, v)| = \mu \left| \int_{\Omega} \nabla u : \nabla v \right| \leq \mu \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|$$

$$\leq \mu \sum_{j=1}^2 \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq \mu \sum_{j=1}^2 \|u_i\|_{H^1(\Omega)} \|v_i\|_{H^1(\Omega)}$$

$$\leq \mu \|u\|_X \|v\|_X, \quad \forall u, v \in X.$$

2- la forme bilinéaire  $a(u, v)$  est coercive sur  $X$ . Pour tout  $u \in X$ .

$$a(u, u) = \mu \int_{\Omega} \nabla u : \nabla u = \mu \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \nabla u_j \cdot \nabla u_j \quad (2.15)$$

est coercive. En effet, grâce à l'inégalité de Poincaré Théorème (1.3.4)

$$\|u_j\|_X^2 = \|u_j\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u_j\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq (1, c) \|\nabla u_j\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (2.16)$$

où  $c$  est la constante de Poincaré. Par conséquent,

$$a(u, u) = \mu \int_{\Omega} |\nabla u_j|^2 = \mu \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \frac{1}{1+c} \|u\|_X^2 \quad (2.17)$$

et donc la coercitive de  $a$  est satisfaite pour la constante  $\alpha = \frac{1}{1+c} \geq 0$

puis que

$$a(u, u) = \sum_{j=1}^2 a(u_j, u_j) \geq \sum_{j=1}^2 \alpha \|u_j\|_X^2 \geq \alpha \|u\|_X^2. \quad (2.18)$$

3- La forme bilinéaire  $b(v, q)$  est continue sur  $X \times Y$ .

En effet par les inégalités de Hölder (dans  $L^2(\Omega)$ ) (Théorème(1.2.3)) et de Cauchy-Schwarz (dans  $\mathbb{R}$ ) (proposition(1.2.1))

$$b(v, q) = - \int_{\Omega} (\operatorname{div} v) q dx \leq \|v\|_X \|q\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in X, \quad \forall q \in Y. \quad (2.19)$$



4- Condition 'inf-sup' pour  $b$

$\exists \beta > 0$  telle que  $\forall q \in Y, \exists v \in X$ , et  $v \neq 0$  :

$$b(v, q) \geq \beta \|v\|_X \|q\|_Y. \quad (2.20)$$

par le théorème (1.4.1) le problème (2.8) admet une unique solution  $(u, p) \in X \times Y$ .

### 2.3.3 Le problème Approchée

Soit  $V_h$  sous-espaces de dimension finie tel que  $V_h \in V$  et  $Q_h \in Q$  lorsque  $h \rightarrow 0$ . Le problème s'approche de la manière suivante :

Trouve  $u_h \in V_h, p_h \in Q_h$

$$\begin{cases} a(u_h, v_h) + b(v_h, p_h) = (f_h, v_h) & \forall v_h \in V_h, p_h \in Q_h, \\ b(u_h, q_h) = 0 & \forall q_h \in Q_h. \end{cases} \quad (2.21)$$

Il faut que les espaces  $V_h$  et  $Q_h$  vérifient à nouveau la condition de l'inf-sup :  $\exists \beta^* > 0$  indépendante de  $h$  tel que  $\forall q_h \in Q_h, \exists v_h \in V_h, v_h \neq 0$  telle que

$$b(v_h, q_h) \geq \beta^* \|v_h\|_{V_h} \|q_h\|_{Q_h}. \quad (2.22)$$

Donc le problème s'approche admet une unique solution  $(u_h, p_h) \in V_h \times Q_h$  d'après le théorème(1.4.1).

## 2.4 Algorithme de résolution du problème de Stokes

Nous avons montré que le problème de Stokes peut être ramené aux problème suivant :

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Ce n'est rien d'autre qu'une résolution d'un système linéaire, où la matrice est symétrique et inversible si nous espaces vérifient la condition "inf-sup". Nous pouvons donc appliquer les algorithmes connus de résolution de systèmes linéaires pour résoudre ce problème.

## 2.4.1 La méthode du gradient conjugué

Nous utilisons l'équation(1.21), nous obtentions une équation qui ne contient que  $p$  comme inconnue telle que

$$Sp = g$$

où  $S = BA^{-1}B^T$  est symétrique et définie positive par la proposition (1.4.5) et  $g = BA^{-1}F$ . On peut donc appliquer l'algorithme du gradient conjugué pour trouver  $p$ . L'algorithme s'écrit de la manière suivante : Soit les matrices A et B donné, la fonction  $F$  ainsi qu'un vecteur initiale  $p_0$ .

1. Résoudre  $Az = B^T p_0$ .
2.  $SX_0 = BZ$ .
3. Résoudre  $Ae = F$ .
4.  $g = Be$ .
5.  $r_0 = g - SP_0$ .
6.  $W_1 = r_0$ .
7.  $\alpha_1 = r_0^T W_1$ .
8.  $p_1 = p_0 + \alpha_1 W_1$ .
9. Résoudre  $AZ = B^T W_1$ .
10.  $SW_1 = BZ$ .
11. Répéter pour  $j = \{1, 2, \dots\}$ , jusqu'à convergence.
12.  $r_j = r_{j-1} - \alpha_j SW_j$ .
13.  $\beta_j = -\frac{r_j^T SW_j}{W_j^T SW_j}$ .
14.  $W_{j+1} = r_j + \beta_j W_j$  (Direction de descente).
15. Résoudre  $AZ = B^T W_{j+1}$ .
16.  $SW_{j+1} = BZ$ .
17.  $\alpha_{j+1} = \frac{r_j^T W_{j+1}}{W_{j+1}^T SW_{j+1}}$ .
18.  $p_{j+1} = p_j + \alpha_{j+1} W_{j+1}$ .

Nous trouvons ainsi la pression  $p$ , et en appliquant à nouveau le gradient conjugué à la

matrice  $A$ , le système linéaire

$$Au = F - B^T p$$

telle que  $u$  donné.

## 2.4.2 La méthode GMRES

La méthode itérative de généralisation de Minimisation du Résidu (GMRES), elle permet de résoudre des systèmes linéaires du type  $Ax = b$ , où  $A$  est une matrice régulière, c'est-à-dire  $\text{Ker}A = 0$ . C'est une généralisation de la méthode du gradient conjugué.

Nous considérerons  $K_n$  l'espace de Krylov de  $x_0$  d'après Définition(10). Alors il existe  $\bar{k} \leq N$  telle que  $\dim K_n = n$  pour tout  $n \leq \bar{k}$  et  $\dim K_n = \bar{k}$  pour tout  $n \geq \bar{k}$ . L'idée de la méthode GMRES est la suivante :

on cherche  $X_n \in K_n$  tel que  $X_n = X_{n-1} + \xi$ , avec  $\xi_n \in K_n$ , tel que

$$\|b - A(X_{n-1} + \xi_n)\| \leq \|b - A(X_{n-1} + \xi)\|, \quad \forall \xi \in K_n$$

.

C'est un problème de minimisation. L'algorithme est le suivant :

1. pose  $r_0 = b - AX_0$  et  $v_1 = r_0$ .
2. for  $n = 1, 2, \dots$
3.  $B_{nl}^n = (v_{n+1}, v_{l+1}), l = 1, \dots, n$
4.  $d_l^{(n)} = (r_{n-1}, v_{l+1}), l = 1, \dots, n$
5. Résoudre  $B^n u^n = d^n$
6.  $X_n = X_{n-1} + \sum_{j=1}^n u_j^n v_j$
7.  $r_n = r_{n-1} - \sum_{j=1}^n u_j^n v_{j+1}$
8. continuer tant que  $\|r_n\| > \epsilon$
9. end for

### 2.4.3 La méthode d'Uzawa

La méthode d'Uzawa, du nom d'un économiste Japonais, utilise la méthode du gradient conjugué. Rappelons-nous, dans la proposition (1.4.5), nous avons ramené le problème matricielle de Stokes sous la forme d'un système d'équation

Trouver  $u \in V_h$  et  $p \in Q_h$

$$\begin{aligned} Au &= F - B^T p \\ BA^{-1}B^T p &= BA^{-1}F. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Comme la matrice  $A$  est symétrique et définie positive, on peut trouver  $u$  connaissant  $p$  par la méthode du gradient conjugué. Nous multiplions par  $B$  nous obtenons

$$Bu = BA^{-1}(F - B^T P).$$

L'idée de la méthode d'Uzawa est de trouver, pour un  $p_0$  donné,  $p$  et  $u$  de manière à ce que le résidu  $Bu$  soit minimal pour satisfaire la condition  $Bu = 0$ . Plus précisément, pour tout itération  $n \in \mathbb{N}$ , si  $p_n$  est donné et  $\alpha \in \mathbb{R}$  est une constante connue, alors on trouve  $p_{n+1}$  de la manière suivante

1. Calculer  $u_n = A^{-1}(F - B^T p_n)$
2. Calculer  $p_{n+1} = p_n + \alpha Bu_n$

On continue ainsi jusqu'à la convergence de la méthode, c'est-à-dire jusqu'à ce que le résidu

$$\frac{\|p_{n+1} - p_n\|}{\|p_n\|} = \|\alpha Bu_n\|$$

soit suffisamment petit.

## 2.5 Le logiciel FreeFem ++

FreeFem++ est un freeware développé par Frédéric Hecht, chercheur au Laboratoire Jacques-Louis Lions de l'Université Pierre et Marie Curie à Paris. ce logiciel est dédié à la résolution d'équations aux dérivées partielles par des méthodes de type éléments finis. C'est un programme très complet et nous allons en utiliser qu'une toute petite partie pour ce travail.

## 2.5.1 Pression à moyenne nulle

### Moyenne nulle sur FreeFem ++

Comment maintenant imposer sur FreeFem ++ que nous cherchons une pression à moyenne nulle . Nous allons pour cela utiliser une astuce numérique. Nous allons légèrement perturber la condition d'incompressibilité :

pour un  $\epsilon > 0$  donné assez petit, nous supposons que

$$\operatorname{div} u = \epsilon p. \quad (2.25)$$

Quitte à faire un relèvement, on peut supposer que  $u = 0$  sur  $\partial\Omega$  La formulation mixte de notre problème devient alors

Trouve  $u \in V$ ,  $p \in Q$  telle que

$$\begin{cases} a(u, v) + b(v, p) = (f, v) & \forall v \in V, p \in Q, \\ b(u, q) - \epsilon \int pq = 0 & \forall q \in Q_h. \end{cases} \quad (2.26)$$

Ou bien sous forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & -\epsilon I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

Enfin, par la proposition (1.4.4)

$$\epsilon \int_{\Omega} p = \int_{\Omega} \operatorname{div} u = \int_{\partial\Omega} u \cdot n = 0. \quad (2.28)$$

Comme  $\epsilon \neq 0$ , on a comme désiré  $\int_{\Omega} p = 0$ , ce qui nous donne bien une pression à moyenne nulle . De plus cette valeur de  $\epsilon$  est suffisamment petite pour ne pas perturber la solution du problème de Stokes.

### Calcul des erreurs

Nous calculerons des problèmes avec solution exacte, nous vérifierons le résultat en calculant les erreurs relatives entre les solutions exactes  $u$  et  $p$  et leur le problème approché sur FreeFem ++  $u_h$  et  $p_h$ .

Pour la pression  $p$ , l'erreur absolue se fera pour la norme  $L^2(\Omega)$  :

$$\|p - p_h\|_{L^2(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |p - p_h|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.29)$$

Comme  $u$  se trouve dans un sous-espace de Sobolev  $(H^1(\Omega))^2$ , nous allons estimer l'erreur absolue pour la norme correspondante, c'est-à-dire

$$\|u - u_h\|_{(H^1(\Omega))^2} = \left( \sum_{i=1}^2 \|u_i - u_{ih}\|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.30)$$

Donc erreurs relatives sur  $u$  et  $p$  seront calculées de la manière suivante :

$$Er(u) = \frac{\|u - u_h\|_{(H^1(\Omega))^2}}{\|u\|_{(H^1(\Omega))^2}}$$

et

$$Er(p) = \frac{\|p - p_h\|_{L^2(\Omega)}}{\|p\|_{L^2(\Omega)}}.$$

## 2.6 Résolution numérique du problème de Stokes

### 2.6.1 K-test avec solution exacte

2D

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ , soit le triangle de sommets  $(0,0), (1,0), (1,1)$  :

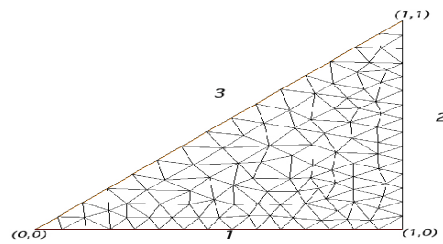


Figure1 : Un maillage de  $\Omega$

On considère le problème de Stokes suivant :

trouve  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  et  $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nu\Delta u + \nabla p = \quad \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} u = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ u = (x, 0) \quad \text{sur } 1, \\ u = (1, -y) \quad \text{sur } 2, \\ u = (x, -y) \quad \text{sur } 3. \end{array} \right.$$

Ce problème admet la solution évidente  $u = (x, -y)$  et  $p = x + y$ . Cependant, elle n'est pas forcément unique car la pression n'est définie qu'à une constante près puisque le problème de Stokes ne fait intervenir que les dérivées de  $p$ . Le logiciel FreeFem++ nous donne l'illustration suivante pour  $N = 10$  :

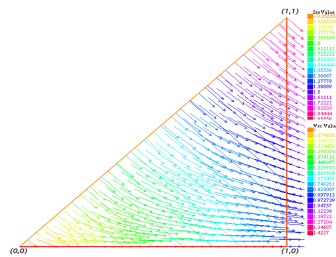


Figure 2 : Champ de vitesse et pression pour  $N=10$ .

Nous trouvons les erreurs suivantes pour  $N = \frac{1}{h} = 10$  telle que  $h = 0.1$  :



$$Er(u) = 1.44442e - 29$$

et

$$Er(p) = 5.49992e - 15$$

.

**Remarque 2.6.1** *Les valeurs de ces erreurs sont satisfaisantes pour un problème en 2D.*

## 2.7 Annexe : code FreeFem ++ des tests

### 2.7.1 K-test sur Solution Exact

#### K-test du triangle (2D)

```
// Paramétrisation du bord du domaine
border a(t = 0, 1){x = t; y = 0; label = 1; };
border b(t = 0, 1){x = 1; y = t; label = 2; };
border c(t = 0, 1){x = 1 - t; y = 1 - t; label = 3; };

// Construction du domaine avec N=10
mesh Th =buildmesh (a(10) + b(10) + c(10));

// Affichage du domaine et son maillage
plot (Th);

// Définition des e spaces d'éléments finis et des fonctions dans ces espaces
espace Vh(Th, P2);
Vh u1, u2, v1, v2;
espace Ph(Th, P1);
Ph p, q;

// Macro pour simplifier l'écriture de la divergence et du gradient
macro div(u, v)(dx(u) + dy(v))//
macro grad(u)[dx(u), dy(u)]//

// Formulation Variationnelle du problème
solve Stokes ([u1, u2, p], [v1, v2, q]) =
int2d(Th)(grad(u1)' * grad(v1) + grad(u2)' * grad(v2)
-p * (div(v1, v2)) - q * (div(u1, u2))) - int2d(Th)(v1, v2)
```

```

// Condition de Bord
// Pression en (0,0)
+on(3, p = x + y)
// U
+on(3, u1 = x, u2 = -y)
+on(1, u1 = x, u2 = 0)
+on(2, u1 = x, u2 = -y);

// Résolution numérique du problème Stokes
// Définition des erreurs
real eru;
real ere;
real eruf;
real erp;
real epe;
real erpf;

// Erreur absolue de  $u - u_h$ 
eru = (int2d(Th))((u1 - x)2 + (dx(u1) - 1)2 + (dy(u1)2))2
+ (int2d(Th))((u2 + y)2 + (dx(u2)2 + (dy(u2) + 1)2))2;

// Norme de  $u$ 
ere = int2d(Th)((x2 + 1) + (y2 + 1));

// Erreur relative de  $u - u_h$ 
eruf = sqrt(eru)/sqrt(ere);

// Erreur absolue de  $p - p_h$ 

```

```

erp = int2d(Th)((p - (x - y))^2);

// Norme de p
epe = int2d(Th)((x + y)^2);

// Erreur relative de p - p_h
erpf = sqrt(erp)/sqrt(epe);

// Affichage du calcul des erreurs relatives
cout << "erreur sur u : " << eru << endl;
cout << "erreur sur p : " << erpf << endl;

// Affichage de u et p
plot([u1, u2], value = true, p, wait = 1);

```

# Chapitre 3

## L'équation de Navier-Stokes

### 3.1 Formulation du problème de Navier-Stokes

Nous considérons le problème de Navier-Stokes suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \mu \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = f, & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u|_{t=0} = u_0 & \text{dans } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.1)$$

Ces équations régissent le mouvement d'un fluide visqueux, d'écrit par les variables  $u = u(x,t)$  et  $p = p(x,t)$  la vitesse et la pression qui donnent, en un point  $x$  de l'espace et au temps  $t$ . Le domaine  $\Omega$  dans lequel évolue le fluide sera l'espace tout entier, en dimension deux.

Nous considérons le cas d'un fluide incompressible (ce qui entraîne la condition  $\operatorname{div} u = 0$ ), et de viscosité  $\mu > 0$ .

### 3.2 Formulation mixte du problème de Navier-Stokes

Nous considérons le problème de Navier-Stokes (3.1).

Nous supposons que  $f \in L^2(0, T; [L^2(\Omega)]^2)$ , et  $u_0 \in [L^2(\Omega)]^2$ . Nous multiplions la première équation par un champ vectoriel  $v$  dans  $X$  et nous intégrons sur  $\Omega$ . donc

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} \cdot v dx - \mu \int_{\Omega} (\Delta u) \cdot v dx + \int_{\Omega} [(u \cdot \nabla)u] \cdot v dx + \int_{\Omega} \nabla p \cdot v dx = \int_{\Omega} f \cdot v dx \quad \forall v \in X. \quad (3.2)$$

pour l'équation d'incompressibilité,  $\operatorname{div}(u) = 0$ , nous la multiplions par un fonction scalaire  $q : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  dans l'espace  $Y$  et nous intégrons. Nous obtenons

$$-\int_{\Omega}(\operatorname{div}u)qdx = 0 \quad \forall q \in Y. \quad (3.3)$$

Donc on définissant les forme bilinéaires suivant :

$$\begin{aligned} a : X \times X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u(t), v) &\longrightarrow a(u(t), v) = -\int_{\Omega} \Delta u \cdot v dx = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} dx, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} c : X \times Y &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v, p(t)) &\longrightarrow c(v, p(t)) = -\int_{\Omega}(\operatorname{div}(p))vdx = 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Et la forme trilinéaire :

$$\begin{aligned} b : X \times X \times X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u(t), u(t), v) &\longrightarrow b(u(t), u(t), v) = \int_{\Omega} [(u \cdot \nabla) \cdot u] \cdot v dx = \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_i dx. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Ainsi que la fonctionnelle linéaire  $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(f(t), v) = \int_{\Omega} f \cdot v dx. \quad (3.7)$$

Finalement, la formulation mixte du problème de (NS) s'écrire :

Trouver  $u \in W(0, T) = \{v \in L^2(0, T; X), \frac{dv}{dt} \in L^2(0, T; X')\}$   
 $p \in L^2(0, T; Y)$ , telle que  $p, t \in (0, T)$

$$\left\langle \frac{du}{dt}(t), v \right\rangle_{X', X} + \mu a(u(t), v) + b(u(t), u(t), v) = (f(t), v) \quad \forall v \in X, \quad (3.8)$$

$$u(0) = u_0. \quad (3.9)$$

### 3.3 Quelques lemmes pour la démonstration de l'existence et l'unicité de 2D

**Lemme 3.3.1** [2] *Si  $n = 2$ , il existe une constante  $c(\Omega)$  telle que*

$$\|v\|_{L^4(\Omega)} \leq c(\Omega) \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|v\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \quad v \in H_0^1(\Omega) \quad (3.10)$$

**Lemme 3.3.2** [2] *Si  $n = 2$  et  $u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$ , alors*

$$\sum_{i=1}^2 u_i D_i u \in L^2(0, T; V') \quad (3.11)$$

**Lemme 3.3.3** [2] *Soit  $V = \{v \in X / \operatorname{div}(v) = 0 \text{ p.p. dans } \Omega\}$ ,*

$$b(u, v, v) = 0 \quad \forall u \in V, \forall v \in X, \quad (3.12)$$

$$b(u, u, v) = -b(u, v, u) \quad \forall v, u \in X. \quad (3.13)$$

**Lemme 3.3.4** [2] *pour  $u \in X$ , la forme linéaire  $v \rightarrow b(u, u, v)$  est continue sur  $X$ , on a :*

$$b(u, u, v) = (g(u), v), \quad g(u) \in X', \quad (3.14)$$

avec

$$\|g(u)\|_{X'} \leq c \|u\|^2 (L^p(\Omega))^n \quad (3.15)$$

où  $\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$ , ( $p < q$ , où  $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$  et  $q$  fini quelconque si  $n = 2$ ).

**Lemme 3.3.5** [2] *Soit  $u \in L^2(0, T; X) \cap L^\infty(0, T; H)$ . Alors*

$$u \in L^4(0, T; (L^p(\Omega))^n), p \text{ donné par (3.3.4)} \quad (3.16)$$

**Lemme 3.3.6** [6] *[une estimation d'énergie] nous prendrons  $v = u(t) \in X$  dans l'équation de Navier-Stokes, on a :*

$$\left\langle \frac{du}{dt}, u \right\rangle_{X', X} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (u, u).$$

**Preuve.** D'après la relation (3.12), on a  $b(u, u, u) = 0$  car  $u(t) \in V$ , donc

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + \mu \|\nabla u(t)\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 \leq \|f(t)\|_{[L^2(\Omega)]^2} \|u(t)\|_{[L^2(\Omega)]^2} \leq \frac{1}{2} \|f(t)\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + \frac{1}{2} \|u(t)\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2.$$

En intégrant entre 0 et  $t$ , nous obtenons

$$\|u(t)\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + 2\mu \int_0^t \|\nabla u(s)\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 ds \leq \|u(0)\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + \int_0^t \|f(s)\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 ds + \int_0^t \|u(s)\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 ds.$$

D'après le lemme de Gronwall (1.4.1) que, pour tout  $t \in [0, T]$

$$\|u(t)\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + 2\mu \int_0^t \|\nabla u(s)\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 ds \leq (\|u(0)\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 + \int_0^t \|f(s)\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2 ds) \exp(t). \quad (3.17)$$

■

### 3.4 Propriétés de la solution

\* Comme  $\operatorname{div}(u) = 0$  faiblement et que  $u_m$  tend vers  $u$  faiblement dans  $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ , alors  $u_m$  tend vers  $u$  dans  $L^2(0, T; V)$ .

\* En fait  $u$  à une plus grande régularité, on peut montrer que  $u \in C(0, T; H)$ . Dans ce cas, l'égalité pour tout  $v$

$$\int_{\Omega} u(0, \cdot) v = \int_{\Omega} u_0 v$$

montre que  $u(0, \cdot) = u_0$  en prenant  $v = u(0, \cdot) - u_0$ .

\* Dans le cas où un écoulement est fixé au bord (conditions de Dirichlet), on suppose que cet écoulement coïncide sur le bord avec une fonction  $g \in L^2(0, T; [H^{-1}(\Omega)]^n)$  vérifiant :

- 1)  $\frac{\partial g}{\partial t} \in L^2(0, T; [H^{-1}(\Omega)]^n)$
- 2)  $\operatorname{div}(g) = 0$
- 3)  $u_0 - g(0) \in H$ .



### 3.4.1 solution faible

**Définition 11** [7] Nous appellerons solution faible des équation de Navier-Stokes si  $f$  et  $u_0$  données telle que

$$f \in L^2(0, T; V') \quad \text{et} \quad u_0 \in H,$$

et  $u$  vérifié

$$u \in L^2(0, T; V')$$

et qui vérifie le problème

$$\frac{d}{dt}(u, v) + \mu a(u, v) + b(u, u, v) = \langle f, v \rangle \quad v \in X$$

$$u(0) = u_0.$$

## 3.5 Existence et unicité de la solution de l'équation de Navier-Stokes de dimension deux

Dans cette section, nous allons étudier l'existence et l'unicité de la solution faible de l'équation de Navier-Stokes de dimension deux.

**Théorème 3.5.1** [7][solution faible] Si  $f$  et  $u_0$  données telle que

$$f \in L^2(0, T; V') \quad \text{et} \quad u_0 \in H$$

alors il existe une solution faible de l'équation de Navier-Stokes vérifiée

$$u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H). \quad (3.18)$$

**Théorème 3.5.2** [2] tout solution  $u$  vérifie

$$u' \in L^2(0, T, V'). \quad (3.19)$$

**Preuve.**

$$a(u, v) = (Au, v), A \in (V, V') \quad (3.20)$$

et utilisant (3.8) on déduit de (3.14) que

$$u' = -\gamma Au - g(u) + f. \quad (3.21)$$

D'après (3.15) et (3.16),  $g(u) \in L^2(0, T, V')$ , comme  $Au \in L^2(0, T; V')$ ,  $f \in L^2(0, T; V')$ , C.F.D.

■

**Théorème 3.5.3** [2] tout solution  $u$  est vérifié si  $n = 2$

$$u' \in L^2(0, T, V'). \quad (3.22)$$

**Preuve.** [2][Démonstration du théorème de l'existence de la solution faible ]

### Solution approchées

Nous utilisons la base  $\{w_1, \dots, w_m, \dots\}$ ,

on définit  $u_m(t)$  solution approchée d'ordre  $m$  par

$$u_m(t) \in [w_1, \dots, w_m], \text{ telle que } u_m(t) = \sum_{j=1}^m g_{jm}(t)w_j'$$

$$(u_m'(t), w_j) + \mu a(u_m(t), w_j) + b(u_m(t), u_m(t), w_j) = (f(t), w_j), 1 \leq j \leq m, \quad (3.23)$$

$$u_m(0) = u_{0m}. \quad (3.24)$$

telle que  $u_{0m} \in [w_1, \dots, w_m]$ ,  $u_{0m} \longrightarrow u_0$  dans  $H$ .

ce système d'équation différentielles en les  $g_{jm}(t)$  définit  $u_m(t)$  dans  $[0, t_m]$ , on verra au point suivant que l'on peut prendre  $t_m = T$ .

### Estimations a priori (I)

Nous multiplions (3.23) par  $g_{jm}(t)$  et sommons en  $j$ , et d'après (3.12)  $b(u_m, u_m, u_m) = 0$  et utilisons une estimation d'energie :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_m(t)|^2 + \mu a(u_m(t), u_m(t)) = (f(t), u_m(t)) \quad (3.25)$$

ou

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_m(t)|^2 + \mu \|u_m(t)\|^2 \leq \|f(t)\| \|u_m(t)\| \leq \frac{\mu}{2} \|u_m(t)\|^2 + c \|f(t)\|^2, \quad (3.26)$$

d'où

$$|u_m(t)|^2 + \mu \int_0^t \|u_m(\sigma)\|^2 d\sigma \leq |u_{0m}|^2 + c \int_0^t \|f(\sigma)\|^2 d\sigma. \quad (3.27)$$

Nous utilisons (3.24) on en on déduit que  $t_m = f$  et que  $u_m$  demeure dans un borné de

$$L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H). \quad (3.28)$$

### Estimations a priori (II)

On va maintenant et c'est le point fondamental montrer que  $u'_m$  demeure dans un borné de  $L^2(0, T; V')$ .

Soit en effet  $P_m$  le projecteur de  $H \rightarrow [w_1, \dots, w_m]$  donc

$$P_m h = \sum_{i=1}^m (h, w_i) w_i.$$

Avec les notations (3.20) et (3.14) on déduit de (3.23) que

$$u'_m = -P_m(g(u_m)) - \mu P_m A u_m + P_m f. \quad (3.29)$$

Mais  $\|P_m\|_{\mathcal{L}(V, V)} \leq 1$ , donc par transposition (et comme  $P_m^* = P_m$ ) :

$$\|P_m\|_{\mathcal{L}(V', V')} \leq 1. \quad (3.30)$$

On déduit de (3.28), (3.15), (3.16) que  $g(u_m)$  demeure dans un borné de  $L^2(0, T; V')$  et donc  $L^2(0, T; V')$ , et donc  $P_m(g(u_m))$  demeure dans un borné de  $L^2(0, T; V')$ .

Alors, comme  $Au_m$  demeure dans un borné de  $L^2(0, T; V)$  donc de  $L^2(0, T; V')$ , résulte.

### Passage à la limite

Nous utilisons le Théorème de compacité (1.4.6) avec :

$$B_0 = V, p_0 = 2$$

$$B_1 = V', p_1 = 2,$$

$$B = H.$$

On peut donc extraire de  $u_m$  une suite  $u_\lambda$  telle que

$$u_\lambda \longrightarrow u \quad \text{dans} \quad L^2(0, T; V) \quad \text{faible}, \quad (3.31)$$

$$u_\lambda \longrightarrow u \quad \text{dans} \quad L^\infty(0, T; H), \quad (3.32)$$

$$u_\lambda \longrightarrow u \quad \text{dans} \quad L^2(0, T; H) \quad \text{fort} \quad \text{et} \quad p.p \quad \text{dans} \quad Q, \quad (3.33)$$

$$u'_\lambda \longrightarrow u' \quad \text{dans} \quad L^2(0, T; V') \quad \text{faible}. \quad (3.34)$$

On déduit de (3.31) (3.34) que  $u_\lambda(0) \longrightarrow u_0$  dans  $V'$  faible et donc que  $u(0) = u_0$ .

D'après le Lemme (3.3.5),  $u_{\lambda_i}, u_{\lambda_j}$  est borné dans  $L^2(0, T; L^{p/2}(\Omega))$  et on peut donc supposer que

$$u_{\lambda_i} u_{\lambda_j} \longrightarrow \chi_{ij} \text{ dans } L^2(0, T; L^{p/2}(\Omega)) \quad \text{faible}. \quad (3.35)$$

Mais grâce à (3.33) on a :

$$\chi_{ij} = u_{ij} \quad (3.36)$$

(ou bien noter que  $u_{\lambda_i}u_{\lambda_j} \longrightarrow u_iu_j$  dans  $D'(Q)$ , en effet

$$\int_Q u_{\lambda_i}u_{\lambda_j}\varphi dxdt \quad \forall \varphi \in D(Q)$$

car  $u_{\lambda_i} \longrightarrow u_i$  dans  $L^2(Q)$  faible et  $u_{\lambda_j}\varphi \longrightarrow u_j\varphi$  dans  $L^2(Q)$  fort).

On déduit de (3.35), (3.36) que

$$b(u_\lambda, u_\lambda, w_j) \longrightarrow b(u, u, w_j) \quad \text{dans } L^2(0, T) \text{ faible.}$$

En effet si  $\psi \in L^2(0, T)$ , on a :

$$\int_0^T b(u_\lambda, u_\lambda, w_j)\psi dt = - \int_0^T b(u_\lambda, w_j, u_\lambda)\psi dt$$

et on passe à la limite en utilisant (3.35).

Par ailleurs

$$(u'_\lambda, w_j) \longrightarrow (u', w_j) \quad D'(0, T),$$

et donc (3.23) (pour  $m = \lambda$ ) donne à la limite

$$(u', w_j) + \mu a(u, w_j) + b(u, u, w_j) = (f, w_j),$$

et cela  $\forall j$ .

On en déduit (3.8)  $\forall v \in V$ , puis  $\forall v \in V(L^n(\Omega))^n$  ■

**Théorème 3.5.4** [2] *Si  $n = 2$ , alors  $u$  est une solution unique.*

**Preuve.** Soit  $u_1$  et  $u_2$  deux solution et soit  $w = u_1 - u_2$ . Alors

$$(w', v) + \mu a(w, v) + b(w, u, v) + b(u, w, v) - b(w, w, v) = 0 \quad \forall v \in X(\text{car } X(L^2(\Omega))^2). \quad (3.37)$$

Puis que l'on sait, d'après (3.22), que  $w' \in L^2(0, T; V')$ , on prendre dans (3.37)  $v = w(t)$  et intégrer en  $t$ , et utilisons une estimation d'énergie,

On a

$$\frac{1}{2}|w(t)|^2 + \mu \int_0^t a(w, w) d\sigma + \int_0^t [b(w, u, w) + b(u, w, w) - b(w, w, w)] = 0. \quad (3.38)$$

Et on a  $b(u, w, w) = 0$  et  $b(w, w, w) = 0$  donc (3.38) donné

$$\frac{1}{2}|w(t)|^2 + \mu \int_0^t \|w(\sigma)\|^2 d\sigma = - \int_0^t b(w, u, w) d\sigma. \quad (3.39)$$

Or

$$\left| \int_0^t b(w, u, w) d\sigma \right| \leq c_1 \int_0^t \|w(\sigma)\|_{L^4(\Omega)}^2 \cdot \|u(\sigma)\| d\sigma$$

et utilisons lemme(3.3.1) donc

$$\begin{aligned} &\leq c_2 \int_0^t |w(\sigma)| \|w(\sigma)\| \|u(\sigma)\| d\sigma \\ &\leq \mu \int_0^t \|w(\sigma)\|^2 d\sigma + c_3 \int_0^t |w(\sigma) r_{vert}^2| \|u(\sigma) r_{Vert}^2\| d\sigma. \end{aligned}$$

Donc (3.39) donné

$$|w(t)|^2 \leq 2c_3 \int_0^t \|u(\sigma)\|^2 |w(\sigma)|^2 d\sigma,$$

d'où  $w = 0$ . ■

# Conclusion

Dans ce mémoire, on a étudié l'existence et l'unicité de la solution faible du problème de Navier-Stokes non linéaire, Nous avons étudié le cas particulier de ce problème qu' est le problème de Stokes linéaire, mais nous avons trouvé l'existence et l'unicité de la solution faible facile contrairement du problème général de Navier-Stokes qu' est le non linéaire, ce qui a conduit à faire de l'existence d' une solution faible,non seulement du problème dans  $\mathbb{R}^2$  par la méthode de compacité, mais le problème reste ouvert pour l'unicité lorsque  $n \geq 3$ .

# Bibliographie

- [1] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle. Masson, Paris New York Barcelone Mexico Seo Paulo, 1987.
- [2] J.-L.Lions-Quelques methodes de resolution des problème aux limites non lineaires(Etudes mathematiques)(2002).
- [3] J. Marc Brun August 8, 2008, Mécanique des fluides.
- [4] A. Popier, Espaces De Sobolev Formulation varitionnelle Des EDP. Université du Main, Le Mans.
- [5] J. RoCHAT sous la direction des professeurs J. Rappaz et M. Picasso. Mathicse-Asn, Résolution numérique du problème de Stokes en 3D avec l'élément fini  $\mathbb{P}_2 - \mathbb{P}_1$ .
- [6] J.-F. Scheid, Analyse numérique des équation de Navier-Stokes.
- [7] R. Temam Arnold, Université de Paris-Sud, Orsay Navier-Stokes Equation and Non-linear Functional Analysis.
- [8] M. Thérèse, Distributions Espaces de Sobolev Application. Lacroix-Sonnier, ellipses édition marketin S.A, Paris,1998.