

UNIVERSITÉ KASDI MERBAH-OUARGLA  
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET DES SCIENCES DE LA MATIÈRE  
DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE

N° d'ordre :  
N° de série :



# THÈSE DE DOCTORAT LMD

SPÉCIALITÉ : Rayonnement et Matière

## Statistique Classique et Quantique de Systèmes Fractionnaires

Présentée et soutenue publiquement par :

**BEKHOUCHE Randa**

Le 09/01/2024

Devant le jury composée de :

Pr :	H. BENZAIK	Université de Kasdi Merbah Ouargla	Président
Pr :	K. CHENINI	Université de Ghardaia	Examineur
Pr :	D. A. CHACHA	Université de Kasdi Merbah Ouargla	Examineur
Pr :	S. DOUIS	Université de Kasdi Merbah Ouargla	Examineur
MCA :	Z. KORICHI	ENS Ouargla	Examineur
Pr :	M. T. MEFTAHA	Université de Kasdi Merbah Ouargla	Directeur De Thèse

# DÉDICACE

*À mes chers parents, pour tous les sacrifices consentis, leur soutien tout au long  
de mes années d'études, leur bonté et leur amour*

*À mon cher mari qui m'a toujours encouragée*

*À ma petite ange Wattine*

*À mon frère et mes soeurs*

*À mes collègues de promotion et à mes amis*

*À tous les membres du laboratoire de LRPPS*

*À tous mes enseignants, de l'école primaire jusqu' à la fin de cette thèse*

**BEKHOUCHE Randa**  
**Université de Ouargla**

# REMERCIEMENT

**J**E tiens tout d'abord à exprimer ma gratitude envers Allah Tout-Puissant pour m'avoir accordé la force et la volonté nécessaires pour mener à bien ce modeste travail.

Je tiens à remercier sincèrement Monsieur le professeur **MEFTAH Mohammed Tayeb** d'avoir accepté de rapporter cette thèse, ainsi que pour sa confiance, ses encouragements et ses précieux conseils.

Mes remerciements vont également à Mme **BENZAIR Hadjira**, qui a accepté d'être la présidente du jury, ainsi qu'à tous les membres du jury pour leur participation.

Je suis reconnaissant envers tous les enseignants qui m'ont accompagné tout au long de mes études, en particulier le professeur **DOUIS Said**, qui m'a motivé à achever ce travail.

Je tiens également à exprimer ma gratitude à Mlle **KORICHI Zineb** pour nos échanges et son soutien moral constant pendant ma thèse.

Je souhaite adresser mes chaleureux remerciements à tous les membres du Laboratoire (LRPPS), en particulier au directeur du laboratoire, Monsieur le Professeur **KHELFAOUI Fethi**, pour leur accueil et leur soutien.

Enfin, je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance envers ma famille, notamment mes parents et mon mari, pour leur encouragement et leur soutien moral tout au long de cette thèse.

## Résumé

Dans cette étude, notre principal objectif était d'analyser les propriétés thermodynamiques de systèmes statistiques classiques et quantiques décrits par l'hamiltonien fractionnaire  $H_\alpha$ . Nous avons commencé par établir les bases théoriques nécessaires pour développer la théorie de la dérivation fractionnaire. Ensuite, nous avons exploré la mécanique quantique fractionnaire en exposant ses principes fondamentaux et en présentant quelques applications de l'équation de Schrödinger fractionnaire. Nous avons également étudié des problèmes statistiques classiques et quantiques dans le cadre de la mécanique quantique fractionnaire.

Dans un premier temps, nous avons introduit la fonction de partition  $Z_N$  pour un système de gaz composé de  $N$  oscillateurs quantiques fractionnaires indépendants dans un espace de  $D$  dimension. Ensuite, en utilisant les trois définitions des dérivées fractionnaires (Liouville, Riemann-Liouville et Caputo), nous avons calculé la fonction de partition pour chaque définition et l'avons appliquée à un oscillateur quantique en 3 Dimensions. Cette application nous a permis de montrer que les trois définitions de la dérivée fractionnaire conduisent généralement à des fonctions de partition différentes, et donc à des propriétés thermodynamiques différentes.

Nous nous sommes également intéressés à la résolution de l'équation de Liouville fractionnaire en utilisant les dérivées de Riemann-Liouville et de Caputo pour des systèmes présentant des lois de puissance non entières dans leurs hamiltoniennes. En nous basant sur l'équation de Liouville fractionnaire, nous avons d'abord utilisé la dérivée de R-L pour calculer la fonction de densité (FD) du gaz parfait classique. Les résultats montrent que la (FD) dépend à la fois du moment  $p$  et de position  $q$ . En revanche lorsque nous utilisons la dérivée selon la définition de Caputo, nous avons constaté que la (FD) ne dépend pas de  $(p, q)$  et est donc constante. De plus, nous avons étendu cette étude à un gaz composé de  $N$  oscillateurs fractionnaires dans un espace unidimensionnel, où la (FD) du système est liée au type de dérivée utilisée.

Mots-clés : Dérivation fractionnaire, Mécanique quantique fractionnaire, Gaz parfait, Oscillateurs fractionnaires, Fonction de partition, Equation de Liouville, Fonction de densité.

## Abstract

*In this study, our main objective was to analyze the thermodynamic properties of classical and quantum statistical systems described by the fractional Hamiltonian  $H_\alpha$ . We started by establishing the necessary theoretical foundations to develop the theory of fractional derivation. Then, we explored fractional quantum mechanics by presenting its fundamental principles and discussing some applications of the fractional Schrodinger equation. We also studied classical and quantum statistical problems within the framework of fractional quantum mechanics.*

*Initially, we introduced the partition function  $Z_N$  for a gas system composed of  $\mathcal{N}$  independent fractional quantum oscillators in a  $\mathcal{D}$ -dimensional space. Using the three definitions of fractional derivatives (Liouville, Riemann-Liouville, and Caputo), we calculated the partition function for each definition and applied it to a three-dimensional quantum oscillator. This application allowed us to demonstrate that the three definitions of fractional derivative generally lead to different partition functions, and therefore different thermodynamic properties.*

*We also focused on solving the fractional Liouville equation using the Riemann-Liouville and Caputo derivatives for systems with non-integer power laws in their Hamiltonians. Based on the fractional Liouville equation, we first used the Riemann-Liouville derivative to calculate the density function (DF) of the classical ideal gas. The results showed that the DF depends on both the momentum  $p$  and position  $q$ . On the other hand, when we used the Caputo derivative, we found that the DF does not depend on  $(p, q)$  and remains constant. Furthermore, we extended this study to a gas system composed of  $\mathcal{N}$  fractional oscillators in a one-dimensional space, where the DF of the system is influenced by the type of derivative used.*

*Keywords : Fractional derivation, Fractional quantum mechanics, Ideal gas, Fractional oscillators, Partition function, Liouville Equation, Density function.*

## ملخص

في هذا العمل، ركزنا على دراسة الخصائص الحرارية لبعض الأنظمة الإحصائية الكلاسيكية والكمية التي تم وصفها بواسطة المؤثر الهاملتوني الكسري  $H_\alpha$ . في البداية، قمنا الأدوات الأساسية لبناء نظرية المشتق الكسري. ثم لمحة عامة على ميكانيك الكم الكسري من خلال تقديم مبادئها الأساسية و بعض التطبيقات لمعادلة شرودنجر الكسرية. كما قمنا بدراسة بعض المشاكل الإحصائية الكلاسيكية والكمية ضمن إطار ميكانيك الكم الكسري.

في البداية، قمنا بتقديم دالة التوزيع  $Z_N$  لنظام غاز يتكون من  $N$  هزاز كسري مستقل في فضاء ذو  $D$  بعد. بعد ذلك، باستخدام ثلاثة تعريفات للمشتق الكسري (ليوفيل، ريمان-ليوفيل، وكابوتو)، قمنا بحساب دالة التوزيع لكل تعريف وتطبيقها على هزاز كمي في ثلاثة أبعاد. هذه الدراسة سمحت لنا بإثبات أن التعريفات الثلاث للمشتق الكسري عموماً تؤدي إلى دوال توزيع مختلفة، وبالتالي خصائص حرارية مختلفة. علاوة على ذلك، ركزنا على حل معادلة ليوفيل الكسرية باستخدام تعريف ريمان-ليوفيل وكابوتو لأنظمة تحتوي على قوانين قوة ذات رتب كسرية في هاملتونيتها. استناداً إلى معادلة ليوفيل الكسرية، استخدمنا بداية تعريف ريمان-ليوفيل لحساب دالة الكثافة للغاز الكلاسيكي المثالي. أظهرت النتائج أن كثافة الغاز تعتمد على كل من العزم  $p$  و الموضع  $q$ . بالمقابل، عند استخدام تعريف كابوتو، وجدنا أن كثافة الغاز لا تعتمد على  $p$ ،  $q$  وتظل ثابتة. بالإضافة إلى ذلك، قمنا بتوسيع هذه الدراسة إلى نظام غاز يتكون من  $N$  هزاز كمي كسري في فضاء احادي البعد، حيث ترتبط دالة الكثافة للنظام بنوع المشتق المستخدم.

**كلمات البحث:** المشتق الكسري، ميكانيك الكم الكسري، الغاز المثالي، الهزاز الكسري، دالة التوزيع، معادلة ليوفيل، دالة الكثافة.

# TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES . . . . .	iv
LISTE DES FIGURES . . . . .	vi
LISTE DES SYMBOLES . . . . .	vii
INTRODUCTION GÉNÉRALE . . . . .	1
BIBLIOGRAPHIE . . . . .	6
<b>1 QUELQUES ASPECTS FONDAMENTAUX DU CALCUL FRACTIONNAIRE</b> . . . . .	<b>9</b>
1.1 INTRODUCTION . . . . .	9
1.2 FONCTIONS SPÉCIFIQUES POUR LA DÉRIVATION FRACTIONNAIRE . . . . .	11
1.2.1 Fonction Gamma . . . . .	11
1.2.2 Fonction Bêta . . . . .	13
1.2.3 Fonction de Mittag-Leffler . . . . .	14
1.2.4 Fonction Hypergéométrique . . . . .	15
1.2.5 Transcendance de Lerch . . . . .	16
1.3 OPÉRATEURS FRACTIONNAIRES . . . . .	17
1.3.1 Intégration Fractionnaire . . . . .	17
1.3.2 Dérivation Fractionnaire . . . . .	18
1.4 DIFFÉRENTES APPROCHES DE LA DÉRIVATION FRACTIONNAIRE . . . . .	18
1.4.1 Approche de Liouville . . . . .	18
1.4.2 Approche de Riemann-Liouville (R-L) . . . . .	19
1.4.3 Approche de Caputo . . . . .	20
1.5 QUELQUES PROPRIÉTÉS DES DÉRIVÉES FRACTIONNAIRES . . . . .	21
1.6 CONCLUSION . . . . .	22
BIBLIOGRAPHIE . . . . .	23
<b>2 LA MÉCANIQUE QUANTIQUE FRACTIONNAIRE</b> . . . . .	<b>25</b>
2.1 INTRODUCTION . . . . .	25
2.2 NOTION DE BASE . . . . .	27
2.2.1 Fonction D'onde . . . . .	27
2.2.2 Hamiltonien . . . . .	28
2.2.3 Opérateurs Fonctionnels . . . . .	28
2.3 ÉQUATION DE SCHRÖDINGER FRACTIONNAIRE . . . . .	29

2.4	HERMITICITÉ DE L'OPÉRATEUR HAMILTONIEN FRACTIONNAIRE . . .	33
2.5	L'ÉQUATION DE SCHRÖDINGER FRACTIONNAIRE INDÉPENDANTE DU TEMPS . . . . .	35
2.6	APPLICATION DE L'ÉQUATION DE SCHRÖDINGER FRACTIONNAIRE . .	36
2.6.1	Particule dans une boîte . . . . .	36
2.6.2	Oscillateur Quantique Fractionnaire . . . . .	41
2.7	CONCLUSION . . . . .	44
	BIBLIOGRAPHIE . . . . .	45
3	<b>LA MÉCANIQUE STATISTIQUE FRACTIONNAIRE</b>	<b>48</b>
3.1	INTRODUCTION . . . . .	48
3.2	SYSTÈME D'OSCILLATEURS FRACTIONNAIRE . . . . .	50
3.2.1	Fonction de Partition . . . . .	50
3.2.2	Les Trois Approches des Dérivées Fractionnaires . . . . .	54
3.2.3	Comparaison des Ordres non Entiers . . . . .	55
3.2.4	Application à la Fonction de Partition . . . . .	56
3.3	DISCUSSION . . . . .	62
3.4	CONCLUSION . . . . .	63
3.5	ÉQUATION FRACTIONNAIRE DE LIOUVILLE . . . . .	64
3.6	RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DE LIOUVILLE FRACTIONNAIRE . . . . .	68
3.6.1	Gaz Parfait . . . . .	68
3.6.2	Système de Gaz Parfait Fractionnaire . . . . .	69
3.6.3	Système d'oscillateurs Fractionnaires . . . . .	73
3.7	CONCLUSION . . . . .	78
	BIBLIOGRAPHIE . . . . .	79
	CONCLUSION GÉNÉRALE	83
	PUBLICATIONS	86

# LISTE DES FIGURES

2.1	Puits de potentiel infini à une dimension . . . . .	37
2.2	Particule confinée dans une boîte cubique . . . . .	39
3.1	Comparaison des trois définitions de la dérivée : Riemann- Liouville (supérieure), Liouville (intermédiaire) et Caputo (infé- rieure). . . . .	55

# LISTE DES SYMBOLES

## Symboles mathématiques :

$D^\alpha$	Dérivée Fractionnaire d'ordre $\alpha$
${}_a^L D_x^\alpha$	Dérivée Fractionnaire au Sens de Liouville
${}_a^{RL} D_x^\alpha$	Dérivée Fractionnaire au Sens de Riemann-Liouville
${}_a^C D_x^\alpha$	Dérivée Fractionnaire au Sens de Caputo
$\{, \}$	Crochets de Poisson
$I^\alpha$	Intégration Fractionnaire d'ordre $\alpha$
$\nabla$	Laplacien
$S_{D-1}^{(m)}$	Coefficients de stirling du premier type
$C_p^m$	Coefficients binomiaux

## Grandeurs physiques :

$t$	Temps
$r$	Position
$T$	Température
$H_{\alpha,v}$	Hamiltonien
$V(r, t)$	Energie Potentielle
$\Psi(r, t)$	Fonction d'onde
$\rho(r, t)$	Densité de Proabilité
$V$	Volume
$Z_N$	Fonction de Partition
$E$	Energie Totale de la Particule
$\hat{p}$	Opérateur de l'impulsion
$\hat{r}$	Opérateur de la Coordonnée D'espace de la Particule
$V_k(t, q, p)$	Composantes du Champ de Vitesse
$F_k(t, q, p)$	Composantes du Champ de Force

## Fonctions mathématiques

$\Gamma(x)$	Fonction Gamma
$\gamma(x, \alpha)$	Fonction Gamma Incomplète inférieure
$\Gamma(x, \alpha)$	Fonction Gamma Incomplète supérieure
$B(x, y)$	Fonction Bêta
$E_\alpha(z)$	Fonction de Mittag à un seul Paramètre
$E_{\alpha,\beta}(z)$	Fonction de Mittag à deux Paramètres

${}_2F_1(a, b; c; z)$ .....	Fonctions Hypergéométriques de Gauss
${}_1F_1(a; b; z)$ .....	Fonctions Hypergéométriques Confluente
$\Phi(z, s, a)$ .....	Fonction Transcendante de Lerch
$\theta(x)$ .....	Fonction Heaviside
$\delta$ .....	Distribution de Dirac

**Constantes physiques :**

$K_B$ .....	Constante de Boltzmann
$h$ .....	Constante de Planck
$\hbar$ .....	Constante de Planck réduite

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

L'une des théories qui peut être considérée à la fois ancienne que nouvelle et qui connaît actuellement une grande popularité parmi les chercheurs dans les sciences fondamentales et en ingénierie, est celle du " calcul Fractionnaire " qui étend la dérivation et l'intégration aux ordres fractionnaires [1].

L'intégration et la différenciation fractionnaires sont des généralisations des notions d'intégration et de différenciation d'ordre entier. Le concept de dérivation non entière remonte à 1695, l'orsque l'Hospital et Leibniz s'interrogeaient dans leurs correspondances sur la signification d'une dérivée d'ordre 1/2 [2]. De nombreux mathématiciens se sont penchés sur cette question, et ont apporté d'importantes contributions au calcul fractionnaire, notamment P.S. Laplace (1812), J.B.J. Fourier (1822), N.H. Abel (1823-1826), J. Liouville (1832-1873), B. Riemann (1847), A.K. Grunwald (1867-1872), A.V. Letnikov (1868-1872), H. Laurent (1884), P.A. Nekrassov (1888), O. Heaviside (1892-1922), S. Pincherle (1902), M. Riesz (1949)...etc [3]- [6].

Au début, c'était presque un jeu d'esprit pour certains mathématiciens de renom qui voulaient généraliser la notion de différenciation d'ordre entier en utilisant des opérateurs d'ordre fractionnaire permettant le calcul de la dérivée d'ordre  $\alpha$  réel ou complexe d'une fonction différentiable  $f(t)$ , soit :

$$D^\alpha f(t) = \frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha}$$

L'objectif du calcul fractionnaire, qui existe depuis environ 300 ans, est de résoudre le problème des ordres non-entiers des dérivées traditionnelles [7].

Cependant, c'est surtout au cours de la deuxième moitié du XXe siècle que des

avancées majeures concernant la théorie de la dérivation et de l'intégration fractionnaires ont été réalisées [8]- [11].

Il convient de noter que la théorie des calculs fractionnaires est un domaine relativement récent qui a fait l'objet de conférences spécialisées que depuis un peu plus de trente ans. La première conférence a été organisée par B. Ross à l'université de New Haven en juin 1974, et il a également édité les débats. Quant à la première monographie sur le sujet, elle a été publiée par K.B. Oldham et J. Spanier en 1974 après une collaboration commencée en 1968.

Parallèlement à ce progrès théorique, quelques aspects pratiques limités du calcul fractionnaire ont été développés par Abel (1823, 1826), Boole (1824), Heavisid (1892,1922) et Gemant (1936) pour résoudre certains problèmes physiques.

Depuis ces découvertes, de nombreuses contributions théoriques et pratiques ont mis en évidence l'importance des systèmes à ordre fractionnaire ainsi que leur utilité dans divers domaines tels que l'électricité, la chimie, la biologie, l'économie, l'automatique, le traitement du signal et dans diverses applications telles que la modélisation, l'identification et la commande.

Ces dernières années, un intérêt considérable a été porté au calcul fractionnaire grâce à son application dans différents domaines de la physique et de l'ingénierie [12], [13], [14]. Les ingénieurs n'ont pleinement compris l'importance des équations différentielles d'ordre non entier que ces trois dernières décennies, particulièrement lorsqu'ils ont constaté que la description de certains systèmes est plus précise lorsqu'une dérivée fractionnaire est utilisée [15]. L'émergence de la dérivation fractionnaire découle de la nécessité de décrire les changements non instantanés ou les effets à long terme dans les systèmes naturels et mathématiques. Dans le calcul traditionnel, la dérivation mesure le changement instantané ou rapide de la valeur, mais elle ne rend pas compte des effets des changements à long terme ni de la mémoire du système. Le recours à la dérivation fractionnaire est une tentative d'élargir notre compréhension du changement et de la

dynamique dans les systèmes où des effets à long terme ou une mémoire sont observés.

Cela se manifeste dans de nombreux domaines, notamment :

Dynamique temporelle à long terme : Dans certains cas, notamment dans les systèmes physiques et biologiques, les effets des changements antérieurs persistent et perdurent dans le temps. La dérivation fractionnaire permet une meilleure représentation de ces dynamiques par rapport aux dérivations traditionnelles.

Interactions non locales : Dans certaines circonstances, les effets de points éloignés peuvent influencer une valeur spécifique. La dérivation fractionnaire offre une manière mathématique d'exprimer ces effets non locaux.

Contrôle des systèmes dynamiques : Lors de la conception de systèmes de contrôle pour des systèmes dynamiques complexes, l'utilisation de la dérivation fractionnaire peut améliorer les performances et la stabilité du système.

Expansion des modèles mathématiques physiques : En physique, les phénomènes présentant des effets à long terme jouent souvent un rôle essentiel. L'incorporation de la dérivation fractionnaire renforce la capacité des modèles mathématiques à représenter précisément ces phénomènes.

Analyse des signaux et traitement des données : Dans le domaine du traitement des signaux, la dérivation fractionnaire peut améliorer la capacité des systèmes à répondre à des signaux comportant une composante temporelle étendue. Ainsi, le calcul fractionnaire est entré dans le domaine de la mécanique quantique et s'est largement répandu pour des raisons à la fois mathématiques et physiques. La plupart des scientifiques et chercheurs s'intéressent à l'application du concept du calcul fractionnaire en physique quantique et au développement d'une nouvelle mécanique, la mécanique quantique fractionnaire.

Laskin [16] a réussi à généraliser la dérivation fractionnaire en mécanique quantique sans aucune contradiction avec les postulats de la mécanique quantique standard. il a également montré un hamiltonien fractionnaire pour certains systèmes [17].

Nous ne pouvons pas parler de la mécanique quantique sans mentionner l'équation de Schrödinger. Cette équation est considérée comme le fondement de la mécanique quantique et explique le comportement quantique des systèmes physiques. Elle a été développée en 1926 par le physicien autrichien Erwin Schrödinger et depuis lors, elle a été utilisée pour décrire les états quantiques des particules et des systèmes physiques.

Dans le cas général, nous pouvons généraliser l'équation de Schrödinger fractionnaire. L'équation fractionnaire de Schrödinger comprend une dérivée d'ordre  $\alpha$  au lieu de la dérivée seconde pour ( $\alpha = 2$ ) dans l'équation de Schrödinger standard, d'où le terme «mécanique quantique fractionnaire».

En effet, de nombreux auteurs [18]- [23] ont discuté des résultats de la mécanique quantique fractionnaire depuis son émergence. Parmi eux, citons Laskin [16], qui a montré que la généralisation fractionnaire de l'équation de Schrödinger permet de décrire des systèmes quantiques qui ne peuvent pas être décrits par l'équation de Schrödinger standard.

Cette révolution de la mécanique quantique a conduit à l'exploration de l'application du calcul fractionnaire en physique statistique, afin de comprendre comment les problèmes fondamentaux de la physique statistique seront affectés.

Récemment, Alisultanov [24], [25] a discuté les possibilités d'introduction du concept de la mécanique quantique fractionnaire en physique statistique quantique et de son interprétation physique. Ils ont également étudié les propriétés thermodynamiques de quelques systèmes statistiques quantiques avec des Hamiltoniens fractionnaires.

Le but principal de notre travail est d'étudier les propriétés thermodynamiques de certains systèmes classiques et quantiques basés sur la mécanique fractionnaire. Notre travail est divisé en trois chapitres :

Le premier chapitre, intitulé " Quelques Aspects Fondamentaux de Calcul Fractionnaire ", présente les bases théoriques du calcul fractionnaire nécessaires pour le développement des chapitres suivants. Les fonctions de base du calcul frac-

tionnaire sont présentées, et les définitions des dérivés fractionnaires les plus populaires telles que Liouville, Reimann- Liouville et Caputo, sont identifiées, ainsi que leurs propriétés.

Le deuxième chapitre, intitulé " La Mécanique Quantique Fractionnaire ", présente les principes de la mécanique quantique en présence de la dérivée fractionnaire dans l'hamiltonien, avec quelques applications de l'équation de Schrödinger fractionnaire.

Le troisième chapitre, intitulé " La Mécanique Statistique Fractionnaire " est divisé en deux parties. la première partie est consacrée à l'étude des propriétés thermodynamiques d'un système de gaz composé de  $N$  oscillateurs quantique indépendants, d'écrits par un hamiltonien fractionnaire. Trois définitions de dérivées fractionnaires (Liouville, Riemann-Liouville, Caputo) sont utilisées dans cette étude. La deuxième partie vise à déterminer la densité pour différents systèmes physiques en résolvant l'équation de Liouville. Nous entamons cette partie en dérivant l'équation de Liouville en utilisant le concept de dérivée fractionnaire. Ensuite, nous procédons à la résolution de l'équation de Liouville fractionnaire pour deux systèmes spécifiques : un gaz parfait et un gaz composé de  $N$  oscillateurs fractionnaires indépendants. Cette étude est réalisée en employant deux définitions de la dérivée fractionnaire, à savoir Riemann-Liouville et Caputo. En plus des définitions utilisées dans cette recherche sur la dérivée fractionnaire, il existe de nouvelles définitions [26] [27] [28] [29], ce qui souligne l'importance du sujet et la nécessité de poursuivre la recherche. Ces nouvelles définitions mettent en lumière l'importance fondamentale de la dérivée fractionnaire en tant qu'outil puissant pour modéliser et comprendre des phénomènes complexes. Ainsi, elles enrichissent notre capacité à relever les défis variés.

# BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. Djouambi, Contribution a la Commande Crone, Thèse de Doctorat, Université Mentouri de Constantine, (2008). (Cité page 1.)
- [2] S. Dugowson, Les Différentielles Métaphysiques : Histoire et Philosophie de la Généralisation de L'ordre de Dérivation, Thèse de Doctorat, Université Paris Nord, (1994). (Cité page 1.)
- [3] R. Gorenflo and F. Mainardi, Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics, Springer-Verlag, Wien and New York, (1997). (Cité page 1.)
- [4] N.H. Abel, Solution de Quelques Problèmes à L'aide D'intégrales Définies, Magazin for Natur videnskaberne, Kristiania, 55–63, (1823).
- [5] J. Liouville, Mémoire sur le Calcul des Différentielles à Indices Quelconques, J. Ecole Polytechnique (Paris), Num 21, Tome XIII, (1832).
- [6] S. Dugowson, L'élaboration Par Riemann d'une Définition de La Dérivation D'ordre Non Entier, Revue d'histoire des Mathématiques, 3. 49–97, (1997). (Cité page 1.)
- [7] M. Thomas et al, Sur une Généralisation de L'opérateur Fractionnaire, arXiv :1111.1898v1, [physics.class-ph] 8 Nov, (2011). (Cité page 1.)
- [8] K.B. Oldham and J. Spanier, The Fractional Calculus : Theory and Application of Differentiation and Integration to Arbitrary Order, Academic Press, New York, (1974). (Cité page 2.)
- [9] K.S. Miller and B. Ross, An Introduction To The Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, John Wiley Sons, Inc, New York, (1993).
- [10] S.G. Samko, A.A. Kilbas and O.I Marichev, Fractional Integrals and Derivatives : Theory and Applications, Gordon and Breach, Amsterdam, (1993).

- [11] A. Oustaloup, *La Dérivation Non Entière : Théorie, Synthèse et Applications*, Edition Hermès, Paris, (1995). (Cité page 2.)
- [12] H.H. Sun and al, *Analysis of Polarization Dynamics by Singularity Decomposition Method*, *Annals of Biomedical Engineering*, vol. 20, (1992). (Cité page 2.)
- [13] X.J. Yang and al, *A New Fractional Derivative without Singular Kernel : Application To The Modelling of The Steady Heat Flow*, *Therm. Sci.* 20(2), 753–756, (2016). (Cité page 2.)
- [14] X.J. Yang, J.A.Tenreiro Machado, *A New Fractional Operator of Variable Order : Application In The Description of Anomalous Diffusion*, *Physica A.* 48, 276–283, (2017). (Cité page 2.)
- [15] A. Boroomand, M.M. Baher, *Fractional Based Approach in Neural Networks for Identification Problem*, *Chines Control and Decision Conference (CCDC)*, (2009). (Cité page 2.)
- [16] N. Laskin, *Fractals and Quantum Mechanics*, doi :10.1063/1.1050284, (2000). (Cité pages 3 et 4.)
- [17] N. Laskin, *Principles of Fractional Quantum Mechanics*, arXiv : 1009.5533v1, math-ph, (2010). (Cité page 3.)
- [18] V. E. Tarasov, *Fractional Heisenberg Equation*, *Physical Letters A*, 372 : 2984–2988, (2008). (Cité page 4.)
- [19] V.E. Tarasov, *Weyl Quantization of Fractional Derivatives*, *J. Math. Phys.*, 49 :102112, (2008).
- [20] X. Guo and M. Xu, *Some Physical Applications of Fractional Schrödinger Equation*, *J. Math. Phys.*, 47 :082104, (2006).
- [21] M. Naber, *Time Fractional Schrödinger Equation*, *J. Math. Phys.*, 45 :3339, (2004).
- [22] R. Herrmann, arXiv :math-ph/1210.4410v2[math-ph], (2012).

- [23] R. Herrmann, arXiv :1308.4587v2 [physics.gen-ph], (2013). (Cité page 4.)
- [24] Z.Z. Alisultanov, R. P. Meilanov, Some Features of Quantum Statistical Systems With an Energy Spectrum of The Fractional-power Type, *Theor, Math. Phys.* 171 :404-416, (2012). (Cité page 4.)
- [25] Z.Z. Alisultanov, R. P. Meilanov, Some Problems of The Theory of Quantum Statistical Systems With an Energy Spectrum of The Fractional Power Type, *Theor, Math. Phys.* 173 :135-148, (2012). (Cité page 4.)
- [26] R. Khalil, et al, A new definition of fractional derivative, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, (2014). (Cité page 5.)
- [27] Michele Caputo and Mauro Fabrizio, A new Definition of Fractional Derivative without Singular Kernel, *Progr. Fract. Differ. Appl.* 1, No. 2, 73-85, (2015). (Cité page 5.)
- [28] A. Kajouni, et al, A review of definitions of fractional derivatives and A New Conformable Fractional Derivative and Applications, *International Journal of Differential Equations*, (2021). (Cité page 5.)
- [29] M. Abu-Shady and Mohammed K. A. Kaabar, A Generalized Definition of the Fractional Derivative with Applications, *Mathematical Problems in Engineering*, (2021).  
(Cité page 5.)

## QUELQUES ASPECTS FONDAMENTAUX DU CALCUL FRACTIONNAIRE

### 1.1 INTRODUCTION

Lorsqu'on aborde la notion de dérivée, on découvre rapidement la possibilité d'appliquer le concept de dérivée à la fonction dérivée elle-même, ce qui permet d'introduire la dérivée seconde ainsi que les dérivées d'ordre entier. On peut également considérer l'intégration comme une dérivée d'ordre "moins un". Cela soulève la question de savoir s'il existe un équivalent fractionnaire pour ces dérivées d'ordres successifs [1].

La question initiale qui a donné son nom au calcul fractionnaire était la suivante : Est-ce que la signification d'une dérivée d'ordre entier  $\frac{d^n f}{dx^n}$  peut être étendue pour avoir une signification lorsque  $n$  est une fraction ? Plus tard, cette question a évolué : Est-ce que  $n$  peut être n'importe quel nombre : fractionnaire, irrationnel ou complexe ?

cette dernière question a reçu une réponse affirmative lorsque Leibniz a annoncé dans une lettre à l'Hopital pour le symbole  $\frac{d^n f}{dx^n}$  pour la  $n^{\text{ème}}$  dérivée d'une fonction  $f$ . L'Hopital a répondu en demandant ce que signifiait  $\frac{d^n f}{dx^n}$  si  $n = \frac{1}{2}$ , c'est-à-dire une fraction. cette lettre de l'Hopital a été écrite en 30 septembre 1695 [2].

Le calcul fractionnaire existe depuis 300 ans sur le plan mathématique. Au cours de ces années, de nombreux mathématiciens ont contribué à généraliser la notion de dérivation aux ordres non entiers. Voici quelques-uns de leurs travaux :

En 1823, Abel a résolu une équation intégrale associée aux problème des tautochrones, considérée comme la première application du calcul fractionnaire.

En 1832, Liouville a proposé une définition basée sur la formule de dérivée de la fonction exponentielle.

En 1868, Grunwald et Letnikov ont développé une approche de la dérivée fractionnaire en terme de série convergente.

En 1892, Hadamard a publié un article dans lequel la dérivée d'ordre non entier d'une fonction analytique doit être effectuée en termes de sa série de Taylor.

Après 1900, le calcul fractionnaire a connu un développement rapide et d'autres définitions ont été proposées.

En 1939, Riesz a démontré le théorème de la valeur moyenne pour les intégrales fractionnaires et a introduit une autre formule associée à la transformée de Fourier.

En 1967, Caputo a proposé une définition plus restrictive que la définition de Reimann-Liouville, mais plus appropriée pour les équations différentielles fractionnaires avec conditions initiales (problème de Cauchy).

En 1974, Oldham et Spanier ont écrit le premier livre sur le calcul fractionnaire, regroupant des définitions, des propriétés et des opérateurs intégraux-différentiels d'ordre fractionnaire [3].

Ces dernières années, un intérêt considérable a été porté au calcul fractionnaire en raison de ses applications dans différents domaines de la physique et de l'in-

génierie [4] [5] [6], ce qui a conduit à de nombreuses conférences, livres et articles sur le sujet.

Dans ce chapitre, nous fournirons un aperçu du calcul fractionnaire en mettant l'accent sur trois Approches couramment utilisées et pratiques des dérivées fractionnaires : les approches de Liouville, de Riemann-Liouville et de Caputo. Nous présenterons également quelques fonctions spécifiques utilisées dans le contexte de la dérivation fractionnaire.

## 1.2 FONCTIONS SPÉCIFIQUES POUR LA DÉRIVATION FRACTIONNAIRE

Effectivement, la fonction Gamma d'Euler, la fonction Bêta et la fonction de Mittag-Leffler sont des fonctions essentielles dans la théorie du calcul fractionnaire. Leur utilisation est répandue et elles jouent un rôle crucial dans de nombreuses applications.

### 1.2.1 Fonction Gamma

#### Définition

En effet, en 1729, le mathématicien suisse Leonhard Euler a introduit la fonction gamma pour généraliser la notion de factorielle aux valeurs non entières. La fonction gamma est étroitement liée à la dérivation fractionnaire, car elle apparaît dans les formules de dérivées fractionnaires et permet de définir des opérateurs de dérivation fractionnaires.

pour  $x$  réelle et strictement positive, la fonction gamma continue en  $x$  est définie comme suit [7] :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (1.1)$$

#### Propriétés [3] [8]

1. Relation fonctionnelle :

Une propriété importante de la fonction  $\Gamma(x)$  est la relation de récurrence suivante :

$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x) \quad (1.2)$$

En effet, par une intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} \Gamma(x + 1) &= \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt & (1.3) \\ &= [-t^x e^{-t}]_0^{+\infty} + x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \\ &= x\Gamma(x) \end{aligned}$$

2. Relation avec la fonction factorielle :

La fonction Gamma d'Euler généralise la notion de factorielle comme suit :

$$\Gamma(n + 1) = n! \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1.4)$$

car on a,  $\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n)$  et en utilisant  $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$ , on déduit :

$$\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1! \quad (1.5)$$

$$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2.1! = 2! \quad (1.6)$$

$$\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3.2! = 3! \quad (1.7)$$

Alors, par récurrence on obtient :

$$\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n) = n(n - 1)! = n! \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1.8)$$

On convient alors de définir  $\Gamma(x)$  par la relation :

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x + 1)}{x} \quad (1.9)$$

3. Les valeurs particulières de  $\Gamma(x)$  sont :

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1 = \Gamma(2) \quad (1.10)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (1.11)$$

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi} \quad (1.12)$$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}(2n - 1)!}{2^n} \quad (1.13)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) = (-1)^n \frac{2^n \sqrt{\pi}}{(2n - 1)!} \quad (1.14)$$

4. La fonction gamma est continue sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ .

5. La définition de la fonction gamma par produits infinis, due à Euler :

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\dots(x+n)} = \frac{1}{x} \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{(1 + \frac{1}{k})^x}{1 + \frac{x}{k}} \quad (1.15)$$

6. La fonction Gamma peut être écrite en termes de deux composantes :

$$\Gamma(x) = \gamma(x, \alpha) + \Gamma(x, \alpha) \quad (1.16)$$

où  $\gamma(x, \alpha)$  est la fonction gamma incomplète inférieure, Elle est définie par :

$$\gamma(x, \alpha) = \int_0^\alpha e^{-t} t^{x-1}, \quad \text{Re}(x) > 0 \quad (1.17)$$

et  $\Gamma(x, \alpha)$  est la fonction gamma incomplète supérieure, Elle est définie par :

$$\Gamma(x, \alpha) = \int_\alpha^\infty e^{-t} t^{x-1}, \quad \text{Re}(x) > 0 \quad (1.18)$$

Les fonctions gamma incomplètes sont utilisées pour obtenir la différentiation et l'intégration fractionnaire des fonctions périodiques.

### 1.2.2 Fonction Bêta

#### Définition

La fonction Bêta, notée  $B(x, y)$ , a été proposée par Euler en 1772. Elle est une autre fonction spéciale étroitement liée à la fonction Gamma. La fonction bêta est définie pour les nombres réels  $x$  et  $y$  strictement positifs. Elle est souvent utilisée en combinaison avec la fonction Gamma pour exprimer des intégrales et des formules de dérivation fractionnaire.

La fonction bêta est définie par l'intégrale suivante [4] :

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad \text{Re}(x) > 0, \text{Re}(y) > 0 \quad (1.19)$$

#### Propriétés [9]

1. Symétrique : La fonction Bêta est une fonction symétrique :

$$B(x, y) = B(y, x) \quad (1.20)$$

2. Différentes formes d'intégrale :

$$B(x, y) = \int_0^{\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} dt \quad (1.21)$$

$$B(x, y) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1} \theta \cos^{2y-1} \theta d\theta \quad (1.22)$$

3. Relation entre la fonction bêta et la fonction gamma :

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (1.23)$$

4. Equations fonctionnelles :

$$B(x, x) = 2^{1-2x} B\left(\frac{1}{2}, x\right) \quad (1.24)$$

$$B(x, y+1) = \frac{y}{x+y} B(x, y) \quad (1.25)$$

5. Série de la fonction Bêta :

$$B(x, y) = \frac{1}{y} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y \frac{(y-1)\dots(y-n)}{n!(x+n)} \quad y > 0 \quad (1.26)$$

### 1.2.3 Fonction de Mittag-Leffler

#### La fonction de Mittag-Leffler à un seul paramètre

La fonction exponentielle  $e^z$ , joue un rôle très important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier.

Cette fonction a été introduite par G.M.Mittag-Leffler en 1902 et est donnée par la série suivante [10] :

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (1.27)$$

#### La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres

Cette fonction joue également un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire et a été introduite par R.P.Agarwal et Erdelyi (1953-1954) [8].

La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres est définie par :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (\alpha > 0, \beta > 0) \quad (1.28)$$

$$E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = E_{\alpha}(z) \quad (1.29)$$

### Propriétés [7]

1. A partir de la définition (1.27) et en utilisant la relation de récurrence de la fonction gamma (1.4), on remarque que :

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z \quad (1.30)$$

$$E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^z - 1}{z} \quad (1.31)$$

$$E_{1,3}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+3)} = \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{e^z - 1 - z}{z^2} \quad (1.32)$$

2. Les fonctions sinus hyperboliques et cosinus hyperboliques sont également des cas particuliers de la fonction de Mittag-Leffler :

$$E_{2,1}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{2k!} = \cosh(z) \quad (1.33)$$

$$E_{2,2}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sinh(z) \quad (1.34)$$

## 1.2.4 Fonction Hypergéométrique

### Définition

La fonction hypergéométrique est une fonction spéciale qui joue un rôle important dans de nombreux domaines des mathématiques et de la physique. Elle est souvent notée  ${}_pF_q(a_i, b_i; z)$  et peut être définie par la formule suivante [11] :

$${}_pF_q(a_i, b_i; z) = \frac{\prod_{j=1}^q \Gamma(b_j)}{\prod_{i=1}^p \Gamma(a_i)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^p \Gamma(a_i + k)}{\prod_{j=1}^q \Gamma(b_j + k)} \frac{z^k}{k!} \quad (1.35)$$

$$\frac{d}{dz} \cdot {}_pF_q(a_i, b_i; z) = \frac{\prod_{i=1}^p \Gamma(a_i)}{\prod_{j=1}^q \Gamma(b_j)} \cdot {}_pF_q(a_i + 1, b_i + 1; z) \quad (1.36)$$

La fonction hypergéométrique a de nombreuses propriétés intéressantes et est utilisée pour résoudre divers problèmes mathématiques et physiques. Elle est

notamment utilisée dans la résolution d'équations différentielles, l'analyse de fonctions spéciales et la théorie des probabilités. Différents types de fonctions hypergéométriques existent, tels que la fonction hypergéométrique confluente  ${}_1F_1(a; b; z)$  et la fonction hypergéométrique généralisée (de Gauss)  ${}_2F_1(a, b; c; z)$ , qui correspondent à différentes restrictions des paramètres. Chacun de ces types de fonctions hypergéométriques possède ses propres propriétés et applications spécifiques.

### Propriétés

1. La fonction  ${}_1F_1(a; b; z)$  est une généralisation de la fonction exponentielle pour  $b = a$

$${}_1F_1(a; a; z) = \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a+k)} \frac{z^k}{k!} \quad (1.37)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z \quad (1.38)$$

2. Lorsqu'on la compare à la propriété correspondante (1.30) de la fonction de Mittag-Leffler, on obtient :

$${}_1F_1(a; a; z) = E_{1,1}(z) \quad (1.39)$$

3. D'autres propriétés intéressantes de la fonction hypergéométrique confluente, telles que rapportées par [9], sont les suivantes :

$${}_1F_1(a; b; 0) = 1 \quad (1.40)$$

$$\frac{d}{dz} {}_1F_1(a; b; z) = \frac{a}{b} {}_1F_1(a+1; b+1; z) \quad (1.41)$$

### 1.2.5 Transcendance de Lerch

#### Définition

La fonction transcendantale de Lerch est une fonction spéciale qui porte le nom du mathématicien suisse Mathias Lerch. Elle est définie pour des valeurs complexes de ses paramètres et est souvent notée  $\Phi(z, s, a)$ . Elle est définie par la formule [12] :

$$\Phi(z, s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} (a+n)^{-s} z^n \quad (1.42)$$

### Propriétés

1. La relation entre la fonction de Lerch et la fonction hypergéométrique est définie comme suite :

$$\Phi(z, 1, a) = a^{-1} {}_2F_1(1, a; 1 + a; z) \quad (1.43)$$

2. La fonction de Lerch possède des relations avec d'autres fonctions spéciales telles que la fonction gamma, la fonction hypergéométrique et la fonction de Mittag-Leffler. Elle joue également un rôle dans l'évaluation d'intégrales complexes et dans la résolution d'équations différentielles.

## 1.3 OPÉRATEURS FRACTIONNAIRES

Les opérateurs fractionnaires sont des opérateurs mathématiques qui généralisent la notion de dérivation et d'intégration à des ordres non entiers. Ils offrent une extension puissante de la dérivation et de l'intégration traditionnelles, permettant d'aborder des problèmes mathématiques et scientifiques plus complexes et de mieux représenter la réalité des phénomènes étudiés.

### 1.3.1 Intégration Fractionnaire

Pour la dérivée  $n^{\text{ème}}$  d'une fonction  $f$  par rapport à  $x$ , où  $n$  est un entier non négatif, l'intégration et la différenciation sont des opérations inverses.

L'intégration fractionnaire est une généralisation de l'intégration classique qui permet de calculer des intégrales d'ordre non entier. L'intégrale d'ordre  $\alpha$  de la fonction  $f$  (intégrale d'ordre fractionnaire de Riemann-Liouville) est définie par la formule suivante [7] :

$${}_a I_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \quad (1.44)$$

où  $\Gamma(\alpha)$  représente la fonction Gamma d'Euler.

#### Exemple :

Considérons la fonction :  $f(x) = (x-a)^\beta$

utilisons l'intégrale d'ordre fractionnaire de Riemann-Liouville pour cette fonction :

$${}_a I_x^\alpha f(x) = {}_a I_x^\alpha (x-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^\beta dt \quad (1.45)$$

Lorsque nous effectuons le changement de variable  $t = a + (x-a)\tau$ , nous obtenons :

$${}_a I_x^\alpha (x-a)^\beta = \frac{(x-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^\beta d\tau \quad (1.46)$$

$$= \frac{(x-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, \beta+1) \quad (1.47)$$

$$= \frac{(x-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+\alpha)} \quad (1.48)$$

$$= (x-a)^{\beta+\alpha} \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+\alpha)} \quad (1.49)$$

### 1.3.2 Dérivation Fractionnaire

La dérivation fractionnaire est une généralisation de la dérivation classique qui permet de calculer les dérivées d'ordre non entier. Dans cette thèse, nous utiliserons la notation proposée par Davis [8], à savoir  ${}_a D_x^\alpha f(x)$  où  $a$  et  $x$  sont des réels qui désignent respectivement la condition initiale et la variable par rapport à laquelle on applique l'opérateur de dérivation fractionnaire.

## 1.4 DIFFÉRENTES APPROCHES DE LA DÉRIVATION FRACTIONNAIRE

Il existe plusieurs Approches pour la dérivée fractionnaires, chacune ayant ses propres caractéristiques et applications.

Dans cette thèse, nous mettrons en évidence ces approches qui sont fréquemment utilisées dans diverses applications.

### 1.4.1 Approche de Liouville

L'approche de Liouville est l'une des définitions couramment utilisées pour la dérivée fractionnaire. Liouville a réussi à appliquer ses définitions à des problèmes en théorie du potentiel. Le point de départ de son développement théorique était

le résultat connu pour les dérivées d'ordre intégral, qu'il a étendu de manière naturelle aux dérivées d'ordre arbitraire.

$$D^\nu e^{\alpha x} = \alpha^\nu e^{\alpha x} \quad (1.50)$$

Il a supposé que la dérivée arbitraire d'une fonction  $f(x)$  pouvait être développée en une série de la forme [13] :

$$D^\nu f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \alpha_n^\nu e^{\alpha_n x} \quad , \quad \operatorname{Re} \alpha_n > 0 \quad (1.51)$$

où :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{\alpha_n x} \quad , \quad \operatorname{Re} \alpha_n > 0 \quad (1.52)$$

La formule (1.51), connue sous le nom de première formule de Liouville pour une dérivée fractionnaire, généralise de manière naturelle une dérivée d'ordre arbitraire  $\nu$ , où  $\nu$  peut être un nombre rationnel, irrationnel ou complexe. Cependant, cette formule présente l'inconvénient évident de ne s'appliquer qu'aux fonctions de la forme (1.52).

#### 1.4.2 Approche de Riemann-Liouville (R-L)

La dérivée fractionnaire au sens de R-L est l'une des définitions les plus connues et les plus répandues.

Soit  $f$  une fonction intégrable sur  $[a, x]$ . alors, la dérivée fractionnaire d'ordre  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  avec  $n - 1 < \alpha < n$  au sens de R-L est définie par [8] :

$${}^{\text{RL}}D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x - t)^{n - \alpha - 1} f(t) dt \quad (1.53)$$

$$= \frac{d^n}{dx^n} ({}_a I_x^{n - \alpha} f(x)) \quad (1.54)$$

**Exemples :**

En générale la dérivée non entière d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville n'est pas nulle :

$${}^{\text{RL}}D_x^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(1 - \alpha)} (x - a)^{-\alpha} \quad (1.55)$$

La dérivée de  $f(x) = (x - a)^p$  au sens de Riemann-Liouville, avec  $\alpha$  non entier, où  $0 \leq n - 1 < \alpha < n$  et  $p > -1$ , est donnée par :

$${}_a^{RL}D_x^\alpha (x - a)^p = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^x (x - \tau)^{n - \alpha - 1} (\tau - a)^p d\tau \quad (1.56)$$

En effectuant le changement de variable  $\tau = a + s(x - a)$ , nous obtenons :

$${}_a^{RL}D_x^\alpha (x - a)^p = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dx^n} (x - a)^{n + p - \alpha} \int_a^1 (1 - s)^{n - \alpha - 1} s^p ds \quad (1.57)$$

$$= \frac{\Gamma(n + p - \alpha + 1) B(n - \alpha, p + 1)}{\Gamma(n - \alpha) \Gamma(p - \alpha + 1)} (x - a)^{p - \alpha} \quad (1.58)$$

$$= \frac{\Gamma(n + p - \alpha + 1) \Gamma(n - \alpha) \Gamma(p + 1)}{\Gamma(n - \alpha) \Gamma(p - \alpha + 1) \Gamma(n + p - \alpha + 1)} (x - a)^{p - \alpha} \quad (1.59)$$

$$= \frac{\Gamma(p + 1)}{\Gamma(p - \alpha + 1)} (x - a)^{p - \alpha} \quad (1.60)$$

### 1.4.3 Approche de Caputo

La dérivée fractionnaire d'ordre  $\alpha$  de la fonction  $f$  au sens de Caputo est définie par [4] :

$${}_a^C D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^x (x - t)^{n - \alpha - 1} f^{(n)}(t) dt \quad (1.61)$$

$$= {}_a I_x^{n - \alpha} \left( \frac{d^n}{dx^n} f(x) \right) \quad (1.62)$$

où :  $0 \leq n - 1 < \alpha < n$ ,  $n \in \mathbb{N}$

L'avantage principal de l'approche de Caputo est que les conditions initiales des équations différentielles fractionnaires avec les dérivées de Caputo ont la même forme que les conditions initiales des équations différentielles d'ordre entier pour les fonctions inconnues à la borne inférieure  $x = 0$ .

La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle :

$${}_a^C D_x^\alpha C = 0 \quad (1.63)$$

#### Exemples :

La dérivée de  $f(x) = (x - a)^p$  au sens de Caputo, avec  $\alpha$  non entier, où

$0 \leq n - 1 < \alpha < n$  et  $p > n - 1$ , est donnée par :

$${}_a^C D_x^\alpha (x - a)^p = \frac{\Gamma(p + 1)}{\Gamma(n - \alpha) \Gamma(p - n + 1)} \int_a^x (x - t)^{n - \alpha - 1} (t - a)^{p - n} dt \quad (1.64)$$

où :

$$f^{(n)}(t) = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-n+1)}(t-a)^{p-n} \quad (1.65)$$

En effectuant le changement de variable  $t = a + s(x-a)$ , on obtient :

$${}_a^C D_x^\alpha (x-a)^p = \frac{\Gamma(p+1)(x-a)^{p-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n+1)} \int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1} s^{p-n} dt \quad (1.66)$$

$$= \frac{\Gamma(p+1) B(n-\alpha, p-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n+1)} (x-a)^{p-\alpha} \quad (1.67)$$

$$= \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n+1)\Gamma(p-\alpha+1)} (x-a)^{p-\alpha} \quad (1.68)$$

$$= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} (x-a)^{p-\alpha} \quad (1.69)$$

## 1.5 QUELQUES PROPRIÉTÉS DES DÉRIVÉES FRACTIONNAIRES

Les principales propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire sont les suivantes [14] [13] :

1. Si  $f(x)$  est une fonction analytique de  $x$ , alors sa dérivée d'ordre fractionnaire  $D^\alpha f(x)$  est une fonction analytique de  $x$  et  $\alpha$ .
2. Pour  $\alpha = n$ , où  $n$  est un nombre entier, l'opérateur  $D_x^\alpha$  produit le même résultat que la dérivation classique d'ordre entier.
3. Pour  $\alpha = 0$ , l'opérateur  $D_x^\alpha$  est l'opérateur identité :

$$D^0 f(x) = f(x) \quad (1.70)$$

4. La dérivée d'ordre fractionnaire de l'intégrale de même ordre de la fonction  $f(x)$  donne :

$${}_a D_x^\alpha I_x^\alpha f(x) = f(x) \quad (1.71)$$

5. La dérivée fractionnaire est une opération linéaire :

$$D^\alpha(\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda D^\alpha f(x) + \mu D^\alpha g(x) \quad (1.72)$$

6. La dérivation et l'intégration fractionnaires ne commutent pas en général :

$$D^p D^q f(x) \neq D^q D^p f(x) \quad (1.73)$$

7. La relation entre la dérivée de Caputo et de R-L est donnée par :

$${}_a^c D_x^\alpha f(x) = {}_a^{RL} D_x^\alpha f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} \quad (1.74)$$

Soit  $\alpha \geq 0$ , avec  $n-1 \leq \alpha < n$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , si  $f^{(k)}(a) = 0$  pour  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ , alors :

$${}_a^c D_x^\alpha f(x) = {}_a^{RL} D_x^\alpha f(x) \quad (1.75)$$

## 1.6 CONCLUSION

Ce premier chapitre nous a donné un aperçu du calcul fractionnaire ainsi que de ses différentes approches utilisées dans diverses applications. Nous avons débuté en introduisant les fonctions fondamentales du calcul fractionnaire et examiné leurs propriétés. Ensuite, nous avons présenté les définitions les plus couramment utilisées du calcul fractionnaire, notamment celles de Liouville, Riemann-Liouville et Caputo. Enfin, nous avons exploré certaines propriétés importantes du calcul fractionnaire.

Le prochain chapitre, intitulé "La Mécanique Quantique Fractionnaire", se concentrera sur les concepts généraux de cette théorie et approfondira les applications de la dérivée fractionnaire dans le domaine de la mécanique quantique.

# BIBLIOGRAPHIE

- [1] F. Dubois, et al, Introduction à La Dérivation Fractionnaire Théorie et Applications, France 16 mars, (2009). (Cité page 9.)
- [2] B. Ross, The Development of Fractional Calculus 1695-1900, *Historia Math*, 4 : 75-89, (1977). (Cité page 10.)
- [3] K.B. Oldham and J. Spanier, *The Fractional Calculus : Theory and Application of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*, Academic Press, New York, (1974). (Cité pages 10 et 11.)
- [4] A.A. Kilbas, et al, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier, North-Holland, (2006). (Cité pages 11, 13 et 20.)
- [5] R. Hilfer, *Applications of Fractional Calculus In Physics*, World Scientific, Singapore City, (2000). (Cité page 11.)
- [6] R.R. Nigmatullin, Fractional Kinetic Equations and Universal Decoupling of a Memory Function in Mesoscale Region, *Physica. A*, 363 : 282-298, (2006). (Cité page 11.)
- [7] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations : An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations to Methods of Their Solution and Some of Their Applications*, vol 198 *Math. Sci. Engin*, San Diego, (1999). (Cité pages 11, 15 et 17.)
- [8] S. Das, *Functional Fractional Calculus for System Identification and Control*, Springer-Verlag, Berlin, new york(2008). (Cité pages 11, 14, 18 et 19.)
- [9] I.S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, 7th edn. Elsevier, Amsterdam, (2007). (Cité pages 13 et 16.)

- 
- [10] H. Nasralah, Time Fractional Formalisme : Classical and Quantum Phenomena, Applications of Fractional Calculus in Physics, Prespacetime Journal, Vol. 3, Issue 1, pp. 99-108, January, (2012). (Cité page 14.)
- [11] R. Herrmann, Fractional Calculus in An Introduction for Physicists, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, Singapore, (2011). (Cité page 15.)
- [12] W. Magnus et al, Formulas and Theorems For The Special Functions of Mathematical Physics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (1966). (Cité page 16.)
- [13] K.S. Miller and B. Ross, An Introduction To The Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, John Wiley Sons, Inc, New York, (1993). (Cité pages 19 et 21.)
- [14] Kh. Belakroum, Existence et Positivité de La Solution d'un Problème Aux Limites Fractionnaire, Mémoire de Magister, Université de Annaba, (2013). (Cité page 21.)

---

# LA MÉCANIQUE QUANTIQUE FRACTIONNAIRE

## 2.1 INTRODUCTION

**A**u début du XXe siècle, les physiciens ont été confrontés à des phénomènes énigmatiques qui défiaient les explications de la physique classique. Cette quête de compréhension a donné naissance à une nouvelle théorie révolutionnaire, connue sous le nom de mécanique quantique.

La mécanique quantique, fruit des travaux de nombreux scientifiques, s'est développée rapidement en quelques années. Son fondement repose sur l'équation de Schrödinger, formulée par Erwin Schrödinger en 1925 [1]. Cependant, pour résoudre des problèmes appliqués dans divers domaines scientifiques, un nouvel outil mathématique a émergé : le calcul fractionnaire [2]. Ces dernières années, les mathématiciens et physiciens se sont intéressés de près aux opérateurs différentiels et aux systèmes d'ordre fractionnaire, Plusieurs chercheurs [2]- [9] ont

appliqué le concept de la dérivée fractionnaire en mécanique quantique et développé une nouvelle mécanique quantique fractionnaire.

Les opérateurs d'ordre fractionnaire trouvent leur origine au XIXe siècle grâce aux travaux pionniers de Riemann et Liouville. Leur objectif était d'étendre la dérivation et l'intégration à des ordres non entiers. Depuis lors, l'utilisation croissante des opérateurs fractionnaires s'est répandue dans de nombreuses disciplines, suscitant un intérêt tant sur le plan théorique que pratique. Ces opérateurs ont trouvé des applications diverses dans des domaines tels que la physique des plasmas [10], la mécanique des milieux fractals [11], l'électromagnétisme [12] [13], les dynamiques chaotiques [14] [15], la cinétique physique [16] [17], la physique de la matière condensée [18] [19], pour n'en citer que quelques-uns.

Dans le domaine de la physique, plus précisément en matière condensée, Tarasov [18] et Laskin [19] ont largement discuté et démontré que l'hamiltonien de certains systèmes avec une interaction à longue portée peut être représenté comme la somme d'une partie cinétique proportionnel à  $(p^\alpha)$  et d'une partie d'interaction proportionnel à  $(x^\nu)$ , où  $\alpha$  et  $\nu$  sont des nombres non entiers, c'est-à-dire des nombres fractionnaires. Il convient de noter que dans le contexte de la mécanique quantique, l'expression  $p^\alpha = (-i\hbar\nabla)^\alpha$  nécessite une attention particulière en raison de la nature fractionnaire de  $\alpha$ . Cette particularité a suscité des recherches approfondies et des développements théoriques spécifiques dans le domaine de la mécanique quantique.

Il est indéniable que le calcul fractionnaire joue un rôle crucial dans notre compréhension et notre modélisation des phénomènes physiques. Il ouvre de nouvelles perspectives et offre de vastes possibilités de recherche dans de nombreux domaines scientifiques.

Ce chapitre se consacre à l'étude des principes de la mécanique quantique en présence de la dérivée fractionnaire dans l'Hamiltonien. Nous examinerons les implications et les conséquences de l'utilisation de la dérivée fractionnaire dans ce contexte.

## 2.2 NOTION DE BASE

### 2.2.1 Fonction D'onde

En physique classique, la trajectoire d'une particule est décrite par sa position  $x(t)$  et son évolution est déterminée par l'équation de Newton. En revanche, en physique quantique, la particule est décrite par une fonction d'onde  $\Psi(x, t)$ , qui est une fonction complexe dépendant des variables réelles  $x$  et  $t$ , et qui obéit à l'équation de Schrödinger. Cette équation est fondamentale en mécanique quantique et permet de décrire l'évolution temporelle de la fonction d'onde et donc du système quantique dans son ensemble [20].

#### Propriétés

La fonction d'onde,  $\Psi(x, t)$ , en mécanique quantique possède plusieurs propriétés importantes qui reflètent les caractéristiques fondamentales des systèmes quantiques.

Voici quelques-unes de ces propriétés [21] :

1. Normalisation : La fonction d'onde  $\Psi$  est dite normalisée si son module carré intégré sur tout l'espace est égal à 1 :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d^3x. \Psi^* \Psi = 1 \quad (2.1)$$

2. Linéarité : si  $\Psi_1$  et  $\Psi_2$  sont des solutions de l'équation de Schrödinger alors toute combinaison linéaire de ces solutions est également une solution valide :

$$\Psi = \lambda_1. \Psi_1 + \lambda_2. \Psi_2 \quad (2.2)$$

avec  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  appartenant à  $\mathbb{C}$ .

3. Produit scalaire : Le produit scalaire entre deux fonctions d'onde  $\Psi$  et  $\varphi$  est défini comme :

$$\langle \Psi, \varphi \rangle = \int d^3x. \Psi^* \varphi \quad (2.3)$$

4. propriété du produit scalaire : Le produit scalaire satisfait la propriété suivante :

$$\langle \Psi, \varphi \rangle = \langle \varphi, \Psi \rangle^* \quad (2.4)$$

### 2.2.2 Hamiltonien

En mécanique quantique, l'Hamiltonien est un opérateur mathématique qui représente l'énergie totale d'un système quantique. Il joue un rôle fondamental dans la formulation de l'équation de Schrödinger, qui décrit l'évolution temporelle de la fonction d'onde du système.

L'Hamiltonien est généralement noté  $H$  et est défini comme la somme des opérateurs d'énergie cinétique et d'énergie potentielle.

### 2.2.3 Opérateurs Fonctionnels

Les opérateurs fonctionnels sont des opérateurs mathématiques qui agissent sur des fonctions pour produire de nouvelles fonctions. Ils jouent un rôle important en mathématiques, en physique et dans d'autres domaines scientifiques.

#### Propriétés

1. En général, la multiplication des opérateurs n'est pas commutative, ce qui signifie que l'ordre des facteurs est important. Par exemple :

$$[(\partial_x).(x)]f \neq [(x).(\partial_x)]f \quad (2.5)$$

car :

$$[(\partial_x).(x)]f = [(\partial_x).(xf)] = f + x.\partial_x f \quad (2.6)$$

tandis que :

$$[(x).(\partial_x)]f = x.\partial_x f \quad (2.7)$$

2. Le commutateur de deux opérateurs  $A$  et  $B$  notée  $[A, B]$ , est défini comme  $A.B - B.A$ . Si  $[A, B] = 0$ , on dit que les opérateurs  $A$  et  $B$  commutent.

3. Les opérateurs fonctionnels sont linéaires. Cela signifie que pour une constante  $a$  et deux fonctions  $f$  et  $g$  :

$$A.a.f = a.A.f \quad \text{et} \quad A(f + g) = A.f + A.g \quad (2.8)$$

4. L'opérateur complexe conjugué est défini comme suit :

si  $A.f = g$ , alors  $A^*f^* = g^*$

Par exemple :

$$A = i.\partial_x \rightarrow A.f = i\partial_x f = g \rightarrow g^* = -i\partial_x f^* \quad (2.9)$$

donc :

$$A^* = -i.\partial_x \quad (2.10)$$

5. L'opérateur adjoint de  $A$  noté  $A^+$  est défini par :

$$\int f A^+ g d\tau = \int g A^* f d\tau \quad (2.11)$$

6. Un opérateur  $A$  est Hermitien s'il est égal à son opérateur adjoint, c'est-à-dire  $A^+ = A$ .

Deux propriétés importantes des opérateurs hermitiens sont les suivantes :

- Si  $A$  est un opérateur hermitien, alors toutes puissance  $A^n$  de cet opérateur est également hermitienne.
- Si  $A$  et  $B$  sont des opérateurs hermitiens, les produits  $AB$  et  $BA$  ne sont pas hermitiens, mais l'opérateur  $(AB + BA)/2$  est hermitien.

## 2.3 ÉQUATION DE SCHRÖDINGER FRACTIONNAIRE

L'équation de Schrödinger, formulée par le physicien autrichien Erwin Schrödinger en 1925 [22], est une équation essentielle en mécanique quantique. Elle fournit une description mathématique de l'évolution temporelle d'une particule non relativiste et joue un rôle similaire à celui de la relation fondamentale de la dynamique en mécanique classique.

La mécanique classique et la mécanique quantique reposent sur l'hypothèse que la fonction hamiltonienne peut être exprimée de la manière suivante :

$$H(p, r) = \frac{p^2}{2m} + V(r) \quad (2.12)$$

avec  $p$  et  $r$  sont la quantité de mouvement et la coordonnée spatiale de la particule,  $m$  est la masse de la particule, et  $V(r)$  représente l'énergie potentielle. En mécanique quantique,  $p$  et  $r$  doivent être considérés comme des opérateurs de mécanique quantique, notés  $\hat{p}$  : et  $\hat{r}$ . Ainsi, la fonction hamiltonienne  $H(p, r)$

devient un opérateur hamiltonien  $\hat{H}(\hat{p}, \hat{r})$  :

$$\hat{H}(\hat{p}, \hat{r}) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{r}) \quad (2.13)$$

En réalité, la mécanique quantique fractionnaire émerge de l'opérateur hamiltonien de la forme suivante :

$$\hat{H}_\alpha(\hat{p}, \hat{r}) = D_\alpha |\hat{p}|^\alpha + V(\hat{r}) \quad , \quad 1 < \alpha \leq 2 \quad (2.14)$$

Cela découle de la mécanique classique et de la fonction hamiltonienne  $H(p, r)$  :

$$H_\alpha(p, r) = D_\alpha |p|^\alpha + V(r) \quad , \quad 1 < \alpha \leq 2 \quad (2.15)$$

A partir de l'équation (2.12) l'énergie  $E$  d'une particule de masse  $m$  sous l'influence du potentiel  $V(r)$  est donnée par :

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(r) \quad (2.16)$$

Pour obtenir l'équation de Schrödinger, nous introduisons les opérateurs en suivant la procédure bien connue :

$$E \longrightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad , \quad p \longrightarrow -i\hbar \nabla \quad (2.17)$$

où :  $\hbar$  : La constante réduite de Planck.

$\nabla^2 = \Delta$  : Le laplacien  $\nabla = \frac{\partial}{\partial r}$ .

En substituant la transformation mentionnée dans la référence (2.17) à l'équation (2.12) et en l'appliquant à la fonction d'onde  $\Psi(r, t)$ , nous obtenons [23] :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(r, t)}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(r, t) + V(r) \Psi(r, t) \quad (2.18)$$

En utilisant la même démarche pour l'équation (2.15), nous obtenons l'équation de Schrödinger fractionnaire [24] [25] :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(r, t)}{\partial t} = D_\alpha \left( -\hbar^2 \Delta \right)^{\alpha/2} \Psi(r, t) + V(r) \Psi(r, t) \quad , \quad 1 < \alpha \leq 2 \quad (2.19)$$

avec  $D_\alpha$  : Coefficient qui ajuste les unités physique. Où  $[D_\alpha] = \text{erg}^{1-\alpha} \text{cm}^\alpha \text{sec}^{-\alpha}$ .

La généralisation en trois Dimension (3D) de la dérivée fractionnaire quantique de Riesz  $(-\hbar^2\Delta)^{\alpha/2}$  a été introduite pour la première fois par Laskin [26] :

$$(-\hbar^2\Delta)^{\alpha/2}\Psi(r,t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p \exp\left(i\frac{p}{\hbar}r\right) |p|^\alpha \varphi(p,t) \quad (2.20)$$

Où  $\varphi(p,t)$  est la transformée de Fourier de la fonction d'onde  $\Psi(r,t)$  :

$$\varphi(p,t) = \int d^3r \exp\left(i\frac{p}{\hbar}r\right) \Psi(r,t) \quad (2.21)$$

$$\Psi(r,t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p \exp\left(i\frac{p}{\hbar}r\right) \varphi(p,t) \quad (2.22)$$

L'équation fractionnaire de Schrödinger 3D (2.19) peut être réécrite avec l'opérateur :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(r,t)}{\partial t} = \hat{H}_\alpha \Psi(r,t) \quad , \quad 1 < \alpha \leq 2 \quad (2.23)$$

Où l'opérateur hamiltonien fractionnaire prend la forme suivante :

$$\hat{H}_\alpha = D_\alpha \left(-\hbar^2\Delta\right)^{\alpha/2} + V(r) \quad (2.24)$$

Cet opérateur peut être exprimé sous la forme donnée par l'équation (2.14) en introduisant l'opérateur mécanique quantique de la quantité de mouvement  $\hat{p} = -i\hbar\nabla = -i\hbar\frac{\partial}{\partial r}$  et l'opérateur de coordonnées  $\hat{r} = r$ .

Par conséquent, l'équation de Schrödinger fractionnaire (3D) (2.19) a la forme d'opérateur suivante :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(r,t)}{\partial t} = \hat{H}_\alpha(\hat{p},\hat{r})\Psi(r,t) \quad (2.25)$$

Avec  $\hat{H}_\alpha(\hat{p},\hat{r})$  introduit par l'équation (2.14).

La forme de l'équation de Schrödinger fractionnaire (1D), telle qu'introduite par Laskin, est la suivante [3] :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = -D_\alpha (\hbar\nabla)^\alpha \Psi(x,t) + V(x)\Psi(x,t) \quad , \quad 1 < \alpha \leq 2 \quad (2.26)$$

Dans cette formulation,  $\Psi(x,t)$  représente la fonction d'onde, qui est l'amplitude de probabilité contenant toutes les informations sur l'état du système physique.

L'opérateur  $(\hbar\nabla)^\alpha$  représente la dérivée fractionnaire de Riesz pour une dimension (1D) et est défini comme suit [2] :

$$(\hbar\nabla)^\alpha \Psi(x, t) = -\frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \exp\left(i\frac{p}{\hbar}x\right) |p|^\alpha \varphi(p, t) \quad (2.27)$$

Où  $\varphi(p, t)$  est la transformée de Fourier de la fonction d'onde  $\Psi(x, t)$  :

$$\varphi(p, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp\left(-i\frac{p}{\hbar}x\right) \Psi(x, t) \quad (2.28)$$

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \exp\left(i\frac{p}{\hbar}x\right) \varphi(p, t) \quad (2.29)$$

Lorsque  $\alpha = 2$ , l'équation (2.26) se transforme en l'équation de Schrödinger (1D) :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, t) + V(x) \Psi(x, t) \quad (2.30)$$

La forme alternative de l'équation (2.26) peut être exprimée comme suit :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}_\alpha \Psi \quad (2.31)$$

avec  $\hat{H}_\alpha$  est l'opérateur hamiltonien fractionnaire :

$$\hat{H}_\alpha = -D_\alpha (\hbar\nabla)^\alpha + V(x) \quad (2.32)$$

Alternativement, l'équation fractionnaire de Schrödinger (2.26) peut être présentée comme suit :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = D_\alpha \left(-\hbar^2 \Delta\right)^{\alpha/2} \Psi(x, t) + V(x) \Psi(x, t) \quad , \quad 1 < \alpha \leq 2 \quad (2.33)$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = \hat{H}_\alpha \Psi(x, t) \quad , \quad 1 < \alpha \leq 2 \quad (2.34)$$

Où :

$$\hat{H}_\alpha = D_\alpha \left(-\hbar^2 \Delta\right)^{\alpha/2} + V(x) \quad , \quad 1 < \alpha \leq 2 \quad (2.35)$$

Une autre expression pour la fonction Hamilton de la mécanique classique  $H_\alpha$  correspondant à l'opérateur de Hamiltonien  $\hat{H}_\alpha$  est la suivante :

$$H_\alpha(p, x) = D_\alpha |p|^\alpha + V(x) \quad , \quad 1 < \alpha \leq 2 \quad (2.36)$$

Pour le cas particulier où  $\alpha = 2$  et  $D_2 = \frac{1}{2m}$ , les équations (2.19),(2.26),(2.33) se transforment en l'équation de Schrödinger bien connue pour (3D) et (1D).

## 2.4 HERMITICITÉ DE L'OPÉRATEUR HAMILTONIEN FRACTIONNAIRE

L'hermiticité de l'opérateur Hamiltonien fractionnaire est un aspect important en mécanique quantique. En exigeant que l'opérateur Hamiltonien soit hermitien, plusieurs avantages se manifestent.

Tout d'abord, cela garantit que les valeurs propres de l'opérateur, qui représentent les énergies du système, sont des quantités réelles plutôt que complexes. Cela est cohérent avec les mesures expérimentales des énergies observées dans le système.

Deuxièmement, l'hermiticité de l'opérateur hamiltonien permet de trouver une base orthonormée de vecteurs propres associés à ces énergies. Cela signifie qu'il est toujours possible de résoudre l'équation de Schrödinger indépendante du temps pour un système donné.

Les opérateurs hermitiques satisfont la relation suivante :

$$\langle \phi, \zeta \chi \rangle = \langle \zeta \phi, \chi \rangle^* \quad (2.37)$$

Afin de prouver l'hermiticité de l'opérateur  $H_\alpha$ , il est nécessaire de démontrer que :

$$\langle \phi, (\hbar \nabla)^\alpha \chi \rangle = \langle (\hbar \nabla)^\alpha \phi, \chi \rangle \quad (2.38)$$

Les expressions suivantes sont utilisées :

$$\langle \phi, \nabla^\alpha \chi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \phi^*(x, t) \nabla^\alpha \chi(x, t) \quad (2.39)$$

$$\langle \nabla^\alpha \phi, \chi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \nabla^\alpha \phi^*(x, t) \chi(x, t) \quad (2.40)$$

Où le symbole  $*$  représente le conjugué complexe, et  $\nabla^\alpha \phi$  et  $\nabla^\alpha \chi$  sont les dérivées fractionnaires de Riesz pour les fonctions  $\phi$  et  $\chi$ , respectivement. Elle sont définies comme suit :

$$\nabla^\alpha \chi(x, t) = -\frac{1}{2\pi\hbar} \int dk \exp(ikx) |k|^\alpha \widehat{\chi}(k, t) \quad (2.41)$$

$$\nabla^\alpha \phi(x, t) = -\frac{1}{2\pi\hbar} \int dk \exp(ikx) |k|^\alpha \widehat{\phi}(k, t) \quad (2.42)$$

$\widehat{\chi}(k, t)$  et  $\widehat{\phi}(k, t)$  sont les transformées de Fourier des fonctions  $\chi(x, t)$  et  $\phi(x, t)$ , respectivement :

$$\widehat{\chi}(k, t) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dx \exp(ikx) \chi(x, t) \quad (2.43)$$

$$\widehat{\phi}(k, t) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dx \exp(ikx) \phi(x, t) \quad (2.44)$$

En utilisant les équations (2.41) et (2.43), nous pouvons réécrire l'équation (2.39) comme suit :

$$\langle \phi, \nabla^\alpha \chi \rangle = - \int_{-\infty}^{+\infty} dx \phi^*(x, t) \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \exp(ikx) |k|^\alpha \widehat{\chi}(k, t) \quad (2.45)$$

$$= - \int_{-\infty}^{+\infty} dk |k|^\alpha \left( \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp(ikx) \chi(x, t) \widehat{\phi}^*(k, t) \right) \quad (2.46)$$

$$= \langle \nabla^\alpha \phi, \chi \rangle \quad (2.47)$$

Nous remarquons que :

$$\langle \phi, \nabla^\alpha \chi \rangle = \langle \nabla^\alpha \phi, \chi \rangle \quad (2.48)$$

L'énergie moyenne d'un système quantique fractionnaire est donnée par :

$$E_\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \Psi^*(x, t) H_\alpha \Psi(x, t) = \langle \Psi, H_\alpha \Psi \rangle \quad (2.49)$$

Où  $H_\alpha$  est l'opérateur Hamiltonien fractionnaire.

Selon l'équation (2.37), nous avons :

$$E_\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \Psi^*(x, t) H_\alpha \Psi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx (H_\alpha^+ \Psi(x, t))^* \Psi(x, t) = E_\alpha^* \quad (2.50)$$

Cela signifie que l'énergie du système est réelle. Par conséquent, l'opérateur Hamiltonien fractionnaire est hermitien :

$$(\phi, H_\alpha \chi) = (H_\alpha^+ \phi, \chi) \quad (2.51)$$

La démonstration de l'hermiticité peut être facilement généralisée au cas tridimensionnel (3D). En multipliant l'équation (2.31) par la gauche par  $\Psi^*(x, t)$  :

$$\Psi^*(x, t) H_\alpha \Psi(x, t) = i\hbar \Psi^*(x, t) \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) \quad (2.52)$$

et en prenant le complexe conjugué de l'équation (2.31) et en le multipliant par  $-\Psi(x, t)$  :

$$-\Psi(x, t)H_\alpha^*\Psi^*(x, t) = i\hbar\Psi(x, t)\frac{\partial}{\partial t}\Psi^*(x, t) \quad (2.53)$$

En additionnant les deux équations résultantes, on obtient :

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}(\Psi^*(x, t)\Psi(x, t)) = \Psi^*(x, t)H_\alpha\Psi(x, t) - \Psi(x, t)H_\alpha^*\Psi^*(x, t) \quad (2.54)$$

En intégrant sur toutes les valeurs de la variable d'espace et en tenant compte de l'hermiticité de l'opérateur Hamiltonien  $H_\alpha$ , on obtient l'équation importante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int dx \Psi^*(x, t)\Psi(x, t) = 0 \quad (2.55)$$

Cela montre que la fonction d'onde reste normée, ce qui est une propriété essentielle des systèmes quantiques.

## 2.5 L'ÉQUATION DE SCHRÖDINGER FRACTIONNAIRE INDÉPENDANTE DU TEMPS

L'équation de Schrödinger fractionnaire indépendante du temps est un cas particulier de l'équation de Schrödinger dans lequel le potentiel  $V(x, t)$  est indépendant du temps. Cela implique que le potentiel ne varie qu'en fonction de la position, et peut même être constant.

Prenons en compte  $V(x, t) = V(x)$ . Dans ce cas, l'équation de Schrödinger fractionnaire devient :

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(x, t)}{\partial t} = -D_\alpha(\hbar\nabla)^\alpha\Psi(x, t) + V(x)\Psi(x, t) \quad , \quad 1 < \alpha \leq 2 \quad (2.56)$$

Dans ce cas, il est possible d'utiliser la méthode de séparation des variables.

Nous posons :

$$\Psi(x, t) = f(t)\Psi(x) \quad (2.57)$$

En substituant l'équation (2.57) dans l'équation (2.56), nous obtenons :

$$i\hbar\frac{\partial(f(t)\Psi(x))}{\partial t} = -D_\alpha(\hbar\nabla)^\alpha f(t)\Psi(x) + V(x)f(t)\Psi(x) \quad (2.58)$$

En simplifiant, nous obtenons :

$$\frac{i\hbar \frac{\partial f(t)}{\partial t}}{f(t)} = (-D_\alpha (\hbar \nabla)^\alpha \Psi(x) + V(x)\Psi(x)) \frac{1}{\Psi(x)} \quad (2.59)$$

Étant donné que le terme de droite de l'équation (2.59) ne dépend que de  $t$ , et que le terme de gauche ne dépend que de  $x$ , il doivent être égaux à une constante, que nous notons  $E$ . Par conséquent, nous avons l'équation suivante :  $Ef(t) = i\hbar \frac{\partial f(t)}{\partial t}$

Et par conséquent, la solution pour  $f(t)$  est donnée par :

$$f(t) = \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right) \quad (2.60)$$

Finalement, nous obtenons l'équation de Schrödinger indépendante du temps (stationnaire) [2] :

$$E\Psi(x) = -D_\alpha (\hbar \nabla)^\alpha \Psi(x) + V(x)\Psi(x) \quad (2.61)$$

Ainsi, la forme la plus générale de la solution, dans laquelle les variables d'espace et de temps sont séparées, est la suivante :

$$\Psi(x, t) = \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right)\Psi(x) \quad (2.62)$$

## 2.6 APPLICATION DE L'ÉQUATION DE SCHRÖDINGER FRACTIONNAIRE

### 2.6.1 Particule dans une boîte

En mécanique quantique, le modèle de la particule dans une boîte (également appelé puits de potentiel infini ou puits carré infini) décrit une particule libre qui peut se déplacer dans un espace restreint entouré de barrières impénétrables. Ce modèle est principalement utilisé comme exemple hypothétique pour illustrer les différences entre les systèmes classiques et quantiques.

#### Le Cas Unidimensionnel

La forme la plus simple du modèle de la particule dans une boîte considère un système unidimensionnel. Dans ce cas, la particule ne peut se déplacer que

d'avant en arrière le long d'une ligne droite, avec des barrières impénétrables aux deux extrémités. Les parois d'une boîte unidimensionnelle peuvent être considérées comme des régions de l'espace avec une énergie potentielle infiniment grande. En revanche, l'intérieur de la boîte a une énergie potentielle constante et nulle. Cela signifie qu'aucune force n'agit sur la particule à l'intérieur de la boîte et qu'elle peut se déplacer librement dans cette région.

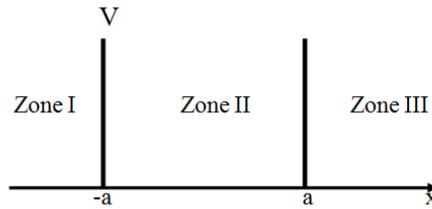


FIGURE 2.1 – *Puits de potentiel infini à une dimension*

L'énergie potentielle dans ce modèle est donnée par :

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{pour } |x| \geq a \\ 0 & \text{pour } |x| \leq a \end{cases} \quad (2.63)$$

L'équation de Schrödinger indépendante du temps peut être écrite comme :

$$-D_\alpha(\hbar\nabla)^\alpha\Psi(x) + V(x)\Psi(x) = E\Psi(x) \quad (2.64)$$

Où  $E = D_\alpha |p|^\alpha$  représente l'énergie totale de la particule et  $V(x)$  est une fonction décrivant le potentiel pour chaque valeur de  $x$ .

Dans notre cas, le potentiel est nulle à l'intérieur de la boîte  $V(x) = 0$ , et devient infini aux positions  $x = -a$  et  $x = a$ . À l'intérieur de la boîte, l'équation (2.64) se réduit à :

$$-D_\alpha(\hbar\nabla)^\alpha\Psi(x) = E\Psi(x) \quad (2.65)$$

$$\nabla^\alpha\Psi(x) + k^\alpha\Psi(x) = 0 \quad (2.66)$$

Où  $k^\alpha = \frac{E}{D_\alpha\hbar^\alpha}$ . La solution générale de cette équation fractionnaire est donnée par :

$$\Psi(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx) \quad |x| \leq a \quad (2.67)$$

Où  $A$  et  $B$  sont des nombres complexes. Par conséquent, nous pouvons écrire :

$$\Psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } a \leq x \\ A \sin(kx) + B \cos(kx) & \text{pour } |x| \leq a \\ 0 & \text{pour } -a \leq x \end{cases} \quad (2.68)$$

Lorsque la fonction  $\Psi(x)$  est continue, la condition de continuité en  $x = -a$  et  $x = a$  implique que :

$$A \sin(ka) + B \cos(ka) = 0 \quad (2.69)$$

$$-A \sin(ka) + B \cos(ka) = 0 \quad (2.70)$$

Donc :

$$A \sin(ka) = 0 \quad (2.71)$$

$$B \cos(ka) = 0 \quad (2.72)$$

Par conséquent, les solutions se répartissent en deux catégories :

1. Les solutions paires :  $A = 0$  alors,  $ka = n\frac{\pi}{2}$  pour  $n = 1, 3, 5, \dots$

Les niveaux d'énergie deviennent :

$$E_n^{(p)} = D_\alpha \left( \frac{\hbar n \pi}{2a} \right)^\alpha \quad (2.73)$$

Les fonctions d'onde sont :

$$\Psi_n^{(p)}(x) = B \cos\left(\frac{n\pi}{2a}x\right) \quad \text{pour } |x| \leq a \quad (2.74)$$

2. Les solutions impaires :  $B = 0$  alors,  $ka = n\frac{\pi}{2}$  pour  $n = 2, 4, 6, \dots$

Les niveaux d'énergie deviennent :

$$E_n^{(imp)} = D_\alpha \left( \frac{\hbar n \pi}{2a} \right)^\alpha \quad (2.75)$$

Les fonctions d'onde sont :

$$\Psi_n^{(imp)}(x) = A \sin\left(\frac{n\pi}{2a}x\right) \quad \text{pour } |x| \leq a \quad (2.76)$$

La combinaison entre les deux solutions paires et impaires donne les niveaux d'énergie :

$$E_n = D_\alpha \left( \frac{\hbar n \pi}{2a} \right)^\alpha \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.77)$$

Et les fonctions d'onde sont :

$$\Psi_n(x) = \begin{cases} C_0 \sin\left(\frac{n\pi}{2a}(x+a)\right) & n = 1, 2, 3, \dots \text{ pour } |x| \leq a \\ 0 & \text{pour } |x| \geq a \end{cases} \quad (2.78)$$

Nous utilisons le fait que la probabilité de trouver la particule quelque part est égale à 1. Par conséquent, la valeur de l'intégrale de  $|\Psi|^2$  sur l'axe  $x$  est :

$$\int_{-a}^{+a} |\Psi(x)|^2 = C_0^2 \int_{-a}^{+a} \sin^2\left(\frac{n\pi}{2a}(x+a)\right) = 1 \quad (2.79)$$

Donc :

$$C_0 = \frac{1}{\sqrt{a}} \quad (2.80)$$

La solution complète pour le problème d'une particule unidimensionnelle dans une boîte, dans le cas fractionnaire, a été donnée par [6] :

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{2a}(x+a)\right) \exp\left(-\frac{iE}{\hbar}t\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad |x| \leq a \quad (2.81)$$

$$E_n = D_\alpha \left(\frac{n\pi\hbar}{2a}\right)^\alpha \quad (2.82)$$

### Le Cas Tridimensionnel

Si une particule est piégée dans une boîte à trois dimensions, elle peut se déplacer librement dans les trois directions  $L_x$  (le long de l'axe  $x$ ),  $L_y$  (le long de l'axe  $y$ ) et  $L_z$  (le long de l'axe  $z$ ), où le potentiel est nul à l'intérieur de la boîte. **figure2.2.**

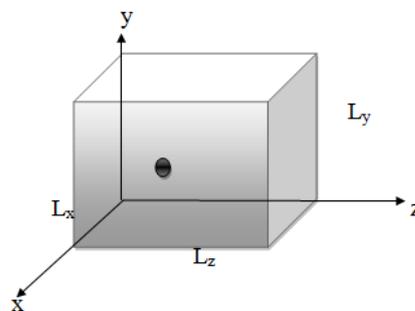


FIGURE 2.2 – *Particule confinée dans une boîte cubique*

L'expression tridimensionnelle de la zone intérieure de la boîte, où le potentiel est nul est donnée par :

$$D_\alpha \left( -\hbar^2 \Delta \right)^{\alpha/2} \Psi(x, y, z) = E \Psi(x, y, z) \quad (2.83)$$

$$D_\alpha \left[ -\hbar^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right]^{\alpha/2} \Psi(x, y, z) = E \Psi(x, y, z) \quad (2.84)$$

Pour résoudre cette équation, nous devons trouver les valeurs propres de l'équation (2.84).

L'hamiltonien fractionnaire correspondant est donné par :

$$H_\alpha = D_\alpha \left( -\hbar^2 \Delta \right)^{\alpha/2} \quad (2.85)$$

$$= 2m D_\alpha \left( -\hbar^2 \right)^{\frac{\alpha}{2}-1} \left( \frac{-\hbar^2}{2m} \Delta^{\alpha/2} \right) \quad (2.86)$$

$$= C \hat{h}^{\alpha/2} \quad (2.87)$$

avec :  $C = 2m D_\alpha \left( -\hbar^2 \right)^{\frac{\alpha}{2}-1}$

$\hat{h}^{\alpha/2} = \frac{-\hbar^2}{2m} \Delta^{\alpha/2}$  est l'opérateur de hamilton standard d'une particule dans une boîte.

Alors l'équation de Schrödinger devient :

$$C \hat{h}^{\alpha/2} \Psi(x, y, z) = E \Psi(x, y, z) \quad (2.88)$$

$$\hat{h} \Psi(x, y, z) = \varepsilon \Psi(x, y, z) \quad (2.89)$$

Avec  $\varepsilon$  est l'énergie :

$$\varepsilon = \frac{\hbar^2}{8m} \left( \frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} + \frac{n_z^2}{L_z^2} \right) \quad (2.90)$$

D'après l'équation (2.88) :

$$C \hat{h} \Psi(x, y, z) = E \hat{h}^{-\frac{\alpha}{2}+1} \Psi(x, y, z) \quad (2.91)$$

Donc :

$$C \hat{h} \Psi(x, y, z) = E \varepsilon^{-\frac{\alpha}{2}+1} \Psi(x, y, z) \quad (2.92)$$

Alors :

$$C^{\alpha/2} \widehat{h}^{\alpha/2} \Psi(x, y, z) = \left( E \varepsilon^{-\frac{\alpha}{2} + 1} \right)^{\alpha/2} \Psi(x, y, z) \quad (2.93)$$

On peut en déduire que :

$$E = C^{-\frac{\alpha}{2} + 1} \left( E \varepsilon^{-\frac{\alpha}{2} + 1} \right)^{\alpha/2} \quad (2.94)$$

$$= E^{\alpha/2} C^{-\frac{\alpha}{2} + 1} \left( \varepsilon^{-\frac{\alpha}{2} + 1} \right)^{\alpha/2} \quad (2.95)$$

$$= C \varepsilon^{\frac{\alpha}{2}} \quad (2.96)$$

Donc les valeurs propres sont :

$$E = \frac{C \hbar^{\alpha}}{(8m)^{\alpha/2}} \left( \frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} + \frac{n_z^2}{L_z^2} \right)^{\alpha/2} \quad (2.97)$$

## 2.6.2 Oscillateur Quantique Fractionnaire

L'oscillateur quantique fractionnaire est un système dans lequel une particule est soumise à un potentiel scalaire  $V(r)$ , décrit par l'opérateur hamiltonien. En l'absence de champ magnétique, l'opérateur hamiltonien prend la forme suivante :

$$\widehat{H}(p, r) = \frac{\widehat{p}^2}{2m} + \widehat{V}(\widehat{r}) \quad (2.98)$$

Où :  $\widehat{p}$  est l'opérateur de l'impulsion,  $\widehat{p} = -i\hbar \nabla$  avec  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}$  et  $\widehat{r}$  est l'opérateur de la coordonnée d'espace de la particule.

L'oscillateur quantique fractionnaire, introduit par Laskin, est un modèle de mécanique quantique fractionnaire qui utilise l'opérateur hamiltonien  $H_{\alpha, \nu}$  [25] :

$$H_{\alpha, \nu} = D_{\alpha} |p|^{\alpha} + q^2 |x|^{\nu} \quad (2.99)$$

$$= D_{\alpha} (-\hbar^2 \Delta)^{\frac{\alpha}{2}} + q^2 |x|^{\nu} \quad (2.100)$$

Où  $D_{\alpha}$  : est le coefficient qui ajuste les unités physiques.  $[D_{\alpha}] = \text{erg}^{1-\alpha} \text{cm}^{\alpha} \text{sec}^{-\alpha}$ .

$q$  : est une constante avec le dimension  $[q] = \text{erg}^{\frac{1}{2}} \text{cm}^{-\frac{\nu}{2}}$ .

Les paramètres  $\alpha$  et  $\nu$  sont supérieurs à un et inférieurs ou égaux à deux ( $1 < \alpha \leq 2, 1 < \nu \leq 2$ ).

$(-\hbar^2\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$  : est un opérateur fractionnaire de Riesz.

Pour  $\alpha = \nu = 2$  l'équation (2.100) représente l'oscillateur harmonique hamiltonien dans le cas standard avec  $D_2 = (2m)^{-1}$ ,  $q^2 = m\omega^2/2$ .

Ainsi, l'hamiltonien  $H_{\alpha,\nu}$  est la généralisation fractionnaire de l'hamiltonien  $H$  de l'oscillateur harmonique standard :

$$H = \frac{-\hbar^2\Delta}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \quad (2.101)$$

L'équation de Schrödinger indépendante du temps pour l'oscillateur quantique fractionnaire peut être exprimée comme suit :

$$D_\alpha \left(-\hbar^2\Delta\right)^{\alpha/2} \Psi(r) + q^2 |x|^\nu \Psi(r) = E\Psi(r) \quad (2.102)$$

Où  $E$  est l'énergie totale de l'oscillateur.

Pour résoudre cette équation, nous pouvons utiliser une approximation semi-classique. En appliquant la règle de quantification de Bohr-Sommerfeld [27], nous obtenons les niveaux d'énergie de l'oscillateur quantique fractionnaire en une dimension :

$$2\pi\hbar\left(n + \frac{1}{2}\right) = \oint p dx = 4 \int_0^{x_m} p dx \quad (2.103)$$

Où  $x_m = \left(\frac{E}{q^2}\right)^{1/\nu}$  : est le point tournant du mouvement classique.

$\oint$  : est l'intégrale sur une période du mouvement classique.

En utilisant l'approximation semi-classique, nous pouvons exprimer  $p$  en fonction de l'énergie  $E$  :

$$|p| = \left(\frac{1}{D_\alpha} (E - q^2 |x|^\nu)\right)^{1/\alpha} \quad (2.104)$$

Dans les points de retournement,  $p = 0$  Le mouvement classique est donc possible dans l'intervalle  $|x| \leq \left(\frac{E}{q^2}\right)^{1/\nu}$

Afin d'évaluer l'intégrale de l'équation (2.103), nous introduisons une nouvelle variable  $y = x \left(\frac{E}{q^2}\right)^{-1/\nu}$ .

Ainsi, nous avons :

$$D_\alpha^{-1/\alpha} \int_0^{x_m} (E - q^2 |x|^\nu)^{1/\alpha} dx = \frac{E^{1/\alpha} E^{1/\nu}}{D_\alpha^{1/\alpha} q^{2/\nu}} \int_0^1 (1 - y^\nu)^{1/\alpha} dy \quad (2.105)$$

L'intégrale sur  $dy$  peut être exprimée en termes de la fonction  $B$ . En effet, en effectuant la substitution  $Z = y^\nu$ , nous obtenons :

$$\int_0^1 (1 - y^\nu)^{1/\alpha} dy = \frac{1}{\nu} \int_0^1 z^{\frac{1}{\nu}-1} (1 - z)^{1/\alpha} dz \quad (2.106)$$

$$= \frac{1}{\nu} B\left(\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\alpha} + 1\right) \quad (2.107)$$

Où  $B(x, y)$  représente la fonction bêta (intégrale d'Euler de premier type).

Ainsi, l'équation (2.103) se transforme en la forme suivante :

$$2\pi\hbar\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{4E_{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\nu}}}{D_{\alpha}^{1/\alpha} q^{2/\nu}} \frac{1}{\nu} B\left(\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\alpha} + 1\right) \quad (2.108)$$

L'équation finale, qui permet de déterminer les valeurs d'énergie des états stationnaires pour l'oscillateur fractionnaire, est définie comme suit [2] :

$$E_n = \left( \frac{\pi\hbar\nu D_{\alpha}^{1/\alpha} q^{2/\nu}}{2B\left(\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\alpha} + 1\right)} \right)^{\frac{\alpha\nu}{\alpha+\nu}} \cdot \left( n + \frac{1}{2} \right)^{\frac{\alpha\nu}{\alpha+\nu}} \quad (2.109)$$

Cette équation représente une généralisation du spectre d'énergie bien connu de l'oscillateur quantique standard (pour  $\alpha = 2$  et  $\nu = 2$ ), où nous observons que  $\frac{\alpha\nu}{\alpha+\nu} = 1$ .

Pour  $D$  dimensions, l'hamiltonien est donné par :

$$H_{\alpha,\nu} = \sum_{i=1}^N (D_{\alpha} |p_i|^{\alpha} + q^2 |x_i|^{\nu}) \quad (2.110)$$

$$= \sum_{i=1}^N \left[ D_{\alpha} \left( -\hbar^2 \sum_{k=1}^D \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \right)^{\alpha/2} + q^2 \left( \sum_{k=1}^D x_k^2 \right)^{\nu/2} \right] \quad (2.111)$$

Les variables moment et position en  $D$  dimensions sont représentées par  $p_i = (p_1, p_2, \dots, p_D)$ ,  $x_i = (x_1, x_2, \dots, x_D)$  respectivement.

Les calculs des niveaux d'énergie de l'oscillateur quantique fractionnaire dans la théorie semi-classique sont généralisés pour  $D$  dimensions :

$$E_{n_1, \dots, n_D} = a^{\sigma} (n_1 + n_2 + \dots + n_D + d)^{\sigma} \quad (2.112)$$

Où :

$$n_i = 0, 1, 2, \dots, \quad a = \frac{\pi\hbar\nu D_{\alpha}^{1/\alpha} q^{2/\nu}}{2B\left(\frac{1}{\nu}, 1 + \frac{1}{\alpha}\right)}, \quad \sigma = \frac{\alpha\nu}{\alpha + \nu}, \quad d = \frac{D}{2} \quad (2.113)$$

## 2.7 CONCLUSION

Ce chapitre présente une forme alternative de la mécanique quantique connue sous le nom de mécanique quantique fractionnaire. Les principes fondamentaux de cette théorie sont explorés, mettant en évidence l'équation de Schrödinger dépendante et indépendante du temps. De plus, l'hamiltonien fractionnaire est également examiné, offrant une généralisation intéressante de la mécanique quantique standard. Cette approche permet d'explorer des phénomènes quantiques complexes et ouvre de nouvelles perspectives de recherche dans le domaine de la physique quantique.

# BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. Omnès, *Comprendre la Mécanique Quantique*, 2-86883-470-1, EDP Sciences, (2000). (Cité page 25.)
- [2] N. Laskin, *Principles of Fractional Quantum Mechanics*, arXiv : 1009.5533v1, math-ph, (2010). (Cité pages 25, 32, 36 et 43.)
- [3] N. Laskin, *Fractals and Quantum Mechanics*, *Chaos* 10, 780 doi :10.1063/1.1050284, (2000). (Cité page 31.)
- [4] V. E. Tarasov, *Fractional Heisenberg Equation*, *Physical Letters A*, 372 : 2984-2988, (2008).
- [5] V.E. Tarasov, *Weyl Quantization of Fractional Derivatives*, *J. Math. Phys*, 49 :102112, (2008).
- [6] X. Guo and M. Xu, *Some Physical Applications of Fractional Schrodinger Equation*, *J. Math. Phys*, 47 :082104, (2006). (Cité page 39.)
- [7] M. Naber, *Time Fractional Schrodinger Equation*, *J. Math. Phys*, 45 :3339, (2004).
- [8] R. Herrmann, arXiv :math-ph/1210.4410v2[math-ph], (2012).
- [9] R. Herrmann, arXiv :1308.4587v2 [physics.gen-ph], (2013). (Cité page 25.)
- [10] B.A. Carreras et al, *Anomalous Diffusion and Exit Time Distribution of Particle Tracers In Plasma Turbulence Model*, *Physics of Plasmas*, 8 :5096, (2001). (Cité page 26.)
- [11] A. Carpinteri, F. Mainardi, *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*, Springer, New York, (1997). (Cité page 26.)
- [12] F. Riewe, *Non Conservative Lagrangian and Hamiltonian Mechanics*, *Physical Review E*, 53 :1890, (1996). (Cité page 26.)

- [13] F. Riewe, Mechanics with Fractional Derivatives, *Physical Review E*, 55 :3581, (1997). (Cité page 26.)
- [14] G.M. Zaslavsky, Chaos Fractional Kinetics and Anomalous Transport, *Phys,Rep.371*, (2002). (Cité page 26.)
- [15] G.M. Zaslavsky, Hamiltonian Chaos and Fractional Dynamics, Oxford University Press, (2005). (Cité page 26.)
- [16] A.I. Saichev, G.M. Zaslavsky, Fractional Kinetic Equations : Solutions and Applications, *Chaos 7*, 753-764, (1997). (Cité page 26.)
- [17] G.M. Zaslavsky, M.A. Edelman, Fractional Kinetics : From Pseudo Chaotic Dynamics to Maxwell's demon, *Physica, D 193*, 128-147, (2004). (Cité page 26.)
- [18] V.E. Tarasov, G. M. Zaslavsky, Fractional Dynamics of Coupled Oscillators With Long-Range Interaction, *Chaos, 16* : 023110, (2006). (Cité page 26.)
- [19] N. Laskin, GM. Zaslavsky, Nonlinear Fractional Dynamics on a Lattice with Long Range Interactions, *Physica A*, 368 :38-54, (2006). (Cité page 26.)
- [20] J. Hladik, Chrysos. Introduction à la Mécanique Quantique, Dunod, Paris, (2000). (Cité page 27.)
- [21] B. Meftah, Equation de Schrodinger Fractionnaire, Mémoire de Master, Académique en Mathématiques, Université de Ouargla, (2012). (Cité page 27.)
- [22] E. Schrodinger, The Non Relativistic Equation of the De-Broglie Waves, *Ann.Physik79*361-376, (1926). (Cité page 29.)
- [23] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, Quantum Mechanics (Non-relativistic Theory), Vol.3, 3rd Edition, Course of Theoretical Physics, Oxford, (2003). (Cité page 30.)
- [24] N. Laskin, Fractional Quantum Mechanics and Lévy Path Integrals, *Physics Letters A*, 268 :298-305, (2000). (Cité page 30.)
- [25] N. Laskin, Fractional Schrodinger Equation, *Physical Review E*, 66 :056108, (2002). (Cité pages 30 et 41.)

[26] N. Laskin, Fractional Quantum Mechanics, (TopQuark Inc, Canada), World Scientifique, (2018). (Cité page 31.)

[27] L.D. Landau, E. M. Lifshitz, Quantum Mechanics : Non-Relativistic Theory, Pergamon, London, (1958).

(Cité page 42.)

---

# LA MÉCANIQUE STATISTIQUE FRACTIONNAIRE

## 3.1 INTRODUCTION

La mécanique statistique est une branche de la physique qui étudie le comportement collectif des systèmes composés d'un grand nombre de particules. Son objectif est d'analyser les propriétés macroscopiques de ces systèmes en se basant sur les propriétés microscopiques des particules qui les constituent.

La mécanique statistique et la mécanique quantique fractionnaire sont étroitement liées et complémentaires. La mécanique statistique fournit les outils mathématiques nécessaires pour étudier les systèmes complexes, y compris les systèmes quantiques fractionnaires. Elle permet ainsi de décrire les distributions statistiques des différentes particules présentes dans ces systèmes, ainsi que leurs propriétés thermodynamiques.

Dans certains cas, des équations fractionnaires sont utilisées comme modèles phénoménologiques en dynamique ou en cinétique. Des tentatives ont été faites

pour dériver des équations fondamentales de la mécanique statistique en introduisant des dérivées d'ordre non entier. Cependant, il convient de noter que les dérivées fractionnaires n'apparaissent généralement qu'après la transformation de Fourier de ces équations, comme cela a été démontré dans l'équation de Fokker-Planck-Zaslavsky [1].

Plus récemment, plusieurs chercheurs ont exploré l'application du calcul fractionnaire en physique quantique et statistique, ce qui a conduit au développement de nouvelles approches dans ces domaines. Par exemple, Alisultanov a étudié les propriétés thermodynamiques de certains systèmes avec un hamiltonien fractionnaire [2] [3]. Tarasov, quant à lui, s'est intéressé à la mécanique statistique des systèmes hamiltoniens généralisés fractionnaires et a dérivé l'équation de Liouville fractionnaire [4].

Ces développements récents illustrent l'exploration de nouvelles voies pour comprendre et modéliser les systèmes physiques complexes en utilisant des concepts fractionnaires, tant dans le cadre de la mécanique statistique que de la mécanique quantique.

Ce chapitre est structuré en deux parties distinctes. Dans la première partie, nous examinons l'impact des différentes dérivées fractionnaires sur les propriétés thermodynamiques, en mettant notamment l'accent sur la fonction de partition canonique d'un système composé de  $N$  oscillateurs quantiques fractionnaires indépendants. Nous présentons trois approches de dérivation (Liouville, Reimane Liouville et Caputo) et les comparons en termes d'ordre de dérivation. Ensuite, nous appliquons ces approches de dérivation au calcul de la fonction de partition individuelle  $Z_1$ .

La deuxième partie de ce chapitre est dédiée à la détermination de la densité pour différents systèmes physiques en résolvant l'équation de Liouville. Nous accordons une attention particulière à deux types de systèmes : les gaz parfaits partiels et les systèmes de  $N$  Oscillateurs fractionnaires indépendants. Nous utilisons dif-

férentes définitions de la dérivée fractionnaire (Reimane-Liouville, Caputo) pour résoudre l'équation de Liouville fractionnaire dans ces contextes.

L'objectif de ces deux parties est d'approfondir notre compréhension des dérivées fractionnaires et de leur impact sur les propriétés thermodynamiques et la densité des systèmes étudiés. En explorant les différentes approches de dérivation et en les appliquant à des systèmes spécifiques, nous visons à mieux comprendre les caractéristiques particulières des Oscillateurs quantiques fractionnaires et à analyser leurs conséquences sur les propriétés macroscopiques des systèmes physiques considérés.

## 3.2 SYSTÈME D'OSCILLATEURS FRACTIONNAIRE

### 3.2.1 Fonction de Partition

La fonction de partition joue un rôle essentiel dans la relation entre les propriétés microscopiques des molécules individuelles (niveaux d'énergie, moments d'inertie) et les propriétés macroscopiques (chaleur spécifique, entropie) d'un système composé d'un grand nombre de molécules.

En physique statistique, la fonction de partition  $Z$  est une quantité fondamentale qui englobe les propriétés statistiques d'un système à l'équilibre thermodynamique. Elle dépend de la température et d'autres paramètres pertinents.

La fonction de partition permet de calculer de nombreuses variables thermodynamiques du système, telles que l'énergie totale, l'entropie, l'énergie libre ou la pression. Ces variables peuvent être exprimées en fonction de la fonction de partition et de ses dérivées [5] [6].

Considérons un système thermodynamique composé de  $N$  oscillateurs quantiques fractionnaires indépendants, dont le volume et le nombre de particules sont fixés, et qui est en contact thermique constant avec un environnement à une température  $T$ . Ce type de système est généralement désigné comme un ensemble canonique.

Le spectre d'un oscillateur fractionnaire en  $D$  dimensions peut être caractérisé

par un nombre quantique  $n$ , qui représente le nombre de niveaux d'excitation de l'oscillateur (Chapitre 2).

Si nous décrivons le système en utilisant l'ensemble canonique quantique, la thermodynamique peut être étudiée à partir de la fonction de partition [7] :

$$Z_N = \frac{Z_1^N}{N!} \quad (3.1)$$

Où  $Z_1$  est la fonction de partition canonique individuelle donnée par [8] :

$$Z_1 = \sum_{n_1, \dots, n_D=0}^{\infty} \exp(-\beta E_{n_1, \dots, n_D}) \quad (3.2)$$

$$= \sum_{n_1, \dots, n_D=0}^{\infty} \exp(-\beta a^\sigma (n_1 + \dots + n_D + d)^\sigma) \quad (3.3)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n + D - 1)!}{n! (D - 1)!} \exp(-\beta a^\sigma (n + d)^\sigma) \quad (3.4)$$

La dernière égalité est due à la dégénérescence de l'énergie propre de l'oscillateur quantique en  $D$  dimensions.

En introduisant la représentation  $\delta$  ( $\delta(x)$  étant la distribution de Dirac), nous pouvons écrire l'équation (3.4) sous la forme :

$$Z_1 = \frac{1}{(D - 1)!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n + D - 1)!}{n!} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \exp(-\beta a^\sigma k) \delta(k - (n + d)^\sigma) \quad (3.5)$$

Où équivalent :

$$Z_1 = \frac{1}{(D - 1)!} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \exp(-\beta a^\sigma k) \frac{\Gamma(k^{1/\sigma} - d + D)}{\Gamma(k^{1/\sigma} - d + 1)} \theta(k^{1/\sigma} - d) \quad (3.6)$$

Où la fonction de Heaviside  $\theta(x)$  apparaît en raison de la sommation sur les distributions  $\delta$ .

En évaluant la fonction de Heaviside, nous obtenons :

$$Z_1 = \frac{1}{(D - 1)!} \sum_{k=d^\sigma}^{k=\infty} \exp(-\beta a^\sigma k) \frac{\Gamma(k^{1/\sigma} - d + D)}{\Gamma(k^{1/\sigma} - d + 1)} \quad (3.7)$$

$$= \frac{1}{(D - 1)!} \sum_{k=d^\sigma}^{k=\infty} \exp(-\beta a^\sigma k) (k^{1/\sigma} + d - 1) \dots (k^{1/\sigma} - (d - 1)) \quad (3.8)$$

$$= \frac{1}{(D - 1)!} \sum_{m=0}^{D-1} S_{D-1}^{(m)} \sum_{k=d^\sigma}^{k=\infty} \exp(-\beta a^\sigma k) (k^{1/\sigma} + (d - 1))^m \quad (3.9)$$

avec :

$$\sum_{m=0}^n S_n^{(m)} x^m = x(x-1)\dots(x-n+1) \quad (3.10)$$

Où  $S_{D-1}^{(m)}$  sont les coefficients de Stirling du premier type [9].

Pour évaluer la somme dans (3.9), nous utilisons l'expansion binomiale :

$$(k^{\frac{1}{\sigma}} + (d-1))^m = (d-1)^m \sum_{p=0}^m \frac{C_p^m}{(d-1)^p} (k^{\frac{1}{\sigma}})^p \quad (3.11)$$

Où  $C_p^m$  sont les coefficients binomiaux.

Ainsi, la fonction de partition individuelle devient :

$$Z_1 = \frac{1}{(D-1)!} \sum_{m=0}^{D-1} S_{D-1}^{(m)} (d-1)^m \sum_{p=0}^m \frac{C_p^m}{(d-1)^p} \sum_{k=d^\sigma}^{\infty} \exp(-\beta a^\sigma k) k^{\frac{p}{\sigma}} \quad (3.12)$$

avec :  $S_{n+1}^{(m)} = S_n^{(m-1)} - n S_n^{(m)}$

Nous notons ici, que nous obtenons le résultat standard pour la fonction de partition de l'oscillateur en une dimension en fixant  $D = 1$ , ( $S_0^{(0)} = 1$ ,  $C_0^0 = 1$ ), et  $\sigma = 1$ .

En utilisant la notation  $B = \frac{p}{\sigma}$  et  $b = \beta a^\sigma$ , nous pouvons écrire la dernière somme dans (3.12) comme suit :

$$\sum_{k=d^\sigma}^{\infty} \exp(-\beta a^\sigma k) k^{\frac{p}{\sigma}} = \frac{\partial^B}{\partial (-b)^B} \sum_{k=d^\sigma}^{\infty} \exp(-bk) = \left( \frac{\partial^{\frac{1}{\sigma}}}{\partial (-b)^{\frac{1}{\sigma}}} \right)^p \frac{\exp(-bd^\sigma)}{1 - \exp(-b)} \quad (3.13)$$

La fonction de partition individuelle devient :

$$Z_1 = \frac{1}{(D-1)!} \sum_{m=0}^{D-1} S_{D-1}^{(m)} (d-1)^m \sum_{p=0}^m \frac{C_p^m}{(d-1)^p} \left( \frac{\partial^{\frac{1}{\sigma}}}{\partial (-b)^{\frac{1}{\sigma}}} \right)^p \frac{\exp(-bd^\sigma)}{1 - \exp(-b)} \quad (3.14)$$

$$= \frac{1}{(D-1)!} \left[ \sum_{m=0}^{D-1} S_{D-1}^{(m)} \hat{Y}^m \right] \frac{\exp(-bd^\sigma)}{1 - \exp(-b)} \quad (3.15)$$

$$= \frac{1}{(D-1)!} \hat{Y}(\hat{Y}-1)(\hat{Y}-2)\dots(\hat{Y}-D+2) \frac{\exp(-bd^\sigma)}{1 - \exp(-b)} \quad (3.16)$$

Où  $\hat{Y}$  est l'opérateur donné par :

$$\hat{Y} = d-1 + \frac{\partial^{\frac{1}{\sigma}}}{\partial (-b)^{\frac{1}{\sigma}}} = \frac{D}{2} - 1 + \frac{\partial^{\frac{1}{\sigma}}}{\partial (-b)^{\frac{1}{\sigma}}} \quad (3.17)$$

La dernière égalité dans (3.16) provient de l'expansion de Stirling déterminée par les coefficients  $S_{D-1}^{(m)}$  qui satisfont à la relation de récurrence :

$$\begin{aligned} S_{n+1}^{(m)} &= S_n^{(m-1)} - nS_n^{(m)} \quad , \quad S_n^{(0)} = \delta_{0n} \quad , \quad S_n^{(n)} = 1 \quad , \quad n = 0, 1, \dots \\ S_1^{(1)} &= 1, \quad S_2^{(1)} = -S_1^{(1)} = -1, \quad \text{etc...} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Les expansions de (3.16) sont alors calculées systématiquement de la manière suivante :

- Pour  $D = 2$

$$Z_1 = \frac{1}{(D-1)!} \left[ \sum_{m=0}^{D-1} S_{D-1}^{(m)} \hat{Y}^m \right] \frac{\exp(-bd^\sigma)}{1 - \exp(-b)} \quad (3.19)$$

$$= [S_1^{(0)} + S_1^{(1)} \hat{Y}] \frac{\exp(-bd^\sigma)}{1 - \exp(-b)} = \hat{Y} \frac{\exp(-bd^\sigma)}{1 - \exp(-b)} \quad (3.20)$$

$$\hat{Y} = \frac{\partial^s}{\partial (-b)^s}, \quad s = \sigma^{-1} \quad (3.21)$$

- Pour  $D = 3$

$$Z_1 = \frac{1}{2!} [S_2^{(0)} + S_2^{(1)} \hat{Y} + S_2^{(2)} \hat{Y}^2] \frac{\exp(-bd^\sigma)}{1 - \exp(-b)} \quad (3.22)$$

$$Z_1 = \frac{1}{2} \hat{Y} (\hat{Y} - 1) \frac{\exp(-bd^\sigma)}{1 - \exp(-b)} \quad , \quad \hat{Y} = \frac{1}{2} + \frac{\partial^s}{\partial (-b)^s} \quad (3.23)$$

La fonction de partition individuelle de l'oscillateur fractionnaire devient :

$$Z_1 = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^2 S_2^{(m)} \left(\frac{1}{2}\right)^m \sum_{p=0}^m \frac{C_p^m}{\left(\frac{1}{2}\right)^p} \left( \frac{\partial^{\frac{1}{\sigma}}}{\partial (-b)^{\frac{1}{\sigma}}} \right)^p \frac{\exp(-b(\frac{3}{2})^\sigma)}{1 - \exp(-b)} \quad (3.24)$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \sum_{m=0}^2 S_2^{(m)} \hat{Y}^m \right] \frac{\exp(-b(\frac{3}{2})^\sigma)}{1 - \exp(-b)} \quad (3.25)$$

$$= \frac{1}{2} \hat{Y} (\hat{Y} - 1) \frac{\exp(-b(\frac{3}{2})^\sigma)}{1 - \exp(-b)} \quad (3.26)$$

Où  $\hat{Y}$  est l'opérateur défini par :

$$\hat{Y} = \frac{1}{2} + \frac{\partial^{\frac{1}{\sigma}}}{\partial (-b)^{\frac{1}{\sigma}}} \quad (3.27)$$

$$Z_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^{\frac{1}{\sigma}}}{\partial (-b)^{\frac{1}{\sigma}}} + \frac{1}{2} \right) \left( \frac{\partial^{\frac{1}{\sigma}}}{\partial (-b)^{\frac{1}{\sigma}}} - \frac{1}{2} \right) \frac{\exp(-b(\frac{3}{2})^\sigma)}{1 - \exp(-b)} \quad (3.28)$$

$$Z_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial^{\frac{2}{\sigma}} \left( \frac{\exp(-b(\frac{3}{2})^\sigma)}{1 - \exp(-b)} \right)}{\partial (-b)^{\frac{2}{\sigma}}} - \frac{1}{8} \frac{\exp(-b(\frac{3}{2})^\sigma)}{1 - \exp(-b)} \quad (3.29)$$

À présent, nous utilisons les différentes définitions de la dérivée fractionnaire et les appliquons à la dérivée présente dans la dernière expression de la fonction de partition individuelle impaire  $Z_1$ .

### 3.2.2 Les Trois Approches des Dérivées Fractionnaires

Nous présentons trois Approches de la dérivée fractionnaire, la première est définie par Liouville, la deuxième par Riemann-Liouville et la troisième par Caputo.

#### Approche de Liouville

$${}^L D^{\alpha'} \exp(sx) = \frac{\partial^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha'}} \exp(sx) = s^{\alpha'} \exp(sx) \quad (3.30)$$

#### Approche de Riemann-Liouville

$${}^{RL} D^{\alpha'} \exp(sx) = \frac{\partial^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha'}} \exp(sx) = x^{-\alpha'} E_{1,1-\alpha'}(sx) \quad (3.31)$$

#### Approche de Caputo

$${}^C D^{\alpha'} \exp(sx) = \frac{\partial^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha'}} \exp(sx) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^{k+n} x^{k+n-\alpha'}}{\Gamma(k+1+n-\alpha')} = s^n x^{n-\alpha'} E_{1,n-\alpha'+1}(sx) \quad (3.32)$$

Où  $\alpha' \in \mathbb{R}$ ,  $n-1 < \alpha' < n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  et la fonction  $E_{1,n-\alpha'+1}(sx)$  est la fonction de Mittag-Leffler [10]. Il est important de mentionner ici que les deux premières définitions de dérivée fractionnaire (Liouville et Riemann-Liouville) coïncident si l'ordre de la dérivée est un entier. Sinon, les deux premières définitions sont différentes et conduisent à des résultats différents.

Par exemple, si  $\alpha' = 1$ , il est clair que d'après la définition :

$$\begin{aligned} E_{1,1-\alpha'}(sx) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(sx)^n}{\Gamma(n+1-\alpha')} = sx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(sx)^{n-1}}{\Gamma(n)} \\ &= sx \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(sx)^l}{\Gamma(l+1)} = sx \exp(sx) \end{aligned} \quad (3.33)$$

Alors :

$$\frac{\partial}{\partial x} \exp(sx) = \frac{1}{x} E_{1,0}(sx) = \frac{1}{x} sx \exp(sx) \quad (3.34)$$

$$= s \exp(sx) \quad (3.35)$$

qui est identique à la première définition. Ainsi, la troisième définition (dans le sens de Caputo) est clairement différente des deux premières définitions car le sens de Caputo n'est pas défini pour un ordre entier.

### 3.2.3 Comparaison des Ordres non Entiers

Pour illustrer cette différence, nous présentons un exemple avec  $\alpha' = 8/3$ , et comparons les trois Approches de dérivation de la manière suivante :

Pour simplifier, supposons que  $s = 1$ .

$${}^L D^{\alpha'} = \frac{\partial^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha'}} \exp(x) = \exp(x) \quad (3.36)$$

$${}^{RL} D^{\alpha'} = \frac{\partial^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha'}} \exp(x) = x^{-\alpha'} E_{1,1-\alpha'}(x) \quad (3.37)$$

$${}^C D^{\alpha'} \exp(x) = x^{n-\alpha'} E_{1,n-\alpha'+1}(x) \quad , \quad n-1 < \alpha' = 8/3 < n \quad (3.38)$$

Dans le dernier sens, il est clair que  $n = 3$ , alors :

$${}^C D^{\alpha'} \exp(x) = x^{3-\alpha'} E_{1,4-\alpha'}(x) \quad , \quad 2 < \alpha' < 3 \quad (3.39)$$

Dans l'exemple suivant, nous pouvons observer que les trois définitions sont différentes. Nous avons tracé les fonctions  $x^{8/3} D_L^{8/3}(x)$ ,  $x^{8/3} D_{R-L}^{8/3}(x)$  et  $x^{8/3} D_C^{8/3}(x)$  afin d'illustrer la différence entre ces trois Approches (Figure 3.1) .

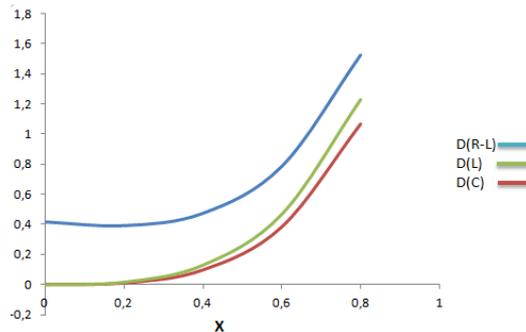


FIGURE 3.1 – Comparaison des trois définitions de la dérivée : Riemann-Liouville (supérieure), Liouville (intermédiaire) et Caputo (inférieure).

Les expressions de ces trois fonctions sont les suivantes :

$$x^{8/3} D_L^{8/3}(x) = x^{8/3} \exp(x) \quad (3.40)$$

$$x^{8/3} D_{R-L}^{8/3}(x) = E_{1,-\frac{5}{3}}(x) = \frac{1}{\Gamma(-\frac{5}{3})} \cdot {}_1F_1(1, -\frac{5}{3}, x) \quad (3.41)$$

$$x^{8/3}D_C^{8/3}(x) = x^3E_{1, \frac{4}{3}}(x) = \frac{x^3}{\Gamma(\frac{4}{3})} \cdot {}_1F_1(1, \frac{4}{3}, x) \quad (3.42)$$

### 3.2.4 Application à la Fonction de Partition

#### Sens de Liouville

Dans un premier temps, nous utilisons la définition de la dérivée fractionnaire selon Liouville.

$$\frac{\partial^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha'}} \exp(sx) = s^{\alpha'} \exp(sx) \quad (3.43)$$

En suivant ce sens, nous obtenons ensuite :

$$\frac{\partial^{\frac{2}{\sigma}} \left( \frac{\exp(-b(\frac{3}{2})^\sigma)}{1 - \exp(-b)} \right)}{\partial (-b)^{\frac{2}{\sigma}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^{\frac{2}{\sigma}}}{\partial (-b)^{\frac{2}{\sigma}}} \exp(-(n + (\frac{3}{2})^\sigma)b) \quad (3.44)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n + (\frac{3}{2})^\sigma)^{\frac{2}{\sigma}} \exp(-(n + (\frac{3}{2})^\sigma)b) \quad (3.45)$$

Ce résultat nous permet d'obtenir une nouvelle expression de la fonction de partition individuelle.

$$Z_1^L = \frac{1}{2} \exp\left(-b(\frac{3}{2})^\sigma\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\frac{3}{2}\right)^\sigma + n\right)^{\frac{2}{\sigma}} \exp(-nb) - \frac{1}{8} \frac{\exp(-b(\frac{3}{2})^\sigma)}{1 - \exp(-b)} \quad (3.46)$$

ou de manière équivalente,

$$Z_1^L = \frac{1}{2} \exp\left(-b(\frac{3}{2})^\sigma\right) \Phi(\exp(-b), -\frac{2}{\sigma}, (\frac{3}{2})^\sigma) - \frac{1}{8} \frac{\exp(-b(\frac{3}{2})^\sigma)}{1 - \exp(-b)} \quad (3.47)$$

où  $\Phi(z, s, v)$  est la fonction de Lerch [11]. Il est facile de montrer que nous obtenons la même formule de fonction de partition pour l'oscillateur harmonique dans le cas standard ( $\sigma = 1$ ) lorsque  $D = 3$ .

$$Z_1^L = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{3}{2}b\right) \Phi(\exp(-b), -2, \frac{3}{2}) - \frac{1}{8} \frac{\exp(-\frac{3}{2}b)}{1 - \exp(-b)} \quad (3.48)$$

$$= \frac{\exp(-\frac{3}{2}b)}{[1 - \exp(-b)]^3} \quad (3.49)$$

#### Sens de Reimann-Liouville

Le deuxième sens de la dérivée fractionnaire est défini de la manière suivante :

$$\frac{\partial^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha'}} \exp(sx) = D_{RL}^{\alpha'} \exp(sx) = x^{-\alpha'} E_{1, 1-\alpha'}(sx) \quad (3.50)$$

Comme nous avons,

$$\frac{\exp(-b(\frac{3}{2})^\sigma)}{1 - \exp(-b)} = \exp\left(-b(\frac{3}{2})^\sigma\right) \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-nb) \quad (3.51)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\left(n + (\frac{3}{2})^\sigma\right)b\right) \quad (3.52)$$

et en utilisant le deuxième sens de la dérivée, nous pouvons écrire :

$$\frac{\partial^{\frac{2}{\sigma}} \left( \frac{\exp(-b(\frac{3}{2})^\sigma)}{1 - \exp(-b)} \right)}{\partial (-b)^{\frac{2}{\sigma}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^{\frac{2}{\sigma}}}{\partial (-b)^{\frac{2}{\sigma}}} \exp\left(-\left(n + (\frac{3}{2})^\sigma\right)b\right) \quad (3.53)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^{\frac{2}{\sigma}}}{\partial x^{\frac{2}{\sigma}}} \exp\left(\left(n + (\frac{3}{2})^\sigma\right)x\right) \quad (3.54)$$

$$= x^{-\frac{2}{\sigma}} \sum_{n=0}^{\infty} E_{1,1-\frac{2}{\sigma}}\left(\left(n + (\frac{3}{2})^\sigma\right)x\right) \quad (3.55)$$

$$= (-b)^{-\frac{2}{\sigma}} \sum_{n=0}^{\infty} E_{1,1-\frac{2}{\sigma}}\left(-\left(n + (\frac{3}{2})^\sigma\right)b\right) \quad (3.56)$$

$$= \frac{(-b)^{-\frac{2}{\sigma}}}{\Gamma\left(1 - \frac{2}{\sigma}\right)} \sum_{n=0}^{\infty} {}_1F_1\left(1, 1 - \frac{2}{\sigma}; -b\left(n + (\frac{3}{2})^\sigma\right)\right) \quad (3.57)$$

$$\frac{\partial^{\frac{2}{\sigma}} \left( \frac{\exp(-b(\frac{3}{2})^\sigma)}{1 - \exp(-b)} \right)}{\partial (-b)^{\frac{2}{\sigma}}} = \frac{(-b)^{-\frac{2}{\sigma}}}{\Gamma\left(1 - \frac{2}{\sigma}\right)} \sum_{n=0}^{\infty} {}_1F_1\left(1, 1 - \frac{2}{\sigma}; -bn - b(\frac{3}{2})^\sigma\right) \quad (3.58)$$

où  ${}_1F_1$  est la fonction hypergéométrique confluyente [9]. Pour plus de commodité à utiliser ultérieurement, nous pouvons écrire, grâce à

$${}_1F_1(a; c; z) = \exp(z) {}_1F_1(c - a; c; -z) \quad (3.59)$$

$$\frac{\partial^{\frac{2}{\sigma}} \left( \frac{\exp(-b(\frac{3}{2})^\sigma)}{1 - \exp(-b)} \right)}{\partial (-b)^{\frac{2}{\sigma}}} = \frac{(-b)^{-\frac{2}{\sigma}}}{\Gamma\left(1 - \frac{2}{\sigma}\right)} \sum_{n=0}^{\infty} {}_1F_1\left(1; 1 - \frac{2}{\sigma}; -bn - b(\frac{3}{2})^\sigma\right) \quad (3.60)$$

$$= \frac{(-b)^{-\frac{2}{\sigma}}}{\Gamma\left(1 - \frac{2}{\sigma}\right)} \left[ \exp\left(-b(\frac{3}{2})^\sigma\right) \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-bn) \times \right. \\ \left. {}_1F_1\left(\frac{2}{\sigma}; 1 - \frac{2}{\sigma}; bn + b(\frac{3}{2})^\sigma\right) \right] \quad (3.61)$$

Pour reformuler cette dernière formule, nous utilisons [12] :

$${}_1F_1(a; c; z + z') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c+n)} \frac{z^n}{n!} {}_1F_1(a+n; c+n; z') \quad (3.62)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c+n)} \frac{z'^n}{n!} {}_1F_1(a+n; c+n; z) \quad (3.63)$$

La dernière formule peut être réécrite comme suit :

$$\frac{\partial^{\frac{2}{\sigma}} \left( \frac{\exp(-b(\frac{3}{2})^\sigma)}{1-\exp(-b)} \right)}{\partial (-b)^{\frac{2}{\sigma}}} = \frac{(-b)^{-\frac{2}{\sigma}}}{\Gamma(1-\frac{2}{\sigma})} \exp\left(-b(\frac{3}{2})^\sigma\right) \times \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-bn) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k-\frac{2}{\sigma})}{\Gamma(-\frac{2}{\sigma})} \frac{\Gamma(1-\frac{2}{\sigma})}{\Gamma(k+1-\frac{2}{\sigma})} \frac{(bn)^k}{k!} \times {}_1F_1\left(k-\frac{2}{\sigma}; k+1-\frac{2}{\sigma}; b(\frac{3}{2})^\sigma\right) \right] \quad (3.64)$$

Après quelques manipulations algébriques, nous pouvons écrire le dernier résultat sous une forme alternative :

$$\frac{\partial^{\frac{2}{\sigma}} \left( \frac{\exp(-b(\frac{3}{2})^\sigma)}{1-\exp(-b)} \right)}{\partial (-b)^{\frac{2}{\sigma}}} = \frac{(-b)^{-\frac{2}{\sigma}}}{\Gamma(1-\frac{2}{\sigma})} \exp\left(-b(\frac{3}{2})^\sigma\right) \times \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k-\frac{2}{\sigma})}{\Gamma(-\frac{2}{\sigma})} \frac{\Gamma(1-\frac{2}{\sigma})}{\Gamma(k+1-\frac{2}{\sigma})} \frac{1}{k!} \times {}_1F_1\left(k-\frac{2}{\sigma}; k+1-\frac{2}{\sigma}; b(\frac{3}{2})^\sigma\right) \sum_{n=0}^{\infty} (bn)^k \exp(-bn) \right] \quad (3.65)$$

$$= \frac{(-b)^{-\frac{2}{\sigma}}}{\Gamma(1-\frac{2}{\sigma})} \exp\left(-b(\frac{3}{2})^\sigma\right) \times \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k-\frac{2}{\sigma})}{\Gamma(-\frac{2}{\sigma})} \frac{\Gamma(1-\frac{2}{\sigma})}{\Gamma(k+1-\frac{2}{\sigma})} \frac{1}{k!} \times {}_1F_1\left(k-\frac{2}{\sigma}; k+1-\frac{2}{\sigma}; b(\frac{3}{2})^\sigma\right) \left(-\frac{\partial}{\partial \lambda}\right)^k \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\lambda bn) \Big|_{\lambda=1} \right] \quad (3.66)$$

$$\frac{\partial^{\frac{2}{\sigma}} \left( \frac{\exp(-b(\frac{3}{2})^\sigma)}{1-\exp(-b)} \right)}{\partial (-b)^{\frac{2}{\sigma}}} = \frac{(-b)^{-\frac{2}{\sigma}}}{\Gamma(1-\frac{2}{\sigma})} \exp\left(-b(\frac{3}{2})^\sigma\right) \times \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k-\frac{2}{\sigma})}{\Gamma(-\frac{2}{\sigma})} \frac{\Gamma(1-\frac{2}{\sigma})}{\Gamma(k+1-\frac{2}{\sigma})} \frac{(-\frac{\partial}{\partial \lambda})^k}{k!} \times {}_1F_1\left(k-\frac{2}{\sigma}; k+1-\frac{2}{\sigma}; b((\frac{3}{2})^\sigma)\right) \frac{1}{1-\exp(-\lambda b)} \Big|_{\lambda=1} \right] \quad (3.67)$$

La somme sur  $k$  est effectuée en utilisant la même formule de Magnus que précédemment :

$$\frac{\partial^{\frac{2}{\sigma}} \left( \frac{\exp(-b(\frac{3}{2})^\sigma)}{1-\exp(-b)} \right)}{\partial (-b)^{\frac{2}{\sigma}}} = \frac{(-b)^{-\frac{2}{\sigma}}}{\Gamma(1-\frac{2}{\sigma})} \exp\left(-b(\frac{3}{2})^\sigma\right) \times {}_1F_1\left(-\frac{2}{\sigma}; 1-\frac{2}{\sigma}; b(\frac{3}{2})^\sigma - \frac{\partial}{\partial \lambda}\right) \frac{1}{1-\exp(-\lambda b)} \Big|_{\lambda=1} \quad (3.68)$$

Alors, la fonction de partition individuelle devient :

$$Z_1^{RL} = \frac{1}{2} \frac{\partial^{\frac{2}{\sigma}} \left( \frac{\exp(-b(\frac{3}{2})^\sigma)}{1 - \exp(-b)} \right)}{\partial (-b)^{\frac{2}{\sigma}}} - \frac{1}{8} \frac{\exp(-b(\frac{3}{2})^\sigma)}{1 - \exp(-b)} \quad (3.69)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(-b)^{-\frac{2}{\sigma}}}{\Gamma(1 - \frac{2}{\sigma})} \exp\left(-b(\frac{3}{2})^\sigma\right) \cdot {}_1F_1\left(-\frac{2}{\sigma}; 1 - \frac{2}{\sigma}; b(\frac{3}{2})^\sigma - \frac{\partial}{\partial \lambda}\right) \frac{1}{1 - \exp(-\lambda b)} \Big|_{\lambda=1} - \frac{1}{8} \frac{\exp(-b(\frac{3}{2})^\sigma)}{1 - \exp(-b)} \quad (3.70)$$

C'est le résultat final de la fonction de partition individuelle selon la définition de Riemann-Liouville.

Nous proposons la forme suivante : ( $z = b(\frac{3}{2})^\sigma - \frac{\partial}{\partial \lambda}$ )

$$\frac{1}{\Gamma(1 - \frac{2}{\sigma})} {}_1F_1\left(-\frac{2}{\sigma}, 1 - \frac{2}{\sigma}; z\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m - \frac{2}{\sigma})}{\Gamma(-\frac{2}{\sigma})\Gamma(m + 1 - \frac{2}{\sigma})} \cdot \frac{z^m}{m!} \quad (3.71)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(-\frac{2}{\sigma})(m - \frac{2}{\sigma})} \cdot \frac{z^m}{m!} \quad (3.72)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(-\frac{2}{\sigma} + 1)} \frac{z^0}{0!} + \frac{-\frac{2}{\sigma}}{\Gamma(-\frac{2}{\sigma} + 2)} \cdot \frac{z^1}{1!} + \frac{-\frac{2}{\sigma}(-\frac{2}{\sigma} + 1)}{\Gamma(-\frac{2}{\sigma} + 3)} \cdot \frac{z^2}{2!} + \frac{-\frac{2}{\sigma}(-\frac{2}{\sigma} + 1)(-\frac{2}{\sigma} + 2)}{\Gamma(-\frac{2}{\sigma} + 4)} \cdot \frac{z^3}{3!} + \frac{-\frac{2}{\sigma}(-\frac{2}{\sigma} + 1)(-\frac{2}{\sigma} + 2)(-\frac{2}{\sigma} + 3)}{\Gamma(-\frac{2}{\sigma} + 5)} \cdot \frac{z^4}{4!} + \dots \quad (3.73)$$

Dans le cas de l'oscillateur standard ( $\sigma = 1$ ), seul le terme contenant  $z^2$  ne s'annule pas dans le développement.

$$\frac{1}{\Gamma(1 - \frac{2}{\sigma})} {}_1F_1\left(-\frac{2}{\sigma}, 1 - \frac{2}{\sigma}; z\right) = z^2 \quad (3.74)$$

Donc la fonction de partition dans le cas standard ( $\sigma = 1$ ) devient :

$$Z_1^{RL} = \frac{1}{2} \frac{(-b)^{-\frac{2}{\sigma}}}{\Gamma(1 - \frac{2}{\sigma})} \exp\left(-b(\frac{3}{2})^\sigma\right) {}_1F_1\left(-\frac{2}{\sigma}, 1 - \frac{2}{\sigma}; b(\frac{3}{2})^\sigma - \frac{\partial}{\partial \lambda}\right) \frac{1}{1 - \exp(-\lambda b)} - \frac{1}{8} \frac{\exp(-b(\frac{3}{2})^\sigma)}{1 - \exp(-b)} \quad (3.75)$$

$$Z_1^{RL} = \frac{1}{2b^2} \exp\left(-\frac{3b}{2}\right) \left(\frac{3b}{2} - \frac{\partial}{\partial \lambda}\right)^2 \frac{1}{1 - \exp(-\lambda b)} \Big|_{\lambda=1} - \frac{1}{8} \frac{\exp(-\frac{3}{2}b)}{1 - \exp(-b)} \quad (3.76)$$

$$= \frac{\exp(-\frac{3}{2}b)}{[1 - \exp(-b)]^3} \quad (3.77)$$

Nous remarquons que lorsque  $\sigma = 2/3$ , seul le terme de  $z^3$  reste dans le développement. Lorsque  $\sigma = 1/2$ , seul le terme de  $z^4$  reste dans le développement. Nous observons également que si nous utilisons les propriétés de la fonction hypergéométrique confluyente et que nous mettons  $\sigma = 1$  dans chaque expression (3.58),(3.61),(3.70) (seul le deuxième terme de la série hypergéométrique partielle), nous obtenons le résultat standard de l'oscillateur quantique.

$$Z_1 = \frac{\exp(-\frac{3}{2}b)}{[1 - \exp(-b)]^3} \quad (3.78)$$

Nous notons que, dans la plage  $1/2 < \sigma \leq 1$ , seul la valeur  $\sigma = 2/3$  garantit que  $2/\sigma$  est un nombre entier. Dans ce cas, seul le terme de  $-z^3$  participe au développement de la série hypergéométrique ci-dessus.

$$\frac{1}{\Gamma(1 - \frac{2}{\sigma})} {}_1F_1(-3, -2; b(\frac{3}{2})^\sigma - \frac{\partial}{\partial \lambda}) = - \left[ b(\frac{3}{2})^{\frac{2}{3}} - \frac{\partial}{\partial \lambda} \right]^3 \quad (3.79)$$

alors, nous obtenons :

$$\begin{aligned} Z_1^{RL} &= -\frac{1}{2} \exp(-b)^{-3} \exp\left(-b(\frac{3}{2})^{\frac{2}{3}}\right) \left[ b(\frac{3}{2})^{\frac{2}{3}} - \frac{\partial}{\partial \lambda} \right]^3 \frac{1}{1 - \exp(-\lambda b)} \Big|_{\lambda=1} \\ &\quad - \frac{1}{8} \frac{\exp\left(-b(\frac{3}{2})^{\frac{2}{3}}\right)}{1 - \exp(-b)} \end{aligned} \quad (3.80)$$

après avoir effectué les dérivées nécessaires, nous obtenons :

$$Z_1^{RL} = \frac{\exp\left(-b(\frac{3}{2})^{\frac{2}{3}}\right)}{2(1 - \exp(-b))^4} \left[ \begin{aligned} &(1 - \exp(-b))^3 \left( (\frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4} \right) \\ &+ 6 \exp(-2b)(1 - \exp(-b)) \left( (\frac{3}{2})^{\frac{2}{3}} + 1 \right) \\ &+ \exp(-b)(1 - \exp(-b))^2 \left( 3(\frac{3}{2})^{\frac{2}{3}} + 3(\frac{3}{2})^{\frac{4}{3}} + 1 \right) \\ &+ 6 \exp(-3b) \end{aligned} \right] \quad (3.81)$$

Nous pouvons facilement montrer que le sens de la dérivée de Liouville donne également la même fonction de partition individuelle pour  $\sigma = 2/3$ . En effet, dans ce sens (voir formule (3.46), en remplaçant  $\sigma$  par  $2/3$ ), nous avons :

$$Z_1^L = \frac{1}{2} \exp\left(-b(\frac{3}{2})^{\frac{2}{3}}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left( (\frac{3}{2})^{\frac{2}{3}} + n \right)^3 \exp(-nb) - \frac{1}{8} \frac{\exp\left(-b(\frac{3}{2})^{\frac{2}{3}}\right)}{1 - \exp(-b)} \quad (3.82)$$

Lorsque nous développons  $\left( (\frac{3}{2})^{\frac{2}{3}} + n \right)^3$ , nous obtenons immédiatement la même formule de  $Z_1^{RL}$  vérifiée précédemment.

### Sens de Caputo

La dérivée fractionnaire de Caputo de la fonction exponentielle a la forme suivante :

$${}^C D^{\alpha'} \exp(sx) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^{k+n} x^{k+n-\alpha'}}{\Gamma(k+1+n-\alpha')} = s^n x^{n-\alpha'} E_{1, n-\alpha'+1}(sx) \quad (3.83)$$

avec  $\alpha' \in \mathbb{R}$ ,  $n-1 < \alpha' < n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Les cas intéressants dans notre étude sont pour  $2 \leq \alpha' \leq 3$

Pour  $2 < \alpha' < 3$  :

$${}^C D^{\alpha'} \exp(sx) = s^3 x^{3-\alpha'} E_{1, 4-\alpha'}(sx) \quad (3.84)$$

Cela correspond à  $\frac{2}{3} < \sigma \leq 1$ . Ainsi, dans le cas où  $2 < \alpha' < 3$ , la dérivée fractionnaire de Caputo se transforme comme suit :

$$\frac{\partial^{\frac{2}{\sigma}} \left( \frac{\exp(-b(\frac{3}{2})^\sigma)}{1-\exp(-b)} \right)}{\partial (-b)^{\frac{2}{\sigma}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^{\frac{2}{\sigma}}}{\partial (-b)^{\frac{2}{\sigma}}} \exp \left( -\left(n + \left(\frac{3}{2}\right)^\sigma\right)b \right) \quad (3.85)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \left(\frac{3}{2}\right)^\sigma\right)^3 (-b)^{3-\frac{2}{\sigma}} E_{1, 4-\frac{2}{\sigma}} \left( -\left(n + \left(\frac{3}{2}\right)^\sigma\right)b \right) \quad (3.86)$$

$$= \frac{(-b)^{3-\frac{2}{\sigma}}}{\Gamma(4-\frac{2}{\sigma})} \times \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \left(\frac{3}{2}\right)^\sigma\right)^3 {}_1F_1\left(1, 4-\frac{2}{\sigma}; -b\left(n + \left(\frac{3}{2}\right)^\sigma\right)\right) \quad (3.87)$$

Il est clair, dans le cas où  $2 < \alpha' < 3$  et en utilisant cette définition de Caputo ainsi que les définitions de Liouville et de Riemann-Liouville, que les trois définitions conduisent à des fonctions de partition individuelles  $Z_1$  différentes (Figure 3.1) . Après quelques manipulations algébriques de la fonction hypergéométrique confluyente, nous obtenons le résultat suivant :

$$\begin{aligned} Z_1^C &= \frac{1}{2} \frac{(-b)^{3-\frac{2}{\sigma}}}{\Gamma(4-\frac{2}{\sigma})} \exp \left( -b\left(\frac{3}{2}\right)^\sigma \right) \times \\ &\quad \left[ {}_1F_1 \left( 3 - \frac{2}{\sigma}; 4 - \frac{2}{\sigma}; b\left(\frac{3}{2}\right)^\sigma - \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) \Phi \left( \exp(-\lambda b), -3, \left(\frac{3}{2}\right)^\sigma \right) \right] \\ &\quad - \frac{1}{8} \frac{\exp(-b(\frac{3}{2})^\sigma)}{1-\exp(-b)} \end{aligned} \quad (3.88)$$

où  $\Phi(\exp(-\lambda b), -3, (\frac{3}{2})^\sigma)$  est la fonction de Lerch.

Plus explicitement, la dernière formule peut être transformée en :

$$Z_1^C = \frac{(-b)^{3-\frac{2}{\sigma}} \exp(-b(\frac{3}{2})^\sigma)}{2\Gamma(4-\frac{2}{\sigma})} \left[ A + B + C + D - \frac{1}{8} \frac{\exp(-b(\frac{3}{2})^\sigma)}{1-\exp(-b)} \right] \quad (3.89)$$

où :

$$A = -4 \left( b \left( \frac{3}{2} \right)^\sigma \right)^{-2+\frac{2}{\sigma}} \frac{(1-\frac{1}{\sigma}) b (\frac{3}{2})^{\sigma-2}}{(\frac{3}{2})^\sigma \left( (\frac{3}{2})^\sigma - 2 \right)} {}_2F_1 \left( 3, \left( \frac{3}{2} \right)^\sigma; \left( \frac{3}{2} \right)^\sigma + 1, b \exp(-b) \right) \quad (3.90)$$

$$B = \left( b \left( \frac{3}{2} \right)^\sigma \right)^{-1+\frac{2}{\sigma}} \left( \frac{\log(b)}{b} - 1 \right) \frac{2b (\frac{3}{2})^{\sigma-2}}{(\frac{3}{2})^\sigma} {}_2F_1 \left( 3, \left( \frac{3}{2} \right)^\sigma; \left( \frac{3}{2} \right)^\sigma + 1, b \exp(-b) \right) \quad (3.91)$$

$$C = \frac{1}{4} \left( b \left( \frac{3}{2} \right)^\sigma \right)^{-1+\frac{2}{\sigma}} \left( -2 + \frac{2}{\sigma} \right) b (\frac{3}{2})^{\sigma-1} {}_2F_1 \left( 1, \left( \frac{3}{2} \right)^\sigma; \left( \frac{3}{2} \right)^\sigma + 1, b \exp(-b) \right) \quad (3.92)$$

$$D = \frac{\left( b \left( \frac{3}{2} \right)^\sigma \right)^{-1+\frac{2}{\sigma}}}{4} \left( \frac{\log(b)}{b} - 1 \right) b (\frac{3}{2})^\sigma {}_2F_1 \left( 1, \left( \frac{3}{2} \right)^\sigma; \left( \frac{3}{2} \right)^\sigma + 1, b \exp(-b) \right) \quad (3.93)$$

avec  ${}_2F_1(g, h; f, z)$  est la fonction hypergéométrique [9].

### 3.3 DISCUSSION

Dans le cas où  $2/\sigma$  ( $1/2 < \sigma \leq 1$ ) est égal à un nombre entier, les fonctions de partition calculées avec les dérivées de Liouville et de Riemann-Liouville sont égales. Les entiers correspondant à  $2/\sigma$  sont uniquement 2 et 3, ce qui signifie  $\sigma = 1$  (pour lequel  $\alpha = 2$  et  $\nu = 2$ , c'est le cas standard) et  $\sigma = 2/3$  (c'est-à-dire  $2/\sigma = 3$ ) pour lesquels correspondent un nombre infini de paires  $(\alpha, \nu)$ . Cela signifie qu'il existe un nombre infini de systèmes d'oscillateurs quantiques ayant la même thermodynamique pour  $\sigma = 2/3$ , mais avec différentes paires infinies  $(\alpha, \nu)$ . Le sens de Caputo n'est pas concerné dans ce cas car la dérivée de Caputo est définie pour les ordres non entiers ( $2/\sigma$  non entier). Dans le cas où  $2/\sigma$  ( $1/2 < \sigma \leq 1$ ) est un réel non entier, les fonctions de partition  $Z_1$  calculées pour chaque sens de dérivée (Liouville, Riemann-Liouville et Caputo) sont différentes. Pour mettre en évidence cette différence, nous présentons une comparaison entre les

trois types de dérivées pour  $\sigma = 3/4$  dans la fonction de partition individuelle.

$$Z_1^L = \frac{1}{2} \exp\left(-b\left(\frac{3}{2}\right)^\sigma\right) \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\left(\frac{3}{2}\right)^\sigma + n\right)^{\frac{2}{\sigma}}}{\exp(-nb)} \times \right] - \frac{1}{8} \frac{\exp\left(-b\left(\frac{3}{2}\right)^\sigma\right)}{1 - \exp(-b)} \quad (3.94)$$

$$= \frac{1}{2} b^{-\frac{2}{\sigma}} \sum_{n=0}^{\infty} x_n^{\frac{2}{\sigma}} \exp(-x_n) - \frac{1}{8} \frac{\exp\left(-b\left(\frac{3}{2}\right)^\sigma\right)}{1 - \exp(-b)} \quad (3.95)$$

$$= \frac{1}{2} (-b)^{-\frac{2}{\sigma}} \sum_{n=0}^{\infty} (-x_n)^{\frac{2}{\sigma}} \exp(-x_n) - \frac{1}{8} \frac{\exp\left(-b\left(\frac{3}{2}\right)^\sigma\right)}{1 - \exp(-b)} \quad (3.96)$$

$$= \frac{1}{2} (-b)^{-\frac{2}{\sigma}} \sum_{n=0}^{\infty} (y_n)^{\frac{2}{\sigma}} \exp(y_n) - \frac{1}{8} \frac{\exp\left(-b\left(\frac{3}{2}\right)^\sigma\right)}{1 - \exp(-b)} \quad (3.97)$$

le deuxième sens :

$$Z_1^{RL} = \frac{1}{2} (-b)^{-\frac{2}{\sigma}} \sum_{n=0}^{\infty} E_{1,1-\frac{2}{\sigma}}\left(-\left(n + \left(\frac{3}{2}\right)^\sigma\right)b\right) - \frac{1}{8} \frac{\exp\left(-b\left(\frac{3}{2}\right)^\sigma\right)}{1 - \exp(-b)} \quad (3.98)$$

$$= \frac{1}{2} (-b)^{-\frac{2}{\sigma}} \sum_{n=0}^{\infty} E_{1,1-\frac{2}{\sigma}}(y_n) - \frac{1}{8} \frac{\exp\left(-b\left(\frac{3}{2}\right)^\sigma\right)}{1 - \exp(-b)} \quad (3.99)$$

le troisième sens :

$$Z_1^C = \frac{1}{2} (-b)^{-\frac{2}{\sigma}} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-b\left(n + \left(\frac{3}{2}\right)^\sigma\right)\right)^3}{E_{1,4-\frac{2}{\sigma}}\left(-\left(n + \left(\frac{3}{2}\right)^\sigma\right)b\right)} \times \right] - \frac{1}{8} \frac{\exp\left(-b\left(\frac{3}{2}\right)^\sigma\right)}{1 - \exp(-b)} \quad (3.100)$$

$$= \frac{1}{2} (-b)^{-\frac{2}{\sigma}} \sum_{n=0}^{\infty} (y_n)^3 E_{1,4-\frac{2}{\sigma}}(y_n) - \frac{1}{8} \frac{\exp\left(-b\left(\frac{3}{2}\right)^\sigma\right)}{1 - \exp(-b)} \quad (3.101)$$

Pour comparer les trois sens de dérivées, pour  $\sigma = 3/4$ , il suffit de confronter les expressions suivantes :

$E_{1,-(5/3)}(y_n), y_n^{\frac{8}{3}} \exp(y_n)$  et  $y_n^3 E_{1,(4/3)}(y_n)$ . Les autres facteurs restent les mêmes pour les trois définitions.

### 3.4 CONCLUSION

Dans cette étude, nous avons comparé les dérivées de Liouville, Riemann-Liouville et Caputo sur les propriétés statistiques de  $N$  oscillateurs quantiques avec des lois de puissance  $\alpha, \nu$ , en interaction thermique avec un bain de température  $T$ . En général, lorsque le rapport  $\left(\frac{\alpha\nu}{\alpha+\nu}\right)$  satisfait  $(2 < \alpha \leq 1)$  et  $\left(\frac{\alpha\nu}{\alpha+\nu} \neq \frac{2}{3}\right)$ , Il n'y a pas d'équivalence entre les deux sens de dérivées.

Cependant, pour  $\sigma = 2/3$  (correspondant à un ordre de dérivée de  $\frac{2}{\sigma} = 3$ ), il existe une équivalence entre les dérivées de Liouville et Riemann-Liouville, mais pas avec la dérivée de Caputo qui concerne uniquement la dérivée fractionnaire. De plus, pour le cas  $\sigma = 2/3$ , il existe une infinité de systèmes différents de  $N$  oscillateurs quantiques (différents en termes des paramètres  $\alpha, \nu$ ) pour lesquels le sens de la dérivation (Liouville ou Riemann-Liouville) n'est pas pertinent. Cependant, ces systèmes (qui sont infinis en nombre avec différentes paires  $(\alpha, \nu)$  pour maintenir  $\sigma = 2/3$ ) ont la même fonction de partition et donc les mêmes propriétés thermodynamiques.

Pour le cas  $\sigma = 3/4$ , il n'y a pas d'équivalence entre les trois sens des dérivées, comme le montre la Figure 3.1.

### 3.5 ÉQUATION FRACTIONNAIRE DE LIOUVILLE

L'équation de Liouville est une équation fondamentale en mécanique classique et en physique statistique. Elle décrit l'évolution temporelle de la densité de probabilité  $\rho$  d'un système dans l'espace des phases. Elle a été initialement dérivée par Joseph Liouville en 1838 [13].

Dans cette étude, nous obtenons l'équation de Liouville avec des dérivées fractionnaires en partant de la conservation de la probabilité dans un élément de volume fractionnaire.

Pour l'espace des phases  $R^{2n}$  avec des coordonnées  $(x^1, \dots, x^{2n}) = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ , nous considérons un élément de volume différentiel fractionnaire.

$$d^\alpha V = d^\alpha x_1 \dots d^\alpha x_{2n} \quad (3.102)$$

où  $d^\alpha$  est une différentielle fractionnaire [14], définie par :

$$d^\alpha f(x) = \sum_{k=1}^{2n} D_{x_k}^\alpha f(x) (dx_k)^\alpha \quad (3.103)$$

où  $D_{x_k}^\alpha$  représente la dérivée fractionnaire d'ordre  $\alpha$  par rapport à  $x_k$ , telle que mentionnée dans [15].

La dérivée de Riemann-Liouville est définie par la formule :

$${}^R D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt \quad (3.104)$$

avec  $n-1 < \alpha < n$ . En utilisant (3.103), on obtient :

$$d^\alpha x_k = D_{x_k}^\alpha x_k (dx_k)^\alpha, \quad \alpha > 0 \quad (3.105)$$

Ensuite,

$$(dx_k)^\alpha = (D_{x_k}^\alpha x_k)^{-1} d^\alpha x_k \quad (3.106)$$

Pour les dérivées de R-L :

$$D_{x_k}^\alpha x_k^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} x_k^{\beta-\alpha}, \quad \beta > \alpha \quad (3.107)$$

Les équations (3.105) et (3.107) donnent :

$$(dx_k)^\alpha = \Gamma(2-\alpha) x_k^{\alpha-1} d^\alpha x_k \quad (3.108)$$

La conservation de la probabilité de trouver un système à plusieurs particules dans l'élément de volume d'espace des phases  $d^\alpha V$  peut être exprimée comme suit :

$$-d^\alpha V \frac{\partial \rho(t, x)}{\partial t} = d^\alpha [\rho(t, x) (\mathbf{u}, d^\alpha \mathbf{S})] \quad (3.109)$$

et pour l'élément de volume habituel ( $\alpha = 1$ ) :

$$-dV \frac{\partial \rho(t, x)}{\partial t} = d[\rho(t, x) (\mathbf{u}, d\mathbf{S})] \quad (3.110)$$

où  $\rho = \rho(t, x)$  est la densité de probabilité de trouver un système à plusieurs particules dans l'élément de volume d'espace des phases  $d^\alpha V$ ,  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, x)$  est le champ de vecteurs de vitesse,  $d^\alpha \mathbf{S}$  est un élément de surface, et les crochets  $(, )$  désignent le produit scalaire des vecteurs.

$$\mathbf{u} = \sum_{k=1}^{2n} u_k \mathbf{e}_k, \quad d^\alpha \mathbf{S} = \sum_{k=1}^{2n} d^\alpha S_k \mathbf{e}_k, \quad (\mathbf{u}, d^\alpha \mathbf{S}) = \sum_{k=1}^{2n} u_k d^\alpha S_k \quad (3.111)$$

où  $\mathbf{e}_k$  sont les vecteurs de base du système de coordonnées cartésiennes, et

$$d^\alpha S_k = d^\alpha x_1 \dots d^\alpha x_{k-1} d^\alpha x_{k+1} \dots d^\alpha x_{2n} \quad (3.112)$$

Les fonctions  $u_k = u_k(t, x)$  définissent les composantes  $x_k$  du champ de vecteurs de vitesse  $\mathbf{u}(t, x)$ , qui représente le taux auquel la densité de probabilité est transportée à travers l'élément de surface  $d^\alpha S_k$ . Dans le cas standard ( $\alpha = 1$ ), l'écoulement de probabilité dans la direction  $x_k$  est défini par :

$$d[\rho u_k] dS_k = D_{x_k}[\rho u_k] dx_k dS_k = D_{x_k}[\rho u_k] dV \quad (3.113)$$

pour le cas où  $\alpha \neq 1$ ,

$$d^\alpha[\rho u_k] d^\alpha S_k = D_{x_k}^\alpha[\rho u_k] (dx_k)^\alpha d^\alpha S_k. \quad (3.114)$$

En utilisant les équations (3.102), (3.106) et (3.112) nous obtenons :

$$d^\alpha[\rho u_k] d^\alpha S_k = (D_{x_k}^\alpha x_k)^{-1} D_{x_k}^\alpha[\rho u_k] d^\alpha x_k d^\alpha S_k \quad (3.115)$$

$$= (D_{x_k}^\alpha x_k)^{-1} D_{x_k}^\alpha[\rho u_k] d^\alpha V \quad (3.116)$$

La substitution de l'équation (3.115) dans l'équation (3.109) donne :

$$-d^\alpha V \frac{\partial \rho}{\partial t} = d^\alpha V \sum_{k=1}^{2n} (D_{x_k}^\alpha x_k)^{-1} D_{x_k}^\alpha[\rho u_k] \quad (3.117)$$

En conséquence, nous obtenons :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \sum_{k=1}^{2n} (D_{x_k}^\alpha x_k)^{-1} D_{x_k}^\alpha[\rho u_k] \quad (3.118)$$

Pour la dérivée de R-L,

$$(D_{x_k}^\alpha x_k)^{-1} D_{x_k}^\alpha = \Gamma(2 - \alpha) x_k^{\alpha-1} D_{x_k}^\alpha \quad (3.119)$$

L'équation (3.118) est l'équation de Liouville qui contient les dérivées d'ordre fractionnaire. cette équation décrit la conservation de probabilité pour trouver un système dans l'élément de volume fractionnaire (3.102) de l'espace des phases.

Pour les coordonnées  $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ , l'équation (3.118) est la suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \left( (D_{q_k}^\alpha q_k)^{-1} D_{q_k}^\alpha[\rho V_k] \right) + \sum_{k=1}^n \left( (D_{p_k}^\alpha p_k)^{-1} D_{p_k}^\alpha[\rho F_k] \right) = 0 \quad (3.120)$$

où :  $V_k = u_k$ , et  $F_k = u_{k+n}$ , ( $k = 1, \dots, n$ ). Les fonctions  $V_k = V_k(t, q, p)$  sont les composantes du champ de vitesse, et  $F_k = F_k(t, q, p)$  sont les composantes du champ de force.

En général,

$$D_{p_k}^\alpha [\rho F_k] \neq \rho D_{p_k}^\alpha F_k + F_k D_{p_k}^\alpha \rho \quad (3.121)$$

Supposons que  $F_k$  ne dépende pas de  $p_k$ , et que la composante  $V_k$  du champ de vitesse ne dépende pas de la composante  $q_k$  des coordonnées. Dans ce cas, l'équation (3.120) donne :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \left( V_k \left( D_{q_k}^\alpha q_k \right)^{-1} D_{q_k}^\alpha \rho + F_k \left( D_{p_k}^\alpha p_k \right)^{-1} D_{p_k}^\alpha \rho \right) = 0 \quad (3.122)$$

Pour la généralisation fractionnaire du système hamiltonien,  $V_k$  et  $F_k$  peuvent être exprimés sous la forme :

$$V_k = D_{p_k}^\alpha H(q, p) \quad , \quad F_k = -D_{q_k}^\alpha H(q, p) \quad (3.123)$$

où  $H(q, p)$  est une généralisation fractionnaire de l'Hamiltonien. La substitution de l'équation (3.123) dans l'équation (3.122) donne :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \left( \left( D_{q_k}^\alpha q_k \right)^{-1} D_{p_k}^\alpha H(q, p) D_{q_k}^\alpha \rho - \left( D_{p_k}^\alpha p_k \right)^{-1} D_{q_k}^\alpha H(q, p) D_{p_k}^\alpha \rho \right) = 0 \quad (3.124)$$

Une autre manière de définir est la suivante :

$$\{A, B\}_\alpha = \sum_{k=1}^n \left( \left( D_{q_k}^\alpha q_k \right)^{-1} D_{q_k}^\alpha A D_{p_k}^\alpha B - \left( D_{p_k}^\alpha p_k \right)^{-1} D_{q_k}^\alpha B D_{p_k}^\alpha A \right) \quad (3.125)$$

$$= \sum_{k=1}^n \left( D_{q_k}^\alpha q_k D_{p_k}^\alpha p_k \right)^{-1} \left( D_{q_k}^\alpha A D_{p_k}^\alpha B - D_{q_k}^\alpha B D_{p_k}^\alpha A \right) \quad (3.126)$$

pour  $\alpha = 1$ , l'équation (3.126) donne les crochets de Poisson. Notons que :

$$\{A, B\}_\alpha = -\{B, A\}_\alpha \quad (3.127)$$

Pour la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville,  $D_x^\alpha 1 \neq 0$ . En utilisant l'équation (3.126), nous obtenons l'équation (3.124) sous la forme :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \{\rho, H\}_\alpha = 0 \quad (3.128)$$

L'équation de Liouville énonce que l'évolution temporelle de la densité dans l'espace des phases est déterminée par l'hamiltonien du système, tout en préservant la probabilité totale est conservée au fil du temps. En d'autres termes, l'équation

de Liouville décrit comment la distribution de probabilité d'un système évolue dans le temps sous l'influence de son hamiltonien. Il est important de noter que l'équation de Liouville est une équation de continuité et qu'elle n'est valable que pour les systèmes hamiltoniens.

La généralisation du théorème de Liouville a été proposée par Tarasov [16] dans le but d'identifier un système à l'intérieur d'un élément de volume fractionnaire de l'espace des phases. L'équation de Liouville fractionnaire prend la forme suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \left( \frac{d^\alpha q_k}{dq_k^\alpha} \right)^{-1} \frac{d^\alpha H}{dp_k^\alpha} \frac{d^\alpha \rho}{dq_k^\alpha} - \sum_{k=1}^n \left( \frac{d^\alpha p_k}{dp_k^\alpha} \right)^{-1} \frac{d^\alpha H}{dq_k^\alpha} \frac{d^\alpha \rho}{dp_k^\alpha} = 0 \quad (3.129)$$

En supposant que la densité est indépendante du temps, alors :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \{H, \rho\}_\alpha = \sum_{k=1}^n \left( \frac{d^\alpha q_k}{dq_k^\alpha} \right)^{-1} \frac{d^\alpha H}{dp_k^\alpha} \frac{d^\alpha \rho}{dq_k^\alpha} - \sum_{k=1}^n \left( \frac{d^\alpha p_k}{dp_k^\alpha} \right)^{-1} \frac{d^\alpha H}{dq_k^\alpha} \frac{d^\alpha \rho}{dp_k^\alpha} = 0 \quad (3.130)$$

Il convient de noter que l'équation de Liouville fractionnaire est un type d'équation aux dérivées partielles (EDP) qui décrit l'évolution temporelle d'un système où les dérivées spatiales et temporelles sont exprimées avec des puissances fractionnaires plutôt qu'entières. Ces équations sont utilisées pour décrire des systèmes présentant des dynamiques complexes, telles que les fractales et les systèmes chaotiques. Elles sont également utilisées dans l'étude de la diffusion anormale et d'autres phénomènes qui ne peuvent pas être décrits par des ordres entiers traditionnels.

Pour différents systèmes avec un Hamiltonien  $H$ , nous cherchons à résoudre l'équation de Liouville fractionnaire afin de déterminer la densité  $\rho$  en utilisant différentes définitions de la dérivée fractionnaire.

## 3.6 RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DE LIOUVILLE FRACTIONNAIRE

### 3.6.1 Gaz Parfait

Le gaz parfait est un modèle simplifié largement utilisé pour étudier les propriétés des gaz réels. Dans ce modèle, le gaz est composé d'un grand nombre de

particules en mouvement aléatoire. Ces particules sont considérées comme des particules ponctuelles, ce qui signifie qu'elles n'ont pas de volume propre. De plus, les interactions entre les particules du gaz sont négligeables, à l'exception des collisions élastiques.

Dans cette partie, nous résoudrons l'équation de Liouville fractionnaire en utilisant les dérivées de Riemann-Liouville et de Caputo pour des systèmes présentant des lois de puissance non entières dans leurs hamiltoniens. En nous basant sur l'équation de Liouville fractionnaire, nous calculerons la fonction de densité (FD) pour un gaz parfait en utilisant les dérivées de Riemann-Liouville et de Caputo. Ensuite, nous mènerons la même étude sur un gaz composé de  $N$  oscillateurs fractionnaires dans un espace unidimensionnel.

### 3.6.2 Système de Gaz Parfait Fractionnaire

Dans l'espace à une dimension, nous considérons un système de gaz parfait fractionnaire composé de  $N$  particules identiques enfermées dans un volume  $V$  en équilibre à la température  $T$ . Nous supposons également que le système est isolé et décrit par le Hamiltonien suivant [17] :

$$H = \sum_{i=1}^{3N} H_i \quad (3.131)$$

$$H_i = D_\beta p_i^\beta \quad (3.132)$$

Il convient de noter que  $D_\beta$  est un coefficient qui ajuste les unités physiques avec la dimension  $[D_\beta] = \text{erg}^{1-\beta} \text{cm}^\beta \text{sec}^{-\beta}$  et  $\beta$  est un paramètre supérieur à un et inférieur ou égal à deux ( $1 < \beta \leq 2$ ).

L'équation de Liouville fractionnaire pour ce système peut être obtenue en substituant l'expression du hamiltonien (3.131) dans l'équation (3.130) :

$$\sum_{k=1}^{3N} \left( \frac{d^\alpha q_k}{dq_k^\alpha} \right)^{-1} \frac{d^\alpha}{dp_k^\alpha} \left( \sum_{i=1}^{3N} H_i \right) \frac{d^\alpha \rho}{dq_k^\alpha} - \sum_{k=1}^{3N} \left( \frac{d^\alpha p_k}{dp_k^\alpha} \right)^{-1} \frac{d^\alpha}{dq_k^\alpha} \left( \sum_{i=1}^{3N} H_i \right) \frac{d^\alpha \rho}{dp_k^\alpha} = 0 \quad (3.133)$$

$$\sum_{k=1}^{3N} \left( \frac{d^\alpha q_k}{dq_k^\alpha} \right)^{-1} \frac{d^\alpha}{dp_k^\alpha} \left( \sum_{i=1}^{3N} D_\beta p_i^\beta \right) \frac{d^\alpha \rho}{dq_k^\alpha} - \sum_{k=1}^{3N} \left( \frac{d^\alpha p_k}{dp_k^\alpha} \right)^{-1} \frac{d^\alpha}{dq_k^\alpha} \left( \sum_{i=1}^{3N} D_\beta p_i^\beta \right) \frac{d^\alpha \rho}{dp_k^\alpha} = 0 \quad (3.134)$$

Afin de résoudre l'équation (3.134) et déterminer la densité de ce système, nous utiliserons les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville et de Caputo.

### Sens de Riemann Liouville

La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville de  $p_k^\beta$  par rapport à  $q$  n'est pas nulle [10].

$$\frac{d^\alpha p_k^\beta}{dq_k^\alpha} = p_k^\beta \frac{q_k^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \quad (3.135)$$

La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville de  $p_k^\beta$  par rapport à  $p$  est [10] :

$$\frac{d^\alpha p_k^\beta}{dp_k^\alpha} = \frac{\Gamma(\beta+1)p_k^{\beta-\alpha}}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} \quad (3.136)$$

En utilisant les équations (3.134), (3.135) et (3.136), nous obtenons :

$$\left[ \begin{array}{l} D_\beta \sum_{k=1}^{3N} \left( \frac{\Gamma(2)q_k^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \right)^{-1} \left( \sum_{i=1, i \neq k}^{3N} p_i^\beta \frac{p_k^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{\Gamma(\beta+1)p_k^{\beta-\alpha}}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} \right) \frac{d^\alpha \rho}{dq_k^\alpha} \\ - D_\beta \sum_{k=1}^{3N} \left( \frac{\Gamma(2)p_k^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \right)^{-1} \left( \sum_{i=1}^{3N} p_i^\beta \left[ \frac{q_k^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \right] \right) \frac{d^\alpha \rho}{dp_k^\alpha} \end{array} \right] = 0 \quad (3.137)$$

Il est facile de voir que l'équation (3.137) peut être écrite comme suit :

$$\left[ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^{3N} q_k^{\alpha-1} \left( \sum_{i=1, i \neq k}^{3N} p_i^\beta \frac{p_k^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{\Gamma(\beta+1)p_k^{\beta-\alpha}}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} \right) \frac{d^\alpha \rho}{dq_k^\alpha} \\ - \sum_{k=1}^{3N} p_k^{\alpha-1} \left( \sum_{i=1}^{3N} p_i^\beta \left[ \frac{q_k^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \right] \right) \frac{d^\alpha \rho}{dp_k^\alpha} \end{array} \right] = 0 \quad (3.138)$$

En simplifiant l'équation précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} q_k^{\alpha-1} \left( \sum_{i=1, i \neq k}^{3N} p_i^\beta \frac{p_k^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{\Gamma(\beta+1)p_k^{\beta-\alpha}}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} \right) \frac{d^\alpha \rho}{dq_k^\alpha} \\ = p_k^{\alpha-1} \left( \sum_{i=1}^{3N} p_i^\beta \left[ \frac{q_k^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \right] \right) \frac{d^\alpha \rho}{dp_k^\alpha} \end{aligned} \quad (3.139)$$

$$q_k^{2\alpha-1} \left( \sum_{i=1, i \neq k}^{3N} p_i^\beta + \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\beta+1)p_k^\beta}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} \right) \frac{d^\alpha \rho}{dq_k^\alpha} = p_k^{2\alpha-1} \left( \sum_{i=1}^{3N} p_i^\beta \right) \frac{d^\alpha \rho}{dp_k^\alpha} \quad (3.140)$$

Pour résoudre l'équation précédente (3.140), nous factorisons la densité comme suit :

$$\rho = \prod_{i=1}^{3N} \rho(p_i, q_i) = \prod_{i=1}^{3N} \rho_1(p_i) \cdot \rho_2(q_i) \quad (3.141)$$

La substitution de l'équation (3.141) dans l'équation (3.140) donne :

$$\left[ \begin{aligned} q_k^{2\alpha-1} \left( \frac{\sum_{i=1, i \neq k}^{3N} p_i^\beta}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\beta+1)p_k^\beta} + \frac{1}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} \right) \rho_1(p_k) \frac{d^\alpha \rho_2(q_k)}{dq_k^\alpha} \\ = p_k^{2\alpha-1} \left( \sum_{i=1}^{3N} p_i^\beta \right) \frac{d^\alpha \rho_1(p_k)}{dp_k^\alpha} \rho_2(q_k) \end{aligned} \right] \quad (3.142)$$

Si nous considérons la conservation de l'énergie :

$$\sum_{i=1}^{3N} p_i^\beta = P_0 \quad (3.143)$$

Ainsi, nous pouvons écrire :

$$\sum_{i=1, i \neq k}^{3N} p_i^\beta = P_0 - p_k^\beta \quad (3.144)$$

Ensuite, l'équation (3.142) devient :

$$q_k^{2\alpha-1} \left( \frac{P_0 - p_k^\beta}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\beta+1)p_k^\beta} + \frac{1}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} \right) \rho_1(p_k) \frac{d^\alpha \rho_2(q_k)}{dq_k^\alpha} = p_k^{2\alpha-1} P_0 \frac{d^\alpha \rho_1(p_k)}{dp_k^\alpha} \rho_2(q_k) \quad (3.145)$$

donc :

$$q_k^{2\alpha-1} \frac{d^\alpha \rho_2(q_k)}{\rho_2(q_k) dq_k^\alpha} = \frac{p_k^{2\alpha-1} P_0}{\left( P_0 - p_k^\beta + \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\beta+1)p_k^\beta}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} \right)} \frac{d^\alpha \rho_1(p_k)}{\rho_1(p_k) dp_k^\alpha} \quad (3.146)$$

Pour que chaque terme de cette équation soit vrai, ils doivent tous être égaux à une constante  $\eta$  :

$$q_k^{2\alpha-1} \frac{d^\alpha \rho_2(q_k)}{\rho_2(q_k) dq_k^\alpha} = \eta = const \quad (3.147)$$

$$\frac{p_k^{2\alpha-1} P_0}{\left( P_0 - p_k^\beta + \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\beta+1)p_k^\beta}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} \right)} \frac{d^\alpha \rho_1(p_k)}{\rho_1(p_k) dp_k^\alpha} = \eta \quad (3.148)$$

ou de manière équivalente :

$$\frac{d^\alpha \rho_2(q_k)}{dq_k^\alpha} - \eta q_k^{1-2\alpha} \rho_2(q_k) = 0 \quad (3.149)$$

$$\frac{d^\alpha \rho_1(p_k)}{dp_k^\alpha} - \frac{\eta}{P_0} \left[ \frac{P_0 - p_k^\beta + \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\beta+1)p_k^\beta}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}}{p_k^{2\alpha-1}} \right] \rho_1(p_k) = 0 \quad (3.150)$$

$$\frac{d^\alpha \rho_1(p_k)}{dp_k^\alpha} - \mu \left[ P_0 p_k^{1-2\alpha} - p_k^{\beta+1-2\alpha} (1 + \alpha B(1 + \beta, -\alpha)) \right] \rho_1(p_k) = 0 \quad (3.151)$$

tel que  $B(1 + \beta, -\alpha)$  est la fonction bêta d'Euler et  $\mu = \frac{\eta}{P_0}$ .

La solution générale de l'équation (3.149) avec le sens de Riemann-Liouville est [18] :

$$\rho_2(q_k) = \frac{b'}{\Gamma(\alpha)} q_k^{\alpha-1} E_{\alpha, \frac{1}{\alpha}-1, -1} \left[ \eta q_k^{1-\alpha} \right] \quad (3.152)$$

où  $E_{n,l,m}$  est la fonction généralisée de Mittag-Leffler et  $b'$  est défini comme suit :

$$b' = \frac{d^{\alpha-1} \rho_2(q_k)}{dq_k^{\alpha-1}}(0) \quad (3.153)$$

Pour l'équation (3.151), nous nous intéresserons uniquement à sa résolution pour les valeurs de  $\alpha$  qui satisfont la relation suivante :

$$1 + \alpha B(1 + \beta, -\alpha) = 0 \quad (3.154)$$

Ainsi, nous devons résoudre l'équation suivante :

$$\frac{d^\alpha \rho_1(p_k)}{dp_k^\alpha} = \eta p_k^{1-2\alpha} \rho_1(p_k) \quad (3.155)$$

La solution de la dernière équation est similaire à la solution de l'équation (3.149), donc nous pouvons écrire l'expression  $\rho_1(p_k)$  comme suit

$$\rho_1(p_k) = \frac{b}{\Gamma(\alpha)} p_k^{\alpha-1} E_{\alpha, \frac{1}{\alpha}-1, -1} \left[ \eta p_k^{1-\alpha} \right] \quad (3.156)$$

où :

$$b = \frac{d^{\alpha-1} \rho_1(p_k)}{dp_k^{\alpha-1}}(0) \quad (3.157)$$

Ainsi, nous pouvons exprimer la densité du gaz comme suit :

$$\rho = \prod_{i=1}^{3N} \frac{bb'}{\Gamma(\alpha)^2} p_i^{\alpha-1} q_i^{\alpha-1} E_{\alpha, \frac{1}{\alpha}-1, -1} \left[ \eta p_i^{1-\alpha} \right] E_{\alpha, \frac{1}{\alpha}-1, -1} \left[ \eta q_i^{1-\alpha} \right] \quad (3.158)$$

Contrairement au cas standard où la densité d'un gaz parfait isolé est constante, dans l'état fractionnaire en utilisant la définition de Riemann-Liouville, la densité devient une fonction de  $p$  et  $q$ .

En fixant  $\alpha = 1$ , on peut observer que la densité  $\rho$  d'un gaz parfait composé de  $N$  particules reste constante. Ce résultat est en accord complet avec le cas standard.

### Sens de Caputo

En ce qui concerne  $q$ , la dérivée fractionnaire de Caputo de  $p_k^\beta$  est égale à zéro :

$$\frac{d^\alpha p_k^\beta}{dq_k^\alpha} = 0 \quad (3.159)$$

Tandis que la dérivée fractionnaire de  $p_k^\beta$  par rapport à  $p$  selon la définition de Caputo est [10] :

$$\frac{d^\alpha p_k^\beta}{dp_k^\alpha} = \frac{\Gamma(\beta + 1)p_k^{\beta-\alpha}}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} \quad (3.160)$$

L'équation (3.134) devient :

$$\sum_{k=1}^{3N} \left( \frac{d^\alpha q_k}{dq_k^\alpha} \right)^{-1} \frac{d^\alpha}{dp_k^\alpha} \left( \sum_{i=1}^{3N} D_\beta p_i^\beta \right) \frac{d^\alpha \rho}{dq_k^\alpha} = 0 \quad (3.161)$$

ou de manière équivalente :

$$\sum_{k=1}^{3N} \left( \frac{d^\alpha q_k}{dq_k^\alpha} \right)^{-1} D_\beta \frac{\Gamma(\beta + 1)p_k^{\beta-\alpha}}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} \frac{d^\alpha \rho}{dq_k^\alpha} = 0 \quad (3.162)$$

Alors,

$$\frac{d^\alpha \rho}{dq_k^\alpha} = 0 \quad (3.163)$$

ce qui signifie que :

$$\rho(q_k, p_k) = C \quad (3.164)$$

En appliquant la dérivée de Caputo, il est évident que la densité reste constante, et cette observation est totalement en accord avec le cas standard.

A partir des équations (3.158) et (3.164), on observe que la densité du gaz dépend de la définition de la dérivée fractionnaire.

### 3.6.3 Système d'oscillateurs Fractionnaires

Nous considérons un système de  $N$  oscillateurs fractionnaires indépendants, présenté par [19], et décrit par l'Hamiltonien suivant :

$$H = \sum_{i=1}^{3N} H_i \quad (3.165)$$

$$H_i = D_\beta p_i^\beta + l^2 q_i^\nu \quad (3.166)$$

où  $l$  est un coefficient ayant les dimensions  $[l] = [\text{energie}]^{1/2} \times [\text{longueur}]^{-\nu/2}$  et  $1 < \nu \leq 2$ .

Après avoir intégré l'expression de l'Hamiltonien (3.166) dans l'équation de Liouville fractionnaire (3.130), la densité du système peut être déterminée en résolvant l'équation suivante :

$$\left[ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^{3N} \left( \frac{d^\alpha q_k}{dq_k^\alpha} \right)^{-1} \frac{d^\alpha \sum_{i=1}^{3N} (D_\beta p_i^\beta + l^2 q_i^\nu)}{dp_k^\alpha} \frac{d^\alpha \rho}{dq_k^\alpha} \\ - \sum_{k=1}^{3N} \left( \frac{d^\alpha p_k}{dp_k^\alpha} \right)^{-1} \frac{d^\alpha \sum_{i=1}^{3N} (D_\beta p_i^\beta + l^2 q_i^\nu)}{dq_k^\alpha} \frac{d^\alpha \rho}{dp_k^\alpha} \end{array} \right] = 0 \quad (3.167)$$

Pour déterminer la densité de ce système en résolvant l'équation (3.167), nous utiliserons les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville et de Caputo.

### Sens de Riemann-Liouville

La dérivée fractionnaire de la fonction  $\sum_{i=1}^{3N} (D_\beta p_i^\beta + l^2 q_i^\nu)$  utilisant la définition de Riemann-Liouville par rapport à  $p$  et  $q$ , respectivement, est la suivante :

$$\frac{d^\alpha \sum_{i=1}^{3N} (D_\beta p_i^\beta + l^2 q_i^\nu)}{dp_k^\alpha} = D_\beta \frac{\Gamma(\beta+1) p_k^{\beta-\alpha}}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} + \frac{D_\beta p_k^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{i=1, i \neq k}^{3N} p_i^\beta + \frac{l^2 p_k^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{i=1}^{3N} q_i^\nu \quad (3.168)$$

$$\frac{d^\alpha \sum_{i=1}^{3N} (D_\beta p_i^\beta + l^2 q_i^\nu)}{dq_k^\alpha} = \frac{D_\beta q_k^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{i=1}^{3N} p_i^\beta + \frac{l^2 q_k^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{i=1, i \neq k}^{3N} q_i^\nu + l^2 \frac{\Gamma(\nu+1) q_k^{\nu-\alpha}}{\Gamma(\nu-\alpha+1)} \quad (3.169)$$

Les dernières équations peuvent être réécrites comme suit :

$$\frac{d^\alpha \sum_{i=1}^{3N} (D_\beta p_i^\beta + l^2 q_i^\nu)}{dp_k^\alpha} = \frac{p_k^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} H + D_\beta \left( \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \right) p_k^{\beta-\alpha} \quad (3.170)$$

$$\frac{d^\alpha \sum_{i=1}^{3N} (D_\beta p_i^\beta + l^2 q_i^\nu)}{dq_k^\alpha} = \frac{q_k^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} H + l^2 \left( \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu-\alpha+1)} - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \right) q_k^{\nu-\alpha} \quad (3.171)$$

où  $H$  est le hamiltonien du système.

Ensuite, l'équation (3.167) devient :

$$\left[ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^{3N} \left( \frac{d^\alpha q_k}{dq_k^\alpha} \right)^{-1} \left( \frac{p_k^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} H + D_\beta \left( \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \right) p_k^{\beta-\alpha} \right) \frac{d^\alpha \rho}{dq_k^\alpha} - \\ \sum_{k=1}^{3N} \left( \frac{d^\alpha p_k}{dp_k^\alpha} \right)^{-1} \left( \frac{q_k^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} H + l^2 \left( \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu-\alpha+1)} - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \right) q_k^{\nu-\alpha} \right) \frac{d^\alpha \rho}{dp_k^\alpha} \end{array} \right] = 0 \quad (3.172)$$

De plus, nous avons :

$$\frac{d^\alpha q_k}{dq_k^\alpha} = \frac{\Gamma(2)q_k^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \quad (3.173)$$

$$\frac{d^\alpha p_k}{dp_k^\alpha} = \frac{\Gamma(2)p_k^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \quad (3.174)$$

Nous obtenons :

$$\left[ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^{3N} q_k^{\alpha-1} \left( \frac{p_k^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} H + D_\beta \left( \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \right) p_k^{\beta-\alpha} \right) \frac{d^\alpha \rho}{dq_k^\alpha} - \\ \sum_{k=1}^{3N} p_k^{\alpha-1} \left( \frac{q_k^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} H + l^2 \left( \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu-\alpha+1)} - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \right) q_k^{\nu-\alpha} \right) \frac{d^\alpha \rho}{dp_k^\alpha} \end{array} \right] = 0 \quad (3.175)$$

ou de manière équivalente,

$$\left[ \begin{array}{l} q_k^{\alpha-1} \left( \frac{p_k^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} H + D_\beta \left( \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \right) p_k^{\beta-\alpha} \right) \frac{d^\alpha \rho}{dq_k^\alpha} - \\ p_k^{\alpha-1} \left( \frac{q_k^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} H + l^2 \left( \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu-\alpha+1)} - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \right) q_k^{\nu-\alpha} \right) \frac{d^\alpha \rho}{dp_k^\alpha} \end{array} \right] = 0 \quad (3.176)$$

Nous pouvons exprimer la densité  $\rho$  comme un produit de deux fonctions, étant donné qu'elle dépend à la fois de  $p_k$  et de  $q_k$  :

$$\rho = \rho_3(q_k)\rho_4(p_k) \quad (3.177)$$

Alors :

$$\left( \frac{H + w(\alpha, \beta)p_k^\beta}{q_k^{1-2\alpha}\rho_3(q_k)} \right) \frac{d^\alpha \rho_3(q_k)}{dq_k^\alpha} - \left( \frac{H + u(l, \alpha, \nu)q_k^\nu}{p_k^{1-2\alpha}\rho_4(p_k)} \right) \frac{d^\alpha \rho_4(p_k)}{dp_k^\alpha} = 0 \quad (3.178)$$

où :

$$l^2 \left( \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu-\alpha+1)} - 1 \right) = u(l, \alpha, \nu) \quad (3.179)$$

$$D_\beta \left( \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} - 1 \right) = w(\alpha, \beta) \quad (3.180)$$

En utilisant la constance de l'énergie ( $H = K_0$ ), nous avons :

$$\left( \frac{K_0 + w(\alpha, \beta)p_k^\beta}{q_k^{1-2\alpha}\rho_3(q_k)} \right) \frac{d^\alpha \rho_3(q_k)}{dq_k^\alpha} - \left( \frac{K_0 + u(l, \alpha, \nu)q_k^\nu}{p_k^{1-2\alpha}\rho_4(p_k)} \right) \frac{d^\alpha \rho_4(p_k)}{dp_k^\alpha} = 0 \quad (3.181)$$

Les deux côtés de la dernière équation doivent être égaux à une constante  $\eta$  pour que l'équation soit satisfaite :

$$\left( \frac{q_k^{2\alpha-1}}{K_0 + u(l, \alpha, \nu)q_k^\nu\rho_3(q_k)} \right) \frac{d^\alpha \rho_3(q_k)}{dq_k^\alpha} = \left( \frac{p_k^{2\alpha-1}}{K_0 + w(\alpha, \beta)p_k^\beta\rho_4(p_k)} \right) \frac{d^\alpha \rho_4(p_k)}{dp_k^\alpha} = \eta \quad (3.182)$$

On obtient ainsi deux équations différentielles fractionnaires :

$$\left( \frac{q_k^{2\alpha-1}}{K_0 + u(l, \alpha, \nu) q_k^\nu \rho_3(q_k)} \right) \frac{d^\alpha \rho_3(q_k)}{dq_k^\alpha} = \eta \quad (3.183)$$

$$\left( \frac{p_k^{2\alpha-1}}{K_0 + w(\alpha, \beta) p_k^\beta \rho_4(p_k)} \right) \frac{d^\alpha \rho_4(p_k)}{dp_k^\alpha} = \eta \quad (3.184)$$

Pour résoudre les équations différentielles fractionnaires ci-dessus en utilisant la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville, nous commençons par définir la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre  $\alpha$  d'une fonction  $f(t)$  comme suit :

$$D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t (t - s)^{n-\alpha-1} f(s) ds \quad (3.185)$$

où  $n$  est le plus petit entier supérieur ou égal à  $\alpha$ .

En utilisant la définition de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et en simplifiant, nous obtenons :

$$\frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dq_k^n} \int_0^{q_k} (q_k - s)^{n-\alpha-1} \rho_3(s) ds - \frac{\eta [K_0 + u(l, \alpha, \nu)]}{q_k^{2\alpha-1}} q_k^\nu \rho_3(q_k) = 0 \quad (3.186)$$

$$\frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dp_k^n} \int_0^{p_k} (p_k - s)^{n-\alpha-1} \rho_4(s) ds - \frac{\eta [K_0 + w(\alpha, \beta)]}{p_k^{2\alpha-1}} p_k^\beta \rho_4(p_k) = 0 \quad (3.187)$$

Etant donné que  $\alpha$  est compris entre 0 et 1,  $n = 1$

$$\frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \frac{d}{dq_k} \int_0^{q_k} (q_k - s)^{-\alpha} \rho_3(s) ds - \frac{\eta [K_0 + u(l, \alpha, \nu)]}{q_k^{2\alpha-1}} q_k^\nu \rho_3(q_k) = 0 \quad (3.188)$$

$$\frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \frac{d}{dp_k} \int_0^{p_k} (p_k - s)^{-\alpha} \rho_4(s) ds - \frac{\eta [K_0 + w(\alpha, \beta)]}{p_k^{2\alpha-1}} p_k^\beta \rho_4(p_k) = 0 \quad (3.189)$$

En multipliant les deux côtés par  $\Gamma(1 - \alpha)$  et en réarrangeant, nous obtenons :

$$\frac{d}{dq_k} \int_0^{q_k} (q_k - s)^{-\alpha} \rho_3(s) ds - \eta [K_0 + u(l, \alpha, \nu)] q_k^{1-2\alpha+\nu} \rho_3(q_k) = 0 \quad (3.190)$$

$$\frac{d}{dp_k} \int_0^{p_k} (p_k - s)^{-\alpha} \rho_4(s) ds - \eta [K_0 + w(\alpha, \beta)] p_k^{1-2\alpha+\beta} \rho_4(p_k) = 0 \quad (3.191)$$

Ceci est une équation différentielle qui peut être résolue en utilisant différentes méthodes en fonction des valeurs de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\nu$ ,  $u(l, \alpha, \nu)$  et  $w(\alpha, \beta)$ . Cependant, en général, il peut ne pas exister de solution explicite en termes de fonctions élémentaires, et des méthodes numériques peuvent être nécessaires pour obtenir une solution numérique.

### Sens de Caputo

En utilisant la définition de Caputo, les dérivées fractionnaires de la fonction  $\sum_{i=1}^{3N} (D_\beta p_i^\beta + l^2 q_i^\nu)$  en termes de  $p_k$  et  $q_k$ , respectivement, sont :

$$\frac{d^\alpha \sum_{i=1}^{3N} (D_\beta p_i^\beta + l^2 q_i^\nu)}{dp_k^\alpha} = D_\beta \frac{\Gamma(\beta + 1) p_k^{\beta - \alpha}}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} \quad (3.192)$$

$$\frac{d^\alpha \sum_{i=1}^{3N} (D_\beta p_i^\beta + l^2 q_i^\nu)}{dq_k^\alpha} = l^2 \frac{\Gamma(\nu + 1) q_k^{\nu - \alpha}}{\Gamma(\nu - \alpha + 1)} \quad (3.193)$$

Ainsi, l'équation de Liouville fractionnaire devient :

$$\left[ D_\beta \left( \frac{\Gamma(2) q_k^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \right)^{-1} \frac{\Gamma(\beta + 1) p_k^{\beta - \alpha}}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} \frac{d^\alpha \rho}{dq_k^\alpha} - l^2 \left( \frac{\Gamma(2) p_k^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \right)^{-1} \frac{\Gamma(\nu + 1) q_k^{\nu - \alpha}}{\Gamma(\nu - \alpha + 1)} \frac{d^\alpha \rho}{dp_k^\alpha} \right] = 0 \quad (3.194)$$

L'équation (3.194) peut être réécrite de la manière suivante :

$$q_k^{2\alpha - \nu - 1} D_\beta \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} \frac{d^\alpha \rho}{dq_k^\alpha} = p_k^{2\alpha - \beta - 1} l^2 \frac{\Gamma(\nu + 1)}{\Gamma(\nu - \alpha + 1)} \frac{d^\alpha \rho}{dp_k^\alpha} \quad (3.195)$$

Pour résoudre la dernière équation, la même méthode utilisée précédemment peut être utilisée en écrivant la densité  $\rho(p_k, q_k)$  comme le produit d'une fonction de  $p_k$  et d'une fonction de  $q_k$  :

$$\rho = \rho_5(p_k) \rho_6(q_k) \quad (3.196)$$

Alors :

$$q_k^{2\alpha - \nu - 1} D_\beta \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} \frac{d^\alpha \rho_5(p_k) \rho_6(q_k)}{dq_k^\alpha} = p_k^{2\alpha - \beta - 1} l^2 \frac{\Gamma(\nu + 1)}{\Gamma(\nu - \alpha + 1)} \frac{d^\alpha \rho_5(p_k) \rho_6(q_k)}{dp_k^\alpha} \quad (3.197)$$

En divisant l'équation (3.197) par  $\rho_5(p_k) \rho_6(q_k)$ , nous obtenons :

$$q_k^{2\alpha - \nu - 1} D_\beta \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} \frac{d^\alpha \rho_6(q_k)}{\rho_6(q_k) dq_k^\alpha} = p_k^{2\alpha - \beta - 1} l^2 \frac{\Gamma(\nu + 1)}{\Gamma(\nu - \alpha + 1)} \frac{d^\alpha \rho_5(p_k)}{\rho_5(p_k) dp_k^\alpha} \quad (3.198)$$

Etant donné que les deux côtés de l'équation (3.198) sont liés à deux variables indépendantes  $(p_k, q_k)$ , l'équation ne peut être vérifiée que si les deux côtés sont égaux à une constante, que nous appellerons  $m$  :

$$q_k^{2\alpha - \nu - 1} D_\beta \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} \frac{d^\alpha \rho_6(q_k)}{\rho_6(q_k) dq_k^\alpha} = m \quad (3.199)$$

$$p_k^{2\alpha-\beta-1} l^2 \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu-\alpha+1)} \frac{d^\alpha \rho_5(p_k)}{\rho_5(p_k) dp_k^\alpha} = m \quad (3.200)$$

Les équations fractionnaires précédentes peuvent s'exprimer comme suit :

$$\frac{d^\alpha \rho_6(q_k)}{dq_k^\alpha} - m \frac{\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1) D_\beta} q_k^{1-2\alpha+\nu} \rho_6(q_k) = 0 \quad (3.201)$$

$$\frac{d^\alpha \rho_5(p_k)}{dp_k^\alpha} - m \frac{\Gamma(\nu-\alpha+1)}{l^2 \Gamma(\nu+1)} p_k^{1-2\alpha+\beta} \rho_5(p_k) = 0 \quad (3.202)$$

Les solutions générales des équations (3.202) et (3.201) sont les suivantes [18] :

$$\rho_5(p_k) = b E_{\alpha, -1 + \frac{\beta+1}{\alpha}, -2 + \frac{1+\beta}{\alpha}} \left[ m \frac{\Gamma(\nu-\alpha+1)}{l^2 \Gamma(\nu+1)} p_k^{1-\alpha+\beta} \right] \quad (3.203)$$

$$\rho_6(q_k) = b' E_{\alpha, -1 + \frac{\nu+1}{\alpha}, -2 + \frac{1+\nu}{\alpha}} \left[ m \frac{\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1) D_\beta} q_k^{1-\alpha+\nu} \right] \quad (3.204)$$

avec :

$$b = \rho_5(0) \quad (3.205)$$

$$b' = \rho_6(0) \quad (3.206)$$

La densité  $\rho$  d'un système d'oscillateurs dans le cas fractionnaire est :

$$\rho = \prod_{i=1}^{3N} \left[ \begin{array}{l} b E_{\alpha, -1 + \frac{\beta+1}{\alpha}, -2 + \frac{1+\beta}{\alpha}} \left( m \frac{\Gamma(\nu-\alpha+1)}{l^2 \Gamma(\nu+1)} p_i^{1-\alpha+\beta} \right) \times \\ b' E_{\alpha, -1 + \frac{\nu+1}{\alpha}, -2 + \frac{1+\nu}{\alpha}} \left( m \frac{\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1) D_\beta} q_i^{1-\alpha+\nu} \right) \end{array} \right] \quad (3.207)$$

D'une importance particulière est la réalisation que lorsque  $\alpha$  est fixé à 1 et  $\beta = \nu = 2$ , l'expression de la densité devient :

$$\rho = \prod_{i=1}^{3N} \left[ b b' E_{1,2,1} \left( m \frac{1}{2l^2} \right) p_i^2 E_{1,2,1} \left( m \frac{1}{2D_2} \right) q_i^2 \right] \quad (3.208)$$

En se référant à la relation précédente, nous pouvons observer que ce résultat est conforme au cas standard qui distingue un système fermé.

### 3.7 CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons appliqué le calcul fractionnaire en physique statistique pour calculer la densité de deux systèmes de gaz : un système de gaz parfait libre, et un système composé de  $N$  oscillateurs fractionnaires. Pour cela, nous avons résolu l'équation de Liouville fractionnaire en utilisant à la fois les

définitions de Caputo et de Riemann-Liouville. Nous avons constaté que la densité du système est dépendante du type de dérivée utilisé.

# BIBLIOGRAPHIE

- [1] V.E. Tarasov, George M. Zaslavsky, *Physica A* 387(26), 6505 (2008). (Cité page 49.)
- [2] Z.Z. Alisultanov, R. P. Meilanov, Some Features of Quantum Statistical Systems With an Energy Spectrum of The Fractional-power Type, *Theor, Math. Phys.* 171 :404-416, (2012). (Cité page 49.)
- [3] Z.Z. Alisultanov, R. P. Meilanov, Some Problems of The Theory of Quantum Statistical Systems With an Energy Spectrum of The Fractional Power Type, *Theor, Math. Phys.* 173 :135-148, (2012). (Cité page 49.)
- [4] V. E. Tarasov, G. M. Zaslavsky, *Chaos : An Interdisciplinary Journal of Non-linear Science* 16, 023110 (2006). (Cité page 49.)
- [5] C. Ngô et H. Ngô, *Physique Statistique : Introduction, Cours et Exercices Corrigés*, DUNOD, Paris, (2001). (Cité page 50.)
- [6] C. Lhuillier, *Cours de Physique Statistique*, 6 décembre, (2004). (Cité page 50.)
- [7] K. Huang, *Statistical Mechanics*, John Wiley and Sons, (1963). (Cité page 51.)
- [8] Z. Korichi, Quantum Statistical Systems in D-dimensional Space Using a Fractional Derivative, *Theor, Math. Phys.* 186(3), 373–381 (2016). (Cité page 51.)
- [9] M. Abramowitz, I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, vol.55 National Bureau of Standards : Applied Mathematics Series, Dover, New York, (1972). (Cité pages 52, 57 et 62.)

- [10] I. Podlubny, Fractional Differential Equations : An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations to Methods of Their Solution and Some of Their Applications, vol 198 Math. Sci. Engin, San Diego, (1999). (Cité pages 54, 70 et 73.)
- [11] I.S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, Table of Integrals, Series, and Products, 7th edn. Elsevier, Amsterdam, (2007). (Cité page 56.)
- [12] W. Magnus et al, Formulas and Theorems For The Special Functions of Mathematical Physics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (1966). (Cité page 57.)
- [13] J. Liouville, Sur la Theorie de La Variation des Constantes Arbitraires, J Math Pures Appl **3**, 342–349, (1838). (Cité page 64.)
- [14] K. Cottrill-Shepherd, M. Naber, Fractional Differential Forms, J.Math. Phys. **42**, (2001). (Cité page 64.)
- [15] S.G. Samko, A.A. Kilbas, O.I. Marichev, Fractional Integrals and Derivatives Theory and Applications, Gordon and Breach, New York, (1993). (Cité page 64.)
- [16] V. Tarasov, Liouville and Bogoliubov Equations with Fractional Derivatives, Modern Physics Letters B **21**(5), (2007). (Cité page 68.)
- [17] Z. Korichi and M. T. Meftah : Statistical Mechanics Based on Fractional Classical and Quantum Mechanics, Math. Phys. **55**, 033302, (2014). (Cité page 69.)
- [18] A.A. Kilbas, et al, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier, North-Holland, (2006). (Cité pages 72 et 78.)
- [19] N. Laskin, Principles of Fractional Quantum Mechanics, arXiv : 1009.5533v1, math-ph, (2010).  
(Cité page 73.)

# CONCLUSION GÉNÉRALE

Dans cette thèse, nous avons exploré l'application de la dérivation fractionnaire à la mécanique quantique et statistique. Les approches de Riemann-Liouville et de Caputo ont été utilisées pour résoudre des problèmes quantiques et statistiques. Notre objectif principal était de mettre en évidence l'impact des différentes approches sur les propriétés thermodynamiques de certains systèmes statistiques avec des hamiltoniens fractionnaires.

Dans le premier chapitre, nous avons présenté les notions de base du calcul fractionnaire, qui sont essentielles pour la compréhension de notre travail. Nous avons introduit les différentes fonctions couramment utilisées dans le calcul fractionnaire, qui permettent généralement de trouver des solutions aux problèmes associés. Les définitions les plus courantes de l'opérateur fractionnaire et de ses propriétés ont également été exposées.

Le deuxième chapitre était consacré aux applications de la dérivation fractionnaire en mécanique quantique. Nous avons commencé par présenter les principes de la mécanique quantique fractionnaire. Ensuite, nous avons défini l'hamiltonien fractionnaire et approfondi l'étude de l'équation de Schrödinger fractionnaire et de ses applications.

Le troisième chapitre portait sur l'étude de certains systèmes en mécanique statistique basés sur la mécanique quantique fractionnaire. Ce chapitre était divisé en deux parties. Dans la première partie, nous avons examiné l'effet des différentes définitions de la dérivée fractionnaire sur les propriétés thermodynamiques d'un système composé de  $N$  oscillateurs quantiques fractionnaires. Nous avons calculé la fonction de partition pour chaque définition de dérivée et constaté que les résultats des différentes définitions ne sont pas toujours compatibles. Nous

avons également observé que, pour le cas  $\sigma = 2/3$ , il existe une infinité de systèmes différents d'oscillateurs quantiques pour lesquels la définition de dérivée n'est pas pertinente. Cependant, ces systèmes ont la même fonction de partition et les mêmes propriétés thermodynamiques. Pour le cas  $\sigma = 3/4$ , il n'y a pas d'équivalence entre les trois définitions de dérivée.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, notre objectif principal était de déterminer la densité des différents systèmes physiques en résolvant l'équation de Liouville. Nous avons abordé l'équation de Liouville en utilisant le concept de dérivée fractionnaire, en mettant l'accent sur le système de gaz parfait. Différentes définitions de la dérivée fractionnaire ont été utilisées pour résoudre l'équation de Liouville fractionnaire. Nous avons constaté que, contrairement à la situation standard où la densité du gaz parfait isolé est constante, la densité dans le cas fractionnaire, en utilisant la définition de Riemann-Liouville, est une fonction de  $p$  et  $q$ . Lorsque nous avons appliqué la dérivée de Caputo, il est apparu clairement que la densité reste constante, ce qui est en parfait accord avec le cas standard. Ensuite, nous avons étudié un système de  $N$  oscillateurs fractionnaires indépendants en utilisant différentes définitions de la dérivée fractionnaire et nous avons résolu l'équation de Liouville fractionnaire. Nous avons constaté que la densité du système est liée au type de dérivée utilisé.

Notre travail visait à étudier l'impact des différentes approches de dérivation fractionnaire sur les propriétés thermodynamiques des systèmes statistiques avec des hamiltoniens fractionnaires. Nous avons particulièrement cherché à comprendre comment les résultats de la mécanique statistique standard peuvent être retrouvés lorsque les exposants fractionnaires deviennent entiers. Cette thèse contribue à l'exploration des fondements de la mécanique quantique et statistique fractionnaire, en mettant en évidence les différences et les similitudes avec les approches traditionnelles. Les résultats obtenus ont des implications importantes dans divers domaines de la physique et de la science des matériaux.

Les perspectives du calcul fractionnaire dans les domaines de la mécanique quan-

tique et statistique sont prometteuses, ouvrant ainsi de nouvelles avenues de recherche.

Voici quelques perspectives intéressantes pour notre travail :

- Evaluation des propriétés thermodynamiques à partir de la fonction de partition.
- Calcul de la fonction de partition pour toutes les valeurs de  $\alpha'$ .
- Obtention des propriétés thermodynamiques en dérivant la densité.
- Exploration de diverses approches de dérivées fractionnaires, y compris les plus récentes.

# PUBLICATIONS