



جامعة قاصدي مرباح ورقلة



كلية الرياضيات و علوم المادة

قسم الرياضيات

ماستر

فرع: رياضيات

اختصاص: نمذجة و تحليل عددي

من إعداد الطالبة : سارة مجموعة

الموضوع

حل عددي للمعادلة التفاضلية التكاملية لفريدهولم غير الخطية
باستخدام دوال المزج بين دوال القطع النبضية و كثيرات حدود
برنشتاين المتعامدة والمتجانسة

نوقشت يوم 2017/05/24 من طرف لجنة المناقشة :

رئيسا	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	أستاذ مساعد. أ	معمري محمد
ممتحنا	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	أستاذ مساعد. أ	قويدري محمد
ممتحنا	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	أستاذ مساعد. أ	عباسي حسين
مشرفا	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	أستاذ مساعد. أ	بن الشيخ عبد الكريم

إهداء

إلى بسمة الحياة و سر الوجود، إلى معنى الحب و الحنان، إلى الشمعة التي تحترق لتنير
طريقي، إلى من كان دعائها سر نجاحي و حنانها بلمس جراحي
" أمي الحبيبة "

إلى أعظم رجل، رجل تحمل مرارة الأيام و قسوة الزمان من أجل إنارة دروب التعلم
لأبنائه، رمز الكفاح و العطاء، رمز التضحية و التحدي، رمز الأخلاق و العمل، إلى من
كان لي السند و العون في مساري الدراسي
" أبي العزيز "

إلى سندي و مصدر قوتي، إلى نخري و إعتزالي
" أخواتي "

إلى كل الأهل و الأقارب و الأحباب

إلى كل الأصدقاء

إلى الذين حملتهم ذا كرتي و لم تحملهم مذكرتي

أهدي هذا العمل

شكر و عرفان

الحمد لله الذي أنار لي درب العلم والمعرفة و أعانني و وفقني في إنجاز هذا العمل

أتوجه بأعمق عبارات الشكر و العرفان

إلى الأستاذ المشرف بن الشيخ عبد الكريم الذي لم يبخل علي بتوجيهاته و نصائحه القيمة و
الثمينة طوال مراحل إنجاز هذا العمل

إلى جميع أساتذتي الكرام الذين أشرفوا على تكويني طيلة مشواري الجامعي

إلى كل من ساهم في تقديم يد العون من قريب أو بعيد لإنجاز هذا العمل

إلى الأساتذة الكرام أعضاء اللجنة المناقشة على تكريمهم و تفضلهم بقبول مناقشة هذه المذكرة
شاكراً لهم كل ما يقدمونه من ملاحظات قيمة حول هذه المذكرة

ملخص

إن الهدف الرئيسي من هذا العمل هو تقديم طريقة عددية لحل المعادلات التفاضلية التكاملية لفريدهولم غير الخطية وذلك باستخدام خواص دوال المزج بين دوال القطع النبضية و كثيرات حدود برنشتاين المتعامدة و المتجانسة لتحويل المعادلات التفاضلية التكاملية إلى جملة معادلات جبرية غير خطية تحل بطرق معروفة و سهلة البرمجة كطريقة نيوتن. ثم تطبيق هذه الطريقة على بعض الأمثلة و مقارنة النتائج مع الحل الحقيقي و النتائج المحصل عليها باستخدام طرق عددية أخرى لرؤية مدى دقة و كفاءة هذه الطريقة.

الكلمات المفتاحية: المعادلات التفاضلية التكاملية لفريدهولم غير الخطية، كثيرات حدود برنشتاين المتعامدة و المتجانسة، دوال القطع النبضية.

Abstract

The main purpose of this study is to present numerical method to solve nonlinear Fredholm integro-differential equations using the properties of hybrid functions of block pulse functions and normalized Bernstein polynomials to convert integro-differential equations into a system of nonlinear algebraic equations which will be solved using well-known and easily programmable methods as Newton's method. Then, applying this method on some examples and comparing the results with exact solution and the obtainable results using other numerical methods to show the accuracy and the effectiveness of this method.

Key words: nonlinear Fredholm integro-differential equations, orthonormal Bernstein polynomials, block pulse functions.

Résumé

L'objectif principal de ce travail est de présenter une méthode numérique pour la résolution des équations intégrales différentielles de Fredholm, non linéaires, et ce en employant les propriétés des fonctions de combinaison de polynômes orthonormés de Bernstein et les fonctions block pulse pour la transformation des équations intégrales différentielles vers un système d'équations algébriques non linéaires qui se résout par des méthodes connues et faciles à programmer à la manière de la méthode de Newton. Il suffit donc d'appliquer cette méthode sur un échantillon d'exemples et de comparer les résultats réalisés avec la solution exacte et les résultats obtenus par d'autres méthodes numériques et ce pour s'assurer de l'efficacité et la fiabilité de cette méthode.

Mots-clés : les équations intégrales différentielles de Fredholm non linéaires, les polynômes orthonormés de Bernstein, les fonctions block pulse.

الفهرس

i	إهداء
ii	شكر وعرهان
iii	ملخص
vi	ترميز
1	مقدمة
3	1 مفاهيم أساسية
3	1.1 تعريفات ونظريات أساسية
5	2.1 دوال القطع النبضية
6	3.1 كثيرات حدود برنشتاين المتعامدة والمتجانسة
6	1.3.1 كثيرات حدود برنشتاين
18	2.3.1 كثيرات حدود برنشتاين المتعامدة والمتجانسة
21	4.1 المعادلات التفاضلية التكاملية
22	1.4.1 تصنيف المعادلات التفاضلية التكاملية
26	2.4.1 بعض الطرق لحل المعادلات التفاضلية التكاملية
27	2 دوال المزج و مصفوفات العمليات
27	1.2 دوال المزج بين دوال القطع النبضية وكثيرات حدود برنشتاين المتعامدة والمتجانسة
27	1.1.2 تعريف و خواص
31	2.1.2 تقريب دالة
33	3.1.2 دراسة التقارب
34	2.2 مصفوفات العمليات

34	1.2.2	مصفوفة العمليات لنتائج الجداء
36	2.2.2	مصفوفة العمليات للاشتقاق
38	3	الحل العددي للمعادلة التفاضلية التكاملية لفريدهولم غير الخطية
38	1.3	حل عددي للمعادلة التفاضلية التكاملية لفريدهولم غير الخطية باستخدام دوال المزج
40	2.3	تطبيق عددي
49		خاتمة
50		المراجع العلمية

ترميز

الرمز	معناه
Ω	مجموعة جزئية مفتوحة من \mathbb{R}
X	فضاء شبه هيلبرتي
H	فضاء هيلبار
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	جداء سلمي معرف على $L^2(\Omega)$
$\langle \cdot, \cdot \rangle_w$	جداء سلمي
$\ \cdot\ _2, \ \cdot\ _{L^2}$	نظيم على $L^2(\Omega)$
$\ \cdot\ $	النظيم
\mathcal{P}_n	فضاء كثيرات الحدود من درجة $n \geq 1$
$\text{span}\{h_{10}(x), h_{11}(x), \dots, h_{mn}(x)\}$	الفضاء الجزئي المولد بالمجموعة $\{h_{10}(x), h_{11}(x), \dots, h_{mn}(x)\}$
δ_{ij}	دلتا كرونكر ($\delta_{ij} = 1$ إذا كان $i = j$ و $\delta_{ij} = 0$ إذا كان $i \neq j$)
$\det(L)$	محدد المصفوفة L
$\text{diag}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_m)$	مصفوفة قطرية و العناصر القطرية هي $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_m$
$w(x)$	دالة الوزن
$b_j(x)$	دالة القطع النبضية
$\tilde{b}_j(x)$	دالة القطع النبضية المتعامدة و المتجانسة
$B_{i,n}(x)$	كثير حدود برنشتاين
$OB_{i,n}(x)$	كثير حدود برنشتاين المتعامد و المتجانس
$h_{ji}(x)$	دالة المزج
$\tilde{\mathbf{C}}$	مصفوفة العمليات لنتاج الجداء
\mathbf{D}	مصفوفة العمليات الاشتقاق

مقدمة

إن العديد من المسائل الفيزيائية تؤول عند دراستها إلى معادلات تفاضلية تكاملية. ومن بين هذه المعادلات لدينا المعادلات التفاضلية التكاملية لفريدهولم، التي تلعب دور مهم في العديد من المجالات مثل الإقتصاد، المرونة، حركة الموائع، انتشار الحرارة، ونظرية التذبذب. عادة يصعب إيجاد الحلول للمعادلات التفاضلية التكاملية بالطرق التحليلية لذلك نلجأ إلى الطرق العددية. وقد عمل الباحثون على إستنباط طرق عددية مختلفة وتطويرها وتحسينها لحل هذه المعادلات مثل طريقة وظائف قياس المويجات ([3, 2] the wavelet method)، طريقة دالة والش ([4] Walsh function method)، طريقة التحليل الهوموتوبي ([6] homotopy analysis method)، طريقة التحويل التفاضلي ([7] differential transform method)، إستخدام المزج بين كثيرات حدود لجندر و دوال القطع النبضية ([8] hybrid of Legendre polynomials and block pulse functions)، طريقة كثير حدود تشيبشيف ([9] Chebyshev polynomial method)، طريقة مصفوفة برنولي (Bernoulli matrix method [10]).

إن الغرض من هذه المذكرة هو تقديم طريقة عددية لحل المعادلة التفاضلية التكاملية لفريدهولم غير الخطية التالية:

$$\sum_{i=0}^s p_i(x) y^{(i)}(x) = g(x) + \lambda \int_0^1 k(x, t) [y(t)]^q dt, \quad 0 \leq x, t < 1, \quad (1)$$

والتي تحقق الشروط الابتدائية:

$$y^{(i)}(0) = \alpha_i, \quad 0 \leq i \leq s - 1, \quad (2)$$

حيث $y^{(i)}(x)$ المشتقة من الرتبة i للدالة المجهولة $y(x)$ المطلوب تعيينها، $k(x, t)$ دالة معلومة وتدعى نواة التكامل، $g(x)$ و $p_i(x)$ دوال معلومة ومحتواة في $L^2[0, 1]$ ، q و s عددين صحيحين موجبين، و λ و α_i $i = 0, 1, \dots, s$ ثوابت. وذلك بإستخدام دوال المزج بين دوال القطع النبضية وكثيرات حدود برنشتاين المتعامدة والمتجانسة لتحويل المعادلة التفاضلية التكاملية غير الخطية إلى جملة معادلات جبرية غير خطية قابلة للحل بسهولة.

تحتوي المذكرة على ثلاثة فصول وهي مقسمة كالتالي:

1. الفصل الأول:

يتضمن هذا الفصل أربعة أجزاء، في الجزء الأول تم ذكر بعض التعريفات و النظريات الأساسية التي ترتبط بباقي الأجزاء و الفصول الأخرى، و في الجزء الثاني تم تعريف دوال القطع النبضية و ذكر خواصها، بينما في الجزء الثالث تم تعريف كثيرات حدود برنشتاين و ذكر خواصها و النتائج و الملاحظات المتعلقة بها و كذا إنشاء كثيرات حدود برنشتاين المتعامدة و المتجانسة، و في الجزء الرابع تم تعريف المعادلات التفاضلية التكاملية و ذكر أصنافها المختلفة و بعض الطرق لحلها.

2. الفصل الثاني:

ينقسم هذا الفصل إلى جزئين، في الجزء الأول تم مزج دوال القطع النبضية مع كثيرات حدود برنشتاين المتعامدة و المتجانسة، تقريب دالة باستخدام دوال المزج، و دراسة التقارب، و في الجزء الثاني تم تعيين مصفوفة العمليات لنتاج الجداء و مصفوفة العمليات للاشتقاق.

3. الفصل الثالث:

ينقسم هذا الفصل إلى جزئين، الجزء الأول يوضح طريقة تحويل المعادلة التفاضلية التكاملية غير الخطية إلى جملة معادلات جبرية غير خطية، التي بحلها نحصل على الحل العددي، و في الجزء الثاني تم تطبيق الطريقة المقترحة على بعض الأمثلة من المعادلات التفاضلية التكاملية لفريدهولم غير الخطية و مقارنة النتائج مع الحل الحقيقي و بعض الطرق العددية الأخرى.

و في الأخير، جاءت الخاتمة التي إشملت على أهم النتائج التي توصلنا إليها، يتبعها أسماء المصادر و المراجع التي إعتمدنا عليها في إنجاز هذه المذكرة.

الفصل الأول

مفاهيم أساسية

1.1 تعريفات و نظريات أساسية

تعريف 1.1.1. [24]
لتكن Ω مجموعة جزئية مفتوحة من \mathbb{R} .

$$L^2(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ قابلة للقياس} / \int_{\Omega} |f|^2 dx < \infty \right\}$$

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x)g(x) dx$$

$$\|f\|_{L^2} = \|f\|_2 = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

حيث $\langle \cdot, \cdot \rangle$ هو الجداء السلمي المعرف على الفضاء $L^2(\Omega)$ و $\|\cdot\|_2$ النظيم.

ملاحظة 1.1.1. [24]
الفضاء $L^2(\Omega)$ هو فضاء هيلبار.

تعريف 2.1.1. [24]
لتكن $\mathcal{F} = \{f_0(x), f_1(x), \dots, f_n(x), \dots\}$

• نقول أن مجموعة الدوال \mathcal{F} متعامدة على المجال $[a, b]$ بالنسبة لدالة الوزن $w(x)$ إذا كان:

$$\langle f_i, f_j \rangle_w = \int_a^b f_i(x) f_j(x) w(x) dx = 0, \quad i \neq j$$

حيث $\langle \cdot, \cdot \rangle_w$ هو الجداء السلمي.

• نقول أن مجموعة الدوال \mathcal{F} متعامدة و متجانسة على المجال $[a, b]$ إذا كانت \mathcal{F} متعامدة و $\|f_i\| = 1 \forall i$ ، حيث $\|f_i\| = \sqrt{\langle f_i, f_i \rangle_w}$ هو النظيم.

ملاحظة 2.1.1. [24]

نقول عن الدالة $w(x)$ أنها دالة وزن على المجال $[a, b]$ إذا وفقط إذا كانت:

1. الدالة $w(x)$ مستمرة.

2. $w(x) > 0$

3. $\forall n \in \mathbb{N}, x \in [a, b] : \int_a^b w(x) |x|^n dx < \infty$

نظرية 1.1.1. (غرام-شميدت Gram-Schmidt) [24]:

إذا كان X فضاء شبه هيلبرتي و $(\xi_i)_{1 \leq i \leq n}$ جملة مستقلة خطياً في X فإنه يمكن إنشاء جملة $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ من الجملة $(\xi_i)_{1 \leq i \leq n}$ تكون متعامدة و متجانسة و تولد نفس الفضاء الذي تولده الجملة $(\xi_i)_{1 \leq i \leq n}$.

ملاحظة 3.1.1. [24]

لتعيين المجموعة المتعامدة و المتجانسة $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ نستخدم خوارزمية التعامد و التجانس لغرام شميدت و هي كالتالي:

$$\begin{cases} \zeta_1 = \xi_1, & e_1 = \frac{1}{\|\zeta_1\|} \zeta_1 \\ \zeta_k = \xi_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle \xi_k, e_j \rangle e_j, & e_k = \frac{1}{\|\zeta_k\|} \zeta_k, \quad (k = 2, 3, \dots, n) \end{cases} \quad (1.1)$$

نظرية 1.2.1. [24]

ليكن H فضاء هيلبار. إذا كان X_0 فضاء جزئي مغلق من H ، و x عنصر من H ، حيث $x \notin X_0$ ، فإنه يوجد عنصر وحيد \bar{x} من X_0 ، يمثل أحسن تقريب للعنصر x في X_0 ، أي:

$$\forall x \in H, \exists! \bar{x} \in X_0 : \|x - \bar{x}\| = \inf_{z \in X_0} \|x - z\| \quad (2.1)$$

و يحق

$$\langle x - \bar{x}, z \rangle = 0, \forall z \in X_0. \quad (3.1)$$

2.1 دوال القطع النبضية

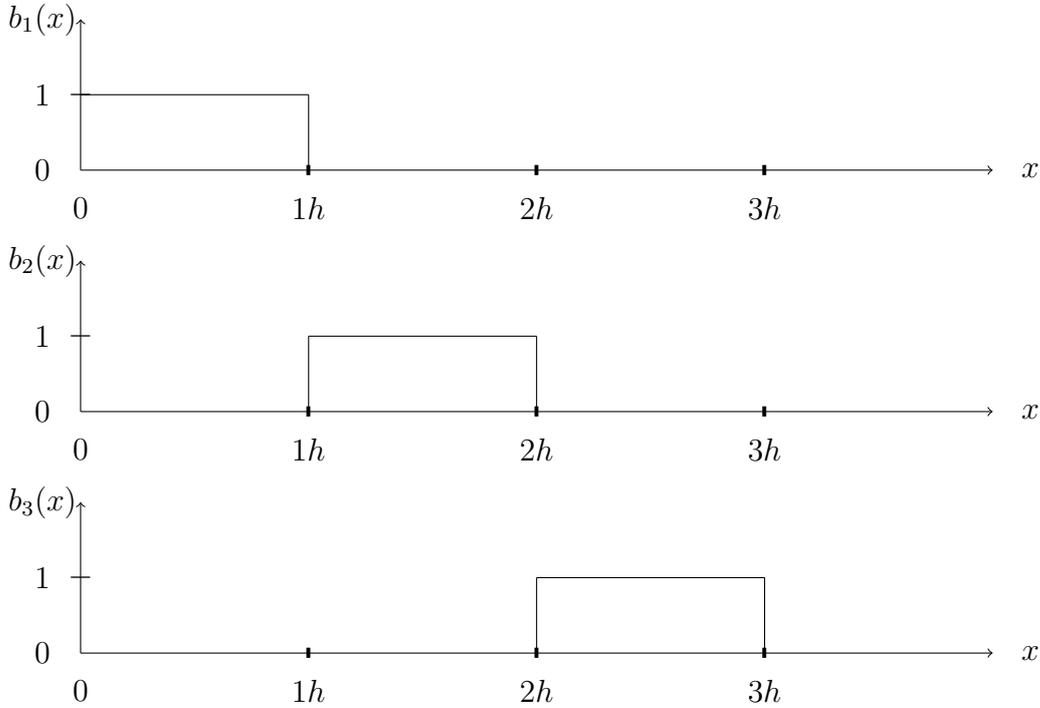
تعريف 1.2.1. [11]

دوال القطع النبضية (block pulse functions) المعرفة على المجال $[0, T)$ هي دوال من الشكل:

$$b_j(x) = \begin{cases} 1 & x \in \left[\frac{(j-1)T}{m}, \frac{jT}{m} \right) \\ 0 & x \notin \left[\frac{(j-1)T}{m}, \frac{jT}{m} \right) \end{cases} \quad (4.1)$$

حيث $j = 1, 2, \dots, m$ و m عدد صحيح موجب.

مثال 1.2.1.



شكل 1.1: دوال القطع النبضية من أجل $m = 3$ و $h = \frac{T}{m}$ و $T = 1$.

في مايلي نأخذ $T = 1$.

خواص 1.2.1. [11]

دوال القطع النبضية تحقق الخواص التالية:

.1

$$b_j(x)b_i(x) = \begin{cases} b_j(x) & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (5.1)$$

حيث $i, j = 1, 2, \dots, m$.

.2

$$\int_0^1 b_i(x)b_j(x)dx = h\delta_{ij}$$

حيث $h = \frac{1}{m}$ و δ_{ij} هي دلتا كرونكر.

3. تامة، أي من أجل كل $f \in L^2([0, 1])$ إذا كان $\int_0^1 b_j(x)f(x)dx = 0$ فإنه يستلزم $f = 0$ حيثما كان.

ملاحظة 1.2.1. [11]

إن دوال القطع النبضية متعامدة ولكن ليست متجانسة، ومنه دوال القطع النبضية المتعامدة والمتجانسة $\tilde{b}_j(x)$ هي من الشكل:

$$\tilde{b}_j(x) = \begin{cases} \sqrt{m} & x \in \left[\frac{(j-1)T}{m}, \frac{jT}{m}\right) \\ 0 & x \notin \left[\frac{(j-1)T}{m}, \frac{jT}{m}\right) \end{cases} \quad (6.1)$$

حيث $j = 1, 2, \dots, m$.

3.1 كثيرات حدود برنشتاين المتعامدة والمتجانسة

1.3.1 كثيرات حدود برنشتاين

إن لكثيرات حدود برنشتاين دور بارز في مختلف فروع الرياضيات. وقد استخدمها العديد من الباحثين في حل المعادلات التكاملية، المعادلات التفاضلية، ونظرية التقريب (أنظر [12, 13, 14, 15]).

تعريف 1.3.1. [14]

كثيرات حدود برنشتاين (Bernstein polynomials) من الدرجة n المعرفة على المجال $[0, 1]$ هي كثيرات حدود من الشكل:

$$B_{i,n}(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}, \quad 0 \leq i \leq n \quad (7.1)$$

حيث $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$.

ملاحظة 1.3.1.

$B_{i,n}(x) = 0$ إذا كان $i < 0$ أو $i > n$.

مثال 1.3.1.

$$B_{0,5}(x) = (1 - x)^5$$

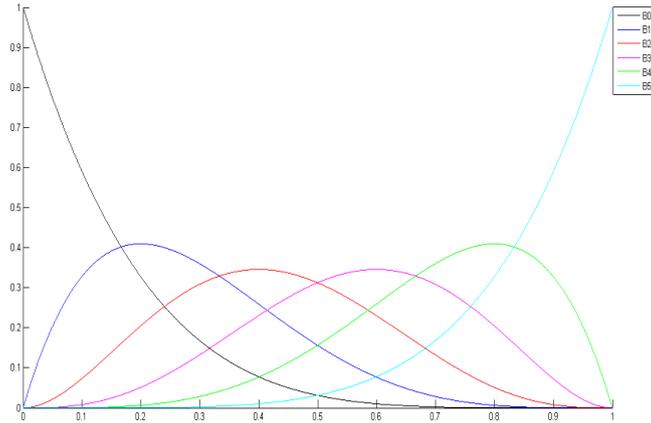
$$B_{1,5}(x) = 5x(1 - x)^4$$

$$B_{2,5}(x) = 10x^2(1 - x)^3$$

$$B_{3,5}(x) = 10x^3(1 - x)^2$$

$$B_{4,5}(x) = 5x^4(1 - x)$$

$$B_{5,5}(x) = x^5$$



شكل 2.1: كثيرات حدود برنشتاين من أجل $n = 5$.

نتيجة 3.1.1.

لدينا

$$B_{i,n}(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} = \sum_{k=0}^{n-i} (-1)^k \binom{n}{i} \binom{n-i}{k} x^{i+k}$$

و منه يمكن كتابة $B_{i,n}(x)$ على الشكل:

$$B_{i,n}(x) = \mathbf{L}_{i+1} \mathbf{t}(x), \quad i = 0, 1, \dots, n$$

حيث

$$\mathbf{L}_{i+1} = \left[\overbrace{0, 0, \dots, 0}^i, (-1)^0 \binom{n}{i}, (-1)^1 \binom{n}{i} \binom{n-i}{1}, \dots, (-1)^{n-i} \binom{n}{i} \binom{n-i}{n-i} \right]$$

$$\mathbf{t}(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}$$

الآن، إذا قمنا بتعريف المصفوفة \mathbf{L} ذات الرتبة $(n+1) \times (n+1)$ كما يلي:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \\ \mathbf{L}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{L}_{n+1} \end{bmatrix}$$

فإننا نحصل على:

$$\Psi(x) = \mathbf{L}\mathbf{t}(x) \quad (8.1)$$

حيث

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} (-1)^0 \binom{n}{0} & (-1)^1 \binom{n}{0} \binom{n-0}{1} & \dots & (-1)^{n-0} \binom{n}{0} \binom{n-0}{n-0} \\ 0 & (-1)^0 \binom{n}{1} & \dots & (-1)^{n-1} \binom{n}{1} \binom{n-1}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (-1)^0 \binom{n}{n} \end{bmatrix}, \quad \Psi(x) = \begin{bmatrix} B_{0,n}(x) \\ B_{1,n}(x) \\ \vdots \\ B_{n,n}(x) \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن $\det(\mathbf{L}) = \prod_{i=0}^n \binom{n}{i} \neq 0$ وهذا يعني أن المصفوفة \mathbf{L} قابلة للقلب.

خواص 1.3.1. [5]

.1

$$B_{i,n}(1) = \delta_{in}, \quad B_{i,n}(0) = \delta_{i0} \quad (9.1)$$

.2

$$B_{i,n}(1-x) = B_{n-i,n}(x) \quad (10.1)$$

.3

$$B_{i,n}(x) = (1-x)B_{i,n-1}(x) + xB_{i-1,n-1}(x) \quad (11.1)$$

.4

$$B_{i,n-1}(x) = \left(\frac{n-i}{n}\right) B_{i,n}(x) + \left(\frac{i+1}{n}\right) B_{i+1,n}(x) \quad (12.1)$$

.5

$$B_{i,n}(x) \geq 0, \forall x \in [0, 1] \quad (13.1)$$

.6

$$\sum_{i=0}^n B_{i,n}(x) = 1 \quad (14.1)$$

.7

$$\frac{d}{dx} (B_{i,n}(x)) = \frac{i-nx}{x(1-x)} B_{i,n}(x) \quad (15.1)$$

.8

$$\frac{d}{dx} (B_{i,n}(x)) = n [B_{i-1,n-1}(x) - B_{i,n-1}(x)] \quad (16.1)$$

.9

$$\int_0^1 B_{i,n}(x) dx = \frac{1}{n+1} \quad (17.1)$$

.10

$$B_{i,n}(x) B_{j,m}(x) = \frac{\binom{n}{i} \binom{m}{j}}{\binom{n+m}{i+j}} B_{i+j,n+m}(x) \quad (18.1)$$

برهان.

.1 بتطبيق مباشر للتعريف نحصل على المطلوب.

.2

$$\begin{aligned}
B_{i,n}(1-x) &= \binom{n}{i} (1-x)^i [1 - (1-x)]^{n-i} \\
&= \binom{n}{i} x^{n-i} (1-x)^i \\
&= \frac{n!}{i!(n-i)!} x^{n-i} (1-x)^i \\
&= \frac{n!}{(n-i)!(n-(n-i))!} x^{n-i} (1-x)^i \\
&= \binom{n}{n-i} x^{n-i} (1-x)^i \\
&= B_{n-i,n}(x)
\end{aligned}$$

.3

$$\begin{aligned}
(1-x)B_{i,n-1}(x) + xB_{i-1,n-1}(x) &= (1-x) \binom{n-1}{i} x^i (1-x)^{n-1-i} \\
&\quad + x \binom{n-1}{i-1} x^{i-1} (1-x)^{n-1-(i-1)} \\
&= \binom{n-1}{i} x^i (1-x)^{n-i} + \binom{n-1}{i-1} x^i (1-x)^{n-i} \\
&= \left[\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1} \right] x^i (1-x)^{n-i} \\
&= \left[\frac{(n-1)!}{i!(n-i-1)!} + \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} \right] x^i (1-x)^{n-i} \\
&= \left[\frac{(n-1)!(n-i)}{i!(n-i-1)!(n-i)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(n-1)!i}{(i-1)!(n-i)!i} \right] x^i (1-x)^{n-i} \\
&= \left[\frac{(n-1)!(n-i)}{i!(n-i)!} + \frac{(n-1)!i}{i!(n-i)!} \right] x^i (1-x)^{n-i} \\
&= \left[\frac{(n-1)!(n-i) + (n-1)!i}{i!(n-i)!} \right] x^i (1-x)^{n-i} \\
&= \left[\frac{n(n-1)! - i(n-1)! + i(n-1)!}{i!(n-i)!} \right] x^i (1-x)^{n-i} \\
&= \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}
\end{aligned}$$

$$= B_{i,n}(x)$$

.4

$$\begin{aligned}
\left(\frac{n-i}{n}\right) B_{i,n}(x) + \left(\frac{i+1}{n}\right) B_{i+1,n} &= \left(\frac{n-i}{n}\right) \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \\
&\quad + \left(\frac{i+1}{n}\right) \binom{n}{i+1} x^{i+1} (1-x)^{n-i-1} \\
&= x^i (1-x)^{n-1-i} \left[\left(\frac{n-i}{n}\right) \binom{n}{i} (1-x) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{i+1}{n}\right) \binom{n}{i+1} x \right] \\
&= x^i (1-x)^{n-1-i} \left[\left(\frac{n-i}{n}\right) \binom{n}{i} - \left(\frac{n-i}{n}\right) \binom{n}{i} x \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{i+1}{n}\right) \binom{n}{i+1} x \right] \\
&= x^i (1-x)^{n-1-i} \left[\left(\frac{n-i}{n}\right) \frac{n!}{i!(n-i)!} \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{n-i}{n}\right) \frac{n!(i+1)}{(i+1)!(n-i)!} x \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{i+1}{n}\right) \frac{n!(n-i)}{(n-i)!(i+1)!} x \right] \\
&= x^i (1-x)^{n-1-i} \frac{(n-1)!}{i!(n-i-1)!} \\
&= B_{i,n-1}(x)
\end{aligned}$$

.5. نبرهن بالتراجع

من أجل $n = 1$:لدينا $B_{0,1}(x) = 1 - x \geq 0$ و $B_{1,1}(x) = x \geq 0$ حيث $x \in [0, 1]$.

الآن نفرض أن الخاصية (13.1) صحيحة من أجل كل كثير حدود برنشتاين من درجة أقل أو تساوي

 n ، ونبرهن صحتها من أجل كثير حدود برنشتاين من الدرجة $n + 1$.باستخدام العلاقة التراجعية (11.1) نجد $B_{i,n+1}(x) \geq 0$ ، لأن $B_{i,n}(x) \geq 0$ و $B_{i-1,n} \geq 0$ حسبالفرض و $0 \leq x \leq 1$ في المجال $[0, 1]$.إذن $B_{i,n}(x) \geq 0$ من أجل كل $x \in [0, 1]$.

6. بتطبيق مباشر لدستور ثنائي الحد لنيوتن نجد:

$$1 = [(1-x) + x]^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(x)$$

7.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (B_{i,n}(x)) &= \binom{n}{i} \left[ix^{i-1}(1-x)^{n-i} - x^i(n-i)(1-x)^{n-i-1} \right] \\ &= \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \left(\frac{i}{x} - \frac{n-i}{1-x} \right) \\ &= \frac{(1-x)i - x(n-i)}{x(1-x)} B_{i,n}(x) \\ &= \frac{i-nx}{x(1-x)} B_{i,n}(x) \end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (B_{i,n}(x)) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{n!}{i!(n-i)!} x^i (1-x)^{n-i} \right) \\ &= \frac{in!}{i!(n-i)!} x^{i-1} (1-x)^{n-i} - \frac{(n-i)n!}{i!(n-i)!} x^i (1-x)^{n-i-1} \\ &= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} x^{i-1} (1-x)^{n-i} - \frac{n!}{i!(n-i-1)!} x^i (1-x)^{n-i-1} \\ &= n \left[\frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} x^{i-1} (1-x)^{n-i} - \frac{(n-1)!}{i!(n-i-1)!} x^i (1-x)^{n-i-1} \right] \\ &= n [B_{i-1,n-1}(x) - B_{i,n-1}(x)] \end{aligned}$$

9. لدينا

$$\sum_{j=i+1}^{n+1} B_{j,n+1}(x) = B_{i+1,n+1}(x) + B_{i+2,n+1}(x) + \cdots + B_{n+1,n+1}(x) \quad (19.1)$$

الآن بإشتقاق (19.1) وإستخدام العلاقة (16.1) نحصل على:

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{j=i+1}^{n+1} B_{j,n+1}(x) \right) = \frac{d}{dx} B_{i+1,n+1}(x) + \frac{d}{dx} B_{i+2,n+1}(x) + \cdots + \frac{d}{dx} B_{n+1,n+1}(x) \quad (20.1)$$

$$= (n+1) \left[B_{i,n}(x) - B_{i+1,n}(x) + B_{i+1,n}(x) - B_{i+2,n}(x) \right. \\ \left. + \cdots + B_{n,n}(x) - \underbrace{B_{n+1,n}(x)}_{=0} \right] \quad (21.1)$$

$$= (n+1) B_{i,n}(x) \quad (22.1)$$

إذن من خلال (22.1) وإستخدام (9.1) نجد:

$$\int_0^1 B_{i,n}(x) dx = \frac{1}{n+1} \int_0^1 \left(\frac{d}{dx} \sum_{j=i+1}^{n+1} B_{j,n+1}(x) \right) dx \\ = \frac{1}{n+1} \left[\sum_{j=i+1}^{n+1} B_{j,n+1}(x) \right]_0^1 \\ = \frac{1}{n+1}$$

.10

$$B_{i,n}(x) B_{j,m}(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \binom{m}{j} x^j (1-x)^{m-j} \\ = \binom{n}{i} \binom{m}{j} x^{i+j} (1-x)^{n+m-(i+j)} \\ = \frac{\binom{n}{i} \binom{m}{j} \binom{n+m}{i+j}}{\binom{n+m}{i+j}} x^{i+j} (1-x)^{n+m-(i+j)} \\ = \frac{\binom{n}{i} \binom{m}{j}}{\binom{n+m}{i+j}} B_{i+j,n+m}(x)$$

□

نظرية 3.1.1. [26]

$$\frac{d^p}{dx^p} (B_{i,n}(x)) = \frac{n!}{(n-p)!} \sum_{k=\max(0,i+p-n)}^{\min(i,p)} (-1)^{k+p} \binom{p}{k} B_{i-k,n-p}(x) \quad (23.1)$$

برهان. [26]
نبرهن بالتراجع

من أجل $p = 1$:
من العلاقة (16.1) لدينا

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (B_{i,n}(x)) &= n [B_{i-1,n-1}(x) - B_{i,n-1}(x)] \\ &= \frac{n!}{(n-1)!} \sum_{k=\max(0,i+1-n)}^{\min(i,1)} (-1)^{k+1} \binom{1}{k} B_{i-k,n-1}(x) \end{aligned}$$

ومنه العلاقة (23.1) صحيحة من أجل $p = 1$.
الآن نفرض أن العلاقة (23.1) صحيحة من أجل p ، ونبرهن صحتها من أجل $p + 1$.
باستخدام العلاقة (16.1) نحصل على:

$$\frac{d^{p+1}}{dx^{p+1}} (B_{i,n}(x)) = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^p}{dx^p} B_{i,n}(x) \right) \quad (24.1)$$

$$= \frac{d}{dx} \left(\frac{n!}{(n-p)!} \sum_{k=\max(0,i+p-n)}^{\min(i,p)} (-1)^{k+p} \binom{p}{k} B_{i-k,n-p}(x) \right) \quad (25.1)$$

$$= \frac{n!}{(n-p)!} \sum_{k=\max(0,i+p-n)}^{\min(i,p)} (-1)^{k+p} \binom{p}{k} \frac{d}{dx} (B_{i-k,n-p}(x)) \quad (26.1)$$

$$= \frac{n!(n-p)}{(n-p)!} \sum_{k=\max(0,i+p-n)}^{\min(i,p)} (-1)^{k+p} \binom{p}{k} \left[B_{i-k-1,n-p-1}(x) - B_{i-k,n-p-1}(x) \right] \quad (27.1)$$

$$= \frac{n!}{(n-p-1)!} \sum_{k=\max(0,i+p-n)}^{\min(i,p)} (-1)^{k+p} \binom{p}{k} B_{i-k-1,n-p-1}(x) \quad (28.1)$$

$$- \frac{n!}{(n-p-1)!} \sum_{k=\max(0,i+p+1-n)}^{\min(i,p)} (-1)^{k+p} \binom{p}{k} B_{i-k,n-p-1}(x)$$

بوضع $k = k - 1$ في الحد الأول من الطرف الأيمن للعلاقة (28.1) نجد:

$$\begin{aligned} \frac{d^{p+1}}{dx^{p+1}} B_{i,n}(x) &= \frac{n!}{(n-p-1)!} \sum_{k=\max(1,i+p+1-n)}^{\min(i,p+1)} (-1)^{k+p+1} \binom{p}{k-1} B_{i-k,n-p-1}(x) \\ &+ \frac{n!}{(n-p-1)!} \sum_{k=\max(0,i+p+1-n)}^{\min(i,p)} (-1)^{k+p+1} \binom{p}{k} B_{i-k,n-p-1}(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n!}{(n-p-1)!} \sum_{k=\max(0, i+p+1-n)}^{\min(i, p+1)} (-1)^{k+p+1} \left[\binom{p}{k-1} + \binom{p}{k} \right] B_{i-k, n-p-1}(x) \\
&= \frac{n!}{(n-p-1)!} \sum_{k=\max(0, i+p+1-n)}^{\min(i, p+1)} (-1)^{k+p+1} \binom{p+1}{k} B_{i-k, n-p-1}(x) \\
&= \frac{n!}{(n-p-1)!} \sum_{k=\max(0, i+p+1-n)}^{\min(i, p+1)} (-1)^{k+p+1} \binom{p+1}{k} B_{i-k, n-p-1}(x)
\end{aligned}$$

□

[26] .3.1.1 لازمة

$$\int_0^1 B_{i,n}^{(p)}(x) B_{j,n}(x) dx = \frac{n! \binom{n}{j}}{(2n-p+1)(n-p)!} \sum_{k=\max(0, i+p-n)}^{\min(i, p)} (-1)^{k+p} \frac{\binom{p}{k} \binom{n-p}{i-k}}{\binom{2n-p}{i+j-k}} \quad (29.1)$$

برهان. [26]

إعتمادا على النظرية (3.1.1) والعلاقتين (18.1) و (17.1) نحصل على:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 B_{i,n}^{(p)}(x) B_{j,n}(x) dx &= \int_0^1 \frac{n!}{(n-p)!} \sum_{k=\max(0, i+p-n)}^{\min(i, p)} (-1)^{k+p} \binom{p}{k} B_{i-k, n-p}(x) B_{j,n}(x) dx \\
&= \frac{n!}{(n-p)!} \sum_{k=\max(0, i+p-n)}^{\min(i, p)} (-1)^{k+p} \binom{p}{k} \int_0^1 B_{i-k, n-p}(x) B_{j,n}(x) dx \\
&= \frac{n!}{(n-p)!} \sum_{k=\max(0, i+p-n)}^{\min(i, p)} (-1)^{k+p} \binom{p}{k} \int_0^1 \frac{\binom{n-p}{i-k} \binom{n}{j}}{\binom{2n-p}{i+j-k}} B_{i+j-k, 2n-p}(x) dx \\
&= \frac{n!}{(n-p)!} \sum_{k=\max(0, i+p-n)}^{\min(i, p)} (-1)^{k+p} \binom{p}{k} \frac{\binom{n-p}{i-k} \binom{n}{j}}{\binom{2n-p}{i+j-k}} \int_0^1 B_{i+j-k, 2n-p}(x) dx \\
&= \frac{n!}{(n-p)!} \sum_{k=\max(0, i+p-n)}^{\min(i, p)} (-1)^{k+p} \binom{p}{k} \frac{\binom{n-p}{i-k} \binom{n}{j}}{\binom{2n-p}{i+j-k} (2n-p+1)}
\end{aligned}$$

□

1.3.1 قضية

تشكل $\{B_{i,n}(x)\}_{i=0}^n$ كثيرات حدود برنشتاين أساس للفضاء P_n فضاء كثيرات الحدود من درجة أقل أو تساوي n .

برهان. لإثبات أن $\{B_{i,n}(x)\}_{i=0}^n$ تشكل أساس للفضاء \mathcal{P}_n ، نين أن $\{B_{i,n}(x)\}_{i=0}^n$ مستقلة خطيا و مولدة للفضاء \mathcal{P}_n .

1. إثبات أن $\{B_{i,n}(x)\}_{i=0}^n$ مستقلة خطيا:
لدينا

$$\begin{aligned}
 B_{i,n}(x) &= \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \\
 &= \binom{n}{i} x^i \sum_{k=0}^{n-i} (-1)^k \binom{n-i}{k} x^k \\
 &= \sum_{k=0}^{n-i} (-1)^k \binom{n}{i} \binom{n-i}{k} x^{k+i} \\
 &= \sum_{k=i}^n (-1)^{k-i} \binom{n}{i} \binom{n-i}{k-i} x^k \\
 &= \sum_{k=i}^n (-1)^{k-i} \binom{n}{k} \binom{k}{i} x^k
 \end{aligned}$$

$\forall c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$

$$0 = c_0 B_{0,n}(x) + c_1 B_{1,n}(x) + \dots + c_n B_{n,n}(x) \quad (30.1)$$

$$= c_0 \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{0} x^k + c_1 \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \binom{k}{1} x^k + \dots \quad (31.1)$$

$$+ c_n \sum_{k=n}^n (-1)^{k-n} \binom{n}{k} \binom{k}{n} x^k$$

$$= c_0 + \sum_{k=0}^1 (-1)^{1-k} c_k \binom{n}{1} \binom{1}{k} x^1 + \dots + \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} c_k \binom{n}{n} \binom{n}{k} x^n \quad (32.1)$$

وبما أن عناصر الأساس القانوني $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ مستقلة خطيا فإن:

$$c_0 = 0 \quad (33.1)$$

$$\sum_{k=0}^1 (-1)^{1-k} c_k \binom{n}{1} \binom{1}{k} = 0 \quad (34.1)$$

⋮

$$\vdots$$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} c_k \binom{n}{n} \binom{n}{k} = 0 \quad (35.1)$$

و بتعويض c_0 في (34.1) نجد $c_1 = 0$ ، ثم بتعويض كل من c_0 و c_1 في المعادلة الموالية نجد $c_2 = 0$ ، وهكذا إلى أن نحصل في الأخير على $c_0 = c_1 = \dots = c_n = 0$. إذن المجموعة $\{B_{i,n}(x)\}_{i=0}^n$ مستقلة خطياً.

2. إثبات أن $\{B_{i,n}(x)\}_{i=0}^n$ مولدة للفضاء \mathcal{P}_n :
يكفي أن نثبت أن كل عنصر من الأساس القانوني $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ للفضاء \mathcal{P}_n يكتب على شكل مزج خطي لعناصر المجموعة $\{B_{i,n}(x)\}_{i=0}^n$.
لدينا

$$(x + y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i} \quad (36.1)$$

• من أجل 1:

بوضع $y = 1 - x$ في (36.1) نجد:

$$1 = (x + 1 - x)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i (1 - x)^{n-i} = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(x)$$

• من أجل x :

بإشتقاق المعادلة (36.1) بالنسبة إلى x نحصل على:

$$n(x + y)^{n-1} = \sum_{i=1}^n i \binom{n}{i} x^{i-1} y^{n-i} \quad (37.1)$$

بضرب طرفي المعادلة (37.1) في x وقسمتها على n ووضع $y = 1 - x$ نجد:

$$x = \sum_{i=1}^n \frac{i}{n} B_{i,n}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\binom{1}{i}}{\binom{n}{i}} B_{i,n}(x) \quad (38.1)$$

• من أجل x^2 :

بإشتقاق (37.1) بالنسبة إلى x نحصل على:

$$n(n-1)(x + y)^{n-2} = \sum_{i=2}^n i(i-1) \binom{n}{i} x^{i-2} y^{n-i} \quad (39.1)$$

بضرب طرفي المعادلة (39.1) في x^2 و قسمتها على $n(n-1)$ و وضع $y = 1 - x$ نجد:

$$x^2 = \sum_{i=2}^n \frac{i(i-1)}{n(n-1)} B_{i,n}(x) = \sum_{i=2}^n \frac{\binom{i}{2}}{\binom{n}{2}} B_{i,n}(x) \quad (40.1)$$

و بالتالي في الحالة العامة:

$$x^k = \sum_{i=k}^n \frac{\binom{i}{k}}{\binom{n}{k}} B_{i,n}(x), \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (41.1)$$

إذن مولدة للفضاء \mathcal{P}_n $\{B_{i,n}(x)\}_{i=0}^n$

□

ملاحظة 2.3.1. [24]

إن كثيرات حدود برنشتاين $\{B_{0,n}(x), B_{1,n}(x), \dots, B_{n,n}(x)\}$ هي مجموعة تامة في الفضاء $L^2([0, 1])$.

2.3.1 كثيرات حدود برنشتاين المتعامدة والمتجانسة

نقوم باستخدام خوارزمية غرام شميدت لتعيين $OB_{i,n}$ كثيرات حدود برنشتاين المتعامدة والمتجانسة (orthonormal Bernstein polynomials) وذلك على النحو التالي:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_{0,n} = B_{0,n}, \quad OB_{0,n} = \frac{1}{\|\Phi_{0,n}\|} \Phi_{0,n} \\ \Phi_{k,n} = B_{k,n} - \sum_{j=0}^{k-1} \langle B_{k,n}, OB_{j,n} \rangle OB_{j,n} \quad OB_{k,n} = \frac{1}{\|\Phi_{k,n}\|} \Phi_{k,n}, \quad (k = 1, 2, \dots, n) \end{array} \right.$$

فتلا من أجل $n = 5$ نجد:

$$OB_{0,5}(x) = \sqrt{11}(1-x)^5$$

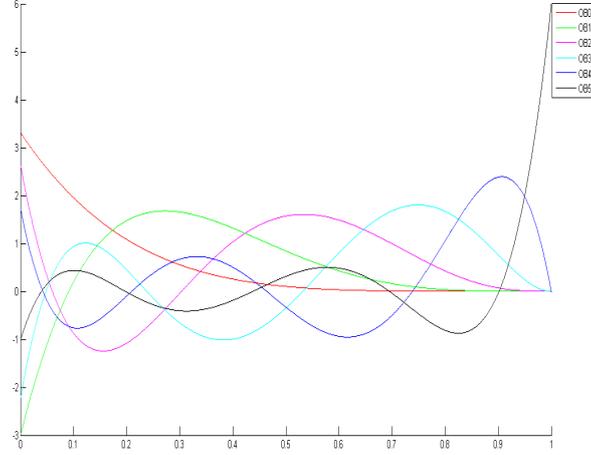
$$OB_{1,5}(x) = 3(1-x)^4(11x-1)$$

$$OB_{2,5}(x) = \sqrt{7}(1-x)^3(55x^2-20x+1)$$

$$OB_{3,5}(x) = \sqrt{5}(1-x)^2(165x^3-135x^2+27x-1)$$

$$OB_{4,5}(x) = \sqrt{3}(1-x)(330x^4-480x^3+216x^2-32x+1)$$

$$OB_{5,5}(x) = 462x^5 - 1050x^4 + 840x^3 - 280x^2 + 35x - 1$$



شكل 3.1: كثيرات حدود برنشتاين المتعامدة والمتجانسة من أجل $n = 5$.

من خلال المعادلات السابقة يمكن أن نستنتج الشكل العام لكثيرات حدود برنشتاين المتعامدة والمتجانسة و الذي يكون كالتالي [25]:

$$OB_{i,n}(x) = \left(\sqrt{2(n-i)+1} \right) (1-x)^{n-i} \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{2n+1-j}{i-j} \binom{i}{j} x^{i-j} \quad (42.1)$$

أو بعبارة أخرى

$$OB_{i,n}(x) = \left(\sqrt{2(n-i)+1} \right) \sum_{j=0}^i (-1)^j \frac{\binom{2n+1-j}{i-j} \binom{i}{j}}{\binom{n-j}{i-j}} B_{i-j,n-j}(x) \quad (43.1)$$

ملاحظة 3.3.1. [25]

• إن كثيرات حدود برنشتاين المتعامدة والمتجانسة هي حل للمعادلة التفاضلية التالية:

$$\frac{d}{dx} \left[x(1-x)^2 \frac{dy}{dx} \right] + n(n+2)(1-x)y + (n-i+1)(i-n)y = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (44.1)$$

• مجموعة كثيرات حدود برنشتاين المتعامدة والمتجانسة متعامدة بالنسبة لدالة الوزن $w(x) = 1$.

نتيجة 3.2.1. [27]

لدينا

$$OB_{i,n}(x) = \left(\sqrt{2(n-i)+1} \right) (1-x)^{n-i} \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{2n+1-j}{i-j} \binom{i}{j} x^{i-j}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{2(n-i)+1} \sum_{r=0}^{n-i} (-1)^r \binom{n-i}{r} x^r \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{2n+1-j}{i-j} \binom{i}{j} x^{i-j} \\
&= \sqrt{2(n-i)+1} \sum_{j=0}^n \sum_{k=\max\{0, j-n+i\}}^{\min\{i, j\}} (-1)^{j-k} (-1)^{i-k} \binom{n-i}{j-k} \rho x^j
\end{aligned}$$

حيث $\rho = \binom{2n+1-i+k}{k} \binom{i}{i-k}$ و منه يمكن كتابة $OB_{i,n}(x)$ على الشكل:

$$OB_{i,n}(x) = \mathbf{F}_{i+1} \mathbf{t}(x), \quad i = 0, 1, \dots, n$$

حيث

$$\mathbf{F}_{i+1} = [\mathbf{f}_{i+11}, \mathbf{f}_{i+12}, \dots, \mathbf{f}_{i+1n+1}]$$

(45.1)

$$\mathbf{f}_{i+1j+1} = \sqrt{2(n-i)+1} \sum_{k=\max\{0, j-n+i\}}^{\min\{i, j\}} (-1)^{j-k} \binom{n-i}{j-k} (-1)^{i-k} \binom{2n+1-i+k}{k} \binom{i}{i-k}$$

$j = 0, 1, \dots, n$

الآن، إذا قمنا بتعريف المصفوفة \mathbf{F} ذات الرتبة $(n+1) \times (n+1)$ كما يلي:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{n+1} \end{bmatrix}$$

فإننا نحصل على:

$$\varphi(x) = \mathbf{F} \mathbf{t}(x)$$

حيث

$$\varphi(x) = [OB_{0,n}(x), OB_{1,n}(x), \dots, OB_{n,n}(x)]^T$$

نتيجة 3.3.1

يمكن التعبير عن كثيرات حدود برنشتاين المتعامدة والمتجانسة بدلالة كثيرات حدود برنشتاين كما يلي:

$$\varphi(x) = \mathbf{M} \Psi(x) \quad (46.1)$$

حيث M مصفوفة من الرتبة $(n+1) \times (n+1)$

$$M = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \mathbf{m}_{21} & \mathbf{m}_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{m}_{n-11} & \mathbf{m}_{n-12} & \cdots & \mathbf{m}_{n-1n-1} & 0 \\ \mathbf{m}_{n+11} & \mathbf{m}_{n+12} & \cdots & \mathbf{m}_{n+1n-1} & \mathbf{m}_{n+1n+1} \end{bmatrix}, \quad \Psi(x) = \begin{bmatrix} B_{0,n}(x) \\ B_{1,n}(x) \\ \vdots \\ B_{n,n}(x) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{m}_{l1} = \mathbf{f}_{l1}, \quad l = 1, 2, \dots, n+1$$

$$\mathbf{m}_{lr} = \frac{1}{\binom{n}{r-1}} \left[\mathbf{f}_{lr} - \sum_{k=1}^{r-1} (-1)^{r-k} \binom{n}{k-1} \binom{n-k+1}{r-k} \mathbf{m}_{lk} \right], \quad r = 2, 3, \dots, l.$$

و \mathbf{f}_{lr} , \mathbf{f}_{l1} المعرفتان في (45.1).
إن $\det(M) \neq 0$ و منه المصفوفة M قابلة للقلب.

مثال 2.3.1

من أجل $n = 5$ لدينا

$$\begin{bmatrix} OB_{05}(x) \\ OB_{15}(x) \\ OB_{25}(x) \\ OB_{35}(x) \\ OB_{45}(x) \\ OB_{55}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{7} & -\frac{18\sqrt{7}}{5} & \frac{18\sqrt{7}}{5} & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{5} & \frac{24}{\sqrt{5}} & -\frac{42}{\sqrt{5}} & \frac{28}{\sqrt{5}} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & -\frac{28\sqrt{3}}{5} & \frac{63\sqrt{3}}{5} & -14\sqrt{3} & 7\sqrt{3} & 0 \\ -1 & 6 & -15 & 20 & -15 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{05}(x) \\ B_{15}(x) \\ B_{25}(x) \\ B_{35}(x) \\ B_{45}(x) \\ B_{55}(x) \end{bmatrix}$$

نتيجة 3.4.1 [24].

1. كثيرات حدود برنشتاين المتعامدة والمتجانسة هي مجموعة مستقلة خطياً.
2. كثيرات حدود برنشتاين المتعامدة والمتجانسة هي مجموعة تامة في الفضاء $L^2([0, 1])$.

4.1 المعادلات التفاضلية التكاملية

إن للمعادلات التفاضلية التكاملية دور بارز في تفسير عدة ظواهر، منها ظواهر فيزيائية، كيميائية، بيولوجية، هندسية أو غيرها من الظواهر. وقد كان أول ظهور لها في سنة 1900 عن طريق فلتيرا.

تعريف 1.4.1

المعادلة التفاضلية التكاملية (integro-differential equation) هي معادلة تحتوي على التفاضل و التكامل، وتكون من الشكل [18]:

$$y^{(n)}(x) = F\left(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x), \lambda \int_{\Omega} k(x, t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) dt\right) \quad (47.1)$$

أو من الشكل [20, 21]:

$$L_x(y) = \lambda \int_{\Omega} k(x, t) M_t(y) + g(x) \quad (48.1)$$

حيث

$k(x, t)$ دالة معلومة، تسمى نواة المعادلة التفاضلية التكاملية.
 Ω مجموعة جزئية مفتوحة من \mathbb{R} .

$$L_x(y) = \sum_{i=0}^n a_i(x) y^{(i)}(x) \quad (49.1)$$

$$M_t(y) = \sum_{j=0}^m d_j(t) y^{(j)}(t) \quad (50.1)$$

$a_i(x), d_j(x), g(x)$ دوال معلومة محتواة في $L^2(\Omega)$.

وبما أن هذه المعادلة تحتوي على التفاضل فإنه من الضروري وجود الشروط الابتدائية التالية:

$$y(\alpha) = \beta_0, \quad y'(\alpha) = \beta_1, \quad y''(\alpha) = \beta_2, \quad \dots \quad y^{(n-1)}(\alpha) = \beta_{n-1}$$

حيث $\alpha \in \Omega$ و β_i و $i = 0, \dots, n-1$ ثابت.

1.4.1 تصنيف المعادلات التفاضلية التكاملية

تصنف المعادلات التفاضلية التكاملية من حيث:

1. طرفي التكامل:

(1) إذا كان طرفي التكامل عبارة عن ثابتين فإن المعادلة التفاضلية التكاملية لفريدهولم وهي تأخذ الشكل التالي [1, 2, 15]:

$$L_x(y) = \lambda \int_a^b k(x, t) M_t(y) + g(x) \quad (51.1)$$

فمثلا:

$$y'(x) = x - \int_0^1 e^{x-t} y(t) dt, \quad y(0) = 0$$

$$y''(x) = e^x - x + \int_0^1 xty'(t) dt, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

معادلتان تفاضليتان تكامليتان لفريدهولم.

(ب) إذا كان أحد أطراف التكامل عبارة عن متغير x فإن المعادلة التفاضلية التكاملية لفلتيرا و تكون على الشكل التالي [17]:

$$L_x(y) = \lambda \int_a^x k(x, t) M_t(y) + g(x) \quad (52.1)$$

فمثلا:

$$y''(x) = -x + \int_0^x (x-t)y(t) dt, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

$$y'(x) = -\sin x - 1 + \int_0^x y(t) dt, \quad y(0) = 1$$

هما معادلتان تفاضليتان تكامليتان لفلتيرا.

(ج) إذا وجد كل من تكامل فريدهولم و تكامل فلتيرا في نفس المعادلة، فإن المعادلة التفاضلية التكاملية لفريدهولم-فلتيرا، و شكلها كما يلي [19, 22]:

$$L_x(y) = \lambda_1 \int_a^b k_1(x, t) M_t(y) + \lambda_2 \int_a^x k_2(x, t) M_t(y) + g(x) \quad (53.1)$$

فمثلا:

$$y'(x) = 1 + \int_0^x (x-t)y(t) dt + \int_0^1 xty(t) dt, \quad y(0) = 1$$

$$y''(x) = -x - \frac{1}{6}x^3 + \int_0^x y(t) dt + \int_{-\pi}^{\pi} xy(t) dt, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$$

هما معادلتان تفاضليتان تكامليتان لفريدهولم-فلتيرا.

2. رتبة المعادلة التفاضلية التكاملية:

رتبة المعادلة التفاضلية التكاملية هي رتبة أعلى مشتق في المعادلة.

فمثلا:

$$y'(x) = -2\pi \sin(2\pi x) - \pi \sin(4\pi x) + 2\pi \int_0^1 \sin(4\pi x + 2\pi t)y(t) dt, \quad y(0) = 1$$

معادلة تفاضلية تكاملية من الرتبة الأولى.

$$y''(x) + xy' - xy = e^x - 2 \sin(x) + \int_{-1}^1 \sin(x)e^{-t}y(t)dt, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

معادلة تفاضلية تكاملية من الرتبة الثانية.

3. خطية أو غير خطية:

يقال عن المعادلة التفاضلية التكاملية أنها خطية إذا كانت من الشكل (48.1)، وغير خطية إذا كانت من الشكل (47.1).

فمثلاً:

$$y'(x) = 1 - 2x \sin(x) + \int_0^x y(t)dt, \quad y(0) = 0$$

$$y'(x) = y(x) - \frac{1}{2}x + \frac{1}{x+1} - \ln(x+1) + \frac{1}{(\ln 2)^2} \int_0^1 \frac{x}{t+1}y(t)dt, \quad y(0) = 0$$

معادلتان خطيتان.

$$y'(x) = e^x - \frac{1}{5}e^{-x^2}(e^5 - 1) + \int_0^1 e^{2t-x^2}y^3(t)dt, \quad y(0) = 1$$

$$y'(x) - \int_0^x \cos(x-t)y^2(t)dt = -2 \sin x - \frac{1}{3} \cos x - \frac{2}{3} \cos(2x), \quad y(0) = 1$$

معادلتان غير خطيتان.

4. من النوع الأول أو الثاني:

إذا كان الجزء التفاضلي معدوم تكون المعادلة التفاضلية التكاملية من النوع الأول [17]، أما إذا كان غير معدوم تكون المعادلة من النوع الثاني [20].

فمثلاً:

$$\int_0^x (x-t-1)y'(t)dt = 2e^x - x - 2, \quad y(0) = 1$$

$$\int_0^x (x-t)y(t)dt + \int_0^x (x-t+1)y'(t)dt = 1 + x - \cos x, \quad y(0) = 0$$

معادلتان تفاضلتان تكاملتان من النوع الأول.

$$y'(x) = 3e^{3x} - \frac{1}{3}(2e^3 + 1)x + \int_0^1 3xy(t)dt, \quad y(0) = 1$$

معادلة تفاضلية تكاملية من النوع الثاني.

5. متجانسة أو غير متجانسة:

إذا كانت $g(x) = 0$ فإن المعادلة التفاضلية التكاملية متجانسة، أما إذا كانت $g(x)$ غير معدومة تكون المعادلة غير متجانسة.

6. شاذة أو غير شاذة:

يقال عن المعادلة التفاضلية التكاملية أنها شاذة إذا تحقق على الأقل أحد الشرطين التاليين:

(أ) أحد طرفي التكامل أو كلاهما يساوي ∞ .

(ب) النواة غير منتبهة بجوار نقطة أو أكثر من مجال التكامل.

أما إذا لم يتحقق أي شرط من الشرطين السابقين، تكون المعادلة غير شاذة.
فمثلاً:

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(x) = \pi^{-1} \int_0^{+\infty} \frac{b_n y^{(n)}(t) + b_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + b_0 y(t)}{t-x} dt, \quad (0 \leq x < +\infty)$$

$$y'(x) = \frac{2}{3}x^2 + 7x^4 + x^5 \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) + \frac{2}{5} + \int_{-1}^1 \frac{y(t)}{x-t} dt, \quad |x| < 1$$

$$y^{(n)}(x) = \lambda \int_0^x \frac{1}{|x-t|^\alpha} y(t) dt, \quad 0 < \alpha < 1$$

معادلات تفاضلية تكاملية شاذة.

7. عدد المتغيرات للدالة المجهولة:

يقال عن المعادلة التفاضلية التكاملية أنها عادية إذا كانت الدالة المجهولة متعلقة بمتغير مستقل واحد، أما إذا كانت متعلقة بمتغيرين مستقلين أو أكثر تكون المعادلة التفاضلية التكاملية جزئية [23].
فمثلاً:

$$y'(x) + y(x) - 2 \int_0^x \sin(x) y^2(t) dt = \cos x + (1-x) \sin x + \cos x \sin^2 x, \quad y(0) = 0.$$

معادلة تفاضلية تكاملية عادية.

$$x_1 \frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} + x_1 \sin x_2 + \int_0^{x_2} \sin(x_2 - t) y(x_1, t) dt, \quad y(x_1, 0) = e^{x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}(x_1, 0) = 0,$$

$$y(0, x_2) = \cos x_2$$

معادلة تفاضلية تكاملية جزئية.

2.4.1 بعض الطرق لحل المعادلات التفاضلية التكاملية

إن هناك العديد من الطرق لحل المعادلات التفاضلية التكاملية سواء كانت تحليلية أو عددية، فثلا بالنسبة للطرق التحليلية لدينا طريقة الحساب المباشر (direct computation method)، طريقة التكرار التغييري (variational iteration method)، طريقة أدومين التحليلية (Adomin decomposition method)، طريقة أدومين التحليلية المعدلة (Adomin modified decomposition method)، أما بالنسبة للطرق العددية لدينا طريقة بي سبلين ووظائف قياس الموجات (B-spline scaling functions and wavelets)، طريقة هوموتوبي الإضطرابية (Homotopy perturbation method)، طريقة كثيرات حدود لجندر (Legendre polynomials method)، طريقة تايلور التجميعية (Taylor collocation method).

و سنهتم في هذه المذكرة بحل نوع معين من المعادلات التفاضلية التكاملية وهي المعادلات التفاضلية التكاملية لفريد هولم غير الخطية وذلك باستخدام طريقة عددية تعتمد على دوال المزج بين دوال القطع النبضية و كثيرات حدود برنشتاين المتعامدة والمتجانسة.

الفصل الثاني

دوال المزج و مصفوفات العمليات

1.2 دوال المزج بين دوال القطع النبضية و كثيرات حدود برنشتاين المتعامدة والمتجانسة

1.1.2 تعريف و خواص

تعريف 1.1.2. [1]

دوال المزج بين دوال القطع النبضية و كثيرات حدود برنشتاين المتعامدة والمتجانسة هي الدوال $h_{ji}(x)$ المعرفة على المجال $[0, 1)$ من الشكل:

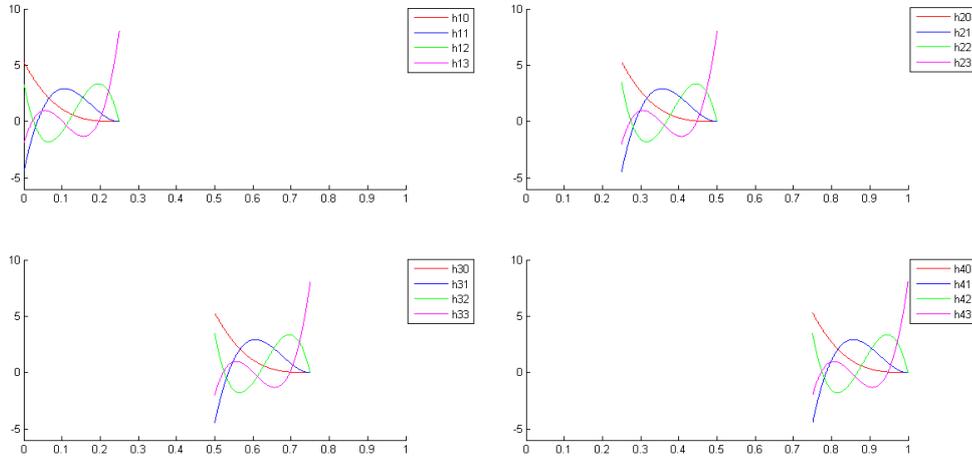
$$h_{ji}(x) = \tilde{b}_j(x) OB_{i,n}(mx - j + 1)$$

أي

$$h_{ji}(x) = \begin{cases} \sqrt{m} OB_{i,n}(mx - j + 1), & x \in \left[\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}\right), \\ 0 & x \notin \left[\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}\right) \end{cases} \quad (1.2)$$

حيث n و j رتبة دوال القطع النبضية و درجة كثير حدود برنشتاين المتعامد والمتجانس على التوالي.

مثال 1.1.2.



شكل 1.2: دوال المزج من أجل $m = 4$ و $n = 3$.

نتيجة 1.1.2. [1]

بما أن $h_{ji}(x)$ هي مزج لدوال القطع النبضية و كثيرات حدود برنشتاين المتعامدة والمتجانسة، فإن مجموعة دوال المزج تحقق الخواص التالية:

.1

$$h_{ji}(x)h_{lr}(x) = \begin{cases} h_{ji}(x)h_{lr}(x), & j = l \\ 0 & j \neq l \end{cases} \quad (2.2)$$

حيث $j, l = 1, 2, \dots, m, i, r = 0, 1, \dots, n$

.2

$$\int_0^1 h_{ji}(x)h_{lr}(x)dx = \delta_{jl}\delta_{ir}$$

حيث δ_{jl}, δ_{ir} دلتا كرونكر.

.3. تامة [24].

نتيجة 1.2.2

يمكن كتابة $h_{ji}(x)$ على الشكل التالي:

$$h_{ji}(x) = \mathbf{a}_{i+1}^j \mathbf{t}_j(x), \quad i = 0, 1, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m.$$

حيث

$$\mathbf{t}_j(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_{i+1}^j = [\mathbf{a}_{i+11}^j, \mathbf{a}_{i+12}^j, \dots, \mathbf{a}_{i+1n+1}^j]$$

$$\mathbf{a}_{i+1r+1}^j = \sqrt{m} \sqrt{2(n-i)+1} \sum_{l=r}^n \sum_{k=\max(0, l-n+i)}^{\min(i, l)} (-1)^{l-k} (-1)^{i-k} \binom{n-i}{l-k} \mu$$

$$\mu = \binom{2n+1-i+k}{k} \binom{i}{i-k} \binom{l}{r} m^r (1-j)^l, \quad r = 0, 1, \dots, n.$$

الآن إذا قمنا بتعريف المصفوفة $\tilde{\mathbf{A}}$ ذات الرتبة $m(n+1) \times m(n+1)$ كما يلي:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \text{diag}[\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_j, \dots, \mathbf{A}_m]$$

حيث \mathbf{A}_j مصفوفة من الرتبة $(n+1) \times (n+1)$ وتأخذ الشكل:

$$\mathbf{A}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^j \\ \mathbf{a}_2^j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{n+1}^j \end{bmatrix} = \sqrt{m} \mathbf{MLN}_j, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

\mathbf{M} , \mathbf{L} المصفوفتين المعرفتين في (8.1) و (46.1) على التوالي، \mathbf{N}_j مصفوفة من الرتبة $(n+1) \times (n+1)$.

$$\mathbf{N}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_{1,1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mathbf{n}_{2,1} & \mathbf{n}_{2,2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{n}_{n-1,1} & \mathbf{n}_{n-1,2} & \dots & \mathbf{n}_{n-1,n-1} & 0 \\ \mathbf{n}_{n+1,1} & \mathbf{n}_{n+1,2} & \dots & \mathbf{n}_{n+1,n-1} & \mathbf{n}_{n+1,n+1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{n}_{l+1,r+1} = \binom{l}{r} m^r (1-j)^{l-r}, \quad l = 0, 1, \dots, n, \quad r = 0, 1, \dots, l.$$

فإننا نحصل على:

$$\mathbf{H}(x) = \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{T}}(x), \quad (3.2)$$

حيث

$$\tilde{\mathbf{T}}(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1(x) \\ \mathbf{t}_2(x) \\ \vdots \\ \mathbf{t}_j(x) \\ \vdots \\ \mathbf{t}_m(x) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1(x) \\ \mathbf{H}_2(x) \\ \vdots \\ \mathbf{H}_j(x) \\ \vdots \\ \mathbf{H}_m(x) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_j(x) = \begin{bmatrix} h_{j0}(x) \\ h_{j1}(x) \\ \vdots \\ h_{jn}(x) \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

نلاحظ أن $\det(N_j) \neq 0$ ، إذن بما أن المصفوفات \mathbf{L} ، \mathbf{M} و N_j قابلة للقلب، فإن \mathbf{A}_j مصفوفة قابلة للقلب، وبالتالي $\tilde{\mathbf{A}}$ قابلة للقلب.

خاصية 1.1.2. [1]

$$\langle \mathbf{H}(x), \mathbf{H}(x) \rangle = \int_0^1 \mathbf{H}(x) \mathbf{H}^T(x) dx = \mathbf{I} \quad (4.2)$$

حيث \mathbf{I} مصفوفة الوحدة ذات الرتبة $m(n+1) \times m(n+1)$.

برهان.

نضع $\mathbf{E} = \int_0^1 \mathbf{H}(x) \mathbf{H}^T(x) dx$ حيث \mathbf{E} مصفوفة من الرتبة $m(n+1) \times m(n+1)$.

$$\mathbf{E} = \int_0^1 \mathbf{H}(x) \mathbf{H}^T(x) dx = \begin{bmatrix} \langle h_{10}, h_{10} \rangle & \cdots & \langle h_{10}, h_{1n} \rangle & \cdots & \langle h_{10}, h_{mn} \rangle \\ \langle h_{11}, h_{10} \rangle & \cdots & \langle h_{11}, h_{1n} \rangle & \cdots & \langle h_{11}, h_{mn} \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle h_{1n}, h_{10} \rangle & \cdots & \langle h_{1n}, h_{1n} \rangle & \cdots & \langle h_{1n}, h_{mn} \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle h_{mn}, h_{10} \rangle & \cdots & \langle h_{mn}, h_{1n} \rangle & \cdots & \langle h_{mn}, h_{mn} \rangle \end{bmatrix}$$

لتكن $\mathbf{E} = (e_{ji}^{lr})$ حيث $e_{ji}^{lr} = \langle h_{ji}, h_{lr} \rangle$ ، $j, l = 1, 2, \dots, m$ ، $i, r = 0, 1, \dots, n$ ، هناك حالتين:

1. إذا كان $l \neq j$ فإنه حسب (2.2) نجد $e_{ji}^{lr} = 0$.

2. إذا كان $l = j$ فإن:

$$e_{ji}^{lr} = \langle h_{ji}, h_{lr} \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 h_{ji}(x)h_{lr}(x)dx \\
&= \int_{\frac{j-1}{m}}^{\frac{j}{m}} \sqrt{m}OB_{i,n}(mx - j + 1)\sqrt{m}OB_{r,n}(mx - j + 1)dx \\
&= \int_0^1 OB_{i,n}(x)OB_{r,n}(x)dx \\
&= \delta_{ir}
\end{aligned}$$

و بالتالي

$$e_{ji}^{lr} = \begin{cases} 0 & j \neq l \text{ أو } i \neq r \\ 1 & j = l \text{ و } i = r \end{cases} \quad (5.2)$$

إذن:

$$\mathbf{E} = \int_0^1 \mathbf{H}(x)\mathbf{H}^T(x)dx = \mathbf{I}, \quad (6.2)$$

□

2.1.2 تقريب دالة

نفرض أن $H = L^2[0, 1]$ و $\{h_{10}(x), h_{11}(x), \dots, h_{m-1,n}(x), h_{m,n}(x)\} \subset H$ مجموعة دوال المزج. ليكن $y(x) \in L^2([0, 1])$ و $S = \text{span}\{h_{10}(x), h_{11}(x), \dots, h_{1,n}(x), h_{2,0}(x), \dots, h_{m,n}(x)\}$ بما أن S فضاء شعاعي جزئي ذو بعد منتهي و مغلق [24]، فإنه حسب النظرية (1.2.1) يوجد أحسن تقريب \tilde{z} للدالة y في S ويكون وحيد أي:

$$\forall z \in S, \exists! \tilde{z} \in S : \|y - \tilde{z}\| \leq \|y - z\|$$

و بما أن $\tilde{z} \in S$ فإن:

$$y(x) \approx \tilde{z} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=0}^n c_{ji}h_{ji}(x) = \mathbf{C}^T\mathbf{H}(x) \quad (7.2)$$

حيث

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{C}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}_j \\ \vdots \\ \mathbf{C}_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_j = \begin{bmatrix} c_{j0} \\ c_{j1} \\ \vdots \\ c_{j2} \\ \vdots \\ c_{jn} \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

و حسب (3.1) فإن:

$$\forall z \in S \quad \langle \mathbf{y} - \tilde{z}, z \rangle = 0 \quad (8.2)$$

أي:

$$\langle \mathbf{y} - \mathbf{C}^T \mathbf{H}(x), z \rangle = 0 \quad (9.2)$$

و بصفة خاصة

$$\langle \mathbf{y} - \mathbf{C}^T \mathbf{H}(x), h_{lr} \rangle = 0, \quad l = 1, 2, \dots, m, \quad r = 0, 1, \dots, n \quad (10.2)$$

$$\langle \mathbf{y}, h_{lr} \rangle = \sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^m c_{ji} \langle h_{ji}, h_{lr} \rangle, \quad l = 1, 2, \dots, m, \quad r = 0, 1, \dots, n \quad (11.2)$$

إذن يصبح لدينا

$$\mathbf{C}^T \langle \mathbf{H}(x), \mathbf{H}(x) \rangle = \langle \mathbf{y}(x), \mathbf{H}(x) \rangle \quad (12.2)$$

حيث

$$\langle \mathbf{y}(x), \mathbf{H}(x) \rangle = \int_0^1 \mathbf{y}(x) \mathbf{H}^T(x) dx = [\langle \mathbf{y}, h_{10} \rangle, \langle \mathbf{y}, h_{11} \rangle, \dots, \langle \mathbf{y}, h_{mn} \rangle] \quad (13.2)$$

من خلال (12.2) و الخاصية (1.1.2) نحصل على:

$$\mathbf{C}^T = \langle \mathbf{y}(x), \mathbf{H}(x) \rangle = [\langle \mathbf{y}(x), h_{10} \rangle, \dots, \langle \mathbf{y}(x), h_{mn} \rangle]$$

أي:

$$\mathbf{C} = [\langle \mathbf{y}(x), h_{10} \rangle, \dots, \langle \mathbf{y}(x), h_{mn} \rangle]^T \quad (14.2)$$

إذن:

$$c_{ji} = \langle \mathbf{y}(x), h_{ji}(x) \rangle, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (15.2)$$

حيث $\langle \cdot, \cdot \rangle$ الجداء السلمي المعرف على $L^2[0, 1]$.

3.1.2 دراسة التقارب

توطئة 1.1.2. [1]

لتكن $f \in C^{(n+1)}[0, 1]$ دالة قابلة للتفاضل باستمرار $n + 1$ مرة، حيث $f = \sum_{j=1}^m f_j$ و

$$j = 1, 2, \dots, m, \quad S_j = \text{Span}\{h_{j0}(x), h_{j1}(x), \dots, h_{jn}(x)\}$$

إذا كان $\mathbf{C}_j^T \mathbf{H}_j(x)$ هو أحسن تقريب للدالة f_j في S_j ، فإن $\mathbf{C}^T \mathbf{H}(x)$ هو تقريب للدالة f ، ويحقق المتراجحة التالية:

$$\|f - \mathbf{C}^T \mathbf{H}(x)\|_2 \leq \frac{\gamma}{m^{n+1}(n+1)!\sqrt{2n+3}}, \quad \gamma = \max_{x \in [0,1]} |f^{(n+1)}(x)|. \quad (16.2)$$

برهان. [1]

لنشر الدالة $f_j(x)$ حسب سلسلة تايلور كما يلي:

$$\tilde{f}_j(x) = f_j\left(\frac{j-1}{m}\right) + f_j'\left(\frac{j-1}{m}\right)\left(x - \frac{j-1}{m}\right) + \dots + f_j^{(n)}\left(\frac{j-1}{m}\right)\frac{\left(x - \frac{j-1}{m}\right)^n}{n!},$$

$$\frac{j-1}{m} \leq x < \frac{j}{m}$$

لدينا

$$|f_j(x) - \tilde{f}_j(x)| \leq |f^{(n+1)}(\eta)| \frac{\left(x - \frac{j-1}{m}\right)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \eta \in \left[\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}\right), \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (17.2)$$

بما أن $\mathbf{C}_j^T \mathbf{H}_j(x)$ هو أحسن تقريب للدالة f_j في S_j و $f_j \in S_j$ ، فإنه باستخدام (17.2) نحصل على:

$$\begin{aligned} \|f_j - \mathbf{C}_j^T \mathbf{H}_j(x)\|_2^2 &\leq \|f_j - \tilde{f}_j\|^2 = \int_{\frac{j-1}{m}}^{\frac{j}{m}} |f_j(x) - \tilde{f}_j(x)|^2 dx \\ &\leq \int_{\frac{j-1}{m}}^{\frac{j}{m}} \left[\frac{|f^{(n+1)}(\eta)(x - j - 1/m)^{n+1}|}{(n+1)!} \right]^2 dx \\ &\leq \left[\frac{\gamma}{(n+1)!} \right]^2 \int_{\frac{j-1}{m}}^{\frac{j}{m}} \left(x - \frac{j-1}{m}\right)^{2n+2} dx \\ &= \left[\frac{\gamma}{(n+1)!} \right]^2 \frac{1}{m^{2n+3}(2n+3)}. \end{aligned}$$

إذن:

$$\|f - \mathbf{C}^T \mathbf{H}(x)\|_2^2 \leq \sum_{j=1}^m \|f_j - \mathbf{C}_j^T \mathbf{H}_j(x)\|_2^2 \leq \frac{\gamma^2}{m^{2n+2} [(n+1)!]^2 (2n+3)}. \quad (18.2)$$

□

و بأخذ الجذر التربيعي نحصل على المطلوب.

2.2 مصفوفات العمليات

1.2.2 مصفوفة العمليات لنتائج الجداء

لتكن $\tilde{\mathbf{C}}$ مصفوفة العمليات لنتائج الجداء (the operational matrix of the product) من الرتبة $m(n+1) \times m(n+1)$ والتي نجدها بإستخدام الصيغة العامة التالية:

$$\mathbf{C}^T \mathbf{H}(x) \mathbf{H}^T(x) \approx \mathbf{H}^T(x) \tilde{\mathbf{C}} \quad (19.2)$$

بالإعتماد على (7.2) و (3.2) نجد:

$$\mathbf{C}^T \mathbf{H}(x) \mathbf{H}^T(x) \approx \mathbf{C}^T \mathbf{H}(x) \tilde{\mathbf{T}}^T(x) \tilde{\mathbf{A}}^T \quad (20.2)$$

$$= [\mathbf{C}^T \mathbf{H}(x), x \mathbf{C}^T \mathbf{H}(x), \dots, x^n \mathbf{C}^T \mathbf{H}(x), \mathbf{C}^T \mathbf{H}(x), \dots] \tilde{\mathbf{A}}^T \quad (21.2)$$

$$= \left[\sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^m \mathbf{c}_{ji} h_{ji}(x), \dots, \sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^m x^n \mathbf{c}_{ji} h_{ji}(x) \right] \tilde{\mathbf{A}}^T \quad (22.2)$$

الآن نقوم بتقريب كل الدوال $x^k h_{ji}(x)$ $i, k = 0, 1, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$ من خلال (7.2) يكون لدينا

$$x^k h_{ji}(x) \approx \sum_{l=1}^m \sum_{r=0}^n \nu_{k,ji}^{lr} h_{lr}(x) = \nu_{k,ji}^T \mathbf{H}(x), \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (23.2)$$

حيث

$$\nu_{k,ji} = \left[\nu_{k,ji}^{10}, \nu_{k,ji}^{11}, \dots, \nu_{k,ji}^{1n}, \nu_{k,ji}^{20}, \nu_{k,ji}^{21}, \dots, \nu_{k,ji}^{mn} \right]^T$$

و عناصر الشعاع $\nu_{k,ji}$ هي:

$$\nu_{k,ji} = \int_0^1 x^k h_{ji}(x) \mathbf{H}(x) dx \quad (24.2)$$

$$= \left[\int_0^1 x^k h_{ji}(x) h_{10}(x) dx, \dots, \int_0^1 x^k h_{ji}(x) h_{mn}(x) dx \right]^T \quad (25.2)$$

و بالتالي

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^m \mathbf{c}_{ji} x^k h_{ji}(x) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^m \mathbf{c}_{ji} \left(\sum_{l=1}^m \sum_{r=0}^n \nu_{k,ji}^{lr} h_{lr}(x) \right) \quad (26.2)$$

$$= \sum_{r=0}^n \sum_{l=1}^m h_{lr}(x) \left(\sum_{j=1}^m \sum_{i=0}^n \mathbf{c}_{ji} \nu_{k,ji}^{lr} \right) \quad (27.2)$$

$$= \mathbf{H}^T(x) \left[\sum_{j=1}^m \sum_{i=0}^n \mathbf{c}_{ji} \nu_{k,ji}^{10}, \dots, \sum_{j=1}^m \sum_{i=0}^n \mathbf{c}_{ji} \nu_{k,ji}^{mn} \right]^T \quad (28.2)$$

$$= \mathbf{H}^T(x) \left[\nu_{k,10}, \nu_{k,11}, \dots, \nu_{k,mn} \right] \mathbf{C} \quad (29.2)$$

$$= \mathbf{H}^T(x) \mathbf{W}_k \mathbf{C} \quad (30.2)$$

حيث $\mathbf{W}_k = [\nu_{k,10}, \nu_{k,11}, \dots, \nu_{k,mn}]$ مصفوفة من الرتبة $m(n+1) \times m(n+1)$.
 لتكن $\mathbf{V} = [\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_m]$ مصفوفة من الرتبة $m(n+1) \times m(n+1)$ ، حيث
 $\mathbf{V}_j = [\mathbf{W}_0 \mathbf{C}, \mathbf{W}_1 \mathbf{C}, \dots, \mathbf{W}_n \mathbf{C}]$ مصفوفة من الرتبة $(n+1) \times m(n+1)$.
 بتعويض (30.2) في (22.2) نحصل على:

$$\mathbf{C}^T \mathbf{H}(x) \mathbf{H}^T(x) \approx \mathbf{H}^T(x) \mathbf{V} \tilde{\mathbf{A}}^T \quad (31.2)$$

أي:

$$\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{V} \tilde{\mathbf{A}}^T \quad (32.2)$$

الآن إذا كتبنا \mathbf{V} على الشكل:

$$\mathbf{V} = \int_0^1 \mathbf{J} \mathbf{T} dx$$

حيث \mathbf{T} و \mathbf{J} مصفوفتين من الرتبة $m(n+1) \times m(n+1)$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} h_{10} h_{10} \mathbf{c}_{10} & h_{10} h_{11} \mathbf{c}_{11} & \cdots & h_{10} h_{mn} \mathbf{c}_{mn} \\ h_{11} h_{10} \mathbf{c}_{10} & h_{11} h_{11} \mathbf{c}_{11} & \cdots & h_{11} h_{mn} \mathbf{c}_{mn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{mn} h_{10} \mathbf{c}_{10} & h_{mn} h_{11} \mathbf{c}_{11} & \cdots & h_{mn} h_{mn} \mathbf{c}_{mn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{T}}^T(x) \\ \tilde{\mathbf{T}}^T(x) \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{T}}^T(x) \end{bmatrix}$$

فإننا نحصل على:

$$\tilde{\mathbf{C}} = \int_0^1 \mathbf{J} \mathbf{T} \tilde{\mathbf{A}}^T dx \quad (33.2)$$

من خلال (3.2) لدينا $\tilde{\mathbf{T}}(x) = \tilde{\mathbf{A}}^{-1}\mathbf{H}(x)$ والتي بتعويضها في (33.2) نجد:

$$\tilde{\mathbf{C}} = \int_0^1 \mathbf{J}\mathbf{U} \quad (34.2)$$

حيث \mathbf{U} مصفوفة من الرتبة $m(n+1) \times m(n+1)$.

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^T(x) \\ \mathbf{H}^T(x) \\ \vdots \\ \mathbf{H}^T(x) \end{bmatrix}$$

من خلال خواص دوال المزج نستنتج أن $\tilde{\mathbf{C}}$ هي مصفوفة من الشكل:

$$\tilde{\mathbf{C}} = \text{diag} [\tilde{\mathbf{C}}_1, \tilde{\mathbf{C}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{C}}_j, \dots, \tilde{\mathbf{C}}_m] \quad (35.2)$$

حيث $\tilde{\mathbf{C}}_j = [c_{lr}^j]$ هي مصفوفات متناظرة من الرتبة $(n+1) \times (n+1)$.

$$c_{lr}^j = \int_{\frac{j-1}{m}}^{\frac{j}{m}} \left(h_{j(l-1)}(x) h_{j(r-1)}(x) \sum_{i=0}^n c_{ji} h_{ji}(x) \right) dx, \quad l, r = 1, 2, \dots, n+1. \quad (36.2)$$

2.2.2 مصفوفة العمليات للاشتقاق

لتكن \mathbf{D} مصفوفة العمليات للاشتقاق (the operational matrix of differentiation) من الرتبة $m(n+1) \times m(n+1)$ حيث:

$$\frac{d}{dx} \mathbf{H}(x) = \mathbf{D}\mathbf{H}(x), \quad (37.2)$$

من خلال (3.2) نجد:

$$\frac{d}{dx} \mathbf{H}(x) = \frac{d}{dx} (\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{T}}(x)) = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{V}}(x)$$

حيث

$$\tilde{\mathbf{V}}(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1(x) \\ \mathbf{v}_2(x) \\ \vdots \\ \mathbf{v}_m(x) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_j(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2x \\ \vdots \\ nx^{n-1} \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

الآن نكتب $\tilde{V}(x)$ على الشكل:

$$\tilde{V}(x) = \tilde{Q}\tilde{T}(x)$$

حيث $\tilde{Q} = \text{diag}[Q, Q, \dots, Q, \dots, Q]$ مصفوفة من الرتبة $m(n+1) \times m(n+1)$ و Q مصفوفة جزئية من الرتبة $(n+1) \times (n+1)$.

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n & 0 \end{bmatrix}$$

و بالتالي فإن:

$$\frac{d}{dx}\mathbf{H}(x) = \tilde{A}\tilde{Q}\tilde{T}(x) \quad (38.2)$$

من خلال (3.2) لدينا $\tilde{T}(x) = \tilde{A}^{-1}\mathbf{H}(x)$ والتي بتعويضها في (38.2) نجد:

$$\frac{d}{dx}\mathbf{H}(x) = \tilde{A}\tilde{Q}\tilde{T}(x) = \tilde{A}\tilde{Q}\tilde{A}^{-1}\mathbf{H}(x),$$

إذن:

$$\mathbf{D} = \tilde{A}\tilde{Q}\tilde{A}^{-1}. \quad (39.2)$$

وبصفة عامة، نجد:

$$\frac{d^k}{dx^k}\mathbf{H}(x) = \mathbf{D}^k\mathbf{H}(x), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (40.2)$$

الفصل الثالث

الحل العددي للمعادلة التفاضلية التكاملية لفريدهولم غير الخطية

1.3 حل عددي للمعادلة التفاضلية التكاملية لفريدهولم غير الخطية باستخدام دوال المزج

سنشرح في هذا الجزء، طريقة تحويل المعادلة التفاضلية التكاملية لفريدهولم غير الخطية من الرتبة s إلى جملة معادلات جبرية غير خطية، التي بحلها نجد الحل العددي. الطريقة هي كالتالي:

1. تقريب $y(x)$:

$$y(x) \approx \mathbf{C}^T \mathbf{H}(x) \quad (1.3)$$

2. تقريب $y^{(i)}(x)$ ، $i = 0, 1, 2, \dots, s$:

$$y^{(i)}(x) \approx \mathbf{C}^T (\mathbf{H}(x))^{(i)} = \mathbf{C}^T \mathbf{D}^i \mathbf{H}(x), \quad i = 0, 1, 2, \dots, s, \quad (2.3)$$

حيث \mathbf{D} المصفوفة المعرفة في (39.2).

3. تقريب $k(x, t) \in L^2([0, 1] \times [0, 1])$:

$$k(x, t) \approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{l=0}^n \sum_{r=0}^n k_{lr}^{ij} h_{il}(x) h_{jr}(t) = \mathbf{H}^T(x) \mathbf{K} \mathbf{H}(t), \quad (3.3)$$

حيث $K = [k^{ij}]$ مصفوفة من الرتبة $m(n+1) \times m(n+1)$ و k^{ij} مصفوفة جزئية عناصرها كما يلي:

$$k_{lr}^{ij} = \int_{\frac{i-1}{m}}^{\frac{i}{m}} \int_{\frac{j-1}{m}}^{\frac{j}{m}} k(x, t) h_{i(l-1)}(x) h_{j(r-1)}(t) dx dt \quad (4.3)$$

حيث $l, r = 1, 2, \dots, n+1$, $i, j = 1, 2, \dots, m$

4. تقريب $y^q(x)$:

بالإعتماد على (7.2) و (19.2)، نحصل على:

$$y^2(x) = [C^T H(x)]^2 = C^T H(x) H^T(x) C = H^T(x) \tilde{C} C,$$

$$y^3(x) = C^T H(x) [C^T H(x)]^2 = C^T H(x) H^T(x) \tilde{C} C = H^T(x) \tilde{C} \tilde{C} C = H^T(x) (\tilde{C})^2 C,$$

ومنه نستنتج أن:

$$y^q(x) = H^T(x) (\tilde{C})^{q-1} C. \quad (5.3)$$

5. تقريب $g(x)$:

$$g(x) \approx G^T H(x), \quad (6.3)$$

و نعين عناصر الشعاع G بنفس الطريقة المستخدمة في تعيين عناصر (14.2) أي:

$$g_{ji} = \langle g(x), h_{ji}(x) \rangle, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

6. تقريب $p_i(x)$:

$$p_i(x) \approx P_i^T H(x), \quad i = 0, 1, 2, \dots, s, \quad (7.3)$$

و نعين عناصر الشعاع P_i بنفس الطريقة المستخدمة في تعيين عناصر (14.2) أي:

$$p_i^{lr} = \langle p_i(x), h_{lr}(x) \rangle, \quad r = 0, 1, \dots, n, \quad l = 1, 2, \dots, m$$

الآن بتعويض المعادلات (2.3)، (3.3)، (5.3)، (6.3) و (7.3) في المعادلة (1)، نحصل على:

$$\sum_{i=0}^s P_i^T H(x) H^T(x) (D^i)^T C = H^T(x) G + \lambda \int_0^1 H^T(x) K H(t) H^T(t) (\tilde{C})^{q-1} C dt. \quad (8.3)$$

و بالإعتماد على (19.2) و (6.2)، يصبح لدينا:

$$\sum_{i=0}^s \mathbf{H}^T(x) \tilde{\mathbf{P}}_i (\mathbf{D}^i)^T \mathbf{C} = \mathbf{H}^T(x) \mathbf{G} + \lambda \mathbf{H}^T(x) \mathbf{K} (\tilde{\mathbf{C}})^{q-1} \mathbf{C}, \quad (9.3)$$

حيث $i = 0, 1, \dots, n$, $\tilde{\mathbf{P}}_i = \text{diag} [\tilde{\mathbf{P}}_1^i, \tilde{\mathbf{P}}_2^i, \dots, \tilde{\mathbf{P}}_m^i]$ مصفوفة العمليات لناتج الجداء من الرتبة $(n+1) \times (n+1)$ و $j = 1, 2, \dots, m$, $\tilde{\mathbf{P}}_j^i = [\mathbf{p}_{lr}^{ji}]$ مصفوفة متناظرة من الرتبة $m(n+1) \times m(n+1)$ وعناصرها كما يلي:

$$\mathbf{p}_{lr}^{ji} = \int_{\frac{j-1}{m}}^{\frac{j}{m}} \left(h_{j(l-1)}(x) h_{j(r-1)}(x) \sum_{k=0}^n \mathbf{p}_i^{jk} h_{jk}(x) \right) dx, \quad l, r = 1, 2, \dots, n+1.$$

و بعد التبسيط نحصل على:

$$\sum_{i=0}^s \tilde{\mathbf{P}}_i (\mathbf{D}^i)^T \mathbf{C} - \lambda \mathbf{K} (\tilde{\mathbf{C}})^{q-1} \mathbf{C} = \mathbf{G}. \quad (10.3)$$

المعادلة (10.3) هي جملة معادلات جبرية غير خطية يمكن حلها باستخدام أحد الطرق التكرارية المعروفة كطريقة نيوتن. عند تعيين \mathbf{C} نعوضها في المعادلة (1.3) فنحصل على الحل العددي.

2.3 تطبيق عددي

في ما يلي نتأج عددياً لبعض الأمثلة التي تثبت دقة و تقارب الطريقة المقترحة. و لقد قمنا بمقارنة الأخطاء المطلقة الناشئة عن هذه الطريقة مع طرق عددياً أخرى في [3, 4, 15, 16]. أنجزت الحسابات المرفقة بهذه الأمثلة بإستعمال المتلاب.

مثال 1.2.3

لتكن المعادلة التفاضلية التكاملية لفريدهولم غير الخطية من الرتبة الأولى [1, 15, 16]

$$y'(x) = 1 - \frac{1}{3}x + \int_0^1 xy^2(t)dt, \quad 0 \leq x < 1 \quad (11.3)$$

التي تحقق الشرط الابتدائي:

$$y(0) = 0. \quad (12.3)$$

في هذا المثال:

$$q = 2 \quad \text{و} \quad k(x, t) = x, \quad \lambda = 1, \quad g(x) = 1 - \frac{1}{3}x, \quad p_1 = 1, \quad p_0 = 0$$

المعادلة المصفوفية (10.3) لهذا المثال هي:

$$\tilde{\mathbf{P}}_1 \mathbf{D}^T \mathbf{C} - \mathbf{K}(\tilde{\mathbf{C}}) \mathbf{C} = \mathbf{G}. \quad (13.3)$$

حيث، من أجل $n = 1$ و $m = 2$ لدينا:

$$\tilde{\mathbf{P}}_1 = \mathbf{I}, \quad \mathbf{D}^T = \begin{bmatrix} -3 & 3\sqrt{3} & 0 & 0 \\ -\sqrt{3} & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3\sqrt{3} \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{10} \\ \mathbf{c}_{11} \\ \mathbf{c}_{20} \\ \mathbf{c}_{21} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1/16 & \sqrt{3}/48 & 1/16 & \sqrt{3}/48 \\ \sqrt{3}/16 & 1/16 & \sqrt{3}/16 & 1/16 \\ 1/4 & \sqrt{3}/12 & 1/4 & \sqrt{3}/12 \\ \sqrt{3}/8 & 1/8 & \sqrt{3}/8 & 1/8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 17\sqrt{6}/72 \\ 5\sqrt{2}/24 \\ 7\sqrt{6}/36 \\ \sqrt{2}/6 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3\sqrt{6}\mathbf{c}_{10} - \sqrt{2}\mathbf{c}_{11} & -\sqrt{2}\mathbf{c}_{10} + \sqrt{6}\mathbf{c}_{11} & 0 & 0 \\ -\sqrt{2}\mathbf{c}_{10} + \sqrt{6}\mathbf{c}_{11} & \sqrt{6}\mathbf{c}_{10} + 5\sqrt{2}\mathbf{c}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3\sqrt{6}\mathbf{c}_{20} - \sqrt{2}\mathbf{c}_{21} & -\sqrt{2}\mathbf{c}_{20} + \sqrt{6}\mathbf{c}_{21} \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}\mathbf{c}_{20} + \sqrt{6}\mathbf{c}_{21} & \sqrt{6}\mathbf{c}_{20} + 5\sqrt{2}\mathbf{c}_{21} \end{bmatrix}$$

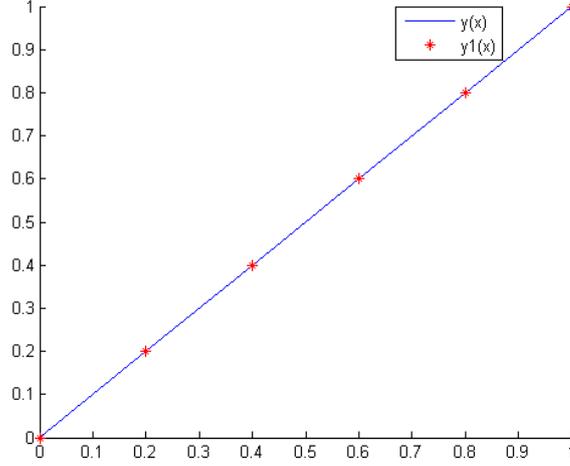
المعادلة (13.3) هي معادلات جبرية غير خطية نحلها بالإعتماد على الشرط الابتدائي (12.3) أي:

$$\sqrt{6}\mathbf{c}_{10} - \sqrt{2}\mathbf{c}_{11} = 0$$

فحصل على

$$\mathbf{c}_{21} = \sqrt{2}/4 \quad \text{و} \quad \mathbf{c}_{20} = \sqrt{6}/6, \quad \mathbf{c}_{11} = \sqrt{2}/8, \quad \mathbf{c}_{10} = \sqrt{6}/24$$

وبتعويض هذه القيم في (1.3) نجد $y(x) = x$ والذي هو مطابق للحل الحقيقي. كذلك الطريقة [15] تعطينا الحل الحقيقي، بينما الطريقة [16] قدر أكبر خطأ مطلق فيها بالقيمة $1.5217E - 03$.



شكل 1.3: الحل الحقيقي $y(x)$ و الحل التقريبي $y_1(x)$ بالنسبة للمثال 1.2.3.

مثال 2.2.3

لتكن المعادلة التفاضلية التكاملية لفريدهولم غير الخطية من الرتبة الأولى [15, 4, 1]

$$xy'(x) - y(x) = -\frac{1}{6} + \frac{4}{5}x^2 + \int_0^1 (x^2 + t)y^2(t)dt, \quad 0 \leq x < 1, \quad (14.3)$$

ذات الشرط الابتدائي:

$$y(0) = 0. \quad (15.3)$$

في هذا المثال:

$$q = 2 \quad \text{و} \quad k(x, t) = x^2 + t, \quad \lambda = 1, \quad g(x) = -\frac{1}{6} + \frac{4}{5}x^2, \quad p_1 = x, \quad p_0 = -1$$

المعادلة المصفوفية (10.3) لهذا المثال هي:

$$(\tilde{\mathbf{P}}_0 + \tilde{\mathbf{P}}_1 \mathbf{D}^T) \mathbf{C} - \mathbf{K}(\tilde{\mathbf{C}}) \mathbf{C} = \mathbf{G}, \quad (16.3)$$

حيث، من أجل $n = 2$ و $m = 2$ لدينا:

$$\tilde{\mathbf{P}}_0 = -\mathbf{I}, \quad \tilde{\mathbf{P}}_1 = \begin{bmatrix} 1/12 & \sqrt{15}/60 & -\sqrt{5}/120 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{15}/60 & 1/4 & \sqrt{3}/24 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{5}/120 & \sqrt{3}/24 & 5/12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7/12 & \sqrt{15}/60 & -\sqrt{5}/120 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{15}/60 & 3/4 & \sqrt{3}/24 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{5}/120 & \sqrt{3}/24 & 11/12 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}^T = \begin{bmatrix} -5 & 7\sqrt{15}/3 & -2\sqrt{5} & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{15}/3 & -3 & 14\sqrt{3}/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8\sqrt{3}/3 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 7\sqrt{15}/3 & -2\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{15}/3 & -3 & 14\sqrt{3}/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8\sqrt{3}/3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{10} \\ \mathbf{c}_{11} \\ \mathbf{c}_{12} \\ \mathbf{c}_{20} \\ \mathbf{c}_{21} \\ \mathbf{c}_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} -11\sqrt{10}/450 \\ -\sqrt{6}/90 \\ \sqrt{2}/180 \\ 23\sqrt{10}/900 \\ 13\sqrt{6}/180 \\ 19\sqrt{2}/180 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1/24 & \sqrt{15}/45 & 7\sqrt{5}/240 & 13/72 & \sqrt{15}/20 & 41\sqrt{5}/720 \\ \sqrt{15}/72 & 1/12 & 5\sqrt{3}/144 & \sqrt{15}/24 & 1/16 & \sqrt{3}/16 \\ \sqrt{5}/48 & 5\sqrt{3}/144 & 1/24 & 7\sqrt{5}/144 & \sqrt{3}/16 & 5/72 \\ 7/48 & 31\sqrt{15}/720 & \sqrt{15}/20 & 41/144 & 17\sqrt{15}/240 & 7\sqrt{5}/90 \\ 7\sqrt{15}/144 & 3/16 & 5\sqrt{3}/72 & 11\sqrt{15}/144 & 13/48 & 7\sqrt{3}/72 \\ \sqrt{5}/16 & 11\sqrt{3}/144 & 1/12 & 13\sqrt{5}/144 & 5\sqrt{3}/48 & 1/9 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{c}}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbf{c}}_2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{c}}_j = \begin{bmatrix} \frac{5\sqrt{10}}{7}\mathbf{c}_{j0} - \frac{5\sqrt{6}}{21}\mathbf{c}_{j1} & -\frac{5\sqrt{6}}{21}\mathbf{c}_{j0} + \frac{11\sqrt{10}}{35}\mathbf{c}_{j1} & \frac{\sqrt{2}}{7}\mathbf{c}_{j0} - \frac{8\sqrt{30}}{105}\mathbf{c}_{j1} \\ +\frac{\sqrt{2}}{7}\mathbf{c}_{j2} & -\frac{8\sqrt{30}}{105}\mathbf{c}_{j2} & +\frac{3\sqrt{10}}{35}\mathbf{c}_{j2} \\ -\frac{5\sqrt{6}}{21}\mathbf{c}_{j0} + \frac{11\sqrt{10}}{35}\mathbf{c}_{j1} & \frac{11\sqrt{10}}{35}\mathbf{c}_{j0} + \frac{3\sqrt{6}}{7}\mathbf{c}_{j1} & -\frac{8\sqrt{30}}{105}\mathbf{c}_{j0} + \frac{\sqrt{2}}{7}\mathbf{c}_{j1} \\ -\frac{8\sqrt{30}}{105}\mathbf{c}_{j2} & +\frac{\sqrt{2}}{7}\mathbf{c}_{j2} & +\frac{5\sqrt{6}}{21}\mathbf{c}_{j2} \\ \frac{\sqrt{2}}{7}\mathbf{c}_{j0} - \frac{8\sqrt{30}}{105}\mathbf{c}_{j1} & -\frac{8\sqrt{30}}{105}\mathbf{c}_{j0} + \frac{\sqrt{2}}{7}\mathbf{c}_{j1} & \frac{3\sqrt{10}}{35}\mathbf{c}_{j0} + \frac{5\sqrt{6}}{21}\mathbf{c}_{j1} \\ +\frac{3\sqrt{10}}{35}\mathbf{c}_{j2} & +\frac{5\sqrt{6}}{21}\mathbf{c}_{j2} & +\frac{13\sqrt{2}}{7}\mathbf{c}_{j2} \end{bmatrix}$$

$j = 1, 2$

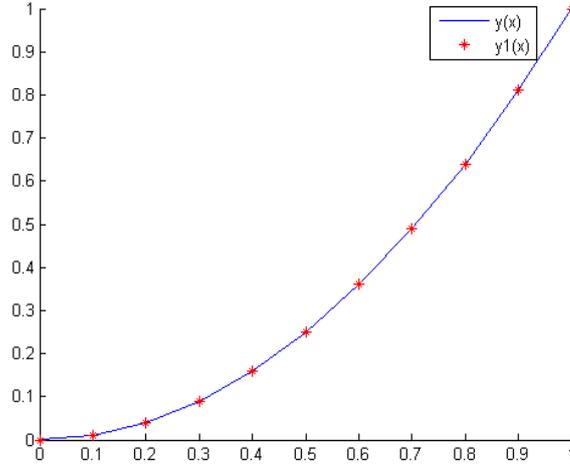
المعادلة (16.3) هي معادلات جبرية غير خطية نحلها بالإعتماد على الشرط الابتدائي (15.3) أي:

$$\sqrt{10}\mathbf{c}_{10} - \sqrt{6}\mathbf{c}_{11} + \sqrt{2}\mathbf{c}_{12} = 0$$

فحصل على

$$c_{21} = \sqrt{6}/8, \quad c_{20} = \sqrt{10}/15, \quad c_{12} = \sqrt{2}/24, \quad c_{11} = \sqrt{6}/48, \quad c_{10} = \sqrt{10}/240, \\ c_{22} = \sqrt{2}/6$$

وبتعويض هذه القيم في (7.2) نجد $y(x) = x^2$ والذي هو نفسه الحل الحقيقي. كذلك الطريقة [15] تعطينا الحل الحقيقي، بينما الطريقة [4] تعطينا الحل التقريبي و قدر أكبر خطأ مطلق فيها بالقيمة $1.0000E - 10$.



شكل 2.3: الحل الحقيقي $y(x)$ والحل التقريبي $y_1(x)$ بالنسبة للمثال 2.2.3.

مثال 3.2.3

لتكن المعادلة التفاضلية التكاملية لفريدهولم غير الخطية من الرتبة الثانية [1, 15]

$$y''(x) + xy'(x) - xy(x) = e^x - \sin(x) + \int_0^1 \sin xe^{-2t} y^2(t) dt, \quad 0 \leq x < 1, \quad (17.3)$$

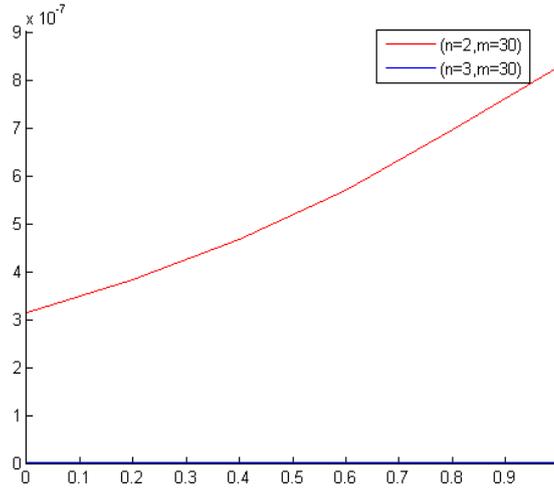
التي تحقق الشروط الابتدائية:

$$y(0) = y'(0) = 1. \quad (18.3)$$

الحل الحقيقي لهذه المسألة هو $y(x) = e^x$. نحل هذا المثال بإستخدام الطريقة المقترحة وذلك بأخذ $(n = 2, m = 30)$ و $(n = 3, m = 30)$. قيم الأخطاء المطلقة الناشئة عن كل من الطريقة المقترحة و الطريقة [15] مدونة في الجدول (1.3). من خلال هذا الجدول، نلاحظ أن النتائج المتحصل عليها بالطريقة المقترحة حتى من خلال قيم صغيرة للعدد n أحسن من المتحصل عليها بالطريقة [15].

الطريقة المقترحة		طريقة [15]	x
m=30 ,n=3	m=30 ,n=2	n=7	
4.0173E-010	3.1309E-007	3.2038E-009	0.0
4.9068E-010	3.8241E-007	7.1841E-010	0.2
5.9932E-010	4.6707E-007	1.4151E-010	0.4
7.3201E-010	5.7048E-007	4.0671E-011	0.6
8.9407E-010	6.9679E-007	9.1044E-010	0.8
1.4907E-010	8.2709E-007	3.7002E-009	1.0

جدول 1.3: الأخطاء المطلقة الناشئة عن كل من الطريقة المقترحة و الطريقة [15] بالنسبة للمثال 3.2.3.



شكل 3.3: الأخطاء المطلقة الناشئة عن الطريقة المقترحة بالنسبة للمثال 3.2.3.

مثال 4.2.3

لتكن المعادلة التفاضلية التكاملية لفريدهولم غير الخطية [15, 3, 1]

$$y'(x) + y(x) = \frac{1}{2}(e^{-2} - 1) + \int_0^1 y^2(t)dt, \quad 0 \leq x < 1, \quad (19.3)$$

التي تحقق الشرط الابتدائي:

$$y(0) = 1. \quad (20.3)$$

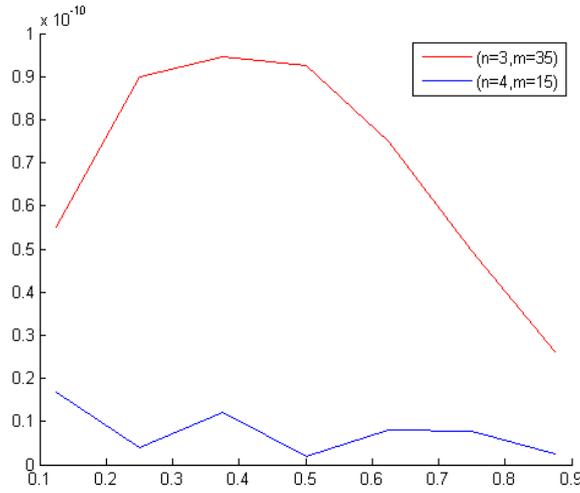
الحل الحقيقي لهذه المسألة هو $y(x) = e^{-x}$. الجدول (2.3) يوضح المقارنة بين كل من الطريقة المقترحة و الطريقة [3] و الطريقة [15]. أكبر الأخطاء المطلقة الناشئة عن الطريقة المقترحة من أجل بعض القيم المختلفة للعددين n و m مدونة في الجدولين (3.3) و (4.3). نلاحظ من خلال الجدولين (3.3) و (4.3)، أنه عند تثبيت قيمة n ، وزيادة قيمة m ، الدقة تزداد، كذلك عند تثبيت m ، وزيادة قيمة n ، الدقة تزداد.

الطريقة المقترحة		طريقة [15] n=7	طريقة [3] عدد نقاط التجميع N=128	x
m=15 ,n=4	m=35 ,n=3			
1.6710E-011	5.5200E-011	2.4509E-010	3.7591E-007	0.125
3.9705E-012	8.9982E-011	1.0202E-010	6.6413E-007	0.250
1.2126E-011	9.4606E-011	1.6139E-010	8.6917E-007	0.375
1.8312E-012	9.2457E-001	3.2362E-010	1.0020E-006	0.500
8.1299E-012	7.4991E-011	1.9197E-010	1.0757E-006	0.625
7.7237E-012	4.9442E-011	6.6120E-011	1.1029E-006	0.750
2.5547E-012	2.6083E-011	2.2417E-010	1.0944E-006	0.875

جدول 2.3: الأخطاء المطلقة الناشئة عن كل من الطريقة المقترحة و الطريقة [3] و الطريقة [15] بالنسبة للمثال 4.2.3.

m				n
15	10	5	1	
3.8490E-02	5.7735E-02	1.1547E-01	5.7735E-01	0
9.9381E-04	2.2361E-03	8.9443E-03	2.2361E-01	1
1.8665E-05	6.2994E-05	5.0395E-04	6.2994E-02	2
2.7435E-07	1.3889E-06	2.2222E-05	1.3889E-02	3
3.3088E-09	2.5126E-08	8.0403E-07	2.5126E-03	4
3.3818E-11	3.8521E-10	2.4653E-08	3.8521E-04	5
2.9984E-13	5.1230E-12	6.5574E-10	5.1230E-05	6

جدول 3.3: أكبر الأخطاء المطلقة الناشئة عن الطريقة المقترحة من أجل قيم مختلفة للعددين m و n بالنسبة للمثال 4.2.3.



شكل 4.3: الأخطاء المطلقة الناشئة عن الطريقة المقترحة من أجل $(n = 3, m = 35)$ و $(n = 4, m = 35)$ بالنسبة للمثال 4.2.3.

m				n
35	30	25	20	
1.6496E-02	1.9245E-02	2.3094E-02	2.8868E-02	0
1.8254E-04	2.4845E-04	3.5777E-04	5.5902E-04	1
1.4693E-06	2.3331E-06	4.0316E-06	7.8743E-06	2
9.2554E-09	1.7147E-08	3.5556E-08	8.6806E-08	3
4.7839E-11	1.0340E-10	2.5729E-10	7.8519E-10	4
2.0955E-13	5.2841E-13	1.5778E-12	6.0189E-12	5
7.9625E-16	2.3425E-15	8.3935E-15	4.0023E-14	6

جدول 4.3: أكبر الأخطاء المطلقة الناشئة عن الطريقة المقترحة من أجل قيم مختلفة للعددين m و n بالنسبة للمثال 4.2.3.

مثال 5.2.3.

لتكن المعادلة التفاضلية التكاملية لفريدهولم غير الخطية من الرتبة الأولى $[16, 15, 1]$

$$y'(x) = e^x - \frac{1}{5}e^{-x^2}(e^5 - 1) + \int_0^1 e^{2t-x^2}y^3(t)dt, \quad 0 \leq x < 1, \quad (21.3)$$

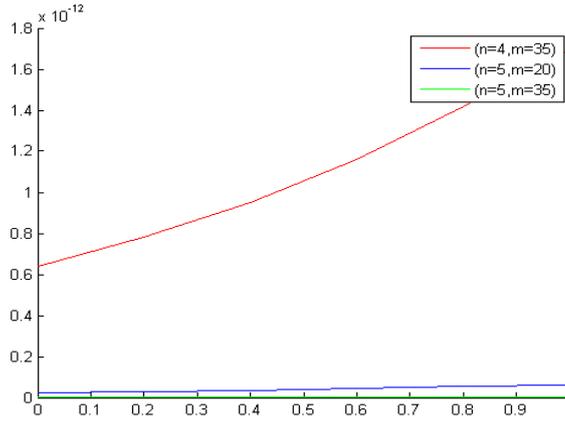
التي تحقق الشرط الابتدائي:

$$y(0) = 1. \quad (22.3)$$

الحل الحقيقي لهذه المسألة هو $y(x) = e^{-x}$. قيم الأخطاء المطلقة الناشئة عن كل من الطريقة المقترحة من أجل $(n = 4, m = 35)$ ، $(n = 5, m = 20)$ و $(n = 5, m = 35)$ والطريقة [15] مدونة في الجدول (5.3). النتائج المتحصل عليها بالطريقة المقترحة بأخذ $n = 4$ كانت أحسن من المتحصل عليها بالطريقة [15] بأخذ $n = 9$. وبالتأكيد كلما إزدادت قيمة n الدقة تزداد. كذلك، قدرت أكبر قيمة خطأ مطلق ناشئة عن الطريقة [16] بالقيمة $3.7259E - 03$.

الطريقة المقترحة			الطريقة [15] n=9	x
m=35 ,n=5	m=20 ,n=5	m=35 ,n=4		
3.3307E-016	2.3981E-014	6.3793E-013	2.4740E-012	0.0
4.4409E-016	2.9310E-014	7.7915E-013	1.9780E-012	0.2
4.4507E-016	3.5749E-014	9.5146E-013	2.5981E-012	0.4
6.6613E-016	4.3743E-014	1.1622E-012	3.8940E-012	0.6
8.8818E-016	5.3735E-014	1.4198E-012	5.7709E-012	0.8
1.3232E-015	6.2617E-014	1.6898E-012	3.3360E-012	1.0

جدول 5.3: الأخطاء المطلقة الناشئة عن كل من الطريقة المقترحة و الطريقة [15] بالنسبة للمثال 5.2.3.



شكل 5.3: الأخطاء المطلقة الناشئة عن الطريقة المقترحة بالنسبة للمثال 5.2.3.

خاتمة

في هذه المذكرة، قمنا بعرض طريقة عددية لحل المعادلات التفاضلية التكاملية لفريدهولم غير الخطية وذلك باستخدام دوال مزج دوال القطع النبضية و كثيرات حدود برنشتاين المتعامدة والمتجانسة. ومن مزايا هذه الطريقة، الحصول على الحل التحليلي إذا كان الحل الحقيقي للمعادلة عبارة عن دالة كثير حدود، الحصول على دقة عالية حتى من خلال قيم صغيرة للعدد n ، شكل مصفوفة العمليات لنتائج الجداء \tilde{C} و مصفوفة العمليات للاشتقاق D حيث كلاهما يحتوي على العديد من العناصر الصفرية مما يساهم في ربح الوقت و تبسيط الحسابات. تم وضع مقارنة بين الطريقة المقترحة و بعض الطرق العددية الأخرى [3, 4, 15, 16]، حيث أظهرت النتائج العددية أن الطريقة المقدمة هي الأكثر كفاءة بالمقارنة مع بقية الطرق العددية الأخرى و ذلك بناء على الأمثلة التي إستخدمناها.

المراجع العلمية

- [1] S. H. Behiry, Solution of nonlinear Fredholm integro-differential equations using a hybrid of block pulse functions and normalized Bernstein polynomials, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 260 (2014) 258-265.
- [2] S. H. Behiry, H. Hashish, Wavelet methods for the numerical solution of Fredholm integro-differential equations, *International Journal of Applied Mathematics*, vol. 11, no. 1, pp. 27–35, 2002.
- [3] S. Islam, I. Aziz, and M. Fayyaz, A new approach for numerical solution of integro-differential equations via Haar wavelets, *International Journal of Computer Mathematics*, 2013.
- [4] Y. Ordokhani, An application of Walsh functions for Fredholm-Hammerstein integro-differential equations, *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, vol. 5, no. 22, pp. 1055–1063, 2010.
- [5] Sandeep Dixit, Rajesh K. Pandey, Sunil Kumar, On P. Singh, Solution of the generalized Abel integral equation by using almost Bernstein operational matrix, *American Journal of Computational Mathematics*, 2011, 1, 226-234.
- [6] Sh. S. Behzadi, S. Abbasbandy, T. Allahviranloo, and A. Yildirim, Application of homotopy analysis method for solving a class of nonlinear Volterra-Fredholm integro-differential equations, *The Journal of Applied Analysis and Computation*, vol. 2, no. 2, pp. 127–136, 2012.
- [7] S. H. Behiry and S. I. Mohamed, Solving high-order nonlinear Volterra-Fredholm integro-differential equations by differential transform method, *Natural Science*, vol. 4, no. 8, pp. 581–587, 2012.

- [8] K. Maleknejad, B. Basirat, and E. Hashemizadeh, Hybrid Legendre polynomials and block-pulse functions approach for nonlinear Volterra-Fredholm integro-differential equations, *Computers Mathematics with Applications*, vol. 61, no. 9, pp. 2821–2828, 2011.
- [9] R. Ezzati and S. Najafalizadeh, Application of Chebyshev polynomials for solving nonlinear Volterra-Fredholm integral equations system and convergence analysis, *Indian Journal of Science and Technology*, vol. 5, no. 2, pp. 2060–2064, 2012.
- [10] A. H. Bhrawy, E. Tohidi, and F. Soleymani, A new Bernoulli matrix method for solving high-order linear and nonlinear Fredholm integro-differential equations with piecewise intervals, *Applied Mathematics and Computation*, vol. 219, no. 2, pp. 482–497, 2012.
- [11] Z. H. Jiang and W. Schaufelberger, *Block Pulse Functions and Their Applications in Control Systems*, Springer, Berlin, Germany, 1992.
- [12] S. A. Yousefi, Z. Barikbin, and M. Dehghan, Ritz-Galerkin method with Bernstein polynomial basis for finding the product solution form of heat equation with non-classic boundary conditions, *International Journal of Numerical Methods for Heat Fluid Flow*, vol. 22, no. 1, pp. 39–48, 2012.
- [13] K. Maleknejad, E. Hashemizadeh, and B. Basirat, Computational method based on Bernstein operational matrices for nonlinear Volterra-Fredholm-Hammerstein integral equations, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 17, no. 1, pp. 52–61, 2012.
- [14] G. Tachev, Pointwise approximation by Bernstein polynomials, *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, vol. 85, no. 3, pp. 353–358, 2012.
- [15] Y. Ordokhani and S. Davaei far, Application of the Bernstein polynomials for solving the nonlinear Fredholm integro-differential equations, *Journal of Applied Mathematics and Bioinformatics*, vol. 1, no. 2, pp. 13–31, 2011.
- [16] K. Jalaei, M. Zarebnia, and M. M. Chalaki, Development of the sinc method for nonlinear integro-differential equations, *Australian Journal of Basic and Applied Sciences*, vol. 4, no. 11, pp. 5508–5515, 2010.

- [17] P. Linz, A simple approximation method for solving Volterra integro-differential equations of the first kind, *J. Inst. Maths. Applics.*, 14 (1974) 211–215.
- [18] P. Linz, *Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations*, SIAM, Philadelphia, (1985).
- [19] A.Yildirim, N.Sahin, S.Yüzbasi, A collocation approach for solving high-order linear Fredholm-Volterra integro-differential equations, *Mathematical and Computer Modelling*, 547-563, 2012.
- [20] M. T. Rashed, Numerical Solution of a Special Type of Integro-differential Equations, *Applied Mathematics and Computation*, 73-88, 2003.
- [21] M.T.Rashed, Lagrange Interpolation to Compute The Numerical Solutions of Differential Integro-differential Equations, *Applied Mathematics and Computation*, 869-878, 2004.
- [22] M. Sezer, S. Yalçınbas, A Taylor collocation method for the approximate solution of general linear Fredholm-Volterra integro-differential equations with mixed argument, *Applied Mathematics and Computation*, 675-690, 2006.
- [23] P. Linz, A general theory of the approximate solution of operator equations of the second kind, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 543-554, 1977.
- [24] Erwin Kreyszig, *Introductory functional analysis with applications*, Wiley Classics Library. John Wiley and Sons Inc., New York, 1989.
- [25] Michael A. Bellucci, On the explicit representation of orthonormal Bernstein Polynomials, arXiv: 1404.2293 v2 [math.CA] (2014).
- [26] E. H. Doha, A. H. Bhrawy, M. A. Saker, On the derivatives of Bernstein polynomials: An application for the solution of high even-order differential equations, *Boundary Value Problems Volume 2011*, (2011) Article ID 829543, 16 pages doi:10.1155/2011/829543.
- [27] Abdelkrim Bencheikh, Lakhdar Chiter, Abbassi Hocine, A New Operational Matrix of Orthonormal Bernstein Polynomials and Its Applications, *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 12, no. 5, pp. 4219-4232, 2016.