République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

**UNIVERSITÉ KASDI MERBAH ,OUARGLA**

Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matiére

**DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES**

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

**MASTER** en **Mathématiques**

Option : Probabilités et statistiques

Par :

**Allaoui Aicha Batoul**

Titre :

# EQUATIONS DIFFERENTIELLES DOUBLEMENT STOCHASTIQUES RETROGRADES

Membres du Comité de juré :

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Mansoul Brahim** | MAA | UMKO | *Président* |
| **Ben Brahim Radhia** | MCB | UMKO | *Encadreur* |
| **Saouli Mostapha abdelouahab** | MCB | UMKO | *Examinateur* |

Juin 2023

# Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

pour Mes chèrs parents

Ma mére , qui a oeuvré pour ma réussite, de par son amour, son soutien,tous les sacrifices consentis et

précieux conseils,

et Mon pére,qui trouver ici le résultat de longues années desacrifices et de privations et aide moi

à avancer dans la vie, Merci pour les bonnes valeurs.

Education et soutien continu de votre part.

et à

soeur bien-aimée abir allaoui

mes fréres :

Mohamed ,Imad,Abd el-hamid

et à chacun membres de ma famille

## REMERCIEMENTS

d'abord à remercier Allah

le tous puissant,qui m'a donné la patience et l'effort pour réaliser ce mémoire

en second lieu,je tiens a remercier mon encadreur "*Dr.Ben Brahim Radhia*"

pour son précieux conseil et son aide durant toute la période du travail,

et je remercie également aux chef de département "*Dr.Mflah Mbro*K"et je remercie

également aux membres du Jury "*Dr.Saouli Moustapha abde lwahab*"

et "*Dr.Manseul Brahim*"

Je tiens remercie

à ma famille, notamment à mes parents pour tout ce qu'ils ont fait pour moi.

Merci a tous.

# Table des matières

# Introduction

Les equations diffèrentielles stochastiques rétrogrades (EDSR) sont apparues en1973 sous la forme linéaire avec les travaux de.J.M.Bismut dans le cas linéaire lorsqu'il étudie l'équation adjointe associée au principe du maximum stochastique en controle optimal. Pourtant le premier résultat dans le cas général a été publié en1990 avec Pardoux et Peng.

L'objectif de cette mémoire est d'étudier un neuveau type de EDSR qui appel les équations différentielles doublement stochastiques rétrogrades (EDDSR) avec deux directions différentes d'intégrales stochastiques, un intégrale stochastique standard (progressive ) $dW_t$ et un intégrale stochastique rétrograde $dB_t$ qui a été introduit par Pardoux et Peng [1].

Ce mémoire se composé de deux chapitres :

**Chapitres (1)** : On donne quelques génératités de calcul stochastique comme : le processus stochastique, la notion de martingale, le mouvement Brownient puis l'intégrale stochastique. ,et on rappelera les théorémes d'existence et d'unicté sans démonstration pour lés EDS et EDSR..

**Chapitres (2)** : Dans ce chapitre on montrons le résultat d'existence et d'unicité de la solution de les equations différentielles doublements stochastiques rétrogrades (EDDSR) dans le cas où les deux coefficients $f$ et $g$ non linéaires sous des hypothèses lipschitiziennes en $(y; z)$

**Chapitres (3)** :Dans ce chapitre on montrons l'existence des solutions optimales pour des problèmes de contrôle gouvernés par des equations différentielles doublements stochastiques rétrogrades (EDDSR). Le domaine de contrôle et la fonction de cout ont été supposés convexes.

# Chapitre 1

# Rappel sur le calcul stochastique

[2], [5], [3], [6], [4]

## 1.1 Généralités

### 1.1.1 Tribu

**Définition 1.1.1** *: Une tribu sur $\Omega$ est une famille de parties de $\Omega$ ,contenant l'ensemble vide, stable par passage au complémentaire,union dénombrable et intersection dénombrable.*

**Remarque 1.1.1** *:Un espace mesurable est un espace muni d'une tribu.*

#### Tribu engendrée

**Définition 1.1.2** *:La tribu engendrée par une famille d'ensembles $A$ est la plus petite tribu contenant cette famille, on la note $\sigma(A)$. Elle est l'intersection de toutes les tribus contenant $A$.*

#### Filtration

**Définition 1.1.3** *:Une filtration est une famille croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$ , c'est-à-dire telle que $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$ pour tout $t \leq s$.*

*La famille croissante de sous tribu* $\mathcal{F}_t^X = \sigma\{X_s, s \leq t\}$ *s'appelle la filtration naturelle de* $X$*, c'est la plus petite tribu rendant* $X$ *mesurable.*

**Mesurabilité**

**Définition 1.1.4** *:Soit* $(\Omega, \mathcal{F})$ *et* $(E, \varepsilon)$ *deux espaces mesurables. Une application* $f$ *de* $\Omega$ *dans* $E$ *est dite* $(\mathcal{F}, \varepsilon)$ *mesurable si* $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}, \forall A \in \varepsilon,$ *où*

$$f^{-1}(A) \overset{def}{=} \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \in A\}.$$

*Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité sur les tribus employées, on dit simplement que* $f$ *est mesurable.*

Une fonction $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est borélienne si elle est $(B_{\mathbb{R}}, B_{\mathbb{R}})$ −mesurable, soit

$$f^{-1}(A) \in B_{\mathbb{R}},\ \forall A \in B_{\mathbb{R}}.$$

Il suffit que cette propriété soit vérifiée pour les intervalles $A$.

Les fonctions continues sont boréliennes.

### 1.1.2 Probabilité

**Définition 1.1.5** *:Une probabilité sur* $(\Omega, \mathcal{F})$ *est une application* $\mathbb{P}$ *de* $\mathcal{F}$ *dans* $[0, 1]$ *telle que :*

**a)** $P(\Omega) = 1$

**b)** $P(\cup_{n=0}^{\infty} A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} P(A_n)$ pour des $A_n$ appartenant à $\mathcal{F}$ deux à deux disjoints.

**Notation 1.1.1** *:*$P(A) = \int_A dP = \int_\Omega 1_A dP$ *où* $1_A$ *(fonction indicatrice) est la fonction définie sur* $\Omega$ *par* $1_A(\omega) = 1$ *si* $\omega \in A$ *et* $1_A(\omega) = 0$ *si* $\omega \notin A$.

### 1.1.3 Variable aléatoire

**Définition 1.1.6** *:Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité. Une variable aléatoire (souvent abrégé v.a. par la suite) est une application* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *telle que :*

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} = \{X \in B\} \in \mathcal{F}, \forall B \in B(\mathbb{R}).$$

## 1.2 Processus stochastique

**Définition 1.2.1** *: Un processus stochastique est une famille de variable aléatoire* $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ *définie sur un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *à valeur dans* $(E, \varepsilon)$*, appelée espaces d'états généralement* $(E, \varepsilon) = \left(\mathbb{R}^d, B(\mathbb{R}^d)\right)$.

**Définition 1.2.2** *: Un processus stochastique* $X = (X_t \ ,t \geq 0)$ *est dit adaptée (par rapport à une filtration* $\mathcal{F}_t$ *) si* $X_t$ *est* $\mathcal{F}_t$ *- mesurable pour tout* $t$*.*

*On dit que le processus est à trajectoires continues (ou est continu) si les applications* $t \to X_t(\omega)$ *sont continues pour presque tout* $\omega$*.*

*Un processus est dit càdlàg si ses trajectoires sont continues à droite, pourvues de limites à gauche.*

***Remarque 1.2.1*** *:Il est inutile de dire qu'un processus est toujours adapté par rapport à sa filtration naturelle.*

#### Processus progressivement

**Définition 1.2.3** *:Un processus* $X$ *est progressivement mesurable par rapport à* $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ *si, pour tout* $t \geq 0$*, l'application* $(s, \omega) \to X_s(\omega)$ *de* $[0, t] \times \Omega$ *dans* $\mathbb{R}^d$ *est mesurable par rapport à* $B([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ *et* $B(\mathbb{R}^d)$*.*

## 1.3 Espérance conditionnelle

**Définition 1.3.1** *:Soit $X$ une v.a.r. (intégrable) définie sur $(\Omega,\ \mathcal{F}, P)$ et $\varsigma$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. L'espérance conditionnelle $E\left(X/\varsigma\right)$ de $X$ quand $\varsigma$ est l'unique variable aléatoire*

- $\varsigma$-mesurable
- telle que

$$\int_A E\left(X/\varsigma\right) dP = \int_A X dP\ ,\ \forall A \in \varsigma.$$

### 1.3.1 Propriétés de l'espérance conditionnelle :

**a)** Linéarité : Soit $a$ et $b$ deux constantes.

$$E\left(aX + bY/\varsigma\right) = aE\left(X/\varsigma\right) + bE(Y/\varsigma)$$

**b)** Croissance. Soit $X$ et $Y$ deux v. a. telles que $X \leq Y$ . Alors

$$E\left(X/\varsigma\right) \leq E(Y/\varsigma)$$

**c)**

$$E\left[E\left(X/\varsigma\right)\right] = E\left(X\right)$$

**d)** Si $X$ est - $\varsigma-$mesurable, alors

$$E\left(X/\varsigma\right) = X.$$

**e)** e) Si $Y$ est $\varsigma-$mesurable, alors

$$E\left(YX/\varsigma\right) = YE\left(X/\varsigma\right)$$

**f)** Si $X$ est indépendante de $\varsigma$, alors

$$E\left(X/\varsigma\right)=E\left(X\right)$$

**g)** Si $H\subset\varsigma\subset\mathcal{F}$ alors $E(E\left(X/H\right)/\varsigma)=E\left(X/H\right)=E(E\left(X/\varsigma\right)/H)$

## 1.4 Martingales

Soit $(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t,t\geq 0\},P)$ un espace de probabilité filtré et $X=\{X_t,t\geq 0\}$ un processus $(\mathcal{F}_t)$-adapté.

**Définition 1.4.1** *: On dit que $X$ est une$(\mathcal{F}_t)$-martingale si :*

1. $E\left[\mid X_t\mid\right]\lessdot+\infty$ - (autrement dit $X_t\in L^1\left(\Omega\right)$) pour tout $t\geq 0$.
2. $E\left(X_t\mid\mathcal{F}_s\right)=X_s,\forall s\leq t$.

**Propriété 1.4.1** *:*

– Si $X$ est une martingale $E\left(X_t\right)=E\left(X_0\right)$ , $\forall t$ .

– Si $(X_t\ ,t\leq T)$ est une martingale, le processus est complément déterminé par sa valeur terminale : $X_t=E\left(X_T\mid\mathcal{F}_t\right)$ Cette derniére propriété est d'un usage trés fréquent en finance.

**Définition 1.4.2** *:On dit que $X$ est une$(\mathcal{F}_t)$-sous-martingale (resp sur-martingale) si :*

1. *$E\left[\mid X_t\mid\right]\lessdot+\infty$ - (autrement dit $X_t\in L^1\left(\Omega\right)$) pour tout $t\geq 0$.*
2. *$E\left(X_t\mid\mathcal{F}_s\right)\geq X_s\quad(E\left(X_t\mid\mathcal{F}_s\right)\leq X_s)$, pour tout $s\leq t$.*

**Théorème 1.4.1** *:( **Inégalité de Burkholder Davis Gundy "BDG"**)*

*Pour tout $p>0$,il existe des constantes positives $c_p$ et $C_p$ telles que pour toute martingales locale continue $X=(X_t)_{t\geq 0}$ et tout $T>0$,on ait :*

$$c_pE\left[\langle X\rangle_T^{\frac{p}{2}}\right]\leq E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\mid X_t\mid\right]^p\leq C_pE\left[\langle X\rangle_T^{\frac{p}{2}}\right]$$

## 1.5 Le mouvement Brownien

**Définition 1.5.1** *:Le processus* $(W_t, t \geq 0)$ *est un mouvement Brownien (standard) si :*

**a)** $P\ (W_0 = 0) = 1$ (le mouvement Brownien est issu de l'origine).

**b)** $\forall s \leq t, W_t - W_s$ est une variable réelle de loi gaussienne, centrée de variance $(t - s)$.

**c)** $\forall n,\ \forall t_i\ \ 0 \leq t_0 \leq t_1 .... \leq t_n$,les variables $\left(W_{t_n} - W_{t_{n-1}}\ \ , ......, W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_0}\right)$ sont indépendantes.

**d)** $t \longmapsto W_t$ continue.

## 1.6 Intégrale stochastiques

On se donne un espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et un mouvement Brownien $W$ sur cet espace. On désigne par $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, s \leq t)$ la filtration naturelle du mouvement Brownien.

**Définition 1.6.1** *: L'intégrale stochastique est sous la forme*

$$\int_0^t \theta_s dW_s$$

*où* $\theta$ *un processus stochastique .*

#### Propriétés de l'integrale stochastique

On note $\Lambda$ l'ensemble $L^2_{loc}\,(\Omega \times \mathbb{R}^+)$des processus $\theta$ adaptés càglàd vérifiant

$$E(\int_0^t \theta_s^2(\omega)ds) < \infty,\ \forall t.$$

**a)** Linérité : Soit $a$ et $b$ des constantes et $(\theta^i; i = 1, 2)$ deux processus de $\Lambda$. On a

$$\int_0^t (a\theta_s^1 + b\theta_s^2)dW_s = a\int_0^t \theta_s^1 dW_s + b\int_0^t \theta_s^2 dW_s$$

**Proposition 1.6.1** **b)** *L"isométrie : Soit $\phi, \theta \in \Lambda$, alors*

$$E\left(\int_0^t \theta_s dW_s \int_0^t \phi_s dW_s\right) = E\left(\int_0^t \theta_s \phi_s ds\right).$$

**c)** *Propriétés de martingale : Le processus $M_t = \int_0^t \theta_s dW_s$, ou $\theta \in \Lambda$ est un martingale à trajectoires continues.*

**d)** *Le processus $N_t = \int_0^t \theta_s dW_s \int_0^t \phi_s dW_s - \int_0^t \theta_s \phi_s ds$.est une martingale.*

**Proposition 1.6.2** *:Pour tout $t \geq 0$; on a :*

$$\int_0^t dW_s = \frac{1}{2}\left(W_t^2 - t\right)$$

**Inégalité maximale**

On a souvent besoin de majorations d'intégrales stochastiques. L'inégalité de Doob conduit à

**Proposition 1.6.3** *:Soit $\theta \in \Lambda$*

$$E\left(\left[\sup_{s \leq T} \int_0^s \theta_u dW_u\right]^2\right) \leq 4E\left(\left[\int_0^T \theta_u dW_u\right]^2\right) = 4\int_0^T E[\theta_u^2] du$$

**Représentation des martingales browniennes :**

**Théorème 1.6.1** *Soit $M$ une martingale (càdlàg) de carré intégrable pour la filtration $\left(\mathcal{F}_t^W\right)_{t \in [0,T]}$. Alors il existe un unique processus $(H_t)_{t \in [0,T]}$ ,appartenant à $M^2(R^k)$, tel que*

$P - p.s. \quad \forall t \in [0,T]$,

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_s dW_s.$$

### 1.6.1 Processus d'Ito

**Définition 1.6.2** *: Un processus $X$ est un processus d'Itô si :*

$$X_t = x + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s$$

*où $b$ est un processus adapté tel que $\int_0^t \mid b_s \mid ds$ existe (au sens Lebesgue) p.s. pour tout $t$, et $\sigma$ un processus appartenant à $\Lambda$.*

### 1.6.2 Formule d'Itô :

Soit $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ un processus d'Itô :

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s$$

**1$^{\text{ére}}$ formule d'Ito :**

$f$ est un fenction de classe $C^2$. Alors :

$$f\left(X_t\right) = f\left(X_0\right) + \int_0^t f'\left(X_s\right) dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''\left(X_s\right) d\langle X, X\rangle_s.$$

table de multiplication :

| $\times$ | $dt$ | $dW_t$ |
|---|---|---|
| $dt$ | 0 | 0 |
| $dW_t$ | 0 | $dt$ |

**$2^{\text{éme}}$ formule d'Ito :**

Soit $(t,x) \to f\ (t,x)$ une fonction réelle de classe $C^1$ par rapport à $t$, de classe $C^2$ par rapport à $x$. On a

$$f\left(t,X_t\right)=f\left(0,X_0\right)+\int_0^t f_s'\left(s,X_s\right)ds+\int_0^t f_x'\left(s,X_s\right)dX_s+\frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}''\left(s,X_s\right)d\langle X,X\rangle_s.$$

**$3^{\text{éme}}$formule d'Ito :**

Soient $X$ et $Y$ deux processus d'Ito issus de $x$ et $y$

Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe $C^2$ à dérivées bornées. On a

$$\begin{aligned}f\left(X_t,Y_t\right)=f\left(x_0,x_0\right)&+\int_0^t f\prime_x\left(X_s,Y_s\right)dX_s+\int_0^t f\prime_y\left(X_s,Y_s\right)dY_s\\&+\frac{1}{2}\int_0^t f\prime\prime_x\left(X_s,Y_s\right)d\langle X_s\rangle+\frac{1}{2}\int_0^t f\prime\prime_y\left(X_s,Y_s\right)d\langle Y_s\rangle+\frac{1}{2}\int_0^t f\prime\prime_y\left(X_s,Y_s\right)d\langle X_s,Y_s\rangle\end{aligned}$$

**Intégration par parties**

**Théorème 1.6.2** *:Soit $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ et $(Y_t)_{0\leq t\leq T}$ deux processus d'Itô alors*

$$X_t=x_0+\int_0^t f_s ds+\int_0^t g_s dW_s$$

*et*

$$Y_t=y_0+\int_0^t f_s' ds+\int_0^t g_s' dW_s$$

alors

$$X_tY_t=x_0y_0+\int_0^t X_s dY_s+\int_0^t Y_s dX_s+\langle X,Y\rangle.$$

## 1.7 Équations Différentielles Stochastiques

Soient un espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et un mouvement Brownien $W$ sur cet espace. On notera $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la filtration naturelle du mouvement Brownien $W$.

**Définition 1.7.1** *: Une equation differentielle stochastique(EDS) est une équation de la forme :*

$$\begin{cases} dX_t = f(t, X_t)\, dt + g(t, X_t)\, dW_t. \\ \qquad X_0 = x. \end{cases} \tag{1.1}$$

ou : $X$ est un processus inconu, $f.g : [0, T] \times \mathbb{R}$ sont des fonction deterministes mesurables et $x$ un v.a à valeurs de $\mathbb{R}$,de carré integrable,independe à M.B $W$.

La fonction $f$ appelée cefficieont de dérivé. la fonction $g$ appelée cefficieont de diffusion.

**Définition 1.7.2** *Une solution de 1.1 est un processus $X$ continu $\mathcal{F}_t$-adapté tel que les integrale $\int_0^t f(s, X_s)\, ds$ et $\int_0^t g(s, X_s)\, dW_s$ ont, un sens et.tel que l'égalité*

$$X_t = x + \int_0^t f(s, X_s)\, ds + \int_0^t g(s, X_s)\, dW_s.$$

*satisfaite pour tout $t$ $P - p.s.$*

**théoréme d'existence et d'unicité :**

**Théorème 1.7.1** *On suppose que*

**a)** *les fonctions $f$ et $g$ sont continues .*

**b)** *il existe $K$ tel que pour tout $t \in [0, T], x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$*

$$\mid f(t, x) - f(t, y) \mid + \mid g(t, x) - g(t, y) \mid \leq K \mid x - y \mid$$

*et*

$$\mid f(t, x) \mid^2 + \mid g(t, x) \mid^2 \leq K(1 + \mid x \mid^2)$$

**c)** *La condition initiale $X_0$ est indépendante de $\{B_t, 0 \leq t\}$ et de carré intégrable, alors il existe une unique solution de (EDS) à trajectoires continues pout $t \leq T$. De plus cette solution vérifie*

$$E\left(\sup_{0\leq t\leq T} \mid X_t \mid^2\right) < \infty$$

## 1.8 Équations Différentielles Stochastiques Rétrogrades

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré, un mouvement Brownien $W$ sur cet espace et variable aléatoire $\xi$ mesurable par rapport à $\mathcal{F}_T$.On notera $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la filtration naturelle du mouvement Brownien $W$

**Définition 1.8.1** *: Une equation differentielle stochastique rétrogrades (EDSR) sous forme intégrale :*

$$\begin{cases} -dY_t = f\left(t, Y_t, Z_t\right) dt - Z_t dW_t, \\ Y_T = \xi \end{cases} \tag{1.2}$$

*La fonction $f$ s'appelle le générateur de l'EDSR et $\xi$ la condition terminale.*

**Définition 1.8.2** *:Une solution de l'EDSR 1.2.est un couple de processus $\{(Y_t, Z_t)\}_{0\leq t\leq T}$ vérifiant :*

1. *$Y$ et $Z$ sont progressivement mesurables à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^{K\times d}$;*
2. *$P - p \cdot s$, on a*
$$\int_t^T \left\{\mid f\left(s, Y_s, Z_s\right) \mid + \parallel Z_s \parallel^2\right\} ds < \infty$$
3. *$P - p \cdot s$, on a*
$$Y_t = \xi + \int_t^T f\left(s, Y_s, Z_s\right) ds - \int_t^T Z_s dW_s, \qquad 0 \leq t \leq T$$

On suppose que

1. condition de Lipschitz en $(y, z)$ : il existe une constante $\lambda$ positive tel que.,pour tout $t, y, y\prime, z, z'$,
$$|f(t, y, z) - f(t, y', z')| \leq \lambda(|y - y'| + \| z - z' \|);$$
2. condition d'intégrabilité :
$$E\left[ | \xi |^2 + \int_0^T | f(r, 0, 0) |^2 \, dr \right] < \infty$$

**Théorème 1.8.1** *: (**Pardoux–Peng 90**). Sous l'hypothèse présédantes, l'EDSR 1.2 possède une unique solution $(Y, Z)$ telle que $Z^2 \in M^2$.*

# Chapitre 2

# Equations differentielles doublements stochastiques rétrogrades

[1]

## 2.1 Définitions et notations :

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$un espace de probabilité, $T > 0$ un temps fini, soient $\{W_t, 0 \leq t \leq T\}$ et $\{B_t, 0 \leq t \leq T\}$ deux processus de mouvement brownien standard et indépendants,avec des valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}^l$ , définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, respectivement.

$N$ désigne la classe des ensembles P-null de $\mathcal{F}$ Pour chaque $t \in [0, T]$, nous définissons

$$\mathcal{F}_t \triangleq \mathcal{F}_t^W \vee \mathcal{F}_{t,T}^B.$$

où pour chaque processus $\{\eta_t\}$ ,

$$\mathcal{F}_{s,t}^{\eta} = \sigma\{\eta_r - \eta_s;\ s \leq r \leq t\} \vee N, \qquad \mathcal{F}_t^{\eta} = \mathcal{F}_{0,t}^{\eta}.$$

Notons que la collection $\{\mathcal{F}_t;\ t \in [0, T]\}$ n'est ni croissante, ni décroissante, et il ne s'agit pas donc d'une filtration.

On défini les éspaces des processus suivants :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ , soit $M^2\left(0,T;\mathbb{R}^n\right)$ l'ensemble des (classes de $dP \times dt$ a.e. égal) processus $(\varphi_t; t \in [0,T])$ mesurables,à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ ,tels que :

**i)**

$$E\int_0^T \mid \varphi_t \mid^2 dt < \infty \ .$$

**ii)** $\varphi_t$ est $\mathcal{F}_t$ mesurable $\forall t \in [0,T]$ .

$S^2\left([0,t]\,;\mathbb{R}^n\right)$ l'ensemble des processus aléatoires $n$ dimensionnels continus qui satisfait :

**i)**

$$E\left(\sup_{0\leq t\leq T} \mid \varphi_t \mid^2\right) < \infty \ .$$

**ii)** $\varphi_t$ est $\mathcal{F}_t$ mesurable, pour tout $t \in [0,T]$ .

On considère l'équation différentielle doublement stochastique retrograde suivante :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f\left(s, Y_s, Z_s\right) ds + \int_t^T g\left(s, Y_s, Z_s\right) dB_s - \int_t^T Z_s dW_s, \qquad 0 \leq t \leq T.$$

où les fonctions $f$ et $g$ :

$$f : \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \to \mathbb{R}^k$$

$$g : \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \to \mathbb{R}^{k\times l}$$

sont mesurables pour tout $(y,z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$, telles que

$$f\left(.,y,z\right) \in M^2\left(0,T;\mathbb{R}^k\right).$$

$$g(.,y,z) \in M^2\left(0,T;\mathbb{R}^{k\times l}\right).$$

## 2.2 Hypothèses

**(H.1) :** il existe des constantes $0 < c$ et $0 < \alpha < 1$ telles que pour tout $(\omega, t) \in \Omega \times [0,T], (y_1, z_1), (y_2, z_2) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times l}$.

$$\mid f(t,y_1,z_1) - f(t,y_2,z_2) \mid^2 \leq c\left(\mid y_1 - y_2 \mid^2 + \mid\mid z_1 - z_2 \mid\mid^2\right)$$

$$\|g(t,y_1,z_1) - g(t,y_2,z_2)\|^2 \leq c \mid y_1 - y_2 \mid^2 + \alpha \|z_1 - z_2\|^2$$

Ettant donné $\xi \in L^2\left(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P}; \mathbb{R}^k\right)$,on cherche à resoudre l'équation différentielle doublement stochastique retrograde suivante :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s,Y_s,Z_s)\,ds + \int_t^T g(s,Y_s,Z_s)\,dB_s - \int_t^T Z_s dW_s, \qquad 0 \leq t \leq T. \quad (2.1)$$

Nous notons que l'intégrale par rapport à$(B_t)$ est " l'intergrale d'Itô retrograde " et l'integrale par rapport à$(W_t)$ est " l'intergrale d'Itô progressive ".

## 2.3 Existence et unicité :

L'objectif principal de cette section est de prouver :

**Théorème 2.3.1** *: Sous les hypothèses ci-dessus, l'EDDSR (2.1) admet une unique solution,*

$$(Y,Z) \in S^2\left([0,T];\mathbb{R}^k\right) \times M^2\left(0,T;\mathbb{R}^{k\times d}\right).$$

Avant de prouver le théorème, on établissons le même résultat dans le cas où $f$ et $g$ ne dépendent pas ni de $Y$ et ni de $Z$. Etant donné $f \in M^2\left(0,T;\mathbb{R}^k\right)$ et $g \in M^2\left(0,T;\mathbb{R}^{k\times d}\right)$ et $\xi$, considérons l'EDDSR :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s)\,ds + \int_t^T g(s)\,dB_s - \int_t^T Z_s dW_s\ , \qquad 0 \leq t \leq T. \tag{2.2}$$

**Proposition 2.3.1** *:Il existe un unique couple*

$$(Y,Z) \in S^2\left([0,T];\mathbb{R}^k\right) \times M^2\left(0,T;\mathbb{R}^{k\times d}\right)$$

*qui résoudre l'eq 2.2*

**Preuve.** :

**l'existence :** pour tout $t \in [0,T]$ ,On définit la filtration $(\varsigma_t)_{0\leq t\leq T}$ par :

$$\varsigma_t = \mathcal{F}_t^W \vee \mathcal{F}_T^B$$

Posons

$$\begin{aligned} M_t &= E^{\varsigma_t}[\xi + \int_0^T f(s)\,ds + \int_0^T g(s)\,dB_s] \\ &= E[\xi + \int_0^T f(s)\,ds + \int_0^T g(s)\,dB_s/\varsigma_t]\ , \qquad 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

est une martingale de carré intégrable par rapport à $\varsigma_t$ ( car $f$ et $g$ sont de carré integrable )

D'aprés le théorème de représentation des martingale, il existe un processus $(Z_t)$, $\varsigma_t$-progressivement mesurable à valeur dans $\mathbb{R}^{k\times d}$ , tel que :

$$E\int_0^T \left\|{Z_t}^2\right\| dt < +\infty$$

et

$$M_t = M_0 + \int_0^t Z_s dW_s \qquad ; \ \forall \quad 0 \leq t \leq T.$$

d'où

$$M_T = M_t + \int_0^T Z_s dW_s.$$

alors

$$M_T - \left( \int_0^t f(s)\, ds + \int_0^t g(s)\, dB_s \right) = M_t + \int_t^T Z_s dW_s - \left( \int_0^t f(s)\, ds + \int_0^t g(s)\, dB_s \right)$$

Par les définitions :

$$\begin{aligned} M_t &= E[\xi + \int_0^T f(s)\, ds + \int_0^T g(s)\, dB_s / \varsigma_t] \\ &= E\left[ \xi + \int_t^T f(s)\, ds + \int_t^T g(s)\, dB_s / \varsigma_t \right] + \int_0^t f(s)\, ds + \int_0^t g(s)\, dB_s \end{aligned}$$

et

$$M_T = \xi + \int_0^T f(s)\, ds + \int_0^T g(s)\, dB_s$$

On obtient

$$\xi + \int_t^T f(s)\, ds + \int_t^T g(s)\, dB_s = E\left[ \xi + \int_t^T f(s)\, ds + \int_t^T g(s)\, dB_s / \varsigma_t \right] + \int_t^T Z_s dW_s.$$

alors pour tout $t \in [0, T]$ ,on a :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s)\, ds + \int_t^T g(s)\, dB_s - \int_t^T Z_s dW_s,$$

où :

$$Y_t \triangleq E\left[ \xi + \int_t^T f(s)\, ds + \int_t^T g(s)\, dB_s / \varsigma_t \right].$$

Il nous reste à montrer que $(Y_t)$ et $(Z_t)$ sont $\mathcal{F}_t-$adapté pour tout $0 \leq t \leq T$ .

Pour $Y_t$, on a :

$$Y_t = E[\xi + \int_t^T f(s)\, ds + \int_t^T g(s)\, dB_s / \varsigma_t] \quad ,0 \leq t \leq T$$

Donc

$$Y_t = E\left(\theta(t) / \mathcal{F}_t \vee \mathcal{F}_t^B\right)$$

où

$$\theta(t) = \xi + \int_t^T f(s)\, ds + \int_t^T g(s)\, dB_s$$

est $\mathcal{F}_t^W \vee \mathcal{F}_{t,T}^B-$mesurable.

La $\mathcal{F}_t^B$ est indépendante de $\mathcal{F}_t$ et $\mathcal{F}_T^W \vee \mathcal{F}_{t,T}^B$,donc de $\mathcal{F}_t$ $\vee \sigma(\theta(t))$.

D'ou

$$Y_t = E(\theta(t) / \mathcal{F}_t).$$

Pour $Z_t$ ,on a

$$\int_t^T Z_s dWs = \xi + \int_t^T f(s)\, ds + \int_t^T g(s)\, dB_s - Y_t$$

$$\int_t^T Z_s dWs = \theta(t) - Y_t$$

où $\theta(t) - Y_t$ est $\mathcal{F}_T^W \vee \mathcal{F}_{t,T}^B$-mesurable.

D'aprés le théoreme de représentation des martingales on a $\{Z_s, t < s < T\}$ est $\left(\mathcal{F}_s^W \vee \mathcal{F}_{t,T}^B\right)$ $-$adapté .par conséquent , $Z_s$ est $\mathcal{F}_s^W \vee \mathcal{F}_{t,T}^B$-mesurable pour tout $t < s < T$ . Donc il est $(\mathcal{F}_s^W \vee \mathcal{F}_{t,T}^B)$-mesurable.

**Unicité :** Soient $(Y, Z)$ et $(Y', Z')$ deux solutions de (2.2) tel que :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s)\, ds + \int_t^T g(s)\, dB_s - \int_t^T Z_s dW_s$$
$$Y'_t = \xi + \int_t^T f(s)\, ds + \int_t^T g(s)\, dB_s - \int_t^T Z'_s dW_s$$

alors

$$\begin{aligned}Y_t - Y_t' &= [\xi + \int_t^T f(s)\,ds + \int_t^T g(s)\,dB_s - \int_t^T Z_s dW_s\ ] \\ &\quad - [\xi + \int_t^T f(s)\,ds + \int_t^T g(s)\,dB_s - \int_t^T Z_s' dW_s] \\ &= - \int_t^T Z_s dW_s\ + \int_t^T Z\prime_s dW_s = - \int_t^T [Z_s\ - Z\prime_s]\,dW_s\end{aligned}$$

d'ou

$$Y_t - Y_t' + \int_t^T (Z_s - Z_s')dW_s = 0\ ,\quad 0 \leq t \leq T.$$

En prenant le carré dans les deux membres de l'égalité précédant, on trouve

$$\mid Y_t - Y_t' \mid^2 + \mid \int_t^T (Z_s - Z_s')dW_s \mid^2 = 2(Y_t - Y_t', \int_t^T (Z_s - Z_s')dW_s)$$

En prennant l'esperance , on obtient

$$E\left[\mid Y_t - Y_t' \mid^2\right] + E\left[\mid \int_t^T (Z_s - Z_s')dW_s \mid^2\right] = 0$$

On appliquant l'isometrie d'Itô, on a

$$E(\mid Y_t - Y_t' \mid^2) + E\int_t^T \left\|(Z_s - Z_s')\right\|^2 ds = 0$$

Par consequant

$$E\left(\mid Y_t - Y_t' \mid^2\right) = 0 \ \text{ et } \qquad E\int_t^T \left\|(Z_s - Z_s')^2\right\| ds = 0$$

d'où

$$Y_t = Y_t', \qquad P - p.s$$

et

$$Z_t = Z'_t, \qquad P - p.s$$

■

**Lemme 2.3.1** *: Soit* $\alpha \in S^2\left([0,T];\mathbb{R}^k\right)$, $\beta \in M^2\left(0,T,\mathbb{R}^k\right)$, $\gamma \in M^2\left(0,T,\mathbb{R}^{k\times l}\right)$, $\delta \in M^2\left(0,T,\mathbb{R}^{k\times d}\right)$ *être tels que :*

$$\alpha_t = \alpha_0 + \int_0^t \beta_s ds + \int_0^t \gamma_s dB_s + \int_0^t \delta_s dW_s, \qquad 0 \le t \le T$$

*Alors*

$$\begin{aligned}\mid \alpha_t \mid^2 = \mid \alpha_0 \mid^2 + 2\int_0^t (\alpha_s, \beta_s)\, ds + 2\int_0^t (\alpha_s, \gamma_s dB_s) \\ +2\int_0^t (\alpha_s, \delta_s dW_s) - \int_0^t \parallel \gamma_s \parallel^2 ds + \int_0^t \parallel \delta_s \parallel^2 ds\end{aligned}$$

$$E \mid \alpha_t \mid^2 = E \mid \alpha_0 \mid^2 + 2E\int_0^t (\alpha_s, \beta_s)\, ds - E\int_0^t \parallel \gamma_s \parallel^2 ds + E\int_0^t \parallel \delta_s \parallel^2 ds.$$

*Plus généralement, si* $\phi \in C^2\left(\mathbb{R}^k\right)$,

$$\begin{aligned}\phi(\alpha_t) = \phi(\alpha_0) + \int_0^t (\phi'(\alpha_s), \beta_s) ds + \int_0^t (\phi'(\alpha_s), \gamma_s dB_s) + \int_0^t (\phi'(\alpha_s), \delta_s dW_s) \\ - \frac{1}{2}\int_0^t Tr\left[\phi''(\alpha_s)\gamma_s\gamma_s^*\right] ds + \frac{1}{2}\int_0^t Tr\left[\phi''(\alpha_s)\delta_s\delta_s^*\right] ds.\end{aligned}$$

**Preuve.** :La première identité est une combinaison des formules en avant et en arrière de d'Itô, appliquée au processus $(a_t)$ et à la fonction $x \to\mid x \mid^2$ .Nous esquissons seulem ent la preuve.

Soit $0 = t_0 < t_1 < ...... < t_n = t$.

$$
\begin{aligned}
\mid \alpha_{t_{i+1}} \mid^2 - \mid \alpha_{t_i} \mid^2 &= 2\left(\alpha_{t_{i+1}} - \alpha_{t_i}, \alpha_{t_i}\right) + \mid \alpha_{t_{i+1}} - \alpha_{t_i} \mid^2 \\
&= 2(\textstyle\int_{t_i}^{t_{i+1}} \beta_s ds, \alpha_{t_i}) + 2(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma_s dB_s, \alpha_{t_{i+1}}) + 2\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \delta_s dW_s, \alpha_{t_i}\right) \\
&\quad -2(\textstyle\int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma_s dB_s, \alpha_{t_{i+1}} - \alpha_{t_i}) + \mid \alpha_{t_{i+1}} - \alpha_{t_i} \mid^2 \\
&= 2\textstyle\int_{t_i}^{t_{i+1}} (\alpha_{t_i}, \beta_s)\, ds + 2\int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(\alpha_{t_{i+1}}, \gamma_s dB_s\right) + 2\int_{t_i}^{t_{i+1}} (\alpha_{t_i}, \delta_s dW_s) \\
&\quad - \mid \textstyle\int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma_s dB_s \mid^2 + \mid \int_{t_i}^{t_{i+1}} \delta_s dW_s \mid^2 + \rho_i,
\end{aligned}
$$

où $\sum_{i=0}^{n-1} \rho_i \to 0$en probabilité, comme sup $t_{i+1} - t_i \to 0$ . Le reste de la preuve est standard. La deuxième découle de la première, à condition que les intégrales stochastiques aient une attente zéro. Cela découlera de

$$
E\left(\sup_{0 \leq t \leq T} \mid \int_t^T (\alpha_s, \gamma_s dB_s) \mid + \sup_{0 \leq t \leq T} \mid \int_0^t (\alpha_s, \delta_s dW_s) \mid\right) < \infty,
$$

qui est une conséquence de Burkholder - Davis - l'inégalité de Gundy et les hypothèses faites sur $\alpha$, $\gamma$ et $\delta$. En effet, en considérant par exemple l'intégrale avant, nous avons :

$$
\begin{aligned}
E(\sup\nolimits_{0 \leq t \leq T} \mid \textstyle\int_0^t (\alpha_s, \delta_s dW_s) \mid) &\leq cE\sqrt{\textstyle\int_0^T \mid \alpha_t \mid^2 \| \delta_t \|^2 \, dt} \\
&\leq \tfrac{c}{2}(E(\sup\nolimits_{0 \leq t \leq T} \mid \alpha_t \mid^2) + E\textstyle\int_0^T \| \delta_t \|^2 \, dt).
\end{aligned}
$$

La dernière identité est prouvée d'une manière très similaire à la première. ■

**Preuve de theorème 2.3.1**

**Preuve. Unicité :** Soient $(Y_t^1, Z_t^1)$ et $(Y_t^2, Z_t^2)$ deux solutions. Définient

$$
Y_t^1 = \xi + \int_t^T f\left(s, Y_s^1, Z_s^1\right) ds + \int_t^T g\left(s, Y_s^1, Z_s^1\right) dB_s - \int_t^T Z_s^1 dW_s, \qquad 0 \leq t \leq T.
$$

$$
Y_t^2 = \xi + \int_t^T f\left(s, Y_s^2, Z_s^2\right) ds + \int_t^T g\left(s, Y_s^2, Z_s^2\right) dB_s - \int_t^T Z_s^2 dW_s, \qquad 0 \leq t \leq T.
$$

alors

$$\begin{aligned}\overline{Y_t} &= [\left(\xi+\int_t^T f\left(s,Y_s^1,Z_s^1\right)ds+\int_t^T g\left(s,Y_s^1,Z_s^1\right)dB_s-\int_t^T Z_s^1 dW_s\right)\\ &-\left(\xi+\int_t^T f\left(s,Y_s^2,Z_s^2\right)ds+\int_t^T g\left(s,Y_s^2,Z_s^2\right)dB_s-\int_t^T Z_s^2 dW_s\right)]\\ &=\int_t^T [f\left(s,Y_s^1,Z_s^1\right)-f\left(s,Y_s^2,Z_s^2\right)]ds+\int_t^T [g\left(s,Y_s^1,Z_s^1\right)-g\left(s,Y_s^2,Z_s^2\right)]dB_s-\int_t^T \left[Z_s^1-Z_s^2\right]dW_s\end{aligned}$$

d'où

$$\overline{Y_t}=\int_t^T [f\left(s,Y_s^1,Z_s^1\right)-f\left(s,Y_s^2,Z_s^2\right)]ds+\int_t^T [g\left(s,Y_s^1,Z_s^1\right)-g\left(s,Y_s^2,Z_s^2\right)]dB_s-\int_t^T \overline{Z_s}dW_s, 0\leq t\leq T.$$

On Applique Lemme 2.2.1 à $\overline{Y}$ ,tel que :

$$[f\left(s,Y_s^1,Z_s^1\right)-f\left(s,Y_s^2,Z_s^2\right)]=\beta_s$$

$$[g\left(s,Y_s^1,Z_s^1\right)-g\left(s,Y_s^2,Z_s^2\right)]=\gamma_s$$

$$\overline{Z_s}=\delta_s$$

$$\phi\left(Y_t\right)=Y_t^2,$$

on obtient :

$$\begin{aligned}Y_t^2 &= \phi\left(\overline{Y}_t\right)=\phi\left(\overline{Y}_0\right)+\int_t^T\left(\phi'(\overline{Y}_s),\beta_s)ds\right)+\int_t^T\left(\phi'\left(\overline{Y}_s\right),\gamma_s dB_s\right)+\int_t^T\left(\phi'\left(\overline{Y}_s\right),\delta_s dW_s\right)\\ &-\frac{1}{2}\int_t^T Tr\left[\phi''(\overline{Y}_s)\gamma_s\gamma_s^*\right]ds+\frac{1}{2}\int_t^T Tr\left[\phi''(\overline{Y}_s)\delta_s\delta_s^*\right]ds\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{Y}_t^2 &= \int_t^T \langle 2\overline{Y}_s, \beta_s\rangle ds + \int_0^t 2\langle \overline{Y}_s, \gamma_s dB_s\rangle + 2\int_t^T \langle \overline{Y}_s, \delta_s dW_s\rangle - \frac{1}{2}\int_t^T Tr\left[2\overline{Y}_s\gamma_s\gamma_s^*\right] ds. \\
&+ \frac{1}{2}\int_t^T Tr\left[2\overline{Y}_s\delta_s\delta_s^*\right] ds \\
&= 2\int_t^T \langle \overline{Y}_s, f\left(s, Y_s^1, Z_s^1\right) - f\left(s, Y_s^2, Z_s^2\right)\rangle ds + 2\int_t^T \langle \overline{Y}_s, g\left(s, Y_s^1, Z_s^1\right) - g\left(s, Y_s^2, Z_s^2\right) dB_s\rangle \\
&+ 2\int_0^t \langle \overline{Y}_s, \overline{Z}_s dW_s\rangle - \int_0^t \parallel g\left(s, Y_s^1, Z_s^1\right) - g\left(s, Y_s^2, Z_s^2\right) \parallel^2 ds + \int_0^t \parallel \overline{Z_s} \parallel^2 ds \\
&= 2\int_t^T \langle \overline{Y}_s, f\left(s, Y_s^1, Z_s^1\right) - f\left(s, Y_s^2, Z_s^2\right)\rangle ds + 2\int_t^T \parallel g\left(s, Y_s^1, Z_s^1\right) - g\left(s, Y_s^2, Z_s^2\right) \parallel^2 ds \\
&- 2\int_t^T \left\|\overline{Z_s}^2\right\| ds - \int_t^T \left\|g\left(s, Y_s^1, Z_s^1\right) - g\left(s, Y_s^2, Z_s^2\right)\right\|^2 ds + \int_t^T \left\|\overline{Z_s}\right\|^2 ds \\
&= 2\int_t^T \langle \overline{Y}_s, [f\left(s, Y_s^1, Z_s^1\right) - f\left(s, Y_s^2, Z_s^2\right)\rangle ds + \int_t^T \parallel g\left(s, Y_s^1, Z_s^1\right) - g\left(s, Y_s^2, Z_s^2\right) \parallel^2 ds \\
&- \int_t^T \left\|\overline{Z_s}\right\|^2 ds
\end{aligned}$$

On prend l'esperance, on obtient :

$$\begin{aligned}
E(\left|\overline{Y_t}\right|^2) = 2E\int_t^T \langle \overline{Y}_s, f\left(s, Y_s^1, Z_s^1\right) - f\left(s, Y_s^2, Z_s^2\right)\rangle ds + E\int_t^T \parallel g\left(s, Y_s^1, Z_s^1\right) - g\left(s, Y_s^2, Z_s^2\right) \parallel^2 ds \\
- E\int_t^T \left\|\overline{Z_s}\right\|^2 ds
\end{aligned}$$

Que ce implique

$$\begin{aligned}
E(\left|\overline{Y_t}\right|^2) + E\int_t^T \left\|\overline{Z_s}\right\|^2 ds &= 2E\int_t^T \langle \overline{Y}_s, f\left(s, Y_s^1, Z_s^1\right) - f\left(s, Y_s^2, Z_s^2\right)\rangle ds \\
&+ E\int_t^T \left\|g\left(s, Y_s^1, Z_s^1\right) - g\left(s, Y_s^2, Z_s^2\right)\right\|^2 ds
\end{aligned}$$

D'aprés (H.1) on a :

$$
\begin{aligned}
E(\left|\overline{Y_t}\right|^2) + E\int_t^T \left\|\overline{Z_s}\right\|^2 ds &\leq 2E\left[\int_t^T \langle c\left(\mid \overline{Y_s} \mid + \mid \overline{Z_s} \mid\right); \overline{Y_s}\rangle ds\right] + E\left[\int_t^T c \mid \overline{Y_s} \mid^2 + \alpha \parallel \overline{Z_s} \parallel^2 ds\right] \\
&\leq 2cE\left[\int_t^T \mid \overline{Y_s} \mid^2 ds\right] + 2cE\left[\int_t^T \langle \mid \overline{Y_s} \mid ; \mid \overline{Z_s} \mid \rangle ds\right] \\
&+ E\left[\int_t^T c \mid \overline{Y_s} \mid^2 + \alpha \parallel \overline{Z_s} \parallel^2 ds\right]
\end{aligned}
$$

on applique l'inegalité $ab \leq \frac{1}{2(1-\alpha)}a^2 + \frac{1-\alpha}{2}b^2$, on obteint :

$$
\begin{aligned}
E(\left|\overline{Y_t}\right|^2) + E\int_t^T \left\|\overline{Z_s}\right\|^2 ds &\leq 2cE\left[\int_t^T \mid \overline{Y_s} \mid^2 ds\right] + \frac{4}{2(1-\alpha)}c^2 E\int_t^T \mid \overline{Y_s} \mid^2 ds \\
&+ \frac{1-\alpha}{2}E\int_t^T \left\|\overline{Z_s}\right\|^2 ds + cE\left[\int_t^T \mid \overline{Y_s} \mid^2 ds\right] + \alpha E\left[\int_t^T \parallel \overline{Z_s} \parallel^2 ds\right] \\
&\leq 2cE\left[\int_t^T \mid \overline{Y_s} \mid^2 ds\right] + \frac{4}{2(1-\alpha)}c^2 E\int_t^T \mid \overline{Y_s} \mid^2 ds \\
&+ \frac{1-\alpha}{2}E\int_t^T \left\|\overline{Z_s}\right\|^2 ds + cE\left[\int_t^T \mid \overline{Y_s} \mid^2 ds\right] + \alpha E\left[\int_t^T \parallel \overline{Z_s} \parallel^2 ds\right] \\
&\leq c(\alpha)E\left[\int_t^T \mid \overline{Y_s} \mid^2 ds\right] + \frac{1+\alpha}{2}E\left[\int_t^T \parallel \overline{Z_s} \parallel^2 ds\right]
\end{aligned}
$$

ou $0 < \alpha < 1$ est la constante dans (H.1) Par conséquent

$$
E(\mid \overline{Y_t} \mid^2) + \frac{1-\alpha}{2}E\left[\int_t^T \parallel \overline{Z_s} \parallel^2 ds\right] \leq c(\alpha)E\left[\int_t^T \mid \overline{Y_s} \mid^2 ds\right].
$$

ce impliquie qué

$$
E(\mid \overline{Y_t} \mid^2) \leq c(\alpha)E\int_t^T \mid \overline{Y_s} \mid^2 ds
$$

et

$$
\frac{1-\alpha}{2}E\int_t^T \parallel \overline{Z_s} \parallel^2 ds \leq c(\alpha)E\int_t^T \mid \overline{Y_s} \mid^2 ds \to 0
$$

par le lemme de Gronwall, il vient

$$
E(\mid \overline{Y_t} \mid^2) = 0, \quad 0 \leq t \leq T
$$

et alors

$$E\int_t^T \parallel \overline{Z_s} \parallel^2 ds = 0 \Rightarrow \parallel \overline{Z_s} \parallel^2 = 0$$

**Existence :**

On défini une suite récurssive $(Y_t^i, Z_t^i)_{i=0,1,,,,}....$ comme suit.($Y_t^0 = 0,\ Z_t^0 = 0$) étant donné $(Y_t^i, Z_t^i), (Y_t^{i+1}, Z_t^{i+1})$ l'unique solution de l'EDDSR suivante :

$$Y_t^{i+1} = \xi + \int_t^T f\left(s, Y_s^i, Z_s^i\right) ds + \int_t^T g\left(s, Y_s^i, Z_s^i\right) dB_s - \int_t^T Z_s^{i+1} dW_s \quad .$$

$$Y_t^i = \xi + \int_t^T f\left(s, Y_s^{i-1}, Z_s^{i-1}\right) ds + \int_t^T g\left(s, Y_s^{i-1}, Z_s^{i-1}\right) dB_s - \int_t^T Z_s^i dW_s$$

Soient

$$\overline{Y_t}^{i+1} \triangleq Y_t^{i+1} - Y_t^i\ , \quad \overline{Z_t}^{i+1} \triangleq Z_t^{i+1} - Z_t^i\ , \qquad 0 \leq t \leq T$$

Alors

$$\begin{aligned}
\overline{Y_t}^{i+1} &\triangleq \left[\xi + \int_t^T f\left(s, Y_s^i, Z_s^i\right) ds + \int_t^T g\left(s, Y_s^i, Z_s^i\right) dB_s - \int_t^T Z_s^{i+1} dW_s\right] \\
&- \left[\xi + \int_t^T f\left(s, Y_s^{i-1}, Z_s^{i-1}\right) ds + \int_t^T g\left(s, Y_s^{i-1}, Z_s^{i-1}\right) dB_s - \int_t^T Z_s^i dW_s\right] \\
&= \left[\int_t^T f\left(s, Y_s^i, Z_s^i\right) - \int_t^T f\left(s, Y_s^{i-1}, Z_s^{i-1}\right)\right] ds \\
&+ \left[\int_t^T g\left(s, Y_s^i, Z_s^i\right) - \int_t^T g\left(s, Y_s^{i-1}, Z_s^{i-1}\right)\right] dB_s - \left[\int_t^T Z_s^{i+1} - \int_t^T Z_s^i\right] dW_s \\
&= \left[\int_t^T f\left(s, Y_s^i, Z_s^i\right) - \int_t^T f\left(s, Y_s^{i-1}, Z_s^{i-1}\right)\right] ds + \left[\int_t^T g\left(s, Y_s^i, Z_s^i\right) - \int_t^T g\left(s, Y_s^{i-1}, Z_s^{i-1}\right)\right] dB_s \\
&- \left[\int_t^T \overline{Z_t}^{i+1}\right] dW_s.
\end{aligned}$$

En appliquer Lemme 2.2.1

$$\begin{aligned}
E(\left|\overline{Y_t}^{i+1}\right|^2) + E\int_t^T \left\|\overline{Z_t}^{i+1}\right\|^2 ds &= 2E\int_t^T (f\left(s, Y_s^i, Z_s^i\right) - f\left(s, Y_s^{i-1}, Z_s^{i-1}\right), \overline{Y_s}^{i+1}) ds \\
&+ E\int_t^T \left\|g\left(s, Y_s^i, Z_s^i\right) - g\left(s, Y_s^{i-1}, Z_s^{i-1}\right)\right\|^2 ds
\end{aligned}$$

Soit $\beta \in \mathbb{R}$. Par intégration par parties, à $(\mid \overline{Y_t}^{i+1} \mid^2 e^{\beta t})$ on a :

$$d(\left|\overline{Y_t}^{i+1}\right|^2 e^{\beta t}) = \beta e^{\beta t} \mid \overline{Y_t}^{i+1} \mid^2 dt + e^{\beta t} d\left(\mid \overline{Y_t}^{i+1} \mid^2\right)$$
$$= \beta e^{\beta t} \mid \overline{Y_t}^{i+1} \mid^2 dt + e^{\beta t}(-2\langle f\left(t, Y_t^i, Z_t^i\right) - f\left(t, Y_t^{i-1}, Z_t^{i-1}\right); \overline{Y_t}^{i+1}\rangle dt$$
$$- \parallel g\left(t, Y_t^i, Z_t^i\right) - g\left(t, Y_t^{i-1}, Z_t^{i-1}\right) \parallel^2 dt + \parallel \overline{Z_t}^{i+1} \parallel^2 dt)$$

par conséquent ,integrant entre $t$ et $T$,et on prenant l'esperance,on obteint :

$$E(e^{\beta T}\left|\overline{Y_T}^{i+1}\right|^2) - E\left(e^{\beta t}\left|\overline{Y_t}^{i+1}\right|^2\right)$$
$$= E(\int_t^T \beta e^{\beta t}\left|\overline{Y_t}^{i+1}\right|^2 ds) - 2[\int_t^T \langle\ f\left(s, Y_s^i, Z_s^i\right) - f\left(s, Y_s^{i-1}, Z_s^{i-1}\right), \overline{Y_s}^{i+1}\ \rangle e^{\beta t} ds]$$
$$- E[\int_t^T \left\|g\left(t, Y_t^i, Z_t^i\right) - g\left(t, Y_t^{i-1}, Z_t^{i-1}\right)\right\|^2 e^{\beta t} ds] + E[\int_t^T \left\|\overline{Z_s}^{i+1}\right\|^2 e^{\beta t}\ ds]$$

Comme $Y_T^i = Y_T^{i+1} = \xi \Longrightarrow \overline{Y_T}^{i+1} = 0$ : alors on a :

$$E\left[e^{\beta t}\left|\overline{Y_t}^{i+1}\right|^2\right] + E\left[\int_t^T \beta e^{\beta s}\left|\overline{Y_t}^{i+1}\right|^2 ds\right] + E[\int_t^T \left\|\overline{Z_s}^{i+1}\right\|^2 e^{\beta s} ds]$$
$$= 2E[\int_t^T \langle\ f\left(s, Y_s^i, Z_s^i\right) - f\left(s, Y_s^{i-1}, Z_s^{i-1}\right); \overline{Y_s}^{i+1}\ \rangle e^{\beta s} ds]$$
$$+ E\int_t^T e^{\beta s}\left\|g\left(t, Y_t^i, Z_t^i\right) - g\left(t, Y_t^{i-1}, Z_t^{i-1}\right)\right\|^2 ds.$$

Comme $f$ et $g$ sont lipschitz, il vient

$$E\left[e^{\beta t}\left|\overline{Y_t}^{i+1}\right|^2\right] + E\left[\int_t^T \beta e^{\beta s}\left|\overline{Y_t}^{i+1}\right|^2 ds\right] + E[\int_t^T \left\|\overline{Z_s}^{i+1}\right\|^2 e^{\beta s} ds]$$
$$\leq 2E\int_t^T e^{\beta s}\langle c(\mid\ \overline{Y_s}^i \mid + \mid \overline{Z_s}^i \mid), \overline{Y_s}^{i+1}\rangle ds$$
$$+ E\int_t^T e^{\beta s}(c\left|\overline{Y_s}^i\right|^2 + \alpha\left\|\overline{Z_s}^i\right\|^2) ds$$

on applique l'inegalité $ab \leq \frac{1}{2(1-\alpha)}a^2 + \frac{1-\alpha}{2}b^2$; alors il existe $c, \gamma > 0$ l'inegalité précédante donne :

$$E \mid \overline{Y_t}^{i+1} \mid^2 e^{\beta t} + (\beta - \gamma) E \int_t^T \mid \overline{Y_s}^{i+1} \mid^2 e^{\beta s} \, ds + E \int_t^T \parallel \overline{Z_s}^{i+1} \parallel^2 e^{\beta s} \, ds$$
$$\leq E \int_t^T (c \mid \overline{Y_s}^{i} \mid^2 + \frac{1+\alpha}{2} \parallel \overline{Z_s}^{i} \parallel^2) e^{\beta s} ds$$

On prenont $\beta = \gamma + \frac{2c}{1+\alpha}$, et définir $\overline{c} = \frac{2c}{1+\alpha}$.

$$E[\mid \overline{Y_t}^{i+1} \mid^2 e^{\beta t}] + E[\int_t^T (\overline{c} \mid \overline{Y_s}^{i+1} \mid^2 + \parallel \overline{Z_s}^{i+1} \parallel^2) e^{\beta s} ds$$
$$\leq \frac{1+\alpha}{2} E \int_t^T (\overline{c} \mid \overline{Y_s}^{i} \mid^2 + \parallel \overline{Z_s}^{i} \parallel^2) e^{\beta s} ds.$$

Il s'ensuit immédiatement que :

$$E \int_t^T e^{\beta s} (\overline{c} \mid \overline{Y_s}^{i+1} \mid^2 + \parallel \overline{Z_s}^{i+1} \parallel^2) ds \leq (\frac{1+\alpha}{2})^i E \int_t^T e^{\beta s} (\overline{c} \mid \overline{Y_s}^{1} \mid^2 + \parallel \overline{Z_s}^{1} \parallel^2) ds.$$

Et comme $\frac{1+\alpha}{2} < 1$; $(Y_t^i, Z_t^i)_{i=0,1,2,3...}$ est une suite de Cauchy dans $M^2([0,T]\,;\mathbb{R}^k) \times M^2([0,T]\,;\mathbb{R}^{k\times d})$. Alors, on conclus que $(Y_t^i)_{i=0,1,2,3...}$ est aussi de Cauchy dans $S^2([0,T];\mathbb{R}^k)$ et que

$$(Y_t, Z_t) = \lim_{i \to \infty} (Y_t^i, Z_t^i)$$

solution de l'équation 2.1 $\blacksquare$

# Chapitre 3

# Existence de contrôle optimal pour l'EDDSR linéaire

## 3.1 Préliminaires et formulation du problème

Soient $T$ un nombre réel positif, $U$ un ensemble non vide de $\mathbb{R}^k$ et $W = (W_t)_{t\in[0,T]}$ et $B = (B_t)_{t\in[0,T]}$ sont deux mouvements browniens indépendants, définis dans un espace de probabilité complet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}^k$ respectivement. Soient $\alpha_t, \beta_t, \gamma_t, \delta_t, \sigma_t$ et $\eta_t$ des processus progressivement mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}$,$\mathbb{R}^k$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}$ respectivement Soit $\mathcal{N}$ la classe des ensembles $\mathcal{P}$-nuls de $\mathcal{F}$. Pour chaque $t \in [0, T]$, on définit

$$\mathcal{F}_t \triangleq \mathcal{F}_t^W \vee \mathcal{F}_{t,T}^B.$$

où pour tout processus $\{\Phi_t\}$, on pose

$$\mathcal{F}_{s,t}^\Phi = \sigma\left(\Phi_r - \Phi_s; s \leq r \leq t\right) \vee \mathcal{N}, \qquad \mathcal{F}_t^\Phi = \mathcal{F}_{0,t}^\Phi.$$

Étant donné $\xi$ une variable aléatoire carrée intégrable et $\mathcal{F}_t-$mesurable.

On considère le problème de contrôle stochastique d'un système gouvernè par l'EDDSR linéaire suivant :

$$Y_t^v = \xi + \int_t^T (\alpha_s Y_s^v + Z_s^v \beta_s + \gamma_s v_s)\, ds + \int_t^T (\delta_s Y_s^v + Z_s^v \sigma_s + \eta_s v_s)\, dB_s - \int_t^T Z_s^v dW_s. \quad (3.1)$$

**Définition 3.1.1** *: Un contrôle admissible $v$ est un processus de carré intégrable et progresivement mesurable, et prenant ses valeurs dans un sous-ensemble $U \subset \mathbb{R}^k$. On note $\mathcal{U}$ l'ensemble de tous les contrôles admissibles.*

Notre objectif est de trouver un contrôle admissible qui minimise la fonction de coûts suivante :

$$J(v) := E[g\,(Y_0^v) + \int_0^T l\,(t, Y_t^v, Z_t^v, v_t)\, dt],$$

où

$$l : [0,T] \times \ \mathbb{R}^k \times \ \mathbb{R}^{k\times d} \times \ U \to \mathbb{R} \ et \ g : [0,T] \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$$

sont deux fonctions Boréliennes.

On dit que $\widetilde{u} \in \mathcal{U}$ est un contrôle optimal si

$$J(\widetilde{u}) = \inf_{v \in u} J(v).$$

On notera :

- $\mathcal{L}^2_{\mathcal{F}}(0,T;\mathbb{R}^d)$ est l'ensemble de tous les processus $X$-adaptés à $\mathcal{F}_t$ et valorisés $\mathbb{R}^d$ tels que

$$E[\int_0^T \mid X_t \mid^2 dt] < \infty$$

- $\mathcal{L}^2_{\mathcal{F}}(\Omega; C(0,T;\mathbb{R}^d))$ est l'ensemble de tous les processus continus $\mathcal{X}-$ adaptés à $\mathcal{F}_t$ et valorisés $\mathbb{R}^d$- tels que

$$E[\sup_{0\le t\le T} \mid \mathcal{X}_t \mid^2] < \infty.$$

**Hypothèses**

On considère les hypothèses suivantes :

**(A1) :** L'ensemble $U \subseteq \mathbb{R}^K$ est convexe et compact,

(**A2) :** Les fonctions $l$ et $g$ sont continues et convexes,

**(A3)** :$\alpha_t, \beta_t, \gamma_t, \delta_t, \eta_t$ sont bornés par $M > 0$ et $\sigma_t$ est borné par $m \in (0,1)$, c'est-à-dire,

$$M \triangleq \sup_{t,\omega} \mid k_t(\omega) \mid \text{ à } m \triangleq \sup_{t,\omega} \mid \sigma_t(\omega) \mid,$$

où $k_t = \alpha_t, \beta_t, \gamma_t, \delta_t, \eta_t$.

## 3.2 Le résultat de l'existence d'un controle optimal

**Théorème 3.2.1** *: Sous les hypothèses **(A1)–(A3)**, il existe un triplet de processus*$(\widetilde{Y}_t, \widetilde{Z}_t, \widetilde{u}_t)$ *$\mathcal{F}_t-$adaptés tel que*

$$\widetilde{Y}_t = \xi + \int_t^T \left(\alpha_s \widetilde{Y}_s + Z_s \beta_s + \gamma \widetilde{u}_s\right) ds + \int_t^T \left(\delta_s \widetilde{Y}_s + \widetilde{Z}_s \sigma_s + \eta_s \widetilde{u}_s\right) dB_s - \int_t^T \widetilde{Z}_s dW_s. \quad (3.2)$$

*et*

$$J(\widetilde{u}) = \inf_{v \in U} J(v). \quad (3.3)$$

Pour prouvé le théorème 3.2.1, on a besoin de quelques résultats

**Lemme 3.2.1** *: (Formule d'Itô généralisée). un Soit* $a \in \mathcal{L}^2_{\mathcal{F}}(\Omega; C(0,T;\mathbb{R}^d))$, $b \in \mathcal{L}^2_{\mathcal{F}}(0,T;\mathbb{R}^d)$, $c \in \mathcal{L}^2_{\mathcal{F}}\left(0,T,\mathbb{R}^{n\times k}\right)$, $d \in \mathcal{L}^2_{\mathcal{F}}\left(0,T,\mathbb{R}^{n\times d}\right)$ *être tels que :*

$$a_t = a_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t c dB_s + \int_0^t d_s dW_s, \qquad 0 \leq t \leq T$$

*Alors*

$$\begin{aligned}|a_t|^2 &= |a_0|^2 + 2\int_0^t \langle a_s, b_s\rangle ds + 2\int_0^t \langle a_s, c_s\rangle dB_s + 2\int_0^t \langle a_s, d_s\rangle dW_s \\ &- \int_0^t \|c_s\|^2\, ds + \int_0^t \|d_s\|^2\, ds,\end{aligned}$$

*Et*

$$E[\mid a_t \mid^2] = E[\mid a_0 \mid^2] + 2E[\int_0^t \langle a_s, b_s\rangle ds] - E[\int_0^t \parallel c_s \parallel^2 ds] + E[\int_0^t \parallel d_s \parallel^2 ds].$$

**Lemme 3.2.2** *: Soient $\left(\widehat{Y}_.^n, \widehat{Z}_.^n\right)$ et $\left(\overline{Y}, \overline{Z}\right)$ les solutions de EDDSR linéaire* **??**, *correspondant à $\widehat{u}^n$ et $\widetilde{u}$, respectivement. Alors*

$$\widehat{Y}_t^n \to \widetilde{Y} \text{ fortement en } \mathcal{L}_{\mathcal{F}}^2\left(\Omega; C(0, T, \mathbb{R}^n)\right) \tag{3.4}$$

*et*

$$\int_t^T \widehat{Z}_s^n dW_s \to \int_t^T \widetilde{Z}_s dW_s \text{ fortement en } \mathcal{L}_{\mathcal{F}}^2\left(0, T; \mathbb{R}^{n\times d}\right). \tag{3.5}$$

**Preuve.** : Supposons d'abord que **(A1)** – **(A3)** soient valables. Soit $(Y^n, Z^n, u^n)$ une suite minimisante, c'est-à-dire

$$\lim_{n\to\infty} J(u_.^n) = \inf_{v\in u} J(v_.).$$

Puisque $U$ est un ensemble compact, alors la suite $(u_.^n)_{n\geq 0}$est relativement compact.ce qui implique quelle admet une sous-suite (qu'on la note $(u_.^n)_{n\geq 0}$) telle que

$$u_.^n \to \overline{u}_. \text{ faiblement en } \mathcal{L}_{\mathcal{F}}^2\left(0, T; \mathbb{R}^k\right).$$

En appliquant le théorème de Mazur, il existe une suite de combinaisons convexes

$$\widehat{u}_.^n = \sum_{m\geq 0} \lambda_{mn} u_.^{m+n}, \text{avec } \lambda_{mn} \geq 0 \textit{ et } \sum_{m\geq 0} \lambda_{mn} = 1$$

telle que

$$\widehat{u}^n_{\cdot} \to \overline{u}_{\cdot} \text{ fortement en } \mathcal{L}^2_{\mathcal{F}}\left(0,T;\mathbb{R}^k\right). \tag{3.6}$$

Puisque l'ensemble $U \subseteq \mathbb{R}^k$est convexe et compact, il s'ensuit que $\overline{u}_{\cdot} \in \mathcal{U}$.

Preuve de 3.4 : On a :

$$\widehat{Y}^n_t = \xi + \int_t^T \left(\alpha_s \widehat{Y}^n_s + \beta_s \widehat{Z}^n_s + \gamma_s \widehat{u}^n_s\right) ds + \int_t^T \left(\delta_s \widehat{Y}^n_s + \sigma_s \widehat{Z}^n_s + \eta_s \widehat{u}^n_s\right) dB_s - \int_t^T \widehat{Z}^n_s dW_s$$

et

$$\overline{Y}_t = \xi + \int_t^T \left(\alpha_s \overline{Y}_t + \beta_s \overline{Z}_s + \gamma_s \overline{u}_s\right) ds + \int_t^T \left(\delta_s \overline{Y}_t + \sigma_s \overline{Z}_s + \eta_s \overline{u}_s\right) dB_s - \int_t^T \overline{Z}_s dW_s$$

Alors

$$\begin{aligned}(\widehat{Y}^n_t - \overline{Y}_t) = &\int_t^T [\alpha_s \left(\widehat{Y}^n_s - \overline{Y}_s\right) + \left(\widehat{Z}^n_s - \overline{Z}_s\right)\beta_s + \gamma_s\left(\widehat{u}^n_s - \overline{u}_s\right)]dt \\ &+ \int_t^T [\delta_s(\widehat{Y}^n_s - \overline{Y}_s) + \left(\widehat{Z}^n_s - \overline{Z}_s\right)\sigma_s + \eta_s\left(\widehat{u}^n_s - \overline{u}_s\right)]dB_s - \int_t^T (\widehat{Z}^n_s - \overline{Z}_s) dW_s\end{aligned}$$

Application de la formule d'Itô généralisée à $\mid \widehat{Y}^n_t - \overline{Y}_t \mid^2$,on obtient

$$\begin{aligned}&E[\sup_{t\in[0,T]} \left|\widehat{Y}^n_t - \overline{Y}_t\right|^2] + E[\int_0^T \left\|\widehat{Z}^n_s - \overline{Z}_s\right\|^2 ds] \\ &\leq 2E[\int_0^T \langle \widehat{Y}^n_s - \overline{Y}_s, \alpha_s\left(\widehat{Y}^n_s - \overline{Y}_s\right)\left(\widehat{Z}^n_s - \overline{Z}_s\right)\beta_s + \gamma_s\left(\widehat{u}^n_s - \overline{u}_s\right)\rangle ds] \\ &+ E[\int_0^T \left|\delta_s(\widehat{Y}^n_s - \overline{Y}_s) + \left(\widehat{Z}^n_s - \overline{Z}_s\right)\sigma_s + \eta_s\left(\widehat{u}^n_s - \overline{u}_s\right)\right|^2 ds]\end{aligned}$$

Ainsi en utilisant (A3) et en appliquant la formule de Young, on obtient

$$
\begin{aligned}
E[\sup_{t\in[0,T]}\left|\widehat{Y}_t^n-\overline{Y}_t\right|^2]+E[\int_0^T\left\|\widehat{Z}_s^n-\overline{Z}_s\right\|^2 ds] &\leq \frac{1}{\epsilon_1}E[\int_0^T\left|\widehat{Y}_t^n-\overline{Y}_t\right|^2 ds] \\
&+3\epsilon_1 ME[\int_0^T\left|\widehat{Y}_t^n-\overline{Y}_t\right|^2+\left\|\widehat{Z}_s^n-\overline{Z}_s\right\|^2+|\widehat{u}_s^n-\overline{u}_s|^2)ds] \\
&+E[\int_0^T(2M\left|\widehat{Y}_t^n-\overline{Y}_t\right|^2+m\left\|\widehat{Z}_s^n-\overline{Z}_s\right\|^2+|\widehat{u}_s^n-\overline{u}_s|^2)ds] \\
&+E\int_0^T(2Mm\langle\widehat{Y}_s^n-\overline{Y}_s,\widehat{Z}_s^n-\overline{Z}_s\rangle+2m\langle\widehat{Z}_s^n-\overline{Z}_s,\widehat{u}_s^n-\overline{u}_s\rangle)ds
\end{aligned}
$$

Application de la formule de Young à $\langle\widehat{Y}_s^n-\overline{Y}_s,\widehat{Z}_s^n-\overline{Z}_s\rangle$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz en $E[\int_0^T\langle\widehat{Z}_s^n-\overline{Z}_s,\widehat{u}_s^n-\overline{u}_s\rangle ds]$ et en utilisant le fait que $(\widehat{Z}_s^n-\overline{Z}_s)\in\mathcal{L}_{\mathcal{F}}^2\left(0,T;\mathbb{R}^{n\times d}\right)$, alors on a

$$
\begin{aligned}
&E[\sup_{t\in[0,T]}\mid\widehat{Y}_t^n-\overline{Y}_t\mid^2]+E[\int_0^T\parallel\widehat{Z}_s^n-\overline{Z}_s\parallel^2 ds] \\
&\leq(\frac{1}{\epsilon_1}+3\epsilon_1 M+2M+\frac{Mm}{\epsilon_2})E[\int_0^T\mid\widehat{Y}_s^n-\overline{Y}_s\mid^2 ds] \\
&+3\epsilon_1 M+m+Mm\epsilon_2)E[\int_0^T||\widehat{Z}_s^n-\overline{Z}_s||^2ds] \\
&+(3\epsilon_1+2)E[\int_0^{T\prime}|\widehat{u}_s^n-\overline{u}_s|^2ds]+2Km(E[\int_0^{T\prime}|\widehat{u}_s^n-\overline{u}_s|^2ds])^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

choisit

$$
\epsilon_1=\frac{1-m}{6M}\text{ et }\epsilon_2=\frac{1-m}{3Mm},
$$

on devient

$$E[\sup_{t\in[0,T]}\left|\widehat{Y}_t^n-\overline{Y}_t\right|^2]+C_1E[\int_0^T\left\|\widehat{Z}_s^n-\overline{Z}_s\right\|^2ds]\le C_2E[\int_0^T\left|\widehat{Y}_t^n-\overline{Y}_t\right|^2ds] \tag{3.7}$$
$$+C_3E[\int_0^T\left|\widehat{u}_s^n-\overline{u}_s\right|^2ds]+2Km(E[\int_0^{T\prime}\left|\widehat{u}_s^n-\overline{u}_s\right|^2ds])^{\frac{1}{2}}$$

où

$$\begin{aligned}C_1&=\frac{1-m}{6}>0,\\C_2&=\frac{6M}{1-m}+\frac{1-m}{2}+2M+\frac{3(Mm)^2}{1-m}>0\\C_3&=3\frac{1-m}{6M}+2>0.\end{aligned}$$

De l'inégalité 3.7, nous dérivons deux inégalités :

$$E[\sup_{t\in[0,T]}\left|\widehat{Y}_t^n-\overline{Y}_t\right|^2]\le C_2E[\int_0^T\left|\widehat{Y}_t^n-\overline{Y}_t\right|^2ds] \tag{3.8}$$
$$+C_3E[\int_0^T\left|\widehat{u}_s^n-\overline{u}_s\right|^2ds]+2Km(E[\int_0^{T\prime}\left|\widehat{u}_s^n-\overline{u}_s\right|^2ds])^{\frac{1}{2}},$$

et

$$C_1E[\int_0^T\left\|\widehat{Z}_s^n-\overline{Z}_s\right\|^2ds]\le C_2E[\int_0^T\left|\widehat{Y}_t^n-\overline{Y}_t\right|^2ds] \tag{3.9}$$
$$+C_3E[\int_0^T\left|\widehat{u}_s^n-\overline{u}_s\right|^2ds]+2Km(E[\int_0^{T\prime}\left|\widehat{u}_s^n-\overline{u}_s\right|^2ds])^{\frac{1}{2}},$$

En appliquant le lemme de Gronwall à 3.8 et en prenant la limite comme $n\to\infty$ , et en utilisant 3.6 , nous obtenons 3.4. Enfin,nous déduisons directement de 3.6,3.4 et 3.9 que

$$E[\int_0^T \left\| \widehat{Z}_s^n - \overline{Z}_s \right\|^2 ds] \to 0 \text{ , quand } n \to \infty,$$

ce qui implique 3.5 ■

## 3.3 Preuve de résultat principal

A partir du lemme 3.4 et en passant à la limite quand $n \to \infty$, il est facile de prouver 3.2. Démontrons 3.3. Nous allons minimiser $J$ sur $U$. Supposons que (A1) – (A3) soient vérifiés . Soit $(Y_.^n, Z_.^n, u_.^n)$ tel que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} J(u_.^n) &= \lim_{n\to\infty} E[g\left(Y_0^n\right) + \int_0^T l\left(t, Y_t^n, Z_t^n, u_t^n\right) dt] \\ &= \inf_{v \in u} J(v_.). \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} J(\widetilde{u}_.) &= E[g\left(\widetilde{Y}_0\right) + \int_0^T l\left(t, \widetilde{Y}_t, \widetilde{Z}_t, \widetilde{u}_t\right) dt] \\ &= E[g\left(\lim_{n\to\infty} \widehat{Y}_0^n\right) + \int_0^T l\left(t, \lim_{n\to\infty} \widehat{Y}_t^n, \lim_{n\to\infty} \widehat{Z}_t^n, \lim_{n\to\infty} \widehat{u}_t^n\right) dt]. \end{aligned}$$

Par la continuité des fonctions $g$ et $l$, on obtient

$$\begin{aligned} J(\widetilde{u}_.) &= \lim_{n\to\infty} E[g\left(\widehat{Y}_0^n\right) + \int_0^T l\left(t, \widehat{Y}_t^n, \widehat{Z}_t^n, \widehat{u}_t^n\right) dt] \\ &= \lim_{n\to\infty} E[g(\sum_{m\geq 0} \lambda_{mn} \widehat{Y}_0^{m+n})] \\ &+ \lim_{n\to\infty} E[\int_0^T l\left(t, \sum_{m\geq 0} \lambda_{mn} Y_t^{m+n}, \sum_{m\geq 0} \lambda_{mn} Z_t^{m+n}, \sum_{m\geq 0} \lambda_{mn} u_t^{m+n}\right) dt]. \end{aligned}$$

Puisque $g$ et $l$ sont convexes, il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
J(\widetilde{u}_.) &\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{m\geq 0} \lambda_{mn} E[g(Y_0^{m+n}) + \int_0^T l\left(t, Y_t^{m+n}, Z_t^{m+n}, u_t^{m+n}\right) dt] \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{m\geq 0} \lambda_{mn} J(u_.^{n+m})
\end{aligned}$$

ce implique

$$\begin{aligned}
J(\widetilde{u}_.) &\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{m\geq 0} \lambda_{mn} \max_{1\leq m\leq j_n} J(u_.^{n+m}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \max_{1\leq m\leq j_n} J(u_.^{n+m}) \sum_{m\geq 0} \lambda_{mn} \\
&= \lim_{n\to\infty} J(u_.^{n+k(n)}) \\
&= \inf_{v\in u} J(\upsilon_.).
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$J(\widetilde{u}_.) \leq \inf_{v\in u} J(\upsilon_.)$$

# Conclusion

Dans mémoire, nous considérons une nouvelle classe des équations différentielles stochastiques avec condition terminale, appelée les équations différentielles doublement stochastiques rétrogrades (EDDSRs).

Nous avons démontré l'existence et l'unicité de la solution pour les EDDSRs non linéaires dans le cas où les deux générateurs $f$ et $g$ satisfait les conditions Lipschitzienne.

Ensuite, on démontre l'existence du contrôle optimal strict pour les EDDSRs linéaires où l'ensemble des contrôles admissibles est convexe et compact. La démonstration est basée sur l'utilisation de la compacité de l'ensemble des contrôles et le théorème de Mazur ;

# Bibliographie

[1] B. Gherbal, (2014) : Optimal control problems for linear backward doubly stochastic diferential equations, Random Oper. Stoc. Equ ; 22 (3) :129-137

[2] E. Pardaux & S. Peng, (1994) : Backward doubly tochastiques différentiel equations and systems of quasilinear SPDEs, Probab.

[3] M. Jeablanc, (septembre 2006) : Cous de calcul stochastique, Master 2IF EVRY.

[4] Monique Jeanblanc & Thomas Simon, (Septembre 2005) : ELEMENTS DE CALCUL STOCHASTIQUE, IRBID.

[5] Nils berglund versionde janvier 2014,martingale et calcul stochastique, Master 2

[6] Olivier Lévéque, EPFL Semestre d'hiver 2004-2005,COURS DE PROBABILITES ET CALCUL STOCHASTIQUE

[7] Philippe Briand, (Mars 2001) : Équations Différentielles Stochastiques Rétrogrades.

# Annexe A : Rappels d'analyse

**Lemme 3.3.1** ***(Lemme de Gronwall)*** *: Soit $g$ une fonction intégrable et négative $t \geq 0$ et vérifiant*

$$g(t) \leq a + b \int_0^t g(s)ds,$$

*alors pour tout $t \geq 0$*

$$g(t) \leq a \times \int_0^t \exp(bs)ds.$$

***Théorème 3.3.1 (Théorème de Mazur)*** *Si $x_n$ converge faiblement vers $x$ alors il existe une suite de combinaisons convexes $c_n$ telle que :*

$$c_n = \sum_{i \geq 0 \geq} \alpha_{in} x^i, \quad \text{où } \alpha \geq 0 \quad \text{et } \sum_{i \geq 0} \alpha_i = 1,$$

*qui converge fortement vers $x$ :$\|c_n - x\| \to 0,$ comme $n \to \infty$.*

***Définition 3.3.1 (L'ensemble convexe)*** *: Un ensemble $A$ est dit convexe lorsque pour tout $x$ et $y$ de $A$, le segment $[x; y]$ est inclu dans $A$, c'est -à-dire :*

$$\forall x, y \in A; \forall \lambda \in [0, 1]; \lambda x + (1 - \lambda) y \in A.$$

***Définition 3.3.2 (Fonction convexe)*** *: Une fonction $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est dite convexe si pour tous $x$ et $y$ dans $E$ avec $f(x) < +\infty$ ; $f(y) < +\infty$ et tout $\lambda \in [0, 1]$ on a :*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y).$$

*De plus, la fonction $f$ est dite strictement convexe si l'inégalité est stricte lorsque $x \neq y$ et $\lambda \in ]0, 1[$ .*

# Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

| | |
|---|---|
| $EDS$ | :Equation diférentielle stochastique. |
| $EDSR$ | :Equation diférentielle stochastique rétrograde. |
| $EDDSR$ | :Equation diférentielle doublement stochastique rétrograde. |
| $P.p.s$ | :La notation presque sûrement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$ |
| $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ | :Espace de probabilité. |
| $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ | : Espace de probabilité filtré. |
| $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ | :Filtratoin. |
| $L^2$ | :L'espace de Hilbert. |
| $\mathbb{N}$ | :L'ensemble des entiers naturels. |
| $\xi$ | :La condition terminale de l'EDDSR. |
| $M^2(0, T; \mathbb{R}^n)$ | :L'espacevoctorielforméparlesprocessus $(Z_t)_{t\geq 0}$ |
| $S^2([0, T]; \mathbb{R}^n)$ | :L'espacevectorielformédesprocessus$(Y_t)_{t\geq 0}$ |
| $B\left(\mathbb{R}^d\right)$ | :La tribu borélienne sur $\mathbb{R}^d$ |
| $E$ | :L'espérance par rapport à la probabilité. |
| $v.a$ | : Variable aléatoire. |
| $\parallel A \parallel$ | : $\sqrt{TrAA^*}$. |

# Résumé:

Ce travail est consacré à l'étude des équations différentielles doublement stochastiques rétrogrades (EDDSR), qui sont des équations différentielles stochastiques rétrogrades avec deux directions différentes d'intégrales stochastiques.

Nous présentons dans la première partie, l'existence et l'unicité de la solution d'EDDSRs sous les conditions de Lipschitz sur les coefficients $f$ et $g$.

Dans la deuxième partie, nous prouvons l'existence de contrôles optimaux stricts pour les systèmes gouvernés par des EDDSRs linéaires, où le domaine de contrôle et la fonction de cout étaient supposées convexes.

***Mot clé :*** équations différentielles doublement stochastiques rétrogrades, mouvement brownien, processus stochastique, existence, unicité, contrôle stochastique, fonction de cout, …..



# Abstract :

This work is devoted to the study of doubly stochastic retrograde differential equations (BDSDE), which are retrograde stochastic differential equations with two different directions of stochastic integrals.

We present in the first part, the existence and uniqueness of the BDSDE solution under the Lipschitz conditions on the coefficients $f$ and $g$.

In the second part, we prove the existence of strict optimal controls for systems governed by linear BDSDEs, where the control domain and the cost function were assumed to be convex.

***Key Words*** **:** backward doubly Stochastic differential equation, mean field, Brownian motion, random process, existence, uniqueness, stochastic control, cost function,…



# الملخص :

قمنا في هذا العمل بدراسة المعادلات التفاضلية العشوائية المزدوجة التراجعية ، وهي عبارة عن معادلات تفاضلية عشوائية تراجعية ذات اتجاهين مختلفين من التكاملات العشوائية.

نعرض في الجزء الأول وجود ووحدانية حل هذا النوع من المعادلات في ظل شروط ليبشيز على المعاملات f و g.

وفي الجزء الثاني تم إثبات وجود ضوابط مثلى صارمة للأنظمة التي تحكمها المعادلات التفاضلية العشوائية المزدوجة التراجعية الخطية، حيث افترض أن مجال التحكم ودالة التكلفة محدبتان.

***الكلمات المفتاحية :*** المعادلات التفاضلية العشوائية المزدوجة التراجعية ، الحركة البراونية، العملية العشوائية، الوجود، الوحدانية، التحكم العشوائي، دالة التكلفة،**...**