جامعة قاصدي مرباح ورقلة

كلية الرياضيات و علوم المادة

قسم : الرياضيات

مذكرة مقدمة لاستكمال متطلبات شهادة ماستر اكاديمي

ميدان : رياضيات و إعلام آلي

فرع: رياضيات

تخصص :تحليل دالي

الموضوع

بعض الخواص الطيفية للمؤثرات وتحويل "داليج"

من إعداد الطالبة : قسمية ندى الريحان

تحت إشراف الأستاذ : عبد الرزاق حشيفة

نوقشت يوم 20/06/2024 من طرف أعضاء اللجنة :

محمد قويديري	جامعة قاصدي مرباح -ورقلة-	رئيسا.
بن الشيخ عبد الكريم	جامعة قاصدي مرباح -ورقلة-	مناقشا.
حشيفة عبد الرزاق	جامعة قاصدي مرباح -ورقلة-	مشرف.

السنة الجامعية : 2024/2023

❖ شكر وعرفان

نحمدك ربي ونشكرك على ما تفضلت علينا من واسع فضلك و نسألك ربي بعزتك وجلالك أن تتقبل مني هذا العمل خالصا لوجهك الكريم...

اللهم علمنا ما ينفعنا بما علمتنا وزدنا علما

قال رسول الله صلى الله عليه وسلم

" من لم يشكرِ النّاسَ لم يشكرِ اللّهَ ومَن صَنَعَ إِليكُم مَعرُوفًا فَكَافِئُوه ، فَإِن لَم تَجِدُوا مَا تُكَافِئُوا بِهِ فَادعُوا لَهُ حَتّى تَرَوا أَنّكُم قَد كَافَأْتُمُوهُ "

كما لا يفوتنا أن نتقدم بالشكر والامتنان إلى الوالدين الكريمين اللذان دعمونا في دراستنا من كل الجوانب نفسيا ومعنويا أكثر منها ماديا.

من هذا المنطلق واعترافا بالجميل يطيب لنا أن نتقدم بجزيل الشكر إلى أستاذي الكريم المشرف على هذا البحث الأستاذ "حشيفة عبد الرزاق" الذي تكرم بإشرافه على هذا العمل وعلى إرشاداته وتوجهاته القيمة ومشكورا بالنصح مساهما بكل ما لديه من جهود الذي لم يبخل علينا بدعمه وتشجيعه لنا طيلة انجاز هذا العمل .وكما نشكر جميع أساتذة تخصص رياضيات, وإلى كل من ساهم ولو بالكلمة الطيبة في إعداد هذا العمل الذي نتمنى أن يخدم المجتمع الجزائري سائلين المولى تبارك وتعالى أن يجزيهم عنا وعن الأمة الإسلامية كل الخير وانه ولي ذلك والقادر عليه..

❖ إهداء

أحمد الله حمدا يدوم بدوام الدهر و أشهد له بالوحدانية في السر و العلن, و أصلي

وأسلم على نبيه مشروح

الصدر الذي نسبة فضله على الأنبياء والبشر .

أهدي ثمرة هذا الجهد المتواضع إلى من لا يمكن للكلمات أن توفي حقهما:

إلى منبع الحب و الحنان، إلى من ترعرعت بين أحضانها "امي الحنون".

إلى من هو قدوتي في الحياة الذي تعب و كد من أجل تعليمي،"أبي رحمه الله تعالى".

إلى من يشاركني طعم الحياة إخوتي حبيبة فريدة،فاطمة الزهراء،سميرة، كمال، ربيحة،

محمد علي.

و اإلى رفقاء الدرب :زميلاتي و زملائي،و إلى أساتذة و طلبة قسم الرياضيات دفعة

2024 . و إلى كل من نسيهم قلمي و من لم تنساهم ذاكرتي

فائمة المحتويـــــــــات

دليل الترميزات

مدلوله	الرمز
تطبيق الجداء السلمي	$\langle . , . \rangle$
صورة T	$R(T)$
متممة التعامد	$M^{\perp}$
لاصقة M	$\overline{M}$
الجمع المباشر التبولوجي	$\oplus$
المحدب المغلق ل M	$\oplus$
المؤثر العكسي للمؤثر T	T^{-1}
عدد حقيقي	Re
حافة القرص D	∂D
متداد الطبيعي الادنى	N^{*}
النظيم المعرف على X	$\|.\|x$
جموعة الاعداد المركبة	$\mathbb{C}$
مجموعة قيم المؤثر T	$E(T)$
مجموعة تعريف المؤثر T	$D(T)$
نواة المؤثر T	$kerT$
طيف المؤثر T	$\sigma(T)$
مجموعة القيم	$\rho(T)$
المؤثر القرين للمؤثر T	T^{*}
إقتصار المؤثر T	$T\mid_{H}=S$
لصاقة مجموعة قيم المؤثر T	$\overline{E(T)}$
جبر المؤثرات الخطية المحدودة في H	$B(H)$
اثر T	trT
التبادل	$\{A\}'$
تبديل مضاعف	$\{A\}''$
الاشتقاق الداخلي وفق A	δ_{A}
الاشتقاق المعمم	$\delta_{A,B}$
متتالية التعامد والتجانس	(x_{n})
فضاء الدوال التحليلية	$L_{a}^{2}(G)$
متتالية، n عدد طبيعي	z_{n}
نصف مستوي مفتوح	Ω_{r}
الطيف النقطي للمؤثر T	$\sigma_{p}(T)$
الطيف المستمر للمؤثر T	$\sigma_{c}(T)$
الطيف الباقي للمؤثر T	$\sigma_{r}(T)$
الطيف الممدد للمؤثر T	$\sigma_{ext}(T,\lambda)$
الفضاء الجزئي الذاتي المرتبط ب λ	$E_{ext}(T,\lambda)$
نصف قطر الطيف	$r(T)$
تحويل ديغال	$\widehat{T}$
تحويل داليج	$\widetilde{T}$

مقدمة

يعتبر التحليل الدالي أحد فروع التحليل الرياضي الذي يهتم بدراسة فضاءات الدوال ومن أهم مفاهيم التحليل الدالي "مفهوم المؤثر" وهو يشغل مركز الصدارة في التحليل الدالي، لدراسة المؤثرات الخطية وبالأخص نظريتها الطيفية في الفراغات غير المنتهية (فراغ هيلبار، فراغ بناخ، ...) أهمية كبيرة في دراسة قابلية الحلول للمعادلات الدالية، ولتعدد أنواع المؤثرات الخطية خصصنا في هذه المذكرة:
(دراسة بعض الخواص الطيفية للمؤثرات وتحويل "داليج")

المؤثر T ينتمي $B(H)$، نقول أن العدد المركب λ هو قيمة ذاتية ممددة للمؤثر T إذا كان يوجد مؤثر غير معدوم $X \in B(H)$.

يحقق: $TX = \lambda XT$ في هذه الحالة، المؤثر X هو مؤثر ذاتي ممدد مرتبط بـ λ.

نسمي الطيف الممدد للمؤثر T مجموعة كل القيم الذاتية الممددة لـ T ،و نرمز لها بالرمز $\sigma_{ext}(T)$.

الفضاء الجزئي الذاتي الممدد المرتبط ب $\lambda \in \sigma_{ext}(T)$ ونرمز له بالرمز $Eext(T, \lambda)$.

في [?]، Petrovic S. et Biswas A مجموعة الطيف الممدد لمؤثر $T \in B(H)$، مع H فضاء هيلبارتي ذو بعد منتهي ، معرف بـ:

$$\sigma_{ext}(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}, \quad \sigma(T) \cap \sigma(\lambda T) \neq \emptyset\}$$

في [4] Lambert A. في حالة المؤثرات القابلة للقلب، بين انه يوجد انه ثابتين $0 < a < b < \infty$ حيث
$\sigma_{ext}(T) \subset \{z \in \mathbb{C}, \quad a \leq |z| \leq b\}$

في [1] قدم *A. Aluthge* 1990 تحويل الذي يحمل إسمه تحويل "داليج"

من أجل مؤثر $T \in B(H)$ نعتبر تحليله القطبي $T = U|T|$.

تحويل "داليج" لـ T يعرف بواسطة $\widetilde{T} = |T|^{\frac{1}{2}} U |T|^{\frac{1}{2}}$

في [18] قدم K. Okabo تحويل "داليج" المعمم من أجل $\lambda \in [0;1]$ نسمي تحويل λ "داليج" التطبيق $D_\lambda : B(H) \to B(H)$ يعرف بواسطة $D_\lambda : B(H)(T) = |T|^\lambda U |T|^{1-\lambda}$.

سوف نخصص جزءا من المذكرة لدراسة فكرة حديثة إلى حد ما، تسمى الطيف الممدد للمؤثرات.

قسمنا هذه المذكرة الى ثلاث فصول: الفصل الأول "مفاهيم أساسية ": وعرفنا فيه اهم المفاهيم الأساسية التي تم دراستها في مجال نظرية المؤثرات الخطية كما عرفنا تحويل "داليج"

الفصل الثاني " الخصائص العامة للطيف الممدد للمؤثر وعلاقته مع تحويل "داليج" : تطرقنا الى مفهوم الطيف الممدد في حالات خاصة، مثل حالة البعد المنتهي وحالة المؤثرات القابلة للقلب والطيف الممدد لتحويل "داليج" في البعد المنتهي و البعد غير المنتهي.

الفصل الثالث "امثلة وتطبيقات ": خصصنا الجزء الأخير لحساب تحويل "داليج" و الطيف الممدد لمؤثرات بعض الأمثلة المحددة مسبقا. كما قمنا بتطبيق النتائج التي تم الحصول عليها

الفصل الأول

مفاهيم اساسية

فائمة المحتويــــــات

سنقدم في هذا الفصل العناصر الأساسية في نظرية العوامل التي تعتبر ضرورية لبقية عملنا مثل فضاء "هيلبرت" وفضاء "بناخ" والمؤثر الخطي المحدود وبعض فئات الؤثرات، وطيف المؤثر وتحويلات "داليج".

1.1 تعاريف ومفاهيم

H فضاء هيليبارتي مركب قابل للفصل ذات بعد منتهي مزود بواسطة جداء سلمي ، ويرمز له بـ : $\langle . \ , \ . \rangle$

- $B(H)$ يرمز لجبر المؤثرات الخطية المحدودة في H.
- من اجل $T \in B(H)$: يرمز لنواة المؤثر (T) بالرمز $ker(T)$ ونكتب :

$$ker(T) = \{x \in D(T)/Tx = 0\}$$

- يرمز لصورة المؤثر T بالرمز $R(T)$ ونكتب :

$$R(T) = \{x \in H/Tx = H\}$$

خاصية : الجداء السلمي $\langle ., . \rangle$ يعرف نظيم في H كما يلي :

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}, \quad \forall x \in H.$$

تعريف 1.1.1: يقال أن الشعاعين x و y من H متعامدان ، إذا كان جداؤهما السلمي معدوما $\langle x \ , \ y \rangle = 0$ ونرمز : $x \perp y$

تعريف 1.1.2: ليكن M مجموعة جزئية من H ، يرمز لمتممة التعامد على M بالرمز $M^{\perp}$ تعرف كما يلي:

$$M^{\perp} = \{y \in H; \quad \langle x, y \rangle = 0, \quad \forall x \in M\}$$

ملاحظة 1.1.1:

- $M^{\perp}$ فراغ جزئي مغلق من H.
- $\overline{M} \subseteq M^{\perp\perp}$.
- $M^{\perp\perp}$ هي اصغر فراغ جزئي مغلق يحوي M.

قضية 1.1.1: اذا كان M فراغ جزئي من فضاء هيليبارت H، فإن:

$$M^{\perp\perp} = \overline{M}$$

البرهان

لاثبات المساواة يجب ان نبين الاحتواء في كلا الاتجاهين:

- $(M)^{\perp\perp} \subset \overline{M}$:

ليكن: $f \in M^{\perp\perp}$ ، نكتب f على الشكل $f = g + h$ حيث $g \in \overline{M}$ و $h \in \overline{M}^{\perp} = M^{\perp}$
وبالتالي : $f \in M^{\perp\perp}$

$$\begin{aligned} 0 &= \langle f, h\rangle = \langle g+h, h\rangle \\ &= \langle h, h\rangle \\ &= \|h\|^2 \end{aligned}$$

اي: $h = 0$ و $f = g$ اذن : $f \in \overline{M}$ و منه الاحتواء موجود .

- الاحتواء الثاني واضح ، محقق لان $M \subset M^{\perp\perp}$ و $M^{\perp\perp}$ مغلق ، اذن: $\overline{M} \subset M^{\perp\perp}$
وبالتالي : $M^{\perp\perp} = \overline{M}$.

قضية 1.1.2: اذا كان M فراغ جزئي مغلق من H ، فإن H عبارة على جمع مباشر بين M و $M^{\perp}$.
اي: $H = M \oplus M^{\perp}$.

تعريف 1.1.3: المجموعة $M = \{x_i \in H; \quad i \in I \subset \mathbb{N}\}$ تسمى نظام التعامد.
اذا كان : $i, j \in I$ و $i \neq j$
فإن : $\langle x_i, x_j\rangle = 0$ و $\|x_i\| = 1$ حيث : $\forall i \in I$.

تعريف 1.1.4: ليكن E مجموعة غير خالية و M جزء من E.

- M محدب اذا كان :

$$\forall (x, y) \in M^2, \quad \forall \alpha \in [0,1]; \quad \alpha x + (1-\alpha) y \in M$$

- المحدب المغلق ل M هو اصغر محدب يحوي M ، ونرمز له $co(M)$.

2.1 فضاء "هيلبرت"

تعريف 1.2.1: ليكن فضاء في الحقل $\mathbb{C}$. إذا وجد عدد مركب $\langle x, y\rangle$ من أجل زوج للأشعة $x, y \in X$ مرضيا:

1. $< x, x >\geq 0$ من أجل كل x في X و $< x, x >= 0$ إذا وفقط إذا $x = 0$.

2. $<\overline{x,y}>=<y,x>$ من أجل كل x و y في X.

3. $\langle x+y+z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle x,y\rangle$ من أجل كل x، y و z في X.

4. $\langle \lambda x,y\rangle = \lambda\langle x,y\rangle$ من أجل كل x و y في X ومن أجل كل عدد مركب λ.

إذن $\langle x,y\rangle$ يسمى الجداء السلمي لـ x و y.
يطلق على الفضاء الشعاعي المركب الذي يحتوي كل جداء السلمي أو فضاء "ما قبل هيلبرت".

تعريف 1.2.2: ليكن X فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{C}$ إذا وجد عدد حقيقي $\|x\| = 0$ من أجل كل الأشعة $x \in X$ مرضي:

1. $\|x\| \geq 0$ من أجل كل x في X و $\|X\| = 0$ إذا وفقط إذا $x = 0$.

2. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ من أجل كل x في X.

3. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ من أجل كل x في X ومن أجل عدد مركب λ.

إذن $\|x\|$ نقول عنه انه نظيم x.

نظرية 1.2.1: فضاء ناظمي كامل نقول عنه فضاء "بناخ".

تعريف 1.2.3: فضاء كامل مزود لجداء سلمي نقول عنه فضاء "هيلبرت".

3.1 المؤثرات الخطية المحدودة

تعريف 1.3.1: التطبيق T معرف على فضاء هيلبيارتي H في H نقول انه " مؤثر خطي " اذا كان T يحقق الخاصيتين التاليتين :

1. تجميعية : $\forall x\ ,\ y \in H, T(x+y) = Tx + Ty$.
2. متجانس : $\forall x \in H, T(\alpha x) = \alpha Tx$، و α عدد مركب .

امثلة:

- المؤثر الحيادي I يرمز له بـ $\forall x \in H, Ix = x$.
- المؤثر المعدوم 0 يرمز له بـ $\forall x \in H, 0x = 0$.

تعريف 1.3.2: T مؤثر خطي معرف على فضاء H، نقول ان T محدود اذا وجد عدد موجب c حيث :

$$\forall x \in H, \quad \|Tx\| \leq c\|x\|$$

نظيم المؤثر T معرف بـ :

$$\|T\| = inf\{c > 0 : \|Tx\| \leq c\|x\|, \forall x \in H\}$$

نظرية 1.3.1: من اجل كل مؤثر خطي T معرف على الفضاء H، فإن :

$$\|T\| = sup\{\|Tx\|; x \in H, \|x\| = 1\}$$

البرهان

نضع : $a = sup\{\|Tx\|; x \in H, \|x\| = 1\}$

1. اذا كان المؤثر T محدود ، فإن :

$$\|Tx\| \leq \|T\|\|x\| = \|T\|, \forall \|x\| = 1$$

اي أن : $a \leq \|T\|$ حسب التعريف $\|T\|$.

2. من اجل كل شعاع $x \in H$ نضع :

$$\|Tx\| = \left\|T\left(\|x\|\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| = \left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\|\|x\| \leq a\|x\|$$

و $\|T\| \leq a = sup\{\|Tx\|; x \in H, \|x\| = 1\}$

من خلال (1) و (2) نحصل على
$\|T\| = sup\{\|Tx\|; x \in H, \|x\| = 1\}$

4.1 المؤثر القابل للقلب

تعريف 1.4.1: ليكن T مؤثر خطي معرف على H نقول ان T قابل للقلب اذا وجد مؤثر S معرف على H يحقق :

$$ST = TS = I$$

حيث : I مؤثر حيادي على H .
نرمز له بـ $S = T^{-1}$ ويسمى المؤثر العكسي لـ T .

تعريف 1.4.2: اذا كان T مؤثر خطي محدود ، فإن اثر T هو مجموع العناصر القطرية للمصفوفة للمؤثر T في اي اساس ، و نرمز له بـ: trT.

5.1 المؤثر القرين

تعريف 1.5.1: من اجل $T \in B(H)$ ،T^* هو المؤثر القرين لـ T ،و المعرف بـ :

$$\forall x, y \in H, \langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$$

نظرية 1.5.1: [23]
اذا كان S و T مؤثران معرفان على فضاء هيلبارتي H، S^* و T^* مؤثران القرين لهما على الترتيب فإن :

1. $\|T\| = \|T^*\|$.
2. $(T+S)^* = T^* + S^*$.
3. $\forall \alpha \in \mathbb{C}, (\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$.
4. $(T^*)^* = T$.
5. $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*,$ ، اذا كان T قابل للقلب .
6. $(ST)^* = T^*S^*$.

6.1 المبدل

تعريف 1.6.1: E فضاء شعاعي نظيمي مركب .

1. تبادل $A \in B(E)$ هي المجموعة التي نرمز لها بـ $\{A\}'$ ومعرفة بـ:

$$\{A\}' = \{B \in B(E); AB = BA\}$$

2. تبديل مضاعف $A \in B(E)$ هو المجموعة التي نرمز لها بـ $\{A\}''$ ومعرفة بـ :

$$\{A\}'' = \{C \in B(E); \quad CB = BC, \quad \forall B \in \{A\}'\} .$$

خواص :

1. $\{A\}'' = \{\{A\}'\}'$.
2. $\{A\}'$ هو جبر جزئي من $B(E)$.
3. $\{A\}''$ هو جبر جزئي تبديلي من $B(E)$.
4. كل كثيرات الحدود من A تنتمي الى $\{A\}''$.

7.1 المشتقات

تعريف 1.7.1: لمشتق δ على Λ هو تطبيق خطي مستمر من Λ في Λ والتي تحقق الخاصية التالية:

$$\delta(XY) = \delta(X)Y + X\delta(Y), \forall X, Y \in \Lambda$$

تعريف 1.7.2:

1. ليكن $A \in \Lambda$ التطبيق δ_A من Λ نحو Λ المعرف بـ :

$$\delta_A(X) = AX - XA.$$

هو الاشتقاق الداخلي وفق A.

2. ليكن $A, B \in \Lambda$ التطبيق $\delta_{A,B}$ المعرف من Λ نحو Λ كما يلي :

$$\delta_{A,B}(X) = AX - XB$$

يسمى الاشتقاق المعمم وفق A و B .

نظرية 1.7.1: ليكن $A, B \in B(H)$ الخواص التالية متكافئة

1. $\exists X \in B(H); AX - XB = I$.
2. $\exists Y \in B(H)$ قابل للقلب حيث : $Y \in \{A\}' \cup \{B\}'$ و $Y \in R(\delta_{A,B})$.
3. $R(\delta_{A,B})$ يحتوى على مجموعة المؤثرات القابلة للقلب في $B(H)$ و تبدلية مع A او B.

البرهان

$(2) \Rightarrow (3)$: I قابل للقلب، $I \in \{A\}' \cup \{B\}'$ و $I \in R(\delta_{A,B})$.

$(1) \Rightarrow (2)$: ليكن: $Y \in B(H)$ ، قابل للقلب حيث $Y \in \{A\}' \cup \{B\}'$

(لنفترض ان: $Y \in \{A\}'$) $Y \in R(\delta_{A,B}) \Rightarrow \exists X \in B(H),$ حيث : $AX - XB = Y$

لنضع : $Z = Y^{-1}X$ (اي: $X = YZ$) ، فإن : $A(YZ) - (YZ)B = Y$ حيث : $Y \in A'$ فإن :

$Y(AZ - ZB) = Y$ ، نحصل على نتيجة $AZ - ZB = I$.

$(3) \Rightarrow (1)$: ليكن $X \in B(H)$

حيث : $AX - XB = I$

ليكن $Y \in B(H)$ قابل للقلب وتبديلي مع B.

نضع: $Z = XY$

اي ان: $X = ZY^{-1}$ ، فإن :

$$\begin{aligned} AX - XB &= I \\ \Rightarrow \quad A(ZY^{-1}) - (ZY^{-1})B &= I \\ \Rightarrow \quad (AZ - ZB)Y^{-1} &= I \\ &= YY^{-1} \end{aligned} \tag{1.1}$$

او

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad AZ - ZB = Y \\ &\Rightarrow \quad Y \in R(\delta_{A,B}) \end{aligned} \tag{1.2}$$

8.1 بعض فئات المؤثر $B(H)$

المؤثر $T \in B(H)$ ويقال:

- **متراص** : اذا : $\langle Tx_n, x_n\rangle \to 0$ من اجل كل متتالية التعامد والتجانس (x_n) من H .
- **من رتبة منتهية**: اذا : $R(T)$ ذو بعد منتهي.
- **موجب** ، اذا كان : $\forall x \in H, \langle Tx, x\rangle \geq 0$ ونرمز $T \geq 0$.
- **قرين لنفسه** ، اذا كان : $T = T^*$.
- **اسقاط** ، اذا كان : $T^2 = T$.
- **الاسقاط العمودي** اذا كان : $T^2 = T$ و $T = T^*$.
- **تقايس**، اذا: $T^*T = I_H$.
- **الوحدوي**، اذا: $T^*T = TT^* = I$.
- **طبيعي**، اذا : $T^*T - TT^* = 0$.
- **تحت طبيعي**،اذا كان يقبل امتداد طبيعي .
- **قريب من الطبيعي** ، اذا كان مبادل مع T^*T.
- **شبه طبيعي**، اذا : $T^*T - TT^* \geq 0$.

1.8.1 التحليل الديكارتي

نظرية 1.8.1: (الشكل الديكارتي) ليكن T مؤثر على فضاء هيلبرت يوجد موثرات مجاورات تلقائيا A و B حيث $T = A + iB$ ضروري: $A = \frac{1}{2}(T + T^*)$ أو $B = \frac{1}{2}(T + T^*)$

2.8.1 التحليل القطبي

تعريف 1.8.1: ليكن T مؤثر على فضاء هيلبرت إذن يوجد موثر متساوي القياس جزئي مثل U حيث $T = U|T|$
أو : $|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$ مع $N(U) = N(|T|)$ ، $T = U|T|$ ويقال أنه التحليل القطبي التحليل القطبي لـ T، وإذا كان $N(U) = N(|T|)$ ليس شرطا ضروري وراضي ويقال أن $T = U|T|$ أنه التحليل لـ T فقط.

نظريـــة 1.8.2: ليكن $T = U|T|$ التحليل القطبي للمؤثر T في فضاء هيلبرت H إذن لدينا

1. $N(|T|) = N(T)$
2. $|T^*|^q = U\,|T^*|^q\,U^*$ من أجل كل صحيح موجب q.

3.8.1 تحويل داليج

تعريف 1.8.2: من أجل مؤثر $T = U|T|$ ، نعرف تحويل داليج لـ T بواسطة $\widetilde{T}$ كما يلي:

$$\widetilde{T} = |T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}}$$

تعريف 1.8.3: (تحويل داليج عموما) من أجل $\lambda \in [0,1]$ نسمي تحويل λ داليج.
تطبيق $T_\lambda : B(H) \to B(H)$ يعرف بواسطة

$$\widetilde{T}_\lambda = |T|^{\lambda}\,U\,|T|^{1-\lambda}$$

في هذي القضية $\lambda = 1$ ، لدينا $\widetilde{T}_1 = |T|U$، أننا نسمي تحويل "دوقال". من أجل $\lambda = \frac{1}{2}$ نجد تعريف تحويل "داليج" المعرف في (1.1). ومن أجل $\lambda = 0$

نظريـــة 1.8.3: ليكن $T \in B(H)$ مؤثر p غير طبيعي مع $p < 0$ إذن لدينا التأكيدات التالية :

1. إذا كان $\frac{1}{2} \leq p < 1$ إذن $\widetilde{T}$ غير طبيعي.
2. إذا كان $0 < p \leq \frac{1}{2}$ إذن يكون $\widetilde{T}$ $\left(p + \frac{1}{2}\right)$ غير طبيعي.

توطئة 1.8.1: ليكن $T \in B(H)$ و $\lambda \in]0,1]$ ، إذن لدينا التكافؤ التالي:

$$\widetilde{T}_\lambda = \widetilde{T} \iff \text{هو شبه طبيعي } T$$

خاصية : ليكن $T \in B(H)$ و $\lambda, \mu \in [0,1]$ بحيث $\lambda \neq \mu$ لنفرض أن $\mathcal{N}(T) \subset \mathcal{N}(T^*)$
إذن لدينا:

$$\widetilde{T}_\lambda = \widetilde{T}_\mu \iff \text{شبه طبيعي } T$$

ملاحظة 1.8.1: بدون الشرط $\mathcal{N}(T) \subset \mathcal{N}(T^*)$ الخاصية السابقة لن تكون صحيحة.

مثال: إذا كان T غير فعال في الترتيب الثاني $T\neq 0$ و $T^2=0$ إذن $\widetilde{T}_\lambda=\widetilde{T}_\mu=0$ من أجل كل $\lambda,\mu\in]0,1]$

توطئة 1.8.2: ليكن $T\in B(H)$ و $a\in\mathbb{C}$ لنفرض أن $\widetilde{T}_\lambda=aT$ لدينا القضايا التالية:

1. إذا كان $a=1$ إذن T شبه طبيعي $(TT^*T=T^*TT)$
2. إذا كان $a=1$ إذن T غير فعال غي الترتيب الثاني $(T^2=0)$
3. إذا كان $a\in\mathbb{C}\backslash\{0,1\}$ إذن $T=0$

توطئة 1.8.3: ليكن $T\in B(H)$ و $\lambda\in]0,1[$. نفرض أن $T=T^*$ بأنهم غامرون. إذن

$$\left(\widetilde{T^2}\right)_\lambda=T\Longrightarrow T^2=T^*$$

توطئة 1.8.4: ليكن $T\in B(H)$ و $\lambda\in]0,1[$. نفرض أن T و T^* أنهم غامرون. إذن لدينا التداعيات التالية :

$$\widetilde{T}_\lambda=T^*\Rightarrow T=T^*$$

توطئة 1.8.5: ليكن $T\in B(H)$ و $\lambda\in]0,1[$. إذا كان T شبه طبيعي، إذن

$$\left(\widetilde{T^*}\right)_\lambda=T\Rightarrow T=T^*$$

نظريـــة 1.8.4: ليكن $T\in B(H)$ و $\lambda\in]0,1[$. إذن الشروط التالية متكافئة

1. $\left(\widetilde{TS}\right)_\lambda=\left(\widetilde{ST}\right)_\lambda,\qquad \forall S\in B(H)$
2. $\left(\widetilde{TS}\right)_\lambda=\left(\widetilde{ST}\right)_\lambda$ من أجل كل المؤثرات $S=x\oplus x$، $x\in H$
3. $T=aI$ من أجل $a\in\mathbb{C}$

نظريـــة 1.8.5: ليكن $T\in B(H)$ موثر غير مرئي، إذن الشروط التالية متاكفئة

1. T موجب
2. من أجل كل $\lambda\in[0,1]$ يكون $\widetilde{T}_\lambda$ موجب.
3. يوجد $\lambda\in[0,1]$ بحيث $\widetilde{T}_\lambda$ يكون موجب. بالخصوص إذا كان $\widetilde{T}_\lambda=cI$ من أجل بعض الثوابت الغير معدومة $c\in\mathbb{C}$ إذن $T=cI$

الفصل الثاني

الطيف الممدد للمؤثر

قائمة المحتويات

1.2 العموميات على الطيف الممدد

في هذا الفصل، نقوم بتعريف بعض النظريات الطيفية لمؤثر خطي محدود على فضاء بناخ مركب . والعلاقة بين الطيف والطيف الممدد، واعطاء بعض النتائج للطيف الممدد لبعض الحالات الخاصة من المؤثر.

تعريف 2.1.1: ليكن $T \in B(H)$. λ عدد مركب يقال ان λ قيمة نظامية للمؤثر T .
اذا كان المؤثر $\lambda I - T$ قابل للقلب باستمرار على $B(H)$.
حيث I المؤثر الحيادي نرمز لمجموعة هذه القيم بالرمز $\rho(T)$ وتسمى المجموعة التحليلية.
ونكتب :

$$\rho(T) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C}; \quad (\lambda I - T) \text{ قابل للقلب} \right\}.$$

تعريف 2.1.2: مجموعة القيم المركبة λ ، التي لا تنتمي الى $\rho(T)$ تسمى طيف المؤثر T ، ونرمز لها بالرمز $\sigma(T)$ ، اي : $\sigma(T) = \mathbb{C}/\rho(T)$.

تعريف 2.1.3: تسمى الدالة الحالة ل T المعرفة كمايلي :

$$\lambda \longrightarrow (\lambda I - T)^{-1}, \quad \lambda \in \rho(T)$$

نظرية 2.1.1: ليكن $T \in B(H)$.
المجموعة التحليلية $\rho(T)$ هي مجموعة مفتوحة .
كذلك الدالة الحالة لكل $\lambda \longrightarrow (\lambda I - T)^{-1}$ هي تحليلية في $\rho(T)$.

البرهان

ليكن λ قيمة ثابتة في $\rho(T)$ و μ عدد مركب حيث : $|\mu| < \|(\lambda I - T)^{-1}\|^{-1}$
لنبين ان $\lambda + \mu \in \rho(T)$ لتكن السلسلة $S(\mu)$.
حيث :

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-\mu)^k (\lambda I - T)^{-(k+1)}.$$

حيث : $\|\mu(\lambda I - T)^{-1}\| < 1$ سلسلة متقاربة بانتظام $B(H)$.
نرمز لهذا المجموع بـ $S(\mu)$ فإن :

$$\begin{aligned}
[(\lambda + \mu)I - T]\, S(\mu) &= (\lambda I - T)S(\mu) + \mu S(\mu) = I, \\
S(\mu)\, [(\lambda + \mu)I - T] &= S(\mu)(\lambda I - T) + \mu S(\mu) = I.
\end{aligned}$$

ومنه نستنتج ان :
$(\lambda+\mu)\in\rho(T)$ والتابع لكل μ يرفق $S(\mu)$ و الدالة $\mu \longrightarrow S(\mu)=[(\lambda+\mu)I-T]^{-1}$ وهي تحليلية من اجل $\mu=0$.

مبرهنة 2.1.1: ليكن $T\in B(H)$ ، اذا كان $d(\lambda)$ هي المسافة من النقطة λ الى الطيف $\sigma(T)$ فإن :

$$\left\|(\lambda I-T)^{-1}\right\| \geq \frac{1}{d(\lambda)}, \qquad \lambda\in\rho(T).$$

البرهان

حسب النظرية (2.1.1) السابقة ، بين انه اذا كان $|\mu|<\|(\lambda I-T)^{-1}\|^{-1}$ فإن: $(\lambda+\mu)\in\rho(T)$.
اي ان :

$$d(\lambda)\geq \left\|(\lambda I-T)^{-1}\right\|^{-1}.$$

نظرية 2.1.2: ليكن $T\in B(H)$، فإن الطيف $\sigma(T)$ متراص .

البرهان

من اجل $|\lambda|>\|T\|$. السلسلة $S(\lambda)$ متقاربة بالانتظام على $B(H)$ فإن :

$$(\lambda I-T)S(\lambda)=S(\lambda)(\lambda I-T)=I.$$

ومنه :

$$S(\lambda)=(\lambda I-T)^{-1}, \qquad (|\lambda|>\|T\|)$$

ويترتب على ذالك ان $\sigma(T)$ محدود . انطلاقا من النظرية (2.1.1) فإن $\sigma(T)$ مغلق .
و هذا يعني ان: $\sigma(T)$ متراص.

تعريف 2.1.4: ليكن $T\in B(H)$ ، نصف قطر طيف $r(T)$ ل T المعرف بواسطة :

$$r(T)=Sup\left\{|\lambda|:\lambda\in\sigma(T)\right\}.$$

خاصية : ليكن $T\in B(H)$:

$$\forall\lambda,\mu\in\rho(T),(\lambda I-T)^{-1}-(\mu I-T)^{-1}=(\mu-\lambda)(\lambda I-T)^{-1}(\mu I-T)^{-1}$$

البرهان

لدينا :

$$(\lambda I-T)\left\{(\lambda I-T)^{-1}-(\mu I-T)^{-1}\right\}(\mu I-T)=(\mu I-T)-(\lambda I-T)=(\mu-\lambda)I,$$

ومنه نحصل على النتيجة بضرب الطرفين المعادلة في $(\lambda I-T)^{-1}$ ثم في $(\mu I-T)^{-1}$

تعريف 2.1.5: ليكن $T\in B(H)$ ينقسم طيف المؤثر T الى ثلاث اقسام وهي :

- الطيف النقطي ويرمز له بالرمز $\sigma_p(T)$ و المعرفة بـ :

$$\sigma_p(T)=\Big\{\lambda\in\mathbb{C};\quad (\lambda I-T)\ \text{غير قابل للقلب}\Big\}.$$

- الطيف المستمر ويرمز له بالرمز $\sigma_c(T)$ ، والمعرفة بـ :

$$\sigma_c(T)=\Big\{\lambda\in\mathbb{C};\quad \lambda I-T\ \text{قابل للقلب}, \overline{(\lambda I-T)X}=X\quad \text{حيث}\quad (\lambda I-T)X\neq X\Big\}.$$

- الطيف النقطي الباقي ونرمز له بالرمز $\sigma_r(T)$ ، والمعرفة بـ :

$$\sigma_r(T)=\Big\{\lambda\in\mathbb{C}; (\lambda I-T)\ \text{قابل للقلب}\quad \overline{(\lambda I-T)X}\neq X\Big\}.$$

ويكون طيف المؤثر T معرف بـ :

$$\sigma(T)=\sigma_p(T)\cup\sigma_c(T)\cup\sigma_r(T).$$

اذا كان $\sigma_p(T)\ni\lambda$ ، يقال ان λ هي قيمة ذاتية لـ T ، في هذه الحالة يوجد شعاع غير معدوم x في H حيث : $Tx=\lambda x$.

يسمى x شعاعا ذاتيا يتوافق مع القيمة الذاتية λ بـ T.

2.2 الطيف الممدد للمؤثر

تعريف 2.2.1: يقال ان العدد المركب λ هو قيمة ذاتية ممددة للمؤثر $T\in B(H)$ ، اذا وجد مؤثر X معدوم من $B(H)$ حيث : $TX=\lambda XT$.

يقال ان X هو مؤثر ذاتي ممدد لـ T المرتبط بـ القيمة الذاتية λ.

نسمي الطيف الممدد للمؤثر T مجموعة من القيم الذاتية λ الممددة للمؤثر T، ونرمز لها بـ $\sigma_{ext}(T)$.

ونرمز $E_{ext}(T,\lambda)$ الفضاء الذاتي الممدد الموافق لـ $\lambda\in\sigma_{ext}(T)$.

نلاحظ ان $\lambda=1$ ينتمي الى $\sigma_{ext}(T)$ من اجل كل $T\in B(H)$ ، مع $X=I$ المؤثر الممدد الموافق لها.

نظرية 2.2.1: نفرض ان $A,B\in B(H)$ حيث :

$$\sigma(A)\cap\sigma(B)=\emptyset.$$

فإن : $X = 0$ هو الحل الوحيد لمعادلة المؤثرات

$$AX - XB = 0.$$

البرهان

انظر مرجع [21].

بالتعويض في النظرية الاخيرة $A = T, B = \lambda T$ ، نحصل مباشرة على الخاصية التالية .

خاصية : [?]

ليكن $T \in B(H)$ ، فإن :

$$\sigma_{ext}(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}, \sigma(T) \cap \sigma(\lambda T) \neq \emptyset\}$$

اذا كان : $\sigma(T) = \{\alpha\}$ ، حيث: $\alpha \neq 0$ ، فإن: $\sigma_{ext}(T) = \{1\}$.

قضية 2.2.1: لنفترض ان $T \in B(H)$ يكون شبه عديم القوة ، فإن :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}/\{0\}, \sigma_{ext}(\lambda I + T) = \{1\}.$$

1.2.2 علاقة الطيف الممدد مع الطيف النقطي

خاصية : [?] ليكن $T \in B(H)$. اذا كان $\sigma_p(T)$ الطيف النقطي ل T ، فإن :

$$\left\{\frac{\alpha}{\beta}, \alpha \in \sigma_p(T), \beta \in \sigma_p(T^*), \beta \neq 0\right\} \subset \sigma_{ext}(T)$$

البرهان

ليكن $\alpha \in \sigma_p(T)$ و $\beta \in \sigma_p(T^*)$ فإنه يوجد $x, y \in H/\{0\}$

حيث : $Tx = \alpha x$ و $T^* y = \beta y$.

نعرف المؤثر X ب $X = x \otimes y$ حيث :

$$\forall z \in H, \quad Xz = (x \otimes y)z = < z, y > x$$

ومنه :

$$TXz = < z, y > Tx = \alpha < z, y > x$$

و
$$\frac{\alpha}{\beta}XTz = \frac{\alpha}{\beta} < Tz, y > x$$
$$= \frac{\alpha}{\beta} < z, T^{*}y > x = \alpha < z, y > x,$$

ومنه X هو شعاع ذاتي ممدد ل T المرتبط بالقيمة $\frac{\alpha}{\beta}$.

اذن : $\frac{\alpha}{\beta} \in \sigma_{ext}(T)$.

2.2.2 الطيف الممدد لمؤثر قابل للقلب

نظرية 2.2.2: ليكن $T \in B(H)$ قابل للقلب ، نضع $a := \|T\| \|T^{-1}\|$ فإن :

1. $\sigma_{ext}(T) \subset \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{a} \leq |z| \leq a\} = A_{\frac{1}{a},a}$

2. اذا كان $\lambda \in \sigma_{ext}(T)$ حيث $|\lambda| \neq 1$. فإن $\exists N > 1$ حيث من اجل جداء N عنصر من مجموعة $E_{ext}(T,\lambda)$ معدوم .

و بصفة خاصة ، كل عنصر من $E_{ext}(T,\lambda)$ هو مؤثر عديم القوة من الرتبة N على الاكثر .

البرهان

1) بما ان T قابل للقلب ، فإنه يوجد $(c = \|T^{-1}\|^{-1}) \quad \exists c > 0$ حيث :

$$\forall x \in H, \|Tx\| \geq c\|x\| .$$

ليكن $\lambda \in \sigma_{ext}(T)$ و $X \in E_{ext}(T,\lambda)/\{0\}$ ، فإن :

$$TX = \lambda XT.$$
$$\forall x \in H, c\|Xx\| \leq \|TXx\| = |\lambda| \|XTx\| \leq |\lambda| \|X\| \|Tx\| .$$

فإن :

$$\forall x \in H, c\|X\| \leq |\lambda| \|X\| \|T\|$$

وبالتالي : $|\lambda| \geq \frac{1}{a}$.

من المتراجحة الثانية ، اذا كان $\lambda \in \sigma_{ext}(T), (\lambda \neq 0)$ فإن $\frac{1}{\lambda} \in \sigma_{ext}(T^{-1})$.

وبنفس الطريقة نحصل على

$$\left|\frac{1}{\lambda}\right| \geq \frac{1}{a}$$

ومنه : $|\lambda| \leq a$.

2) ليكن $\lambda \in \sigma_{ext}(T)$ حيث $|\lambda| \neq 1$ ، وليكن العدد الطبيعي $N > 1$ حيث $\lambda^{N} \notin A_{a,\frac{1}{a}}$ و $\lambda^{N-1} \in A_{a,\frac{1}{a}}$.

ليكن $X_1, ..., X_N \in E_{ext}(T,\lambda)/\{0\}$ ، فإن :

$$TX_1...X_N = \lambda^N X_1...X_N T,$$

ومنه $X_1...X_N = 0$:

3.2.2 فضاء هيليبارتي ذات البعد منتهي

في هذه الفقرة ، نصف بشكل كامل الطيف المدد لمؤثر يعمل على فضاء هيليبرت المركب ذات الابعاد المنتهية .

نظرية 2.2.3: [?]
ليكن T مؤثر في فضاء هيليبرت H ذات البعد المنتهي. فإن :

$$\sigma_{ext}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \quad \sigma(T) \cap \sigma(\lambda T) \neq \emptyset\}$$

البرهان

نفرض في الحالة الاولى ان T غير قابل للقلب ، فإن النواة T و T^* لا تساوي المجموعة $\{0\}$.
ليكن المؤثر X غير معدوم معرف من $kerT^*$ نحو $kerT$ وليكن المؤثر $X' = XP$ ، حيث P هو الاسقاط العمودي ل H على $kerT^*$.
واضح ان $(X' \neq 0)$.
ومنه :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad TX' = \lambda X'T = 0$$

اي : $\sigma_{ext}(T) = \mathbb{C}$ ، حيث T غير قابل للقلب ، ومنه :
$0 \in \sigma(T) \cap \sigma(\lambda T)$ من اجل كل $\lambda \in \mathbb{C}$ ومنه :

$$\sigma_{ext}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \quad \sigma(T) \cap \sigma(\lambda T) \neq \emptyset\} = \mathbb{C}.$$

نفرض في الحالة الثانية ان T قابل للقلب ، اي $0 \notin \sigma(T)$ معطاة $\lambda \in \mathbb{C}$ ، يكفي اثبات ان :

$$\{\lambda \in \mathbb{C}, \quad \sigma(T) \cap \sigma(\lambda T) \neq \emptyset\} \subset \sigma_{ext}(T).$$

لنفرض $\beta \in \sigma(T) \cap \sigma(\lambda T)$ ، اي انه يوجد X شعاع ذاتي غير معدوم $a \in H$ حيث $Ta = \beta a$ (بالضرورة $\beta \neq 0$ و $\lambda \neq 0$). لدينا $(\beta/\lambda) \in \sigma(T)$ ، هذا يعني $\overline{(\beta/\lambda)} \in \sigma(T^*)$ ، وبالتالي يوجد شعاع ذاتي غير معدوم $b \in H$ حيث $T^*b = \overline{(\beta/\lambda)}b$. في الاخير نضع $X = a \otimes b$ ، نحقق بسهولة ان $TX = \lambda XT$ حيث $X \neq 0$. ومنه $\lambda \in \sigma_{ext}(T)$.

نتيجة 2.2.1: ليكن T مؤثر خطي معرف على فضاء هيليبرت ذات البعد المنتهي ،فإن :

1. $\sigma_{ext}(T) = \{1\}$ اذا وفقط اذا كان $\sigma(T) = \{\alpha\}$ حيث $\alpha \neq 0$.
2. $\sigma_{ext}(T) = \mathbb{C}$ اذا وفقط اذا كان T غير قابل للقلب .
3. اذا كان T قابل للقلب ، فإن $\sigma_{ext}(T) = \{\alpha/\beta : \alpha, \beta \in \sigma(T)\}$.

4.2.2 الطيف الممدد لتحويل "داليج"

1.4.2.2 الطيف الممدد لتحويل "داليج" ذات بعد منتهي

نتائجنا الرئيسية هي مجموعة العلاقات بين الطيف الموسع لـ AB و BA، وعواقبها في شكل عدة نتائج طبيعية.

نظرية 2.2.4: ليكن A و B مؤثران خطيان محدودان على فضاء هيلبرت مركب قابل للفصل لبعد منتهي H، بحيث A يكون متجاورا ذاتيا إذن

$$\sigma_{ext}(AB) = \sigma_{ext}(BA) \tag{2.1}$$

البرهان

من أجل كل مؤثر خطي محدود A و B معرف على فضاء هيلبرت معقد قابل للفصل لبعد منتهي لدينا:

$$\begin{aligned}
\sigma_{ext}(AB) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \sigma(AB) \cap \sigma(\lambda AB) \neq \emptyset\} && \text{حسب النظرية } 2.2.4\\
&= \{\lambda \in \mathbb{C} : \sigma(AB) \cap \lambda\sigma(AB) \neq \emptyset\} && \text{حسب النظرية } I.6.3\\
&= \{\lambda \in \mathbb{C} : \sigma(BA) \cap \lambda\sigma(BA) \neq \emptyset\} && \text{حسب توطئة } I.6.2\\
&= \{\lambda \in \mathbb{C} : \sigma(BA) \cap \sigma(\lambda BA) \neq \emptyset\} && \text{حسب النظرية } I.6.3\\
&= \sigma_{ext}(BA)
\end{aligned}$$

- إذا كان $A = |T|^{\frac{1}{2}}$ و $B = 4|T|^{\frac{1}{2}}$ أو U يكون الوحدوي مع التقسيم القطبي لـ T في النظرية 2.2.4 إذن لنحصل على النتيجة الطبيعية التالية:

نتيجة 2.2.2: ليكن T مؤثر خطي محدود معرف في فضاء هيلبرت معقد قابل للفصل لبعد منتهي H، بحيث $T = U|T|$ هو تحللها القطبي، $\widetilde{T}$ تحويلها "داليج"، إذن

$$\sigma_{ext}\left(\widetilde{T}\right) = \sigma_{ext}(T)$$

نحن نستطيع برهنة 2.2.4 في حالات أخرى.

البرهان

من أجل كل مؤثر خطي محدود T معرف في فضاء هيلبرت معقد قابل للفصل لبعد منتهي H، بحيث $T = U|T|$ هو تقسيم القطبي :

$$\begin{aligned}
\sigma_{ext}(T) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \sigma(T) \cap \sigma(\lambda T) \neq \emptyset\} && \text{حسب النظرية } 2.2.4\\
&= \{\lambda \in \mathbb{C} : \sigma(T) \cap \lambda\sigma(T) \neq \emptyset\} && \text{حسب النظرية } I.6.3\\
&= \{\lambda \in \mathbb{C} : \sigma(\widetilde{T}) \cap \lambda\sigma(\widetilde{T}) \neq \emptyset\} && \text{حسب النظرية } I.6.3\\
&= \{\lambda \in \mathbb{C} : \sigma(\widetilde{T}) \cap \sigma(\lambda\widetilde{T}) \neq \emptyset\} && \text{حسب النظرية } I.6.3\\
&= \sigma_{ext}(\widetilde{T})
\end{aligned}$$

إذا كان $A = T$ و $B = U$ أو U يكون وحدوي مع التقسيم القطبي لـ T في النظرية 2.2.1 إذن لنحصل على النتائج التالية:

نتيجة 2.2.3: ليكن T مؤثر خطي محدود معرف في فضاء "هيلبرت" معقد قابل للفصل ذات بعد منتهي H، بحيث $T = U|T|$ تحللها القطبي، $\widehat{T}$ تحويلها "دوقال"، إذن

$$\sigma_{ext}\left(\widehat{T}\right) = \sigma_{ext}(T)$$

إذا $A = |T|^{\lambda}$ و $B = U\,|T|^{1-\lambda}$ أو U يكون الوحدوي مع التحلل القطبي لـ T في النظرية 2.2.1 إذن نحن نختار النتيجة التالية :

نتيجة 2.2.4: ليكن T مؤثر خطي محدود معرف في فضاء "هيلبرت" مركبا قابل للفصل ذات بعد منتهي H، بحيث $T = U|T|$ تحللها القطبي، من أجل $\lambda = [0,1]$ ثم

$$\sigma_{ext}\left(\widetilde{T_\lambda}\right) = \sigma_{ext}(T)$$

إذا $A = |T|^{\frac{1}{2}}$ و $B = T^{n-1}U\,|T|^{\frac{1}{2}}$ أو U يكون الوحدوي مع التحلل القطبي لـ T في النظرية 2.2.4 إذن نحن نختار النتيجة التالية :

نتيجة 2.2.5: ليكن T مؤثر خطي محدود معرف في فضاء "هيلبرت" مركب قابل للفصل ذات بعد منتهي H، بحيث $T = U|T|$ تحللها القطبي، إذن ثم

$$\sigma_{ext}\left(\widetilde{T^n}\right) = \sigma_{ext}(T^n)$$

إذا $A = |T|$ و $B = (T)^{n-1}U$ أو U يكون الوحدوي مع التحلل القطبي لـ T في النظرية 2.2.1 إذن نحن نختار النتيجة التالية :

نتيجة 2.2.6: ليكن T مؤثر خطي محدود معرف في فضاء "هيلبرت" مركب قابل للفصل ذات بعد منتهي H، بحيث $T = U|T|$ تحللها القطبي، إذن ثم

$$\sigma_{ext}\left(\widehat{T^n}\right) = \sigma_{ext}(T^n)$$

مثال 2.2.1

ليكن T مصفوفة 2×2 معرفة كما يلي:

$T = \begin{pmatrix} 1 & 5i \\ 2i & 1 \end{pmatrix}$ المؤثر القرين لـ T يكون $T^* = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ -5i & 1 \end{pmatrix}$

$T^*T = |T|^2 = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -7i & 26 \end{pmatrix}$ ، أيضا $T^*T = |T|^2 = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 5 \end{pmatrix}$

لذا $|T|^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & -2 \end{pmatrix}$ إذن $U = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$

يكون تحويل "داليج" للمؤثر T $\widetilde{T} = \begin{pmatrix} -2 & -i \\ i & 4 \end{pmatrix}$

نستعمل النتيجة I.1.2، نحسب الطيف الممدد من أجل المؤثر T وتحويل "داليج" للمؤثر T.

$$\sigma(T) = \{-1-\sqrt{10}, -1+\sqrt{10}\}, \qquad \sigma\left(\widetilde{T}\right) = \{-1-\sqrt{10}, -1+\sqrt{10}\}$$

إذن نختار

$$\sigma_{ext}(T) = \left\{1; \frac{11+2\sqrt{10}}{-9}; \frac{11-2\sqrt{10}}{-9}\right\}, \qquad \sigma_{ext}\left(\widetilde{T}\right) = \left\{1; \frac{11+2\sqrt{10}}{-9}; \frac{11-2\sqrt{10}}{-9}\right\}$$

هكذا $\sigma_{ext}(T) = \sigma_{ext}\left(\widetilde{T}\right)$.

2.4.2.2 الطيف الممدد لتحويل "داليج" في البعد غير منتهي

في قهذه النظرية نثبت التكتفؤ بين الطيف الممدد من أجل المؤثر T، من أجل تحويل "داليج" و من أجل تحويل "دوقال" في بعد غير منتهي

توطئة 2.2.1: لتكن T مؤثر في $\mathcal{B}(\mathcal{H})$، إذن $|T|^2$ يكون قابل للعكس إذا كان T قابل للعكس.

البرهان

T يكون قابل للعكس $\Leftrightarrow$ T^* يكون قابل للعكس

$\Leftrightarrow$ $T^*T = |T|^2$ يكون قابل للعكس

نظرية 2.2.5: ليكن T مؤثر خطي محدود معرف على فضاء "هيلبرت" مركب قابل للفصل H، بحيث $T = U|T|$ تحللها القطبي.

إذا T قابل للعكس و $X = X\,|T|^{\frac{1}{2}}$ إذن

1. $\sigma_{ext}\left(\widehat{T}\right) = \sigma_{ext}\left(T\right) = \sigma_{ext}\left(\widetilde{T}\right)$.
2. $\sigma_{ext}\left(\widehat{T}^n\right) = \sigma_{ext}\left(T^n\right) = \sigma_{ext}\left(\widetilde{T}^n\right)$ من أجل $n \in \mathbb{N}$.
3. $\sigma_{ext}\left(\widetilde{T}\widehat{T}\right) = \sigma_{ext}\left(T\widetilde{T}\right)$.

ونلاحظ أن $\widehat{T}$ هو التحويل "ديغال" بحيث $\widehat{T} = U|T|$.

البرهان

من أجل كل مؤثر خطي محدود T معرف على فضاء "هيلبرت" مركب قابل للفصل، بحيث $T = U|T|$ هو تحللها القطبي. T يكون قابل للعكس و $X\,|T|^{\frac{1}{2}} = |T|^{\frac{1}{2}}\,X$ إذن

1. $\sigma_{ext}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\backslash\{0\}$ بحيث $TX = \lambda XT\}$ حسب II.1.1

$$
\begin{aligned}
TX=\lambda XT &\Leftrightarrow U|T|X=\lambda XU|T|\\
&\Leftrightarrow U|T|^{\frac{1}{2}}|T|^{\frac{1}{2}}X=\lambda XU|T|^{\frac{1}{2}}|T|^{\frac{1}{2}}\\
\left(|T|^{\frac{1}{2}}X=X|T|^{\frac{1}{2}} \text{ حسب }\right) &\Leftrightarrow U|T|^{\frac{1}{2}}X|T|^{\frac{1}{2}}=\lambda XU|T|^{\frac{1}{2}}|T|^{\frac{1}{2}}\\
&\Leftrightarrow |T|^{\frac{1}{2}}\left(U|T|^{\frac{1}{2}}X|T|^{\frac{1}{2}}\right)|T|^{\frac{3}{2}}\\
&=|T|^{\frac{1}{2}}\left(\lambda XU|T|^{\frac{1}{2}}|T|^{\frac{1}{2}}\right)|T|^{\frac{3}{2}}\\
(\text{ حسب توطئة } 2.2.1) &\Leftrightarrow |T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}}X|T|^{2}\left(|T|^{2}\right)^{-1}\\
&=T|^{\frac{1}{2}}\lambda XU|^{\frac{1}{2}}|T|^{2}\left(|T|^{2}\right)^{-1}\\
&\Leftrightarrow |T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}}X=\lambda|T|^{\frac{1}{2}}|XU|T|^{\frac{1}{2}}\\
\left(|T|^{\frac{1}{2}}X=X|T|^{\frac{1}{2}} \text{ حسب }\right) &\Leftrightarrow |T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}}X=\lambda X|T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}}\\
&\Leftrightarrow \widetilde{T}X=\lambda X\widetilde{T}.
\end{aligned}
$$

إذن، $\sigma_{ext}(T)=\sigma_{ext}(\widetilde{T})$.

أيضا، $\sigma_{ext}(T)=\{\lambda\in\mathbb{C}, X\in\mathcal{B}(\mathcal{H})\backslash\{0\} \text{ بحيث } TX=\lambda XT\}$.

$$
\begin{aligned}
TX=\lambda XT &\Leftrightarrow U|T|X=\lambda XU|T|\\
\left(|T|^{\frac{1}{2}}X=X|T|^{\frac{1}{2}} \text{ حسب }\right) &\Leftrightarrow UX|T|=\lambda XU|T|\\
&\Leftrightarrow |T|(UX|T|)|T|=|T|(\lambda XU|T|)|T|\\
(text1.2.2) &\Leftrightarrow |T|UX|T|^{2}\left(|T|^{2}\right)^{-1}=|T|\lambda XU|T|^{2}\left(|T|^{2}\right)^{-1}\\
&\Leftrightarrow |T|UX=\lambda|T|XU\\
\left(|T|^{\frac{1}{2}}X=X|T|^{\frac{1}{2}} \text{ حسب }\right) &\Leftrightarrow |T|UX=\lambda X|T|U\\
&\Leftrightarrow \widehat{T}X=\lambda X\widehat{T}.
\end{aligned}
$$

إذن، $\sigma_{ext}(T)=\sigma_{ext}(\widehat{T})$.

2. $\sigma_{ext}\left(T^n\right)=\left\{\lambda\in\mathbb{C},X\in\mathcal{B}(\mathcal{H})\backslash\{0\}\right.$ بحيث $\left.T^nX=\lambda XT^n\right\}$.

$$\begin{aligned}
T^nX=\lambda XT^n &\Leftrightarrow (U|T|)^nX=\lambda X(U|T|)^n\\
&\Leftrightarrow (U|T|)^{n-1}U|T|^{\frac12}|T|^{\frac12}X\\
&=\lambda X(U|T|)^{n-1}U|T|^{\frac12}|T|^{\frac12}\\
\left(\text{حسب } |T|^{\frac12}X=X|T|^{\frac12}\right) &\Leftrightarrow (U|T|)^{n-1}U|T|^{\frac12}X|T|^{\frac12}\\
&=\lambda X(U|T|)^{n-1}U|T|^{\frac12}|T|^{\frac12}\\
&\Leftrightarrow |T|^{\frac12}\left((U|T|)^{n-1}U|T|^{\frac12}X|T|^{\frac12}\right)|T|^{\frac32}\\
&=|T|^{\frac12}\left(\lambda X(U|T|)^{n-1}U|T|^{\frac12}|T|^{\frac12}\right)|T|^{\frac32}\\
\left(\text{حسب توطئة } 2.2.1\right) &\Leftrightarrow |T|^{\frac12}(U|T|)^{n-1}U|T|^{\frac12}X|T|^2\left(|T|^2\right)^{-1}\\
&=|T|^{\frac12}\lambda X(U|T|)^{n-1}U|T|^{\frac12}|T|^2\left(|T|^2\right)^{-1}\\
&\Leftrightarrow |T|^{\frac12}(U|T|)^{n-1}U|T|^{\frac12}X\\
&=\lambda|T|^{\frac12}X(U|T|)^{n-1}U|T|^{\frac12}\\
\left(\text{حسب } |T|^{\frac12}X=X|T|^{\frac12}\right) &\Leftrightarrow |T|^{\frac12}(U|T|)^{n-1}U|T|^{\frac12}X\\
&=\lambda X|T|^{\frac12}(U|T|)^{n-1}U|T|^{\frac12}\\
&\Leftrightarrow \left(|T|^{\frac12}U|T|^{\frac12}\right)^nX=\lambda X\left(|T|^{\frac12}U|T|^{\frac12}\right)^n\\
&\Leftrightarrow \widetilde{T}^nX=\lambda X\widetilde{T}^n.
\end{aligned}$$

إذن، $\sigma_{ext}\left(T^n\right)=\sigma_{ext}\left(\widetilde{T^n}\right)$.

أيضا، $\sigma_{ext}\left(T^n\right)=\left\{\lambda\in\mathbb{C},X\in\mathcal{B}(\mathcal{H})\backslash\{0\}\right.$ بحيث $\left.T^nX=\lambda XT^n\right\}$.

$$
\begin{aligned}
T^nX=\lambda XT^n &\Leftrightarrow (U|T|)^nX=\lambda X(U|T|)^n\\
&\Leftrightarrow (U|T|)^{n-1}U|T|X=\lambda X(U|T|)^{n-1}U|T|\\
\left(\text{حسب } |T|^{\frac{1}{2}}X=X|T|^{\frac{1}{2}}\right) &\Leftrightarrow (U|T|)^{n-1}UX|T|=\lambda X(U|T|)^{n-1}U|T|\\
&\Leftrightarrow |T|\left((U|T|)^{n-1}UX|T|\right)|T|\\
&=|T|\left(\lambda X(U|T|)^{n-1}U|T|\right)|T|\\
\left(\text{حسب توطئة } 2.2.1\right) &\Leftrightarrow |T|(U|T|)^{n-1}UX|T|^2\left(|T|^2\right)^{-1}\\
&=\lambda|T|X(U|T|)^{n-1}U|T|^2\left(|T|^2\right)^{-1}\\
\left(\text{حسب } |T|^{\frac{1}{2}}X=X|T|^{\frac{1}{2}}\right) &\Leftrightarrow (|T|U)^nX=\lambda X|T|(U|T|)^{n-1}U\\
&\Leftrightarrow (|T|U)^nX=\lambda X(|T|U)^n\\
&\Leftrightarrow \widehat{T}^nX=\lambda X\widehat{T}^n
\end{aligned}
$$

إذن، $\sigma_{ext}\left(T^n\right)=\sigma_{ext}\left(\widehat{T}^n\right)$.

3. $\sigma_{ext}(T\widetilde{T})=\{\lambda\in\mathbb{C},X\in\mathcal{B}(\mathcal{H})\backslash\{0\}$ بحيث $T\widetilde{T}X=\lambda XT\widetilde{T}\}$.

$$
\begin{aligned}
T\widetilde{T}X=\lambda XT\widetilde{T} &\Leftrightarrow U|T||T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}}X=\lambda XU|T||T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}}\\
\left(\text{حسب } |T|^{\frac{1}{2}}X=X|T|^{\frac{1}{2}}\right) &\Leftrightarrow U|T|^{\frac{1}{2}}|T|UX|T|^{\frac{1}{2}}=\lambda XU|T|^{\frac{1}{2}}|T|U|T|^{\frac{1}{2}}\\
&\Leftrightarrow |T|^{\frac{1}{2}}\left(U|T|^{\frac{1}{2}}|T|UX|T|^{\frac{1}{2}}\right)|T|^{\frac{3}{2}}\\
&=|T|^{\frac{1}{2}}\left(\lambda XU|T|^{\frac{1}{2}}|T|U|T|^{\frac{1}{2}}\right)|T|^{\frac{3}{2}}\\
\left(\text{حسب توطئة } 2.2.1\right) &\Leftrightarrow |T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}}|T|UX|T|^2\left(|T|^2\right)^{-1}\\
&=|T|^{\frac{1}{2}}\lambda XU|T|^{\frac{1}{2}}|T|U|T|^2\left(|T|^2\right)^{-1}\\
&\Leftrightarrow |T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}}|T|UX=\lambda|T|^{\frac{1}{2}}XU|T|^{\frac{1}{2}}|T|U\\
\left(\text{حسب } |T|^{\frac{1}{2}}X=X|T|^{\frac{1}{2}}\right) &\Leftrightarrow |T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}}|T|UX=\lambda X|T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}}|T|U\\
&\Leftrightarrow \widetilde{T}\widehat{T}X=\lambda X\widetilde{T}\widehat{T}.
\end{aligned}
$$

إذن، $\sigma_{ext}(T\widetilde{T})=\sigma_{ext}(\widetilde{T}\widehat{T})$.

الفصل الثالث

تطبيقات وأمثلة

قائمة المحتويات

في هذا الجزء، سنرى بعض الأمثلة أو نستطيع حساب الشعاع الرقمي، تحويل داليج والطيف الممدد للمؤثرات

1.3 أمثلة وتطبيقات في بعد منتهي

1.1.3 العلاقة بين الطيف الممدد للمؤثر T و "تحويل داليج"

لتكن T مصفوفة معرفة كما يلي

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

ومنه

$$T^* = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

إذن

$$T^*T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}$$

وبما أن T^*T هي مصفوفة قطرية إذن:

$$|T| = (T^*T)\,\frac{1}{2} = \begin{pmatrix} \sqrt{1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

ومنه

$$U = T\cdot(|T|)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

نجد أيضا لأن $|T|$ مصفوفة قطرية:

$$(|T|)\,\frac{1}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

أي

$$\widehat{T}=(T)^{\frac{1}{2}}U(T)^{\frac{1}{2}}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\sqrt{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}&0\\\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&\sqrt{5}\\\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}&0\\\frac{\sqrt{15}}{2}&0&\sqrt{5}\end{pmatrix}$$

نحسب كثير حدود من أجل القيم الذاتية للمصفوفة T و $\widetilde{T}$

$$\begin{aligned}P_T(\lambda)&=\lambda^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\lambda\right)-\frac{5}{4}-\frac{5\times 3}{4}+\frac{5\sqrt{3}}{2}\lambda\\&=-\lambda^3+\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda^2+\frac{5\sqrt{3}}{2}\lambda-5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_{\widetilde{T}}(\lambda)&=\lambda^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\lambda\right)-\frac{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}{4}-\frac{\sqrt{15}\times\sqrt{15}}{4}+\frac{\sqrt{5}\sqrt{15}}{2}\lambda\\&=-\lambda^3+\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda^2+\frac{5\sqrt{3}}{2}\lambda-5\\&=P_T(\lambda)\end{aligned}$$

لذا $\sigma(T)=\sigma(\widetilde{T})$.
إذن $\sigma_{ext}(\widetilde{T})=\sigma_{ext}(T)$

2.1.3 الطيف الممدد للمؤثر T

قضية 3.1.1: [24] ليكن $\{e_1,e_2\}$ أساس متعامد لـ H إذن

$$W(T)=\{\langle Tx,x\rangle : x=e_1\cos\theta+ie_2\sin\theta\exp(i\varphi),\theta\in]0,\frac{\pi}{2}[,\varphi\in[0,2\pi]\}$$

قضية 3.1.2: الطيف الممدد لـ T يكون:

1. $\sigma_{ext}(T)=\left\{\frac{\lambda_1}{\lambda_j}:\lambda_i,\lambda_j\in\sigma(T)\right\}$ إذا $\lambda_i\neq\lambda_j\neq 0$.
2. $\sigma_{ext}(T)=\{1\}$ إذا $\lambda_1=\lambda_2\neq 0$.
3. $\sigma_{ext}(T)=\mathbb{C}$ إذا $\lambda_i=0, i=1,2$.

الخـاتمـة

يندرج محتوى هذه المذكرة في العمل على لإظهار العلاقة بين الطيف الممدد و تحويل "داليج" إذ يعتبر هذا الموضوغ من اهم المواضيع الشائعة, لقد حاولنا إستعراض تعاريف المؤثرات الخطية و خواصها.

لهذا الغرض جمعنا أهم المقالات التي تناولت هذا الموضوع و بعض المراجع من التحليل الدالي ونظرية المؤثرات.

المراجع العلمية

[1] A. Aluthge, On p-hyponormal Operators for $0 < p < 1$ Integral Equations Operator Theory 13(1990), 307315.

[2] A. Brown,P.R. Halmos, A. L. Shield. Cesàro operators, Acta Sci. Math. (Szeged), 26 :125-137, 1965

[3] A Hechifa, A. Mansour. The weighted Cesàro operator Ch 2 ℓ2(h) is subnormal, (En préparation)

[4] Alan Lambert. Hyperinvariant subspaces and extended eigenvalues. New York J. Math.,10 :83-88, 2004

[5] Animikh Biswas, Alan Lambert, and Srdjan Petrovic. Extended eigenvalues and the Volterra operator. Glasg. math. J.,44(3) 521-534,2002:

[6] Animikh Biswas, Srdjan Petrovic. On extended eigenvalues of operators. Integral Equtions Operator Theory, 55(2) 233-248,2006:

[7] Constantin Apostol. Universal quasinilpotent operators. Rev. Roumaine Math. Pures Appl., 25(2) :135-138, 1980

[8] E.B. Davies, Linear operators and their spectra, Cambridge University Press. 106 (2007)

[9] F. Chabbabi, La applications qui commutent avec la transformation de Aluthge, Thése, Université de Lille. (2017)

[10] F. Chabbabi, M. Mbekhta, Jordan product maps commuting with the X-Aluthge transform. J. Math. Anal. (2017)

[11] F. Chabbabi, Product commuting maps with the A-Aluthge transform, J. Math. Anal. Appl. (2016)

[12] Hari Bercovici. Operator theory and arithmetic in H1, volume 26 of Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, 1988

[13] Hasan Alkanjo. On extended eigenvalues and extended eigenvectors of truncated shift. Concrete Operators, 1 :19-27, 2013

[14] James A. Deddens. Analytic Toeplitz and composition operators. Canad. J. Math., 24:859–865, 1972

[15] James A. Deddens. Intertwining analytic Toeplitz operators. Michigan Math. J., 18 :243-246, 1971

[16] J. Bram, Subnormal operators, Duke Math. J., (1955), 75-94

[17] John B. Conway. Functions of one complex variable. II, volume 159 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, NewYork, 1995

[18] John B. Conway, The theory of subnormal operators, Mathematical Surveys and Monographs, Volume : 36, 1991

[19] Julia Wagner, On the cesàro operator in weighted l2sequence space and the generalized concept of normality, Ann. Funct. Anal. 4 (2013), no. 2, 1-11

[20] K. Okuba, On weakly unitarily invariant norm and the Aluthge transformation, Linear Algebra Appl. 371(2003), 369-375.

[21] Marvin Rosenblum. On the operator equation BX - XA = Q. Duke Math. J., 23 :263–269,1956

[22] M Lacruz, F. Saavedra, S. Petrovic and O. Zabeti. Extended eigenvalues for Cesàro operators, Math. FA. Arxi=1403-4844V1

[23] Nelson Dunford and Jacob T. Schwartz. Linear operators. Part I.Wiley Classics Library. John Wiley Sons, Inc., New York, 1988

[24] Paul Richard Halmos. A Hilbert space problem book, volume 19 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York-Berlin, second edition, 1982. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 17

[25] R.Nagel .Towards a ”Matrix theory” for unbounded operator matrices, Math.Z, 201 (2009), 57-68

[26] S. Mechri, Some recent results on operator commutators and related operators with applications, Lecture Monograph, (2010)

[27] Tavan T. Trent, New conditions for subnormality , Pacific Journal of Mathematics, Vol. 93, No. 2, April, 1981

[28] T. Yamazaki, On numerical range of the aluthge transformation, Linear Algebra Appl. 341(2002), 111-117.

[29] T. Yamazaki, On upper and lower bounds for the numerical radius and an equality condition, Studia Math. 178 (2007), 8389.

ملخص

تركز هذه المذكرة حول بعض الخواص الطبيعية للمؤثرات المعرفة على فضاء "بناخ"، وخصوصا المفهوم الطريف حديث التعريف والذي يسمى الطيف الممدد لتحويل "داليج" سوف نقدم بعض التعاريف اللازمة في مجال نظرية المؤثرات وبعض فئات المؤثرات كما قمنا بتعريف تحويل "داليج"، وبعض خواصه، ثم نتطرق إلى الخصائص العامة للطيف الممدد لبعض المؤثرات في بعض الحالات الخاصة مثل حالة المؤثرات المنتهية البعد والمؤثرات القابلة للقلب. كما نقدم بعض النتائج الخاصة بين الطيف الممدد البعد المحدود، ونتائجها في شكل BA و AB في البعد المحدود، ونتائجها في شكل عدة توطئات بالإضافة إلى ذلك مكننا من هذه العلاقة من العثور على الطيف الممدد لتحويل "داليج" كما أثبتنا التكافؤ بين الطيف الحمد لتحويل "داليج" و تحويل "ديغال" والمشغل T في الأبعاد النهائية . وفي الأخير قمنا بحساب تحويل "داليج" والطيف الممدد المؤثرات لبعض الأمثلة المحددة مسبقا. كما قمنا بتطبيق النتائج التي تم الحصول عليها.

الكلمات المفتاحية: تحويل "داليج"، الطيف الممدد، تحويل "ديغال".

Résumé

Ce mémoire se concentre sur certaines des propriétés naturelles des effets définis sur l'espace de Banach, en particulier le concept intéressant nouvellement défini appelé spectre ètendu de la transformée d'aluthge. Nous présenterons quelques définitions nécessaires dans le domaine de la théorie des effets et quelques classes. Nous définissons également la transformée d'aluthge et certaines de ses propriétés. Nous discutons ensuite des caractéristiques générales du spectre étendu de certains effets dans certains cas particuliers, comme le cas des effets de dimension finie et des effets inversibles. Nous présentons également quelques résultats particuliers entre le spectre étendu de dimension finie, et leurs résultats sous forme de BA et AB en dimension finie et leurs résultats sous forme de plusieurs préliminaires. De plus, cette relation nous a permis de trouver le spectre étendu, pour la transformée d'Aluthge Nous avons également prouvé l'équivalence entre le spectre d'éloge pour la transformée d'Aluthge Et transformez le "Degal" et fopérateur T dans les dimensions finales. Enfin, nous avons calculé la et la transformée d'Aluthge effets de spectre étendu des operateur, quelques exemples définis précédemment. Nous avons également appliqué les résultats il a été reçu.

Mot clés: Transformée d'aluthge, spectre étendu, transformation "Dégal".

Abstract

This mémoire focuses on some of the natural properties of the effects defined on the Banach space, especially the newly defined interesting concept called the praise spectrum of the Dalege transform. We will present some necessary definitions in the field of the theory of effects and some classes of the effect. We also define the" Aluthge" transform and some of its properties Then we discuss the general characteristics of the extended spectrum of some effects in some special cases, such as the case of finite-dimensional effects and invertible effects. We also present some special results between the finite-dimensioned extended spectrum, and their results in the form of BA and AB in the finite dimension and their results in the form of several preliminaries. In addition, this relationship enabled us to find the extended spectrum for the "Aluthge" transform. We also proved the equivalence between the praise spectrum for the "Aluthge"transform And the "Degal" and the operator T in the final dimensions. Finally, we calculated the" Aluthge" transform and the extended spectrum effects, some previously defined examples. We also applied the results it was received.

Keywords: Dalij transform, extended spectrum, transform "Degal."