



RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Kasdi Merbah Ouargla



Faculté des Mathématiques et Sciences de la Matière

Département de Mathématiques

Présentée en vue de l'obtention du Diplôme de Master

Filière : Mathématiques

Spécialité Modélisation et analyse numérique

Thème

Comportement asymptotique de la solution d'une équation d'évolution semi-linéaire

Par : Khenfer Nadia

Soutenue publiquement le : 20/06/2024

Devant le jury composé de:

Dr. Keltoum kaliche

Président

UKM Ouargla

Dr. Agti Mohammed

Encadreur

UKM Ouargla

Dr. Djemaa Messaoudi

Examineur

UKM Ouargla

Année : 2023/2024

Dédicace

“

Tout d'abord, je remercie Dieu Tout-Puissant pour Ses innombrables bénédictions, ainsi que pour la force et la patience qu'Il m'a accordées pour accomplir ce travail.

À mon cher père, merci pour ton soutien constant et tes grands sacrifices.

À ma chère mère, merci pour ton amour, tes soins et ton encouragement continu.

À mes frères et sœurs, merci d'avoir toujours été à mes côtés et de m'avoir soutenu à chaque étape.

À tous les membres de ma famille, merci pour votre soutien et votre amour, qui ont été une source d'inspiration pour moi.

”

Remerciements

Je tiens avant tout à exprimer ma gratitude envers mon professeur et mon superviseur pour ce mémoire, M. Mohammed Agti, pour l'aide et l'encouragement qu'il m'a apportés tout au long de la recherche, ainsi que pour sa disponibilité constante, son attention aux détails et ses précieux conseils.

Je tiens également à remercier les membres du jury : Mme Keltoum kaliche , qui m'a honoré en présidant le jury, et Mme Djemaa Messaoudi, qui m'a honoré en examinant le travail.

À tous ceux qui n'ont pas été mentionnés spécifiquement dans cette page de remerciements, mais qui ont contribué directement ou indirectement à la réalisation de ce travail, je tiens à exprimer toute ma gratitude. Que Dieu les récompense.

ملخص

يهدف هذا العمل إلى تحليل سلوك تقارب حل معادلة تطور شبه خطية باستخدام نظريات semi-groupes. قمنا بإثبات وجود ووحدانية الحل. بالإضافة إلى ذلك، قدمنا مثالاً عملياً لدراسة سلوك تقارب حل معادلة تطور شبه خطية للحرارة عند اتجاه الزمن نحو اللانهاية.

كلمات مفتاحية: السلوك المقارب، معادلة التطور، شبه خطي

English

This work aims to analyze the asymptotic behavior of the solution of a semi-linear evolution equation using semi-group theories. We have proved the existence and uniqueness of the solution. Additionally, we provided a practical example to study the asymptotic behavior of the solution of the semi-linear heat evolution equation as time tends to infinity.

Keywords : asymptotic behavior, evolution equation, semi-linear

Français

Ce travail vise à analyser le comportement asymptotique de la solution d'une équation d'évolution semi-linéaire en utilisant les théories des semi-groupes. Nous avons démontré l'existence et l'unicité de la solution. De plus, nous avons présenté un exemple pratique pour étudier le comportement asymptotique de la solution d'une équation d'évolution semi-linéaire de la chaleur lorsque le temps tend vers l'infini.

Résumé : comportement asymptotique, équation d'évolution, semi-linéaire

Table des matières

Dédicace	I
Remerciements	II
Introduction	1
1 Rappel d'analyse fonctionnelle	2
1.1 Espaces de Sobolev	2
1.1.1 Espaces $L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$	2
1.1.2 Espace de soboleve $H^m(\Omega), H^1(\Omega), H_0^1(\Omega)$	3
1.1.3 Espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega)$	4
1.1.4 Propriété (Inégalité de Poincaré)	5
1.2 Théorème de Lax-Milgram	5
1.3 Formule de Green	6
1.4 Notions générales sur les semi-groupes	6
1.4.1 Semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés	7
1.4.2 Semi-groupes fortement continus (C_0 -semi-groupe)	7
1.4.3 Semi-groupe intégré	9
1.4.4 semi-groupe de contraction	11
1.4.5 Théorème de Hille-Yosida	11
1.4.6 Opérateurs m-dissipatifs dans un espace de Banach.	13
1.4.7 Opérateurs m-dissipatifs dans un espace de Hilbert	14
1.5 Opérateur maximal monotone.	15
1.6 Opérateurs m-accrétifs	16
2 Problèmes d'évolution	17
2.1 Problème homogene	17
2.2 Problèmes non homogene	17
2.3 Problèmes semi-linéaires	18
2.3.1 Solutions globales généralisées	19
2.3.2 Solutions globales classique	23
2.3.3 Solutions locales	23
2.3.4 Solutions maximales.	24
2.4 Un résultat général	25
3 Comportement asymptotique de la solution d'une equation d'évolu- tion de la chaleur	27
3.1 Dérivabilité de la solution dans l'espace L^p	27

Table des matières

3.2 Comportement asymptotique de la solution	28
Conclusion	34

Notations générales

Ω	Ouvert borné de \mathbb{R}^n .
A	Opérateur linéaire.
$D(A)$	Domaine de l'opérateur A .
$\overline{D(A)}$	Adhérence de l'ensemble $D(A)$.
$L^\infty(\Omega)$	L'ensemble des fonctions réelles bornées sur Ω .
L^1	L'espace des fonctions intégrables.
$L^2(\Omega)$	L'espace des fonctions de carré intégrable sur Ω .
$L^1(0, T; E)$	L'espace des fonctions intégrables sur $0, T]$ à valeur dans E .
$C^1(s, T; E)$	L'espace des fonctions continûment différentiables sur $[s, T]$ à valeur dans E .
$H^1(\Omega)$	L'espace de Sobolev des fonctions qui appartiennent à $L^2(\Omega)$ et dont les dérivées au sens des distributions appartiennent à $L^2(\Omega)$.
$H_0^1(\Omega)$	L'adhérence de $D(\Omega)$ dans H^1 , c-à-d $H_0^1(\Omega) = \overline{D(\Omega)}$.
Δ	L'opérateur Laplacien.

Introduction

Ce travail étudie le comportement asymptotique des solutions des équations d'évolution semi-linéaires en utilisant les théories des semi-groupes, qui sont des outils mathématiques essentiels pour résoudre de telles équations comme l'équation de la chaleur et l'équation de diffusion. Ce sujet revêt une grande importance dans plusieurs domaines tels que la physique et la chimie, contribuant à la compréhension de l'impact des différents facteurs à long terme. L'objectif de cette étude est d'analyser le comportement asymptotique des solutions des équations d'évolution semi-linéaires et de comprendre comment ces solutions évoluent avec le temps. Plusieurs scientifiques ont abordé ce sujet dans leurs recherches, comme A. Pazy[9] dans son livre "Théorie des semi-groupes et équations différentielles partielles" (1983), où il a examiné l'utilisation des théories des semi-groupes pour résoudre des équations semi-linéaires, fournissant ainsi une base solide pour nos recherches. De plus, Pierre Baras et Laurent Véron[2] (1979) ont proposé une analyse approfondie du comportement asymptotique de l'équation d'évolution semi-linéaire de la chaleur, qui constitue une référence importante pour notre étude.

Notre mémoire se compose de trois chapitres.

1. **Chapitre 1** : Ce chapitre présente les concepts généraux que nous utiliserons par la suite, tels que l'espace de Sobolev et la théorie des semi-groupes.
2. **Chapitre 2** : Nous avons étudié l'existence et l'unicité de la solution du problème évolution homogène et non homogène. Nous avons également étudié le comportement, l'existence et l'unicité des différentes solutions du problème semi-linéaire (solutions globales généralisées, solutions globales classiques, solutions locales et solutions maximales).
3. **Chapitre 3** : Nous avons étudié le comportement asymptotique de la solution du problème semi-linéaire pour l'équation de la chaleur, où nous avons utilisé les théories sur les semi-groupe de contraction d'un espace de Hilbert selon[3] (H. Brézis). Nous avons grandement bénéficié des résultats et des méthodes présentés dans[2](Pierre Baras, Laurent Véron)

Chapitre 1

Rappel d'analyse fonctionnelle

1.1 Espaces de Sobolev

1.1.1 Espaces $L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$

Définition 1.1. [4] Soit p un réel de $[1; +\infty[$. On définit

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et } |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

On note

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}$$

$\|\cdot\|_{L^p}$ est une norme.

Définition 1.2. [4] On pose

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et } \exists C \text{ t.q. } |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\}$$

On note

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf \{C; |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\}$$

$\|\cdot\|_{L^\infty}$ est une norme.

Définition 1.3 (Les espaces $L^p(I, X)$). Soit $p \in [1, \infty]$, on note par $L^p(I, X)$ l'ensemble des (classes d'équivalence des) fonctions mesurables $f : I \rightarrow X$ telles que $x \mapsto |f(x)|$ appartient à $L^p(I)$. Pour $f \in L^p(I, X)$, on définit

$$\|f\|_{L^p} = \begin{cases} \left(\int_I |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } p < \infty, \\ \sup_{x \in I} |f(x)| & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Proposition 1.1 (Inégalité de Hölder). Si $f \in L^p$ et $g \in L^{p'}$ alors

$$fg \in L^1 \quad \text{et} \quad \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'} \quad (1.1)$$

Démonstration. voir [4] □

Remarque 1.1. pour $1 < p < +\infty$; nous désignons p' l'exposant conjugué.

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

Propriétés

Théorème 1.1 (Théorème de convergence dominée de Lebesgue). Soit (f_n) une suite de fonctions de L^1 . On suppose que :

1. $f_n(x) \rightarrow f(x)$ p.p. sur Ω .
2. Il existe une fonction $g \in L^1$ telle que pour chaque n , $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p. sur Ω .

Alors $f \in L^1(\Omega)$ et $\|f_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0$.

Démonstration. voir[4] □

Théorème 1.2 (Fischer-Riesz). L^p est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq \infty$.

Démonstration. voir[4] □

1.1.2 Espace de soboleve $H^m(\Omega), H^1(\Omega), H_0^1(\Omega)$

Soit v une fonction de $L^2(\Omega)$; elle s'identifie à une distribution sur Ω . Encore notée v , et on peut donc définir ses dérivées $\frac{\partial v}{\partial x_i}$, $1 \leq i \leq n$, en tant que distributions sur Ω . $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ n'appartient pas au sous-espace $L^2(\Omega)$. On introduit alors la

Définition 1.4. [10] Pour tout entier $m \geq 1$, on appelle espace de Sobolev d'ordre m sur Ω l'espace $H^m(\Omega)$ défini par

$$H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \mid \partial^\alpha v \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq m\}.$$

On munit $H^m(\Omega)$ du produit scalaire $(u, v)_{m,\Omega}$ défini par

$$(u, v)_{m,\Omega} = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha u \partial^\alpha v \right\} dx.$$

et on note

$$\|v\|_{m,\Omega} = (v, v)_{m,\Omega}^{\frac{1}{2}}.$$

la norme correspondante.

Définition 1.5. [10] On appelle espace de Sobolev d'ordre 1 sur Ω l'espace $H^1(\Omega)$ défini par

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) ; \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq n \right\}.$$

On munit $H^1(\Omega)$ du produit scalaire $(u, v)_{1,\Omega}$ défini par

$$(u, v)_{1,\Omega} = \int_{\Omega} \left(uv + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx,$$

et on note

$$\|v\|_{1,\Omega} = (v, v)_{1,\Omega}^{\frac{1}{2}}.$$

la norme correspondante.

Définition 1.6. [10] On désigne par $H_0^1(\Omega)$ l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.

1.1.3 Espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega)$

multi-indice α de la manière suivante :

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

où $\alpha_i \geq 0$ pour tout $i = 1, 2, \dots, n$.

Définition 1.7. [4] Étant donné un entier $m \geq 2$ et un réel $1 \leq p \leq \infty$, on définit par récurrence l'espace

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in W^{m-1,p}(\Omega); u' \in W^{m-1,p}(\Omega)\},$$

On pose $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$.

On vérifie aisément que $u \in W^{m,p}(\Omega)$ si, et seulement si il existe m fonctions $g_1, \dots, g_m \in L^p(\Omega)$ telles que

$$\int_{\Omega} u D^j \varphi = (-1)^j \int_{\Omega} g_j \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \quad \forall j = 1, 2, \dots, m.$$

Où $D^j \varphi$ désigne la dérivée à l'ordre j de φ . Lorsque $u \in W^{m,p}(\Omega)$, on peut considérer les dérivées successives $u' = g_1, (u')' = g_2, \dots$, jusqu'à l'ordre m ; on a les notes $Du, D^2u, \dots, D^m u$.

L'espace $W^{m,p}$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \|u\|_p + \sum_{\alpha \leq 1}^m \|D^\alpha u\|_p.$$

et l'espace H^m est muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^m} = (u, v)_{L^2} + \sum_{\alpha \leq 1}^m (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2}.$$

On montre que la norme $\|\cdot\|_{W^{m,p}}$ est équivalente à la norme

$$\|u\| = \|u\|_{L^p} + \|D^m u\|_{L^p},$$

plus précisément, on établit que si $1 \leq j \leq m-1$, alors $\forall \varepsilon > 0, \exists C$ (dépendant de m et $|\Omega| \leq \infty$) tel que

$$\|D^j u\|_{L^p} \leq \varepsilon \|D^m u\|_{L^p} + C \|u\|_{L^p} \quad \forall u \in W^{m,p}.$$

On peut étendre aux espaces $W^{m,p}$ les propriétés démontrées pour $W^{1,p}$, par exemple

$$W^{m,p}(\Omega) \subset C^{m-1}(\overline{\Omega}).$$

avec injection continue.

Définition 1.8. [4] Étant donné $1 \leq p \leq \infty$, on désigne par $W_0^{1,p}(\Omega)$ la fermeture de $C_c^1(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$. On note

$$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega).$$

L'espace $W_0^{1,p}$ est muni de la norme induite par $W^{1,p}$, et l'espace H_0^1 est muni du produit scalaire induit par H^1 .

L'espace $W_0^{1,p}$ est un espace de Banach séparable; il est de plus réflexif pour $1 < p < \infty$. L'espace H_0^1 est un espace de Hilbert séparable.

Propriétés

1. L'espace $W^{1,p}$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$.
2. L'espace $W^{1,p}$ est réflexif pour $1 < p < \infty$ et séparable pour $1 \leq p < \infty$.
3. L'espace H^1 est un espace de Hilbert séparable.

Démonstration. voir[4] □

Théorème 1.3. *Il existe une constante C (dépendant seulement de $|\Omega| \leq \infty$) telle que*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega), \quad \forall 1 \leq p \leq \infty.$$

Autrement dit, $W^{1,p}$ avec une injection continue pour tout $1 \leq p \leq \infty$.

De plus, lorsque Ω est borné, on a

- *L'injection $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$ est compacte pour $1 < p \leq \infty$.*
- *L'injection $W^{1,1}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ est compacte pour $1 \leq q < \infty$.*

Démonstration. voir[4] □

1.1.4 Propriété (Inégalité de Poincaré)

On suppose que $\Omega = [a, b]$ est borné, alors il existe une constante C (dépendant de $|\Omega|$) telle que

$$\|u\|_{W^{1,p}} \leq C \|u'\|_{L^p} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

Autrement dit, sur $W_0^{1,p}$, la quantité $\|u'\|_{L^p}$ est une norme équivalente à la norme de $W^{1,p}$.

Démonstration. voir[4] □

1.2 Théorème de Lax-Milgram

Théorème 1.4. *Soit H un espace de Hilbert réel et a une forme bilinéaire sur H , L une forme linéaire sur H . On suppose que :*

1. *a est continue*

$$\forall u, v \in H \quad |a(u, v)| \leq \|a\| \|u\|_H \|v\|_H.$$

2. *a est coercive, il existe $\alpha > 0$ tel que*

$$\forall u \in H, a(u, u) \geq \alpha \|u\|_H^2.$$

3. L est continue

$$\forall u \in H, |L(u)| \leq \|L\| \|u\|_H.$$

Alors, il existe un unique u dans H qui vérifie

$$\forall v \in H, a(u, v) = L(v),$$

et celui-ci vérifie

$$\|u\|_H \leq \frac{\|L\|}{\|a\|_{\mathcal{H}}}.$$

de plus, si a est symétrique, alors u est aussi l'unique élément de H qui minimise la fonctionnelle $J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v)$ pour $v \in H$.

Démonstration. voir[4] □

1.3 Formule de Green

La formule de Green est un outil fondamental pour la résolution des EDP. Elle coïncide, en dimension 1, avec la formule d'intégration par partie.

Théorème 1.5 (Formule d'Ostrogradsky). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de classe C^1 et $\partial\Omega$ son bord. Soit F une fonction de $C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ (un champ de vecteurs). Alors

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(F(x)) \, dx = \int_{\partial\Omega} F(x) \cdot n(x) \, d\sigma$$

La formule de Green est

$$\int_{\Omega} (\Delta u)v = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\sigma - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \quad \forall u \in C^2(\overline{\Omega}), \forall v \in C^1(\overline{\Omega}).$$

Démonstration. voir[8] □

Remarque 1.2. Dans cette formule, $n(x)$ est le vecteur unitaire normal à $\partial\Omega$ au point x , dirigé vers l'extérieur de Ω .

Si u est une fonction assez régulière définie sur Ω , on note

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) := \nabla u(x) \cdot n(x), \quad x \in \partial\Omega.$$

la dérivée normale de u sur $\partial\Omega$.

1.4 Notions générales sur les semi-groupes

Soit E un espace de Banach de norme $\|\cdot\|$ et notons par $B(E)$ l'algèbre de Banach des opérateurs linéaires bornés de E dans E du norme $\|N\|$.

$$\|N\|_{B(E)} = \sup_{\|x\|=1} \|Nx\|, \quad \forall N \in B(E).$$

$B(E)$ est une espace de Banach.

1.4.1 Semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés

Définition 1.9. [9] $T(t)_{t \geq 0}$ est une famille d'opérateurs linéaires bornés de E dans lui-même. $T(t)_{t \geq 0}$ est un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés, si sont vérifiés les axiomes suivants :

1. $T(0) = Id_E$ (Où I est l'opérateur identité de E .)
2. $T(t + s) = T(t)T(s)$; $\forall t, s \geq 0$.

Définition 1.10. [9] On appelle semi-groupe uniformément continu sur $(T(t))_{t \geq 0} \subset B(E)$ vérifiant la propriété suivante :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t) - I\| = 0.$$

Définition 1.11 (générateur infinitésimal). [9] On appelle générateur infinitésimal d'un semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, l'opérateur $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ défini comme suit :

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \frac{d^+}{dt} T(t)x, \quad \forall x \in D(A)$$

$$D(A) = \{x \in E \mid \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Tx - x}{t} \text{ existe}\}$$

où $D(A)$ est appelé le domaine de A .

D'après la définition il est clair que le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu est un opérateur linéaire.

1.4.2 Semi-groupes fortement continus (C_0 -semi-groupe)

Dans la suite, nous présenterons les semi-groupes fortement continus d'opérateurs linéaires bornés sur un espace de Banach E .

Définition 1.12. [9] Un semi-groupe $T(t)_{t \geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés sur E est dit un semi-groupe d'opérateurs linéaires fortement continus sur E si

$$\lim_{t \downarrow 0^+} T(t)x = x \quad \forall x \in E \quad (\text{i.e.}) \quad \lim_{t \downarrow 0^+} \|T(t)x - x\| = 0.$$

Un semi-groupe fortement continu sur E est appelé aussi semi-groupe de classe C_0 sur E ou tout simplement un C_0 -semi-groupe sur E .

Remarque 1.3. Les semi-groupes uniformément continus sont C_0 -semi-groupes, mais la réciproque est fautive.

Théorème 1.6. Soit $\{(T(t))\}_{t \geq 0}$ un semi-groupe fortement continu, alors la fonction $t \mapsto T(t)x$ est continue de $[0, +\infty[$ dans $E, T(t)x \subset C(\mathbb{R}_+, E)$.

Démonstration. voir [9] □

Lemme 1.1. Soit $(T(t))_{t \geq 0}$ un C_0 -semi-groupe, alors il existe deux constantes $w \geq 0$ et $M \geq 1$ telles que :

$$\|T(t)\| \leq Me^{wt}, \forall t \geq 0.$$

Démonstration. voir [9] □

Théorème 1.7. Soit $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0 -semi-groupe d'opérateur linéaire borné sur E de générateur A . Alors

1. $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds = T(t)x, \quad \forall t \geq 0, \forall x \in E.$
2. Pour tout $x \in E$ et tout $t \geq 0$, $\int_0^t T(s)x ds \in D(A)$ et on a

$$A \left(\int_0^t T(s)x ds \right) = T(t)x - x.$$

3. Pour tout $t \geq 0$ et tout $x \in D(A)$, $T(t)x \in D(A)$ on a :

$$\frac{d}{dt} T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax.$$

4. Pour Tout $t \geq s \geq 0$, et tout $x \in D(A)$ on a :

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)Ax d\tau = \int_s^t AT(\tau)x d\tau.$$

Démonstration. voir [9] □

Exemple

Soit $C = \{f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ est uniformément continue et bornée}\}$. Avec la norme $\|f\|_C = \sup_{\alpha \in [0, +\infty)} |f(\alpha)|$, l'espace C devient un espace de Banach.

Définissons

$$(T(t)f)(\alpha) = f(t + \alpha) \quad \forall t \geq 0 \quad \text{et} \quad \alpha \in [0, \infty).$$

Evidemment, $T(t)$ est un opérateur linéaire, et en plus, on a :

1. $(T(0)f)(\alpha) = f(0 + \alpha) = f(\alpha)$. Donc $T(0) = I$;
2. $(T(t + s)f)(\alpha) = f(t + s + \alpha) = (T(t)f)(s + \alpha) = (T(t)T(s)f)(\alpha), \forall f \in C$. Danc,
 $T(t + s) = T(t)T(s) \quad \forall t, s \geq 0$;
3. $\lim_{t \rightarrow 0} \|T(t)f - f\|_C = \lim_{t \rightarrow 0} \sup_{\alpha \in C} |f(t + \alpha) - f(\alpha)| = 0 \quad \forall f \in C$.

De même,

$$\begin{aligned} \|T(t)f\|_C &= \sup_{\alpha \in [0, \infty)} |(T(t)f)(\alpha)| \\ &= \sup_{\alpha \in [0, \infty)} |f(t + \alpha)| \\ &= \sup_{\beta \in [t, \infty)} |f(\beta)| \\ &\leq \sup_{\beta \in [0, \infty)} |f(\beta)| = \|f\|_C, \forall t \geq 0 \end{aligned}$$

Donc $\|T(t)\| = 1 \quad \forall t \geq 0$. Par conséquent $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est un C_0 -semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur C , nommé le C_0 -semi-groupe de translations à droite.

Soit $A : D(A) \subset C \rightarrow C$ le générateur infinitésimal du C_0 -semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$.

Si $f \in D(A)$, alors on a :

$$Af(\alpha) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)f(\alpha) - f(\alpha)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\alpha + t) - f(\alpha)}{t} = f'(\alpha).$$

uniformément par rapport à α . Par conséquent :

$$D(A) \subset \{f \in C \mid f' \in C\}.$$

Si $f \in C$ tel que $f' \in C$, alors

$$\left\| \frac{T(t)f - f}{t} - f' \right\|_C = \sup_{\alpha \in [0, \infty)} \left| \frac{(T(t)f)(\alpha) - f(\alpha)}{t} - f'(\alpha) \right|$$

Mais

$$\begin{aligned} \left| \frac{(T(t)f)(\alpha) - f(\alpha)}{t} - f'(\alpha) \right| &= \left| \frac{f(\alpha + t) - f(\alpha)}{t} - f'(\alpha) \right| \\ &= \left| \frac{1}{t} f(\tau) \Big|_{\alpha}^{\alpha+t} - f'(\alpha) \right| \\ &= \frac{1}{t} \left| \int_{\alpha}^{\alpha+t} f'(\tau) - f'(\alpha) d\tau \right| \\ &\leq \frac{1}{t} \int_{\alpha}^{\alpha+t} |f'(\tau) - f'(\alpha)| d\tau \rightarrow 0 \end{aligned}$$

uniformément par rapport à α pour $t \rightarrow 0$. Par suite :

$$\left\| \frac{T(t)f - f}{t} - f' \right\|_C \rightarrow 0 \quad \text{si } t \rightarrow 0,$$

donc $f \in D(A)$ et

$$\{f \in C \mid f' \in C\} \subset D(A),$$

Par conséquent, $D(A) = \{f \in C \mid f' \in C\}$ et $Af = f'$. Comme Cet opérateur est non borné, il ne peut pas engendrer un semi-groupe uniformément continu.

On note par $SG(M, w)$ l'ensemble des C_0 -semi-groupes $\{T(t)\}_{t \geq 0} \subset B(E)$ pour lesquels il existe $w \geq 0$ et $M \geq 1$ tels que

$$\|T(t)\| \leq Me^{wt}, \forall t \geq 0.$$

Dans ce cas, on dit que $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est un C_0 semi-groupe exponentiellement borné.

1.4.3 Semi-groupe intégré

Définition 1.13. [7].

1. Soit E un espace de Banach. On appelle semi-groupe intégré d'opérateur linéaire borné sur E une famille $\{T(t)\}_{t \geq 0} \subset B(E)$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. $T(0) = 0$.
2. Pour tout $x \in E$, $T(t)x$ est une fonction continue de $t \in [0, +\infty[$ à valeur dans E .
3. Pour tout $t \geq 0$, $s \geq 0$, $T(s)T(t) = \int_0^s (T(t + \tau) - T(\tau)) d\tau$.

Définition 1.14. Un semi-groupe intégré $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est dit exponentiellement borné, s'il existe deux constantes $M \geq 0$ et $w \in \mathbb{R}$ telles que : $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$, pour $t \geq 0$.

Définition 1.15. [7]

Un opérateur A est appelé le générateur de semi-groupe intégré si :

1. Il existe $w \in \mathbb{R}$ tel que : $]w, +\infty[\subset \rho(A)$.
2. Il existe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ exponentiellement bornée et fortement continue d'opérateur linéaire borné telle que :

$$(1) T(0) = 0.$$

$$(2) (A - \lambda I)^{-1} = \lambda \int_0^{+\infty} e^{\lambda t} T(t) dt \text{ pour tout } (\lambda) > w.$$

Proposition 1.2. Soit A le générateur de semi-groupe intégré $T(t)_{0 \leq t}$, alors pour tout $x \in E$, et $t \geq 0$, on a :

$$\int_0^t T(s)x d\tau \in D(A) \quad \text{et} \quad T(t)x = A \left(\int_0^t T(s)x ds \right) + tx$$

De plus, pour tout $x \in D(A)$, $t \geq 0$,

$$T(t)x \in D(A) \quad \text{et} \quad AT(t)x = T(t)Ax$$

$$T(t)x = tx + \int_0^t T(s)Ax ds.$$

Démonstration. voir [7]. □

Corollaire 1.1. [7] Soit A le générateur de semi-groupe intégré $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, alors : pour tout $x \in E$ et $t \geq 0$, on a $T(t)x \in \overline{D(A)}$.

De plus, pour tout $x \in E$, $T(\cdot)x$ est différentiable à droite en $t \geq 0$ si et seulement si $T(t)x \in D(A)$. Dans ce cas,

$$T'(t) = AT(t)x + x.$$

Un cas particulier important est celui où le semi-groupe intégré est localement lipschitzien continu.

Définition 1.16. [7] Un semi-groupe intégré est appelé continu localement lipschitzien si, pour tout $\tau > 0$, il existe une constante $k(\tau) > 0$ telle que :

$$\|T(t) - T(s)\| \leq k(\tau)|t - s|, \quad \forall t, s \in [0, \tau].$$

Dans ce cas, d'après la définition, il est clair que $T(t)_{t \geq 0}$ est exponentiellement borné .

Définition 1.17. [7] On dit que l'opérateur linéaire A satisfait les conditions de Hille-Yosida s'il existe $M \geq 0$ et $\omega \in \mathbb{R}$ tels que $\omega, +\infty[\subset \rho(A)$ et

$$\sup \{ (\lambda - \omega)^n \|(\lambda I - A)^{-n}\|, n \in \mathbb{N}, \lambda > \omega \} \leq M.$$

Théorème 1.8. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. A est le générateur d'un semi-groupe localement lipschitzien continu.
2. A satisfait les conditions de Hille-Yosida.

Démonstration. voir [7] □

1.4.4 semi-groupe de contraction

Définition 1.18. [11] Un semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ fortement continu sur E est un semi-groupe de contractions si

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq 1 \quad \text{pour tout } t > 0.$$

1.4.5 Théorème de Hille-Yosida

Le théorème de Hille-Yosida nous permet de caractériser les opérateurs qui génèrent des C_0 semi-groupes

Théorème 1.9. Un opérateur linéaire A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe de contractions $(T(t))_{t \geq 0}$ sur E si et seulement si :

- i) A est fermé,
- ii) $D(A)$ est dense dans E ,
- iii) l'ensemble résolvant de A contient \mathbb{R}_+^* et on a :

$$\|R(\lambda; A)\| \leq \frac{1}{\lambda}, \quad \forall \lambda > 0. \tag{1.1}$$

Démonstration. voir [11] □

Exemple 1.1 (L'équation de la Chaleur). *Considérons l'équation de la chaleur qui décrit les phénomènes de diffusion :*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1.2)$$

où f est une fonction continue bornée de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

On va utiliser la transformée de Fourier partielle par rapport à x pour trouver une solution (formelle) de (1.2).

Rappelons que $\forall u \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^\infty(\mathbb{R})$

La transformée de Fourier partielle par rapport à x de u est la fonction notée \hat{u} définie par :

$$\begin{aligned} \hat{u}(\xi, t) &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} u(x, t) dx, & \xi \in \mathbb{R}. \\ \widehat{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}(\xi, t) &= i\xi \hat{u}(\xi, t) \\ \widehat{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)}(\xi, t) &= -\xi^2 \hat{u}(\xi, t) \\ \widehat{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)}(\xi, t) &= \widehat{\left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}\right)}(\xi, t). \end{aligned}$$

En appliquant la transformée de Fourier à (1.2) on trouve :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(\xi, t) = -\xi^2 \hat{u}(\xi, t), & t > 0, \xi \in \mathbb{R} \\ \hat{u}(\xi, 0) = \hat{f}(\xi), & \xi \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1.3)$$

(1.3) est une équation différentielle ordinaire, où ξ joue le rôle d'un paramètre, et dont la solution est donnée par :

$$\hat{u}(\xi, t) = e^{-\xi^2 t} \hat{f}(\xi), \quad t \geq 0, \xi \in \mathbb{R}.$$

Pour trouver u on applique la transformée de Fourier inverse en utilisant le fait que

$$e^{-\xi^2 t} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{\xi^2}{4t}} \quad \forall t > 0.$$

et que

$$\hat{u}\hat{v} = u \hat{*} v.$$

Par suite on trouve que

$$u(\cdot, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{\cdot^2}{4t}} * f.$$

D'où :

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f(y) dy, \quad \forall x > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Puisque f est continue bornée et en utilisant le théorème de dérivation sous le signe intégral, on montre que u est bien une solution de (1.2). Notons que la condition initiale de (1.2) est vérifiée par u donnée par (1.3) dans le sens suivant :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = f(x).$$

d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, et on note encore $u(x, 0) = f(x)$. Le résultat se reproduit dans le langage des semi-groupes de la façon suivante : pour toute fonction f continue bornée et tout $t > 0$ on pose :

$$T(t)f = u(\cdot, t),$$

où u est l'unique solution classique de (1.2) donnée par (1.3).

On définit ainsi le semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur l'espace des fonctions continues et bornées appelé \mathbb{R} dans \mathbb{R} de la semi-groupe de Gauss-Weierstrass par :

$$(T(t)f)(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f(y) dy, \forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0, \text{ et } T(0) = I.$$

Le semi-groupe de Gauss-Weierstrass n'est pas un C_0 -semi-groupe.

Il s'avère que $T(t)f \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} f$.

dans l'espace des fonctions continues bornées est seulement si f une fonction bornée uniformément continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

1.4.6 Opérateurs m -dissipatifs dans un espace de Banach.

Définition 1.19 (dissipatif). [11] Un opérateur $(A, D(A))$ linéaire non borné dans E est dissipatif si :

$$\forall x \in D(A) \text{ et } \forall \lambda > 0, \|\lambda x - Ax\| \geq \lambda \|x\|_E.$$

Définition 1.20 (m-dissipatif). [11] Un opérateur $(A, D(A))$ linéaire non borné dans E est **m -dissipatif** si :

1. A est dissipatif.
2. $\forall f \in E, \forall \lambda > 0, \exists x \in D(A)$ telle que $\lambda x - Ax = f$.

Théorème 1.10. Si A est m -dissipatif, alors pour tout $\lambda > 0$, l'opérateur $(\lambda I - A)$ admet un inverse, $(\lambda I - A)^{-1}$, où f appartient à $D(A)$ pour tout f dans E . De plus, $(\lambda I - A)^{-1}$ est un opérateur linéaire borné sur X vérifiant

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Démonstration. voir [11] □

Théorème 1.11. Soit $(A, D(A))$ un opérateur linéaire non borné dissipatif dans E . L'opérateur A est m -dissipatif si et seulement si

$$\exists \lambda_0 > 0 \text{ tel que } \forall f \in E, \exists x \in D(A) \text{ vérifiant } \lambda_0 x - Ax = f.$$

Démonstration. voir [11] □

Théorème 1.12. Soit $(A, D(A))$ un opérateur non borné dans E . S'il existe $\lambda_0 > 0$ pour lequel l'opérateur $\lambda_0 I - A$ est un bijection de $D(A)$ sur E , et si $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ est un opérateur borné sur E , alors A est fermé. En particulier, si A est m -dissipatif alors A est fermé.

Démonstration. voir [11] □

Proposition 1.3. Soit $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ un opérateur dissipatif, alors :

1. $(\lambda I - A)$ est injectif pour tout $\lambda > 0$, et on a $\|(\lambda I - A)^{-1}y\| \leq \frac{1}{\lambda}\|y\|$ pour tout $y \in \text{Im}(\lambda I - A) = (\lambda I - A)D(A)$.
2. Il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $(\lambda_0 I - A)$ soit surjectif si et seulement si $(\lambda I - A)$ est surjectif pour tout $\lambda > 0$. dans ce cas, $]0, +\infty[\subset \rho(A)$.
3. A est fermé si et seulement si $I_{\mathbb{R}}(\lambda_0 I - A)$ est fermé pour un certain $\lambda > 0$ (et donc pour tout $\lambda > 0$).

Démonstration. voir [11] □

Proposition 1.4. Il est facile de voir que :

1. Si A est dissipatif, alors μA est dissipatif pour tout $\mu > 0$.
2. Si A est m -dissipatif, alors $\text{Im}(\lambda I - A) = E$ pour tout $\lambda > 0$.

Démonstration. voir [11] □

1.4.7 Opérateurs m -dissipatifs dans un espace de Hilbert

Dans cette section nous supposons que H est espace de Hilbert

Théorème 1.13. Un opérateur $(A, D(A))$, linéaire non borné dans E , est dissipatif si et seulement si

$$\forall x \in D(A), \quad (Ax, x) \leq 0.$$

Dans le cas H d'un espace de Hilbert complexe, la condition précédente est remplacée par

$$\forall x \in D(A), \quad \text{Re}(Ax, x) \leq 0.$$

Démonstration. voir [11] □

Théorème 1.14. Si A est m -dissipatif alors $D(A)$ est dense dans H .

Démonstration. voir [11] □

Théorème 1.15. Soit A un opérateur dissipatif de domaine dense dans H . Alors A est m -dissipatif si et seulement si A est fermé et A^* est dissipatif.

Démonstration. voir [11] □

Proposition 1.5. Soit $(A, D(A))$ un opérateur linéaire non borné dans H , alors :

1. Si $(A, D(A))$ est dissipatif, auto-adjoint, à domaine dense, alors il est m -dissipatif.
2. Si $((A, D(A)))$ est anti-adjoint, à domaine dense, alors il est m -dissipatif.

(la condition de dissipativité n'est pas nécessaire car $(A, D(A))$ est anti-adjoint entraîne que $\langle Ax, x \rangle = 0$ donc la dissipativité).

Démonstration. voir[11] □

Exemple 1.2. On pose $E = L^2(\Omega)$, $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ et $Au = \Delta u$ pour tout $u \in D(A)$ Démontrer que $(A, D(A))$ est m -dissipatif dans $L^2(\Omega)$.

$$\begin{cases} D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \\ Au = \Delta u \quad \forall u \in D(A). \end{cases} \quad (1.4)$$

Nous sommes dans le bon cadre pour utiliser la théorie des semi-groupes et le Hille-Yoshida

Reste à montrer que l'opérateur A est m -dissipatif.

Il est bien connu que le laplacien est un opérateur auto-adjoint :

$$\langle Au, v \rangle_E = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v, dx = \int_{\Omega} u(\Delta v), dx = \langle u, Av \rangle_E. \quad (1.5)$$

Par double intégration par parties, et que $D(A)$ est dense dans $L^2(\Omega)$, il suffit donc de montrer qu'il est dissipatif ou de façon équivalente que $Re(\langle Ax, x \rangle_E) \leq 0$.

Or tout $x \in D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ est de trace nulle, donc en intégrant par parties :

$$Re(\langle Ax, x \rangle_E) = - \int_{\Omega} |\nabla x|^2 \leq 0 \quad (1.6)$$

Proposition (1.5) et le Théorème de Hille-Yoshida permettent enfin de conclure quant à l'existence-unicité et la régularité des solutions. On remarque de plus que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\|\mathbf{x}(t)\|_E^2) &= \frac{d}{dt} \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t) \rangle_E \\ &= \langle \mathbf{x}'(t), \mathbf{x}(t) \rangle_E + \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t) \rangle_E \\ &= 2 \langle \mathbf{x}'(t), \mathbf{x}(t) \rangle_E \\ &= 2 \langle A\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t) \rangle_E \leq 0. \end{aligned}$$

On retrouve, bien sûr, le côté dissipatif de l'équation de la chaleur.

1.5 Opérateur maximal monotone.

Définition 1.21 (monotone). [5] un opérateur A de H est dit monotone si $\forall x_1, x_2 \in D(A)$ et

$$(Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2) \geq 0. \text{ ou plus précieément}$$

$$\forall y_1 \in Ax_1, y_2 \in Ax_2, (y_1 - y_2, x_1 - x_2) \geq 0.$$

Définition 1.22 (maximal monotone). *Un opérateur A est maximal si et seulement si A est monotone et $[x, y] \in H \times H$ tel que*

$$(y - A\epsilon, x - \epsilon).$$

ou plus précisément

$$(y - \eta, x - \epsilon) \geq 0 \quad \forall [\epsilon, \eta] \in A,$$

alors $y \in Ax$.

Proposition 1.6. *Soit A opérateur de H . Il y a équivalence entre les trois propriétés suivantes :*

1. *A est maximal monotone.*
2. *A est monotone et $R(I + A) = H$.*
3. *Pour tout $\lambda > 0, (I + \lambda A)^{-1}$ est une contraction définie sur H tout entier.*

Démonstration. voir[5] □

Théorème 1.16. *Soient C un convexe fermé de H et $A : H \rightarrow H$ un opérateur monotone. Alors, pour tout $y \in H$, il existe $x \in C$ tel que*

$$\langle \eta + x, \epsilon - x \rangle \geq \langle y, \epsilon - x \rangle, \forall (\epsilon, \eta) \in (A).$$

Démonstration. voir[5] □

Lemme 1.2. *Soit \mathcal{F} la famille des opérateurs monotones dont le domaine est contenu dans C et soit A un élément de \mathcal{F} alors $R(I + A) = H$.*

Démonstration. voir[5] □

Exemple 1.3. *Soit $A : H \rightarrow H$ un opérateur maximal, les opérateurs A^{-1} et λA pour $\lambda > 0$ sont maximaux monotones.*

Par contre A et B peuvent être maximaux monotones sans qu'il en soit ainsi de $A + B$ car on peut avoir $D(A) \subset D(B) = \emptyset$.

1.6 Opérateurs m-accrétifs

Définition 1.23. *Un opérateur A de E est dit accrétif si :*

$$\forall (x, y), (\hat{x}, \hat{y}) \in A, \forall \lambda > 0, |x - \hat{x}| \leq |x - \hat{x} + \lambda(y - \hat{y})|.$$

Définition 1.24. *Un opérateur A d'un espace de Banach est dit m-accrétif si*

1. *A est accrétif.*
2. *$\forall \lambda > 0, (R(I + \lambda A) = E$ (c'est-à-dire que $(I + \lambda A)^{-1}$ est une contraction partout définie pour tout $\lambda > 0$).*

Théorème 1.17 (Minty). *Si H est espace de Hilbert*

$$(A \text{ m-accrétif}) \iff (A \text{ maximal monotone}).$$

si A est m-accrétif, il est trivialement maximal monotone.

Chapitre 2

Problèmes d'évolution

Dans cette chapitre, on considère H de espace de Hilbert.

2.1 Problème homogène

Théorème 2.1. *Supposons que A est auto-adjoint ≤ 0 . Soit $x \in H$, et soit $u(t) = T(t)x$. Alors u est la solution unique du problème suivant :*

$$\begin{cases} u \in C([0, \infty), H) \cap C((0, \infty), D(A)) \cap C^1((0, \infty), H); & (2.1) \\ u'(t) = Au(t), \quad \forall t > 0; & (2.2) \\ u(0) = x. & (2.3) \end{cases}$$

De plus, nous avons

$$\begin{aligned} \|Au(t)\| &\leq \frac{1}{t\sqrt{2}}\|x\|; \\ -\langle Au(t), u(t) \rangle &\leq \frac{1}{2t}\|x\|^2; \end{aligned}$$

Enfin

$$\|Au(t)\|^2 = -\frac{1}{2t}\langle Ax, x \rangle.$$

si $x \in D(A)$.

Démonstration. voir [6] □

2.2 Problèmes non homogène

Soit $T > 0$. Étant donné $x \in E$ et $f : [0, T] \rightarrow E$, notre objectif est de résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} u \in C([0, T], D(A)) \cap C^1([0, T], E); & (2.4) \\ u'(t) = Au(t) + f(t), \quad \forall t \in [0, T]; & (2.5) \\ u(0) = x. & (2.6) \end{cases}$$

Comme dans le cas des équations différentielles ordinaires, nous obtenons le résultat suivant (la formule de variation des paramètres, ou formule de Duhamel).

Lemme 2.1. *Soit $x \in D(A)$ et $f \in C([0, T], E)$. Nous considérons une solution $u \in C([0, T], D(A)) \cap C^1([0, T], E)$ du problème (2.7)-(2.9). Alors, nous avons*

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \quad (2.7)$$

pour tout $t \in [0, T]$.

Démonstration. Soit $t \in [0, T]$. Définissons

$$w(s) = T(t-s)u(s),$$

pour $s \in [0, t]$. Soit $s \in [0, t]$ et $h \in (0, t-s]$. Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{w(s+h) - w(s)}{h} &= T(t-s-h) \left\{ \frac{u(s+h) - u(s)}{h} - \frac{T(h) - I}{h} u(s) \right\} \\ &\rightarrow T(t-s)\{u'(s) - Au(s)\} = T(t-s)f(s), \end{aligned}$$

lorsque $h \uparrow 0$. Puisque $S(t-\cdot)f(\cdot) \in C([0, t], E)$, nous déduisons que $w \in C^1([0, t], E)$ et que

$$w'(s) = T(t-s)f(s), \quad (2.8)$$

pour tout $s \in [0, t]$. En intégrant (2.11) entre 0 et $\tau < t$, et en laissant $\tau \uparrow t$, nous obtenons (2.10). \square

Remarque 2.1. *Pour tout $x \in E$ et tout $f \in C([0, T], E)$, la formule (2.10) définit une fonction $u \in C([0, T], E)$. Maintenant, nous cherchons des conditions suffisantes pour que u donné par (2.10) soit la solution de (2.7)-(2.9).*

2.3 Problèmes semi-linéaires

Définition 2.1. *Une fonction $f : E \rightarrow E$ est Lipschitz continue sur les sous-ensembles bornés de E à condition que pour tout $M > 0$, il existe une constante $L(M)$ telle que*

$$\|f(y) - f(x)\| \leq L(M)\|y - x\|, \quad \text{pour tout } x, y \in B_M,$$

où B_M est la boule de centre 0 et de rayon M .

Soient E un espace de Banach, $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ linéaire un opérateur m -accréatif, $f : E \rightarrow E$ une application de E dans E .

Nous allons nous intéresser au problème suivant :

$$(P) \begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = f(u), & \text{sur } [0, +\infty[\\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Mais auparavant, rappelons deux lemmes fondamentaux.

Lemme 2.2 (Gronwall). Soient $T > 0$, $\lambda \in L^1([0; T])$, $\lambda \geq 0$ p.p, et $C_1, C_2 \geq 0$. Soit $\varphi \in L^1([0; T])$, $\varphi \geq 0$ p.p telle que $\lambda\varphi \in L^1([0; T])$ et

$$\varphi(t) \leq C_1 + C_2 \int_0^t \lambda(s)\varphi(s)ds, \quad \text{p.p. } t \in [0, T].$$

Alors :

$$\varphi(t) \leq C_1 \exp\left(C_2 \int_0^t \lambda(s)ds\right), \quad \text{p.p. } t \in [0, T].$$

Démonstration. voir[6]. □

Lemme 2.3 (Théorème du point fixe de Banach). Soit E un espace métrique complet, non vide. On note d la distance sur E et on considère F une application de E dans lui-même. On suppose f contractante, c'est-à-dire il existe une constante positive k , strictement inférieure à 1, telle que :

$$d(f(x), f(y)) \leq k d(x, y), \forall x, y \in E$$

. Alors : il existe un unique point $a \in E$ tel que $f(a) = a$. De plus, ce point peut s'obtenir comme limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des itérées, définies par récurrence à partir d'un point quelconque x_0 de E selon $x_{n+1} = f(x_n)$. On a en outre :

$$\forall n \geq 1 : d(x_n, a) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, a) \quad (\text{méthode de Picard}).$$

D'après lemme (2.2) et(2.3), nous étudierons les types de solution au problème semi-linéaire.

2.3.1 Solutions globales généralisées

Définition 2.2. On appelle solution globale généralisée du problème (P) toute fonction $u \in C[0; +\infty[; E)$ telle que :

$$\forall t \geq 0, u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(u(s)) ds$$

où $T(t)$ désigne le semi-groupe associé à l'opérateur A .

Théorème 2.2. Soit $u_0 \in E$ et si f est lipschitzienne de constante de lipschitz $M > 0$, alors le problème (P) admet une unique solution globale généralisée notée u . Si $u_0 \in D(A)$, u est localement lipschitzienne.

Démonstration. • **Première partie**

Soit $u_0 \in E$ et si f est lipschitzienne de constante de lipschitz $M > 0$, alors le problème (P) admet une unique solution globale généralisée notée u .

1. Existence :

Posons

$$\psi(u)(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(u(s)) ds.$$

L'application $\psi \in C([0; +\infty[; E)$. Nous allons appliquer le théorème du point fixe de Banach à ψ dans l'espace X_α , α à déterminer, défini par :

$$X_\alpha = \{u \in C([0; +\infty[; E); \sup_{t>0} e^{-\alpha t}|u(t)|_E < +\infty\}.$$

muni de la norme : $|u|_{X_\alpha} = \sup_s(e^{-\alpha s}|u(s)|_E)$. Cet espace est complet car fermé dans le complet $C([0; +\infty[; E)$

Déterminons à quelles conditions sur α l'application ψ est contractante de X_α dans X_α .

L'application ψ envoie X_α sur X_α pour tout $\alpha > 0$.

En effet, on a

$$\begin{aligned} \forall t \geq 0, \quad |\psi(u)(t)|_E &\leq |T(t)u_0|_E + \int_0^t \|T(t-s)\|_{\mathcal{L}(E)} |f(u(s))|_E ds, \\ &\leq |u_0|_E + \int_0^t |f(u(s))|_E ds, \quad \text{car } \|T(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq 1, \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \forall s \in [0, t], |f(u(s))|_E &\leq |f(u(s)) - f(0)|_E + |f(0)|_E, \\ &\leq M|u(s)|_E + C. \end{aligned}$$

d'où

$$|\psi(u)(t)|_E \leq |u_0|_E + \int_0^t (M|u(s)|_E + C) ds.$$

Multiplions cette dernière inégalité par $e^{-\alpha t}$ pour $t > 0$ ($e^{-\alpha t} < 1$ pour tout $t > 0$).

On obtient :

$$\begin{aligned} \forall t > 0, e^{-\alpha t}|\psi(u)(t)|_E &\leq e^{-\alpha t}|u_0|_E + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)}e^{-\alpha s}(M|u(s)|_E + C) ds, \\ &\leq e^{-\alpha t}|u_0|_E + M \sup_s (e^{-\alpha s}|u(s)|_E) \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} ds + C \left(\int_0^t ds \right) e^{-\alpha t}, \\ &\leq e^{-\alpha t}|u_0|_E + M|u|_{X_\alpha} \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} ds + Cte^{-\alpha t}. \end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned} \forall t > 0, \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} ds &= e^{-\alpha t} \int_0^t e^{-\alpha s} ds, \\ &= \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} \leq \frac{1}{\alpha}. \end{aligned}$$

Donc

$$\forall t > 0, e^{-\alpha t}|\psi(u)(t)|_E \leq |u_0|_E + \frac{1}{\alpha}M|u|_{X_\alpha} + C \sup_t (te^{-\alpha t})$$

et

$$\sup_{t>0} e^{-\alpha t}|\psi(u)(t)|_E < +\infty$$

C'est-à-dire pour tout $\alpha > 0, \psi : X_\alpha \rightarrow X_\alpha$.

L'application ψ est une contraction si $\alpha > M$. En effet, soient $u, v \in X_\alpha$. On a, pour tout $t \geq 0$:

$$|\psi(u)(t) - \psi(v)(t)|_E = \left| \int_0^t T(t-s)(f(u(s)) - f(v(s))) ds \right|_E$$

et

$$\begin{aligned} |\psi(u)(t) - \psi(v)(t)|_E &\leq \int_0^t \|T(t-s)\|_{\mathcal{L}(E)} |(f(u(s)) - f(v(s)))|_E ds \\ &\leq M \int_0^t |u(s) - v(s)|_E ds. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \forall t > 0, e^{-\alpha t} |\psi(u)(t) - \psi(v)(t)|_E &\leq M \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} e^{-\alpha s} |u(s) - v(s)|_E ds, \\ &\leq \frac{M}{\alpha} |u - v|_{X_\alpha}. \end{aligned}$$

Donc ψ est une contraction sur X_α si $\frac{M}{\alpha} < 1$.

Pour $\alpha > M$, si F est lipschitzienne, il existe un unique point fixe pour ψ sur X_α . Ainsi, le problème de Cauchy (P) admet une solution dans $X_\alpha \subset C([0; +\infty[; E)$ si F est lipschitzienne.

2. Unicité :

Soient u et v deux solutions généralisées de (P). On a :

$$\forall t \geq 0, u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(u(s)) ds.$$

$$\forall t \geq 0, v(t) = T(t)v_0 + \int_0^t T(t-s)f(v(s)) ds.$$

d'où, par différence :

$$\forall t \geq 0, u(t) - v(t) = T(t)(u_0 - v_0) + \int_0^t T(t-s)(f(u(s)) - f(v(s))) ds.$$

Alors :

$$\forall t \geq 0, |u(t) - v(t)|_E \leq |u_0 - v_0|_E + M \int_0^t |u(s) - v(s)|_E ds.$$

Par le lemme de **Gronwall**, on obtient donc :

$$\begin{aligned} \forall t \geq 0, |u(t) - v(t)|_E &\leq |u_0 - v_0|_E \exp\left(M \int_0^t ds\right) \\ &\leq |u_0 - v_0|_E e^{Mt}. \end{aligned}$$

Or , $u_0 = v_0$ si u et v sont solutions généralisées de (P). Donc $u = v$.

• **Deuxième partie**

Soit $u_0 \in D(A)$. Alors u est localement lipschitzienne.

En efft, soient $h > 0$ et $t \in [0; t]$. Etudions $u(t+h) - u(t)$.

Pour cela, considérons $u(t+h)$ comme solution à l'instant t de :

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} + Av = f(v), \\ v(0) = u(h). \end{cases} \quad (2.9)$$

(Ceci est possible compte-tenu de la forme de u et du fait que $\{T(t); t \geq 0\}$ définit un semi-groupe.) On a :

$$\forall t \geq 0, |u(t+h) - u(t)|_E \leq e^{Mt} |u(h) - u_0|_E, \text{ d'après la partie précédente .}$$

Or

$$|u(h) - u(0)|_E \leq |T(h)u_0 - u_0|_E + \int_0^t |f(u(s))|_E ds.$$

De plus,

$$|T(h)u_0 - u_0|_E \leq C'h$$

car, d'après le démonstration du théorème de Hille-Yosida(cas Banach), l'application

$$t \rightarrow u(t) = T(t)u_0 \in C^1([0; +\infty[; E) \cap C([0; +\infty[; D(A)).$$

d'où en particulier :

$$u(h) = u(0) + hu'(0) + h^2\epsilon(h), \quad \text{avec } u'(0) = Au_0 \text{ et } u(0) = u_0.$$

D'après la partie existence :

$$\int_0^h |f(u(s))| ds \leq \int_0^h (M|u(s)|_E + C) ds.$$

D'où , finalement

$$|u(h) - u(0)|_E \leq C'h + \int_0^h (M|u(s)|_E + C) ds.$$

Comme $u \in C([0; +\infty[; E)$,

il existe h_0 tel que :

$$\forall h \leq h_0, |u(s)|_E \leq 2|u_0|_E.$$

et

$$|u(h) - u(0)|_E \leq C''h.$$

Donc

$$\forall t \geq 0, |u(t+h) - u(t)|_E \leq C'''he^{Mt}.$$

et

$$\forall t \in [0; T], |u(t+h) - u(t)|_E \leq C_T h.$$

□

2.3.2 Solutions globales classique

Définition 2.3. Soit $u_0 \in D(A)$. On appelle solution classique globale toute fonction $u \in C([0; +\infty[; D(A)) \cap C^1([0; +\infty[; E)$ telle que :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = f(u), & \text{sur } [0, +\infty[\\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (2.10)$$

De plus, de la même manière que pour les solutions globales généralisées, on a un résultat d'existence d'une solution globale classique au problème (P).

Théorème 2.3. Si f est lipschitzienne et C (c'est-à-dire, l'application :

$$u \in E \rightarrow f'(u) \in \mathcal{L}(E).$$

est continue et $|f'(u)| \leq M$, alors pour tout $u_0 \in D(A)$, il existe une solution globale classique de (P).

La démonstration de ce théorème repose sur le fait essentiel suivant : dans le cas non homogène, si $u_0 \in D(A)$ et $f \in C^1([0; T]; E)$, alors toute solution généralisée est solution classique.

De plus, si l'espace E est réflexif, on remarque que l'on peut préciser la régularité de la solution généralisée et montrer que c'est une solution classique.

2.3.3 Solutions locales

Définition 2.4. 1. On appelle solution généralisée locale de (P) toute fonction u telle que :

$$\forall u_0 \in E, \exists T > 0, \exists u \in C([0, T]; D(A)), \forall t > T, u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(u(s)) ds.$$

2. On dit que (P) admet une solution classique locale si : $\forall u_0 \in D(A), \exists T > 0, \exists u \in C([0, T]; D(A)) \cap C^1([0, T]; E)$ tels que :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = f(u), & \text{sur } [0, +\infty[\\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (2.11)$$

Définition 2.5. On dit qu'une fonction $f : E \rightarrow E$ est lipschitzienne sur les bornés de E si, pour tout $r > 0$, il existe une constante M_r telle que :

$$\forall u, v \in B(0, r), |f(u) - f(v)|_E \leq M_r |u - v|_E.$$

On a un résultat d'existence concernant les solutions locales du problème (P).

Théorème 2.4. Soit $f : E \rightarrow E$ lipschitzienne sur les bornés. Alors : $u_0 \in E$ et $\forall T > 0, \exists ! u \in C([0, T]; E)$ solution généralisée locale de (P).

Démonstration. Appliquons le théorème du point fixe de Banach à l'espace :

$$K_T = \{u \in C([0, T]; E) \mid |u(t) - u_0|_E \leq 2|u_0|_E + 1, \forall t \leq T\}$$

et à la fonction $\varphi : K_T \rightarrow K_T$ telle que $\varphi(u)(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(u(s)) ds$.

Notons que l'espace K_T est un espace de Banach car fermé dans le complet, $(C([0, T]; E), |\cdot|_E)$.

L'application φ envoie K_T sur K_T si $T \leq \frac{1}{M_K(2|u_0|_E + |f(u_0)|_E)}$

En effet ,on a :

$$\forall t, |\varphi(u(t)) - \varphi(u_0)|_E \leq |T(t)u_0|_E + |u_0|_E + \int_0^t |T(t-s)|_E |f(u(s))|_E ds$$

Notons M_K la constante de Lipschitz de f sur $B(0, 3|u_0|_E + 1)$. Par hypothèse si $u \in K_T$,

$$\forall s \leq T, |u(s)|_E \leq |u_0|_E + 2|u_0|_E + 1$$

d'où :

$$\forall s \leq T, u(s) \in B(0, 3|u_0|_E + 1),$$

et

$$\forall t \leq T, \forall s \leq T, |f(u(s))|_E \leq |f(u(s)) - f(u_0)|_E + |f(u_0)|_E$$

Donc

$$\begin{aligned} \forall t \leq T, |f(u(s))|_E &\leq M_K |u(s) - u_0|_E + |f(u_0)|_E. \\ \Rightarrow \forall t \leq T, |\varphi(u(t)) - \varphi(u_0)|_E &\leq 2|u_0|_E + T[M_K(2|u_0|_E + 1) + |f(u_0)|_E]. \end{aligned}$$

On en déduit donc que φ est à valeurs dans K_T si $T[M_K(2|u_0|_E + 1) + |f(u_0)|_E] \leq 1$.

L'application φ est contractante si $T < \frac{1}{M_K}$.

En effet, soient $u, v \in K_T$. On, a :

$$\varphi(u) - \varphi(v) = \int_0^t T(t-s)[f(u(s)) - f(v(s))] ds.$$

D'où

$$\begin{aligned} |\varphi(u) - \varphi(v)|_E &\leq \int_0^t |f(u(s)) - f(v(s))|_E ds \\ &\leq M_K \int_0^t |u(s) - v(s)|_E ds, \\ &\leq M_K \int_0^t \sup_{s \leq T} |u(s) - v(s)|_E ds. \\ &\leq M_K T \sup_{s \leq T} |u(s) - v(s)|_E. \end{aligned}$$

On en déduit donc que φ est une contraction pour $M_K T < 1$. D'après le théorème du point fixe de Banach, il existe un unique $u \in K_T$ tel que $u = \varphi(u)$. Pour tout $u_0 \in E$, on a mis en évidence un temps T et une solution $u \in K_T$ de $u = \varphi(u)$. \square

2.3.4 Solutions maximales.

Définition 2.6. 1. Si u_i est une solution locale définie sur $[0, T_i]$ pour $T_i < T_j$, $u_j|_{[0; T_j]} = u_i$, si $\sup\{T_i; i \in I\} = T_{\max} \leq \infty$, alors on peut définir $u \in C([0; T_{\max}]; E)$ telle que

$$\forall t \leq T_{\max}, u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(u(s))ds.$$

On appelle u solution maximale généralisée.

2. De plus, si $u \in C([0; T[; D(A)) \cap C^1([0; T[; E)$, alors u est appelée solution maximale classique.

Théorème 2.5. Il existe une fonction $T : E \rightarrow]0; +\infty[$ avec les propriétés suivantes : pour tout $u_0 \in E$, il existe $u \in C([0; T(u_0)[; E)$ telle que pour tout $t < T(u_0)$, u est l'unique solution généralisée globale dans $C([0; T[; E)$; de plus,

$$\forall t \in [0; T(u_0)[, 2K(|F(0)|_E + 2|u(t)|_E) \geq \frac{1}{T(u_0) - t} - 2.$$

En particulier, on a l'alternative :

1. Soit $T_{\max} = T(u_0) = +\infty$ et la solution est globale.
2. Soit $T_{\max} = T(u_0) < +\infty$ et $|u(t)|_E \xrightarrow{t \rightarrow T(u_0)} +\infty$ et la solution explose en temps fini.

Ce dernier résultat est l'analogie du théorème d'explosion pour les équations différentielles ordinaires.

2.4 Un résultat général

Théorème 2.6. Soient V et H deux espaces de Hilbert tels que $V \subset H$ avec injection compacte et V est dense dans H . Soit $a(u, v)$ une forme bilinéaire symétrique continue et coercive dans V . Soit un temps final $T > 0$, une donnée initiale $(u_0, u_1) \in V \times H$, et un terme source $f \in L^2(]0, T[; H)$. Alors le problème :

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} \langle u(t), v \rangle_E + a(u(t), v) = \langle f(t), v \rangle_E \quad \forall v \in V, 0 < t < T \\ u(t=0) = u_0, \frac{du}{dt}(t=0) = u_1, \end{cases} \quad (2.12)$$

(où l'équation de (2.15) a lieu au sens faible dans $]0, T[)$) a une unique solution $u \in C([0, T]; V) \cap C^1([0, T]; H)$. De plus, il existe une constante $C > 0$ (qui ne dépend que de a et de T) telle que

$$\|u\|_{C([0, T]; H)} \leq C(\|u_0\|_V + \|u_1\|_H + \|f\|_{L^2(]0, T[; H)}) \quad (2.13)$$

Démonstration. voir[1] □

Exemple 2.1. Soit Ω un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^N . Soit $A(t)$ une fonction de Ω dans l'ensemble des matrices symétrique réelles telles qu'il existe deux constantes $\beta \geq \alpha > 0$ Vérifiant

$$\beta|\xi|^2 \geq A(x)\xi \quad \xi \geq \alpha|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \text{ p.p. } x \in \Omega.$$

Soit un temps final $T > 0$, une donnée initiale $u_0 \in L^2(\Omega)$, et un terme source $f \in L^2(]0, T[; L^2(\Omega))$. le problème semi-linéaire :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(A(x)\nabla u) = f & \text{dans } \Omega \times]0, T[\\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[\\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{pour } x \in \Omega \end{cases} \quad (2.14)$$

admet une unique solution $u \in L^2(]0, T[; H^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$.

On introduit la forme bilinéaire $a(., .)$ symétrique définie pour tout u et v de $H_0^1(\Omega)$ par

$$a(u, v) = \int_{\Omega} A(x) \nabla u \cdot \nabla v \, dx.$$

Pour presque tout $x \in \Omega$, la matrice $A(x)$ étant symétrique, définie positive, elle admet une base de vecteurs propres. Comme pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$,

$$A(x)\xi \cdot \xi \leq \beta |\xi|^2,$$

La plus grande valeur propre de $A(x)$ est inférieure à β et $\|A\|_2 \leq \beta$. D'après cette majoration et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour tout u et $v \in H_0^1$, on a :

$$a(u, v) \leq \beta \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \leq \beta \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

La forme bilinéaire a est donc continue sur $H_0^1(\Omega)$. De plus, pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$, d'après l'inégalité de Poincaré.

$$a(u, v) \geq \alpha \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \geq \alpha C \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

La forme bilinéaire a est donc coercive. D'après le Théorème 2.6 appliqué à la forme bilinéaire a avec $H = L^2(\Omega)$ et $V = H_0^1(\Omega)$, il existe une unique solution $u \in L^2(]0, T[; H_0^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$ au problème semi-linéaire (2.17).

Chapitre 3

Comportement asymptotique de la solution d'une equation d'evolution de la chaleur

Introduction

Dans toute la suite Ω désigne un ouvert borné de \mathbb{R}^N , $N \geq 2$, de bord $\partial\Omega$ régulier et $f(\cdot)$ est une fonction impaire, réelle, continue croissante telle que $f^{-1}(0) = 0$, Soit $u(\cdot, \cdot)$ désigne la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - \Delta u(t,x) + f(u(t,x)) = 0; & \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ u(t,x) = 0; & \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \\ u(0,x) = u_0(x); & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (3.1)$$

3.1 Dérivabilité de la solution dans l'espace L^p

Théorème 3.1. *Pour tout $u_0(\cdot)$ appartenant à $L^1(\Omega)$, il existe une unique fonction $u(\cdot, \cdot)$ de $C(\mathbb{R}^+; L^1(\Omega))$ telle que*

1. $t \rightarrow u(t, \cdot)$ est presque partout dérivable dans L^p , $1 \leq p < +\infty$.
2. $u(t, \cdot) \in W^{2,p}(\Omega)$ pour $1 \leq p < +\infty$ et $t > 0$.
3. $u(\cdot, \cdot)$ satisfait à l'équation (3.1).
4. $\|u(t, \cdot)\|_{L^p(\Omega)} \leq C(1 + \frac{1}{t})^{\frac{N}{2}(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p})} \|u_0\|_{L^{p_0}(\Omega)}$ pour $1 \leq p_0 \leq p \leq +\infty$.
5. $\|\frac{\partial u}{\partial t}(t, \cdot)\|_{L^p(\Omega)} \leq Ct^{-1}(1 + \frac{1}{t})^{\frac{N}{2}(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p})} \|u_0\|_{L^{p_0}(\Omega)}$ pour $1 \leq p_0 \leq 2 \leq p \leq +\infty$.

Démonstration. voir[13]

□

3.2 Comportement asymptotique de la solution

Introduisons maintenant la fonction définie φ sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, à valeur réelle, solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, a) + f(\varphi(t, a)) = 0, \\ \varphi(0, a) = a \quad \text{pour } t \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (3.2)$$

Pour tout a , la fonction $t \rightarrow \varphi(t, a)$ est monotone, décroissante si $a \geq 0$, croissante si $a \leq 0$, et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t, a) = 0$ peut être calculée par inversion à partir de la relation suivante :

$$t = \int_{\varphi(t, a)}^a \frac{ds}{f(s)} \quad (3.3)$$

Soit $u(\dots)$ désigne la solution de (3.1), notre résultat essentiel est le suivant :

Théorème 3.2. *Si on suppose que $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(r)}{r} = 0$, alors pour tout $a > 0$ et tout u_0 dans $L^1(\Omega)$, $\frac{1}{\varphi(t, a)}u(t, \cdot)$ convergent uniformément sur $\bar{\Omega}$ lorsque $t \rightarrow +\infty$ vers un nombre C indépendant de a et ce nombre ne peut prendre que les valeurs 0, 1 et -1 .*

Pour démontrer ce théorème, on utilise les trois lemmes suivants :

Lemme 3.1. *Supposons que $u_0(\cdot)$ appartienne à $L^\infty(\Omega)$ et vérifie $a \leq u_0(x) \leq b$, p.p. sur Ω (a et $b \in \mathbb{R}$), alors nous avons $\varphi(t, a) \leq u(t, x) \leq \varphi(t, b)$, pour $t > 0$ et $x \in \bar{\Omega}$.*

Démonstration. Il suffit de montrer l'inégalité $u(t, x) \leq \varphi(t, b)$. Soit

$$h(t, x) = u(t, x) - \varphi(t, b).$$

la fonction h vérifiant

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t}(t, x) - \Delta h(t, x) + f(u(t, x)) - f(\varphi(t, b)) = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial \nu}(t, x) = 0 \quad \text{dons } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \\ h(0, x) = u_0(x) - b \quad \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (3.4)$$

en multipliant par $h^+ = \sup(h, 0)$ et en intégrant sur Ω et en appliquant "la formule de Green" (justifiée), on en déduit

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (h^+(t, x))^2 dx \leq 0.$$

pour tout $t \geq 0$ et p.p. sur Ω . Mais d'après le théorème(3.1) et les théorèmes d'injection de Sobolev, $(t, x) \rightarrow u(t, x)$ est continue sur $]0, +\infty[\times \bar{\Omega}$; par suite $\forall (t, x) \in]0, +\infty[\times \bar{\Omega}$, $u(t, x) \leq \varphi(t, b)$.

On fait de même pour la seconde inégalité. □

Lemme 3.2. *Si on suppose que*

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(r)}{r} = 0,$$

alors quels que soient $a, b \geq 0$,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(t, a)}{\varphi(t, b)} = 1.$$

Démonstration. Supposons $0 < a < b$, donc $\forall t \geq 0$, $0 \leq \varphi(t, a) \leq \varphi(t, b)$. compte tenu de l'hypothèse et de la relation(3.3) $t \rightarrow \varphi(t, a)$ ne peut être à support compact, par suit $\forall t > 0$, $\Phi(t, a) > 0$.

Puisque $t \rightarrow \varphi(t, b)$ est continue décroissante, il existe $t_0 > 0$ tel que $\varphi(t_0, b) = a$ d'où $\varphi(t, a) = \varphi(t + t_0, b)$. Par l'équation(3.2) nous avons :

$$(\varphi^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial t})(s, b) + (\varphi^{-1} \beta(\varphi))(s, b) = 0,$$

d'où

$$\log\left(\frac{\varphi(t, a)}{\varphi(t, b)}\right) + \int_t^{t+t_0} \frac{f(\varphi(s, b))}{\varphi(s, b)} ds = 0,$$

si $t \rightarrow +\infty, \varphi(s, b) \rightarrow 0$ et il en est de même de

$$\int_t^{t+t_0} \frac{\beta(\varphi(s, b))}{\varphi(s, b)} ds.$$

d'où donc le lemme. □

Lemme 3.3. *Soit g une fonction de $L^1_{Loc}(R^+; L^\infty(\Omega))$ vérifiant $\lim_{t \rightarrow +\infty} .essf(t, \cdot) = 0$ uniformément sur $\bar{\Omega}$ et w une fonction vérifiant :*

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t}(t, x) - \Delta w(t, x) = g(t, x). & \text{dans } R^+ \times \Omega \\ w(0, \cdot) \in L^2(\Omega) \text{ et } \frac{\partial w}{\partial \nu}(t, x) = 0, & \text{dans } R^+ \times \partial\Omega \\ \int_{\Omega} w(t, x) dx = \int_{\Omega} g(t, x) dx = 0, & \text{pour } t \geq 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

alors $w(t, \cdot)$ tend vers 0 si t tend vers $+\infty$, uniformément sur $\bar{\Omega}$.

Démonstration. Puisque Ω est borné, les valeurs propres de l'opérateur de Neumann dans $L^2(\Omega)$ ($-\Delta$ et $\frac{\partial}{\partial \nu} = 0$ sur $\partial\Omega$). forment une suite strictement croissante $0 = \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4 \dots < \lambda_n \dots$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = +\infty$ (of B.Nagy et F.Riesz[12]). Soit E_i le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_i ($i \geq 0$) alors L'espace $L^2(\Omega)$ est somme hilbertienne directe des E_i , $i \geq 0$.

Soit E_0 le espace propre et associé à la valeur propre $\lambda_0 = 0$, E_0 est l'espace des fonctions φ constantes sur chaque composante connexe de Ω . On vérifie aisément que la projection sur E_0 d'une fonction φ de $L^2(\Omega)$ n'est autre que sa valeur moyenne sur Ω .

Soit H la somme hilbertienne directe des $E_i (i \geq 1)$ et $(T(t))_{t \leq 0}$ la restriction à H du semi-groupe de contractions de $L^2(\Omega)$ dont l'opérateur de Neumann est le générateur infinitésimal. On a alors, $\forall \varphi \in H$,

$$\|T(t)\varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq e^{-\lambda_1 t} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}.$$

Par suite, en combinant avec les estimations du théorème (3.1), on en déduit pour $t > 0$ et $\varphi \in H$:

$$\|T(t)\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\left(1 + \frac{2}{t}\right)^{\frac{N}{4}} e^{-\frac{\lambda_1}{2}t} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}.$$

Or, $\forall t \geq 0$, $w(t, \cdot)$ et $g(t, \cdot)$ sont dans H ,

$$w(t, \cdot) = T(t)w(0, \cdot) + \int_0^t T(s)g(t-s, \cdot) ds \quad (3.6)$$

et

$$\|T(t)w(0, \cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\left(1 + \frac{2}{t}\right)^{\frac{N}{4}} e^{-\frac{\lambda_1}{2}t} \|w(0, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Soit $a > 0$ tel que $g \in L^\infty(a, +\infty; L^\infty(\Omega))$, nous avons pour $t > 2a$:

$$\left\| \int_0^t T(s)g(t-s, \cdot) ds \right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \int_0^a \|T(s)g(t-s, \cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} ds + \int_a^{t-a} \|T(s)g(t-s, \cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} ds + \int_{t-a}^t \|T(s)g(t-s, \cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} ds.$$

Or le semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ est de contractions dans $L^\infty(\Omega)$, par suite :

$$\left\| \int_0^t T(s)g(t-s, \cdot) ds \right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \int_0^t \|g(t-s, \cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} ds, .$$

De plus, par le théorème 3.1

$$\int_a^{t-a} \|T(s)g(t-s, \cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} ds.$$

et

$$\int_{t-a}^t \|T(s)g(t-s, \cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} ds.$$

sont respectivement majorés par

$$C\left(1 + \frac{2}{a}\right)^{\frac{N}{4}} \int_a^{t-a} e^{-\frac{\lambda_1}{2}s} \|g(t-s, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} ds.$$

et

$$C\left(1 + \frac{2}{a}\right)^{\frac{N}{4}} e^{-\frac{\lambda_1}{2}t-s} \int_0^t \|g(s, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} ds.$$

En utilisant le théorème de Lebesgue et en faisant tendre t vers $+\infty$ on en déduit le lemme. \square

Chapitre 3. Comportement asymptotique de la solution d'une equation d'évolution de la chaleur

Démonstration du théorème 3.2. Grâce à l'effet régularisant sur la donnée initiale, nous pouvons toujours supposer que $u_0(\cdot)$ est dans $L^\infty(\Omega)$.

Posons

$$\varphi(t) = \varphi(t, \|u_0(\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)}).$$

Par le lemme (3.1), nous avons $0 \leq \|u(t, x)\| \leq \varphi(t)$.

Posons $v(t, x) = \varphi^{-1}(t)u(t, x)$; v vérifie :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v + \left(\frac{f(\varphi v)}{\varphi v} - \frac{f(\varphi)}{\varphi}\right)v = 0, & \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \end{cases} \quad (3.7)$$

□

et $|v(t, x)| \leq 1$. En intégrant(3.7) nous obtenons

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} v(t, x) dx + \int_{\Omega} \left(\frac{f(\varphi v)}{\varphi v} - \frac{f(\varphi)}{\varphi} \right) v(t, x) dx. \quad (3.8)$$

Or ,si $t \rightarrow +\infty, \varphi(t) \rightarrow 0$ donc $\frac{f(\varphi)}{\varphi}(t)$,

$\frac{f(\varphi v)}{\varphi v}(t, x) \rightarrow 0$, uniformément sur $\bar{\Omega}$ et par suite $\frac{d}{dt} \int_{\Omega} v(t, x) dx \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$.

Posons $v^M(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} v(t, x) dx$, formule où

$$|\Omega| = \int_{\Omega} 1 dx, w(t, x) = v(t, x) - v^M(t).$$

et

$$g(t, x) = \left(\frac{f(\varphi)}{\varphi} - \frac{f v}{\varphi v} \right) v(t, x) - \frac{d}{dt} v^M(t).$$

la fonction w vérifie :

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t}(t, x) - \Delta w(t, x) = g(t, x), & \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ \frac{\partial w}{\partial \nu}(t, x) = 0, & \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \\ \int_{\Omega} w(t, x) dx = \int_{\Omega} g(t, x) dx = 0, & \forall t \geq 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

$f(t, \cdot)$ converge vers 0 uniformément sur $\bar{\Omega}$ si t tend vers $+\infty$ et par le *Lemme 3.3*, $w(t, \cdot) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ uniformément sur $\bar{\Omega}$.

En outre, $|v^M(t)| \leq 1, \forall t \geq 0$; il existe donc $C \in [-1, 1]$ et une suite $(t_n)_{n \geq 0}$ qui tend vers $+\infty$ tels que $v^M(t_n) \xrightarrow{t_n \rightarrow +\infty} C$.

Supposons $C > 0$, il existe t_0 tel que $v(t_0, x) \geq \frac{C}{2}, \forall x \in \bar{\Omega}$. Par le *Lemme 3.1*, $\forall t \geq t_0$,

$$\varphi(t) \geq u(t, x) \geq \varphi(t - t_0, \frac{C}{2}\varphi(t_0)), \forall x \in \bar{\Omega}.$$

Par le *Lemme 3.2*,

$$\frac{\varphi(t - t_0, \frac{C}{2}\varphi(t_0))}{\varphi(t)} = \frac{\varphi(t - t_0, \frac{C}{2}\varphi(t_0))}{\varphi(t - t_0, \varphi(t_0))} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 1.$$

Chapitre 3. Comportement asymptotique de la solution d'une equation d'évolution de la chaleur

donc $\varphi^{-1}(t)u(t, x) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 1$, uniformément sur $\bar{\Omega}$.

On opère de même si $C < 0$ et $\varphi^{-1}(t)u(t, x) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} -1$.

Si $C = 0$, on vérifie par l'absurde en utilisant ce qui précède que $\varphi^{-1}(t)u(t, x) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$, uniformément sur $\bar{\Omega}$. En outre, d'après le *Lemme 3.2*, la limite ne change pas si on remplace $\varphi(t)$ par $\varphi(t, a)$, $a > 0$, d'où le théorème.

De ce thème, nous déduisons le résultat suivant."

Propriété 3.1. *Si on suppose que $f(r) = r|r|^{p-2}$, $p > 2$, alors pour tout $u(\cdot)_0$ dans $L^1(\Omega)$, $t^{\frac{1}{p-2}}u(t, \cdot)$ converge uniformément sur $\bar{\Omega}$ lorsque $t \rightarrow +\infty$, soit vers $(\frac{1}{p-2})^{\frac{1}{p-2}}$, soit vers $-(\frac{1}{p-2})^{\frac{1}{p-2}}$, soit vers 0.*

Démonstration. Il est facile de vérifier

$$\varphi(t, a) = \frac{a}{((p-2)t|a|^{p-2} + 1)^{\frac{1}{p-2}}}$$

Par suite, pour $a > 0$,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\frac{1}{p-2}}\varphi(t, a) = \left(\frac{1}{p-2}\right)^{\frac{1}{p-2}}$$

d'où le résultat. □

Théorème 3.3. *Si on suppose que $f(r) = r|r|^{p-2}$, $p > 2$, alors pour tout u_0 appartenant à $L^1(\Omega)$,*

$$(t^{\frac{1}{p-2}}u(t, \cdot), t^{\frac{p-1}{p-2}}\frac{\partial u}{\partial t}(t, \cdot)).$$

converge uniformément sur Ω lorsque t tend vers $+\infty$, soit vers $(0, 0)$, soit vers $(-\left(\frac{1}{p-2}\right)^{\frac{1}{p-2}}, \left(\frac{1}{p-2}\right)^{\frac{p-1}{p-2}})$, soit vers,

$$\left(\left(\frac{1}{p-2}\right)^{\frac{1}{p-2}}, -\left(\frac{1}{p-2}\right)^{\frac{p-1}{p-2}}\right).$$

Démonstration. Posons $v = t^{\frac{p-1}{p-2}}u$ et

$$k = t^{\frac{1}{p-2}}u|t^{\frac{1}{p-2}}u|^{p-2} - \frac{p-1}{p-2}t^{\frac{1}{p-2}}u,$$

d'où

$$\frac{\partial k}{\partial t} = (p-1)|t^{\frac{1}{p-2}}u|^{p-2}(t^{\frac{1}{p-2}}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{p-2}t^{\frac{3-p}{p-2}}u) - \frac{p-1}{p-2}(t^{\frac{1}{p-2}}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{p-2}t^{\frac{3-p}{p-2}}u).$$

et la fonction v vérifie

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v(t, x) + k(t, x) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^+ \Omega. \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \partial \Omega \end{cases} \quad (3.10)$$

Soient

$$w = v - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} v dx, \quad h = k - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} k dx,$$

Chapitre 3. Comportement asymptotique de la solution d'une equation d'evolution de la chaleur

d'où, en supposant que $u(0, \cdot)$ et $\frac{\partial u}{\partial t}(0, \cdot)$ sont dans $L^\infty(\Omega)$, $t^{\frac{1}{p-2}}u$ et $t^{\frac{p-2}{p-1}}\frac{\partial u}{\partial t}$ sont essentiellement bornés sur $\mathbb{R}^+ \times \Omega$.

En outre, $\frac{\partial k}{\partial t} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+; L^\infty(\Omega))$ et il en est de même de $\frac{\partial h}{\partial t}$ et nous avons :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial w}{\partial t})(t, x) - \Delta(\frac{\partial w}{\partial t})(t, x) + \frac{\partial h}{\partial t}(t, x) = 0, & \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ \frac{\partial w}{\partial t}(0, \cdot) \in L^\infty_{\text{Loc}}(\Omega) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \nu}(\frac{\partial w}{\partial t})(t, x) = 0, & \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \\ \int_\Omega \frac{\partial w}{\partial t}(t, x) dx = \int_\Omega \frac{\partial h}{\partial t}(t, x) = 0, & \forall t \geq 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

Or $\|\frac{\partial h}{\partial t}(t, \cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq Ct^{-1}$ donc par le lemme(3.3), $\frac{\partial w}{\partial t}(t, \cdot)$ tend vers 0 si t tend vers $+\infty$, dans $L^\infty(\Omega)$.

Or $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega v(t, x) dx \right) = -\frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega k(t, x) dx ;$

par suite si $t^{\frac{1}{p-2}}u$ converge dans $L^\infty(\Omega)$ ($t \rightarrow +\infty$) vers $\left(\frac{1}{p-2}\right)^{\frac{1}{p-2}}$, $k(t)$ converge ($t \rightarrow +\infty$) vers $-\left(\frac{1}{p-2}\right)^{\frac{1}{p-2}}$.

Donc $\frac{\partial v}{\partial t}$ converge ($t \rightarrow +\infty$) vers $\left(\frac{1}{p-2}\right)^{\frac{1}{p-2}}$; or

$$\frac{\partial v}{\partial t} = t^{\frac{p-2}{p-1}} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{p-1}{p-2} t^{\frac{1}{p-2}} u,$$

donc $t^{\frac{p-1}{p-2}} \frac{\partial u}{\partial t}$ converge ($t \rightarrow +\infty$) vers $-\left(\frac{1}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p-2}}$, dans $L^\infty(\Omega)$ et uniformément sur $\bar{\Omega}$ par continuité.

On opère de même si $t^{\frac{1}{p-1}}u$ tend vers $-\left(\frac{1}{p-2}\right)^{\frac{1}{p-2}}$ ou 0. □

Remarque 3.1. f généralement un graphe maximal monotone de \mathbb{R}^2 H.Brézis[5].

Remarque 3.2. L'hypothèse $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(r)}{r} = 0$ peut être affaiblie de la façon suivante :

Si on suppose qu'il existe $\ell = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(r)}{r}$, alors $\{\varphi^{-1}(t)u(t, \cdot) : t > 0\}$ est un ensemble relativement compact de $C(\bar{\Omega})$. Mais si on suppose en outre que la fonction $r \rightarrow \frac{f(r)}{r}$ est localement monotone et impaire au voisinage de 0, alors $\varphi^{-1}(t)u(t, \cdot)$ converge uniformément sur $\bar{\Omega}$, lorsque t tend vers $+\infty$, vers un nombre C qui peut prendre n'importe quelle valeur si $\ell \neq 0$.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié l'analyse asymptotique à l'infini par rapport au temps de la solution d'un problème semi-linéaire de chaleur.

Pour analyser le comportement asymptotique de ce problème, nous utilisons la méthode des semi-groupes de contraction d'un espace de Hilbert. où nous montrons que la solution converge régulièrement vers une paire de nombres réels sous certaines conditions.

Bibliographie

- [1] Grégoire ALLAIRE. *Analyse numérique et optimisation : Une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation*. livre-web. École Polytechnique, 2005.
- [2] Pierre BARAS et Laurent VÉRON. “Comportement asymptotique de la solution d’une équation d’évolution semi-linéaire de la chaleur”. In : *Communications in Partial Differential Equations* 4.7 (1979), p. 795-807.
- [3] H. BRÉSIE. “Monotonicity methods in Hilbert spaces and some applications to nonlinear partial differential equations”. In : *Contribution to Nonlinear Functional Analysis*. Sous la dir. d’E. ZARANTONELLO. New York : Academic Press, 1971.
- [4] H. BREZIS. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, 2010.
- [5] H. BRÉZIS. *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*. Amsterdam : North-Holland, 1973.
- [6] Thierry CAZENAVE et Alain HARAUX. *An Introduction to Semilinear Evolution Equations (Revised edition)*. Clarendon Press, 1998.
- [7] Khalil EZZINBI. *The basic theory for partial functional differential equations and applications*. Rapp. tech. pp.60.cel-00376391. 3rd cycle. Damas (Syrie), 2004.
- [8] A. MUNNIER. *Espaces de Sobolev et introduction aux équations aux dérivées partielles*. Université Henri Poincaré, 2007-2008.
- [9] A. PAZY. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. Springer-Verlag, 1983.
- [10] P.A. RAVIART et J.M. THOMAS. *Introduction à l’analyse Numérique des Équations aux dérivées partielles*. MASSON, 1988.
- [11] J. Pierre RAYMOND. “Equations d’évolution. Résumé de la première partie du cours du module As du DEA de Mathématiques Appliquées”. In : ()
- [12] B. SZÖKEFALVI-NAGY et F. RIESZ. *Leçons d’analyse fonctionnelle*. Paris : Gauthier-Villars, 1968.
- [13] L. VÉRON. “Coercivité et propriétés régularisantes des semi-groupes non linéaires dans les espaces de Banach”. In : *Publications Mathématiques de l’Université de Besançon, Fasc. 3* (1976-1977).