جامعــة قاصدي مرباح ورقلـــــة
كلية الرياضيات و علوم المادة
قســم الفيزياء

أطروحة دكتوراه علوم
في الفيزياء

بعنوان:

إستخدام نموذج الجسيمات المستقلة لحساب دوال توزيع المشتقات الفضائية للحقل الكهربائي الأيوني الموضعي في البلازما

مقدَّمة من طرف:
قريشة سليمة

نوقشت يوم: الإربعاء 02 محرّم 1435 هـ، الموافق لـ 06 نوفمبر 2013 م

أمام اللجنة:

مفتاح محمد الطيب	أستاذ تعليم عالٍ	جامعة ورقلـــة	رئيـــسًا
خلـــــفاوي فتحي	أستاذ تعليم عالٍ	جامعة ورقلـــة	ممتحنًا
عيدة محمد الصالح	أستاذ تعليم عالٍ	جامعة قسنطينة	ممتحنًا
عطاف نذيـــــــر	أستاذ تعليم عالٍ	جامعة قسنطينة	ممتحنًا
قـــدة الحبيـــب	أستاذ تعليم عالٍ	جامعة الـوادي	ممتحنًا
شيـــحي إسماعيـــل	أستاذ تعليم عالٍ	جامعة ورقلـــة	مقـــرِّرًا

الفهـــــــــــرس

إهداء			i
تشكرات			ii
المقدمة			1
الفصل الأول	معارف عن البلازما		6
1.1.	لمحة تاريخية		6
2.1.	تعاريف البلازما		7
3.1.	أهم خصائص البلازما		9
	3.1.أ.	التوصيل الكهربائي	9
	3.1.ب.	التعادل الكهربائي في البلازما	9
	3.1.ج.	حمل الذبذبات	9
	3.1.د.	إنحباس البلازما	10
4.1.	معالجة البلازما		10
	4.1.أ.	نموذج الموائع	11
	4.1.ب.	النموذج الحركي	11
5.1.	رتب البلازما		11
6.1.	بعض معاملات البلازما		13
	6.1.أ.	طول ديباي	13
	6.1.ب.	كرة ديباي	14
	6.1.ج.	درجة تأين البلازما	14
	6.1.د.	معامل التزاوج	15
	6.1.هـ.	تردد البلازما	15
	6.1.و.	طول لاندو	15
	6.1.ز.	طول موجة دي بروغلي الحرارية	16
	6.1.ح.	نصف قطر الكرة الأيونية	16
	6.1.ط.	نصف قطر الكرة الإلكترونية	16

الفصل الثاني	الأطياف و التوزيعات و النماذج في البلازما		17
.1.2	الأطياف		17
	.1.2أ.	الصيغة الطيفية	19
	.1.2ب.	تأثير رباعي الأقطاب	20
.2.2	التوزيعات		22
	.2.2أ.	التوزيعات في البلازما	22
	.2.2ب.	الحقول الموضعية	23
.3.2	أهم النماذج و طرق الحساب المقترحة		24
	.3.2أ.	نموذج Holtsmark	24
	.3.2ب.	نموذج Mayer	25
	.3.2ج.	نموذج Ecker-Muller	26
	.3.2د.	نموذج الجسيم المستقل	26
	.3.2هـ.	نموذج Baranger-Mozer	26
	.3.2و.	تقريب الإحداثيات الجماعية	27
	.3.2ز.	حسابات Iglesias	27
	.3.2ح.	التقريب الأسي ذو المعامل القابل للتكييف	27
	.3.2ط.	تطورات أخرى	28
	.3.2ي.	طرق المحاكاة العددية الجزيئية	29
.4.2	الجهود النظرية لحساب مشتقات الحقل الكهربائي الموضعي		29
الفصل الثالث	حساب دوال توزيع المشتقات الفضائية للحقل الكهربائي الموضعي الأيوني باستخدام المقاربة الإحصائية		30
.1.3	النموذج المتبع		30
.2.3	حساب دالة توزيع $\frac{\partial E_z}{\partial z}$		31
.3.3	حساب دالة توزيع $\frac{\partial E_z}{\partial x}$		38
.4.3	حساب دالة توزيع $\frac{\partial E_z}{\partial y}$		42
.5.3	مناقشة		42

الفصل الرابع	الحساب التحليلي لدوال توزيع المشتقة الفضائية للحقل الكهربائي الموضعي	45
.1.4	النموذج المتبع	45
.2.4	دالة توزيع المشتقة الفضائية الموازية للحقل الموضعي $\frac{\partial E_z}{\partial z}$	46
.3.4	نتائج و مناقشة	48
الفصل الخامس	الحساب التحليلي لدوال توزيع المشتقة الفضائية للحقل الكهربائي الموضعي باعتبار كل التفاعلات	52
.1.5	النموذج المتبع	52
.2.5	دالة توزيع المشتقة الفضائية الموازية للحقل الموضعي $\frac{\partial E_z}{\partial z}$	52
الخلاصة العامة		71
ملحق حساب $\mathbb{Z}$		73
المراجـــع		77

إهـــــــــداء

إلى

روحَيْ والـــــــــــــديَّ العزيـزيـــــن

زوجي الذي تحمّل انشغالي، و ما ادّخر جهدا إلّا و بذله من أجلي

أبنائي الأعـــــزاء

الأهل و الأحباب

كلّ من علّمني حرفاً

أهدي هذا العمل

تشكـــــــــــرات

أتقدم أوّلا و آخرًا بالشكر لله عز و جل الذي بنعمته تتم الصالحات، فله الحمد حتى يرضى و له الحمد إذا رضيَ و له الحمد بعد الرضا.

أتقدم بالامتنان إلى أستاذي شيحي إسماعيل، أستاذ تعليم عالٍ بجامعة ورقلة، على منحي أفضل فرصة علمية بأن يكون مؤطرًا لي، و تحَمُّلِه من ذلك عبئا كبيرا، و صبرًا طويلا في مختلف مراحل إعداد هذه الأطروحة.

أتقدم بالشكر الجزيل للأستاذ الفاضل مفتاح محمد الطيب، أستاذ تعليم عالٍ بجامعة ورقلة، على تكرُّمِه بقبول ترؤس لجنة مناقشتي، و قَبْلَ ذلك مساعداته الجبارة، و على عطائه العلمي الذي كان لنا نِعْمَ العونُ و نِعْمَتِ الذخيرةُ.

أقدم خالص شكري للأستاذ خلفاوي فتحي، أستاذ تعليم عالٍ بجامعة ورقلة، إذْ لم يتأخر أبدا في تقديم ملاحظاته العلمية و المنهجية المثمرة، و كذا على قبوله عضوا ممتحنا في لجنة مناقشتي.

أشكر كذلك الأستاذ عيدة محمد الصالح، أستاذ تعليم عالٍ بجامعة قسنطينة، على قبوله الدعوةَ للانتساب إلى لجنة المناقشة.

أشكر أيضا الأستاذ عطاف نذير، أستاذ تعليم عال بجامعة قسنطينة، على قبوله المشاركة في لجنة تقييم هذه الأطروحة.

أشكر الأستاذ قدة الحبيب، أستاذ تعليم عال بجامعة الوادي، على تكرمه بالمشاركة في تقييم هذا العمل.

أقدم تشكراتي العميقة للأستاذ علي لوناس على تشجيعه المتواصل لنا، و كل التسهيلات التي لم يتأخر في تقديمها.

أشكر كل القائمين على مخبر فيزياء الإشعاع و البلازما و فيزياء السطوح (LRPPS) على توفيرهم لنا كل الإمكانات و الظروف المتاحة لديهم.

المقدمـــــــة

كثيرا ما تتم دراسة البلازما من خلال الإشعاع الكهرومغناطيسي الصادر عنها، إذْ يُحلَّل الطيف الوارد منها كيفيًّا لمعرفة العناصر التي تتشكل منها هذه البلازما، و كمِّيًّا لمعرفة تراكيزها و درجات حرارتها، لذا فإن الأطياف الصادرة عن البلازما أداة مفيدة لتشخيص حالة البلازما، كمعرفة كثافاتها و درجات حرارتها [1-3].

تكون أشكال الخطوط الطيفية الصادرة عن المشعات المعزولة خطوطا لا عَرْض لها، أمّا إذا كانت غير معزولة، أي داخل وسط مادي، فإنها تتفاعل مع بقية جسيمات هذا الوسط، مما يجعل خطوطها الطيفية عريضةً.

تؤثر الحقول الكهربائية (فعل ستارك) الناشئة عن الجسيمات المشحونة في البلازما على خصائصها الضوئية و الترموديناميكية، فهي تتسبَّب في تعريض الخطوط الطيفية و انزياحها [4-6].

أسبابٌ عديدةٌ تساهم في الطيف الحاصل لإعطائه شكلَه النهائي، أهمها: دورُ الجهاز، مُدَّةُ حياة المستويات، و ينشأ عنها التعريض الطبيعي، فعلُ دوبلر الموافقُ للحركة غير المنتظمة للذرات المشعة المرتبطة بالإثارة الحرارية، فعلُ التصادمات، إذْ تخضع المشعات إلى تصادمات مع بقية الجسيمات المحيطة بها، و ينشأ عنها التعريض التصادمي، و يُدْعَى أيضا تعريض الضغط [7].

لقد لفتتْ ظاهرةُ لاتناظر خطوط الطيف في البلازما نظرَ الباحثين [8]؛ إذْ أَظهَرَتِ الخطوطُ الطيفية للمشعات الشبيهة بالهيدروجين و المغمورة في البلازما لاتناظرًا ملحوظا و انزياحاتٍ معتبَرةً عند الكثافات العالية [9].

لقد أُجرِيت دراسات تجريبيةٍ [10، 11] و نظريةٍ عديدة لمعرفةِ مصادر اللاّتناظر و شرح خصائصه، و لكنها لم تصل بعد درجة الكمال [12].

إن المصْدَرَ الرئيسَ لِلاَتناظر الخطوط الطيفية في البلازما هو لاتجانس الحقل الموضعي الأيوني [13]؛ ففي التقريب الأول، تكون الخطوط الطيفية لانتقالات أيونات الهيدروجين و أشباه الهيدروجين بسبب تفاعل الإلكترون المقيد مع الحقل الموضعي في البلازما، فيقود ذلك إلى انقسام ستارك الخطي، و يكون الطيف متناظرًا حول مركز الخط، و في غياب أي اضطراب خارجي، يوجَد مصدرٌ داخليٌّ للاتناظر، هو تأثيرات البنية الدقيقة، كما يُلاحظُ لاتناظرٌ آخرُ عندما تزداد كثافة البلازما [9].

يُعزى لاتناظر الخطوط الطيفية إلى مصادر عدة، كالحدود ذات الرتب العليا في النشر المتعدد الأقطاب لجهد التفاعل بين البلازما و المشع (الحدود رباعية الأقطاب و فعل ستارك التربيعي الخ . .)، إذْ يؤدي التفاعل بين المشعات الهيدروجينية في البلازما الكثيفة و الحقل الموضعي لأيونات البلازما إلى اتساع الخطوط الطيفية بسبب انقسام المستويات الذرية بفعل ستارك الخطي [9]، كما يؤدي إلى انزياحها و لاتناظرها، نتيجةً للتفاعل بين عزم رباعي القطب الذري و لاتجانس الحقل الموضعي، و ما يُعْرف بفعل رباعي الأقطاب و التأثيرات من رتب أعلى، كفعل ستارك التربيعي. يُسَبِّبُ فعل رباعي الأقطاب انزياحاتٍ مختلفةً لمركبات ستارك، و هو الذي يملك المساهمةَ المهيمنةَ على لاتناظر الخط [14].

للحصول على وصف صحيح للاتناظر طيف أيون الهيدروجين أو أشباه الهيدروجين، ينبغي لهاملتونيان المشع المغمور في البلازما، أن يتضمن أيضا تفاعلات ثماني الأقطاب، فقد بيّنَ باحثون أن التصحيحَ من الرتبة الثانية في نظرية الاضطراب لتفاعل رباعي الأقطاب و التصحيحَ ذا الرتبة الأولى لتفاعل ثماني الأقطاب متناسبان مع $(a_0/R_0)^{-4}$ ، حيث R_0 البعد المتوسط بين الأيونات المحدِثَة للاضطراب، و a_0 نصف قطر بوهر [13].

لقد طُوِّرت النظرية الأساسية للاتناظر الخطوط الطيفية للهيدروجين في البلازما الكثيفة على أساسِ تقريبٍ دقيقٍ جدا بالأخذ بعين الاعتبار تفاعلَ رباعي الأقطاب و فعلَ ستارك التربيعي [12]، كما حُسِب الإنزياح و اللاتناظر بسبب فعل رباعي الأقطاب الأيوني بواسطة التدرج المتوسط للحقل و المرتبط بالحقل، و مُدِّدَ إلى الجسيمات المحجوبة [15].

لمعالجة مسألة لاتناظر الخط الطيفي لا تكفي معرفةُ توزيع الحقل الموضعي فقط، بل تنبغي معرفةُ دوال التوزيع الفضائي لمختلف هيئات الجسيمات المحدِثَة للاضطراب، و بالتالي ينبغي إدخال دوال التوزيع $P\left(\vec{E};(\partial E_i / \partial x_k)\right)$ لشعاع الحقل الموضعي $\vec{E}$ و كل مركباته المستقلة للمُوَتِّر المؤلَّف من مشتقاته الفضائية $\partial E_i / \partial x_k$ [16].

و حيث لم تُحْسَبْ دوال التوزيع المتعددة الوسائط لحد الآن [16، 17]، فإنه استُخْدِمَ الوصفُ التقريبي بمساعدة العزوم الأولى لدالة التوزيع التامة، على مختلف مركبات موَتِّر لاتجانس الحقل الموضعي $\{\partial E_i / \partial x_k\}$.

يتم تضمين تأثير الحقل الكهربائي الموضعي، وهو المعروف بفعل ستارك، في الصيغة الطيفية برتب مختلفة التقريب؛ فمن الرتبة الأولى يتم بما يُعْرَفُ بدوال توزيع الحقل الكهربائي الموضعي، و تؤدي إلى تعريض الخطوط، و أمَّا من الرتبة الثانية فيتم بدوال توزيع المشتقات الفضائية للحقل الموضعي، و تؤدي إلى لاتناظر الخطوط الطيفية [13، 18].

حيث أنه لا يمكن معالجةُ البلازما معالجةً عَيْنيةً، ذلك أنها ظواهر تحدث على سُلَّمٍ صغيرٍ جدا من الأطوال و تتناول عددا ضخما من الجسيمات، فإنه يتعيَّن معالجتها إحصائيا.

لقد باشرنا في أعمال سابقة [19] معالجة مسألة تدرجات الحقل الكهربائي الموضعي الأيوني للبلازما حول المشعات الأيونية، و ذلك بحساب دوال توزيع المشتقات الفضائية لهذه الحقول باستخدام المحاكاة العددية بطريقة مونتي كارلو [20]، و كذا ببعض المعالجات التحليلية [21، 22].

بمواصلة التعاون مع آخرين مشتغلين بالمجال نفسه [23، 24] بدا لنا أن أخذ كل التفاعلات بين مكونات البلازما بعين الاعتبار يؤدي إلى تغير نوعي في دوال توزيع المشتقات، لذا فإننا حاولنا التحقق من ذلك بإعادة هذا الحساب خطوةً خطوةً، محاولين التحقق ممّا قمنا به و قام به غيرنا ممّن يشتغل بالمجال نفسه، فتبيّن لنا أن هناك بعض مراحل الحساب التي ينبغي التوقف عندها.

في سبيل ذلك أعدنا حساب دوال توزيع المشتقات الفضائية للحقول الكهربائية الأيونية الموضعية في البلازما باستخدام نموذج الجسيمات المستقلة، فحصلنا على نتائج مهمة أمكن نشرها [25، 26]، ثم واصلنا حساب هذه الدوال آخذين جميع التفاعلات في الحسبان.

تتألف أطروحتنا هذه من مقدمة و خمسة فصول و خلاصة.

الفصل الأول: عموميات عن البلازما: أدرجنا فيه بعض المفاهيم العامة المتعلقة بفيزياء البلازما، و كذا بعض المقادير المهمة، و المعاملات المتعلقة بالظواهر التي تحدث في البلازما، و الخصائص التي تميزها عن بقية حالات المادة.

الفصل الثاني: الأطياف و التوزيعات و النماذج: تحدثنا فيه عن أطياف البلازما و دور دوال التوزيع في اختزال الحسابات، و وصفها الإحصائي للجمل الفيزيائية، ثم خصصنا الحديث عن دوال التوزيع في البلازما، و النماذج الفيزيائية و طرق الحساب التحليلي و العددي المقترحة من طرف الفيزيائيين لمعالجة مسائل البلازما.

الفصل الثالث: حساب دوال توزيع المشتقات الفضائية للحقول الكهربائية الموضعية الأيونية باستخدام المقاربة الإحصائية: دعّمنا فيه الحساب الذي أنجزناه عند تحضير مذكرة الماجستير، و ذلك باستخدام مقاربة إحصائية مبْنِيَّةٍ على أساس التكافؤ بين بعض المقادير. إن هذه المقاربة قادت إلى النتائج نفسها، و لقد نُشِرَت شهرَ مارس **2013** في مقال **[26]** مستقل عن المقال الذي يشكل لُبَّ هذه الأطروحة، و ذلك في مجلة "**Journal of Plasma Physics**"، و هي من منشورات جامعة كمبريدج بالمملكة المتحدة.

الفصل الرابع: الحساب المباشر لدوال توزيعات المشتقات الفضائية للحقول الكهربائية الموضعية الأيونية باستخدام نموذج سابق هو نموذج الجسيمات المستقلة: هذا الفصل هو لُبُّ هذه الأطروحة. بَسَطْنا فيه محتوى المقال العلمي الذي نُشِر شهرَ أكتوبر **2012** في مجلة "**Contributions to Plasma Physics**" **[25]**، و هي أيضا من منشورات جامعة كمبريدج. يتضمن هذا الفصل حساب دالة توزيع المشتقة الفضائية الموازية للحقل الكهربائي الموضعي الأيوني باستخدام نموذج الجسيمات المستقلة، حيث لا يؤخذ بعين الاعتبار إلا التفاعلات المركزية بين الأيون المشع و بقية مكونات البلازما، فتناولنا كلَّ التفاصيل، من تقريبات حسابية و استخدام للدوال الخاصة، الشهيرة و غير الشهيرة، و كذا السلاسل و خصائصها. لقد كُلِّل كل ذلك بالصيغة النهائية لدالة التوزيع، مرفقةً بالتمثيلات البيانية لها، كما استنبطنا من ذلك بعضَ خصائص هذه الدوال؛ إذْ تبيّن لنا أن دوال التوزيع هذه تعتمد على احتمال وجود الحقل أكثر ممّا تعتمد على الحقل نفسه، و هي نتيجة مهمة جدا.

الفصل الخامس: حساب دوال توزيعات المشتقات الفضائية للحقول الكهربائية الموضعية الأيونية بأخذ كل التفاعلات بعين الاعتبار: في هذا الفصل طرحْنا خطوات حساب دوال توزيع المشتقات الفضائية للحقول الكهربائية الموضعية الأيونية في البلازما بالأخذ بعين الاعتبار كل التفاعلات بين مكونات البلازما، و هو ما نظن أنه سيعطي نتائج أقرب للحقيقة.

في الأخير حوصلنا محتوى الأطروحة في خلاصة عامة، أبرزنا فيها النتائج المهمة التي بَلَغْناها، و الآفاق التي فتحتها هذه النتائج لمواصلة البحث، سواءً من طرفنا أو من طرف باحثين آخرين.

الفصل الأول
معارف عن البلازما

1.1. لمحة تاريخية:

في عام 1879م اعتبر الفيزيائي الإنكليزي السير William Crookes [27] حالةً مادية رابعة، أطلق عليها آنذاك إسم "المادة المشعة". في عام 1897م اكتشف الفيزيائي البريطاني Joseph Thomson [28] خصائص البلازما و طبيعتها، و يرجع الفضل في تسمية البلازما إلى الفيزيائي Irving Lingmuir في عام 1928م [29]، لاعتقاده أنها تشبه بلازما الدم على الأرجح، و قد كتب Lingmuir: "فيما عدا جوار الأقطاب حيث توجد أغمدة بها إلكترونات قليلة، فإن الغاز المتأين يحوي أيونات و إلكترونات متساوية العدد تقريباً، مما يجعل الشحنة الفضائية الإجمالية ضئيلةً جداً. سنستخدم اسم البلازما لوصف هذه المنطقة المحتوية على شحنات متوازنة من الأيونات و الإلكترونات" [29].

إقتصرت الأعمال التجريبية قبل أربعينيات القرن العشرين على دراسة الانفراغ في الغازات الضعيفة التأين، و هي دراسة تركزت في أغلب الأحيان على آلية الاصطدام، و لاسيما ظاهرة التأين، مما جعلها أحد ميادين الفيزياء الذرية، كما أن الدراسات التجريبية للآثار الحدية كانت الراجحة، ولكنها لم تفسَّر بأيّة نظرية عامة، و ظلت بلا رابطة تربط بينها.

بدأ ازدهار فيزياء البلازما منذ عام 1950م عندما برزت مسألة من أكثر مسائل الفيزياء المعاصرة جذباً و تعقيداً، و هي تفاعل الاندماج النووي الحراري، الذي أعطت بحوثه دفعة

عظيمة للبحوث النظرية و التجريبية و التقنية. لقد برزت صعوبات عدة، ذلك لأن هذا الاندماج النووي يستدعي الحصول على بلازما كثيفة، و حارة جداً لابد من احتباسها و حصرها، كما لابد من مراقبة الاندماج و السيطرة عليه.

2.1. تعاريف البلازما:

تشكل البلازما نسبة 99% من المادة الكونية بين النجوم و المجرات من حيث الكتلة و الحجم [30]، كما أن بعض الكواكب تشكل البلازما أغلبَ مادتها [31].

البلازما قليلة جداً في محيطنا القريب، غير أنه من الممكن توليدها صناعيا، فالغاز في مصابيح النيون و التفلور يُعتبرُ بلازما، كما أن القوس الكهربائي المستخدم في عمليات اللحام، و اللهب الخارج من الصواريخ المنطلقة، و الكرة الملتهبة المتولدة عن القنبلة الذرية، جميعها أمثلة عن البلازما [32]، فما هي البلازما يا تُرَى؟

- ✓ عند تسخين المادة من صلبة إلى سائلة إلى غازية، ثم زيادة التسخين، تبدأ بالتأين، ذلك أن إلكتروناً أو أكثر سيتحرر من كل ذرة من الغاز [33]، تُعتبر هذه بلازما.
- ✓ البلازما هي الحالة الرابعة للمادة، تتميز عن غيرها من الحالات بالطاقة الهائلة التي تمتلكها، و هي ذات صفات مقاربة للحالة الغازية، لكنها تختلف عنها في العديد من الجوانب، نورد بعضها في الجدول التالي:

مقارنة بين خصائص البلازما و الغاز		
الخاصية	البلازما	الغاز
التوصيل الكهربائي	جيّد جداً: لأغراض عديدة يمكن أن يعامل على أنه لانهائي. يسيطر على تصرفها حقلان كهربائي و مغناطيسي [32].	رديء جداً: الغازات مصنفةٌ عوازل كهربائية في الشروط العادية. لا يستجيب بشكل واضح لتأثير الحقل الكهربائي أو المغناطيسي [32].
الأصناف المكونة	صنفان أو ثلاثة: إلكترونات و أيونات و ذرات محايدة. تتوزع حسب الشحنة و تتصرف عند أكثر الحالات باستقلالية حسب الحجم و السرعة و الحرارة.	صنف واحد: ذرات أو جزيئات. جميع الجزيئات تتصرف بطريقة مشابهة، تتأثر بالجاذبية و تتصادم مع بعضها البعض.
توزيع سرعات الجسيمات	غالبا لا تخضع لتوزيع ماكسويل: التفاعلات التصادمية غالبا ما تكون ضعيفة في البلازما الحارة، و بالتالي فإن القوى الخارجية تقود البلازما بعيدا عن الاتزان الموضعي ممّا يؤدي بعدد معتبر من الجسيمات لكي تكون لها سرعات غير عادية.	يخضع لنظام ماكسويل لتوزيع السرعات: عادةً ما تؤدي التصادمات إلى إعطاء الجسيمات سرعات موزعة وفقًا لتوزيع ماكسويل فيما عددٌ قليل جدا من الجسيمات السريعة.
التفاعلات	جماعية: الأمواج أو الحركة المنظمة للبلازما مهمة جداً، ذلك أن الجسيمات يمكنها أن تتفاعل فيما بينها على مدى طويلٍ عبْر القوى الكهربائية و المغناطيسية.	ثنائية: التصادم الثنائي بين الجسيمات هو السِمَةُ الغالبة، و نادرا جدا ما يكون ثلاثيا.

✓ إن وصف البلازما بأنها وسط متعادل من الجسيمات السالبة و الموجبة الشحنة هو وصف ضعيف تعوزه الدقة، ذلك أن تعريف البلازما لابد أن يتضمن ثلاثة معايير [34، 35]، هي:

أ) **تقارب البلازما:** ينبغي أن تكون الجسيمات المشحونة متقاربة جداً لدرجة أن يؤثر كل جسيم على الجسيمات القريبة منه؛ فالتأثير الجماعي هي الصفة المميزة للبلازما.

ب) **حجم التفاعلات في البلازما:** يجب أن يكون نصف قطر ديباي صغيرا بالمقارنة مع الحجم الطبيعي للبلازما الموجودة، و هذا يعني أن مقدار التفاعلات الواقعة في قلب كتلة البلازما لها أهمية كبيرة بشكل يفوق تلك الواقعة على الحواف، آخذين في الاعتبار تأثير ما يحيط بالبلازما من الوسط المحيط بها.

ج) **تردد البلازما:** يجب أن يكون تردد الإلكترونات في البلازما أكبر من تردد الإلكترون بالحالة الطبيعية.

3.1. أهم خصائص البلازما:

3.1.أ. التوصيل الكهربائي: باعتبار البلازما وسطا يضم عددًا ضخماً من الجسيمات المشحونة المتحركة بحرية داخلها، فإنها تُعَدُّ موصلا جيداً للكهرباء [32]. تتبادل هذه الجسيماتُ المشحونة التأثيرَ مع الحقل الكهرومغناطيسي الموضعي، كما أن الحركةَ المُنَظَّمَةَ لها تُحْدِثُ تياراتٍ كهربائيةً و تغيراتٍ لكثافة الشحنة، تؤدي إلى نشوء حقول كهرومغناطيسية.

3.1.ب. التعادل الكهربائي في البلازما: بسبب جودة التوصيل الكهربائي، فإن المجال الكهربائي للبلازما يصبح صغيراً جداً، و هذا يفضي إلى مفهوم مهم لشبه التعادل، و الذي يفيد بأنه إذا كانت الشحنات متقاربة جدا من بعضها البعض فالمفروض أن كثافة الشحنات السالبة تعادل كثافة الشحنات الموجبة خلال حجم كبير من البلازما؛ أي أنها متعادلة على السُلَّمِ الجهري (الماكروسكوبي)، و يعبر عنها عندئذ بمعادلة: $n_e = Z\, n_i$ ، أما على مقياس طول ديباي (السُلَّمِ المجهري) لا يكون هناك تعادلٌ كهربائي [36].

3.1.ج. حمل الذبذبات: إحدى الصفات المهمة للبلازما هي قابليتها لحمل الذبذبات و بث الموجات، و يمكن أن تَحْدُثَ أنواعٌ مختلفة من السلوك التذبذبي، سنذكر حالتين بسيطتين منها [37]:

- ✓ الذبذبات الهايدرومغناطيسية: تمثل الموجات الهايدرومغناطيسية موجات حقيقية تنتشر في وسط موصل خاضع لتأثير حقل مغناطيسي ثابت. هذا السلوك تنبأ به لأول مرة Alfven [38] عام 1942، و هو منسجم مع الصياغة الهايدرومغناطيسية للبلازما [37].

- ✓ الذبذبات الكهروستاتيكية: نوقشت الذبذبات الكهروستاتيكية في البلازما لأول مرة من قِبَل L. Tonks and I. Langmuir [39]. في الحقيقة يوجد نوعان محتملان من الذبذبات الكهروستاتيكية، ذبذبات التردد العالي التي تكون سريعة جداً، و يصعب على الأيونات الثقيلة أن تتبعها، و ذبذبات التردد المنخفض للأيونات البطيئة جداً.

3.1.د. إنحباس البلازما: بما أن البلازما في مفاعلات الالتحام النووي الحراري يجب أن تكون حارةً جدّاً، فإنه ينبغي منع تماسها بجدار إناء المفاعل. يمكن تحقيق هذا بتعليق البلازما في وسط الإناء في مجال مغناطيسي. هذا الحقل المغناطيسي لا يستطيع حصر البلازما تماماً، و معدل النضوح الأدنى للبلازما يحدَّدُ بالانتشار الذي تسببه الحركة الحرارية. في الواقع يكون النضوح أسوأَ كثيراً؛ إذْ تحاول البلازما توليد أنواعٍ مختلفةٍ من عدم الاستقرار، تجعلها تخرج من منطقة الحصر المغناطيسي. لقد طُوِّرت أجهزة كثيرة للتغلب على هذه العوامل من عدم الاستقرار من قِبَل الفيزيائيين، و سُمِّيتْ بأسماء مختلفة مثل (Stellarator, Scyllac, Scylla, Tokamak, Alcator etc . . .)، و يُفترض في هذه الأجهزة أن تُمْسِكَ البلازما بحقول مغناطيسية مُعَقَّدَةٍ، و تُسَخِّنَ البلازما إلى النقطة التي يبدأ عندها الالتحام [32].

4.1. معالجة البلازما:

إن التعقيد في حالة البلازما بشتى أشكالها، بسبب درجات الحرارة و الكثافة العاليتين، قاد إلى عدد كبير من طرائق التحليل النظري المختلفة تماماً [40]. لوصف حالة البلازما يجب تحديد مواضع الجسيمات و سرعاتها، و وصف المجال الكهرومغناطيسي بها، لكن لا يُعَدُّ ضرورياً فحص جميع الجسيمات، لهذا السبب يقدم الفيزيائيون وصفاً للنماذج المعروفة التي يقسمونها إلى نوعين مهمين:

4.1.أ. نموذج الموائع [33]: يصف نموذج الموائع البلازما من حيث الكميات البسيطة كالكثافة و السرعة المتوسطة حول كل موقع. توجد طريقتان لنموذج الموائع البسيطة:

- ✓ نظرية الديناميكا الهيدرومغناطيسية: ديناميكيات الموائع الموصلة في مجالات كهربائية و مغناطيسية شبه مستقرة، و هذه الموائع قد تكون معادن فلزية سائلة كالزئبق أو الفلزات القلوية المنصهرة ، أو قد تكون غازا ضعيف التأين أو بلازما، و هي تتعامل مع البلازما كمائع وحيد محكوم بتركيبة من معادلات ماكسويل و معادلات Navier-Stokes .
- ✓ نظام الموائع الثنائي: حيث تُعامل الإلكترونات و الأيونات معاملة منفصلة.

يكون نظام الموائع دقيقا إذا كان الاصطدام عاليا بدرجة كافية تؤدي إلى إيصال توزيع سرعة البلازما بشكل قريب لقانون توزيع ماكسويل–بولتزمان؛ ذلك لأن نظام الموائع يصف البلازما كوسط واحد بدرجة حرارة محددة لكل موضع.

4.1.ب. النموذج الحركي [33]:

يصف هذا النموذج توزيع سرعات الجسيم لكل نقطة بالبلازما، لذا لا نحتاج قانون توزيع ماكسويل –بولتزمان لوصف البلازما رياضيا. يُعتبَر وصف الحركة ضروريا بالنسبة للبلازما عديمة الاصطدام، و توجد طريقتان معروفتان لوصف الحركة بالبلازما، الأولى تعتمد وظيفة التوزيع السهل على الشبكة في السرعة و الموقع، أما الأخرى فتسمى "تقنية الجسيم في الخلية"، و تضم المعلومات الحركية باتباع مسارات أعداد كبيرة من الجسيمات الفردية. رياضياً يعتبر النموذج الحركي أكثر تعقيداً من نموذج الموائع، و يَستخدم معادلة فلاسوف لوصف نشوء نظام الجسيمات بالبيئة الكهرومغناطيسية.

5.1. رتب البلازما:

تشمل البلازما مجالاً عريضاً من السلالم، في الطول و الكثافة الكتلية و درجة الحرارة و الكثافة العددية و المجال المغناطيسي و أزمنة الحياة **[31]**.

الطول: 10^{-10} ، 10^{+25} cm

الكثافة الكتلية: 10^{-27} ، 10^{+10} g/cm^3

الكثافة العددية: $< 10^{-4}$ ، $> 10^{+30}\ cm^{-3}$

المجال المغناطيسي: 10^{-12} ، $10^{+11}\ Tesla$

أزمنة الحياة: 10^{-12} ، $\infty\ sec$

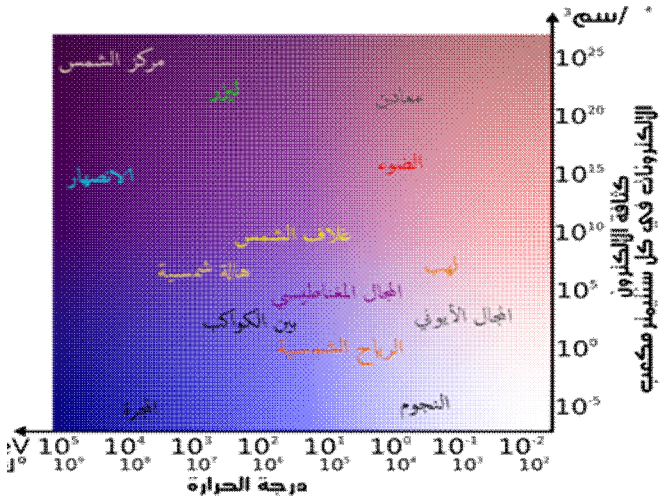
درجة الحرارة: ~ 0 ، $10^{+10}\ K$

تُقاس حرارة البلازما أيضاً بالإلكترون فولط، و هي قياس للطاقة الحركية الحرارية لكل جزيء. تكون الإلكترونات في الكثير من الأحيان قريبة من حالة التوازن الحراري الحركي (الترموديناميكي)، حيث تتوازن عن طريق الديناميكا الحرارية وحدها و بشكل أسرع من أن تتحول إليها من خلال الأيونات أو الذرات. لهذا السبب تكون حرارة الأيونات مختلفة عن حرارة الإلكترونات، وعادة ما تكون أبرد. إستناداً للحرارة المرتبطة بالإلكترونات و الأيونات و الجسيمات المحايدة فإن البلازما يمكن تصنيفها على أنها حرارية أو لاحرارية.

البلازما الحرارية: تكون فيها جميع مكونات البلازما ذاتَ درجة حرارة واحدة؛ أي تكون بحالة توازن حراري مع بعضها البعض.

البلازما اللاَّحرارية: تكون للأيونات و الجسيمات المحايدة درجةُ حرارة محيطها، بينما تكون درجة حرارة الإلكترونات أكبر منها بكثير.

يبين الشكل (1.1) رُتَب البلازما المختلفة للكثافة الإلكترونية كتابع لدرجة الحرارة [41].

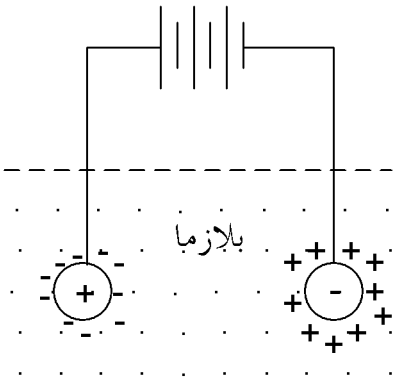


الشكل (1.1): مخطط يبين درجة الحرارة و الكثافة الإلكترونية لأمثلة مختلفة للبلازما

6.1. بعض معاملات البلازما:

6.1.أ. طول ديباي: يعرف طول ديباي على أنه المسافة التي عندها تقريبا يحدث حجب لتأثير الشحنة، و ترجع تسميتها إلى العالم الهولندي بيتر ديباي.

لتكوين فكرة عن هذا الطول نأخذ التأثير المتبادل للبلازما مع حقلٍ كهروستاتيكي. من المعروف في الحالات الساكنة أن النواقلَ الكهربائيةَ الجيِّدةَ تمنع الحقلَ الكهربائيَّ من النفاذ داخلَها؛ ذلك أن الناقل يَحْجِزُ الحقلَ بتجميع شحنات كهربائية على سطحه، و هو ما يحدث أيضاً في حالة البلازما، فإذا ما أدخلنا زوجاً من الأقطاب الكهربائية في البلازما، الشكل (2.1)، فإنَّ الإلكترونات و الأيونات تُكوِّن تجمعاً للشحنات الساكنة حول كل من القطبين، و تحجب حقلَها. بسبب التهيج الحراري فإن الشحناتِ لا يمكنها أن تكونَ ساكنةً تماماً على الأقطاب، بل ستُكَوِّنُ غيمةً غيرَ ثابتةٍ بالقرب من القطب، و في داخل الغيمة فقط يشوِّشُ القطبُ البلازما، أمَّا خارجَها فلا تتأثر البلازما بوجود القطب.



الشكل (2.1)

تتفاعل الأيونات داخل البلازما من خلال جهد يُدْعى جهد ديباي (Debye)، له الصيغة:

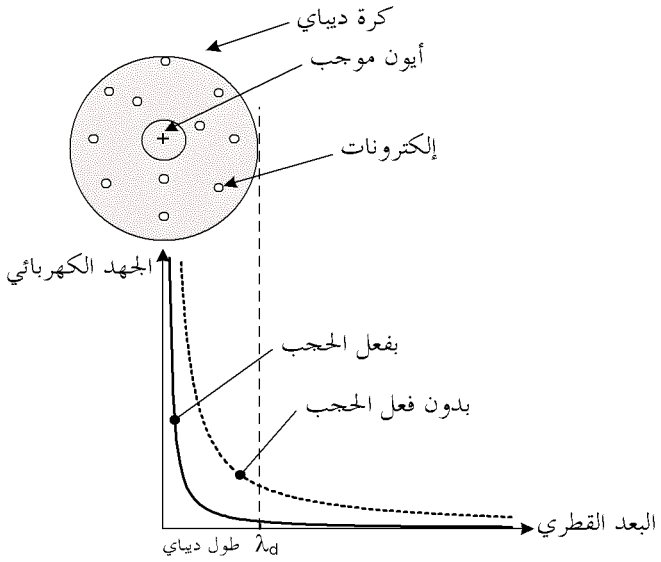
$$V(\vec{r}) = \frac{Ze}{r} e^{-\frac{r}{\lambda_d}}$$

و يُدعى المقدار λ_d طول ديباي، وهو معيارٌ لنفاذ الحقل الكهربائي داخل الغيمة، إذْ يقترب الجهد من الإضمحلال التام تقريبا على بُعْدِ بِضعةِ أمثالٍ من هذا الطول. إن حجم الغيمة متعلق بدرجة الحرارة، إذْ تكون هذه الغيمة كبيرةً عندما تكون درجة الحرارة عاليةً، أمَّا سُمْكُها فهو طول ديباي λ_d [32].

يُعطى طول ديباي بالعلاقة التالية [42،43]:

$\lambda_D = \sqrt{\frac{kT}{4\pi e^2 n_e}}$ (SI) $\cong 6,9\sqrt{\frac{T}{n_e}}$ (cgs) حيث n_e الكثافة الإلكترونية، k ثابت بولتزمان، e الشحنة الإلكترونية، T درجة الحرارة المطلقة.

6.1.ب. كرة ديباي: تعرف على أنها كرة من الشحنات نصف قطرها هو طول ديباي. تكون الشحنات داخل هذه الكرة ذاتَ تأثير متبادل قوي فيما بينها، على عكس الشحنات التي توجد على حواف هذه الكرة فهي تقريبا محجوبة، الشكل (3.1) [44].



الشكل (3.1)

6.1.ج. درجة تأين البلازما: تشير درجة التأين في الغاز أو البلازما إلى كمية الذرات التي فَقدت أو كسبت إلكترونات، و تكون الحرارة العاملَ القويَّ المتحكِّمَ بذلك.

تُعرف درجة تأين غاز بـــ [44]: $\alpha = \frac{n}{n_0 + n}$ حيث: n_0 الكثافة العددية للجسيمات الحيادية الشحنة، و n الكثافة العددية للإلكترونات أو الأيونات الموجبة الشحنة.

6.1.د. معامل التزاوج Γ: يمثل النسبة بين الطاقة الكامنة المتوسطة و الطاقة الحركية المتوسطة للجسيمات [32، 45].

$\Gamma = \frac{\langle E_p \rangle}{\langle E_c \rangle}$ حيث $\langle E_p \rangle$ الطاقة الكامنة المتوسطة لتفاعل جسيم مع جسيم مجاور له و $\langle E_c \rangle$ الطاقة الحركية المتوسطة له.

معامل التزاوج للأيونات $\Gamma_{ii} = \frac{(Ze)^2}{k\,T\,r_i}$ و للإلكترونات $\Gamma_{ee} = \frac{e^2}{k\,T\,r_e}$ ، حيث: k ثابت بولتزمان، و T درجة الحرارة المطلقة، أمَّا بين الأيونات و الإلكترونات فهو: $\Gamma_{ei} = \frac{Ze^2}{k\,T\,r_{ei}}$

حيث: $r_{ei} = \frac{r_e + r_i}{2}$

عندما يكون $\Gamma \geq 1$ فإن ذلك يدل على أن التزاوجَ شديدٌ [45]، أمَّا عندما يكون $\Gamma << 1$ فإن للطاقةِ الحركيةِ الدورَ الأكبرَ في وصف سلوك الجسيمات؛ أيْ أن التزاوج بين هذه الجسيمات ضعيف [45]، و يُقال عن البلازما حينها أنها مثالية [46].

6.1.هـ. تردد البلازما: يوافق ترددُ البلازما ترددَ الاهتزاز الكهروستاتيكي النموذجي، و هو المعيار الأساسي للأزمنة في فيزياء البلازما [47].

لكل صنف من البلازما تردد خاص، فللأيونات [44]:

$\omega_{pi} = \sqrt{\frac{4\,\pi\,(Ze)^2\,n_i}{m_i}}$ حيث Ze شحنة الأيون، n_i الكثافة الأيونية، m_i كتلة الأيون.

و للإلكترونات [15]:

$\omega_{pe} = \sqrt{\frac{4\,\pi\,e^2\,n_e}{m_e}}$ حيث e شحنة الإلكترون، n_e الكثافة الإلكترونية، m_e كتلة الإلكترون.

6.1.و. طول لانداو: و هو يمثل المقدارَ الذي تتساوى فيه الطاقة الكامنة الكولومية المتوسطة للتفاعل الثنائي مع الطاقة الحركية الحرارية المتوسطة، و يُستخدم في تحليل ظواهر التصادمات، و ارتباطات المواضع في البلازما [31]، و يُحَدَّدُ بـ: $kT = \frac{e^2}{r_0} \Rightarrow r_0 = \frac{e^2}{kT}$

6.1.ز. طول موجة دي بروغلي الحرارية: يُعْطِي هذا الطولُ تقديرا للطبيعة الموجية الكمّية لجسيمات البلازما [45] ، و يعرّف بـ: $\Lambda = \left(\frac{2\pi\hbar^2}{m\,k\,T}\right)^{\frac{1}{2}}$ حيث m كتلة الجسيم، و $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ ثابت بلانك المختزل.

6.1.ح. نصف قطر الكرة الأيونية [43]: و هو يميِّزُ البُعدَ المتوسطَ بين أيونين، و يُستنبط من:

$$\frac{4}{3}\pi r_i^3 n_i = 1 \Rightarrow r_i = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi n_i}}$$ حيث n_i الكثافة الأيونية.

6.1.ط. نصف قطر الكرة الإلكترونية: و هو يميِّز البُعدَ المتوسطَ بين إلكترونين، و يُستنبط من:

$$\frac{4}{3}\pi r_e^3 n_e = 1 \Rightarrow r_e = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi n_e}}$$ حيث n_e الكثافة الإلكترونية.

الفصل الثاني
الأطياف و التوزيعات و النماذج في البلازما

1.2. الأطياف:

إن الخطوط الطيفية الصادرة عن ذرة مغمورة في البلازما تتسع بسبب التفاعل بين حاملات الشحنة. ترتبط طاقة الإلكترونات بالشدة الفعلية للحقل الموضعي عند موضع الإلكترون، لذا يمكن اعتبار الحقل الموضعي ثابتا داخل مجالٍ أبعادُه من رتبة نصف قطر ديباي [48].

إن الحساب الاعتيادي لفعل ستارك لاتساع الخط الأيوني يَعتبر ذرة مصدرة في حقل فضائي ثابت، ناتج عن كل الأيونات المحدثة للاضطراب. في الرتبة الأولى (فعل ستارك الخطي) يتفاعل عزم ثنائي الأقطاب للمشع مع الحقل، و في المرتبة الثانية (فعل ستارك التربيعي) تستقطب الذرة بالحقل، فلأيون واحد محدث للاضطراب على بعد R من المشع، تُظهِر الرتبة الأولى الارتباط بـ $1/R^2$، و من الرتبة الثانية بـ $1/R^4$ [49].

حقل كولوم الفعلي للأيونات يمتلك تدرجات، تُحدِث مع عزم رباعي الأقطاب اضطرابا متناسبا مع $1/R^3$ ، و لقد قام Müller [49] بحساب التوزيع الاحتمالي لتدرج الحقل الكهربائي لأيونات موزعة باستقلال، ثم حسبَ الطيف بسبب التدرجات شبه الساكنة للحقل. لقد قام باستنباط الكثافة الحرجة بالمقارنة بين فعل لاتجانس الحقل مع فعل ستارك التربيعي، حيث يهيمن فعل لاتجانس الحقل تحت هذه الكثافة.

لحساب هذا الاتساع استَعمَل تقريبين:

التقريب شبه الساكن: حيث اعتبرت حاملات الشحنة ثابتة، و وفقا لفعل ستارك فإن الحقل الناتج عن الأيونات المحدثة للاضطراب ينتج انزياحا لمستويات الطاقة الذرية.

تقريب التصادم: حيث يُعالَج تأثير الأيونات المحدثة للاضطراب كتتابع لتصادمات خلال عملية الإصدار. لمعظم التطبيقات يمكن معالجة الاتساع الأيوني (بسبب الأيونات) باستخدام التقريب شبه الساكن، و الاتساع الإلكتروني (بسبب الإلكترونات) باستخدام تقريب التصادم [49].

التأثير الرئيس للاتجانس الحقل يمكن تفسيره كتفاعل لعزم رباعي الأقطاب للمشع مع تدرج الحقل الناتج. وفقا للسلوك الموصوف للحدود المختلفة فإن لاتجانس الحقل ينبغي أن يؤخذ بعين الاعتبار للحالات الذرية التي تمتلك عزما رباعي الأقطاب، أمّا لحالات ثنائي الأقطاب فقط فإنه لا يؤخذ بعين الاعتبار.

في الواقع يكون الحقل الأيوني عند الذرة المشعة في البلازما غيرَ متجانس. لحساب الاتساع الطيفي الأيوني الموصوف ينبغي إيجاد التوزيع الاحتمالي لتدرج الحقل.

لقد أهمل Müller [49] في حسابه الحركة النسبية للذرة المشعة مقارنة بالأيونات المحدثة للاضطراب، و بالتالي فإن الاتساع الأيوني للخط ينبع عن اضطراب الحالة العليا و الحالة السفلى للخط بسبب حقل كولوم الساكن للأيونات.

ترتبط نظرية اتساع ستارك بالقيم العالية للحقل الكهربائي [49]؛ فللبلازما ذات الكثافات العالية (10^{21}-10^{25}cm^{-3}) تصبح فرضية تجانس الحقل الأيوني – على الأقل على السلم الذري– غير صالحة.

نشر تايلور للاضطراب شبه الساكن يُظهِر أن الانقسام الفعلي يصبح غير متناظر، لكن خط الطيف يمكن تفسيره كإضافة لانزياح ماكروسكوبي للاتساع الاعتيادي.

لقد استخدمت قياسات اتساع ستارك الآن لقياس الكثافات الإلكترونية بافتراض أن الحقول الكهربائية الساكنة متجانسة [50].

يُفترض أن هيمنة التزاوج بين المشع و مكونات البلازما تكون بسبب تفاعلات أحادي القطب و ثنائي الأقطاب، و عليه فإن محيط البلازما يمكن تمييزه بحقله الكهربائي الموضعي عند المشع [51].

لقد تمَّ تضمين الإنزياح بسبب لاتجانسات الحقل الموضعي الأيوني، و التي تدعى "الإنزياح رباعي الأقطاب"، باستخدام دالة مرتبطة بشدة الحقل و معامل الحجب. لقد حُسبتْ

هذه الدالة من طرف Halenka [52]، و ينبغي فهمها على أنها متوسط تدرج الحقل الموضعي عند قيمة معطاة للحقل [53]. إنها تعميم لدالة Chandrasekhar [54] المدخلة من طرف Demura and Sholin [16] في نظرية اتساع الخط الطيفي.

كانت البلازما المتداولة في أواسط الستينيات من القرن العشرين ذاتَ كثافات إلكترونية n_e من رتبة $10^{17}cm^{-3}$ و درجات حرارة مطلقة من رتبة عدة إلكترونات فولط (eV)، لعناصر مثل الهيدروجين و الهيليوم، و اليوم تصل الكثافات المتداولة إلى 10^{24} و $10^{25}cm^{-3}$ ، و تصل درجات الحرارة إلى عدة مئات من الإلكترون فولط، (من 600 إلى 1000eV)، لعناصر مثل الآرغون Ar و الكريبتون Kr [45]. إحدى الطرق التي تُنْشَأُ بها هذه البلازما تكون في المخابر، باستخدام الليزر الموجَّه بالاحتباس العطالي.

إن هذه المقادير الكبيرة من الكثافات كافية جدا لإظهار تأثيرات الحقل الكهربائي من رتب عليا [45]. عند الكثافات المنخفضة يفترض أن الحقل الكهربائي الموضعي متجانس عند المشع [55]، و بازدياد الكثافة تنخفض المسافات البينية بين مكوِّنات البلازما، و تصبح فرضية الحقل المتجانس مشكوكا في صحتها [56]، بسبب التدرجات المعتبرة للحقل الموضعي [16، 57-61].

تُعَدُّ الحقول الكهربائية الموضعية فعلا من الأفعال المهمَّةِ التي تساهم في تعريض الخطوط الطيفية. يُدرَجُ تأثير الحقول الكهربائية الموضعية على شكل الخطوط الطيفية من الرتبة الأولى بدوال توزيع الحقل، أمّا من رتب أعلى فيتم من خلال ما يُعرف بتدرجات الحقل الكهربائي الموضعي، أو بعبارة أخرى، مشتقات الحقل الموضعي بجوار المشع.

1.2.أ. الصيغة الطيفية:

يُعبَّر عن شدة الخط الطيفي بالمعادلة [62]:

$$\mathbf{I}(\omega) = \int d\vec{\varepsilon} \int d\left(\partial_\mu \varepsilon_\upsilon\right) \mathbb{Q}(\varepsilon) \mathbf{P}\left(\partial_\mu \varepsilon_\upsilon | \varepsilon\right) \mathbf{J}\left(\omega, \varepsilon, \partial_\mu \varepsilon_\upsilon\right)$$

حيث: $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ دالة احتمال الحقل الموضعي الأيوني لقيمة ε للحقل الموضعي.

$\mathbf{P}\left(\partial_\mu \varepsilon_\upsilon | \varepsilon\right)$ دالة توزيع المشتقات الفضائية للحقل الكهربائي الموضعي الأيوني لحقل مشروط ε.

$J\left(\omega,\varepsilon,\partial_\mu\varepsilon_\upsilon\right)$ دالة شدة الخط لمشع بوجود الحقل المتجانس ε و تدرجاته الممثلة بـ $\partial_\mu\varepsilon_\upsilon$، و التي تمثل مشتقات مركبات الحقل بالنسبة للإحداثيات x ، y ، z .

تتضمن الدالة J هاملتونيان المشع المضطرب، الذي يُعطَى بـ:

$$H_r\left(\vec{E},\partial_\mu E_\upsilon\right)=H_r^0-\vec{d}.\vec{E}-\frac{1}{6}\sum_{i,j}Q_{ij}\frac{\partial E_i}{\partial x_j}+\frac{1}{6}e_0\,r_r^2\,\vec{\nabla}.\vec{E}\ \ldots\ (*)$$

حيث: H_r^0 هاملتونيان المشع دون اضطراب، و يتضمن الحدَّ الأحاديَ القطب.

$\vec{d}=-e_0\vec{r}$ عزم ثنائي قطب المشع.

Q_{ij} تمثل مركبات تنسور عزم رباعي الأقطاب.

r_r البعد بين الإلكترون e_0 و النواة الذرية.

$\vec{E}$ و $\partial_i E_j=\frac{\partial E_i}{\partial x_j}$ هما على الترتيب الحقلُ الموضعيُّ و مشتقاتُ مركباته، حيث $\frac{\partial E_i}{\partial x_j}$ هي مشتقة المركبة j بالنسبة للاتجاه x_i ، و $j=x,y,z$ و $x_i=x,y,z$. للملاءمة يمكن اعتبار اتجاه الحقل الموضعي $\vec{E}$ في اتجاه المحور z المتزايد.

1.2.ب. تأثير رباعي الأقطاب:

إن التأثير الرئيس لتدرجات الحقل الكهربائي الموضعي على الخطوط الطيفية، هو إزاحة المركبات المختلفة للخط الطيفي، مسبّبةً عدم تناظر للخط الطيفي الناتج المركَّب **[63]**.

إن تضمين هذا الفعل كاضطراب في نظرية الاتساع الطيفي يتم باستخدام النشر المعياري المتعدد الأقطاب.

عندما يكون الحقل الكهربائي الموضعي معتبرا، بحيث يكون من رتبة الحقل الناشئ عن نيوكلونات الذرة أو الأيون المشع فإنه لا يمكن معالجة المسألة كاضطراب **[55]**.

إن الحد الأخير في المعادلة (*) متأتٍّ عن إضافة $\vec{\nabla}.\vec{E}$ لتعريف الممتد Q_{ij} . للتفاعل الكولومي يكون $\vec{\nabla}.\vec{E}=0$، و عليه فإن الحد الأخير من هذه المعادلة سيكون صفرًا. أما لحالة تفاعل ديباي فإن $\vec{\nabla}.\vec{E}\neq 0$، و عليه فهذا الحد يبقى. إن هذا الحد الإضافي موجود بسبب الكثافة الشحنية الناجمة عن السحابات شبه الجسيمية الحاجبة التي تغطي المشع **[64]**.

لتقييم حد رباعي الأقطاب في نظرية الخطوط الطيفية ينبغي إجراء التقريب $\partial_i E_j \rightarrow <\partial_i E_j>_E$ ؛ أي حساب متوسط مشتقات الحقل على عدد كبير من الهيئات التي تنتج حقلا موضعيا له القيمة E. عندها يمكن اختزال الهاملتونيان [64]:

$$H_r = H_r^0 - \vec{d}.\vec{E} - \frac{3}{2}Q_{zz}\left(<\partial_z E_z>_E - \frac{1}{3}<\vec{\nabla}.\vec{E}>_E\right) + \frac{1}{6}e_0 r_r^2 <\vec{\nabla}.\vec{E}>_E$$

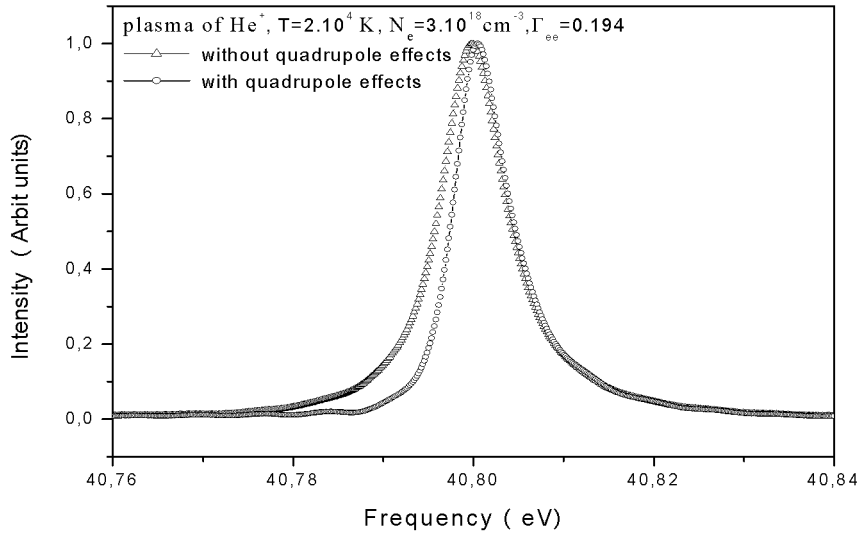
و حيث أن: $<\partial_x E_x>_E = <\partial_y E_y>_E$ و $<\partial_i E_j> = 0$ دوما للحالات $i \neq j$ ، فإن معرفة $<\partial_z E_z>_E$ و $<\partial_x E_x>_E$ كافية لتقدير H_r . . أي أنه يكفي لذلك حساب متوسط المشتقات في اتجاه الحقل (z) ، و في الاتجاه المتعامد مع الحقل (x أو y)، للهيئات ذات القيمة الواحدة للحقل الموضعي، بغض النظر عن اتجاهه؛ أي أن:

$$<\vec{\nabla}.\vec{E}>_E = <\partial_x E_x>_E + <\partial_y E_y>_E + <\partial_z E_z>_E = 2<\partial_x E_x>_E + <\partial_z E_z>_E$$

و يصبح الهاملتونيان [64]:

$$H_r = H_r^0 - \vec{d}.\vec{E} - Q_{zz}\left(<\partial_z E_z>_E - <\partial_x E_x>_E\right) + \frac{1}{6}e_0 r_r^2\left(2<\partial_x E_x>_E + <\partial_z E_z>_E\right)$$

يبين الشكل (1.2) أثر رباعي الأقطاب على الخط الطيفي Lyman-α لبلازما من الهيليوم He^+، و يظهر جليا انخفاض عرض الخط الطيفي عند منتصفه بحوالي 20 %، و انزياحه عمّا إذا لم يؤخذ فعل تدرجات الحقل الكهربائي الموضعي الأيوني بعين الاعتبار، و ذلك رغم أنه لم يُدْرَج توزيع المشتقات الفضائية للحقل الكهربائي الموضعي سوى لقيمة واحدة من الحقول الموضعية، هي القيمة الأكثر احتمالا [18].



الشكل (1.2): أثر فعل رباعي الأقطاب على الخط الطيفي Lyman-α لبلازما من الهيليوم He^+ [18]

2.2. التوزيعات:

التوزيع الاحتمالي هو ذلك النموذج الذي يربط قيمَ المتغيراتِ الأساسيةِ باحتمالات حدوثِها [65]، فإذا كان من الممكن للمتغير المدروس أن يأخذ أَيَّةَ قيمةٍ في مجال مَّا، دُعِيَ هذا التوزيع الاحتمالي بالمستمر.

إن المضمون الذي تحمله دالة التوزيع لمتغير عشوائيٍّ مَّا مماثلٌ لذلك الذي تحملُه كثافةُ الاحتمال.

التوزيعُ الأكثرُ شيوعا في مختلف التطبيقات الفيزيائية هو التوزيع العادي، و يُعْرَف بتوزيع غاوس [66]، إلا أن هناك أصنافا أخرى من التوزيعات، يمكن أن نذكر منها التوزيع المتجانس و المستمر على مجال محدَّدٍ، و التوزيع الأسي و . . .

2.2.أ. التوزيعات في البلازما:

تتألف البلازما من عدد كبير جدا من الجسيمات التقليدية (الميكانيك التقليدي) المتفاعلة فيما بينها، و لتوفير وصفٍ عيني لظواهر البلازما، من الملائم اعتماد تقريب إحصائي،

ممّا يؤدي إلى انخفاضٍ كبيرٍ في كمية المعلومات التي تتعين معالجتُها، لذا فإن دراستها النظرية تستوجب الطرق الإحصائية. في النظرية الحركية من الضروري فقط معرفة دالة توزيع جملة الجسيمات.

تُعَرَّفُ دالة التوزيع لصنف محدد من الجسيمات ككثافة جسيمات في فضاء الأطوار. هذه الدالة ينبغي أن تكون مستمرةً و موجبةً و محدودةً عند أيَّة لحظة، و ينبغي أن تؤول إلى الصفر عندما تصبح السرعة لامتناهيةَ الكِبَرِ.

في نموذج البلازما الحارة، تكون كل المقاديرِ العينيةِ ذاتِ الأهمية الفيزيائية مختزَلَةً في دالة التوزيع.

في كثير من المسائل تكون المعلومة حول توزيع الحقل الكهربائي الموضعي وحدها غير كافية، و يكون من الضروري اعتبارُ دوالِّ توزيعٍ أعقدَ لمقاديرَ أخرى. على ما يبدو فإن أعمال Chandrasekhar and J. von Neuman [67–69] هي الأولى في هذا المجال، حيث اعتبَرت غازا مثاليا من الجسيمات الكولومية في حقل الجاذبية، و ذلك لتطبيقها في مسائل الديناميكا النجمية.

2.2.ب. الحقول الموضعية:

أُدخِل مصطلح الحقول الموضعية للتعبير عن الحقول الكهربائية و المغناطيسية و وَصْفِها، و التي لها أثر فعّال على السلم المجهري داخل مختلف الأوساط [2، 70–80].

تتميز البلازما على السلم المجهري بانحراف محسوس عن شروط شبه التعادل و ظهور حقول كهربائية قوية بسبب انفصال الشحنات [71–80]. هذه الحقول مهمة على السلم المجهري، و تدعى عادةً الحقول الموضعية. طويلة هذا الحقل و اتجاهه تتغيران من نقطة إلى أخرى، و من لحظة إلى أخرى.

من حيث المبدأ يمكن أن نحدد خصائص الحقول الموضعية بمساعدة ذرات أشباه الهيدروجين المغمورة داخل البلازما، و التي تخضع لِفِعْلَيْ ستارك أو زيمان في الحقول الكهربائية أو المغناطيسية على التوالي [2، 70]. تلك الأفعال تقود إلى انشقاق الخط إلى خطوط منفصلة (مركبات ستارك أو مركبات زيمان).

3.2. أهمُّ النماذج و طرق الحساب المقترحة:

يَحْدُث اتساعُ ستارك للخطوط الطيفية الصادرة عن أيونات البلازما و ذراتها تحت تأثير مُرَكِّبَتَي الحقل الكهربائي، المركبة ذات التردد المنخفض و المركبة ذات التردد المرتفع. تُوصَفُ مساهمة الإلكترونات في اتساع ستارك باستعمال نموذج التصادمات، بينما تُعالَجُ مساهمةُ الأيونات غالبا، كشبه ساكنة **[81–84]**.

إذًا لمعالجة مركبة الحقل الكهربائي الموضعي ذات التردد المنخفض نعتبر البلازما مجموعةَ أيوناتٍ نقطيةٍ مغمورة في خلفية متجانسة و مُعَادِلَةٍ كهربائيا، تشغل حجما محدودا، و لها درجة حرارة مطلقة محددة. تتفاعل هذه الأيونات فيما بينها متأثرة بفعل الحجب من خلال جهد فَعَّالٍ هو جهد Debye-Hückel **[85]**، و هو يَتضمَّن تفاعلاتِ الأيونات مع الإلكترونات. يُفترَض أيضا أن البلازما متوازنةٌ حراريا و متعادلةٌ ماكروسكوبيا **[86]**.

يكون الحقلُ الكهربائي المحصل عند موضع مَّا، وفقَ ما ينص عليه مبدأ التراكب، مساويًا المحصلةَ الشعاعيةَ للحقولِ الناشئةِ عن كل أيون على حِدَةٍ.

يمكن تقسيم طرق حساب دوال التوزيع إلى محورين رئيسين هما:

- ✓ الحسابات النظرية التقريبية.
- ✓ المحاكاة العددية.

كل هذه الطرق تضع أوَّلا تصورا للجملة الفيزيائية للبلازما المراد معالجتها، و من ثّمَّ تحديد المقدار الفيزيائي المراد الحصول عليه، و وضْع المعادلات الرياضية المناسبة له، و إجراء المقاربات و التقريبات الحسابية الملائمة، أو تخطيط الخوارزميات العددية و تنفيذها عند المحاكاة.

3.2.أ. نموذج Holtsmark (1919) [87]:

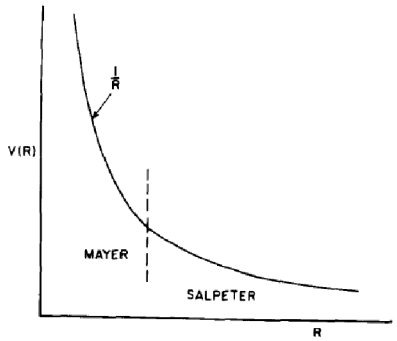
هو أوَّلُ نموذج قُدِّم لمعالجة مسألة توزيع الحقول الكهربائية الموضعية في البلازما، و لقد افترَضَ الأيونات لا تتفاعل فيما بينها، حيث تهيمن الطاقةُ الحركيةُ على الطاقة الكامنة تمامًا؛ أيْ أنَّ $U = 0$ ، و هو ما يكون كذلك فعلا عند درجات الحرارة الكبيرة جدا؛ أي عندما

$T \to \infty$ ، و يقابل ذلك معاملُ تزاوجٍ ضئيلٌ جدا $\Gamma \ll 1$ ، حيث $\Gamma \equiv \frac{< U >}{< T >}$ يمثل حاصل النسبة بين الطاقتين المتوسطتين، الكامنة و الحركية. أمّا عندما يكون هذا المعامل $\Gamma \sim 0.1$ فإن هذا التقريب يصبح غيرَ دقيق [88]. لقد اتُّخِذ هذا النموذج فيما بعدُ نهايةً تنتهي إليها جميعُ النماذج الأخرى، عند شروط الحرارة العالية و (أو) الكثافة الضئيلة.

عندما تكون البلازما مترابطة جدا، حيث يقترب Γ من الواحد، و هو ما يكون فعلا في النجوم، فإنه من غير المقبول إهمال الترابطات بين جسيمات البلازما.

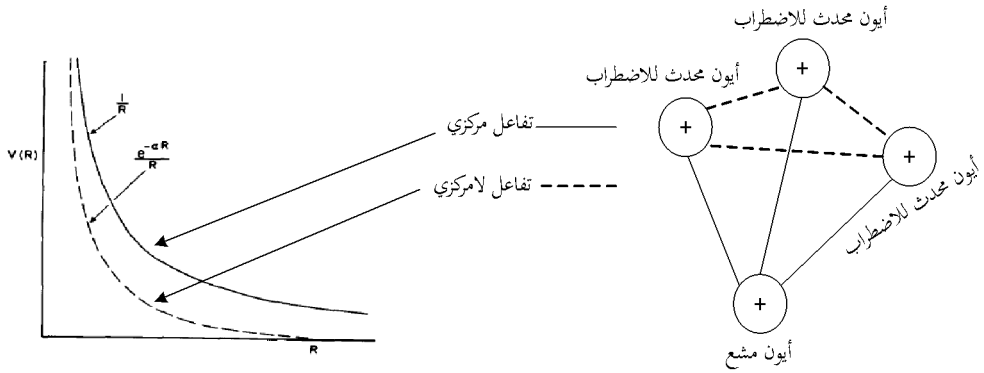
3.2.ب. نموذج Mayer (1940) [89] و Salpeter (1958) [90]:

لقد استَخدَم Mayer النشرَ العنقودي للتفاعلات الثنائية القصيرة المدى، ثم مُدِّدَ من طرف Salpeter ليعالِجَ التفاعلاتِ الثنائيةَ الضعيفةَ البعيدةَ المدى، الشكل (1.2).



الشكل (1.2): مجال استخدام نموذجي Mayer و Salpeter

بهدف استخدام أفضل الأجزاء لكل من هذين النموذجين، قُسِّمت الجهود الزوجية المركزية كما بالشكل (2.2) [91].



الشكل (2.2): التمثيل التخطيطي و التمثيل البياني للتفاعلين، المركزي و اللامركزي

3.2.ج. نموذج Ecker-Muller (1957–1958) [92، 93]:

لقد افترض أن جهد أيونات البلازما محجوب بإلكترونات البلازما، و يخضع لقانون ديباي. التفاعل بين الأيونات مهمل، و الفرق بينه و بين نموذج Holtsmark هو فقط استخدام عبارة الحقل المحجوبة بالإلكترونات.

3.2.د. نموذج الجسيم المستقل (1958) [94]:

أُقترح هذا النموذج أوّلا من طرف M. Lewis و H. Margenau عامَ 1958، و هو ينطلق من اعتبار التفاعلات مركزيةً فقط، أي أن كل التفاعلات مهملةٌ، عدا تلك التي بين كل أيون و الأيون المشع، و الذي اعتبر أيونا مركزيا، و يخضع لجهد كولوم.

ما هذا النموذج إلا الرتبة الأولى من النموذج الموالي، و هو نموذج Baranger-Mozer، إلا أنه يعتبر الكمون عاريا؛ أيْ غير محجوب، فهو تفاعل كولومي، في حين يعتبره نموذج B-M محجوبا، وفقا لنظرية P. Debye and E. Hückel [85].

3.2.هـ. نموذج Baranger-Mozer (1959) [95، 96]:

لقد طُوِّرَتْ عدةُ تقريبات لأخذ كل الترابطات بعين الاعتبار، فمثلا انطلق Baranger و Mozer في نموذجهما من فكرة أن احتمال حدوث هيئة ما، يتعلق بكيفية توزيع الجسيمات؛ أي بإحداثياتها الموضعية، كما أنه يرتكز في حسابه على النشر العنقودي لقوى الكثافة. لقد استخدما طريقة مشابهة لطريقة النشر العنقودي، المعروفة في الميكانيكا الإحصائية. لقد ميَّز هذا النموذج بين مركبتين للحقل، إحداهما منخفضة التردد، و الأخرى عالية التردد. فالمنخفضة التردد هي التي يكون تغير زمنها مُتَحَكَّما فيه بحركة الأيونات، فهي الحقول الناشئة عن الأيونات المحجوبة بالخلفية الإلكترونية، أمّا الحجب الإلكتروني فعادةً ما يُوصَفُ بالجهد الفعّال Yukawa المدْخَل من طرَف Hoffman و Theimer [97]، و هو شبيهٌ بجهد Debye.

إن هذا النموذج يتفق تماما مع نتائج نموذج Holtsmark عند درجات الحرارة العالية جدا، حيث تصبح الترابطات غير ذات جدوى.

3.2.و. تقريب الإحداثيات الجماعية (1966) [98]:

قُدِّم هذا النموذج من قِبَلِ Hooper عامَ 1966، و وُصِفَ بنموذج تقريب الإحداثيات الجماعية، و هو يُدخِل بعين الاعتبار كل التفاعلات، إلا أنه يعتبرها مؤلفةً من جزأين، أحدهما طويل المدى، يمثل التفاعلات المركزية، و هو الجزء الأهم، و الآخر قصير المدى، يمثل التفاعلات اللامركزية بين مكونات البلازما الأخرى فيما بينها، و تعالَج كاضطراب.

هذا النموذج محاولة لتعزيز التقارب من خلال اعتبار الكمونات و الحقول ذاتَ مساهمتين، إحداهما طويلة المدى و الأخرى قصيرة المدى، و تعالَجان معالجة مختلفة، فالطاقة الكامنة: $U_N = U_0 + U_1$، حيث: U_0 الجزء الطويل المدى، و الذي يُعتبر مرجعا (الجزء الأهم).

U_1 الجزء القصير المدى، و يعالج كاضطراب.

3.2.ز. حسابات Iglesias (1982) [91]:

لقد اعتمدت حسابات Iglesias على تخمين أنه عند تقدير دالة توزيع الحقل الموضعي، يتطلب التفاعل المركزي معالجة متأنية أكثر من التفاعل اللامركزي. تبرير هذه الفرضية هو حقيقة أن التأثيرات المركزية تتضمن الترابطات بين أيون–مشع خلال الجهد، كما تتضمن أيضا تأثيرات الحقل بسبب الأيونات المحدثة للاضطراب، و عليه يمكن كتابة:

$$U_N = U_0 + \sum_i U_{i0} \quad : U_{i0} \equiv \frac{e^2}{r_{i0}} e^{-\alpha r_{i0}/\lambda}$$

3.2.ح. التقريب الأسي ذو المعامل القابل للتكييف (1983) [99]:

قام بهذا الحساب C. A. Iglesias et al عام 1983، و هو يستند على إجراء تقريب عُرِف بالاختصار APEX للعبارة: the Adjustable Parameter Exponential Approximation.

لقد استخدموا في هذا التقريب تقنيةً سابقةً لتمثيل الجهد الكيميائي الزائد، بدلالة دالة التوزيع الزوجي، و لقد افتَرَضوا حقلا فعَّالا له الصيغة: $E^*(\vec{r}) \cong E_\alpha(\vec{r}) = \frac{Ze}{r^2}(1+\alpha r)\exp(-\alpha r)$

حيث يقترب α من مقلوب طول ديباي، و يتم إيجاده بحيث يحقق علاقة العزم الثاني:

$\frac{\langle \vec{E}.\vec{E} \rangle}{E_0^2} = \frac{3}{\Gamma}\frac{Z}{Z_0}$ حيث $\Gamma = \frac{(Ze)^2}{KTr_i}$ ، Z شحنة أحد الأيونات و Z_0 شحنة الأيون المشع.

إن أغلب الأعمال التي سبقت هذا النموذج لم تحقق ما يمكن الثقة به للبلازما الشديدة التزاوج، لذا فقد ابتدئ هذا النموذج بحالة التزاوج القوي، حيث Γ كبيرة.

3.2.ط. تطورات أخرى:

هذا و قد اقْتُرِحَت فيما بعدُ طرقٌ أخرى لحساب دالة توزيع الحقل الموضعي، تتضمن طُرُقًا تقريبيةً، و اعتباراتٍ للحالات المختلفة لتزاوج البلازما.

عند التزاوجات الشديدة جدا، حيث $\Gamma \gg 10$، و بدون حجب، فإن النموذجَ القابلَ للتطبيق هو نموذج الهزاز التوافقي المقترح من طرف Mayer [100]، و الذي يَفترِض أن كل أيون يهتز حول وضع اتزانه عند مركز الكرة الأيونية، مستقلا عن بقية الأيونات [88].

فيما بعد قام Dufty et al [101] عام 1985 بتعميم طريقة APEX للمواضع الحيادية الشحنة، كما أنها عُمِّمت للبلازما الضعيفة التزاوج من طرف C. A. Iglesias et al [102] في العام نفسه.

يُعتقد لدى الأوساط المشتغلة بهذا المجال، أن هذا التقريب أفضل ما قُدِّم لحساب توزيعات الحقول الموضعية.

نشير إلى أن هناك نماذج و تقريبات كثيرةً، كتقريب الجوار الأقرب (NN)، و هو يعتبر الحقل عند المشع مهيمَناً عليه من قِبَل الجوار الأقرب، و تقريب الجوار الأقرب الموالي (NNN)، و هو يعتبر الحقل عند المشع يكون مهيمَناً عليه من قِبَل الجوار الأقرب و الجوار الذي يليه.

من الجدير بالذكر أيضا الإشارة إلى العديد من الأعمال المفيدة في هذا المجال [103-108].

لقد قام A.V. Demura [109] سنة 2010 في مقال طويل بتقديم حوصلة شاملة و مفصلة حول تطور النماذج و طرق حساب الحقل الكهربائي الموضعي و توزيعاته في البلازما.

3.2.ي. طرق المحاكاة العددية الجزيئية:

تستند هذه الطرق على مفاهيم و تصورات الترموديناميكا الإحصائية و الميكانيكا الجزيئية، و ترتبط نتائج هذه المحاكاة بالنموذج المستخدم و الميكانيكا الجزيئية المستعملة للوصف الدقيق للتفاعلات البينية، و كذا بالاختيار الأمثل للعينات.

يتحقق اختيار العينات أساسًا بتقنيتين: التحريك الجزيئي (MD) و مونتي كارلو (MC) [110].

يقوم التحريك الجزيئي على مبدأ حل المعادلات التفاضلية لحركة كل جزيئات الجملة، و تَتَبُّعِ مساراتها المختلفة، و من ثَمَّ استنباط المقادير التي يُراد إيجادها.

أَمَّا طريقةُ مونتي كارلو، و هي طريقة شائعة الاستعمال في جميع مجالات العلوم، فهي تعتمد على استخدام الأعداد العشوائية و الاحتمالات الإحصائية في حل المسائل المختلفة [111]، و تتجنب الغَوْصَ في تعقيدات المعادلات التفاضلية.

ممّن اشتغل على طريقة التحريك الجزيئي في البلازما R. Stamm et al [43، 112، 113] و كذا B. Talin et al [114]، أمّا استخدام طريقة مونتي كارلو في البلازما فقد اشتغلت عليها D. Gilles et al [115–117] ، و كذا J. M. Caillol et al [118] و S. G. Brush et al [119] و V. M. Zamalin et al [120] و P. H. Acioli [121] و I. K. Kamilov et al [122].

4.2. الجهود النظرية لحساب مشتقات الحقل الكهربائي الموضعي:

لقد عولجت مسألة لاتجانس الحقل الموضعي من طرف Müller [49] عام 1965، ثم بالتفصيل من طرف Demura et al [9، 16، 123–129] على مدى الفترة من 1975 إلى 2001، و ذلك بتضمين تأثير رباعي الأقطاب، ثم توالت الأبحاث حول ذلك معتمدةً تقريبا النماذجَ التي وُضعت من قبلُ لحساب دوال توزيع الحقل الكهربائي الموضعي، و لعلَّ أهمها تلك التي قام بها Kilcrease et al [56، 62، 64] و Murillo et al [63].

الفصل الثالث

حساب دوال توزيع المشتقات الفضائية للحقل الكهربائي الموضعي الأيوني باستخدام المقاربة الإحصائية

1.3. النموذج المتبع:

لقد انتهجنا لحساب هذه الدوال نموذج الجسيمات المستقلة؛ إذْ يُهمَل تفاعل مكونات البلازما فيما، عدا تلك التفاعلات التي تحدث بينها و بين الأيون المشع، و التي اعتُبِرَتْ تفاعلات مركزية. M. Lewis و H. Margenau [94] هما أوّل من طرح هذا النموذج عامَ 1958 باعتبار التفاعلات تخضع لجهد كولوم، و لكننا سنعتبر في حسابنا هذا أن الأيونات تتفاعل مع المشع وفقا لجهد Debye.

يُعْطَى التفاعل بين الأيونين i و j وفقا لجهد Debye على النحو:

$$U_D\left(\vec{r}_i,\vec{r}_j\right)=\frac{\left(Z_p e\right)^2}{\left|\vec{r}_i-\vec{r}_j\right|}e^{-\frac{\left|\vec{r}_i-\vec{r}_j\right|}{\lambda}} \qquad (3.1)$$

حيث λ طول ديباي، و هو معرف بـ: $\lambda=\sqrt{\frac{kT}{4\pi e^2 n_e}}(SI)\cong 6,9\sqrt{\frac{T}{n_e}}$ (cgs) و $Z_p e$ الشحنة الفعلية للأيون.

الحقل الكهربائي الناشئ عن أحد الأيونات عند المشع الموضوع عند مبدإ الإحداثيات هو:

$$\vec{E}_D(\vec{r}) = -\frac{1}{Z_p e}\overrightarrow{\text{grad}}\, U_D = -Z_p e\left(1+\frac{r}{\lambda}\right)e^{-\frac{r}{\lambda}}\frac{\vec{r}}{r^3} \qquad (3.2)$$

المقدار الرئيس المطلوب في الصيغة الطيفية هو موتِّر (تنسور) دوال توزيع المشتقات الفضائية لمركبات الحقل الكهربائي الموضعي لكل القيم الممكنة للحقل الموضعي؛ أي:

$$P\begin{pmatrix} \partial_x E_x & \partial_y E_x & \partial_z E_x \\ \partial_x E_y & \partial_y E_y & \partial_z E_y \\ \partial_x E_z & \partial_y E_z & \partial_z E_z \end{pmatrix}_\varepsilon$$

2.3. حساب دالة توزيع $\frac{\partial E_z}{\partial z}$:

العبارة العامة لدالة توزيع المشتقة $\frac{\partial E_z}{\partial z}$ تكتب كما يلي:

$$P(f,\varepsilon) = \left\langle \delta\left(f-\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)\delta(\varepsilon - E)\right\rangle \qquad (3.3)$$

و هي تمثل التوزيع الاحتمالي للمشتقة $\frac{\partial E_z}{\partial z}$ لهيئات ذات حقل موضعي متساوي القيمة ε ، بغض النظر عن اتجاهه.

$$f = \frac{\partial E_z}{\partial z} \quad \text{و} \quad \frac{\partial E_z}{\partial z} = \sum_j \frac{\partial E_{jz}}{\partial z} \text{ و } E = \left|\sum_j \vec{E}(r_j)\right|$$

باستخدام تمثيل فوربيه و إجراء المتوسط الحراري، يمكن كتابة:

$$P(f,\varepsilon) = \frac{1}{Z_N}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta U}\delta\left(f-\sum_i \frac{\partial E_{iz}}{\partial z}\right)\delta\left(\varepsilon - \left|\sum_i \vec{E}_i\right|\right)d\vec{r}_1\cdots d\vec{r}_N$$

$$= \frac{1}{Z_N}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu(f-\sum_i \frac{\partial E_{iz}}{\partial z})} e^{-i\omega(\varepsilon - \left|\sum_i \vec{E}_i\right|)} du\, d\omega \int\cdots\int e^{-\beta U}d\vec{r}_1\cdots d\vec{r}_N \qquad (3.4)$$

حيث U طاقة التفاعل الكلية بين الأيونات المحدثة للاضطراب و الأيون المشع، و $Z_N = \int\cdots\int e^{-\beta U}d\vec{r}_1\cdots d\vec{r}_N$ دالة التقسيم.

لتبسيط العبارة الأخيرة سنعتبر المقاربة الإحصائية التالية: حيث أن الأيونات المحدثة للاضطراب يمكنها أن تأخذ أي موضع داخل الحجم v فإنه من الممكن اعتبار هذه الأيونات متماثلةً، و عليه فإن مساهماتها في دوال توزيع الحقل الموضعي أو مشتقاته الفضائية متساوية أيضا، و عليه فإن $\left|\sum_i \vec{E}_i\right|$ ستؤدي الدور نفسه الذي تؤديه $N\times E(r)$ ، و كذلك فإن $\sum_i \frac{\partial E_{iz}}{\partial z}$ يمكنها أن تؤدي دور $N\times\frac{\partial E_z}{\partial z}$.

بذلك فإن عبارة توزيع المشتقة الفضائية للحقل ستظل كما هي إذا ما استعضنا عن $\left|\sum_i \vec{E}_i\right|$ بـ $N\,E(r)$ ، و عن $\sum_i \frac{\partial E_{iz}}{\partial z}$ بـ $N\frac{\partial E_z}{\partial z}$.

زيادة على ذلك، إذا ما اعتبرنا التفاعلات المركزية فقط بين المشع و الأيونات المحدثة للاضطراب، و أهملنا تفاعل هذه الأخيرة فيما بينها، فإن طاقة الجملة يمكن كتابتها كما يلي: $U\cong N\times U(r)$ ، حيث $U(r)$ طاقة التفاعل بين الأيون المركزي المشع و أحد الأيونات المحدثة للاضطراب، إذًا:

$$P(f,\varepsilon)=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iuf}e^{-i\omega\varepsilon}e^{iuN\frac{\partial E_z}{\partial z}}e^{i\omega NE(r)}du\,d\omega\int\cdots\int e^{-\beta NU(r)}d\vec{r}_1\cdots d\vec{r}_N}{\int\cdots\int e^{-\beta NU(r)}d\vec{r}_1\cdots d\vec{r}_N} \qquad (3.5)$$

حيثُ أن كل الأيونات المحدثة للاضطراب متماثلة تماما، فإن التكامل على $\vec{r}_1$ مساوٍ للتكامل على $\vec{r}_2$ أو على $\vec{r}_3$، و هكذا حتى $\vec{r}_N$، إذًا:

$$P(f,\varepsilon)=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iuf}e^{-i\omega\varepsilon}\left(e^{iu\frac{\partial E_z}{\partial z}}\right)^N\left(e^{i\omega E(r)}\right)^N\left[\int e^{-\beta U(r)}d\vec{r}\right]^N du\,d\omega}{\left[\int e^{-\beta U(r)}d\vec{r}\right]^N} \qquad (3.6)$$

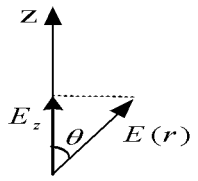
و حيثُ أن الجملة متماثلة، فإنه من الممكن استبدال الاحداثيات الكارتيزية بالإحداثيات الكروية: $d\vec{r}\to r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$ ، و يكون:

$$P(f,\varepsilon)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} du\, d\omega\, e^{i\omega f+iu\varepsilon}\left[\frac{2\pi}{Z_N}\int_0^R r^2 dr\, e^{-iuE(r)}\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta\, e^{-i\omega\frac{\partial E_z}{\partial z}}\, e^{-\frac{U(r)}{kT}}\right]^N \quad (3.7)$$

حيث $i^2=-1$ و R نصف قطر الكرة التي تحوي كل الأيونات N ، n_i الكثافة الأيونية، $E(r)$ حقل ديباي المعرف سابقا، $\frac{\partial E_z}{\partial z}$ المشتقة الجزئية لمركبة الحقل الموضعي E_z بالنسبة للإحداثي z ، U طاقة التفاعل بين الأيون المركزي المشع و أحد الأيونات المحدثة للاضطراب، و $Z_N=4\pi\int_0^R r^2 e^{-\frac{U(r)}{kT}}dr$.

لقد استخدمنا التمثيل المبين في الشكل (1.3) للتعبير عن مركبة الحقل بالصيغة:

$$\cos\theta=\frac{z}{r}=\frac{E_z}{E(r)} \quad \Rightarrow \quad E_z=z\frac{E(r)}{r}$$



الشكل (1.3): التمثيل الهندسي للحقل الموضعي
و مركبته على المحور z

بالاشتقاق و إعادة ترتيب الحدود يمكن كتابة:

$$\frac{\partial E_z}{\partial z}=\frac{Ze}{r^3}\left[\left(1+\frac{r}{\lambda}\right)-\left(\frac{r^2}{\lambda^2}+\frac{3r}{\lambda}+3\right)\cos^2\theta\right]e^{-\frac{r}{\lambda}} \quad (3.8)$$

و بالتعويض عن الحقل الموضعي و مشتقة مركبته يكون:

$$P(f,\varepsilon)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} du\, d\omega\, e^{i\omega f+iu\varepsilon}\left[\frac{2\pi}{Z_N}\int_0^R r^2 dr\, e^{-iu\frac{Ze}{r^2}\left(1+\frac{r}{\lambda}\right)e^{-\frac{r}{\lambda}}}\right.$$

$$\left.\times\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta\, e^{-i\omega\frac{Ze}{r^3}\left[\left(1+\frac{r}{\lambda}\right)-\left(\frac{r^2}{\lambda^2}+\frac{3r}{\lambda}+3\right)\cos^2\theta\right]e^{-\frac{r}{\lambda}}}e^{-\frac{U(r)}{kT}}\right]^N \qquad (3.9)$$

$$P(f,\varepsilon)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} du\, d\omega\, e^{i\omega f+iu\varepsilon}[F]^N \qquad (3.10)$$

حيـــث:

$$F=\frac{2\pi}{Z_N}\int_0^R r^2 e^{-\frac{U(r)}{kT}}\, dr\, e^{-iA(u,\omega,r)}\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta\, e^{iB(\omega,r)\cos^2\theta} \qquad (3.11)$$

و:

$$A(u,\omega,r)=\frac{Ze}{r^2}\left(1+\frac{r}{\lambda}\right)\left(u+\frac{\omega}{r}\right)e^{-\frac{r}{\lambda}} \quad , \quad B(\omega,r)=\omega\frac{Ze}{r^3}\left(3+\frac{3r}{\lambda}+\frac{r^2}{\lambda^2}\right)e^{-\frac{r}{\lambda}}$$

إذا ما اعتبرنا $\cos\theta=t$ ، فإنه يمكن كتابة:

$$\cos\theta=t\Rightarrow dt=-\sin\theta\, d\theta\Rightarrow$$

$$\int_0^\pi \sin\theta\, e^{iB(\omega,r)\cos^2\theta}d\theta=\int_{-1}^1 dt\, e^{iB(\omega,r)t^2}=2\int_0^1 dt\, e^{iB(\omega,r)t^2}$$

$$\therefore\quad F=\frac{4\pi}{Z_N}\int_0^R r^2 e^{-\frac{U(r)}{kT}}\, dr\,(\cos A-i\sin A)\int_0^1 dt\,(\cos Bt^2+i\sin Bt^2)$$

$$=\frac{4\pi}{Z_N}\int_0^R r^2 e^{-\frac{U(r)}{kT}}\, dr\,(\cos A-i\sin A)\left[\int_0^1 dt\cos Bt^2+i\int_0^1 dt\sin Bt^2\right] \qquad (3.12)$$

أيضا، باعتبار $Bt^2=\frac{\pi}{2}x^2$ يمكن إجراء التحويل التالي:

$$\sqrt{B}t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}x\Rightarrow\sqrt{B}\,dt=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,dx$$

$$\int_0^1 dt \cos Bt^2 = \sqrt{\frac{\pi}{2B}} \int_0^{\sqrt{\frac{2B}{\pi}}} \cos(\frac{\pi}{2}x^2)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2B}}\,FRESC(\sqrt{\frac{2B}{\pi}}) = X_0 \qquad (3.13)$$

$$\int_0^1 dt \sin Bt^2 = \sqrt{\frac{\pi}{2B}} \int_0^{\sqrt{\frac{2B}{\pi}}} \sin(\frac{\pi}{2}x^2)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2B}}\,FRESS(\sqrt{\frac{2B}{\pi}}) = Y_0 \qquad (3.14)$$

حيث:

$FRESC(x) = \int_0^x \cos(\frac{\pi}{2}t^2)\,dt$ ، و يُدعى تكامل فرينل الجيبي،

و $FRESS(x) = \int_0^x \sin(\frac{\pi}{2}t^2)\,dt$ ، و يُدعى تكامل فرينل الجيب تمامي.

يمكن إذًا كتابة F على النحو:

$$F = \frac{4\pi}{Z_N}\int_0^R r^2 e^{-\frac{U(r)}{kT}}\,dr\,(\cos A - i\sin A)(X_0 + iY_0)$$

$$= \frac{4\pi}{Z_N}\int_0^R r^2 e^{-\frac{U(r)}{kT}}\,dr\left[(X_0 \times \cos A + Y_0 \times \sin A) + i(Y_0 \times \cos A - X_0 \times \sin A)\right] \qquad (3.15)$$

$$F = \left\{\frac{4\pi}{Z_N}\int_0^R r^2 e^{-\frac{U(r)}{kT}}\,dr\left[X_0 \times \cos A + Y_0 \times \sin A\right]\right\}$$

$$+ i\left\{\frac{4\pi}{Z_N}\int_0^R r^2 e^{-\frac{U(r)}{kT}}\,dr\left[Y_0 \times \cos A - X_0 \times \sin A\right]\right\} \qquad (3.16)$$

$$= \mathrm{Re}(F) + i\,\mathrm{Im}(F) = |F|(\cos\Delta + i\sin\Delta) = |F|e^{i\Delta} \qquad (3.17)$$

حيث $|F|$ طويلة المقدار F ، و Δ زاويته.

إذًا يمكن كتابة:

$$F^N = |F|^N\left[\cos(N\Delta) + i\sin(N\Delta)\right] \qquad (3.18)$$

بالتعويض في العبارة الأخيرة لـــ $P(f,\varepsilon)$ ، المعادلة (3.10) تصبح:

$$P(f,\varepsilon)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} du\, d\omega\, |F|^N\left[\cos(\omega f+u\varepsilon)+i\sin(\omega f+u\varepsilon)\right]\left[\cos(N\Delta)+i\sin(N\Delta)\right]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} du\, d\omega\, |F|^N\left[\cos(\omega f+u\varepsilon+N\Delta)+i\sin(\omega f+u\varepsilon+N\Delta)\right] \qquad (3.19)$$

ملاحظات:

أ) عبارة F يمكن كتابتها على النحو: $F=\dfrac{\int_{\text{all space}} e^{-X(r)}d\vec{r}\, e^{iY(r,u,\omega,\theta)}}{\int_{\text{all space}} e^{-X(r)}d\vec{r}}$ حيث:

$$Y(r,u,\omega,\theta)=B(\omega,r)\cos^2\theta \quad , \quad X(r)=-\frac{U(r)}{kT} \quad ، \quad \text{إذًا:}$$

$$\left.\begin{aligned} |F|=\left|\frac{\int e^{-X(r)}d\vec{r}\, e^{iY(r,u,\omega,\theta)}}{\int e^{-X(r)}d\vec{r}}\right| &< \frac{\left|\int e^{-X(r)}d\vec{r}\, e^{iY(r,u,\omega,\theta)}\right|}{\left|\int e^{-X(r)}d\vec{r}\right|} \\ \frac{\left|\int e^{-X(r)}d\vec{r}\, e^{iY(r,u,\omega,\theta)}\right|}{\left|\int e^{-X(r)}d\vec{r}\right|} &= \frac{\int\left|e^{-X(r)}\, e^{iY(r,u,\omega,\theta)}\right|d\vec{r}}{\int\left|e^{-X(r)}\right|d\vec{r}} = \frac{\int\left|e^{-X(r)}\right|d\vec{r}}{\int\left|e^{-X(r)}\right|d\vec{r}} = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow |F|<1$$

ب) إن الجداء $\delta(f-E')\delta(\varepsilon-E)$ في العبارة الأولى (3.3) لـــ $P(f,\varepsilon)$ حقيقي، لذا فإن متوسطه $\langle\delta(f-E')\delta(\varepsilon-E)\rangle$ ينبغي أن يكون أيضا حقيقيا، إذًا:

$$P(f,\varepsilon)=\frac{\int_{\text{all space}} d\vec{r}\, e^{-X(r)}\,\delta(f-E')\delta(\varepsilon-E)}{\int_{\text{all space}} d\vec{r}\, e^{-X(r)}}=\langle\delta(f-E')\delta(\varepsilon-E)\rangle \qquad (3.20)$$

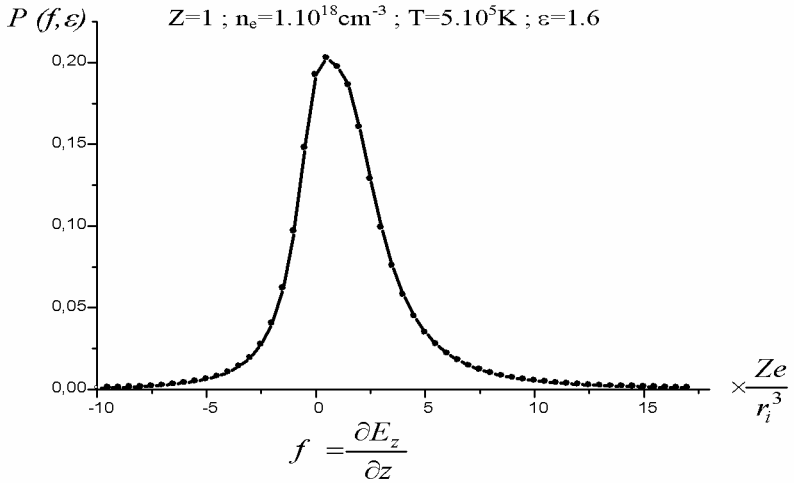
و عليه فإن $P(f,\varepsilon)$ حقيقي تماما، و هو ما يتفق مع كون $P(f,\varepsilon)$ لا يمكن أن يكون تخيليا؛ أي أن: $\Delta=\tan^{-1}\left(\dfrac{\text{Im}\,F}{\text{Re}\,F}\right)=0$, $\text{Im}\,F=0$ و تصبح:

$$P(f,\varepsilon)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} du\, d\omega \left|F\right|^{N}\left[\cos(\omega f+u\varepsilon)\right] \qquad (3.21)$$

و هي تمثل دالة توزيع المشتقة الفضائية $f=\frac{\partial E_z}{\partial z}$ عند الحقل ε.

لقد عولج التكامل الأخير عدديا باستخدام الفورتران **90**. النتائج تؤكد أن $\mathrm{Im}\,F$ يؤول إلى الصفر، و أن $|F|<1$ كلما امتدَّ التكامل بعيدا في الفضاء إلى المالانهاية. الشكل (**2.3**) يمثل دالة توزيع المشتقة $\frac{\partial E_z}{\partial z}$ للشروط الفيزيائية:

$$Z=1,\ n_e=10^{18}\,cm^{-3},\ T=5.10^5\,K,\ \varepsilon=1.6 .$$



الشكل (**2.3**): دالة توزيع المشتقة $\frac{\partial E_z}{\partial z}$

و بالمثل يمكن حساب بقية مركبات الموتّر.

3.3. دالة توزيع $\frac{\partial E_z}{\partial x}$:

بطريقة مشابهة للحساب السابق لدالة توزيع $\frac{\partial E_z}{\partial z}$ يمكن التعبير عن توزيع $\frac{\partial E_z}{\partial x}$ كما يلي:

$$P(f,\varepsilon)=\left\langle \delta\left(f-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\delta(\varepsilon-E)\right\rangle \qquad (3.22)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} du\, d\omega\, e^{i\omega f+iu\varepsilon}\left[\frac{1}{Z_0}\int_0^R r^2 e^{-\frac{U(r)}{kT}} e^{-iuE(r)}dr\times \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\sin\theta\, d\theta\, d\varphi e^{-i\omega\frac{\partial E_z}{\partial x}}\right]^N \qquad (3.23)$$

حيث $\frac{\partial E_z}{\partial x}$ المشتقة الجزئية للمركبة E_z بالنسبة للإحداثي x:

$$\frac{\partial E_z}{\partial x}=-\frac{Ze}{r^3}\cos\theta\,\sin\theta\,\cos\varphi\left[3\left(1+\frac{r}{\lambda}\right)+\frac{r^2}{\lambda^2}\right]e^{-\frac{r}{\lambda}} \qquad (3.24)$$

بالتعويض عن الحقل الموضعي و مشتقة مركبته يكون:

$$P(f,\varepsilon)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} du\, d\omega\, e^{i\omega f+iu\varepsilon}\left[\frac{1}{Z_0}\int_0^R r^2 e^{-\frac{U(r)}{kT}} dr\, e^{-iu\frac{Ze}{r^2}\left(1+\frac{r}{\lambda}\right)e^{-\frac{r}{\lambda}}}\times \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, e^{i\omega\frac{Ze}{r^3}\cos\theta\sin\theta\cos\varphi\left[3\left(1+\frac{r}{\lambda}\right)+\frac{r^2}{\lambda^2}\right]e^{-\frac{r}{\lambda}}}\right]^N \qquad (3.25)$$

و بوضع $A(u,r)=u\frac{Ze}{r^2}\left(1+\frac{r}{\lambda}\right)e^{-\frac{r}{\lambda}}$ و $B(\omega,r)=\omega\frac{Ze}{r^3}\left[3\left(1+\frac{r}{\lambda}\right)+\frac{r^2}{\lambda^2}\right]e^{-\frac{r}{\lambda}}$ يكون:

$$P(f,\varepsilon)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} du\, d\omega\, e^{i\omega f+iu\varepsilon}\left[\frac{1}{Z_0}\int_0^R r^2 e^{-\frac{U(r)}{kT}}\, dr\, e^{-iA(u,r)}\times \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, e^{iB(\omega,r)\cos\theta\sin\theta\cos\varphi}\right]^N$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} du\, d\omega\, e^{i\omega f+iu\varepsilon}[F]^N \qquad (3.26)$$

حيث:

$$F=\frac{1}{Z_0}\int_0^R r^2 e^{-\frac{U(r)}{kT}}\, dr\, e^{-iA(u,r)}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, e^{iB(\omega,r)\cos\theta\sin\theta\cos\varphi}$$

$$=\frac{1}{Z_0}\int_0^R r^2 e^{-\frac{U(r)}{kT}}\, dr\, e^{-iA(u,r)}\int_{\theta=0}^{\pi}\sin\theta\, d\theta\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi\, e^{iBB(\omega,r,\theta)\cos\varphi} \qquad (3.27)$$

و حيث $BB(\omega,r,\theta)=B(\omega,r)\cos\theta\sin\theta$ ، فإنه يمكن كتابة:

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi\, e^{iBB(\omega,r,\theta)\cos\varphi}=\int_0^{2\pi}\cos[BB(\omega,r,\theta)\cos\varphi]\, d\varphi+ i\int_0^{2\pi}\sin[BB(\omega,r,\theta)\cos\varphi]\, d\varphi \qquad (3.28)$$

التكامل $\int_0^{2\pi}\sin[BB(\omega,r,\theta)\cos\varphi]\, d\varphi$ معدوم مهما كان $BB(\omega,r,\theta)$ ، إذًا:

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi\, e^{iBB(\omega,r,\theta)\cos\varphi}=\int_0^{2\pi}\cos[BB(\omega,r,\theta)\cos\varphi]\, d\varphi=2\pi J_0[BB(\omega,r,\theta)] \qquad (3.29)$$

حيث J_0 دالة بيسل ذات الرتبة الصفرية، و المُعرَّفة كما يلي: $J_0(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\cos\theta)\, d\theta$ ،

إذًا F تصبح:

$$F = \frac{2\pi}{Z_0}\int_0^R r^2 e^{-\frac{U(r)}{kT}}\, dr\, e^{-iA(u,r)} \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta\, J_0\left[BB(\omega,r,\theta)\right] d\theta$$

$$= \frac{2\pi}{Z_0}\int_0^R r^2 e^{-\frac{U(r)}{kT}}\, dr \left[\cos(A) - i\sin(A)\right] \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta\, J_0\left[BB(\omega,r,\theta)\right] d\theta$$

$$= \frac{2\pi}{Z_0}\int_0^R r^2 e^{-\frac{U(r)}{kT}}\, dr \cos(A) \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta\, J_0\left[BB(\omega,r,\theta)\right] d\theta$$

$$- i\frac{2\pi}{Z_0}\int_0^R r^2 e^{-\frac{U(r)}{kT}}\, dr \sin(A) \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta\, J_0\left[BB(\omega,r,\theta)\right] d\theta \qquad (3.30)$$

و يمكن التعبير عنها كما يلي:

$$F = \quad Re(F) \quad + \quad i\, Im(F) \quad = |F|(\cos\Delta + i\sin\Delta) = |F| e^{i\Delta} \qquad (3.31)$$

حيث:

$$Re(F) = \frac{2\pi}{Z_0}\int_0^R r^2 e^{-\frac{U(r)}{kT}} \cos(A) dr \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta\, J_0\left[BB(\omega,r,\theta)\right] d\theta \qquad (3.32)$$

$$Im(F) = \frac{2\pi}{Z_0}\int_0^R r^2 e^{-\frac{U(r)}{kT}} \sin(A)\, dr \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta\, J_0\left[BB(\omega,r,\theta)\right] d\theta \qquad (3.33)$$

إذًا:

$$P(f,\varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} du\, d\omega\, e^{i\omega f + iu\varepsilon} |F|^N \left[\cos(N\Delta) + i\sin(N\Delta)\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |F|^N du\, d\omega \left[\cos(\omega f + u\varepsilon) + i\sin(\omega f + u\varepsilon)\right] \times$$

$$\left[\cos(N\Delta) + i\sin(N\Delta)\right] \qquad (3.34)$$

بعد إعادة ترتيب المعادلات نحصل على:

$$P(f,\varepsilon)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} du\, d\omega \left|F\right|^{N}\left[\cos(\omega f+u\varepsilon+N\Delta)+i\sin(\omega f+u\varepsilon+N\Delta)\right]$$

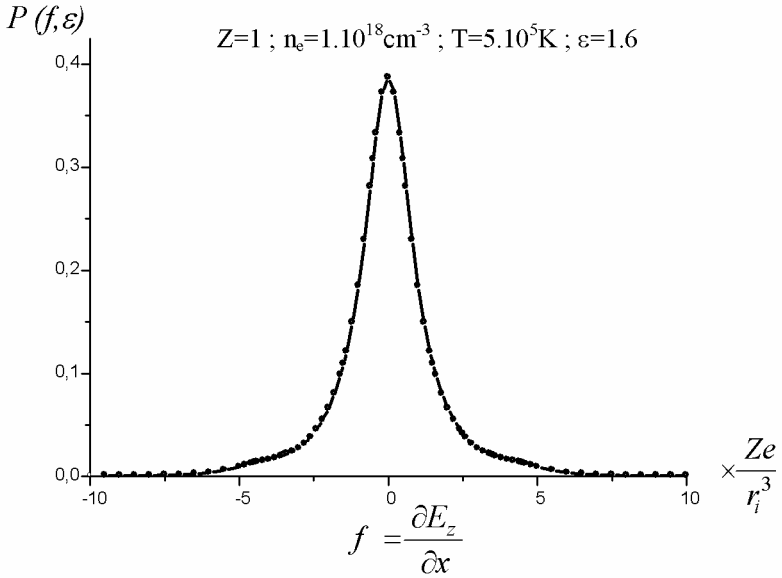
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} du\, d\omega \left|F\right|^{N}\cos(\omega f+u\varepsilon+N\Delta)+$$

$$i\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} du\, d\omega \left|F\right|^{N}\sin(\omega f+u\varepsilon+N\Delta) \qquad (3.35)$$

للمبررات نفسها التي أشرنا إليها سابقا فإن الجزء التخيلي للمعادلة الأخيرة يضمحل، و بالتالي فإن:

$$P(f,\varepsilon)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} du\, d\omega \left|F\right|^{N}\cos(\omega f+u\varepsilon+N\Delta) \qquad (3.36)$$

عولج التكامل الأخير أيضا عدديا. الشكل (3.3) يمثّل دالة التوزيع $P(\frac{\partial E_z}{\partial x},\varepsilon)$.



الشكل (3.3): دالة توزيع المشتقة $\frac{\partial E_z}{\partial x}$

4.3. دالة توزيع $\frac{\partial E_z}{\partial y}$:

بطريقة مماثلة كما في الحسابين السابقين، و بتعويض $\cos\varphi$ بـ $\sin\varphi$ نحصل على:

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi\, e^{iBB(\omega,r,\theta)\cos\varphi} = \int_{0}^{2\pi} \cos\left[BB(\omega,r,\theta)\cos\varphi\right] d\varphi$$

$$= 2\pi J_0\left[BB(\omega,r,\theta)\right] \qquad (3.37)$$

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi\ e^{iBB(\omega,r,\theta)\sin\varphi} = \int_{0}^{2\pi} \cos\left[BB(\omega,r,\theta)\sin\varphi\right] d\varphi$$

$$= 2\pi J_0\left[BB(\omega,r,\theta)\right] \qquad (3.38)$$

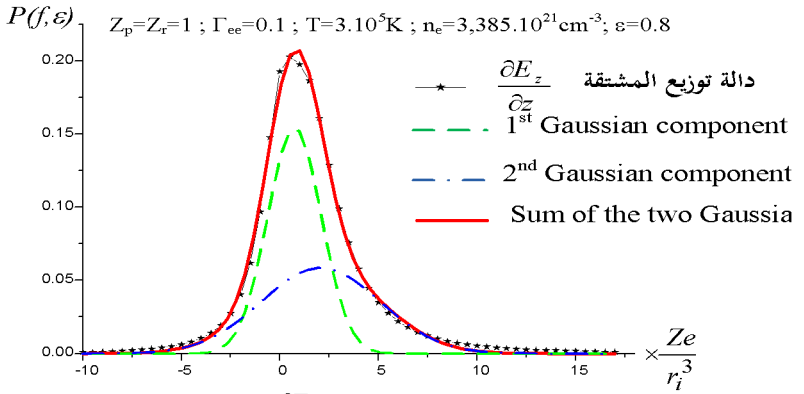
حيث:

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\cos\theta)\, d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin\theta)\, d\theta \qquad (3.39)$$

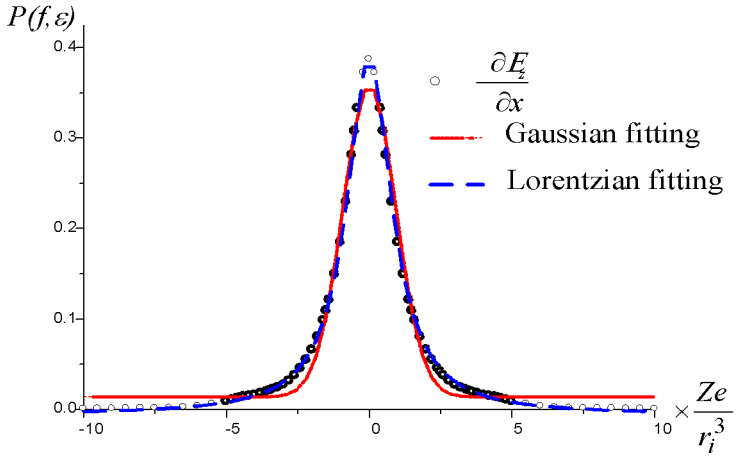
و عليه فإن دالة توزيع $\frac{\partial E_z}{\partial y}$ مساوية تماما لدالة توزيع $\frac{\partial E_z}{\partial x}$، و هو ما يتفق و تناظرَ الجملة؛ ذلك أنه لا اختلاف بين الاتجاه x أو y عن أي اتجاه آخر عمودي على المحور z.

5.3. مناقشة:

بتفحص دالة توزيع المشتقة $\frac{\partial E_z}{\partial z}$ للشروط $Z=1,\ n_e = 3.385\times10^{21}\,cm^{-3},\ T = 3.10^5\,K,\ \varepsilon = 0.8$ بدا لنا أنها مؤلَّفة من تراكب دالتين غاوسيتين، مثلما هو موصوف بالشكل (4.3)، كما أن دالة توزيع المشتقة $\frac{\partial E_z}{\partial x}$ و كذا $\frac{\partial E_z}{\partial y}$ منحرفة عن الشكل الغاوسي، و متطابقةٌ تمامًا مع الشكل اللورنتزي، أنظر الشكل (5.3).



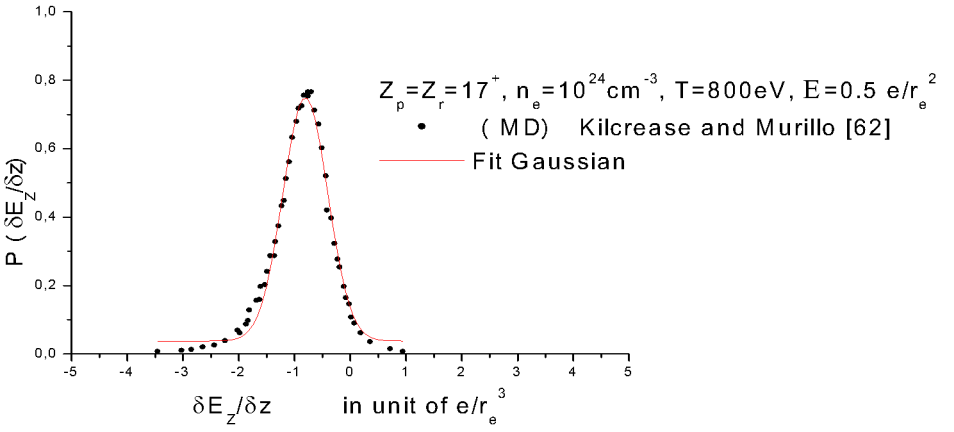
الشكل (4.3): تفكيك دالة توزيع المشتقة $\frac{\partial E_z}{\partial z}$ إلى مركبتين غاوسيتين



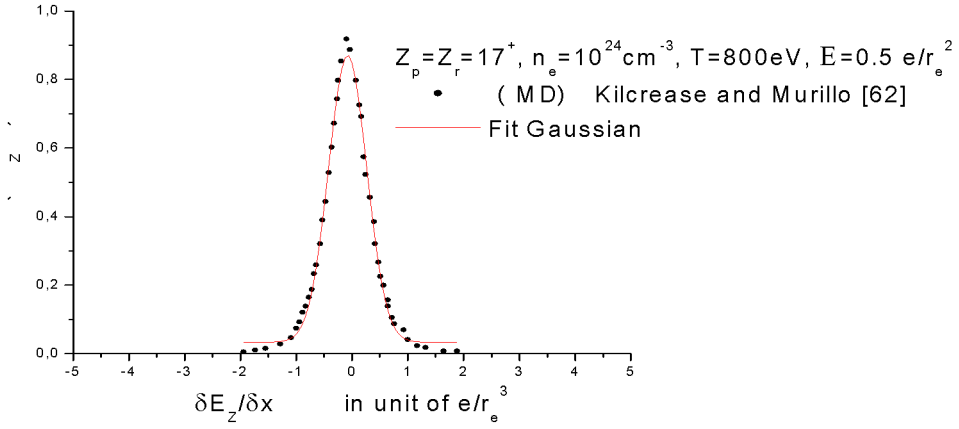
الشكل (5.3): مطابقة دالة توزيع المشتقة $\frac{\partial E_z}{\partial x}$ بدالة غاوسية و دالة لورنتزية

لقد قارنَّا نتائج حساباتنا مع حسابات Kilcrease and Murillo التقريبية [62]، فأظهرتْ تقاربًا واضحا رُغم بعض الاختلاف الظاهر بيننا، و الذي يمكن تبريره من منطلق طبيعة المقاربة و التقريبات و الاعتبارات المتَّخَذَة لدى كلٍّ منّا؛ ففي حين قمنا نحن بحساب دالة دلتا للمشتقتين $\frac{\partial E_z}{\partial z}$ و $\frac{\partial E_z}{\partial x}$ ذاتِهما، فكان $P(f,\varepsilon)=\left\langle \delta\left(f-\frac{\partial E_z}{\partial Z}\right)\delta(\varepsilon-E)\right\rangle$ ، و $P(f,\varepsilon)=\left\langle \delta\left(f-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\delta(\varepsilon-E)\right\rangle$ ، قاما هما بحسابها للقيمتين المتوسطتين لمشتقتَيْ مركبة الحقل لهيئات لها الحقلُ نفسه؛ أيْ للقيمتين $\langle \partial_z E_z\rangle_\varepsilon$ و $\langle \partial_x E_z\rangle_\varepsilon$ ، فكان

$\mathbf{P}\left(\partial_z \mathbf{E}_z|\varepsilon\right) \cong \delta\left(\partial_z \mathbf{E}_z - \langle \partial_z \mathbf{E}_z \rangle_\varepsilon\right)$ و $\mathbf{P}\left(\partial_x \mathbf{E}_z|\varepsilon\right) \cong \delta\left(\partial_x \mathbf{E}_z - \langle \partial_x \mathbf{E}_z \rangle_\varepsilon\right)$ ، و وصـــلا إلى الشكل الغاوسي. و لعلَّ نتائجَ المحاكاة العددية التي قاما بها تؤيد ما ذهبنا إليه نحنُ؛ ذلك أنّه لو دقَّقْنا النظر في المنحنيات التي توصَّلا إليها باستخدام المحاكاة العددية بطريقة التحريك الجزيئي، فسنلحظ عدمَ تناظر، خاصةً عند دالة توزيع المشتقة $\frac{\partial E_z}{\partial z}$، و هو ما يُظهره الشكلان (6.3) و (7.3).



الشكل (6.3): دالة توزيع المشتقة $\frac{\partial E_z}{\partial z}$ عند الحقل المختزل 0.5



الشكل (7.3): دالة توزيع المشتقة $\frac{\partial E_z}{\partial x}$ عند الحقل المختزل 0.5

الفصل الرابع

الحساب التحليلي لدوال توزيع المشتقة الفضائية للحقل الكهربائي الموضعي:

1.4. النموذج المتبع:

لقد انتهجنا في هذا الفصل النموذج السابق نفسه، إلا أننا في هذا الحساب لم نستخدم المقاربة الإحصائية التي تحدثنا عنها سابقا، بل بالحساب التحليلي المباشر، ممّا أدّى إلى خطوات مختلفة و نتائج مختلفةٍ أيضا بعض الشيء.

يُعطى التفاعل بين مكونات i و j وفقا لجهد ديباي على النحو:

$$U_D\left(\vec{r}_i,\vec{r}_j\right)=\frac{\left(Z_p e\right)^2}{\left|\vec{r}_i-\vec{r}_j\right|}e^{-\frac{\left|\vec{r}_i-\vec{r}_j\right|}{\lambda}} \qquad (4.1)$$

حيث $Z_p e$ الشحنة الفعلية للأيون، و λ طول ديباي، و هو معرف بـ:

$$\lambda=\sqrt{\frac{kT}{4\pi e^2 n_e}}(SI)\cong 6,9\sqrt{\frac{T}{n_e}} \quad (cgs)$$

الحقل الكهربائي الناشئ عن أحد الأيونات عند المشع الموضوع عند مبدإ الإحداثيات هو:

$$\vec{E}_D\left(\vec{r}\right)=-\frac{1}{Z_p e}\overrightarrow{grad}\,U_D=-Z_p e\left(1+\frac{r}{\lambda}\right)e^{-\frac{r}{\lambda}}\frac{\vec{r}}{r^3} \qquad (4.2)$$

المقدار الرئيس المطلوب في الصيغة الطيفية هو موتِّر (تنسور) دوال توزيع المشتقات الفضائية لمركبات الحقل الكهربائي الموضعي لكل القيم الممكنة للحقل الموضعي.

$$P\begin{pmatrix} \partial_x E_x & \partial_y E_x & \partial_z E_x \\ \partial_x E_y & \partial_y E_y & \partial_z E_y \\ \partial_x E_z & \partial_y E_z & \partial_z E_z \end{pmatrix}_{\varepsilon}$$

سنحسب فقط إحدى مركبات هذا الموتّر، و هي $P(\partial_z E_z)$ للقيمة الأكثر احتمالا للحقل الموضعي.

2.4. دالة توزيع المشتقة الفضائية الموازية للحقل الموضعي $\frac{\partial E_z}{\partial z}$:

العبارة العامة لدالة التوزيع تكتب كما يلي:

$$P(f,\varepsilon) = \left\langle \delta\left(f - \frac{\partial E_z}{\partial z}\right)\delta(\varepsilon - E)\right\rangle \qquad (4.3)$$

حيث $E = \left|\sum_j \vec{E}_D(r_j)\right|$ و $\frac{\partial E_z}{\partial z} = \sum_j \frac{\partial E_{Djz}}{\partial z}$

تمثل العبارة الأخيرة التوزيع الاحتمالي للمشتقة $\frac{\partial E_z}{\partial z}$ لهيئات ذات حقل موضعي متساوي القيمة ε، بغض النظر عن اتجاهه. هذه العبارة مكافئة تماما لـ:

$$P(f,\varepsilon) = 2\varepsilon\left\langle \delta\left(f - \frac{\partial E_z}{\partial z}\right)\delta(\varepsilon^2 - E^2)\right\rangle \qquad (4.4)$$

حيث $E^2 = E_x^2 + E_y^2 + E_z^2$.

باستخدام تمثيل فوريه و إجراء المتوسط الحراري، يمكن كتابة:

$$\begin{aligned} P(f,\varepsilon) &= \frac{2\varepsilon}{Z_N}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta U_N}\delta\left(f - \frac{\partial E_z}{\partial z}\right)\delta(\varepsilon^2 - E^2)\,d\vec{r}_1\cdots d\vec{r}_N \\ &= \frac{2\varepsilon}{Z_N}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu\left(f-\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)} e^{-i\omega\left(\varepsilon^2-(E_x^2+E_y^2+E_z^2)\right)}\,du\,d\omega \int\cdots\int e^{-\beta U_N}d\vec{r}_1\cdots d\vec{r}_N \\ &= \frac{2\varepsilon}{Z_N}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iuf+iu\frac{\partial E_{Dz}}{\partial z}-i\omega\varepsilon^2+i\omega E_x^2+i\omega E_y^2+i\omega E_z^2}\,du\,d\omega \int\cdots\int e^{-\beta U_N}d\vec{r}_1\cdots d\vec{r}_N \end{aligned} \qquad (4.5)$$

حيث: $\frac{\partial E_z}{\partial z} = \sum_j \frac{\partial E_{Djz}}{\partial z}$, $E_x = \sum_j E_{jx}$, $E_y = \sum_j E_{jy}$, $E_z = \sum_j E_{jz}$

باستخدام الصيغة: $e^{a^2}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2-2ax}dx$ يمكن كتابة:

$$e^{i\omega E_x^2}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}dv_1\,e^{-v_1^2-2v_1\sqrt{i\omega}E_x}$$

و يصبح التوزيع كما يلي:

$$P(f,\varepsilon)=\frac{2\varepsilon}{Z_N}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-iuf+iu\frac{\partial E_{Dz}}{\partial z}-i\omega\varepsilon^2}du\,d\omega\times\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}dv_1e^{-v_1^2-2v_1\sqrt{i\omega}E_x}$$
$$\times\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}dv_2e^{-v_2^2-2v_2\sqrt{i\omega}E_y}\times\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}dv_3e^{-v_3^2-2v_3\sqrt{i\omega}E_z}$$
$$\times\int\cdots\int e^{-\beta U_N}d\vec{r}_1\cdots d\vec{r}_N \qquad (4.6)$$

$$=\frac{2\varepsilon}{Z_N\pi^{3/2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-iuf-i\omega\varepsilon^2}du\,d\omega\int_{-\infty}^{+\infty}dv_1\int_{-\infty}^{+\infty}dv_2\int_{-\infty}^{+\infty}dv_3\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-v_1^2-v_2^2-v_3^2}\times\int\cdots\int e^{-\beta U_N}d\vec{r}_1\cdots d\vec{r}_N$$
$$\times\ e^{iu\sum_j\frac{\partial E_{Djz}}{\partial z}-2v_1\sqrt{i\omega}\sum_j E_{jx}}\times\ e^{-2v_2\sqrt{i\omega}\sum_j E_{jy}}\times\ e^{-2v_3\sqrt{i\omega}\sum_j E_{jz}} \qquad (4.7)$$

$$=\frac{2\varepsilon}{Z_N\pi^{3/2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-iuf-i\omega\varepsilon^2}du\,d\omega\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}dv_1dv_2dv_3e^{-v_1^2-v_2^2-v_3^2}$$
$$\times\left[\int d\vec{r}\,e^{-\beta U_D(r)+iu\frac{\partial E_{Dz}}{\partial z}-2v_1\sqrt{i\omega}E_{Dx}-2v_2\sqrt{i\omega}E_{Dy}-2v_3\sqrt{i\omega}E_{Dz}}\right]^N \qquad (4.8)$$

$$P(f,\varepsilon)=\frac{2\varepsilon}{Z_N\pi^{3/2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-iuf-i\omega\varepsilon^2}du\,d\omega\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}dv_1dv_2dv_3e^{-v_1^2-v_2^2-v_3^2}\times\mathbb{Z}^N \qquad (4.9)$$

حيث $\mathbb{Z}=\int d\vec{r}\,e^{-\beta U_D(r)+iu\frac{\partial E_{Dz}}{\partial z}-2v_1\sqrt{i\omega}E_{Dx}-2v_2\sqrt{i\omega}E_{Dy}-2v_3\sqrt{i\omega}E_{Dz}}$

و $Z_N=\left(4\pi\int_0^R r^2e^{-\beta U_D(r)}dr\right)^N$

لمعالجة مفصلة لحساب $\mathbb{Z}$ أنظر الملحق عند نهاية هذه الأطروحة.

بكتابة $\mathbb{Z}^N=|\mathbb{Z}|^N e^{iN\Delta}=|\mathbb{Z}|^N\left[\cos(N\Delta)+i\sin(N\Delta)\right]$ و تعويض $\mathbb{Z}^N$ نحصل على:

$$P(f,\varepsilon)=\frac{2\varepsilon}{Z_N\pi^{3/2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i(uf+\omega\varepsilon^2)}du\,d\omega\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}dv_1dv_2dv_3e^{-v_1^2-v_2^2-v_3^2}\times |\mathbb{Z}|^N\left[\cos(N\Delta)+i\sin(N\Delta)\right] \quad (4.10)$$

$$P(f,\varepsilon)=\frac{2\varepsilon}{Z_N\pi^{3/2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\cos(uf+\omega\varepsilon^2)-i\sin(uf+\omega\varepsilon^2)\right]du\,d\omega\times \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}dv_1dv_2dv_3e^{-v_1^2-v_2^2-v_3^2}|\mathbb{Z}|^N\left[\cos(N\Delta)+i\sin(N\Delta)\right] \quad (4.11)$$

ينبغي للمقدار $P(f,\varepsilon)$ أن يكون حقيقيا، لذا فإن:

$$P(f,\varepsilon)=\frac{2\varepsilon}{Z_N\pi^{3/2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}du\,d\omega dv_1dv_2dv_3e^{-v_1^2-v_2^2-v_3^2}|\mathbb{Z}|^N\times \left\{\cos(uf+\omega\varepsilon^2)\cos(N\Delta)+\sin(uf+\omega\varepsilon^2)\sin(N\Delta)\right\} \quad (4.12)$$

$$P(f,\varepsilon)=\frac{2\varepsilon}{Z_N\pi^{3/2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}du\,d\omega dv_1dv_2dv_3e^{-v_1^2-v_2^2-v_3^2}|\mathbb{Z}|^N\times \cos(uf+\omega\varepsilon^2-N\Delta) \quad (4.13)$$

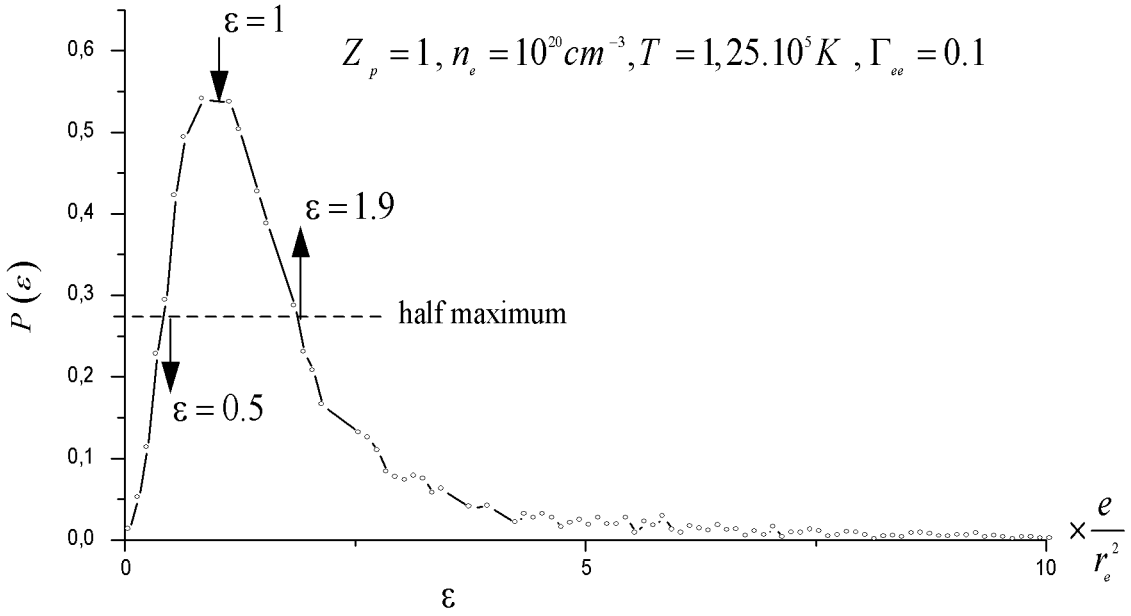
و بالطريقة نفسها يمكن حساب بقية مركبات الموتر.

من العسير جدا حساب هذا التكامل المتعدد تحليليا، لذا من الضروري استخدام الوسائل العددية، كخوارزميات مونتي كارلو. لأجل ذلك صممنا برامج عددية بلغة الفورتران 90، و بمساعدة برنامج Origin.

3.4. نتائج و مناقشة:

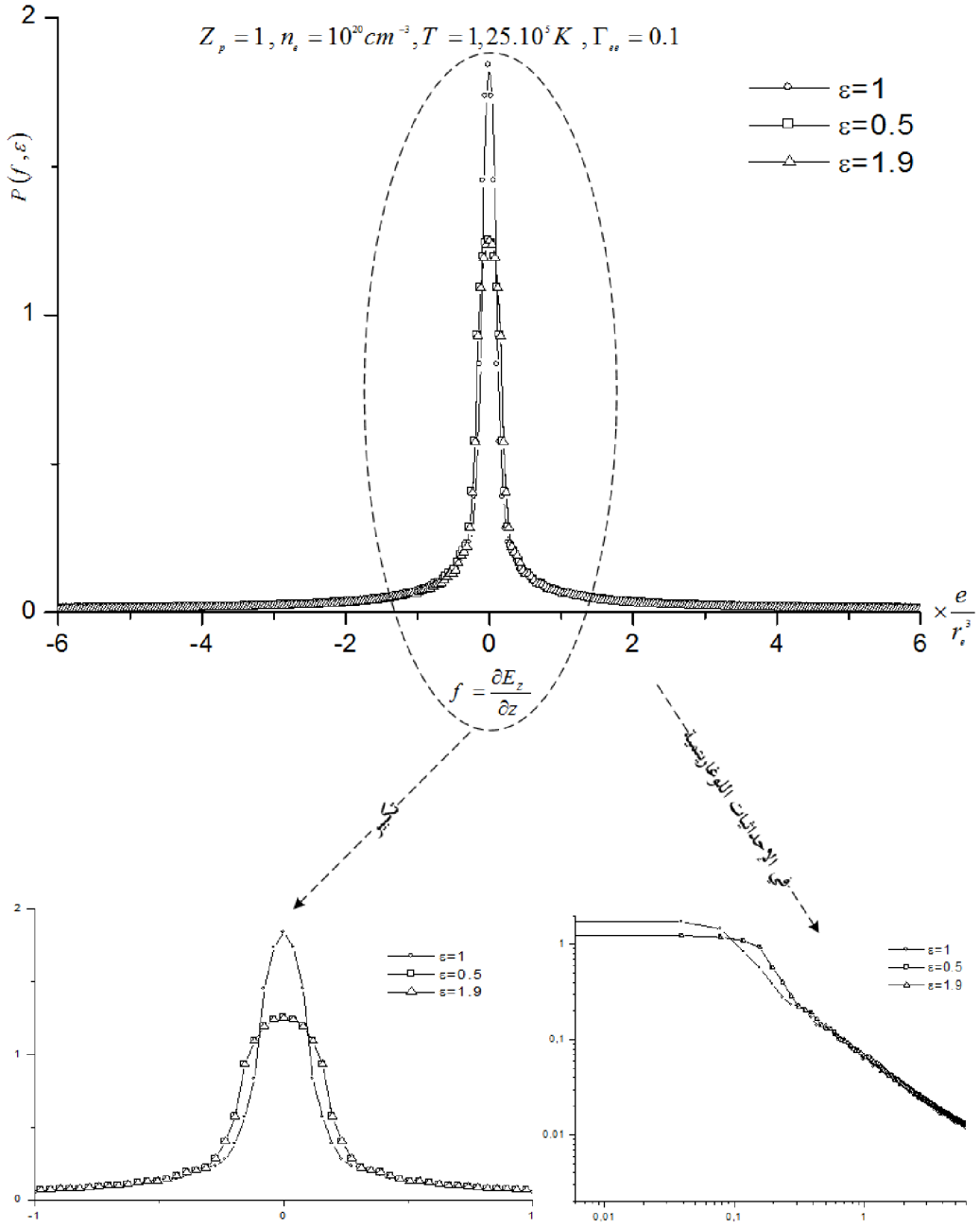
لقد طبقنا المعادلة الأخيرة لصيغة التوزيع من أجل المقدار $\frac{\partial E_z}{\partial z}$ لبلازما هيدروجين مؤين ذات كثافة $n_e=10^{20}cm^{-3}$ و درجة حرارة مطلقة $T=1,25.10^5K$ و معامل تزاوج $\Gamma_{ee}=0,1$.

بغرض فحص مدى ارتباط هذه الدوال بقيمة الحقل ε اخترنا ثلاث قيم لـه توافق قمة دالة توزيع الحقل و كذا قيمتيْ منتصف القيمة الأكثر احتمالا. هذا يوافق $\varepsilon = 0.5\ ,\ 1\ ,\ 1.9$ بوحدات $\frac{e}{r_e^2}$ ، أنظر الشكل (1.4). هذه القيم تغطي الجزء المركزي من الطيف لا الأجنحة البعيدة له.



الشكل (1.4): دالة توزيع الحقل الكهربائي الموضعي

نتائج دوال توزيع المشتقات الفضائية للمركبة الموازية للحقل الموضعي $\frac{\partial E_z}{\partial z}$ ممثلة بالشكل (2.4).



الشكل (2.4): دالة توزيع المشتقة الفضائية $\frac{\partial E_z}{\partial z}$ في السُلَّمين، الخطي و اللوغاريتمي

من الشكل (2.4) يبدو أن دالة توزيع $\frac{\partial E_z}{\partial z}$ متناظرة تماما حول الصفر.

يمكن أيضا ملاحظة أن معظم القيم الأكثر احتمالا تقع بجوار الصفر، مما يعني أن تدرجات الحقل الموضعي ضئيلة، على الأقل عندما تكون أيونات البلازما ذاتَ شحنة كهربائية صغيرة، كما هو في حالتنا هذه. هذا الاحتمال يتضاءل بسرعة، لكن معدل تناقصه يتضاءل كلما اتجهنا نحو جناحيْ التوزيع.

كل هذا يمكن تلخيصه في حقيقة أن الحقل الموضعي متجانس تقريبا في مثل هذه الحالات.

من الواضح أيضا أن دوال توزيع $\frac{\partial E_z}{\partial z}$ هذه ترتبط بقيم الحقل الموضعي.

التوزيعان الموافقان لـ $\varepsilon = 0.5$ و $\varepsilon = 1.9$ متماثلان تماما، الشكل (2.4). هذان الحقلان لهما احتمال متساوٍ، الشكل (1.4)، لذا يمكن القول أن دالة توزيع $\frac{\partial E_z}{\partial z}$ ترتبط باحتمال الحقل الموضعي أكثر مما ترتبط بقيمة الحقل ذاتها.

ينبغي إجراء تحليل أدق لتحديد دور الكثافة الإلكترونية و درجة الحرارة، كلٍّ على حدةٍ، على دوال توزيع المشتقات الفضائية للحقول الموضعية.

الفصل الخامس

الحساب التحليلي لدوال توزيع المشتقة الفضائية للحقل الكهربائي الموضعي باعتبار كل التفاعلات:

1.5. النموذج المتبع:

لقد انتهجنا لحساب هذه الدوال في هذا الفصل نموذج Hooper [98]، و لقد قدّمنا نبذةً عنه في الفصل الثاني. لقد أخذنا بعين الاعتبار كل التفاعلات، و اعتبرنا كل التفاعلات قصيرةَ المدى، سواءً المركزية أو اللامركزية، و تخضع لجهد ديباي.

2.5. دالة توزيع المشتقة الفضائية الموازية للحقل الموضعي $\frac{\partial E_z}{\partial z}$:

مرّةً أخرى، و كما فعلنا في الحساب خلال الفصلين الثالث و الرابع، تُكتب العبارة العامة لدالة التوزيع كما يلي:

$$P(f,\varepsilon)=\left\langle \delta\left(f-\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)\delta(\varepsilon-E)\right\rangle \qquad (5.1)$$

حيث $E=\left|\sum_j \vec{E}_D(r_j)\right|$ و $\frac{\partial E_z}{\partial z}=\sum_j \frac{\partial E_{Djz}}{\partial z}$

تمثل العبارة الأخيرة التوزيع الاحتمالي للمشتقة $\frac{\partial E_z}{\partial z}$ لهيئات ذات حقل موضعي متساوي القيمة ε، بغض النظر عن اتجاهه. هذه العبارة مكافئة تماما لـ:

$$P(f,\varepsilon)=2\varepsilon\left\langle \delta\left(f-\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)\delta\left(\varepsilon^2-E^2\right)\right\rangle \qquad (5.2)$$

حيث: $E^2=E_x^2+E_y^2+E_z^2$

باستخدام تمثيل فورييه و إجراء المتوسط الحراري، يمكن كتابة:

$$P(f,\varepsilon)=\frac{2\varepsilon}{Z_N}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\beta U_N}\delta\left(f-\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)\delta\left(\varepsilon^2-E^2\right)d\vec{r}_1\cdots d\vec{r}_N$$

$$=\frac{2\varepsilon}{Z_N}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-iu\left(f-\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)}e^{-i\omega\left(\varepsilon^2-\left(E_x^2+E_y^2+E_z^2\right)\right)}du\,d\omega\times$$

$$\int\cdots\int e^{-\beta U_N}d\vec{r}_1\cdots d\vec{r}_N \qquad (5.3)$$

$$=\frac{2\varepsilon}{Z_N}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-iuf+iu\frac{\partial E_z}{\partial z}-i\omega\varepsilon^2+i\omega E_x^2+i\omega E_y^2+i\omega E_z^2}du\,d\omega\int\cdots\int e^{-\beta U_N}d\vec{r}_1\cdots d\vec{r}_N \qquad (5.4)$$

حيث: $\frac{\partial E_z}{\partial z}=\sum_j\frac{\partial E_{jz}}{\partial z}$, $E_x=\sum_j E_{jx}$, $E_y=\sum_j E_{jy}$, $E_z=\sum_j E_{jz}$

باستخدام الصيغة: $e^{a^2}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2-2ax}dx$ يمكن كتابة:

$$e^{i\omega E_x^2}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}dv_1\,e^{-v_1^2-2v_1\sqrt{i\omega}E_x} \qquad (5.5)$$

و يصبح التوزيع كما يلي:

$$P(f,\varepsilon)=\frac{2\varepsilon}{Z_N}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-iuf+iu\frac{\partial E_z}{\partial z}-i\omega\varepsilon^2}du\,d\omega\times$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}dv_1e^{-v_1^2-2v_1\sqrt{i\omega}E_x}\times\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}dv_2e^{-v_2^2-2v_2\sqrt{i\omega}E_y}\times$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}dv_3e^{-v_3^2-2v_3\sqrt{i\omega}E_z}\times\int\cdots\int e^{-\beta U_N}d\vec{r}_1\cdots d\vec{r}_N \qquad (5.6)$$

$$= \frac{2\varepsilon}{Z_N \pi^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iuf - i\omega\varepsilon^2} du\, d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} dv_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dv_2 \int_{-\infty}^{+\infty} dv_3 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v_1^2 - v_2^2 - v_3^2} \times$$

$$\int \cdots \int d\vec{r}_1 \cdots d\vec{r}_N \times e^{iu\sum_j \frac{\partial E_{jz}}{\partial z} - 2v_1\sqrt{i\omega}\sum_j E_{jx}} \times$$

$$e^{-2v_2\sqrt{i\omega}\sum_j E_{jy}} \times e^{-2v_3\sqrt{i\omega}\sum_j E_{jz}} \times e^{-\beta U_N} \qquad (5.7)$$

حيث:

$$U_N = \sum_j \frac{q^2}{r_j} e^{-r_j/\lambda} + \sum_j \sum_{k>j} \frac{q^2}{\left|\vec{r}_j - \vec{r}_k\right|} e^{-\left|\vec{r}_j - \vec{r}_k\right|/\lambda} \qquad (5.8)$$

الحدُّ الأول يمثل التفاعلات المركزية بين الأيون المشع و بقية أيونات البلازما، أما الحدُّ الثاني فهو يمثل التفاعلات بين أيونات البلازما فيما بينها.

عند هذه الخطوة سيبدأ الاختلاف في الحساب عن الطريقة السابقة.

$$P(f,\varepsilon) = \frac{2\varepsilon}{Z_N \pi^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iuf - i\omega\varepsilon^2} du\, d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} dv_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dv_2 \int_{-\infty}^{+\infty} dv_3 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v_1^2 - v_2^2 - v_3^2} \times$$

$$\int \cdots \int d\vec{r}_1 \cdots d\vec{r}_N \times e^{iu\sum_j \frac{\partial E_{Djz}}{\partial z} - 2v_1\sqrt{i\omega}\sum_j E_{jx}} \times e^{-2v_2\sqrt{i\omega}\sum_j E_{jy}}$$

$$\times e^{-2v_3\sqrt{i\omega}\sum_j E_{jz}} \times e^{-\beta\left(\sum_j \frac{q^2}{r_j} e^{-r_j/\lambda} + \sum_j \sum_{k>j} \frac{q^2}{\left|\vec{r}_j - \vec{r}_k\right|} e^{-\left|\vec{r}_j - \vec{r}_k\right|/\lambda}\right)} \qquad (5.9)$$

لنعتبرْ:

$$\Psi = \int \cdots \int d\vec{r}_1 \cdots d\vec{r}_N e^{-\beta\left(\sum_j \frac{q^2}{r_j} e^{-r_j/\lambda} + \sum_j \sum_{k>j} \frac{q^2}{\left|\vec{r}_j - \vec{r}_k\right|} e^{-\left|\vec{r}_j - \vec{r}_k\right|/\lambda}\right)} \times$$

$$e^{iu\sum_j \frac{\partial E_{jz}}{\partial z}} \times e^{-2v_1\sqrt{i\omega}\sum_j E_{jx} - 2v_2\sqrt{i\omega}\sum_j E_{jy} - 2v_3\sqrt{i\omega}\sum_j E_{jz}} \qquad (5.10)$$

حيث: $q = Ze$ ، $Z_N = 4\pi\int_0^R r^2 e^{-U(r)/KT} dr$ ، $E_x = E(r)\sin\theta\cos\varphi$ ،

$$E(r)=\frac{q}{r^2}(1+\frac{r}{\lambda})e^{-r/\lambda} \quad ، \quad E_z=E(r)\cos\theta \quad ، \quad E_y=E(r)\sin\theta\sin\varphi$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial z}=\frac{q}{r^3}\left[\left(1+\frac{r}{\lambda}\right)-\left(3+\frac{3r}{\lambda}+\frac{r^2}{\lambda^2}\right)\cos^2\theta\right]e^{-\frac{r}{\lambda}}$$

بإعادة ترتيب الحدود في عبارة Ψ يمكن كتابة:

$$\Psi=\int\cdots\int e^{\sum_{j=1}^{N}\left(iu\frac{\partial E_{jz}}{\partial z}-\beta\frac{q^2}{r_j}e^{-r_j/\lambda}-2v_1\sqrt{i\omega}\,E_{jx}-2v_2\sqrt{i\omega}\,E_{jy}-2v_3\sqrt{i\omega}\,E_{jz}\right)}\times$$

$$e^{-\beta\sum_j\sum_{k>j}\frac{q^2}{\left|\vec{r}_j-\vec{r}_k\right|}e^{-\left|\vec{r}_j-\vec{r}_k\right|/\lambda}}d\vec{r}_1\cdots d\vec{r}_N \qquad (5.11)$$

$$\Psi=\int\cdots\int e^{\sum_{j=1}^{N}\left(iu\frac{\partial E_{jz}}{\partial z}-\beta\frac{q^2}{r_j}e^{-r_j/\lambda}-2\sqrt{i\omega}\left[v_1E_{jx}-v_2E_{jy}-v_3E_{jz}\right]\right)}\times$$

$$e^{-\beta\sum_j\sum_{k>j}\frac{q^2}{\left|\vec{r}_j-\vec{r}_k\right|}e^{-\left|\vec{r}_j-\vec{r}_k\right|/\lambda}}d\vec{r}_1\cdots d\vec{r}_N \qquad (5.12)$$

لتبسيط الحساب نعرّف الدالة:

$$g_N(\vec{R})=e^{\sum_{j=1}^{N}\left(iu\frac{\partial E_{jz}}{\partial z}-\beta\frac{q^2}{r_j}e^{-r_j/\lambda}-2v_1\sqrt{i\omega}E_{jx}-2v_2\sqrt{i\omega}E_{jy}-2v_3\sqrt{i\omega}E_{jz}\right)}$$

$$=g(\vec{r}_1).g(\vec{r}_2).\ldots.g(\vec{r}_N)=\prod_{j=1}^{N}g(\vec{r}_j) \qquad (5.13)$$

حيث:

$$g(\vec{r}_j)=e^{iu\frac{\partial E_{jz}}{\partial z}-\beta\frac{q^2}{r_j}e^{-r_j/\lambda}-2v_1\sqrt{i\omega}\,E_{jx}-2v_2\sqrt{i\omega}\,E_{jy}-2v_3\sqrt{i\omega}\,E_{jz}}$$

أمّا:

$$e^{-\beta\sum_j\sum_{k>j}\frac{q^2}{\left|\vec{r}_j-\vec{r}_k\right|}e^{-\left|\vec{r}_j-\vec{r}_k\right|/\lambda}}=\prod_{\substack{j=1,k=1\\k>j}}^{N}e^{-\beta\frac{q^2}{\left|\vec{r}_j-\vec{r}_k\right|}e^{-\left|\vec{r}_j-\vec{r}_k\right|/\lambda}}$$

إذًا:

$$\Psi = \int\cdots\int \prod_{j=1}^{N} g(\vec{r}_j) \prod_{\substack{j=1,k=1\\k>j}}^{N} e^{-\beta\frac{q^2}{\left|\vec{r}_j-\vec{r}_k\right|}e^{-\left|\vec{r}_j-\vec{r}_k\right|/\lambda}} \prod_{j=1}^{N} d\vec{r}_j \qquad (5.14)$$

لنعالجْ كُلَّ حدٍّ على حِدةٍ، و لْنبدأْ بالحدِّ $e^{-\beta\frac{q^2}{\left|\vec{r}_j-\vec{r}_k\right|}e^{-\left|\vec{r}_j-\vec{r}_k\right|/\lambda}}$.

لتبسيط العبارة سنعتبر: $-\beta\frac{q^2}{\left|\vec{r}_j-\vec{r}_k\right|}e^{-\left|\vec{r}_j-\vec{r}_k\right|/\lambda} = f(\vec{r}_j-\vec{r}_k) = f_{jk}$

لذا فإن:

$$\prod_{\substack{j=1,k=1\\k>j}}^{N} e^{-\beta\frac{q^2}{\left|\vec{r}_j-\vec{r}_k\right|}e^{-\left|\vec{r}_j-\vec{r}_k\right|/\lambda}} = \prod_{\substack{j=1,k=1\\k>j}}^{N} e^{f_{jk}} = e^{\sum_{j=1}^{N}\sum_{\substack{k=1\\k>j}}^{N} f_{jk}} \cong 1+\sum_{j=1}^{N}\sum_{\substack{k=1\\k>j}}^{N} f_{jk}$$

و لاعتبارات سنشرحها يكون $f_{jk} \ll 1$ ، و عليه فإنه وفقا لنشر تايلور يكون: $e^{f_{jk}} \cong 1+f_{jk}$ ،

و منه فإن: $$\prod_{\substack{j=1,k=1\\k>j}}^{N} e^{-\beta\frac{q^2}{\left|\vec{r}_j-\vec{r}_k\right|}e^{-\left|\vec{r}_j-\vec{r}_k\right|/\lambda}} \cong 1+\sum_{j=1}^{N}\sum_{\substack{k=1\\k>j}}^{N} f_{jk}$$

و يصبح:

$$\Psi = \int\cdots\int \prod_{j=1}^{N} g_N(\vec{R}) \left(1+\sum_{j=1}^{N}\sum_{\substack{k=1\\k>j}}^{N}\left(-\beta\frac{q^2}{\left|\vec{r}_j-\vec{r}_k\right|}e^{-\left|\vec{r}_j-\vec{r}_k\right|/\lambda}\right)\right) d\vec{r}_1\cdots d\vec{r}_N$$

$$= \int\cdots\int g_N(\vec{R})d\vec{r}_1\cdots d\vec{r}_N + \int\cdots\int g_N(\vec{R}) \left(\sum_{j=1}^{N}\sum_{\substack{k=1\\k>j}}^{N}\left(-\beta\frac{q^2}{\left|\vec{r}_j-\vec{r}_k\right|}e^{-\left|\vec{r}_j-\vec{r}_k\right|/\lambda}\right)\right) d\vec{r}_1\cdots d\vec{r}_N$$

$$= \left[\int g(\vec{r})d\vec{r}\right]^N + \int\cdots\int g_N(\vec{R}) \left(\sum_{j=1}^{N}\sum_{\substack{k=1\\k>j}}^{N}\left(-\beta\frac{q^2}{\left|\vec{r}_j-\vec{r}_k\right|}e^{-\left|\vec{r}_j-\vec{r}_k\right|/\lambda}\right)\right) d\vec{r}_1\cdots d\vec{r}_N$$

$$= \mathbb{Z} + \mathbb{N} \qquad (5.15)$$

حُسبتْ $\mathbb{Z}$ في الفصل الرابع باعتبار التفاعلات مركزيةً فقط، و عليه بقي الجزء الثاني فقط، و هو $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \int\cdots\int g_N(\vec{R})\left(\sum_{\substack{j=1}}^{N}\sum_{\substack{k=1\\k>j}}^{N}(-\beta\frac{q^2}{|\vec{r}_j-\vec{r}_k|}e^{-|\vec{r}_j-\vec{r}_k|/\lambda})\right)d\vec{r}_1\cdots d\vec{r}_N$$

$$= \int\cdots\int g_N(\vec{R})\sum_{\substack{j=1\\k>j}}^{N}\sum_{k=1}^{N} f_{jk}\, d\vec{r}_1\cdots d\vec{r}_N \qquad (5.16)$$

و يمكن كتابتها على النحو:

$$\mathbb{N} = \int\cdots\int g_{N-2}(\vec{R})d\vec{r}_1\cdots d\vec{r}_{N-2}\times\sum_{\substack{j=1\\k>j}}^{N}\sum_{k=1}^{N}\iint g(\vec{r}_j)g(\vec{r}_k)f_{jk}d\vec{r}_j d\vec{r}_k \qquad (5.17)$$

حيث

$$g_{N-2}(\vec{R}) = \prod_{j=1}^{N-2} g(\vec{r}_j) = e^{\sum_{j=1}^{N-2}\left[iu\frac{\partial E_{jz}}{\partial z}-\beta\frac{q^2}{r_j}e^{-r_j/\lambda}-2\sqrt{i\omega}(v_1E_{jx}+v_2E_{jy}+v_3E_{jz})\right]} \qquad (5.18)$$

لتبسيط عبارة $\mathbb{N}$ نضع: $\mathbb{N}_1 = \sum_{\substack{j=1\\k>j}}^{N}\sum_{k=1}^{N}\iint g(\vec{r}_j)g(\vec{r}_k)f_{jk}d\vec{r}_j d\vec{r}_k$ فيكون:

$$\mathbb{N} = \int\cdots\int g_{N-2}(\vec{R})d\vec{r}_1\cdots d\vec{r}_{N-2}\mathbb{N}_1 \qquad (5.19)$$

✓ **معالجة $\mathbb{N}_1$:**

$$\mathbb{N}_1 = \sum_{\substack{j=1\\k>j}}^{N}\sum_{k=1}^{N}\iint g(\vec{r}_j)g(\vec{r}_k)\left(-\beta\frac{q^2}{|\vec{r}_j-\vec{r}_k|}e^{-|\vec{r}_j-\vec{r}_k|/\lambda}\right)d\vec{r}_j d\vec{r}_k \qquad (5.20)$$

يمكن استبدال الجمع على j و K بـــ:

$$\mathbb{N}_1 = \frac{N(N-1)}{2}\iint g(\vec{r}_1)g(\vec{r}_2)\left(-\beta\frac{q^2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}e^{-|\vec{r}_1-\vec{r}_2|/\lambda}\right)d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 \qquad (5.21)$$

لتقريب $\mathbb{N}_1$ نضع الإعتبار التالي:

باعتبار الكثافة الإلكترونية عاليةً جدا فإن التفاعل سيصبح كولوميا بدلا من تفاعل ديباي، و عليه فإن:

$$\mathbb{N}_1 = \frac{N(N-1)}{2}\iint g(\vec{r}_1)g(\vec{r}_2)\left(-\beta\frac{q^2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}\right)d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 \qquad (5.22)$$

باستعمال متعددة حدود ليجندر، يمكن كتابة:

$$\frac{1}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|} = \begin{cases}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r_2^n}{r_1^{n+1}}P_n(\cos\alpha) & : r_1 > r_2 \\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{r_1^n}{r_2^{n+1}}P_n(\cos\alpha) & : r_2 > r_1\end{cases}$$

حيث α هي الزاوية بين $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$.

يعرّف كثير حدود ليجندر كما يلي: $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ ، إذًا:

$$P_0(x) = 1 \quad , \quad P_1(x) = x \quad , \quad P_2(x) = \frac{3x^2-1}{2}$$

و عليه فإن:

$$\mathbb{N}_1 = \frac{N(N-1)}{2}\iint g(\vec{r}_1)g(\vec{r}_2)\left(-\beta q^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r_2^n}{r_1^{n+1}}P_n(\cos\theta)\right)d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 \qquad (5.23)$$

$$\mathbb{N}_1 = -\beta q^2\frac{N(N-1)}{2}\iint g(\vec{r}_1)g(\vec{r}_2)d\vec{r}_1 d\vec{r}_2\left(\frac{1}{r_1}P_0(\cos\alpha)+\frac{r_2}{r_1^2}P_1(\cos\alpha)+\frac{r_2^2}{r_1^3}P_2(\cos\alpha)+\dots.\right)$$

$$= -\beta q^2\frac{N(N-1)}{2}\iint g(\vec{r}_1)g(\vec{r}_2)d\vec{r}_1 d\vec{r}_2\left(\frac{1}{r_1}+\frac{r_2}{r_1^2}\cos\alpha+\frac{r_2^2}{r_1^3}\frac{3\cos^2\alpha-1}{2}+\dots.\right) \qquad (5.24)$$

لنكتفِ بالحدود الثلاثة الأولى:

$$\mathbb{N}_1 = -\beta q^2 \frac{N(N-1)}{2}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\vec{r}_1)g(\vec{r}_2)\frac{1}{r_1}d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 + \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\vec{r}_1)g(\vec{r}_2)\frac{r_2}{r_1^2}\cos\alpha d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 + \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\vec{r}_1)g(\vec{r}_2)\frac{r_2^2}{r_1^3}\frac{3\cos^2\alpha - 1}{2}d\vec{r}_1 d\vec{r}_2\right\} \quad (5.25)$$

سنجري تكامل المجاميع الثلاثة، كلًّا على حدةٍ:

$$\mathbb{N}_1 = -\beta q^2 \frac{N(N-1)}{2}\left\{\mathbb{N}_1' + \mathbb{N}_1'' + \mathbb{N}_1'''\right\} \quad (5.26)$$

$$\mathbb{N}_1' = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\vec{r}_1)g(\vec{r}_2)\frac{1}{r_1}d\vec{r}_1 d\vec{r}_2$$

حيث:

$$\mathbb{N}_1'' = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\vec{r}_1)g(\vec{r}_2)\frac{r_2}{r_1^2}\cos\alpha d\vec{r}_1 d\vec{r}_2$$

$$\mathbb{N}_1''' = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\vec{r}_1)g(\vec{r}_2)\frac{r_2^2}{r_1^3}\frac{3\cos^2\alpha - 1}{2}d\vec{r}_1 d\vec{r}_2$$

✓ حساب $\mathbb{N}_1'$:

$$\mathbb{N}_1' = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{r_1}g(\vec{r}_1)d\vec{r}_1 \int_{-\infty}^{+\infty} g(\vec{r}_2)d\vec{r}_2 = integ_1' \times integ_2'$$

$$integ_1' = \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi}\frac{1}{r}r^2\sin\theta\, d\phi\, d\theta\, dr\, e^{iu\frac{\partial E_z}{\partial z} - \beta\frac{q^2}{r}e^{-r/\lambda} - 2\sqrt{i\omega}(v_1E_x + v_2E_y + v_3E_z)}$$

$$integ_2' = \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi} r^2\sin\theta\, d\phi\, d\theta\, dr\, e^{iu\frac{\partial E_z}{\partial z} - \beta\frac{q^2}{r}e^{-r/\lambda} - 2\sqrt{i\omega}(v_1E_x + v_2E_y + v_3E_z)}$$

(5.27)

$$integ_1' = \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi} r\sin\theta\, d\phi\, d\theta\, dr\, e^{iu\frac{\partial E_z}{\partial z} - \beta\frac{q^2}{r}e^{-r/\lambda} - 2\sqrt{i\omega}(v_1E_x + v_2E_y + v_3E_z)} \quad (5.28)$$

هذا التكامل يشبه تماما عبارة $\mathbb{Z}$ التي حَسَبناها في تقريب التفاعلات المركزية فقط، إلا أن r^2 استُبدلت هنا بـــ r، و بالتالي يكون:

$$Real(integ_1') = 2\pi\int_0^R r\,e^{-\beta U_D(r)}\cos A(u,r)dr\int_0^\pi \sin\theta\, e^{\frac{k(r,\omega,v_3)}{\sqrt{2}}\cos\theta}\, ber(\beta)\cos(BBB)\,d\theta$$

$$-2\pi\int_0^R r\,e^{-\beta U_D(r)}\sin A(u,r)dr\int_0^\pi \sin\theta\, e^{\frac{k(r,\omega,v_3)}{\sqrt{2}}\cos\theta}\, ber(\beta)\sin(BBB)\,d\theta \quad (5.29)$$

$$Imag(integ_1') = 2\pi\int_0^R r\,e^{-\beta U_D(r)}\sin A(u,r)dr\int_0^\pi \sin\theta\, e^{\frac{k(r,\omega,v_3)}{\sqrt{2}}\cos\theta}\, ber(\beta)\cos(BBB)d\theta$$

$$+2\pi\int_0^R r\,e^{-\beta U_D(r)}\cos A(u,r)dr\int_0^\pi \sin\theta\, e^{\frac{k(r,\omega,v_3)}{\sqrt{2}}\cos\theta}\, ber(\beta)\sin(BBB)\,d\theta \quad (5.30)$$

حيث:

$$A(u,r) = u\frac{q}{r^3}(1+\frac{r}{\lambda})e^{-\frac{r}{\lambda}} \quad , \quad \beta = \sqrt{4\omega E_D^2\sin^2\theta(v_1^2+v_2^2)} \quad , \quad k = -2\sqrt{\omega}E_D(r)v_3$$

$$BBB(u,r,\theta,\omega,v_3) = -u\frac{q}{r^3}(3+\frac{3r}{\lambda}+\frac{r^2}{\lambda^2})e^{-\frac{r}{\lambda}}\cos^2\theta+\frac{k(r,\omega,v_3)}{\sqrt{2}}\cos\theta$$

أمّا الجزء الثاني فهو:

$$integ_2' = \int_{r=0}^R\int_{\theta=0}^\pi\int_{\phi=0}^{2\pi} r^2\sin\theta\,d\phi\,d\theta\,dr\; e^{iu\frac{\partial E_z}{\partial z}-\beta\frac{q^2}{r}e^{-r/\lambda}-2\sqrt{i\omega}(v_1E_x+v_2E_y+v_3E_z)} \quad (5.31)$$

كما بالحساب السابق، يكون:

$$Real(integ_2') = 2\pi\int_0^R r^2 e^{-\beta U_D(r)}\cos A(u,r)dr\int_0^\pi \sin\theta\, e^{\frac{k(r,\omega,v_3)}{\sqrt{2}}\cos\theta}\, ber(\beta)\cos(BBB)\,d\theta$$

$$-2\pi\int_0^R r^2 e^{-\beta U_D(r)}\sin A(u,r)dr\int_0^\pi \sin\theta\, e^{\frac{k(r,\omega,v_3)}{\sqrt{2}}\cos\theta}\, ber(\beta)\sin(BBB)\,d\theta \quad (5.32)$$

$$Imag(integ_2') = 2\pi\int_0^R r^2 e^{-\beta U_D(r)}\sin A(u,r)dr\int_0^\pi \sin\theta\, e^{\frac{k(r,\omega,v_3)}{\sqrt{2}}\cos\theta}\, ber(\beta)\cos(BBB)d\theta$$

$$+2\pi\int_0^R r^2 e^{-\beta U_D(r)}\cos A(u,r)dr\int_0^\pi \sin\theta\, e^{\frac{k(r,\omega,v_3)}{\sqrt{2}}\cos\theta}\, ber(\beta)\sin(BBB)\,d\theta \quad (5.33)$$

إذًا:

$$\mathbb{N}_1' = \left|integ_1'\right|(\cos\Delta_1' + i\sin\Delta_1') \times \left|integ_2'\right|(\cos\Delta_2' + i\sin\Delta_2') \qquad (5.34)$$

✓ حساب $\mathbb{N}_1''$:

$$\mathbb{N}_1'' = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\vec{r}_1)g(\vec{r}_2)\frac{r_2}{r_1^2}\cos\alpha\, d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 \qquad (5.35)$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{r}_1\cdot\vec{r}_2}{r_1 r_2} = \sin\theta_1\cos\phi_1\sin\theta_2\cos\phi_2 + \sin\theta_1\sin\phi_1\sin\theta_2\sin\phi_2 + \cos\theta_1\cos\theta_2$$

$$= f(\theta_1,\theta_2,\phi_1,\phi_2) \qquad (5.36)$$

إذًا:

$$\mathbb{N}_1'' = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\vec{r}_1)g(\vec{r}_2)\frac{r_2}{r_1^2}(\sin\theta_1\cos\phi_1\sin\theta_2\cos\phi_2 + \sin\theta_1\sin\phi_1\sin\theta_2\sin\phi_2 + \cos\theta_1\cos\theta_2)\, d\vec{r}_1 d\vec{r}_2$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\vec{r}_1)g(\vec{r}_2)\frac{r_2}{r_1^2}(\sin\theta_1\cos\phi_1\sin\theta_2\cos\phi_2)\, d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 +$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\vec{r}_1)g(\vec{r}_2)\frac{r_2}{r_1^2}(\sin\theta_1\sin\phi_1\sin\theta_2\sin\phi_2)\, d\vec{r}_1 d\vec{r}_2$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\vec{r}_1)g(\vec{r}_2)\frac{r_2}{r_1^2}(\cos\theta_1\cos\theta_2)\, d\vec{r}_1 d\vec{r}_2$$

$$= \text{Part I} + \text{Part II} + \text{Part III} \qquad (5.37)$$

✓ حساب Part I:

$$\text{Part I} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\vec{r}_1)g(\vec{r}_2)\frac{r_2}{r_1^2}(\sin\theta_1\cos\phi_1\sin\theta_2\cos\phi_2)\, d\vec{r}_1 d\vec{r}_2$$

$$= integ_1'' \times integ_2'' \qquad (5.38)$$

$$integ_1'' = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\vec{r}_1)\frac{1}{r_1^2}\sin\theta_1\cos\phi_1\, d\vec{r}_1$$

$$integ_2'' = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\vec{r}_2)r_2\sin\theta_2\cos\phi_2 d\vec{r}_2$$

$$integ_1'' = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\vec{r})\frac{1}{r^2}\sin\theta\cos\phi\, d\vec{r}$$

$$= \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi} \sin^2\theta\cos\phi\, d\phi\, d\theta\, dr\, e^{-\frac{U}{KT}+iA(u,r)+iB(u,r)\cos^2\theta+\sqrt{i}k\cos\theta+\sqrt{i}l\cos\phi+\sqrt{i}m\sin\phi} \qquad (5.39)$$

$$\ell = -2\sqrt{\omega}E_D(r)v_1\sin\theta \quad , \quad m = -2\sqrt{\omega}E_D(r)v_2\sin\theta$$

لنبدأ أوّلا بالتكامل على ϕ:

$$\int_{\phi=0}^{2\pi}\cos\phi\, e^{\sqrt{i}l\cos\phi+\sqrt{i}m\sin\phi}\, d\phi = \int_{\phi=0}^{2\pi}\cos\phi\, e^{\frac{l}{\sqrt{2}}\cos\phi+\frac{m}{\sqrt{2}}\sin\phi+i(\frac{l}{\sqrt{2}}\cos\phi+\frac{m}{\sqrt{2}}\sin\phi)}\, d\phi$$

$$= \int_{\phi=0}^{2\pi}\cos\phi\, e^{\frac{l}{\sqrt{2}}\cos\phi+\frac{m}{\sqrt{2}}\sin\phi}\, e^{i(\frac{l}{\sqrt{2}}\cos\phi+\frac{m}{\sqrt{2}}\sin\phi)}\, d\phi$$

$$= \int_{\phi=0}^{2\pi}\cos\phi\, e^{\frac{l}{\sqrt{2}}\cos\phi+\frac{m}{\sqrt{2}}\sin\phi}\left(\cos(\frac{l}{\sqrt{2}}\cos\phi+\frac{m}{\sqrt{2}}\sin\phi)+ i\sin(\frac{l}{\sqrt{2}}\cos\phi+\frac{m}{\sqrt{2}}\sin\phi)\right)d\phi \qquad (5.40)$$

$$= \int_{\phi=0}^{2\pi}\cos\phi\cos(\frac{l}{\sqrt{2}}\cos\phi+\frac{m}{\sqrt{2}}\sin\phi)e^{\frac{l}{\sqrt{2}}\cos\phi+\frac{m}{\sqrt{2}}\sin\phi}\, d\phi$$

$$+ i\int_{\phi=0}^{2\pi}\cos\phi\sin(\frac{l}{\sqrt{2}}\cos\phi+\frac{m}{\sqrt{2}}\sin\phi)e^{\frac{l}{\sqrt{2}}\cos\phi+\frac{m}{\sqrt{2}}\sin\phi}\, d\phi \qquad (5.41)$$

باستخدام التكامل بالتجزئة و العلاقة 3.937 من معجم I. S. Gradshteyn [130] فإن التكاملين يؤولان تماما إلى الصفر، و عليه فإن: $integ_1'' = 0$

و بالمثل يكون: $integ_2'' = 0$، و نتيجة لذلك فإن:

$$Part\ I = integ_1'' \times integ_2'' = 0 \qquad (5.42)$$

✓ حساب Part II :

$$\text{Part II} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\vec{r}_1)g(\vec{r}_2)\frac{r_2}{r_1^2}(\sin\theta_1\sin\phi_1\sin\theta_2\sin\phi_2)\,d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 \qquad (5.43)$$

و بمعالجة مشابهة لمعالجة Part I يكون Part II = 0

✓ حساب Part III :

$$\text{Part III} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\vec{r}_1)\frac{1}{r_1^2}\cos\theta_1\,d\vec{r}_1 \times \int_{-\infty}^{+\infty} g(\vec{r}_2)r_2\cos\theta_2\,d\vec{r}_2 = \text{int}eg_3'' \times \text{int}eg_4'' \qquad (5.44)$$

$$\text{int}eg_3'' = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\vec{r})\frac{1}{r^2}\cos\theta\,d\vec{r}$$

$$= \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi} \sin\theta\cos\theta\,d\phi\,d\theta\,dr\,e^{-\frac{U}{KT}+iA(u,r)+iB(u,r)\cos^2\theta+\sqrt{i}k\cos\theta+\sqrt{i}l\cos\phi+\sqrt{i}m\sin\phi}$$

$$= \int_{r=0}^{R} dr\,e^{-\frac{U}{KT}+iA(u,r)} \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta\cos\theta\,d\theta\,e^{iB(u,r)\cos^2\theta+\sqrt{i}k\cos\theta} \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi\; e^{\sqrt{i}l\cos\phi+\sqrt{i}m\sin\phi}$$

$$= \int_{r=0}^{R} dr\,e^{-\frac{U}{KT}+iA(u,r)} \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta\cos\theta\,d\theta\,e^{iB(u,r)\cos^2\theta+\sqrt{i}k\cos\theta}\,2\pi\,\text{ber}(\beta)$$

$$= \pi\int_{r=0}^{R} dr\,e^{-\frac{U}{KT}+iA(u,r)} \int_{\theta=0}^{\pi} \sin 2\theta\,\text{ber}(\beta)d\theta\,e^{iB(u,r)\cos^2\theta+\sqrt{i}k\cos\theta}$$

$$= \pi\int_{r=0}^{R} dr\,e^{-\frac{U}{KT}+iA(u,r)} \int_{\theta=0}^{\pi} \sin 2\theta\,\text{ber}(\beta)d\theta\,e^{i\left(B(u,r)\cos^2\theta+\frac{k}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)+\frac{k}{\sqrt{2}}\cos\theta}$$

$$= \pi\int_{r=0}^{R} dr\,e^{-\frac{U}{KT}+iA(u,r)} \int_{\theta=0}^{\pi} \sin 2\theta\,\text{ber}(\beta)d\theta\,e^{i\,BB(u,r,\theta)+\frac{k}{\sqrt{2}}\cos\theta}$$

$$= \pi\int_{r=0}^{R} dr\,e^{-\frac{U}{KT}+iA(u,r)} \int_{\theta=0}^{\pi} \sin 2\theta\,\text{ber}(\beta)d\theta\left(\cos(BB)+i\sin(BB)\right)e^{\frac{k}{\sqrt{2}}\cos\theta}$$

$$= \pi \int_{r=0}^{R} dr e^{-\frac{U}{KT}} (\cos A + i \sin A) \int_{\theta=0}^{\pi} \sin 2\theta \, ber(\beta) d\theta \cos(BB) e^{\frac{K}{\sqrt{2}} \cos\theta}$$

$$+ i\pi \int_{r=0}^{R} dr e^{-\frac{U}{KT}} (\cos A + i \sin A) \int_{\theta=0}^{\pi} \sin 2\theta \, ber(\beta) d\theta \sin(BB) e^{\frac{K}{\sqrt{2}} \cos\theta} \quad (5.45)$$

حيث:

$$BB(u, r, \theta, \omega, v_3) = B\cos^2\theta + \frac{k(r, \omega, v_3)}{\sqrt{2}} \cos\theta$$

$$Real(int eg_3'') = \pi \int_{r=0}^{R} dr e^{-\frac{U}{KT}} \cos A \int_{\theta=0}^{\pi} \sin 2\theta \, ber(\beta) \cos(BB) e^{\frac{k}{\sqrt{2}} \cos\theta} d\theta$$

$$- \pi \int_{r=0}^{R} dr e^{-\frac{U}{KT}} \sin A \int_{\theta=0}^{\pi} \sin 2\theta \, ber(\beta) \sin(BB) e^{\frac{k}{\sqrt{2}} \cos\theta} d\theta \quad (5.46)$$

$$Imag(int eg_3'') = \pi \int_{r=0}^{R} dr e^{-\frac{U}{KT}} \cos A \int_{\theta=0}^{\pi} \sin 2\theta \, ber(\beta) \sin(BB) e^{\frac{k}{\sqrt{2}} \cos\theta} d\theta$$

$$+ \pi \int_{r=0}^{R} dr e^{-\frac{U}{KT}} \sin A \int_{\theta=0}^{\pi} \sin 2\theta \, ber(\beta) \cos(BB) e^{\frac{k}{\sqrt{2}} \cos\theta} d\theta \quad (5.47)$$

و بطريقة مشابهة نجد:

$$int eg_4'' = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\vec{r}) r \cos\theta \, d\vec{r}$$

$$= \pi \int_{r=0}^{R} r^3 dr e^{-\frac{U}{KT}} (\cos A + i \sin A) \int_{\theta=0}^{\pi} \sin 2\theta \, ber(\beta) d\theta \cos(BB) e^{\frac{k}{\sqrt{2}} \cos\theta}$$

$$+ i\pi \int_{r=0}^{R} r^3 dr e^{-\frac{U}{KT}} (\cos A + i \sin A) \int_{\theta=0}^{\pi} \sin 2\theta \, ber(\beta) d\theta \sin(BB) e^{\frac{k}{\sqrt{2}} \cos\theta} \quad (5.48)$$

$$Real(int eg_4'') = \pi \int_{r=0}^{R} r^3 dr e^{-\frac{U}{KT}} \cos A \int_{\theta=0}^{\pi} \sin 2\theta \, ber(\beta) \cos(BB) e^{\frac{k}{\sqrt{2}} \cos\theta} d\theta$$

$$- \pi \int_{r=0}^{R} r^3 dr e^{-\frac{U}{KT}} \sin A \int_{\theta=0}^{\pi} \sin 2\theta \, ber(\beta) \sin(BB) e^{\frac{k}{\sqrt{2}} \cos\theta} d\theta \quad (5.49)$$

$$Imag(integ_4'') = \pi \int_{r=0}^{R} r^3 dr\, e^{-\frac{U}{KT}} \cos A \int_{\theta=0}^{\pi} \sin 2\theta\, ber(\beta) \sin(BB) e^{\frac{k}{\sqrt{2}}\cos\theta} d\theta$$
$$+ \pi \int_{r=0}^{R} r^3 dr\, e^{-\frac{U}{KT}} \sin A \int_{\theta=0}^{\pi} \sin 2\theta\, ber(\beta) \cos(BB) e^{\frac{k}{\sqrt{2}}\cos\theta} d\theta \qquad (5.50)$$

إذًا:

$$\mathbb{N}_1'' = Part\ I + Part\ II + Part\ III$$
$$= 0 + 0 + Part\ III$$
$$= \left|integ_3''\right|(\cos\Delta_3'' + i\sin\Delta_3'') \times \left|integ_4''\right|(\cos\Delta_4'' + i\sin\Delta_4'') \qquad (5.51)$$

✓ حساب $\mathbb{N}_1'''$:

$$\mathbb{N}_1''' = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\vec{r}_1)g(\vec{r}_2)\frac{r_2^2}{r_1^3}\frac{3\cos^2\alpha - 1}{2} d\vec{r}_1 d\vec{r}_2$$
$$= -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\vec{r}_1)g(\vec{r}_2)\frac{r_2^2}{r_1^3} d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 + \frac{3}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\vec{r}_1)g(\vec{r}_2)\frac{r_2^2}{r_1^3}\cos^2\alpha d\vec{r}_1 d\vec{r}_2$$
$$= Part1 \quad + \quad Part2 \qquad (5.52)$$

✓ معالجة Part1:

$$Part1 = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{r_1^3} g(\vec{r}_1) d\vec{r}_1 \int_{-\infty}^{+\infty} r_2^2 g(\vec{r}_2) d\vec{r}_2 = -\frac{1}{2} integ_5''' \times integ_6''' \qquad (5.53)$$

$$integ_5''' = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{r^3} g(\vec{r}) d\vec{r}$$

$$= \int_{r=0}^{R} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{1}{r} \sin\theta \, d\phi \, d\theta \, dr \, e^{-\frac{U}{KT} + iA(u,r) + iB(u,r)\cos^2\theta + \sqrt{i}k\cos\theta + \sqrt{i}l\cos\phi + \sqrt{i}m\sin\phi}$$

$$= \int_{r=0}^{R} \frac{1}{r} dr \, e^{-\frac{U}{KT} + iA(u,r)} \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta \, d\theta \, e^{iB(u,r)\cos^2\theta + \sqrt{i}k\cos\theta} 2\pi \; ber(\beta) \qquad (5.54)$$

$$Real(integ_5''') = 2\pi \int_{r=0}^{R} \frac{1}{r} e^{-\frac{U}{KT}} \cos A \, dr \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta \, e^{\frac{k}{\sqrt{2}}\cos\theta} ber(\beta) \cos(BBB) d\theta$$

$$- 2\pi \int_{r=0}^{R} \frac{1}{r} e^{-\frac{U}{KT}} \sin A \, dr \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta \, e^{\frac{k}{\sqrt{2}}\cos\theta} ber(\beta) \sin(BBB) d\theta \qquad (5.55)$$

$$Imag(integ_5''') = 2\pi \int_{r=0}^{R} \frac{1}{r} e^{-\frac{U}{KT}} \sin A \, dr \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta \, e^{\frac{k}{\sqrt{2}}\cos\theta} ber(\beta) \cos(BBB) d\theta$$

$$+ 2\pi \int_{r=0}^{R} \frac{1}{r} e^{-\frac{U}{KT}} \cos A \, dr \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta \, e^{\frac{k}{\sqrt{2}}\cos\theta} ber(\beta) \sin(BBB) d\theta \qquad (5.56)$$

و بالمثل يكون:

$$integ_6''' = \int_{-\infty}^{+\infty} r^2 g(\vec{r}) d\vec{r} =$$

$$= \int_{r=0}^{R} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} r^4 \sin\theta \, d\phi \, d\theta \, dr \, e^{-\frac{U}{KT} + iA(u,r) + iB(u,r)\cos^2\theta + \sqrt{i}k\cos\theta + \sqrt{i}l\cos\phi + \sqrt{i}m\sin\phi}$$

$$= \int_{r=0}^{R} r^4 dr \, e^{-\frac{U}{KT} + iA(u,r)} \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta \, d\theta \, e^{iB(u,r)\cos^2\theta + \sqrt{i}k\cos\theta} 2\pi \; ber(\beta) \qquad (5.57)$$

$$Real(integ_6''') = 2\pi \int_{r=0}^{R} r^4 e^{-\frac{U}{KT}} \cos A \, dr \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta \, e^{\frac{k}{\sqrt{2}}\cos\theta} ber(\beta) \cos(BBB) d\theta$$

$$- 2\pi \int_{r=0}^{R} r^4 e^{-\frac{U}{KT}} \sin A \, dr \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta \, e^{\frac{k}{\sqrt{2}}\cos\theta} ber(\beta) \sin(BBB) d\theta \qquad (5.58)$$

$$\mathrm{Imag}(\mathrm{integ}_6''') = 2\pi \int_{r=0}^{R} r^4 e^{-\frac{U}{KT}} \sin A\, dr \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta\, e^{\frac{k}{\sqrt{2}}\cos\theta}\, \mathrm{ber}(\beta)\cos(BBB)d\theta$$
$$+ 2\pi \int_{r=0}^{R} r^4 e^{-\frac{U}{KT}} \cos A\, dr \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta\, e^{\frac{k}{\sqrt{2}}\cos\theta}\, \mathrm{ber}(\beta)\sin(BBB)d\theta \qquad (5.59)$$

إذاً:

$$\mathrm{Part1} = -\frac{1}{2}\mathrm{integ}_5''' \times \mathrm{integ}_6'''$$
$$= -\frac{1}{2}\left|\mathrm{integ}_5'''\right|(\cos\Delta_5''' + i\sin\Delta_5''') \times \left|\mathrm{integ}_6'''\right|(\cos\Delta_6''' + i\sin\Delta_6''') \qquad (5.60)$$

✓ معالجة Part2 :

$$\mathrm{Part2} = \frac{3}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\vec{r}_1)g(\vec{r}_2)\frac{r_2^2}{r_1^3}\cos^2\alpha\, d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 \qquad (5.61)$$

$$\cos^2\alpha = \left[\sin\theta_1\cos\phi_1\sin\theta_2\cos\phi_2 + \sin\theta_1\sin\phi_1\sin\theta_2\sin\phi_2 + \cos\theta_1\cos\theta_2\right]^2$$
$$= f(\theta_1,\theta_2,\phi_1,\phi_2) \qquad (5.62)$$

و عليه يكون:

$$\frac{2}{3}\mathrm{Part2} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\vec{r}_1)g(\vec{r}_2)\frac{r_2^2}{r_1^3}\cos^2\alpha\, d\vec{r}_1 d\vec{r}_2$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\vec{r}_1)g(\vec{r}_2)\frac{r_2^2}{r_1^3}\sin^2\theta_1\cos^2\varphi_1\sin^2\theta_2\cos^2\varphi_2\, d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 +$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\vec{r}_1)g(\vec{r}_2)\frac{r_2^2}{r_1^3}\sin^2\theta_1\sin^2\varphi_1\sin^2\theta_2\sin^2\varphi_2\, d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 +$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\vec{r}_1)g(\vec{r}_2)\frac{r_2^2}{r_1^3}\cos^2\theta_1\cos^2\theta_2\ d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 +$$

$$2\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\vec{r}_1)g(\vec{r}_2)\frac{r_2^2}{r_1^3}\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\cos\varphi_1\sin\varphi_1\cos\varphi_2\sin\varphi_2\, d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 +$$

$$2\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\vec{r}_1)g(\vec{r}_2)\frac{r_2^2}{r_1^3}\sin\theta_1\cos\theta_1\cos\varphi_1\sin\theta_2\cos\theta_2\cos\varphi_2\, d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 +$$

$$2\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\vec{r}_1)g(\vec{r}_2)\frac{r_2^2}{r_1^3}\sin\theta_1\cos\theta_1\sin\varphi_1\sin\theta_2\cos\theta_2\sin\varphi_2\, d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 \qquad (5.63)$$

بطريقة مشابهة لما سبق، و بعد معالجة كل جزء على حِدَةٍ باستخدام التكامل بالتجزئة و العلاقة 3.937 من معجم I. S. Gradshteyn [130] فإن:

$$\frac{2}{3}\text{Part2} = 0+0+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\vec{r}_1)g(\vec{r}_2)\frac{r_2^2}{r_1^3}\cos^2\theta_1\cos^2\theta_2\, d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 + 0+0+0 \qquad (5.64)$$

إذاً:

$$\frac{2}{3}\text{Part2} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{r_1^3}g(\vec{r}_1)\cos^2\theta_1 d\vec{r}_1 \int_{-\infty}^{+\infty} r_2^2 g(\vec{r}_2)\cos^2\theta_2 d\vec{r}_2 = \text{int}\,eg_7''' \times \text{int}\,eg_8''' \qquad (5.65)$$

حيث:

$$\text{int}\,eg_7''' = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{r^3}g(\vec{r})\cos^2\theta d\vec{r}$$

$$= \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi}\frac{1}{r}\sin\theta\cos^2\theta\, d\phi d\theta dr\, e^{-\frac{U}{KT}+iA(u,r)+iB(u,r)\cos^2\theta+\sqrt{i}(k\cos\theta+l\cos\phi+m\sin\phi)} \qquad (5.66)$$

بالمثل يكون:

$$Real(integ_7''') = 2\pi \int_{r=0}^{R} \frac{1}{r} e^{-\frac{U}{KT}} \cos A\, dr \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta \cos^2\theta\, e^{\frac{k}{\sqrt{2}}\cos\theta} ber(\beta)\cos(BBB)d\theta$$

$$- 2\pi \int_{r=0}^{R} \frac{1}{r} e^{-\frac{U}{KT}} \sin A\, dr \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta \cos^2\theta\, e^{\frac{k}{\sqrt{2}}\cos\theta} ber(\beta)\sin(BBB)d\theta \quad (5.67)$$

$$Imag(integ_7''') = 2\pi \int_{r=0}^{R} \frac{1}{r} e^{-\frac{U}{KT}} \sin A\, dr \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta \cos^2\theta\, e^{\frac{k}{\sqrt{2}}\cos\theta} ber(\beta)\cos(BBB)d\theta$$

$$+ 2\pi \int_{r=0}^{R} \frac{1}{r} e^{-\frac{U}{KT}} \cos A\, dr \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta \cos^2\theta\, e^{\frac{k}{\sqrt{2}}\cos\theta} ber(\beta)\sin(BBB)d\theta \quad (5.68)$$

و بطريقة مشابهة:

$$integ_8''' = \int_{-\infty}^{+\infty} r_2^2 g(\vec{r}_2)\cos^2\theta d\vec{r}_2 \quad (5.69)$$

بعد إجراء التكامل نحصل على:

$$Real(integ_8''') = 2\pi \int_{r=0}^{R} r^4 e^{-\frac{U}{KT}} \cos A\, dr \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta \cos^2\theta\, e^{\frac{k}{\sqrt{2}}\cos\theta} ber(\beta)\cos(BBB)d\theta$$

$$- 2\pi \int_{r=0}^{R} r^4 e^{-\frac{U}{KT}} \sin A\, dr \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta \cos^2\theta e^{\frac{k}{\sqrt{2}}\cos\theta} ber(\beta)\sin(BBB)d\theta \quad (5.70)$$

$$Imag(integ_8''') = 2\pi \int_{r=0}^{R} r^4 e^{-\frac{U}{KT}} \sin A\, dr \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta \cos^2\theta\, e^{\frac{k}{\sqrt{2}}\cos\theta} ber(\beta)\cos(BBB)d\theta$$

$$+ 2\pi \int_{r=0}^{R} r^4 e^{-\frac{U}{KT}} \cos A\, dr \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta \cos^2\theta\, e^{\frac{k}{\sqrt{2}}\cos\theta} ber(\beta)\sin(BBB)d\theta \quad (5.71)$$

و منه:

$$Part2 = \frac{3}{2} integ_7''' \times integ_8'''$$

$$= \frac{3}{2} \left| integ_7''' \right| (\cos\Delta_7''' + i\sin\Delta_7''') \times \left| integ_8''' \right| (\cos\Delta_8''' + i\sin\Delta_8''') \quad (5.72)$$

إذاً:

$$\mathbb{N}_1''' = \text{Part1} + \text{Part2}$$

$$= -\frac{1}{2}\left|integ_5'''\right|(\cos\Delta_5''' + i\sin\Delta_5''') \times \left|integ_6'''\right|(\cos\Delta_6''' + i\sin\Delta_6''') +$$

$$\frac{3}{2}\left|integ_7'''\right|(\cos\Delta_7''' + i\sin\Delta_7''') \times \left|integ_8'''\right|(\cos\Delta_8''' + i\sin\Delta_8''') \qquad (5.73)$$

بالرجوع للعلاقة (5.26) يكون :

$$\mathbb{N}_1 = -\beta q^2 \frac{N(N-1)}{2}\left\{\mathbb{N}_1' + \mathbb{N}_1'' + \mathbb{N}_1'''\right\}$$

$$= -\beta q^2 \frac{N(N-1)}{2}\left\{\begin{array}{l}\left|integ_1'\right|(\cos\Delta_1' + i\sin\Delta_1') \times \left|integ_2'\right|(\cos\Delta_2' + i\sin\Delta_2') + \\ \left|integ_3''\right|(\cos\Delta_3'' + i\sin\Delta_3'') \times \left|integ_4''\right|(\cos\Delta_4'' + i\sin\Delta_4'') \\ -\frac{1}{2}\left|integ_5'''\right|(\cos\Delta_5''' + i\sin\Delta_5''') \times \left|integ_6'''\right|(\cos\Delta_6''' + i\sin\Delta_6''') + \\ \frac{3}{2}\left|integ_7'''\right|(\cos\Delta_7''' + i\sin\Delta_7''') \times \left|integ_8'''\right|(\cos\Delta_8''' + i\sin\Delta_8''')\end{array}\right\}$$

(5.74)

نعوض عن $\mathbb{N}_1$ في عبارة $\mathbb{N}$ الموضحة في المعادلة (5.19).

و بتحديد قيمة $\mathbb{N}$ يمكن تحديد قيمة Ψ الموصوفة في المعادلة (5.15).

و من ثَمَّ نحصل على العبارة النهائية لـ: $P(f,\varepsilon)$ المشار إليها في العلاقة (5.9).

الخلاصـة العامَّـــة

كخلاصة يمكننا القول أننا تمكنّا من حساب دوال توزيع المشتقات الفضائية للحقول الكهربائية الموضعية الأيونية في البلازما باستخدام نماذج سابقة، و طرق حسابٍ مبنية على أساس مقاربات إحصائية و تقريبات فيزيائية و رياضية.

مهدْنا لموضوعنا بتقديم معارف عامة عن البلازما، بها بعض مفاهيم فيزياء البلازما، و بعض مقاديرها و معاملاتها المهمة و خصائصها.

تلوْنا ذلك بالحديث عن التوزيعات في فيزياء الإحصاء، ثم خصصنا الكلام عن دور دوال توزيع الحقول الكهربائية الموضعية في أطياف البلازما، كما أسهبنا في وصف أهمِّ النماذج المقترحة لمسائل البلازما.

بعد ذلك تناولْنا حساب دوال توزيعات مشتقات الحقول باستخدام مقاربة إحصائية، دعّمنا فيه الحساب الذي أنجزناه سابقا عند تحضير مذكرة الماجستير، و ذلك باستخدام مقاربة إحصائية مبْنِيَّةٍ على أساس التكافؤ بين بعض المقادير. إن هذه المقاربة قادت إلى نتائج قابلة للمقارنة و المناقشة، و لقد نُشِرَت شهرَ مارس 2013 في مقال مستقل عن المقال الذي شكَّل لُبَّ هذه الأطروحة، و ذلك في مجلة "Journal of Plasma Physics"، و هي من منشورات جامعة كمبريدج بالمملكة المتحدة.

واصلنا حساب دوال توزيعات مشتقات الحقول باستخدام الحساب المباشر، و دون تقريبات، سوى تلك المرتبطة بنموذج الجسيمات المستقلة. لقد شكّلَ هذا العملُ لُبَّ هذه الأطروحة؛ فلقد بَسَطْنا محتوى المقال العلمي الذي نشرناه شهرَ أكتوبر 2012 في مجلة

"Contributions to Plasma Physics"، و هي أيضا من منشورات جامعة كمبريدج. لقد تضمَّن ذلك حساب دالة توزيع المشتقة الفضائية الموازية للحقل الكهربائي الموضعي، باستخدام نموذج الجسيمات المستقلة، حيث لا يؤخذ بعين الاعتبار إلا التفاعلات المركزية بين الأيون المشع و بقية مكونات البلازما، فتناولنا كلَّ التفاصيل، من تقريبات حسابية و استخدام للدوال الخاصة، الشهيرة و غير الشهيرة، و كذا السلاسل و خصائصها. لقد كُلِّل كل ذلك بالصيغة النهائية لدالة التوزيع، مرفقةً بالتمثيلات البيانية لها، كما استنبطنا من ذلك بعض خصائص هذه الدوال؛ إذْ تبيّن لنا أن دوال التوزيع التي نقوم بحسابها تعتمد على احتمال وجود الحقل أكثر ممّا تعتمد على الحقل نفسه، وهي نتيجة مهمة جدا، و لعلّها غير مسبوقة.

في نهاية أطروحتنا هذه قدّمنا تفصيلا لخطوات حساب دوال توزيعات المشتقات الفضائية للحقول بأخذ كل التفاعلات بعين الاعتبار، و اعتبارها تخضع كلُّها لجهد ديباي.

(ملحق حساب $\mathbb{Z}$)

يمكن تحويل $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z}=\int d\vec{r}\, e^{-\beta U_D(r)+iu\frac{\partial E_{Djz}}{\partial z}-2v_1\sqrt{i\omega}E_{Dx}-2v_2\sqrt{i\omega}E_{Dy}-2v_3\sqrt{i\omega}E_{Dz}} \qquad (A.1)$$

إلى الإحداثيات الكروية:

$$\mathbb{Z}=\int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi} r^2\sin\theta\, d\theta d\varphi dr\, e^{-\beta U_D(r)+iu\frac{q}{r^3}(1+\frac{r}{\lambda})e^{-r/\lambda}}\times e^{-iu\frac{q}{r^3}(3+\frac{3r}{\lambda}+\frac{r^2}{\lambda^2})\cos^2\theta e^{-r/\lambda}}\times$$

$$e^{-2\sqrt{i\omega}E_D(r)v_1\sin\theta\cos\varphi}\times e^{-2\sqrt{i\omega}E_D(r)v_2\sin\theta\sin\varphi}\times$$

$$e^{-2\sqrt{i\omega}E_D(r)v_3\cos\theta} \qquad (A.2)$$

$$=\int_0^R r^2 e^{-\beta U_D(r)+iu\frac{q}{r^3}(1+\frac{r}{\lambda})e^{-r/\lambda}}dr\int_0^\pi e^{-iu\frac{q}{r^3}(3+\frac{3r}{\lambda}+\frac{r^2}{\lambda^2})\cos^2\theta e^{-r/\lambda}}e^{-2\sqrt{i\omega}E_D(r)v_3\cos\theta}\times$$

$$\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi} e^{-2\sqrt{i\omega}E_D(r)v_1\sin\theta\cos\varphi-2\sqrt{i\omega}E_D(r)v_2\sin\theta\sin\varphi}d\varphi \qquad (A.3)$$

حيث: $E_D(r)=\frac{q}{r^2}(1+\frac{r}{\lambda})e^{-r/\lambda}$; $U_D(r)=\frac{q^2}{r}e^{-r/\lambda}$: $q=Z_p e$

$E_{Dx}=E_D(r)\sin\theta\cos\varphi$; $E_{Dy}=E_D(r)\sin\theta\sin\varphi$; $E_{Dz}=E_D(r)\cos\theta$;

$$\frac{\partial E_{Dz}}{\partial z}=\frac{q}{r^3}\left[\left(1+\frac{r}{\lambda}\right)-\left(3+\frac{3r}{\lambda}+\frac{r^2}{\lambda^2}\right)\cos^2\theta\right]e^{-\frac{r}{\lambda}} \qquad (A.4)$$

لتبسيط تمثيل $\mathbb{Z}$ سنعتبر:

$$A(u,r)=u\frac{q}{r^3}(1+\frac{r}{\lambda})e^{-\frac{r}{\lambda}}\ ;\ B(u,r)=-u\frac{q}{r^3}(3+\frac{3r}{\lambda}+\frac{r^2}{\lambda^2})e^{-\frac{r}{\lambda}}\ ;$$

$$K(\omega,r,v_3)=-2\sqrt{i\omega}E_D(r)v_3=\sqrt{i}k \quad : k=-2\sqrt{\omega}E_D(r)v_3$$

$$L(\omega,r,v_1,\theta)=-2\sqrt{i\omega}E_D(r)v_1\sin\theta=\sqrt{i}\ell \quad : \ell=-2\sqrt{\omega}E_D(r)v_1\sin\theta$$

$$M(\omega,r,v_2,\theta)=-2\sqrt{i\omega}E_D(r)v_2\sin\theta=\sqrt{i}m \quad : m=-2\sqrt{\omega}E_D(r)v_2\sin\theta$$

و عليه يمكن كتابة $\mathbb{Z}$ كما يلي:

$$\mathbb{Z} = \int_0^R r^2 e^{-\beta U_D(r)+iA(u,r)} dr \int_0^\pi \sin\theta\, e^{iB(u,r)\cos^2\theta+\sqrt{i}k\cos\theta} d\theta \int_0^{2\pi} e^{\sqrt{i}\ell\cos\varphi+\sqrt{i}m\sin\varphi} d\varphi$$

$$= \int_0^R r^2 e^{-\beta U_D(r)+iA(u,r)} dr \int_0^\pi \Phi(\theta)\sin\theta\, e^{iB(u,r)\cos^2\theta+\sqrt{i}k\cos\theta} d\theta \qquad \text{(A.5)}$$

سنبدأ الحساب بالتكامل على φ :

$$\Phi(\theta) = \int_0^{2\pi} e^{\sqrt{i}\ell\cos\varphi+\sqrt{i}m\sin\varphi} d\varphi = \int_0^{2\pi} e^{\frac{1+i}{\sqrt{2}}\ell\cos\varphi+\frac{1+i}{\sqrt{2}}m\sin\varphi} d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{\frac{\ell}{\sqrt{2}}\cos\varphi+\frac{m}{\sqrt{2}}\sin\varphi+i(\frac{\ell}{\sqrt{2}}\cos\varphi+\frac{m}{\sqrt{2}}\sin\varphi)} d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{\frac{\ell}{\sqrt{2}}\cos\varphi+\frac{m}{\sqrt{2}}\sin\varphi}\left[\cos(\frac{\ell}{\sqrt{2}}\cos\varphi+\frac{m}{\sqrt{2}}\sin\varphi)+i\sin(\frac{\ell}{\sqrt{2}}\cos\varphi+\frac{m}{\sqrt{2}}\sin\varphi)\right] d\varphi$$

$$= \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{\frac{\ell}{\sqrt{2}}\cos\varphi+\frac{m}{\sqrt{2}}\sin\varphi} \cos(\frac{\ell}{\sqrt{2}}\cos\varphi+\frac{m}{\sqrt{2}}\sin\varphi) d\varphi}_{\text{part I}} +$$

$$\underbrace{i\int_0^{R} e^{\frac{\ell}{\sqrt{2}}\cos\varphi+\frac{m}{\sqrt{2}}\sin\varphi} \sin(\frac{\ell}{\sqrt{2}}\cos\varphi+\frac{m}{\sqrt{2}}\sin\varphi) d\varphi}_{\text{part II}} \qquad \text{(A.6)}$$

باستخدام الصيغتين: 3.937 1 و 3.937 2 من معجم I. S. Gradshteyn [130] نجد أن:

$\text{part II} = 0$ و أن:

$$\text{part I} = \pi\left\{I_0\left(\sqrt{-i4\omega E_D^2\sin^2\theta(v_1^2+v_2^2)}\right)+I_0\left(\sqrt{i4\omega E_D^2\sin^2\theta(v_1^2+v_2^2)}\right)\right\}$$

$$= \pi\left\{I_0\left(\sqrt{i}\sqrt{-4\omega E_D^2\sin^2\theta(v_1^2+v_2^2)}\right)+I_0\left(\sqrt{i}\sqrt{4\omega E_D^2\sin^2\theta(v_1^2+v_2^2)}\right)\right\}$$

$$= \pi\left\{I_0\left(\sqrt{i}\, i\sqrt{4\omega E_D^2\sin^2\theta(v_1^2+v_2^2)}\right)+I_0\left(\sqrt{i}\sqrt{4\omega E_D^2\sin^2\theta(v_1^2+v_2^2)}\right)\right\}$$

$$= \pi\left\{I_0\left(\sqrt{i}\,\alpha\right)+I_0\left(\sqrt{i}\gamma\right)\right\} \qquad \text{(A.7)}$$

حيث $I_0(..)$ دالة بسل من الصنف الأول و الرتبة الصفرية، و

$$\alpha(r,\omega,\theta)=i\sqrt{4\omega E_D^2\sin^2\theta(v_1^2+v_2^2)}=i\gamma(r,\omega,\theta) \qquad (A.8)$$

إذا التكامل على φ سيؤول إلى:

$$\Phi(\theta)=\pi\left\{I_0(\alpha\sqrt{i})+I_0(\gamma\sqrt{i})\right\}=\pi\left\{I_0(i\gamma\sqrt{i})+I_0(\gamma\sqrt{i})\right\}=2\pi\,ber(\gamma) \qquad (A.9)$$

وفقا للصيغة 9.6.10 من معجم M. Abramowitz **[131]** فإن:

إذًا المعادلة (A.5) تصبح:

$$\mathbb{Z}=2\pi\int_0^R r^2\,e^{-\beta U_D(r)+iA(u,r)}dr\int_0^{\pi}\sin\theta\,e^{iB(u,r)\cos^2\theta+\sqrt{i}k\cos\theta}\,ber(\gamma)\,d\theta \qquad (A.10)$$

حيث $ber(\gamma)$ دالة خاصة في θ.

سنُعْنَى الآن بالتكامل على θ:

$$\Theta(r)=\int_0^{\pi}\sin\theta\,e^{iB(u,r)\cos^2\theta+\sqrt{i}k\cos\theta}\,ber(\gamma)\,d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}\sin\theta\,e^{iB(u,r)\cos^2\theta+\frac{1+i}{\sqrt{2}}k\cos\theta}\,ber(\gamma)\,d\theta \qquad (A.11)$$

حيث $\sqrt{i}=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$

إذا ما اعتبرنا $B(u,r)\cos^2\theta=BB(u,r,\theta)$ فإن التكامل $\Theta(r)$ يصبح:

$$\Theta(r)=\int_0^{\pi}\sin\theta\,e^{i\left(BB(u,r,\theta)+\frac{k(r,\omega,v_3)}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)}e^{\frac{k(r,\omega,v_3)}{\sqrt{2}}\cos\theta}\,ber(\gamma)\,d\theta \qquad (A.12)$$

مرة أخرى، إذا ما اعتبرنا $BB(u,r,\theta)+\dfrac{k(r,\omega,v_3)}{\sqrt{2}}\cos\theta=BBB(u,r,\theta,\omega,v_3)$ فإن:

$$\Theta(r)=\int_0^{\pi}\sin\theta\,e^{iBBB(u,r,\theta,\omega,v_3)}e^{\frac{k(r,\omega,v_3)}{\sqrt{2}}\cos\theta}\,ber(\gamma)\,d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}\sin\theta\left[\cos BBB(u,r,\theta,\omega,v_3)_0+i\sin BBB(u,r,\theta,\omega,v_3)\right]e^{\frac{k(r,\omega,v_3)}{\sqrt{2}}\cos\theta}\times ber(\gamma)\,d\theta \qquad (A.13)$$

إذًا:

$$\mathbb{Z} = 2\pi\int_0^R r^2\, e^{-\beta U_D(r)+iA(u,r)}\Theta(r)\, dr$$

$$= 2\pi\int_0^R r^2\, e^{-\beta U_D(r)}\left[\cos A(u,r) + i\sin A(u,r)\right]\Theta(r)\, dr$$

$$= \mathrm{Re}(\mathbb{Z}) + i\,\mathrm{Im}(\mathbb{Z})$$

$$= 2\pi\left\{\int_0^R r^2\, e^{-\beta U_D(r)}\cos A(u,r)\int_0^\pi \sin\theta\cos\ BBB(u,r,\theta,\omega,v_3)\ e^{\frac{k(r,\omega,v_3)}{\sqrt{2}}\cos\theta}\ ber(\gamma)\,d\theta\, dr\right.$$

$$\left. - \int_0^R r^2\, e^{-\beta U_D(r)}\sin A(u,r)\int_0^\pi \sin\theta\sin\ BBB(u,r,\theta,\omega,v_3)\ e^{\frac{k(r,\omega,v_3)}{\sqrt{2}}\cos\theta}\ ber(\gamma)\,d\theta\, dr\right\}$$

$$+ 2\pi i\left\{\int_0^R r^2\, e^{-\beta U_D(r)}\cos A(u,r)\int_0^\pi \sin\theta\sin\ BBB(u,r,\theta,\omega,v_3)\ e^{\frac{k(r,\omega,v_3)}{\sqrt{2}}\cos\theta}\ ber(\gamma)\,d\theta\, dr\right.$$

$$\left. + \int_0^R r^2\, e^{-\beta U_D(r)}\sin A(u,r)\int_0^\pi \sin\theta\cos\ BBB(u,r,\theta,\omega,v_3)\ e^{\frac{k(r,\omega,v_3)}{\sqrt{2}}\cos\theta}\ ber(\gamma)\,d\theta\, dr\right\}$$

(A.14)

$\mathbb{Z}$ يمكن أن تكتب كما يلي :

$$\mathbb{Z} = |\mathbb{Z}|(\cos\Delta + i\sin\Delta) = |\mathbb{Z}|e^{i\Delta} \qquad \textbf{(A.15)}$$

حيث $|\mathbb{Z}|$ طويلة $\mathbb{Z}$ و Δ زاويته.

$$\therefore\quad \mathbb{Z}^N = |\mathbb{Z}|^N e^{iN\Delta} = |\mathbb{Z}|^N\left[\cos(N\Delta) + i\sin(N\Delta)\right] \qquad \textbf{(A.16)}$$

المراجع

[1] H. R. GRIEM, ''Plasma Spectroscopy'', McGraw Hill (1964)

[2] H.R. Griem, "Spectral Line Broadening by Plasmas", New York, Academic Press (1974)

[3] H. R. GRIEM, ''Principles of Plasma Spectroscopy'', Cambridge U. Press (1997)

[4] M. Baranger, Phys. Rev. **112**, 855 (1958)

[5] M. Baranger, Phys. Rev. **111**, 494 (1958)

[6] A.C. Kolb and H.R. Griem, Phys. Rev. **111**, 514 (1958)

[7] Olivier VALLÉE, "Rayonnement des plasmas et profil des raies spectrales", LASEP (Laboratoire d'Analyse Spectroscopique et d'Énergétique des Plasmas), UPRES EA 3269, Faculté des Sciences – Université d'Orléans (2002)

[8] W. Filkenburg, Z. Phys. **70**, 375 (1931)

[9] C. Stehlé, D. Gilles, and A.V. Demura, Eur. Phys. J. **D 12**, 355-367 (2000)

[10] D.E. Kelleher and W.L. Wiese, Phys. Rev. Lett. **31**, 1431 (1973)

[11] W.L. Wiese, D.E. Kelleher and V. Helbig, Phys. Rev. A 11, 1854 (1975)

[12] A.V. Demura, G.V. Demchenko and D. Nikolic, Eur. Phys. J. **D 46**, 111-127 (2008)

[13] J. Halenka and W. Olchawa, Eur. Phys. J. **D 42**, 425-433 (2007)

[14] G.V. Sholin, Opt. Spectrosc. (USSR) 26, 275 (1969)

[15] J. Halenka, Z. Phys. **D 16**, 1 (1990)

[16] V. Demura and G. V. Sholin, J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer, **15**, 881 (1975)

[17] R.F. Joyce, L.A. Woltz, C.F. Hooper, Phys. Rev. **A 35**, 2228 (1987)

[18] K. Chenini, F. Khelfaoui, S. Guerricha, S. Chihi, A. Ouahhab, and M.T. Meftah, Contrib. Plasma Phys. **51**, No. 1, 34-43 (2011)

[19] قريشة سليمة، مذكرة ماجستير في فيزياء البلازما، جامعة ورقلة (2008)

[20] S. Guerricha et S. Chihi, AST, Vol. **5**, N° 1, pp. 35-41 (2013) (langue arabe)

[21] S. Guerricha, S. Chihi and M.T. Meftah; Spectral Line Shapes, Vol. **15**, edited by M.A. Gigosos and M.A Gonzalez, AIP conference Proceeding 1058, AIP, N.Y., pp. 72-74 (2008)

[22] S. Guerricha, S. Chihi and M. T. Meftah ; AFSSI, Vol. **1** n°3; pp 32-42 (2009) (langue arabe)

[23] عسكري سهيلة، مذكرة ماجستير في فيزياء البلازما، جامعة الوادي (2011)

[24] بكوش عبد الله، مذكرة ماجستير في فيزياء البلازما، جامعة الوادي (2011)

[25] S. Guerricha, S. Chihi and M. T. Meftah, Contrib. Plasma Phys. **52**, No. 9, 776-783 (2012)

[26] S. Chihi and S. Guerricha, J. Plasma Phys. DOI: 10.1017/S002237781300038X (2013)

[27] W. Crookes, On a Fourth State of Matter, Proceedings of the Royal Society of

London, Vol. **30**, pp. 469-472 (1879 - 1880)
[28] J. J. Thomson, Philosophical Magazine, **44**, 293 (1897)
[29] I. Langmuir, "Oscillations in ionized gases '', Proc. Nat. Acad. Sci. U.S., vol. **14**, p. 628 (1928)
[30] D. A. Gurnett and A. Bhattacharjee, "Introduction to Plasma Physics: with Space and Laboratory Applications", Cambridge University, UK (2005)
[31] شيحي إسماعيل، أطروحة دكتوراه دولة في الفيزياء، جامعة قسنطينة (2005)
[32] د. علاء الدين عبد الله النعيمي و د. قاسم محمود علي و د. إبراهيم محمد علي الجوادي، "الفيزياء التطبيقية الحديثة"، الصفحة 591 و ما يليها، دار الجيل للنشر و الطباعة و التوزيع، بيروت، لبنان، الطبعة الثانية (2005)
[33] Dwight R. Nicholson, ''introduction to plasma theory'', University of Iowa, John Wiley & Sons, Inc. U.S (1983)
[34] R. O. Dendy; "Plasma Dynamics" ; Oxford Science Publications ; Clarendon Press (1990)
[35] Daniel Hastings and Henry Garrett; " Spacecraft-Environment Interactions", Cambridge University Press, UK (2000)
[36] Paul M. Bellan, ''Fundamentals of Plasma Physics'', Cambridge University Press; US(2006)
[37] ريتز–ميلفورد، ترجمة: يحي عبد الحميد الحاج علي و الدكتور رحمن رستم عبد الله، "أساسيات النظرية الكهرومغناطيسية"، وزارة التعليم العالي و البحث العلمي، جامعة الموصل، العراق (1988)
[38] H. Alfvén, "Cosmical Electrodynamics", Oxford University Press (1950)
[39] L. Tonks and I. Langmuir, Physical Review, **33**, 195 (1929)
[40] Jean-Loup Delcroix et Abraham Bers, "Physique des plasmas", InterEditions/ CNRS Editions (1994)
[41] A. L. Peratt, "Advances in Numerical Modeling of Astrophysical and Space Plasmas" , AA (Los Alamos National Laboratory), KLUWER, SPRINGER (1996)
[42] Peter A.STURROCK, "Plasma Physics", CAMBRIDGE University Press (1994)
[43] Khelfaoui Fethi, Thèse de doctorat, Université de Provence, France (1991)
[44] Pierre FAUCHAIS, "Gaz ionisés et plasmas", SPCTS (Science des procédés céramiques et des traitements de surface), CNRS UMR 6638, Université de Limoges-Faculté des sciences (2000)
[45] David Parker Kilcrease, PhD Thesis, University of Florida (1991)
[46] Michael S. Murillo and Jon C. Weisheit, Physics Reports, **302**, 1-65 (1998)
[47] Richard Fitzpatrick, "Introduction to Plasma Physics", The Institute for Fusion Studies, The University of Texas at Austin, Spring 1998
[48] J. Ortner and M.Yu. Romanovsky, Physics Letters, **A 285**, pp. 165–172 (2001)
[49] K. G. Müller, J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer, Vol. **5**, pp. 403-423 (1965)
[50] D. LAMBERT, OPTICS COMMUNICATIONS, Vol. **34**, 2, pp. 209-212 (1980)
[51] J. W. DUFTY, J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer, Vol. **44**, 1, pp. 115-122 (1990)
[52] J. Halenka, Z. Phys. D 16, 1 (1990)
[53] A. Könies and S. Günter, J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer, Vol. **52**, 6, pp. 825-830 (1994)
[54] S. Chandrasekhar and J. von Neumann, Astrophys. J. **97**, 1 (1943)
[55] J. W. Dufty, "Strongly Coupled Plasma Physics", edited by F. J. Rogers and H. E. DeWitt, Plenum, New York (1987)
[56] D. P. Kilcrease, R. C. Mancini and C. F. Hooper, Jr., Phys. Rev. E, Vol. 48, Num. 5, 3901 (1993)
[57] D. Lambert and M. Louis-Jacquet, Journal de Physique **46**, 3, 379 (1985)
[58] R. L. Joyce, L. A. Woltz and C. F. Hooper, Jr., Phys. Rev. **A 35**, 2228 (1987)
[59] I. M. Gainsinsky and E. A. Oks, J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer, **41**, 235 (1989)

[60] J. Halenka, J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer, **39**, 347 (1988)
[61] B. d'état and H. Nguyen, Spectral Line Shapes, Vol. 3, edited by F. Rostas, Gruter, Berlin (1985)
[62] D. P. Kilcrease and M. S. Murillo, J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer, Vol. **65**, 343 (2000)
[63] M. S. Murillo, D. P. Kilcrease and L. A. Collins, Phys. Rev. E, Vol. **55**, Num. 5, 6289 (1997)
[64] D. P. Kilcrease, M. S. Murillo and L. A. Collins, J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer, Vol. **58**, No. 4-6, pp. 677-686, 1997
[65] Zaven A. Karian and Edward J. Dudewicz, "Fitting Statistical Distributions: The Generalized Lambda Distribution and Generalized Bootstrap Methods", Chapman & Hall/CRC press (2000)
[66] Vladimir V. Uchaikin and Vladimir M. Zolotarev, "CHANCE and STABILITY Stable Distributions and their Applications", VSP (1999)
[67] S. Chandrasekhar and J. von Neuman, "The statistics of the gravitational field arising from a random distribution of stars. I. The speed of fluctuations," The Astrophysical Journal, vol. **95**, pp. 489–531 (1942)
[68] S. Chandrasekhar and J. von Neuman, "The statistics of the gravitational field arising from a randomdistribution of stars II," The Astrophysical Journal, vol. **97**, pp. 1–27 (1943)
[69] S. Chandrasekhar, "Stochastic problems in physics and astronomy", Reviews of Modern Physics, vol. **15**, no. 1, pp. 1–89 (1943)
[70] I. I. Sobelman, Introduction to Atomic Spectra, Pergamon Press, Oxford, UK (1972)
[71] V. D. Shafranov, "Electromagnetic waves in plasmas," in Reviews on Plasma Physics, M. Gosatomizdat, Ed., vol. **3**, pp. 3–140 (1963)
[72] N. Rostoker, "Fluctuations of a plasma," Nuclear Fusion, vol. **1**, pp. 101–120 (1961)
[73] A. G. Sitenko, ''Electromagnetic Fluctuations in Plasmas'', KhGU, Khar'kov, Ukraine (1965)
[74] A. I. Akhiezer, ''Plasma Electrodynamics'', Nauka, Moscow, Russia (1974)
[75] A. Isihara, Ed., ''Statistical Physics'', Academic Press, New York, NY, USA (1971)
[76] J.-P. Hansen and I. R. McDonald, ''Theory of Simple Liquids'', Academic Press, New York, NY, USA (1976)
[77] M. Baus and J.-P. Hansen, "Statistical mechanics of simple coulomb systems", Physics Reports, vol. **59**, no. 1, pp. 1–94 (1980)
[78] Ph. A. Martin, "Sum rules in charged fluids", Reviews of Modern Physics, vol. **60**, no. 4, pp. 1075–1127 (1988)
[79] A. B. Schmidt, ''Statistical Thermodynamics of Classical Plasmas'', Energoizdat, Moscow, Russia (1991)
[80] G. A. Martynov, ''Fundamental Theory of Liquids'', Adam Hilger, New York, NY, USA (1992)
[81] H.R. Griem, Contrib. Plasma. Phys., **40**, 46 (2000)
[82] H.R. Griem, Contrib. Plasma. Phys., 41, 223 (2001)
[83] H. R. Griem, "Principles of Plasma Spectroscopy", Cambridge University Press (1997)
[84] A. Calisti, L.A. Bureyeva, V.S. Lisitsa, D. Shuvaev and B. Talin, Eur. Phys. J. D **42**, 387–392 (2007)
[85] P. Debye and E. Hückel, Physik. Z. **24**, 185 (1923)
[86] C. F. Hooper, Jr., Phys. Rev. **165**, 215 (1968)
[87] J. Holtsmark, Ann. Phys. (Leipzig) **58**, 577 (1919)
[88] A. Y. Potekhin, G. Chabrier and D. Gilles, Phys. Rev. E **65**, 036412 (2002)

[89] J. E. Mayer and M. G. Mayer, ''Statistical Mechanics'', Wiley, New york (1940)
[90] E. E. Salpeter, Ann. Phys. (N. Y.) **5**, 183 (1958)
[91] L. A. Woltz, C. A. Iglesias and C. F. Hooper, Jr. , J. Quant. Spectrosc. Transfer, Vol. **27**, No. 3, pp. 233-242 (1982)
[92] G. Ecker, "Das Mikrofeld in Gesamtheiten mit Coulombscher Wechselwirkung", Zeitschrift für Physik, vol. **148**, no. 5, pp. 593–606 (1957)
[93] G. Ecker and K. G. Müller, "Plasmapolarisation und Trägerwechselwirkung," Zeitschrift für Physik, vol. **153**, no. 3, pp. 317–330 (1958)
[94] M. Lewis and H. Margenau, Phys. Rev. **109**, 842 (1958)
[95] M. Baranger and B. Mozer, Physical Review, Vol. **115**, Num 3, 521 (1959)
[96] B. Mozer and M. Baranger, Physical Review, Vol. **118**, Num 3, 626 (1960)
[97] H. Hoffman and O. Theimer, Astrophys. J. **127**, 477 (1958)
[98] C. F. Hooper, Jr., Phys. Rev. **149**, 77 (1966)
[99] C.A. Iglesias, J.L. Lebowitz and D. MacGowan, Phys. Rev. A **28**, 1667 (1983)
[100] H. Mayer, Los Alamos Scientific Laboratory Report No. LA-647, 1947 (unpublished)
[101] J. W. Dufty, D. Boercker, and C. Iglesias, Phys. Rev. A **31**, 1681-1686 (1985)
[102] C. A. Iglesias, H. E. DeWitt, J. L. Lebowitz, D. MacGowan, and W. B. Hubbard, Phys. Rev. A **31**, 1698 (1985)
[103] M. W. C. Dharma-wardana and F. Perrot, Phys. Rev. A **33**, Num 5, 3303 (1986)
[104] D. Gilles, '' Spectral Line Shapes'', Vol. **7**, (1993)
[105] C. A. Iglesias, Phys. Rev. A **27**, Num 5, 2705 (1983)
[106] E. L. Pollock and J. C. Weisheit, '' Spectral Line Shapes'', Vol. **3**, (1985)
[107] C.A. Iglesias, F.J. Rogers, R. Shepherd, A. Bar-Shalom, M.S. Murillo, D.P. Kilcrease, A. Calisti and R.W. Lee, J. Quant. Spectrosc. Radiat, **65**, no. 1–3, 303 (2000)
[108] I. O. Golosnoy, '' Spectral Line Shapes'', Vol. **11**, (2001)
[109] A. V. Demura, International Journal of Spectroscopy, Volume **2010**, Article ID 671073
[110] M. K. HADJ-KALI, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Polytechnique d'Alger (2004)
[111] N. LIMNIOS, "Introduction à la méthode de Monte Carlo", Université Technologique de Compiègne, France (2005)
[112] R. Stamm, "Simulation studies of the dynamics of plasma microfields", Spectral Line Shapes, K. Burnett, Ed., vol. **2**, pp. 3–29, Walter de Gruyter, Berlin, Germany (1983)
[113] R. Stamm, E. W. Smith, and B. Talin, Phys. Rev. A **30**, no. 4, 2039 (1984)
[114] B. Talin, E. Dufour, A. Calisti, et al., J. Phys. A **36**, no. 22, pp. 6049–6056 (2003)
[115] D. Gilles and A. Angelie, Annales de Physique, vol. **11**, no. 3, supplement 3, 157 (1986)
[116] D. Gilles, "Calcul de la repartition statistique du microchamp electrique dans les plasmas" Internal CEA-Report, (1997)
[117] D. Gilles, ''Méthode de Monte-Carlo en Mécanique Statistique Appliquée à la Physique des Plasmas'', Laboratoire de Physique des Gaz et des Plasmas, Université Paris XI, Lecture Notes, Orsay, France (1997)
[118] J. M. Caillol and D. Gilles, Journal of Statistical Physics, vol. **100**, no. 5-6, pp. 933–947 (2000)
[119] S. G. Brush, H. L. Sahlin, and E. Teller, *The Journal of Chemical Physics*, vol. **45**, no. 6, pp. 2102–2118 (1966)
[120] V. M. Zamalin, G. E. Norman, and V. S. Filinov, ''Monte-Carlo Method in Statistical Thermodynamics'', Nauka, Moscow, Russia (1977)
[121] P. H. Acioli, Journal of Molecular Structure, vol. **394**, no. 2-3, pp. 75–85 (1997)
[122] I. K. Kamilov, A. K. Murtazaev, and Kh. K. Aliev, Uspekhi Fizicheskikh Nauk, vol. **169**, no. 7, p. 795 (1999) (Russian)
[123] A. V. Demura, Ph.D. thesis, I.V. Kurchatov Institute of Atomic Energy,

Moscow, Russia (1976)

[124] A. V. Demura, Proceedings of the 9th International Conference on Spectral Line Shapes (ICSLS '88), Nicolas Copernicus University Press, Torun, Poland (1988)

[125] A. V. Demura and C. Stehlé, Spectral Line Shapes, Vol. **8**, D. May, J. Drummond and E. Oks, Eds., vol. **328** of AIP Conference Proceedings, pp. 177–208, American Institute of Physics, New York, NY, USA (1995)

[126] A. V. Demura, D. Gilles and C. Stehlé, J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer, **54**, no. 1-2, pp. 123–136 (1995)

[127] A. V. Demura, D. Gilles and C. Stehlé, Spectral Line Shapes, Vol. **11**, J. Seidel, Ed., vol. **559** of AIP Conference Proceedings, pp. 99–107, American Institute of Physics, New York, NY, USA (2001)

[128] A. V. Demura and C. Stehlé, Spectral Line Shapes, Vol. **11**, J. Seidel, Ed., vol. **559** of AIP Conference Proceedings, pp. 111–113, American Institute of Physics,New York,NY, USA (2001)

[129] A. V. Demura, D. Gilles and C. Stehlé, ''Strongly Coupled Coulomb Systems'', G. J. Kalman, J. M. Rommel and K. Blagoev, Eds., pp. 377–380, Plenum Press, New York, NY, USA (1998)

[130] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, "Table of integrals, series and products", sixth edition, Academic Press (1996)

[131] M. Abramowitz and I. A. Stegun, ''Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables'', National Bureau of Standards Applied Mathematics Series, Tenth Printing (December 1972)

المختـصر

لقد استخدمنا طريقتين مختلفتين لحساب دوال توزيع المشتقات الفضائية للحقل الكهربائي الموضعي الأيوني في البلازما. كلتا الطريقتين مَبْنِيَّةٌ على نموذج سابق هو نموذج الجسيمات المستقلة، حيث لا يؤخذ بعين الاعتبار إلا التفاعلات المركزية بين الأيون المشع و بقية مكونات البلازما. لقد اعتبرنا التفاعل بين الأيونات تفاعل ديباي. تستند الطريقة الأولى إلى مقاربة إحصائية. هذه المقاربة مبنية على أساس أن الأيونات المحدثة للاضطراب يمكنها أن تأخذ أي موضع داخل الحجم، و عليه فمن الممكن اعتبار هذه الأيونات متماثلةً، و مساهماتها في دوال توزيع الحقل الموضعي أو مشتقاته الفضائية متساوية أيضا، و عليه فإن طويلة محصلة الحقول $\left|\sum_i \vec{E}_i\right|$ ستؤدي الدور نفسه الذي تؤديه $N\times E(r)$ ، و كذلك فإن $\sum_i \frac{\partial E_{iz}}{\partial z}$ ستؤدي دور $N\times\frac{\partial E_z}{\partial z}$.

أمّا الطريقة الثانية فهي حساب مباشر، لا يعتبر سوى التقريبات الفيزيائية المصاحبة للنموذج المعتبر. لقد أعطت الطريقتان نتائجَ متباينةً، إلا أنها قابلة للمناقشة و المقارنة مع نتائج آخرين. إستنبطنا كذلك بعض خصائص هذه الدوال، و بدا لنا أنها متعلقة باحتمال وجود الحقل، وهي نتيجة مهمة جدا.

Résumé

Nous avons utilisé deux méthodes différentes pour calculer les fonctions de distribution des dérivées spatiales du micro-champ électrique ionique du plasma. Ces deux méthodes sont basées sur le modèle des particules indépendantes, qui ne prend en compte que les interactions entre l'ion central rayonnant et le reste des composantes ioniques du plasma. Nous avons considéré que l'interaction entre les ions est celle de Debye. La première méthode est basée sur une approche statistique qui stipule que les ions perturbateurs peuvent occuper n'importe quelle position dans le volume du système, et que ces ions peuvent donc être considérés comme identiques, et que leurs contributions à la fonction de distribution du micro-champ et de ses dérivées spatiales, sont équivalentes. C'est pourquoi le module de la résultante du micro-champ électrique $\left|\sum_i \vec{E}_i\right|$ joue le même rôle que $N\times E(r)$ et de même pour $\sum_i \frac{\partial E_{iz}}{\partial z}$ que $N\times\frac{\partial E_z}{\partial z}$. La deuxième méthode est un calcul direct basé sur des considérations physiques du modèle employé. Les deux méthodes ont donné des résultats quelque peu différents, mais discutables et comparables avec d'autres résultats se trouvant dans la littérature. Nous avons ainsi déduit certaines propriétés de ces fonctions, et il s'avère qu'elles étaient liées à la distribution du micro-champ, ce qui est un résultat très important.

Abstract

We have used two different methods to calculate the distribution functions of spatial derivatives of the ionic microfield in the plasma. Both methods are based on the previous model called the independent particles. This model is not taken into account only the central interactions. We have considered the Debye interaction. The first method is based on a statistical approach. This approach is based on the following approach: As the perturber ions can take any position in the volume, we can consider these perturbers identical, therefore, their contributions in the distribution functions of microfield or its spatial derivatives are equal, then $\left|\sum_i \vec{E}_i\right|$ plays the same role as $N\times E(r)$, and $\sum_i \frac{\partial E_{iz}}{\partial z}$ plays the same role as $N\times\frac{\partial E_z}{\partial z}$. The second method is direct calculation. It considers some physical approximations. The two methods gave different results, but they are subject to discussion and comparison with others. We have deduces some of the properties of these functions. It seemed that they are related to the probability of microfield existence, which is a very important result.