

Ministry of Higher Education and Scientific Research

Kasdi Merbah University Ouargla (UKMO)

Faculty of Mathematics and Sciences material

Department of Mathematics



THESIS

to obtain the diploma of

LMD DOCTORATE IN MATHEMATICS

Speciality : Analysis

by LEYLA SOUDANI

Theme

On Some Fractional Differential Inclusions

Represented in : 26/ 02/ 2025, before the jury composed of :

Pr. MEFLAH Mabrouk	Kasdi Merbah University, Ouargla	President
Pr. AMARA Abdelkader	Kasdi Merbah University, Ouargla	Supervisor
Dr. TELLAB Brahim	Kasdi Merbah University, Ouargla	Examiner
Dr. KOUIDRI Mohammed	Kasdi Merbah University, Ouargla	Examiner
Dr. BENKERROUCHE Amar	Ziane Achour University, Djelfa	Examiner
Dr. LOUMI Amine	Hassiba Benbouali University, Chlef	Examiner

University year :2024/2025

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Kasdi Merbah Ouargla (UKMO)

Faculté des Mathématiques et des Sciences de la matière

Département de Mathématiques



THÈSE

pour obtenir le diplôme de

DOCTORAT LMD EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse

par LEYLA SOUDANI

Thème

On Some Fractional Differential Inclusions

Soutenu publiquement le : 26/02/2025, devant le jury composé de :

Pr. MEFLAH Mabrouk	Université Kasdi Merbah, Ouargla	Président
Pr. AMARA Abdelkader	Université Kasdi Merbah, Ouargla	Directeur de thèse
Dr. TELLAB Brahim	Université Kasdi Merbah, Ouargla	Examineur
Dr. KOUIDRI Mohammed	Université Kasdi Merbah, Ouargla	Examineur
Dr. BENKERROUCHE Amar	Université Ziane Achour, Djelfa	Examineur
Dr. LOUMI Amine	Université Hassiba Benbouali, Chlef	Examineur

Année Universitaire :2024/2025

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ KASDI MERBAH - OUARGLA (U.K.M.O)
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET DES SCIENCES DE LA MATIÈRE



Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Analyse

THÈSE

Pour obtenir le diplôme de

DOCTORAT LMD

On Some Fractional Differential Inclusions

Présenté par :

SOUDANI LEYLA

Encadré par :

AMARA ABDELKADER

Année Universitaire :2024/2025

Remerciements

Je remercie "**ALLAH**" qui m'a donné la force, la volonté, la patience, la santé et le courage pour finir cette thèse.

Je tiens à remercier mon encadreur monsieur " *Amara Abdelkader*", Professeur à l'université Kasdi Merbah Ouargla pour son aide, son guidage et sa contribution pour la réalisation de ce modeste travail.

Je voudrais remercier tous les membres du jury

Pr. MEFLAH Mabrouk de l'université de Ouargla, Dr. TELLAB Brahim de l'université de Ouargla, Dr. KOUIDRI Mohammed de l'université de Ouargla, Dr. BEN-KERROUCHE Amar de l'université de Djelfa et Dr. LOUMI Amine de l'université de Chlef pour avoir accepté d'évaluer et d'examiner ce travail.

Je ne pouvais oublier de remercier tous les membres de ma famille qui m'ont toujours encouragés et soutenus.

Merci ... Merci ... Merci

Leyla SOUDANI

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à

✿ Mon cher papa " *Abdelkader* ", rahimahou allah.

✿ Ma douce mère " *Fatma* ", qui m'a beaucoup soutenue.

✿ Ma chère amie et ma chère soeur " *Professeur Nadia* " à l'université de Tissemsilt,
qui a été toujours à mon côté.

✿ Mon grand frère " *Brahim* ", qui était toujours présent.

✿ Mes chères soeurs : *Fatiha, Lwiza, Khadidja* et *Siham*.

✿ Mes chers frères : *Amar* et *Ahmed*.

✿ Mes petites princesses : *Lina Maria, Leila Milissa, Narimane, Hiba Rahmane* et
Alaa.

✿ Mes petits anges : *Haidre, Sajid* et *Ismail*.

Leyla SOUDANI

Publications

1. Leyla Soudani, Abdelkader Amara, Khaled Zennir and Junaid Ahmad, *Duality of fractional derivatives : On a hybrid and non-hybrid inclusion problem*, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, 1-21(2024).
2. Leyla Soudani and Abdelkader Amara, *On hybrid sequential fractional differential inclusion systems* (submitted).

ملخص

ندرس في هذه الأطروحة نظرية المعادلات و الاحتواءات التفاضلية الكسرية " وجود الحلول " .
على وجه الخصوص، نحن مهتمون بدراسة حلول الاحتواءات التفاضلية ذات الرتب الكسرية الهجينة المرفقة
بشروط حدية هجينة في جبر باناخ و ذلك باستعمال تقنيات النقطة الصامدة.
إضافة على ذلك، نقدم نتائج أخرى حول وجود الحل باستعمال نظريتين جديدتين حول " تطبيق متعدد
القيم ذا تقلصات $\eta - \psi$ ، $\eta -$ مقبولة " و " نقطة النهاية " لمشاكل الاحتواء التفاضلي غير الهجين ذات
الرتب الكسرية بمفهوم ريمان - ليوفيل و مفهوم كابوتو في فضاء ميري .
كلمات مفتاحية : الاحتواء التفاضلي الكسري، مشكلة هجينة، جبر باناخ، نقطة صامدة، نقطة نهاية.

Abstract

In this thesis, we study the theory of fractional differential equations and inclusions "existence of solutions". In particular, we studied solutions for fractional hybrid differential inclusions in a Banach algebra with hybrid boundary conditions. Our results are based on fixed point techniques.

In addition, we present other results of existence by using two new theorems on " the set-valued map $\eta - \psi$ -contraction, η -admissible" and "the endpoint" for non hybrid differential inclusions problems with the fractional derivative of Riemann-Liouville and of Caputo in a metric space.

Key words : fractional differential inclusion, hybrid problem, Banach algebra, fixed point, endpoint.

Résumé

Dans cette thèse, nous étudions la théorie des équations et des inclusions différentielles fractionnaires "existence des solutions ". En particulier, nous sommes intéressés à l'étude de solutions pour les inclusions différentielles hybrides fractionnaires dans une algèbre de Banach avec des conditions aux limites hybrides. Nous utilisons les techniques et les théorèmes du point fixe pour obtenir nos résultats.

De plus, nous introduisons d'autres résultats d'existence en utilisant deux nouveaux théorèmes sur "l'application multivoque $\eta - \psi$ -contraction, η -admissible " et "le point final" pour les problèmes d'inclusion différentielle non hybride selon la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et de Caputo dans un espace métrique.

Mots clés : inclusion différentielle fractionnaire, problème hybride, algèbre de Banach, point fixe, point final.

Table des matières

Publications	3
Résumé en arabe	4
Résumé en anglais	5
Résumé	6
Notations et abréviations	10
Introduction	12
1 Préliminaires	16
1.1 Quelques espaces fonctionnels	16
1.1.1 Espace de Lebesgue	16
1.1.2 Espaces des fonctions continues et absolument continues	17
1.1.3 Algèbre de Banach	18
1.2 Analyse multivoque	19
1.2.1 Notion d'application multivoque	19
1.2.2 Distance de Hausdorff	20
1.2.3 Sélection d'application multivoque	21
1.3 Notation de calcul fractionnaire	22
1.3.1 Fonction Gamma	22
1.3.2 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville	23
1.3.3 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville	24

1.3.4	Dérivée fractionnaire au sens de Caputo	25
1.4	Quelques théorèmes du point fixe	26
1.4.1	Points fixes univoques	26
1.4.2	Point fixe multivoque	28
1.4.3	Critère de compacité	28
2	Résultats d'existence pour les équations différentielles fractionnaires	29
2.1	Problème aux limites pour les équations différentielles d'ordre fractionnaire	29
2.1.1	Présentation du problème	30
2.1.2	Existence de solution	30
2.1.2.1	Premier résultat	33
2.1.2.2	Deuxième résultat	37
2.1.2.3	Troisième résultat	41
2.2	Problème aux limites pour les équations différentielles hybrides d'ordre fractionnaire	45
2.2.1	Problème intégral	46
2.2.2	Résultat d'existence	48
2.2.3	Exemple	55
3	Résolution des problèmes d'inclusion différentielle fractionnaire	56
3.1	Cas d'un problème aux limites hybride	56
3.1.1	Problème intégral	57
3.1.2	Résultat d'existence	57
3.1.3	Exemple	66
3.2	Cas d'un problème aux limites non hybride	67
3.2.1	Rappels	67
3.2.2	Problème intégral	68
3.2.3	Premier résultat d'existence	69
3.2.4	Deuxième résultat d'existence	73
4	Systèmes différentiels fractionnaires séquentiels hybrides multidimensionnels	77
4.1	Introduction	77

4.2	Présentation du problème	78
4.3	Solution intégrale	79
4.4	Résultat d'existence	82
4.5	Exemple	95
Conclusion et perspectives		100
Bibliographie		101

Notations et abréviations

On va utiliser les notations suivantes dans toute la thèse

$\mathcal{P}(X) :$	Ensemble des parties non vides de X .
$\mathcal{P}_f(X) :$	Ensemble des parties fermés de X .
$\mathcal{P}_b(X) :$	Ensemble des parties bornés de X .
$\mathcal{P}_{cp}(X) :$	Ensemble des parties compacts de X .
$\mathcal{P}_{cv}(X) :$	Ensemble des parties convexes de X .
$\mathcal{P}_{cp,cv}(X) :$	Ensemble des parties compacts et convexes de X .
$S_{F,x} :$	Ensemble des sélections de l'application F pour $x \in X$.
$\overline{\mathcal{B}}(0, r) :$	$= \{x \in C([0, T], \mathbb{R}) : \ x\ _\infty \leq r\}$ un ensemble borné dans l'espace $C([0, T], \mathbb{R})$.
$\mathcal{B}_r :$	$= \{(x_1, \dots, x_m) \in X : \ (x_1, \dots, x_m)\ _X \leq r\}$ un ensemble borné dans l'espace X .
$F : X \rightarrow \mathcal{P}(Y) :$	Fonction multivoque de X dans $\mathcal{P}(Y)$.
$Dom(F) :$	Domaine de l'application multivoque F .
$Graph(F) :$	Graphe de F .
$Im(F) :$	Image de F .
$\Gamma(z) :$	Fonction Gamma.
$\mathcal{I}^\alpha f :$	Intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ au sens de Riemann-Liouville d'une fonction f .
${}^R\mathcal{D}^\alpha f :$	Dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ au sens de Riemann-Liouville d'une fonction f .
${}^C\mathcal{D}^\alpha f :$	Dérivée fractionnaire de Caputo d'une fonction f d'ordre α .
$D = \frac{d}{dt} :$	Dérivée usuelle.
$[\alpha] :$	Partie entière de α .
$Re(z) :$	Partie réelle d'un nombre complexe z .
$I :$	Opérateur identité.
$! :$	Factorielle.

$d_X(x, A) :$	Distance entre point $x \in X$ et l'ensemble A .
$e(A, B) :$	Distance entre deux ensembles A et B .
$H(A, B) :$	Distance de Hausdorff entre l'ensemble A et l'ensemble B .
s.c.s :	Semi continue supérieurement.
p.p :	Presque partout.
i.e :	C'est-à-dire.
c-à-d :	C'est-à-dire.

Introduction

Le calcul fractionnaire est une généralisation du concept de calcul classique. C'est une théorie des intégrations et des dérivations d'ordre arbitraire réel ou même complexe. Les équations différentielles fractionnaires ont été largement utilisées ces dernières années pour modéliser de nombreux phénomènes scientifiques et techniques, notamment en médecine, en physique, en biologie, en mécanique,...etc, on peut voir les références [3, 11, 12, 13, 30].

D'autre part, l'analyse multivoque est à l'origine la partie des mathématiques qui étudie les propriétés des applications multivoques. Donc, une inclusion différentielle représente une équation différentielle ordinaire à second membre multivoque. Ces dernières années, les inclusions différentielles sont devenues plus importantes dans certains modèles mathématiques des phénomènes réels. Elles ont également trouvé des applications dans de nombreux problèmes de mécanique, de contrôle optimal,...etc.

L'étude des problèmes fractionnaires est d'actualité et une variété de méthodes sont utilisées pour les résoudre. Cependant, la théorie des points fixes est la méthode la plus courante pour démontrer l'existence des solutions car elle fournit les outils nécessaires pour obtenir des théorèmes d'existence et d'unicité de solutions de plusieurs problèmes des équations et des inclusions fractionnaires. De plus, les théorèmes du point fixe sont les outils mathématiques fondamentaux de l'analyse fonctionnelle pour étudier l'existence et l'unicité de solutions d'un problème nous utilisons ces théorèmes.

Les équations différentielles hybrides sont les perturbations quadratiques des équations différentielles non linéaires. Donc, la théorie des équations et des inclusions différentielles hybrides a été largement étudiée voir les références [4, 8, 9, 14, 16, 20, 24, 35, 39, 42, 43, 45].

Cette thèse contient quatre chapitres et elle est articulée comme suit :

Le premier chapitre est consacré aux préliminaires, définitions et théorèmes pour comprendre ce travail. Il est organisé comme suit :

- Un petit rappel sur quelques espaces fonctionnels.
- Les principaux concepts des applications multivoques et ses propriétés.
- Les notions fondamentales de calcul fractionnaire (l'intégrale et la dérivée de **Riemann-Liouville** et la dérivée de **Caputo**).
- Enfin, les différents théorèmes du point fixe.

Le deuxième chapitre est intitulé "Résultats d'existence pour les équations différentielles fractionnaires", Il est partagé en deux sections :

- Dans la première section, nous étudions l'existence de solutions pour un problème différentiel d'ordre fractionnaire de la forme

$$\begin{cases} (\lambda^C \mathcal{D}^\alpha + {}^R\mathcal{D}^\alpha)x(t) = f(t, x(t)), & 0 < t < T, 1 < \alpha \leq 2, \\ x(0) = 0, \\ \mu_1 {}^R\mathcal{D}^{\beta_1}x(T) + {}^R\mathcal{D}^{\beta_2}x(T) = \delta_1, \\ \mu_2 \mathcal{I}^{\gamma_1}x(T) + \mathcal{I}^{\gamma_2}x(T) = \delta_2. \end{cases}$$

Pour montrer les résultats d'existence et d'unicité, nous utilisons l'alternative non linéaire de type **Leray-Schauder**, le théorème du point fixe de **Krasnoselskii** et le théorème du point fixe de **Banach**.

- La deuxième section, nous avons présenté un résultat d'existence de solutions pour un problème aux limites concernant les équations différentielles fractionnaires hybrides

$$\begin{cases} (\lambda^C \mathcal{D}^\alpha + {}^R\mathcal{D}^\alpha) \left[\frac{x(t)}{h(t, x(t))} \right] = f(t, x(t)), & 0 < t < T, 1 < \alpha \leq 2, \\ \left[\frac{x(t)}{h(t, x(t))} \right]_{t=0} = 0, \\ \mu_1 {}^R\mathcal{D}^{\beta_1} \left[\frac{x(t)}{h(t, x(t))} \right]_{t=T} + {}^R\mathcal{D}^{\beta_2} \left[\frac{x(t)}{h(t, x(t))} \right]_{t=T} = \delta_1, \\ \mu_2 \mathcal{I}^{\gamma_1} \left[\frac{x(t)}{h(t, x(t))} \right]_{t=T} + \mathcal{I}^{\gamma_2} \left[\frac{x(t)}{h(t, x(t))} \right]_{t=T} = \delta_2. \end{cases}$$

Nous avons trouvé une preuve pour le résultat d'existence et nous appliquons le théorème introduit par **Dhage** puis nous concluons par un exemple illustratif.

Le troisième chapitre est intitulé " Résolution des problèmes d'inclusion différentielle fractionnaire". Il se compose par deux sections :

- La première section, nous introduisons le problème d'inclusion différentielle fractionnaire hybride avec les conditions aux limites hybrides

$$\begin{cases} (\lambda^C \mathcal{D}^\alpha + {}^R\mathcal{D}^\alpha) \left[\frac{x(t)}{h(t, x(t))} \right] \in F(t, x(t)), & 0 < t < T, 1 < \alpha \leq 2, \\ \left[\frac{x(t)}{h(t, x(t))} \right]_{t=0} = 0, \\ \mu_1 {}^R\mathcal{D}^{\beta_1} \left[\frac{x(t)}{h(t, x(t))} \right]_{t=T} + {}^R\mathcal{D}^{\beta_2} \left[\frac{x(t)}{h(t, x(t))} \right]_{t=T} = \delta_1, \\ \mu_2 \mathcal{I}^{\gamma_1} \left[\frac{x(t)}{h(t, x(t))} \right]_{t=T} + \mathcal{I}^{\gamma_2} \left[\frac{x(t)}{h(t, x(t))} \right]_{t=T} = \delta_2. \end{cases}$$

On a utilisé le théorème du point fixe qui présenté par **Dhage** pour montrer l'existence de solutions et à la fin, on a donné un exemple.

- Dans la deuxième section, nous commençons par quelques définitions importantes.

Dans l'article [40], les auteurs ont introduit un nouveau concept appelé η –admissible et dans [33], les auteurs sont proposés des nouveaux théorèmes du point fixe sur les applications multivoques $\eta - \psi$ –contractions. L'un des théorèmes, on va utiliser pour montrer le premier résultat d'existence du problème

$$\begin{cases} (\lambda^C \mathcal{D}^\alpha + {}^R\mathcal{D}^\alpha)x(t) \in F(t, x(t)), & 0 < t < T, 1 < \alpha \leq 2, \\ x(0) = 0, \\ \mu_1 {}^R\mathcal{D}^{\beta_1}x(T) + {}^R\mathcal{D}^{\beta_2}x(T) = 0, \\ \mu_2 \mathcal{I}^{\gamma_1}x(T) + \mathcal{I}^{\gamma_2}x(T) = 0. \end{cases}$$

D'autre part, A. Amini-Harandi [5] a introduit des nouveaux théorèmes d'existence de point final. Plus tard, plusieurs auteurs ont étudié de telles idées pour obtenir des résultats, on peut le voir [10, 25, 32].

Cette méthode est utilisée pour démontrer l'existence et l'unicité des solutions.

Le quatrième chapitre est intitulé "Systèmes différentiels fractionnaires séquentiels hybrides multidimensionnels ". On s'intéresse à l'étude mathématique d'un système d'inclusions différentielles

fractionnaires séquentielles hybrides définit comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^C\mathcal{D}^{\alpha_1}(\lambda_1 + \mathcal{D}) \left[\frac{x_1(t)}{h_1(t, x_1(t), \mathcal{I}^{\gamma_1} x_1(t))} \right] \in F_1(t, x_1(t), \dots, x_m(t), x'_1(t), \dots, x'_m(t)), \\ {}^C\mathcal{D}^{\alpha_2}(\lambda_2 + \mathcal{D}) \left[\frac{x_2(t)}{h_2(t, x_2(t), \mathcal{I}^{\gamma_2} x_2(t))} \right] \in F_2(t, x_1(t), \dots, x_m(t), x'_1(t), \dots, x'_m(t)), \\ \vdots \\ {}^C\mathcal{D}^{\alpha_m}(\lambda_m + \mathcal{D}) \left[\frac{x_m(t)}{h_m(t, x_m(t), \mathcal{I}^{\gamma_m} x_m(t))} \right] \in F_m(t, x_1(t), \dots, x_m(t), x'_1(t), \dots, x'_m(t)), \end{array} \right.$$

associé aux conditions aux limites hybrides suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{x_i(t)}{h_i(t, x_i(t), \mathcal{I}^{\gamma_i} x_i(t))} \right]_{t=0} = 0, \\ \left[\frac{x_i(t)}{h_i(t, x_i(t), \mathcal{I}^{\gamma_i} x_i(t))} \right]_{t=1} = \mu_i \left[\frac{x_i(t)}{h_i(t, x_i(t), \mathcal{I}^{\gamma_i} x_i(t))} \right]_{t=\rho_i}, \\ \left[\left(\frac{x_i(t)}{h_i(t, x_i(t), \mathcal{I}^{\gamma_i} x_i(t))} \right)' \right]_{t=0} = \dots = \left[\left(\frac{x_i(t)}{h_i(t, x_i(t), \mathcal{I}^{\gamma_i} x_i(t))} \right)^{(n-1)} \right]_{t=0} = 0. \end{array} \right.$$

On commencera par vérifier que ce problème et une équation intégrale sont équivalents.

D'autre part, on a démontré l'existence des solutions de ce système est basé sur le théorème de

Dhage aussi, on a donné un exemple pour illustrer notre résultat.

Finalement, nous donnerons une conclusion et une bibliographie.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous avons introduit quelques notions de base sur l'analyse multivoque. Ensuite, nous donnons quelques définitions de la théorie du calcul fractionnaire. Nous laissons une section à la fin de ce chapitre pour introduire les théorèmes du point fixe, qui seront utilisés dans d'autres chapitres.

1.1 Quelques espaces fonctionnels

1.1.1 Espace de Lebesgue

Soient $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $1 \leq p \leq \infty$.

Définition 1.1.

- On définit $L^p([a, b], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions réelles f telles que f est mesurable et $\int_a^b |f(t)|^p dt < +\infty$ pour $1 \leq p < \infty$, muni de la norme

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

- Si $p = \infty$ donc, $L^\infty([a, b], \mathbb{R})$ est l'espace des fonctions mesurables et essentiellement bornée sur $[a, b]$ i.e

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{t \in [a, b]} |f(t)| = \inf \{ M \geq 0 : |f(t)| < M \text{ p.p sur } [a, b] \}.$$

Théorème 1.1. [15] Pour $1 \leq p \leq \infty$, les espaces $L^p([a, b], \mathbb{R})$ sont des espaces de Banach.

Théorème 1.2. [15] (*Théorème de convergence dominée de Lebesgue*)

Soit (f_n) une suite de fonctions de $L^1([a, b], \mathbb{R})$. Si

- (i) la suite (f_n) converge presque partout sur $[a, b]$ vers une fonction f ,
- (ii) il existe une fonction $g \in L^1([a, b], \mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f_n(t)| \leq g(t) \quad \text{p.p sur } [a, b].$$

Alors

$$f \in L^1([a, b], \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L^1} = 0.$$

1.1.2 Espaces des fonctions continues et absolument continues

Étant donné $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition 1.2. [28] Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on désigne par $C^n([a, b], \mathbb{R})$ l'espace de toutes les fonctions réelles n fois continument dérivables sur $[a, b]$, i.e

$$C^n([a, b], \mathbb{R}) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ est continue et } f^{(i)} \text{ continue sur } [a, b], \quad i \leq n\},$$

où $f^{(i)}$ est la dérivée i ème de f .

Sa norme associée définie par

$$\|f\|_{C^n} = \sum_{i=0}^n \|f^{(i)}\|_{\infty} = \sum_{i=0}^n \sup_{t \in [a, b]} |f^{(i)}(t)|.$$

Si $n = 0$ alors, $C^0([a, b], \mathbb{R}) \equiv C([a, b], \mathbb{R})$ est l'espace des fonctions f continues de $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de la norme

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|.$$

Définition 1.3. [27, 28] L'espace $AC([a, b], \mathbb{R})$ est l'espace des fonctions absolument continues sur $[a, b]$ tel que

$$AC([a, b], \mathbb{R}) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ tel que } \exists \varphi \in L^1([a, b], \mathbb{R}) : f(t) = c + \int_a^t \varphi(x) dx, \forall t \in [a, b]\},$$

où $c = f(a)$.

On dit aussi que $f \in AC([a, b], \mathbb{R})$ si

pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute suite finie des intervalles disjoints $(]a_i, b_i[)_{i=0,1,\dots,n}$ de $[a, b]$ on a

$$\sum_{i=0}^n (b_i - a_i) < \delta \implies \sum_{i=0}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \epsilon.$$

Définition 1.4. [27, 28] Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on définit l'espace $AC^n([a, b], \mathbb{R})$ par

$$AC^n([a, b], \mathbb{R}) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ et } f^{(n-1)} \in AC([a, b], \mathbb{R})\}.$$

En particulier, $AC^1([a, b], \mathbb{R}) \equiv AC([a, b], \mathbb{R})$.

On voit bien qu'une fonction absolument continue est continue par contre la réciproque est fausse.

1.1.3 Algèbre de Banach

Définition 1.5. [29, 41] Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, X est une algèbre si toute application bilinéaire

$$X \times X \rightarrow X$$

$$(x, y) \longmapsto x.y$$

est associative et distributive par rapport à l'addition.

De plus, X est une algèbre normée si muni de la norme $\|\cdot\|$ et vérifiant

$$\|x.y\| \leq \|x\| \|y\|, \quad \forall x, y \in X.$$

Définition 1.6. [29, 41] Soit X un espace de Banach sur $\mathbb{R}$ muni de la multiplication $(x, y) \mapsto x.y$, on suppose que les deux conditions suivantes sont satisfaites

- (1) X est une algèbre,
- (2) pour tous $x, y \in X$, on a $\|x.y\| \leq \|x\| \|y\|$.

Alors, X est une algèbre de Banach.

Exemple 1.1.

- L'espace $\mathbb{R}$ muni de la valeur absolue est une algèbre de Banach.
- $(C([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ muni de la multiplication $(f.g)(t) = f(t).g(t)$ est une algèbre de Banach.

1.2 Analyse multivoque

L'analyse multivoque est une branche très importante des mathématiques qui étudie les propriétés des applications multivoques. Nous rappelons quelques définitions des applications multivoques et quelques propriétés importantes. En suite, on va présenter la distance de Hausdorff et on conclut par la notion d'ensemble des sélections, pour plus de détails voir [6, 17, 22, 26, 38].

1.2.1 Notion d'application multivoque

Définition 1.7. Soient X et Y deux ensembles non vides. Toute application $F : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ qui associe un sous ensemble $F(x)$ de Y pour tout élément $x \in X$ est appelée une application multivoque.

Maintenant, on a besoin de donner quelques propriétés des applications multivoques. Soit $F : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ une application multivoque avec X et Y deux ensembles non vides.

Définitions 1.1.

- On appelle domaine de F le sous ensemble de X donné par

$$\text{Dom}(F) = \{x \in X : F(x) \neq \emptyset\}.$$

- On appelle l'image de F l'ensemble

$$\text{Im}(F) = \cup_{x \in X} F(x).$$

- On définit le graphe de F par

$$\text{Graph}(F) = \{(x, y) \in X \times Y : y \in F(x)\}.$$

Définitions 1.2.

- On dit que F est à valeurs fermées (convexes) si l'image $F(x)$ est un ensemble fermée (convexe) pour tout $x \in X$. i.e $F(x) \in \mathcal{P}_f(X)$ ($\mathcal{P}_{cv}(X)$).
- Une application F est dite fermé si et seulement si son graphe est fermé. c-à-d pour toute suite (x_n, y_n) convergente vers (x_*, y_*) avec $y_n \in F(x_n)$ implique que $y_* \in F(x_*)$.
- On dit que F est bornée sur les sous ensembles bornés si l'ensemble $F(A) = \cup_{x \in A} F(x)$ est bornée dans Y pour tout sous ensemble borné A . c-à-d

$$\sup_{x \in A} \{\sup\{|y| : y \in F(x)\}\} < \infty.$$

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à la notion de semi continue supérieurement.

Définition 1.8. *F est dite semi continue supérieurement en $x_0 \in X$ si pour chaque ouvert $\mathcal{U}$ de Y avec $F(x_0) \subseteq \mathcal{U}$, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de x_0 tel que pour chaque élément $x \in \mathcal{V}$ on a $F(x) \subseteq \mathcal{U}$. Si F est semi continue supérieurement en tout point $x \in X$ alors, elle est semi continue supérieurement sur X .*

Définition 1.9. *Si l'ensemble $F(A)$ est relativement compact pour chaque $A \in \mathcal{P}_b(X)$ alors, on dit que F est complètement continue.*

Il n'est pas facile de prouver que les applications multivoques sont semi continues supérieurement par la définition donc, nous avons la relation suivante

Lemme 1.1. *[17] Soit $F : X \rightarrow \mathcal{P}_{cp}(Y)$ une application multivoque complètement continue avec des valeurs compactes non vides. Alors F a un graphe fermé si et seulement si F est semi continue supérieurement.*

Définition 1.10. *Soit $F : [a, b] \rightarrow \mathcal{P}_f(X)$ une fonction multivoque à valeurs fermées, si la fonction*

$$t \mapsto d_X(x, F(t)) = \inf\{\|x - y\| : y \in F(t)\}$$

est mesurable pour tout élément $x \in X$ alors, on dit que F est mesurable.

Définition 1.11. *On dit que $F : [a, b] \times X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ est une application multivoque Carathéodory si*

- (i) *la fonction $t \mapsto F(t, x)$ est mesurable pour tout $x \in X$,*
- (ii) *la fonction $x \mapsto F(t, x)$ est s.c.s pour chaque $t \in [a, b]$.*

F est dite L^1 -Carathéodory si (i), (ii) et la condition suivante vérifie pour tout $r > 0$, il existe une fonction $\psi_r \in L^1([a, b], \mathbb{R}_+)$ tel que

$$\|F(t, x)\|_{\mathcal{P}} = \sup\{\|v\|, v \in F(t, x)\} \leq \psi_r(t)$$

pour chaque $t \in [a, b]$ et $x \in X$ avec $\|x\| \leq r$.

1.2.2 Distance de Hausdorff

Nous introduisons le concept de la métrique de Hausdorff qui joue un rôle important en analyse multivoque, pour plus de détails vous pouvez consulter [6, 22, 26].

Définition 1.12. Soient (X, d_X) un espace métrique et A un sous ensemble non vide de X . On définit la distance entre un point $x \in X$ et l'ensemble A par

$$d_X(x, A) = \inf_{a \in A} d_X(x, a).$$

Définition 1.13. Soient A, B deux sous ensembles non vides de X . On définit la distance de Hausdorff entre deux ensembles A et B par

$$H(A, B) = \max\{e(A, B), e(B, A)\}.$$

Où

$$e(A, B) = \sup_{x \in A} d_X(x, B) = \sup_{x \in A} \left\{ \inf_{y \in B} d_X(x, y) \right\}.$$

Propriétés 1.1. [22, 26] Soient A, B et C les sous ensembles non vides de X . Alors, nous avons les propriétés suivantes

1. $H(A, A) = 0$.
2. $H(A, B) = H(B, A)$ (H est symétrique).
3. $H(A, B) \leq H(A, C) + H(C, B)$ (l'inégalité triangulaire).
4. $H(A, B) = 0$ si et seulement si $\overline{A} = \overline{B}$.

Proposition 1.1. [6, 22, 26]

- Si (X, d_X) est un espace métrique alors, H est une distance sur $\mathcal{P}_f(X)$.
- $(\mathcal{P}_f(X), H)$ un espace métrique, il s'appelle espace de Hausdorff.

1.2.3 Sélection d'application multivoque

L'ensemble de sélection de l'application multivoque est un outil essentiel pour résoudre les problèmes des inclusions différentielles car il permet de la transformation des problèmes multivoques en des problèmes univoques plus facile à traiter voir [6, 17, 22, 26].

Définition 1.14. On appelle sélection de $F : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ toute fonction $f : X \rightarrow Y$ vérifiant $f(x) \in F(x)$ pour tout $x \in X$.

Pour tout $x \in C([a, b], X)$, on peut définir l'ensemble de sélection de l'application F par

$$S_{F,x} = \{v \in L^1([a, b], X) \text{ tel que } v(t) \in F(t, x(t)) \text{ p.p } t \in [a, b]\}.$$

Théorème 1.3. [6, 22, 26] (*Théorème de Kuratowski-Ryll Nardzewski*)

Soit $F : [a, b] \rightarrow \mathcal{P}_f(X)$ une application multivoque avec X un espace de Banach séparable.

Si F est mesurable alors, elle admet une sélection mesurable i.e, il existe une application mesurable $f : [a, b] \rightarrow X$ tel que $f(t) \in F(t)$ pour tout $t \in [a, b]$.

Pour résoudre un problème, il sera utile de rappeler le lemme suivants dans [22] et [26].

Lemme 1.2. Soit X un espace de Banach. Considérons $F : [a, b] \times X \rightarrow \mathcal{P}_{cp,cv}(X)$ une application multivoque L^1 -Carathéodory avec $S_{F,x} \neq \emptyset$ et $\Theta : L^1([a, b], X) \rightarrow C([a, b], X)$ une application linéaire continue. Donc, l'opérateur

$$\Theta \circ S_F : C([a, b], X) \rightarrow \mathcal{P}_{cp,cv}(C([a, b], X))$$

pour tout $x \in C([a, b], X)$, on a

$$(\Theta \circ S_F)(x) = \Theta(S_{F,x})$$

est de graphe fermée sur $C([a, b], X) \times C([a, b], X)$.

1.3 Notation de calcul fractionnaire

Le calcul fractionnaire est une branche des mathématiques qui généralise la dérivée usuelle et l'intégrale d'ordre arbitraire.

Cette section contient des rappels, des définitions de base et certaines propriétés pour l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville, ainsi que les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville et de Caputo, pour plus d'informations voir [21, 27, 28, 31, 37].

1.3.1 Fonction Gamma

Nous parlons la définition de la fonction Gamma qui est l'une des fonctions de base du calcul fractionnaire et l'élément le plus important.

Définition 1.15. Soit z un nombre complexe avec $\text{Re}(z) > 0$. L'intégrale suivante

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt,$$

est dite la fonction Gamma.

De plus, on peut écrire la fonction Gamma sous la forme suivante

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)\dots(z+n)}.$$

Cette fonction possède des propriétés importantes.

Propriétés 1.2. [21, 28] Soit z un nombre réel strictement positif. Alors, on a

1. $\Gamma(1) = 1$,
2. $\Gamma(0_+) = +\infty$,
3. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$,
4. en particulier pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\Gamma(n+1) = n!$,
5. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

1.3.2 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

Parmi les intégrales fractionnaires les plus importantes " l'intégrale de Riemann-Liouville " qui joue un rôle essentiel dans la théorie du calcul fractionnaire.

Définition 1.16. Soient $\alpha > 0$ et f une fonction continue. La formule suivante

$$\mathcal{I}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-r)^{\alpha-1} f(r) dr,$$

est appelée l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α .

Propriétés 1.3. [27, 28] L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville est satisfaite

- $\mathcal{I}^\alpha$ est un opérateur linéaire,
- pour tous $\alpha, \beta > 0$, on a $\mathcal{I}^\alpha \mathcal{I}^\beta = \mathcal{I}^\beta \mathcal{I}^\alpha = \mathcal{I}^{\alpha+\beta}$,
- si $\alpha = 0$, on a $\mathcal{I}^0 = I$ avec I est l'opérateur identité.

Exemples 1.1. L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville de quelques fonctions usuelles est donnée par

- $f(t) = C$ est une fonction constante, donc

$$(\mathcal{I}^\alpha f)(t) = \frac{Ct^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \neq 0.$$

- Soient $\alpha, \beta > 0$ et $f(t) = t^\beta$ alors, on a

$$\mathcal{I}^\alpha f(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)} t^{\alpha+\beta}.$$

1.3.3 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville est l'une des dérivées fractionnaires les plus importantes. On va introduire la définition de cette dérivée et quelques propriétés.

On commence par la définition

Définition 1.17. *On appelle dérivée d'une fonction réelle f au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ la relation*

$${}^R\mathcal{D}^\alpha f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n (\mathcal{I}^{n-\alpha} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_0^t (t-r)^{n-\alpha-1} f(r) dr,$$

où $n = [\alpha] + 1$.

En particulier,

- lorsque $\alpha = m \in \mathbb{N}^*$, alors

$${}^R\mathcal{D}^m f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^m f(t) = f^{(m)}(t),$$

- pour $\alpha = 0$, on a ${}^R\mathcal{D}^\alpha f(t) = f(t)$.

Exemples 1.2.

- En générale, la dérivée de Riemann-Liouville d'une constante n'est pas nulle ni constante donc, on a

$${}^R\mathcal{D}^\alpha(C) = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha} \neq 0.$$

- Pour $\alpha, \beta > 0$ et $f(t) = t^\beta$, on a

$${}^R\mathcal{D}^\alpha f(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} t^{\beta-\alpha}.$$

Nous avons les propriétés suivantes pour tous $\alpha, \beta > 0$ et f une fonction continue réelle.

Propriétés 1.4. [21, 28]

- ${}^R\mathcal{D}$ est un opérateur linéaire,
- en générale, on a ${}^R\mathcal{D}^\alpha(\mathcal{I}^\beta f(t)) = {}^R\mathcal{D}^{\alpha-\beta} f(t)$ et si $\alpha - \beta < 0$ alors ${}^R\mathcal{D}^{\alpha-\beta} f(t) = \mathcal{I}^{\beta-\alpha} f(t)$,
- pour $\alpha > 0$, nous avons ${}^R\mathcal{D}^\alpha(\mathcal{I}^\alpha f(t)) = f(t)$.

On donne quelques lemmes auxiliaires

Lemme 1.3. [28] Pour $\alpha > 0$, l'équation fractionnaire homogène ${}^R\mathcal{D}^\alpha x(t) = 0$ possède une solution

$$x(t) = \sum_{i=1}^n c_i t^{\alpha-i},$$

où $c_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$ sont des constantes et $n = [\alpha] + 1$.

Lemme 1.4. [28] Soient $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$, alors on a

$$\mathcal{I}^\alpha({}^R\mathcal{D}^\alpha x(t)) = x(t) + \sum_{i=1}^n c_i t^{\alpha-i}, \quad (1.1)$$

où $c_i \in \mathbb{R}$ pour tout $i = 1, 2, \dots, n$.

1.3.4 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Nous allons définir la dérivée fractionnaire de Caputo et donner ses propriétés.

Considérons $\alpha > 0$ et $f \in AC^n([a, b], \mathbb{R})$ avec $n = [\alpha] + 1$.

Définition 1.18. On définit la dérivée de Caputo d'une fonction f par

$${}^C\mathcal{D}^\alpha f(t) = (\mathcal{I}^{(n-\alpha)} D^n f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-r)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(r) dr,$$

où $D = \frac{d}{dt}$ est la dérivée usuelle.

- Si $\alpha = m \in \mathbb{N}^*$, on a

$${}^C\mathcal{D}^\alpha f(t) = D^m f(t) = f^{(m)}(t).$$

Exemples 1.3.

- La dérivée de Caputo d'une constante est nulle. i.e ${}^C\mathcal{D}^\alpha C = 0$.
- Soient $\alpha, \beta > 0$ et $f(t) = t^\beta$, donc la dérivée fractionnaire de Caputo est égale

$${}^C\mathcal{D}^\alpha f(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} t^{\beta-\alpha}.$$

Propriétés 1.5. [28, 31] Soient $f \in AC^n([a, b], \mathbb{R})$ et $n-1 < \alpha < n$ tel que $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, nous avons

- l'opérateur de Caputo est linéaire,
- ${}^C\mathcal{D}^\alpha(\mathcal{I}^\alpha f(t)) = f(t)$, $\forall \alpha > 0$,

- ${}^C\mathcal{D}^\alpha f(t) = f(t)$ pour $\alpha = 0$,
- la dérivée de Caputo est liée à la dérivée de Riemann-Liouville par la relation suivante

$${}^C\mathcal{D}^\alpha f(t) = {}^R\mathcal{D}^\alpha \left[f(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{t^i}{i!} f^{(i)}(0) \right].$$

Maintenant, nous introduisons les lemmes suivants

Lemme 1.5. [28, 31] La solution de l'équation différentielle fractionnaire homogène ${}^C\mathcal{D}^\alpha x(t) = 0$ pour chaque $\alpha > 0$ est donnée par

$$x(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i t^i \quad \text{pour tout } c_i \in \mathbb{R}, \quad \forall i = 0, 1, \dots, n-1 \quad \text{et } n = [\alpha] + 1.$$

Lemme 1.6. [28, 31] Pour $\alpha > 0$, on a

$$\mathcal{I}^\alpha ({}^C\mathcal{D}^\alpha x(t)) = x(t) + \sum_{i=0}^{n-1} c_i t^i, \quad (1.2)$$

avec c_i sont des constantes pour tout $i = 0, 1, \dots, n-1$ et $n = [\alpha] + 1$.

1.4 Quelques théorèmes du point fixe

La technique la plus utilisée pour résoudre les équations et les inclusions différentielles d'ordre fractionnaire est la théorie du point fixe qui assure l'existence des solutions.

Cette méthode consiste à écrire le problème donné sous la forme d'un problème équivalent de point fixe. Donc, nous déterminons les points fixes du problème transformé qui sont aussi les solutions du problème donné.

1.4.1 Points fixes univoques

Nous présentons un rappel sur quelques théorèmes connus du point fixe qu'on peut utiliser dans les démonstrations de nos théorèmes d'existence.

Définition 1.19. Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace normé. L'application $f : X \rightarrow X$ est Lipschitzienne s'il existe un nombre positif $l^* > 0$, pour $(x, y) \in X$ tel que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq l^* \|x - y\|.$$

Si $l^* < 1$ alors, f est contractante.

Théorème 1.4. [21, 28] (*Théorème du point fixe de Banach*)

Soit X un espace de Banach et soit $\mathcal{N} : X \rightarrow X$ une application contractante. Alors, $\mathcal{N}$ possède un point fixe unique. c-à-d il existe un point fixe unique $x \in X$ tel que $\mathcal{N}x = x$.

Théorème 1.5. [34] (*Alternative non linéaire de Leray-Schauder*)

Soit $\mathcal{C}$ un sous ensemble convexe et fermé d'un espace de Banach X et soit $\mathcal{U}$ un sous ensemble ouvert de $\mathcal{C}$ avec $0 \in \mathcal{U}$.

On suppose que $\mathcal{N} : \overline{\mathcal{U}} \rightarrow \mathcal{C}$ une application complètement continue, alors

- a. l'application $\mathcal{N}$ admet un point fixe dans $\overline{\mathcal{U}}$, ou bien
- b. il existe un élément $x \in \partial\mathcal{U}$ et $\alpha_0 \in]0, 1[$ tel que $x = \alpha_0 \mathcal{N}(x)$.

Théorème 1.6. [23] (*Théorème du point fixe de Krasnoselskii*)

Soit X un espace de Banach et soit $\mathcal{C}$ un ensemble non vide fermé, borné et convexe de X . Supposons que $A, B : \mathcal{C} \rightarrow X$ deux applications tels que

- i. $A(x) + B(y) \in \mathcal{C}$, pour tous $x, y \in \mathcal{C}$,
- ii. l'application A est contractante,
- iii. l'application B est complètement continue.

Alors, l'équation $x = A(x) + B(x)$ admet une solution dans $\mathcal{C}$.

Théorème 1.7. [18] Soient X une algèbre de Banach et $\overline{\mathcal{B}}(0, r)$ la boule fermée de centre 0 et de rayon $r > 0$.

On suppose que $A, B : \overline{\mathcal{B}}(0, r) \rightarrow X$ deux applications tels que :

- i. A est une application Lipschitzienne avec la constante de Lipschitz l^* ,
- ii. B est une application complètement continue,
- iii. $l^* \Delta < 1$, où

$$\Delta = \|B(\overline{\mathcal{B}}(0, r))\| = \sup\{\|Bx\| : x \in \overline{\mathcal{B}}(0, r)\}.$$

Alors, on a l'alternative suivante

- a. l'équation $AxBx = x$ admet une solution, ou bien
- b. il existe $u \in X$ et $\alpha_0 \in (0, 1)$ tels que : $\|u\| = r$ et $\alpha_0(AuBu) = u$.

1.4.2 Point fixe multivoque

Définition 1.20. Soient X un espace de Banach et $F : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ une application multivoque. On appelle point fixe de l'application F tout point $x \in X$ qui vérifie $x \in F(x)$.

Théorème 1.8. [19] Soit X une algèbre de Banach.

Supposons que $A : X \rightarrow X$ est une application univoque et $B : X \rightarrow \mathcal{P}_{cp,cv}(X)$ est une application multivoque à des values compactes et convexes tels que

- i. A est un opérateur Lipschitzien avec la constante de Lipschitz l^* ,
- ii. B est un opérateur s.c.s et compact,
- iii. $2l^*\Delta < 1$, où

$$\Delta = \|B(X)\|_{\mathcal{P}} = \{\|y\|, y \in B(x)\}.$$

Alors, on a l'alternative suivante

- a. l'ensemble

$$\mathcal{E} = \{x \in X : \alpha_0 x \in Ax Bx, \text{ pour tout } \alpha_0 > 1\},$$

est non borné; ou bien

- b. l'opérateur $AxBx$ possède au moins un point fixe.

1.4.3 Critère de compacité

Nous présentons maintenant le théorème d'Ascoli-Arzelà, on va utiliser ce théorème dans la démonstration d'un opérateur complètement continu.

Théorème 1.9. [21, 28] (*Théorème d'Ascoli-Arzelà*)

Soit $\mathcal{B}$ une partie de $C([a, b], \mathbb{R})$. Alors la partie $\mathcal{B}$ est relativement compact si les conditions suivantes sont satisfaites

- 1. $\mathcal{B}$ est uniformément borné. i.e, il existe un nombre positif $C > 0$ tel que

$$|f(x)| < C \text{ pour chaque } f \in \mathcal{B} \text{ et } x \in [a, b].$$

- 2. $\mathcal{B}$ est équicontinu. i.e, pour chaque $\epsilon > 0$, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que pour chaque $f \in \mathcal{B}$ et pour tous $x_1, x_2 \in [a, b]$ on a

$$|x_1 - x_2| \leq \delta \text{ implique } |f(x_1) - f(x_2)| \leq \epsilon.$$

Chapitre 2

Résultats d'existence pour les équations différentielles fractionnaires

La généralisation des équations différentielles ordinaires est appelée les équations différentielles fractionnaires. Dans ce chapitre, nous présentons des résultats d'existence des solutions.

La première section consiste à traiter l'existence de solutions d'un problème aux limites pour une équation différentielle fractionnaire dans l'espace de Banach des fonctions continues sur $[0, T]$ à valeurs dans l'espace $\mathbb{R}$.

La deuxième section examine l'existence de solutions pour une équation différentielle fractionnaire hybride dans un espace de Banach avec des conditions aux limites hybrides en deux points, nos résultats sont inspirés sur les travaux [\[34, 36, 44\]](#).

2.1 Problème aux limites pour les équations différentielles d'ordre fractionnaire

Le but de cette section est de prouver l'existence et l'unicité de solutions dans l'espace de Banach pour les équations différentielles fractionnaires. Nous avons utilisé pour résoudre ces problèmes sur la théorie du point fixe. L'un de ces résultats est basé sur l'alternative non linéaire de type Leray-Schauder, sur le théorème du point fixe de Krasnoselskii et l'autre basé sur le théorème du point fixe de Banach.

2.1.1 Présentation du problème

On s'intéresse à un problème fractionnaire engendré par l'équation suivante

$$(\lambda^C \mathcal{D}^\alpha + {}^R\mathcal{D}^\alpha)x(t) = f(t, x(t)), \quad 0 < t < T, \quad 1 < \alpha \leq 2, \quad (2.1)$$

on associe les conditions

$$\begin{cases} x(0) = 0, \\ \mu_1 {}^R\mathcal{D}^{\beta_1}x(T) + {}^R\mathcal{D}^{\beta_2}x(T) = \delta_1, \\ \mu_2 \mathcal{I}^{\gamma_1}x(T) + \mathcal{I}^{\gamma_2}x(T) = \delta_2. \end{cases} \quad (2.2)$$

Où

- ${}^C\mathcal{D}^\alpha$ désigne la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α .
- ${}^R\mathcal{D}^\alpha$ et ${}^R\mathcal{D}^{\beta_i}$ sont les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville d'ordre α et d'ordre β_i avec $0 \leq \beta_i < \alpha$, $i = 1, 2$ respectivement.
- $\mathcal{I}^{\gamma_i}$ est l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\gamma_i > 0$, $i = 1, 2$.
- $f : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et les constantes $0 < \lambda, \mu_1, \mu_2, \delta_1, \delta_2 \leq 1$.

2.1.2 Existence de solution

On commence à définir la solution du problème aux limites (2.1) – (2.2).

Définition 2.1. Une fonction $x \in AC^1([0, T], \mathbb{R})$ est dite une solution du problème fractionnaire (2.1) – (2.2) si x satisfait l'équation

$$(\lambda^C \mathcal{D}^\alpha + {}^R\mathcal{D}^\alpha)x(t) = f(t, x(t)), \quad 1 < \alpha \leq 2,$$

avec les conditions aux limites (2.2).

Nous introduisons les constantes suivantes

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{\mu_1 \Gamma(2)}{(\lambda + 1) \Gamma(2 - \beta_1)} T^{1-\beta_1} + \frac{\Gamma(2)}{(\lambda + 1) \Gamma(2 - \beta_2)} T^{1-\beta_2}, \\ K_2 &= \frac{\mu_1 \Gamma(\alpha)}{(\lambda + 1) \Gamma(\alpha - \beta_1)} T^{\alpha-\beta_1-1} + \frac{\Gamma(\alpha)}{(\lambda + 1) \Gamma(\alpha - \beta_2)} T^{\alpha-\beta_2-1}, \\ K_3 &= \frac{\mu_2 \Gamma(2)}{(\lambda + 1) \Gamma(2 + \gamma_1)} T^{\gamma_1+1} + \frac{\Gamma(2)}{(\lambda + 1) \Gamma(2 + \gamma_2)} T^{\gamma_2+1}, \\ K_4 &= \frac{\mu_2 \Gamma(\alpha)}{(\lambda + 1) \Gamma(\alpha + \gamma_1)} T^{\alpha+\gamma_1-1} + \frac{\Gamma(\alpha)}{(\lambda + 1) \Gamma(\alpha + \gamma_2)} T^{\alpha+\gamma_2-1}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$Q = (K_2K_3 - K_1K_4)(\lambda + 1)^2 \neq 0 \text{ car } K_2K_3 - K_1K_4 \neq 0, \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} M = & \frac{T^\alpha}{(\lambda + 1)\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{T}{|Q|} \left[\frac{K_4\mu_1 T^{\alpha-\beta_1}}{\Gamma(\alpha - \beta_1 + 1)} + \frac{K_2\mu_2 T^{\alpha+\gamma_1}}{\Gamma(\alpha + \gamma_1 + 1)} + \frac{K_4 T^{\alpha-\beta_2}}{\Gamma(\alpha - \beta_2 + 1)} \right. \\ & + \left. \frac{K_2 T^{\alpha+\gamma_2}}{\Gamma(\alpha + \gamma_2 + 1)} \right] + \frac{T^{\alpha-1}}{|Q|} \left[\frac{K_1\mu_2 T^{\alpha+\gamma_1}}{\Gamma(\alpha + \gamma_1 + 1)} + \frac{K_3\mu_1 T^{\alpha-\beta_1}}{\Gamma(\alpha - \beta_1 + 1)} + \frac{K_1 T^{\alpha+\gamma_2}}{\Gamma(\alpha + \gamma_2 + 1)} \right. \\ & + \left. \frac{K_3 T^{\alpha-\beta_2}}{\Gamma(\alpha - \beta_2 + 1)} \right], \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \widetilde{M} = & \frac{T}{|Q|} \left[\frac{K_4\mu_1 T^{\alpha-\beta_1}}{\Gamma(\alpha - \beta_1 + 1)} + \frac{K_2\mu_2 T^{\alpha+\gamma_1}}{\Gamma(\alpha + \gamma_1 + 1)} + \frac{K_4 T^{\alpha-\beta_2}}{\Gamma(\alpha - \beta_2 + 1)} + \frac{K_2 T^{\alpha+\gamma_2}}{\Gamma(\alpha + \gamma_2 + 1)} \right] \\ & + \frac{T^{\alpha-1}}{|Q|} \left[\frac{K_1\mu_2 T^{\alpha+\gamma_1}}{\Gamma(\alpha + \gamma_1 + 1)} + \frac{K_3\mu_1 T^{\alpha-\beta_1}}{\Gamma(\alpha - \beta_1 + 1)} + \frac{K_1 T^{\alpha+\gamma_2}}{\Gamma(\alpha + \gamma_2 + 1)} + \frac{K_3 T^{\alpha-\beta_2}}{\Gamma(\alpha - \beta_2 + 1)} \right], \end{aligned} \quad (2.6)$$

et

$$N = \frac{T}{|Q|}(\lambda + 1)(|K_2\delta_2| + |K_4\delta_1|) + \frac{T^{\alpha-1}}{|Q|}(\lambda + 1)(|K_3\delta_1| + |K_1\delta_2|). \quad (2.7)$$

Pour montrer les résultats d'existence, on a besoin du lemme suivant qui donne l'équation intégrale du problème (2.1) – (2.2).

Lemme 2.1. *Soient $1 < \alpha \leq 2$, $Q \neq 0$ et $g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.*

Une fonction x est une solution de l'équation fractionnaire intégrale suivante

$$\begin{aligned} x(t) = & \frac{1}{(\lambda + 1)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - r)^{\alpha-1} g(r) dr + \frac{t}{Q} \left[K_4\mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} g(T) - K_2\mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} g(T) \right. \\ & + (\lambda + 1)(K_2\delta_2 - K_4\delta_1) + K_4 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} g(T) - K_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} g(T) \left. \right] + \frac{t^{\alpha-1}}{Q} \left[K_1\mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} g(T) \right. \\ & - K_3\mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} g(T) + (\lambda + 1)(K_3\delta_1 - K_1\delta_2) + K_1 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} g(T) - K_3 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} g(T) \left. \right], \end{aligned} \quad (2.8)$$

si et seulement si x est une solution du problème

$$(\lambda^C \mathcal{D}^\alpha + {}^R \mathcal{D}^\alpha)x(t) = g(t), \quad 1 < \alpha \leq 2, \quad (2.9)$$

et

$$\begin{cases} x(0) = 0, \\ \mu_1 {}^R\mathcal{D}^{\beta_1} x(T) + {}^R\mathcal{D}^{\beta_2} x(T) = \delta_1, \\ \mu_2 \mathcal{I}^{\gamma_1} x(T) + \mathcal{I}^{\gamma_2} x(T) = \delta_2. \end{cases} \quad (2.10)$$

Démonstration. Supposons que x satisfait l'équation différentielle (2.9), on va appliquer les lemmes 1.4 et 1.6 donc, on obtient l'équation intégrale suivante

$$x(t) = \frac{c_0}{(\lambda+1)} + \frac{c_1}{(\lambda+1)}t + \frac{c_2}{(\lambda+1)}t^{\alpha-1} + \frac{c_3}{(\lambda+1)}t^{\alpha-2} + \frac{1}{(\lambda+1)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-r)^{\alpha-1} g(r) dr.$$

Par les conditions (2.10), on trouve :

$$\begin{aligned} c_0 &= c_3 = 0, \\ c_1 &= \frac{K_4 \mu_1}{(K_2 K_3 - K_1 K_4)(\lambda+1)} \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} g(T) - \frac{K_2 \mu_2}{(K_2 K_3 - K_1 K_4)(\lambda+1)} \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} g(T) \\ &\quad + \frac{1}{(K_2 K_3 - K_1 K_4)} (K_2 \delta_2 - K_4 \delta_1) + \frac{K_4}{(K_2 K_3 - K_1 K_4)(\lambda+1)} \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} g(T) \\ &\quad - \frac{K_2}{(K_2 K_3 - K_1 K_4)(\lambda+1)} \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} g(T), \\ c_2 &= \frac{K_1 \mu_2}{(K_2 K_3 - K_1 K_4)(\lambda+1)} \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} g(T) - \frac{K_3 \mu_1}{(K_2 K_3 - K_1 K_4)(\lambda+1)} \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} g(T) \\ &\quad + \frac{1}{(K_2 K_3 - K_1 K_4)} (K_3 \delta_1 - K_1 \delta_2) + \frac{K_1}{(K_2 K_3 - K_1 K_4)(\lambda+1)} \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} g(T) \\ &\quad - \frac{K_3}{(K_2 K_3 - K_1 K_4)(\lambda+1)} \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} g(T). \end{aligned}$$

Alors, on trouve le résultat

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{(\lambda+1)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-r)^{\alpha-1} g(r) dr + \frac{t}{Q} \left[K_4 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} g(T) - K_2 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} g(T) \right. \\ &\quad \left. + (\lambda+1)(K_2 \delta_2 - K_4 \delta_1) + K_4 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} g(T) - K_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} g(T) \right] + \frac{t^{\alpha-1}}{Q} \left[K_1 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} g(T) \right. \\ &\quad \left. - K_3 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} g(T) + (\lambda+1)(K_3 \delta_1 - K_1 \delta_2) + K_1 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} g(T) - K_3 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} g(T) \right]. \end{aligned}$$

Inversement, si l'équation (2.8) est une solution de l'équation différentielle non homogène (2.9) et elle vérifie les conditions (2.10), alors x est bien une solution pour le problème aux limites (2.9) – (2.10). $\square$

Maintenant, on pose les hypothèses suivantes

(H1) Il existe une constante $l^* > 0$ tel que

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq l^* |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad t \in [0, T].$$

(H2) Il existe une fonction $\psi : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ continue croissante et une fonction $p \in L^1([0, T], \mathbb{R}_+)$ telles que

$$|f(t, x)| \leq p(t)\psi(|x|) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad t \in [0, T].$$

(H3) Il existe une fonction $q : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue et pour tout $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}$, on a

$$|f(t, x)| \leq q(t).$$

2.1.2.1 Premier résultat

Notre premier résultat d'existence est basé sur l'alternative non linéaire de type Leray-Schauder.

Théorème 2.1. *On suppose que l'hypothèse (H2) est satisfaite.*

De plus, s'il existe un nombre positif $\omega > 0$ tel que

$$\frac{\omega}{M\psi(\omega)\|p\|_{L^1} + N} > 1, \tag{2.11}$$

où $\|p\|_{L^1} = \int_0^T |p(r)|dr$.

Alors, le problème (2.1) – (2.2) admet au moins une solution sur $[0, T]$.

Démonstration. Nous considérons l'opérateur $\mathcal{N} : C([0, T], \mathbb{R}) \rightarrow C([0, T], \mathbb{R})$ défini par

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(x)(t) = & \frac{1}{(\lambda + 1)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - r)^{\alpha-1} f(r, x(r)) dr + \frac{t}{Q} \left[K_4 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} f(T, x(T)) \right. \\ & - K_2 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} f(T, x(T)) + (\lambda + 1)(K_2 \delta_2 - K_4 \delta_1) + K_4 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} f(T, x(T)) \\ & \left. - K_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} f(T, x(T)) \right] + \frac{t^{\alpha-1}}{Q} \left[K_1 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} f(T, x(T)) - K_3 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} f(T, x(T)) \right. \\ & \left. + (\lambda + 1)(K_3 \delta_1 - K_1 \delta_2) + K_1 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} f(T, x(T)) - K_3 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} f(T, x(T)) \right]. \end{aligned}$$

On va montrer toutes les conditions du théorème 1.5 donc, on commence d'abord par

– Étape 1 : $\mathcal{N}$ est un opérateur continu.

Soit (x_n) une suite qui converge vers x dans $C([0, T], \mathbb{R})$. Donc, il suffit de montrer que $(\mathcal{N}x_n)$ converge vers $\mathcal{N}x$.

Pour tout $t \in [0, T]$, on a

$$\begin{aligned}
 |(\mathcal{N}x_n)(t) - (\mathcal{N}x)(t)| &\leq \frac{1}{(\lambda + 1)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - r)^{\alpha-1} |f(r, x_n(r)) - f(r, x(r))| dr + \frac{t}{|Q|} \left[\frac{K_4\mu_1}{\Gamma(\alpha - \beta_1)} \right. \\
 &\quad \int_0^T (T - r)^{\alpha-\beta_1-1} |f(r, x_n(r)) - f(r, x(r))| dr + \frac{K_2\mu_2}{\Gamma(\alpha + \gamma_1)} \int_0^T (T - r)^{\alpha+\gamma_1-1} \\
 &\quad |f(r, x_n(r)) - f(r, x(r))| dr + \frac{K_4}{\Gamma(\alpha - \beta_2)} \int_0^T (T - r)^{\alpha-\beta_2-1} |f(r, x_n(r)) \\
 &\quad - f(r, x(r))| dr + \frac{K_2}{\Gamma(\alpha + \gamma_2)} \int_0^T (T - r)^{\alpha+\gamma_2-1} |f(r, x_n(r)) - f(r, x(r))| dr \Big] \\
 &\quad + \frac{t^{\alpha-1}}{|Q|} \left[\frac{K_1\mu_2}{\Gamma(\alpha + \gamma_1)} \int_0^T (T - r)^{\alpha+\gamma_1-1} |f(r, x_n(r)) - f(r, x(r))| dr + \frac{K_3\mu_1}{\Gamma(\alpha - \beta_1)} \right. \\
 &\quad \int_0^T (T - r)^{\alpha-\beta_1-1} |f(r, x_n(r)) - f(r, x(r))| dr + \frac{K_1}{\Gamma(\alpha + \gamma_2)} \\
 &\quad \int_0^T (T - r)^{\alpha+\gamma_2-1} |f(r, x_n(r)) - f(r, x(r))| dr + \frac{K_3}{\Gamma(\alpha - \beta_2)} \int_0^T (T - r)^{\alpha-\beta_2-1} \\
 &\quad \left. |f(r, x_n(r)) - f(r, x(r))| dr \right], \\
 &\leq \left(\frac{T^\alpha}{(\lambda + 1)\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{T}{|Q|} \left[\frac{K_4\mu_1 T^{\alpha-\beta_1}}{\Gamma(\alpha - \beta_1 + 1)} + \frac{K_2\mu_2 T^{\alpha+\gamma_1}}{\Gamma(\alpha + \gamma_1 + 1)} \right. \right. \\
 &\quad + \frac{K_4 T^{\alpha-\beta_2}}{\Gamma(\alpha - \beta_2 + 1)} + \frac{K_2 T^{\alpha+\gamma_2}}{\Gamma(\alpha + \gamma_2 + 1)} \Big] + \frac{T^{\alpha-1}}{|Q|} \left[\frac{K_1\mu_2 T^{\alpha+\gamma_1}}{\Gamma(\alpha + \gamma_1 + 1)} \right. \\
 &\quad + \frac{K_3\mu_1 T^{\alpha-\beta_1}}{\Gamma(\alpha - \beta_1 + 1)} + \frac{K_1 T^{\alpha+\gamma_2}}{\Gamma(\alpha + \gamma_2 + 1)} + \frac{K_3 T^{\alpha-\beta_2}}{\Gamma(\alpha - \beta_2 + 1)} \Big] \Big) \\
 &\quad \times \|f(., x_n(.)) - f(., x(.))\|_\infty.
 \end{aligned}$$

Donc, $|(\mathcal{N}x_n)(t) - (\mathcal{N}x)(t)| \leq M \|f(., x_n(.)) - f(., x(.))\|_\infty$.

Puisque f est une fonction continue et d'après le théorème de la convergence dominée de

Lebesgue 1.2, on a

$$\|\mathcal{N}x_n - \mathcal{N}x\|_\infty \leq M\|f(\cdot, x_n(\cdot)) - f(\cdot, x(\cdot))\|_\infty \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Alors $\mathcal{N}$ est continu sur $C([0, T], \mathbb{R})$.

– Étape 2 : l'image d'un ensemble borné est un ensemble uniformément borné dans $C([0, T], \mathbb{R})$.

Soit $\overline{\mathcal{B}}(0, r) = \{x \in C([0, T], \mathbb{R}) : \|x\|_\infty \leq r\}$ un ensemble borné dans $C([0, T], \mathbb{R})$ et $r > 0$.

Il suffit de montrer que : il existe C une constante positive tel que $\|\mathcal{N}(x)\|_\infty \leq C$ en effet,

soit $x \in \overline{\mathcal{B}}(0, r)$ et pour tout $t \in [0, T]$, nous avons

$$\begin{aligned} |\mathcal{N}x(t)| &\leq \frac{1}{(\lambda+1)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-r)^{\alpha-1} |f(r, x(r))| dr + \frac{t}{|Q|} \left[K_4 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} |f(T, x(T))| \right. \\ &\quad + K_2 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} |f(T, x(T))| + (\lambda+1)(|K_2 \delta_2| + |K_4 \delta_1|) + K_4 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} |f(T, x(T))| \\ &\quad \left. + K_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} |f(T, x(T))| \right] + \frac{t^{\alpha-1}}{|Q|} \left[K_1 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} |f(T, x(T))| + K_3 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} |f(T, x(T))| \right. \\ &\quad \left. + (\lambda+1)(|K_3 \delta_1| + |K_1 \delta_2|) + K_1 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} |f(T, x(T))| + K_3 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} |f(T, x(T))| \right]. \end{aligned}$$

Par (H2), on a

$$\begin{aligned} |\mathcal{N}x(t)| &\leq \|p\|_{L^1} \psi(\|x\|) \left(\frac{1}{(\lambda+1)\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-r)^{\alpha-1} dr + \frac{T}{|Q|} \left[\frac{K_4 \mu_1}{\Gamma(\alpha-\beta_1)} \int_0^T (T-r)^{\alpha-\beta_1-1} dr \right. \right. \\ &\quad + \frac{K_2 \mu_2}{\Gamma(\alpha+\gamma_1)} \int_0^T (T-r)^{\alpha+\gamma_1-1} dr + \frac{K_4}{\Gamma(\alpha-\beta_2)} \int_0^T (T-r)^{\alpha-\beta_2-1} dr \\ &\quad + \frac{K_2}{\Gamma(\alpha+\gamma_2)} \int_0^T (T-r)^{\alpha+\gamma_2-1} dr \left. \right] + \frac{T^{\alpha-1}}{|Q|} \left[\frac{K_1 \mu_2}{\Gamma(\alpha+\gamma_1)} \int_0^T (T-r)^{\alpha+\gamma_1-1} dr \right. \\ &\quad + \frac{K_3 \mu_1}{\Gamma(\alpha-\beta_1)} \int_0^T (T-r)^{\alpha-\beta_1-1} dr + \frac{K_1}{\Gamma(\alpha+\gamma_2)} \int_0^T (T-r)^{\alpha+\gamma_2-1} dr \\ &\quad + \frac{K_3}{\Gamma(\alpha-\beta_2)} \int_0^T (T-r)^{\alpha-\beta_2-1} dr \left. \right] \Bigg) + \left(\frac{T}{|Q|} (\lambda+1)(|K_2 \delta_2| + |K_4 \delta_1|) \right. \\ &\quad \left. + \frac{T^{\alpha-1}}{|Q|} (\lambda+1)(|K_3 \delta_1| + |K_1 \delta_2|) \right), \\ &\leq \|p\|_{L^1} \psi(\|x\|) M + N = C. \end{aligned}$$

Donc, $\|\mathcal{N}x\|_\infty \leq C$.

– Étape 3 : l'image d'un ensemble borné est un ensemble équicontinu dans $C([0, T], \mathbb{R})$.

Soient $t_1, t_2 \in [0, T]$ tel que $t_1 < t_2$ et $x \in \overline{\mathcal{B}}(0, r)$, on a

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{N}x(t_2) - \mathcal{N}x(t_1)| &\leq \frac{1}{(\lambda + 1)\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^{t_1} [(t_2 - r)^{\alpha-1} - (t_1 - r)^{\alpha-1}] f(r, x(r)) dr \right| \\
 &+ \frac{1}{(\lambda + 1)\Gamma(\alpha)} \left| \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - r)^{\alpha-1} f(r, x(r)) dr \right| \\
 &+ \frac{|t_2 - t_1|}{|Q|} \left[K_4 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} |f(T, x(T))| + K_2 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} |f(T, x(T))| \right. \\
 &+ (\lambda + 1)(|K_2 \delta_2| + |K_4 \delta_1|) + K_4 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} |f(T, x(T))| \\
 &+ K_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} |f(T, x(T))| \left. \right] + \frac{|t_2^{\alpha-1} - t_1^{\alpha-1}|}{|Q|} \left[K_1 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} |f(T, x(T))| \right. \\
 &+ K_3 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} |f(T, x(T))| + (\lambda + 1)(|K_3 \delta_1| + |K_1 \delta_2|) \\
 &+ K_1 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} |f(T, x(T))| + K_3 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} |f(T, x(T))| \left. \right].
 \end{aligned}$$

Par (H2), on a

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{N}x(t_2) - \mathcal{N}x(t_1)| &\leq \frac{\|p\|_{L^1} \psi(\|x\|)}{(\lambda + 1)\Gamma(\alpha + 1)} \left(2(t_2 - t_1)^\alpha + t_1^\alpha - t_2^\alpha \right) \\
 &+ \frac{|t_2 - t_1|}{|Q|} \left[\|p\|_{L^1} \psi(\|x\|) \left(\frac{K_4 \mu_1 T^{\alpha-\beta_1}}{\Gamma(\alpha - \beta_1 + 1)} + \frac{K_2 \mu_2 T^{\alpha+\gamma_1}}{\Gamma(\alpha + \gamma_1 + 1)} \right. \right. \\
 &+ \left. \frac{K_4 T^{\alpha-\beta_2}}{\Gamma(\alpha - \beta_2 + 1)} + \frac{K_2 T^{\alpha+\gamma_2}}{\Gamma(\alpha + \gamma_2 + 1)} \right) + (\lambda + 1)(|K_2 \delta_2| + |K_4 \delta_1|) \left. \right] \\
 &+ \frac{|t_2^{\alpha-1} - t_1^{\alpha-1}|}{|Q|} \left[\|p\|_{L^1} \psi(\|x\|) \left(\frac{K_1 \mu_2 T^{\alpha+\gamma_1}}{\Gamma(\alpha + \gamma_1 + 1)} + \frac{K_3 \mu_1 T^{\alpha-\beta_1}}{\Gamma(\alpha - \beta_1 + 1)} \right. \right. \\
 &+ \left. \frac{K_1 T^{\alpha+\gamma_2}}{\Gamma(\alpha + \gamma_2 + 1)} + \frac{K_3 T^{\alpha-\beta_2}}{\Gamma(\alpha - \beta_2 + 1)} \right) + (\lambda + 1)(|K_3 \delta_1| + |K_1 \delta_2|) \left. \right].
 \end{aligned}$$

Quand $t_1 \rightarrow t_2$, le second membre droit de l'inégalité précédent tend vers zéro, d'où $\mathcal{N}$ est équicontinu.

Par les étapes 1 – 3 et le théorème d'Ascoli-Arzelà 1.9, on déduit que l'opérateur $\mathcal{N}$ est complètement continu.

– Étape 4 : nous allons montrer que la deuxième l'alternative du théorème 1.5 n'est pas vérifiée.

Soit $x \in C([0, T], \mathbb{R})$ et $x = \alpha_0 \mathcal{N}(x)$ pour $\alpha_0 \in (0, 1)$.

Par l'étape 2 et pour tout $t \in [0, T]$, on a

$$\begin{aligned} |x(t)| &= |\alpha_0 \mathcal{N}x(t)|, \\ &\leq \|p\|_{L^1} \psi(\|x\|) M + N. \end{aligned}$$

Alors,

$$\frac{\|x\|_\infty}{\|p\|_{L^1} \psi(\|x\|) M + N} \leq 1.$$

Donc, d'après la condition (2.11) du théorème 2.1, il existe une constante ω tel que $\|x\|_\infty \neq \omega$.

Soit

$$\mathcal{U} = \{x \in C([0, T], \mathbb{R}) : \|x\|_\infty < \omega\}.$$

L'opérateur $\mathcal{N} : \overline{\mathcal{U}} \rightarrow C([0, T], \mathbb{R})$ est complètement continu et d'après la définition de $\mathcal{U}$, il n'existe aucuns $x \in \partial \mathcal{U}$ tel que $x = \alpha_0 \mathcal{N}(x)$ pour $\alpha_0 \in (0, 1)$. Donc par l'alternative non linéaire de type Leray-Schauder 1.5, nous déduisons que le problème (2.1) – (2.2) admet au moins une solution sur $[0, T]$.

□

2.1.2.2 Deuxième résultat

Pour démontrer le deuxième résultat d'existence de solutions du problème (2.1) – (2.2), on va utiliser le théorème du point fixe de Krasnoselskii.

Théorème 2.2. *Supposons que les conditions (H1) et (H3) sont vérifiées.*

Si

$$l^* \widetilde{M} < 1,$$

alors, le problème fractionnaire (2.1) – (2.2) admet au moins une solution sur $[0, T]$.

Démonstration. Soient $r > 0$ avec $r \geq \|q\| M + N$ et $\overline{\mathcal{B}}(0, r) = \{x \in C([0, T], \mathbb{R}) : \|x\|_\infty \leq r\}$ un ensemble borné de $C([0, T], \mathbb{R})$.

On considère les opérateurs suivantes $A, B : \overline{\mathcal{B}}(0, r) \rightarrow C([0, T], \mathbb{R})$ défini par

$$\begin{aligned} A(x)(t) = & \frac{t}{Q} \left[K_4 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} f(T, x(T)) - K_2 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} f(T, x(T)) + (\lambda + 1)(K_2 \delta_2 - K_4 \delta_1) \right. \\ & + K_4 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} f(T, x(T)) - K_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} f(T, x(T)) \left. \right] + \frac{t^{\alpha-1}}{Q} \left[K_1 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} f(T, x(T)) \right. \\ & - K_3 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} f(T, x(T)) + (\lambda + 1)(K_3 \delta_1 - K_1 \delta_2) + K_1 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} f(T, x(T)) \\ & \left. - K_3 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} f(T, x(T)) \right], \end{aligned}$$

et

$$B(x)(t) = \frac{1}{(\lambda + 1)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - r)^{\alpha-1} f(r, x(r)) dr.$$

La solution du problème (2.1) – (2.2) est la solution de l'équation $x(t) = A(x)(t) + B(x)(t)$, pour tout $t \in [0, T]$. Nous devons montrer que les opérateurs A et B vérifient toutes les conditions du théorème 1.6.

– Étape 1 : on montre que $A(\overline{\mathcal{B}}(0, r)) + B(\overline{\mathcal{B}}(0, r)) \subset \overline{\mathcal{B}}(0, r)$.

Pour cela, soient $x, y \in \overline{\mathcal{B}}(0, r)$ et par (H3), pour tout $t \in [0, T]$ on a

$$\begin{aligned} |(Ax)(t) + (By)(t)| \leq & \frac{\|q\|}{(\lambda + 1)\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T - r)^{\alpha-1} dr + \frac{T\|q\|}{|Q|} \left[\frac{K_4 \mu_1}{\Gamma(\alpha - \beta_1)} \int_0^T (T - r)^{\alpha-\beta_1-1} dr \right. \\ & + \frac{K_2 \mu_2}{\Gamma(\alpha + \gamma_1)} \int_0^T (T - r)^{\alpha+\gamma_1-1} dr + \frac{K_4}{\Gamma(\alpha - \beta_2)} \int_0^T (T - r)^{\alpha-\beta_2-1} dr \\ & + \frac{K_2}{\Gamma(\alpha + \gamma_2)} \int_0^T (T - r)^{\alpha+\gamma_2-1} dr \left. \right] + \frac{T^{\alpha-1}\|q\|}{|Q|} \left[\frac{K_1 \mu_2}{\Gamma(\alpha + \gamma_1)} \int_0^T (T - r)^{\alpha+\gamma_1-1} dr \right. \\ & + \frac{K_3 \mu_1}{\Gamma(\alpha - \beta_1)} \int_0^T (T - r)^{\alpha-\beta_1-1} dr + \frac{K_1}{\Gamma(\alpha + \gamma_2)} \int_0^T (T - r)^{\alpha+\gamma_2-1} dr \\ & + \frac{K_3}{\Gamma(\alpha - \beta_2)} \int_0^T (T - r)^{\alpha-\beta_2-1} dr \left. \right] + \left[\frac{T}{|Q|} (\lambda + 1)(|K_2 \delta_2| + |K_4 \delta_1|) \right. \\ & \left. + \frac{T^{\alpha-1}}{|Q|} (\lambda + 1)(|K_3 \delta_1| + |K_1 \delta_2|) \right]. \end{aligned}$$

Donc, on obtient

$$\begin{aligned}\|Ax + By\|_\infty &= \sup_{t \in [0, T]} |(Ax)(t) + (By)(t)|, \\ &\leq \|q\|M + N, \\ &\leq r.\end{aligned}$$

Alors, $A(\overline{\mathcal{B}}(0, r)) + B(\overline{\mathcal{B}}(0, r)) \subset \overline{\mathcal{B}}(0, r)$.

– Étape 2 : A est une contraction.

En effet, soient $x, y \in \overline{\mathcal{B}}(0, r)$ et d'après (H1), pour tout $t \in [0, T]$ on a

$$\begin{aligned}|(Ax)(t) - (Ay)(t)| &\leq \frac{t}{|Q|} \left[\frac{K_4 \mu_1}{\Gamma(\alpha - \beta_1)} \int_0^T (T - r)^{\alpha - \beta_1 - 1} |f(r, x(r)) - f(r, y(r))| dr \right. \\ &\quad + \frac{K_2 \mu_2}{\Gamma(\alpha + \gamma_1)} \int_0^T (T - r)^{\alpha + \gamma_1 - 1} |f(r, x(r)) - f(r, y(r))| dr \\ &\quad + \frac{K_4}{\Gamma(\alpha - \beta_2)} \int_0^T (T - r)^{\alpha - \beta_2 - 1} |f(r, x(r)) - f(r, y(r))| dr \\ &\quad + \frac{K_2}{\Gamma(\alpha + \gamma_2)} \int_0^T (T - r)^{\alpha + \gamma_2 - 1} |f(r, x(r)) - f(r, y(r))| dr \left. \right] \\ &\quad + \frac{t^{\alpha-1}}{|Q|} \left[\frac{K_1 \mu_2}{\Gamma(\alpha + \gamma_1)} \int_0^T (T - r)^{\alpha + \gamma_1 - 1} |f(r, x(r)) - f(r, y(r))| dr \right. \\ &\quad + \frac{K_3 \mu_1}{\Gamma(\alpha - \beta_1)} \int_0^T (T - r)^{\alpha - \beta_1 - 1} |f(r, x(r)) - f(r, y(r))| dr \\ &\quad + \frac{K_1}{\Gamma(\alpha + \gamma_2)} \int_0^T (T - r)^{\alpha + \gamma_2 - 1} |f(r, x(r)) - f(r, y(r))| dr \\ &\quad + \frac{K_3}{\Gamma(\alpha - \beta_2)} \int_0^T (T - r)^{\alpha - \beta_2 - 1} |f(r, x(r)) - f(r, y(r))| dr \left. \right], \\ &\leq l^* \|x - y\|_\infty \left(\frac{T}{|Q|} \left[\frac{K_4 \mu_1 T^{\alpha - \beta_1}}{\Gamma(\alpha - \beta_1 + 1)} + \frac{K_2 \mu_2 T^{\alpha + \gamma_1}}{\Gamma(\alpha + \gamma_1 + 1)} + \frac{K_4 T^{\alpha - \beta_2}}{\Gamma(\alpha - \beta_2 + 1)} \right. \right. \\ &\quad + \left. \frac{K_2 T^{\alpha + \gamma_2}}{\Gamma(\alpha + \gamma_2 + 1)} \right] + \frac{T^{\alpha-1}}{|Q|} \left[\frac{K_1 \mu_2 T^{\alpha + \gamma_1}}{\Gamma(\alpha + \gamma_1 + 1)} + \frac{K_3 \mu_1 T^{\alpha - \beta_1}}{\Gamma(\alpha - \beta_1 + 1)} \right. \\ &\quad + \left. \left. \frac{K_1 T^{\alpha + \gamma_2}}{\Gamma(\alpha + \gamma_2 + 1)} + \frac{K_3 T^{\alpha - \beta_2}}{\Gamma(\alpha - \beta_2 + 1)} \right] \right). \end{aligned}$$

D'où

$$\|Ax - Ay\|_\infty \leq l^* \widetilde{M} \|x - y\|_\infty.$$

Alors, A est un opérateur contractant.

– Étape 3 : B est continu.

Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite tel que $x_n \rightarrow x$ dans $\overline{\mathcal{B}}(0, r)$ et pour tout $t \in [0, T]$ on a

$$\begin{aligned} |(Bx_n)(t) - (Bx)(t)| &\leq \frac{1}{(\lambda + 1)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - r)^{\alpha-1} |f(r, x_n(r)) - f(r, x(r))| dr, \\ &\leq \frac{T^\alpha}{(\lambda + 1)\Gamma(\alpha + 1)} \|f(., x_n(.)) - f(., x(.))\|_\infty. \end{aligned}$$

Puisque f est une fonction continue alors, on a

$$\|Bx_n - Bx\|_\infty \leq \frac{T^\alpha}{(\lambda + 1)\Gamma(\alpha + 1)} \|f(., x_n(.)) - f(., x(.))\|_\infty \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Donc, l'opérateur B est continu.

– Étape 4 : $B(\overline{\mathcal{B}}(0, r))$ est uniformément borné.

Soit $x \in \overline{\mathcal{B}}(0, r)$ et par (H3) pour tout $t \in [0, T]$, nous avons

$$\begin{aligned} |Bx(t)| &\leq \frac{1}{(\lambda + 1)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - r)^{\alpha-1} |f(r, x(r))| dr, \\ &\leq \frac{\|q\|}{(\lambda + 1)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - r)^{\alpha-1} dr, \\ &\leq \frac{\|q\| T^\alpha}{(\lambda + 1)\Gamma(\alpha + 1)}. \end{aligned}$$

D'où

$$\|Bx\|_\infty \leq \frac{\|q\| T^\alpha}{(\lambda + 1)\Gamma(\alpha + 1)}.$$

Ce qui implique que $B(\overline{\mathcal{B}}(0, r))$ est uniformément borné.

– Étape 5 : $B(\overline{\mathcal{B}}(0, r))$ est équicontinu.

Soient $t_1, t_2 \in [0, T]$, $t_1 < t_2$ et $x \in \overline{\mathcal{B}}(0, r)$, donc on a

$$\begin{aligned} |(Bx)(t_2) - (Bx)(t_1)| &\leq \left| \frac{1}{(\lambda + 1)\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} [(t_2 - r)^{\alpha-1} - (t_1 - r)^{\alpha-1}] f(r, x(r)) dr \right| \\ &\quad + \left| \frac{1}{(\lambda + 1)\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - r)^{\alpha-1} f(r, x(r)) dr \right|, \\ &\leq \frac{f^*}{(\lambda + 1)\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^{t_1} [(t_1 - r)^{\alpha-1} - (t_2 - r)^{\alpha-1}] dr + \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - r)^{\alpha-1} dr \right), \\ &\leq \frac{f^*}{(\lambda + 1)\Gamma(\alpha + 1)} \left(2(t_2 - t_1)^\alpha + t_1^\alpha - t_2^\alpha \right), \end{aligned}$$

où $f^* = \sup_{(t,x) \in [0,T] \times \overline{\mathcal{B}}(0,r)} |f(t, x)|$.

Si $t_1 \rightarrow t_2$ alors, le membre droit de la dernière inégalité tend vers zéro.

Par les étapes 4 – 5 et le théorème d'Ascoli-Arzelà 1.9, l'opérateur B est relativement compact d'où B complètement continu.

Alors, toutes les conditions du théorème 1.6 sont satisfaites et par conséquent, l'opérateur $A + B$ admet un point fixe qui la solution du problème (2.1) – (2.2). $\square$

2.1.2.3 Troisième résultat

Ce résultat d'existence et d'unicité basé sur le théorème du point fixe de Banach.

Théorème 2.3. *On suppose que la condition (H1) est vérifiée.*

Si $LM < 1$ alors, le problème aux limites (2.1) – (2.2) admet une solution unique sur l'intervalle $[0, T]$.

Démonstration. On va transformer le problème (2.1) – (2.2) à un problème du point fixe.

D'après le lemme 2.1, ce problème possède une solution si et seulement si l'opérateur $\mathcal{N}$ admet un point fixe dans l'espace $C([0, T], \mathbb{R})$.

On définit l'opérateur $\mathcal{N} : C([0, T], \mathbb{R}) \rightarrow C([0, T], \mathbb{R})$ par

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(x)(t) = & \frac{1}{(\lambda + 1)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - r)^{\alpha-1} f(r, x(r)) dr + \frac{t}{Q} \left[K_4 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} f(T, x(T)) \right. \\ & - K_2 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} f(T, x(T)) + (\lambda + 1)(K_2 \delta_2 - K_4 \delta_1) + K_4 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} f(T, x(T)) \\ & \left. - K_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} f(T, x(T)) \right] + \frac{t^{\alpha-1}}{Q} \left[K_1 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} f(T, x(T)) - K_3 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} f(T, x(T)) \right. \\ & \left. + (\lambda + 1)(K_3 \delta_1 - K_1 \delta_2) + K_1 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} f(T, x(T)) - K_3 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} f(T, x(T)) \right]. \end{aligned}$$

Soit $r > 0$ tel que $r \geq \frac{f^* M + N}{1 - l^* M}$, on introduit l'ensemble borné

$$\bar{\mathcal{B}}(0, r) = \{x \in C([0, T], \mathbb{R}) : \|x\|_\infty \leq r\}.$$

– On va démontrer que $\mathcal{N}(\bar{\mathcal{B}}(0, r)) \subset \bar{\mathcal{B}}(0, r)$.

Soit $x \in \bar{\mathcal{B}}(0, r)$, pour tout $t \in [0, T]$ on a

$$\begin{aligned} |\mathcal{N}(x)(t)| \leq & \sup_{t \in [0, T]} \left| \frac{1}{(\lambda + 1)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - r)^{\alpha-1} f(r, x(r)) dr + \frac{t}{Q} \left[K_4 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} f(T, x(T)) \right. \right. \\ & - K_2 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} f(T, x(T)) + (\lambda + 1)(K_2 \delta_2 - K_4 \delta_1) + K_4 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} f(T, x(T)) \\ & \left. - K_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} f(T, x(T)) \right] + \frac{t^{\alpha-1}}{Q} \left[K_1 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} f(T, x(T)) - K_3 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} f(T, x(T)) \right. \\ & \left. + (\lambda + 1)(K_3 \delta_1 - K_1 \delta_2) + K_1 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} f(T, x(T)) - K_3 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} f(T, x(T)) \right] \Big|. \\ \leq & \frac{1}{(\lambda + 1)\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T - r)^{\alpha-1} \left(|f(r, x(r)) - f(r, 0)| + |f(r, 0)| \right) dr + \frac{T}{|Q|} \left[\frac{K_4 \mu_1}{\Gamma(\alpha - \beta_1)} \right. \\ & \int_0^T (T - r)^{\alpha-\beta_1-1} \left(|f(r, x(r)) - f(r, 0)| + |f(r, 0)| \right) dr + \frac{K_2 \mu_2}{\Gamma(\alpha + \gamma_1)} \int_0^T (T - r)^{\alpha+\gamma_1-1} \\ & \left(|f(r, x(r)) - f(r, 0)| + |f(r, 0)| \right) dr + (\lambda + 1)(|K_2 \delta_2| + |K_4 \delta_1|) + \frac{K_4}{\Gamma(\alpha - \beta_2)} \\ & \left. \int_0^T (T - r)^{\alpha-\beta_2-1} \left(|f(r, x(r)) - f(r, 0)| + |f(r, 0)| \right) dr + \frac{K_2}{\Gamma(\alpha + \gamma_2)} \int_0^T (T - r)^{\alpha+\gamma_2-1} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left(|f(r, x(r)) - f(r, 0)| + |f(r, 0)| \right) dr \Big] + \frac{T^{\alpha-1}}{|Q|} \left[\frac{K_1 \mu_2}{\Gamma(\alpha + \gamma_1)} \int_0^T (T-r)^{\alpha+\gamma_1-1} \left(|f(r, x(r)) \right. \right. \\
 & \left. \left. - f(r, 0)| + |f(r, 0)| \right) dr + \frac{K_3 \mu_1}{\Gamma(\alpha - \beta_1)} \int_0^T (T-r)^{\alpha-\beta_1-1} \left(|f(r, x(r)) - f(r, 0)| \right. \right. \\
 & \left. \left. + |f(r, 0)| \right) dr + (\lambda + 1)(|K_3 \delta_1| + |K_1 \delta_2|) + \frac{K_1}{\Gamma(\alpha + \gamma_2)} \int_0^T (T-r)^{\alpha+\gamma_2-1} \left(|f(r, x(r)) \right. \right. \\
 & \left. \left. - f(r, 0)| + |f(r, 0)| \right) dr + \frac{K_3}{\Gamma(\alpha - \beta_2)} \int_0^T (T-r)^{\alpha-\beta_2-1} \left(|f(r, x(r)) - f(r, 0)| + |f(r, 0)| \right) dr \right].
 \end{aligned}$$

Posons $f^* = \sup_{t \in [0, T]} |f(t, 0)|$ et par la condition (H1), on trouve

$$\begin{aligned}
 \|\mathcal{N}(x)\|_\infty & \leq (l^* \|x\|_\infty + f^*) \left(\frac{1}{(\lambda + 1)\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-r)^{\alpha-1} dr + \frac{T}{|Q|} \left[\frac{K_4 \mu_1}{\Gamma(\alpha - \beta_1)} \int_0^T (T-r)^{\alpha-\beta_1-1} dr \right. \right. \\
 & + \frac{K_2 \mu_2}{\Gamma(\alpha + \gamma_1)} \int_0^T (T-r)^{\alpha+\gamma_1-1} dr + \frac{K_4}{\Gamma(\alpha - \beta_2)} \int_0^T (T-r)^{\alpha-\beta_2-1} dr + \frac{K_2}{\Gamma(\alpha + \gamma_2)} \\
 & \left. \int_0^T (T-r)^{\alpha+\gamma_2-1} dr \right] + \frac{T^{\alpha-1}}{|Q|} \left[\frac{K_1 \mu_2}{\Gamma(\alpha + \gamma_1)} \int_0^T (T-r)^{\alpha+\gamma_1-1} dr + \frac{K_3 \mu_1}{\Gamma(\alpha - \beta_1)} \right. \\
 & \left. \int_0^T (T-r)^{\alpha-\beta_1-1} dr + \frac{K_1}{\Gamma(\alpha + \gamma_2)} \int_0^T (T-r)^{\alpha+\gamma_2-1} dr + \frac{K_3}{\Gamma(\alpha - \beta_2)} \right. \\
 & \left. \int_0^T (T-r)^{\alpha-\beta_2-1} dr \right] \Big) + \left[\frac{T}{|Q|} (\lambda + 1)(|K_2 \delta_2| + |K_4 \delta_1|) + \frac{T^{\alpha-1}}{|Q|} (\lambda + 1)(|K_3 \delta_1| + |K_1 \delta_2|) \right], \\
 & \leq (l^* \|x\|_\infty + f^*) \left(\frac{T^\alpha}{(\lambda + 1)\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{T}{|Q|} \left[\frac{K_4 \mu_1 T^{\alpha-\beta_1}}{\Gamma(\alpha - \beta_1 + 1)} + \frac{K_2 \mu_2 T^{\alpha+\gamma_1}}{\Gamma(\alpha + \gamma_1 + 1)} \right. \right. \\
 & + \frac{K_4 T^{\alpha-\beta_2}}{\Gamma(\alpha - \beta_2 + 1)} + \frac{K_2 T^{\alpha+\gamma_2}}{\Gamma(\alpha + \gamma_2 + 1)} \Big] + \frac{T^{\alpha-1}}{|Q|} \left[\frac{K_1 \mu_2 T^{\alpha+\gamma_1}}{\Gamma(\alpha + \gamma_1 + 1)} + \frac{K_3 \mu_1 T^{\alpha-\beta_1}}{\Gamma(\alpha - \beta_1 + 1)} \right. \\
 & + \frac{K_1 T^{\alpha+\gamma_2}}{\Gamma(\alpha + \gamma_2 + 1)} + \frac{K_3 T^{\alpha-\beta_2}}{\Gamma(\alpha - \beta_2 + 1)} \Big] \Big) + \left[\frac{T}{|Q|} (\lambda + 1)(|K_2 \delta_2| + |K_4 \delta_1|) \right. \\
 & \left. + \frac{T^{\alpha-1}}{|Q|} (\lambda + 1)(|K_3 \delta_1| + |K_1 \delta_2|) \right],
 \end{aligned}$$

donc, on obtient

$$\|\mathcal{N}(x)\|_\infty \leq (l^*\|x\|_\infty + f^*)M + N,$$

$$\leq (l^*r + f^*)M + N.$$

D'où $\|\mathcal{N}(x)\|_\infty \leq r$.

Ce qui implique que $\mathcal{N}(\overline{\mathcal{B}}(0, r)) \subset \overline{\mathcal{B}}(0, r)$.

– Maintenant, soient $x, y \in C([0, T], \mathbb{R})$. Alors pour tout $t \in [0, T]$ nous avons

$$\begin{aligned} \|\mathcal{N}(x) - \mathcal{N}(y)\|_\infty &= \sup_{t \in [0, T]} |\mathcal{N}(x)(t) - \mathcal{N}(y)(t)|, \\ &\leq \frac{1}{(\lambda + 1)\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T - r)^{\alpha-1} |f(r, x(r)) - f(r, y(r))| dr + \frac{T}{|Q|} \left[\frac{K_4 \mu_1}{\Gamma(\alpha - \beta_1)} \right. \\ &\quad \left. \int_0^T (T - r)^{\alpha-\beta_1-1} |f(r, x(r)) - f(r, y(r))| dr + \frac{K_2 \mu_2}{\Gamma(\alpha + \gamma_1)} \int_0^T (T - r)^{\alpha+\gamma_1-1} \right. \\ &\quad \left. |f(r, x(r)) - f(r, y(r))| dr + \frac{K_4}{\Gamma(\alpha - \beta_2)} \int_0^T (T - r)^{\alpha-\beta_2-1} |f(r, x(r)) \right. \\ &\quad \left. - f(r, y(r))| dr + \frac{K_2}{\Gamma(\alpha + \gamma_2)} \int_0^T (T - r)^{\alpha+\gamma_2-1} |f(r, x(r)) - f(r, y(r))| dr \right] \\ &\quad + \frac{T^{\alpha-1}}{|Q|} \left[\frac{K_1 \mu_2}{\Gamma(\alpha + \gamma_1)} \int_0^T (T - r)^{\alpha+\gamma_1-1} |f(r, x(r)) - f(r, y(r))| dr \right. \\ &\quad + \frac{K_3 \mu_1}{\Gamma(\alpha - \beta_1)} \int_0^T (T - r)^{\alpha-\beta_1-1} |f(r, x(r)) - f(r, y(r))| dr \\ &\quad + \frac{K_1}{\Gamma(\alpha + \gamma_2)} \int_0^T (T - r)^{\alpha+\gamma_2-1} |f(r, x(r)) - f(r, y(r))| dr + \frac{K_3}{\Gamma(\alpha - \beta_2)} \\ &\quad \left. \int_0^T (T - r)^{\alpha-\beta_2-1} |f(r, x(r)) - f(r, y(r))| dr \right]. \end{aligned}$$

Par la condition (H1), on a

$$\begin{aligned} \|\mathcal{N}(x) - \mathcal{N}(y)\|_\infty &\leq l^* \|x - y\|_\infty \left(\frac{T^\alpha}{(\lambda + 1)\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{T}{|Q|} \left[\frac{K_4 \mu_1 T^{\alpha - \beta_1}}{\Gamma(\alpha - \beta_1 + 1)} + \frac{K_2 \mu_2 T^{\alpha + \gamma_1}}{\Gamma(\alpha + \gamma_1 + 1)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{K_4 T^{\alpha - \beta_2}}{\Gamma(\alpha - \beta_2 + 1)} + \frac{K_2 T^{\alpha + \gamma_2}}{\Gamma(\alpha + \gamma_2 + 1)} \right] + \frac{T^{\alpha - 1}}{|Q|} \left[\frac{K_1 \mu_2 T^{\alpha + \gamma_1}}{\Gamma(\alpha + \gamma_1 + 1)} + \frac{K_3 \mu_1 T^{\alpha - \beta_1}}{\Gamma(\alpha - \beta_1 + 1)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{K_1 T^{\alpha + \gamma_2}}{\Gamma(\alpha + \gamma_2 + 1)} + \frac{K_3 T^{\alpha - \beta_2}}{\Gamma(\alpha - \beta_2 + 1)} \right] \right), \\ &\leq l^* M \|x - y\|_\infty. \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{N}$ est une application de contraction.

On conclut alors que $\mathcal{N}$ admet un point fixe unique donc, le problème aux limites (2.1) – (2.2) possède une seule solution sur l'intervalle $[0, T]$.

□

2.2 Problème aux limites pour les équations différentielles hybrides d'ordre fractionnaire

Dans cette section, nous donnons un résultat d'existence de solution du problème aux limites pour une equation différentiel fractionnaire hybride de la forme

$$\begin{cases} (\lambda {}^C\mathcal{D}^\alpha + {}^R\mathcal{D}^\alpha) \left[\frac{x(t)}{h(t, x(t))} \right] = f(t, x(t)), & 0 < t < T, 1 < \alpha \leq 2, \\ \left[\frac{x(t)}{h(t, x(t))} \right]_{t=0} = 0, \\ \mu_1 {}^R\mathcal{D}^{\beta_1} \left[\frac{x(t)}{h(t, x(t))} \right]_{t=T} + {}^R\mathcal{D}^{\beta_2} \left[\frac{x(t)}{h(t, x(t))} \right]_{t=T} = \delta_1, \\ \mu_2 \mathcal{I}^{\gamma_1} \left[\frac{x(t)}{h(t, x(t))} \right]_{t=T} + \mathcal{I}^{\gamma_2} \left[\frac{x(t)}{h(t, x(t))} \right]_{t=T} = \delta_2. \end{cases} \quad (2.12)$$

Où

- ${}^C\mathcal{D}, {}^R\mathcal{D}$ sont représentés les dérivées fractionnaires au sens de Caputo et de Riemann-Liouville respectivement.
- $\mathcal{I}^{\gamma_i}$ est l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\gamma_i \in \mathbb{R}_+$ ($i = 1, 2$).
- $h : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ et $f : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions réelles continues données.
- $\lambda, \mu_1, \mu_2, \delta_1, \delta_2 \in (0, 1]$ sont des constantes et $0 \leq \beta_1, \beta_2 < \alpha$.

2.2.1 Problème intégral

Le lemme suivant est très important pour donner la relation entre le problème fractionnaire (2.12) et l'équation intégrale.

Lemme 2.2. [42] Soit $g \in C([0, T], \mathbb{R})$ et $1 < \alpha \leq 2$, alors x est une solution du problème

$$\begin{cases} (\lambda^C \mathcal{D}^\alpha + {}^R\mathcal{D}^\alpha) \left[\frac{x(t)}{h(t, x(t))} \right] = g(t), & 0 < t < T, 1 < \alpha \leq 2, \\ \left[\frac{x(t)}{h(t, x(t))} \right]_{t=0} = 0, \\ \mu_1 {}^R\mathcal{D}^{\beta_1} \left[\frac{x(t)}{h(t, x(t))} \right]_{t=T} + {}^R\mathcal{D}^{\beta_2} \left[\frac{x(t)}{h(t, x(t))} \right]_{t=T} = \delta_1, \\ \mu_2 \mathcal{I}^{\gamma_1} \left[\frac{x(t)}{h(t, x(t))} \right]_{t=T} + \mathcal{I}^{\gamma_2} \left[\frac{x(t)}{h(t, x(t))} \right]_{t=T} = \delta_2, \end{cases} \quad (2.13)$$

si et seulement si x est une solution de l'équation intégrale fractionnaire

$$\begin{aligned} x(t) = h(t, x(t)) & \left(\frac{1}{(\lambda + 1)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - r)^{\alpha-1} g(r) dr + \frac{t}{Q} \left[K_4 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} g(T) - K_2 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} g(T) \right. \right. \\ & + (\lambda + 1)(K_2 \delta_2 - K_4 \delta_1) + K_4 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} g(T) - K_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} g(T) \Big] + \frac{t^{\alpha-1}}{Q} \left[K_1 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} g(T) \right. \\ & \left. \left. - K_3 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} g(T) + (\lambda + 1)(K_3 \delta_1 - K_1 \delta_2) + K_1 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} g(T) - K_3 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} g(T) \right] \right), \end{aligned} \quad (2.14)$$

où K_i sont des constantes définies par (2.3).

Démonstration. Soit x est une solution de (2.13), donc

$$\lambda^C \mathcal{D}^\alpha \left[\frac{x(t)}{h(t, x(t))} \right] + {}^R\mathcal{D}^\alpha \left[\frac{x(t)}{h(t, x(t))} \right] = g(t). \quad (2.15)$$

En composant par l'intégrale de Riemann-Liouville d'ordre α dans les deux côtés de l'équation (2.15), on trouve

$$\lambda \mathcal{I}^{\alpha C} \mathcal{D}^\alpha \left[\frac{x(t)}{h(t, x(t))} \right] + \mathcal{I}^{\alpha R} \mathcal{D}^\alpha \left[\frac{x(t)}{h(t, x(t))} \right] = \mathcal{I}^\alpha g(t),$$

en appliquant les lemmes 1.4 et 1.6, on obtient

$$(\lambda + 1) \left[\frac{x(t)}{h(t, x(t))} \right] = c_0 + c_1 t + c_2 t^{\alpha-1} + c_3 t^{\alpha-2} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - r)^{\alpha-1} g(r) dr,$$

où c_i sont des constantes pour tout $i = 0, 1, 2, 3$.

En utilisant la première condition dans (2.13) implique que $c_0 = c_3 = 0$, donc

$$\left[\frac{x(t)}{h(t, x(t))} \right] = \frac{c_1}{(\lambda + 1)} t + \frac{c_2}{(\lambda + 1)} t^{\alpha-1} + \frac{1}{(\lambda + 1)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - r)^{\alpha-1} g(r) dr. \quad (2.16)$$

D'après les autres conditions du problème (2.13), on aura

$$c_1 K_1 + c_2 K_2 = \delta_1 - \frac{\mu_1}{(\lambda + 1)} \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} g(T) - \frac{1}{(\lambda + 1)} \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} g(T),$$

et

$$c_1 K_3 + c_2 K_4 = \delta_2 - \frac{\mu_2}{(\lambda + 1)} \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} g(T) - \frac{1}{(\lambda + 1)} \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} g(T).$$

Par suite, on arrive à

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{K_4 \mu_1}{(K_2 K_3 - K_1 K_4)(\lambda + 1)} \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} g(T) - \frac{K_2 \mu_2}{(K_2 K_3 - K_1 K_4)(\lambda + 1)} \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} g(T) \\ &+ \frac{1}{(K_2 K_3 - K_1 K_4)} (K_2 \delta_2 - K_4 \delta_1) + \frac{K_4}{(K_2 K_3 - K_1 K_4)(\lambda + 1)} \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} g(T) \\ &- \frac{K_2}{(K_2 K_3 - K_1 K_4)(\lambda + 1)} \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} g(T), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{K_1 \mu_2}{(K_2 K_3 - K_1 K_4)(\lambda + 1)} \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} g(T) - \frac{K_3 \mu_1}{(K_2 K_3 - K_1 K_4)(\lambda + 1)} \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} g(T) \\ &+ \frac{1}{(K_2 K_3 - K_1 K_4)} (K_3 \delta_1 - K_1 \delta_2) + \frac{K_1}{(K_2 K_3 - K_1 K_4)(\lambda + 1)} \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} g(T) \\ &- \frac{K_3}{(K_2 K_3 - K_1 K_4)(\lambda + 1)} \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} g(T). \end{aligned}$$

Finalement, on remplace c_1 et c_2 dans (2.16) donc, on trouve le résultat

$$\begin{aligned} x(t) &= h(t, x(t)) \left(\frac{1}{(\lambda + 1)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-r)^{\alpha-1} g(r) dr + \frac{t}{Q} \left[K_4 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} g(T) - K_2 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} g(T) \right. \right. \\ &+ (\lambda + 1)(K_2 \delta_2 - K_4 \delta_1) + K_4 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} g(T) - K_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} g(T) \left. \right] + \frac{t^{\alpha-1}}{Q} \left[K_1 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} g(T) \right. \\ &- K_3 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} g(T) + (\lambda + 1)(K_3 \delta_1 - K_1 \delta_2) + K_1 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} g(T) - K_3 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} g(T) \left. \right] \Bigg). \end{aligned}$$

Réciproquement, si l'équation (2.14) satisfait l'équation différentielle non homogène et les conditions (2.13), donc x est une solution du problème fractionnaire aux limites (2.13). $\square$

2.2.2 Résultat d'existence

Le but de cette partie est d'établir un résultat d'existence pour le problème aux limites (2.12), nous imposons les hypothèses suivantes :

(H4) Il existe une fonction bornée $\theta : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que :

$$|h(t, x) - h(t, y)| \leq \theta(t)|x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \text{ et } t \in [0, T].$$

(H5) Il existe une fonction positive continue $p : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ et une fonction continue croissante $\psi : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ satisfaisant

$$|f(t, x)| \leq p(t)\psi(\|x\|) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ et } t \in [0, T].$$

(H6) Il existe un nombre réel $r \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$r > \frac{h^* p^* \psi(\|x\|)M + h^* N}{1 - \theta^* p^* \psi(\|x\|)M - \theta^* N}, \quad (2.17)$$

où

$$h^* = \sup_{t \in [0, T]} |h(t, 0)|, \quad p^* = \sup_{t \in [0, T]} |p(t)| \text{ et } \theta^* = \sup_{t \in [0, T]} |\theta(t)|.$$

Les constantes M et N sont définies respectivement par (2.5) et (2.7).

Théorème 2.4. [42] *Supposons que les hypothèses (H4) – (H6) sont vérifiées.*

Si

$$\theta^* p^* \psi(\|x\|)M + \theta^* N < 1,$$

alors le problème hybride (2.12) admet au moins une solution sur l'intervalle $[0, T]$.

Démonstration. Pour démontrer l'existence de la solution du problème (2.12) dans l'algèbre de Banach $C([0, T], \mathbb{R})$, nous utilisons le théorème 1.7.

On définit la boule fermée $\overline{\mathcal{B}}(0, r)$ de rayon $r > 0$ où r est tel que (2.17) par

$$\overline{\mathcal{B}}(0, r) = \{x \in C([0, T], \mathbb{R}) : \|x\|_\infty \leq r\},$$

d'après le lemme 2.2, la solution du problème (2.12) est donnée par

$$\begin{aligned}
 x(t) = h(t, x(t)) & \left(\frac{1}{(\lambda+1)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-r)^{\alpha-1} f(r, x(r)) dr + \frac{t}{Q} \left[K_4 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} f(T, x(T)) \right. \right. \\
 & - K_2 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} f(T, x(T)) + (\lambda+1)(K_2 \delta_2 - K_4 \delta_1) + K_4 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} f(T, x(T)) \\
 & \left. \left. - K_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} f(T, x(T)) \right] + \frac{t^{\alpha-1}}{Q} \left[K_1 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} f(T, x(T)) - K_3 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} f(T, x(T)) \right. \right. \\
 & \left. \left. + (\lambda+1)(K_3 \delta_1 - K_1 \delta_2) + K_1 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} f(T, x(T)) - K_3 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} f(T, x(T)) \right] \right). \tag{2.18}
 \end{aligned}$$

On définit les deux opérateurs $A, B : \bar{\mathcal{B}}(0, r) \rightarrow C([0, T], \mathbb{R})$ comme suit

$$(Ax)(t) = h(t, x(t)) \quad \text{pour } t \in [0, T],$$

et

$$\begin{aligned}
 (Bx)(t) = & \frac{1}{(\lambda+1)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-r)^{\alpha-1} f(r, x(r)) dr + \frac{t}{Q} \left[K_4 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} f(T, x(T)) \right. \\
 & - K_2 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} f(T, x(T)) + (\lambda+1)(K_2 \delta_2 - K_4 \delta_1) + K_4 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} f(T, x(T)) \\
 & \left. - K_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} f(T, x(T)) \right] + \frac{t^{\alpha-1}}{Q} \left[K_1 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} f(T, x(T)) - K_3 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} f(T, x(T)) \right. \\
 & \left. + (\lambda+1)(K_3 \delta_1 - K_1 \delta_2) + K_1 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} f(T, x(T)) - K_3 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} f(T, x(T)) \right], \quad \forall t \in [0, T].
 \end{aligned}$$

L'équation intégrale (2.18) est équivalente à l'équation opérationnelle $x = Ax Bx$.

Maintenant, nous allons démontrer que l'équation opérationnelle admet un point fixe. i.e les deux opérateurs A et B vérifient toutes les hypothèses du théorème de point fixe 1.7.

– Étape 1 : l'opérateur A est Lipschitzien sur $\bar{\mathcal{B}}(0, r)$.

Soient $x, y \in \bar{\mathcal{B}}(0, r)$ et par (H4), on a pour tout $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned}
 |(Ax)(t) - (Ay)(t)| &= |h(t, x(t)) - h(t, y(t))|, \\
 &\leq \theta(t) |x(t) - y(t)|, \\
 &\leq \theta^* \|x - y\|_\infty.
 \end{aligned}$$

En passant à la norme on obtient

$$\|Ax - Ay\|_\infty \leq l^* \|x - y\|_\infty,$$

d'où A est un opérateur Lipschitzien avec $l^* = \theta^*$.

– Étape 2 : B est un opérateur continu sur $\bar{\mathcal{B}}(0, r)$.

Soit (x_n) une suite converge dans $\bar{\mathcal{B}}(0, r)$ vers $x \in \bar{\mathcal{B}}(0, r)$. Montrons que (Bx_n) converge vers Bx .

Soit $t \in [0, T]$, on a

$$\begin{aligned} |(Bx_n)(t) - (Bx)(t)| &\leq \frac{1}{(\lambda + 1)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - r)^{\alpha-1} |f(r, x_n(r)) - f(r, x(r))| dr + \frac{t}{|Q|} \left[\frac{K_4 \mu_1}{\Gamma(\alpha - \beta_1)} \right. \\ &\quad \int_0^T (T - r)^{\alpha-\beta_1-1} |f(r, x_n(r)) - f(r, x(r))| dr + \frac{K_2 \mu_2}{\Gamma(\alpha + \gamma_1)} \int_0^T (T - r)^{\alpha+\gamma_1-1} \\ &\quad |f(r, x_n(r)) - f(r, x(r))| dr + \frac{K_4}{\Gamma(\alpha - \beta_2)} \int_0^T (T - r)^{\alpha-\beta_2-1} |f(r, x_n(r)) \\ &\quad - f(r, x(r))| dr + \frac{K_2}{\Gamma(\alpha + \gamma_2)} \int_0^T (T - r)^{\alpha+\gamma_2-1} |f(r, x_n(r)) - f(r, x(r))| dr \left. \right] \\ &\quad + \frac{t^{\alpha-1}}{|Q|} \left[\frac{K_1 \mu_2}{\Gamma(\alpha + \gamma_1)} \int_0^T (T - r)^{\alpha+\gamma_1-1} |f(r, x_n(r)) - f(r, x(r))| dr + \frac{K_3 \mu_1}{\Gamma(\alpha - \beta_1)} \right. \\ &\quad \int_0^T (T - r)^{\alpha-\beta_1-1} |f(r, x_n(r)) - f(r, x(r))| dr + \frac{K_1}{\Gamma(\alpha + \gamma_2)} \\ &\quad \int_0^T (T - r)^{\alpha+\gamma_2-1} |f(r, x_n(r)) - f(r, x(r))| dr + \frac{K_3}{\Gamma(\alpha - \beta_2)} \int_0^T (T - r)^{\alpha-\beta_2-1} \\ &\quad |f(r, x_n(r)) - f(r, x(r))| dr \left. \right], \\ &\leq \left(\frac{T^\alpha}{(\lambda + 1)\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{T}{|Q|} \left[\frac{K_4 \mu_1 T^{\alpha-\beta_1}}{\Gamma(\alpha - \beta_1 + 1)} + \frac{K_2 \mu_2 T^{\alpha+\gamma_1}}{\Gamma(\alpha + \gamma_1 + 1)} \right. \right. \\ &\quad + \frac{K_4 T^{\alpha-\beta_2}}{\Gamma(\alpha - \beta_2 + 1)} + \frac{K_2 T^{\alpha+\gamma_2}}{\Gamma(\alpha + \gamma_2 + 1)} \left. \right] + \frac{T^{\alpha-1}}{|Q|} \left[\frac{K_1 \mu_2 T^{\alpha+\gamma_1}}{\Gamma(\alpha + \gamma_1 + 1)} \right. \\ &\quad + \frac{K_3 \mu_1 T^{\alpha-\beta_1}}{\Gamma(\alpha - \beta_1 + 1)} + \frac{K_1 T^{\alpha+\gamma_2}}{\Gamma(\alpha + \gamma_2 + 1)} + \frac{K_3 T^{\alpha-\beta_2}}{\Gamma(\alpha - \beta_2 + 1)} \left. \right] \Bigg) \\ &\quad \times \|f(., x_n(.)) - f(., x(.))\|_\infty. \end{aligned}$$

Puisque f est une fonction continue et par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue 1.2, nous déduisons que

$$\|f(., x_n(.)) - f(., x(.))\|_\infty \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

D'où

$$\|Bx_n - Bx\|_\infty \leq M\|f(., x_n(.)) - f(., x(.))\|_\infty \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty,$$

donc, l'opérateur B est continu.

– Étape 3 : l'ensemble $B(\bar{\mathcal{B}}(0, r))$ est uniformément borné.

Soit $x \in \bar{\mathcal{B}}(0, r)$ et pour tout $t \in [0, T]$, on a

$$\begin{aligned} |Bx(t)| &\leq \frac{1}{(\lambda+1)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-r)^{\alpha-1} |f(r, x(r))| dr + \frac{t}{|Q|} \left[K_4 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} |f(T, x(T))| \right. \\ &\quad + K_2 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} |f(T, x(T))| + (\lambda+1)(|K_2 \delta_2| + |K_4 \delta_1|) + K_4 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} |f(T, x(T))| \\ &\quad \left. + K_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} |f(T, x(T))| \right] + \frac{t^{\alpha-1}}{|Q|} \left[K_1 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} |f(T, x(T))| + K_3 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} |f(T, x(T))| \right. \\ &\quad \left. + (\lambda+1)(|K_3 \delta_1| + |K_1 \delta_2|) + K_1 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} |f(T, x(T))| + K_3 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} |f(T, x(T))| \right]. \end{aligned}$$

Par (H5), on a

$$\begin{aligned} |Bx(t)| &\leq p^* \psi(\|x\|) \left(\frac{1}{(\lambda+1)\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-r)^{\alpha-1} dr + \frac{T}{|Q|} \left[\frac{K_4 \mu_1}{\Gamma(\alpha-\beta_1)} \int_0^T (T-r)^{\alpha-\beta_1-1} dr \right. \right. \\ &\quad + \frac{K_2 \mu_2}{\Gamma(\alpha+\gamma_1)} \int_0^T (T-r)^{\alpha+\gamma_1-1} dr + \frac{K_4}{\Gamma(\alpha-\beta_2)} \int_0^T (T-r)^{\alpha-\beta_2-1} dr \\ &\quad + \frac{K_2}{\Gamma(\alpha+\gamma_2)} \int_0^T (T-r)^{\alpha+\gamma_2-1} dr \left. \right] + \frac{T^{\alpha-1}}{|Q|} \left[\frac{K_1 \mu_2}{\Gamma(\alpha+\gamma_1)} \int_0^T (T-r)^{\alpha+\gamma_1-1} dr \right. \\ &\quad + \frac{K_3 \mu_1}{\Gamma(\alpha-\beta_1)} \int_0^T (T-r)^{\alpha-\beta_1-1} dr + \frac{K_1}{\Gamma(\alpha+\gamma_2)} \int_0^T (T-r)^{\alpha+\gamma_2-1} dr \\ &\quad + \frac{K_3}{\Gamma(\alpha-\beta_2)} \int_0^T (T-r)^{\alpha-\beta_2-1} dr \left. \right] + \left(\frac{T}{|Q|} (\lambda+1)(|K_2 \delta_2| + |K_4 \delta_1|) \right. \\ &\quad \left. + \frac{T^{\alpha-1}}{|Q|} (\lambda+1)(|K_3 \delta_1| + |K_1 \delta_2|) \right), \\ &\leq p^* \psi(\|x\|) M + N = C. \end{aligned}$$

D'où $\|Bx\|_\infty \leq C$, donc $B(\overline{\mathcal{B}}(0, r))$ est uniformément borné.

– Étape 4 : l'ensemble $B(\overline{\mathcal{B}}(0, r))$ est équicontinu.

Soient $t_1, t_2 \in [0, T]$ tel que $t_1 < t_2$ et $x \in \overline{\mathcal{B}}(0, r)$, on a

$$\begin{aligned}
 |(Bx)(t_2) - (Bx)(t_1)| &\leq \frac{1}{(\lambda + 1)\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^{t_1} [(t_2 - r)^{\alpha-1} - (t_1 - r)^{\alpha-1}] f(r, x(r)) dr \right| \\
 &\quad + \frac{1}{(\lambda + 1)\Gamma(\alpha)} \left| \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - r)^{\alpha-1} f(r, x(r)) dr \right| \\
 &\quad + \frac{|t_2 - t_1|}{|Q|} \left[K_4 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} |f(T, x(T))| + K_2 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} |f(T, x(T))| \right. \\
 &\quad + (\lambda + 1)(|K_2 \delta_2| + |K_4 \delta_1|) + K_4 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} |f(T, x(T))| \\
 &\quad + K_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} |f(T, x(T))| \left. \right] + \frac{|t_2^{\alpha-1} - t_1^{\alpha-1}|}{|Q|} \left[K_1 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} |f(T, x(T))| \right. \\
 &\quad + K_3 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} |f(T, x(T))| + (\lambda + 1)(|K_3 \delta_1| + |K_1 \delta_2|) \\
 &\quad + K_1 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} |f(T, x(T))| + K_3 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} |f(T, x(T))| \left. \right].
 \end{aligned}$$

Par (H5), on trouve

$$\begin{aligned}
 |(Bx)(t_2) - (Bx)(t_1)| &\leq \frac{p^* \psi(\|x\|)}{(\lambda + 1)\Gamma(\alpha + 1)} \left(2(t_2 - t_1)^\alpha + t_1^\alpha - t_2^\alpha \right) \\
 &\quad + \frac{|t_2 - t_1|}{|Q|} \left[p^* \psi(\|x\|) \left(\frac{K_4 \mu_1 T^{\alpha-\beta_1}}{\Gamma(\alpha - \beta_1 + 1)} + \frac{K_2 \mu_2 T^{\alpha+\gamma_1}}{\Gamma(\alpha + \gamma_1 + 1)} \right. \right. \\
 &\quad + \left. \frac{K_4 T^{\alpha-\beta_2}}{\Gamma(\alpha - \beta_2 + 1)} + \frac{K_2 T^{\alpha+\gamma_2}}{\Gamma(\alpha + \gamma_2 + 1)} \right) + (\lambda + 1)(|K_2 \delta_2| + |K_4 \delta_1|) \left. \right] \\
 &\quad + \frac{|t_2^{\alpha-1} - t_1^{\alpha-1}|}{|Q|} \left[p^* \psi(\|x\|) \left(\frac{K_1 \mu_2 T^{\alpha+\gamma_1}}{\Gamma(\alpha + \gamma_1 + 1)} + \frac{K_3 \mu_1 T^{\alpha-\beta_1}}{\Gamma(\alpha - \beta_1 + 1)} \right. \right. \\
 &\quad + \left. \frac{K_1 T^{\alpha+\gamma_2}}{\Gamma(\alpha + \gamma_2 + 1)} + \frac{K_3 T^{\alpha-\beta_2}}{\Gamma(\alpha - \beta_2 + 1)} \right) + (\lambda + 1)(|K_3 \delta_1| + |K_1 \delta_2|) \left. \right].
 \end{aligned}$$

Lorsque $t_1 \rightarrow t_2$, le membre droit de la dernière inégalité tend vers zéro, donc l'ensemble $B(\overline{\mathcal{B}}(0, r))$ est équicontinu.

D'après le théorème d'Ascoli-Arzelà 1.9, on déduit que B est complètement continu.

– Étape 5 : montrons que $l^*\Delta < 1$.

Pour tout $t \in [0, T]$ on a

$$\begin{aligned}\Delta &= \|B(\overline{\mathcal{B}}(0, r))\| = \sup\{\|Bx\|, x \in \overline{\mathcal{B}}(0, r)\}, \\ &= \sup_{t \in [0, T]} \{|(Bx)(t)|, x \in \overline{\mathcal{B}}(0, r)\}.\end{aligned}$$

D'après ce qu'on a vu dans l'étape de la bornitude de l'opérateur B , on déduit que

$$\Delta \leq p^*\psi(\|x\|)M + N,$$

par le théorème 2.4, on obtient

$$\theta^*\Delta \leq \theta^*p^*\psi(\|x\|)M + \theta^*N < 1.$$

– Étape 6 : on va maintenant montrer que la deuxième condition du théorème 1.7 n'est pas vérifiée.

Soit $x \in C([0, T], \mathbb{R})$ et $x = \alpha_0(Ax)(Bx)$ pour $\alpha_0 \in (0, 1)$ telle que $\|x\|_\infty = r$.

Donc, pour tout $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned}x(t) &= \alpha_0 h(t, x(t)) \left(\frac{1}{(\lambda + 1)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - r)^{\alpha-1} f(r, x(r)) dr \right. \\ &\quad + \frac{t}{Q} \left[K_4 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} f(T, x(T)) - K_2 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} f(T, x(T)) \right. \\ &\quad \left. \left. + (\lambda + 1)(K_2 \delta_2 - K_4 \delta_1) + K_4 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} f(T, x(T)) - K_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} f(T, x(T)) \right] \right. \\ &\quad + \frac{t^{\alpha-1}}{Q} \left[K_1 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} f(T, x(T)) - K_3 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} f(T, x(T)) \right. \\ &\quad \left. \left. + (\lambda + 1)(K_3 \delta_1 - K_1 \delta_2) + K_1 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} f(T, x(T)) - K_3 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} f(T, x(T)) \right] \right).\end{aligned}$$

Par les hypothèses (H4) et (H5), pour tout $t \in [0, T]$, on a

$$\begin{aligned}
 |x(t)| &\leq \left[|h(t, x(t)) - h(t, 0)| + |h(t, 0)| \right] \times \left[p^* \psi(\|x\|) \left(\frac{1}{(\lambda + 1)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - r)^{\alpha-1} dr \right. \right. \\
 &\quad + \frac{t}{|Q|} \left[\frac{K_4 \mu_1}{\Gamma(\alpha - \beta_1)} \int_0^T (T - r)^{\alpha-\beta_1-1} dr + \frac{K_2 \mu_2}{\Gamma(\alpha + \gamma_1)} \int_0^T (T - r)^{\alpha+\gamma_1-1} dr \right. \\
 &\quad + \frac{K_4}{\Gamma(\alpha - \beta_2)} \int_0^T (T - r)^{\alpha-\beta_2-1} dr + \frac{K_2}{\Gamma(\alpha + \gamma_2)} \int_0^T (T - r)^{\alpha+\gamma_2-1} dr \Big] \\
 &\quad + \frac{t^{\alpha-1}}{|Q|} \left[\frac{K_1 \mu_2}{\Gamma(\alpha + \gamma_1)} \int_0^T (T - r)^{\alpha+\gamma_1-1} dr + \frac{K_3 \mu_1}{\Gamma(\alpha - \beta_1)} \int_0^T (T - r)^{\alpha-\beta_1-1} dr \right. \\
 &\quad + \left. \left. \frac{K_1}{\Gamma(\alpha + \gamma_2)} \int_0^T (T - r)^{\alpha+\gamma_2-1} dr + \frac{K_3}{\Gamma(\alpha - \beta_2)} \int_0^T (T - r)^{\alpha-\beta_2-1} dr \right] \right) \\
 &\quad + \frac{t}{|Q|} (\lambda + 1) (|K_2 \delta_2| + |K_4 \delta_1|) + \frac{t^{\alpha-1}}{|Q|} (\lambda + 1) (|K_3 \delta_1| + |K_1 \delta_2|) \Big], \\
 &\leq \left(\theta^* |x(t)| + h^* \right) \left(p^* \psi(\|x\|) M + N \right).
 \end{aligned}$$

En passant à la norme, on obtient

$$\|x\|_\infty \leq \frac{h^* p^* \psi(\|x\|) M + h^* N}{1 - \theta^* p^* \psi(\|x\|) M - \theta^* N},$$

puisque $\|x\|_\infty = r$, on trouve

$$r \leq \frac{h^* p^* \psi(\|x\|) M + h^* N}{1 - \theta^* p^* \psi(\|x\|) M - \theta^* N},$$

ce qui contredit l'inégalité (2.17).

Donc, l'équation opérationnelle $AxBx = x$ possède un point fixe, on déduit que le problème (2.12) admet au moins une solution sur l'intervalle $[0, T]$. $\square$

2.2.3 Exemple

Exemple 2.1. On considère le problème fractionnaire hybride avec les conditions aux limites hybrides suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\frac{47}{54} {}^C D^{\frac{10}{9}} + {}^R D^{\frac{10}{9}}) \left[\frac{x(t)}{h(t, x(t))} \right] = \frac{t \sin^2(\frac{\pi}{2}t) \sin(x(t))}{1000}, \quad 0 < t < 1, \\ \left[\frac{x(t)}{h(t, x(t))} \right]_{t=0} = 0, \\ \frac{4}{25} {}^R \mathcal{D}^{\frac{1}{15}} \left[\frac{x(t)}{h(t, x(t))} \right]_{t=1} + {}^R \mathcal{D}^{\frac{7}{15}} \left[\frac{x(t)}{h(t, x(t))} \right]_{t=1} = \frac{37}{50}, \\ \frac{9}{23} \mathcal{I}^{\frac{5}{6}} \left[\frac{x(t)}{h(t, x(t))} \right]_{t=1} + \mathcal{I}^{\frac{10}{2}} \left[\frac{x(t)}{h(t, x(t))} \right]_{t=1} = \frac{47}{54}, \end{array} \right. \quad (2.19)$$

Dans cet exemple, on a $\lambda = \frac{47}{54}$, $\alpha = \frac{10}{9}$, $\mu_1 = \frac{4}{25}$, $\mu_2 = \frac{9}{23}$, $\beta_1 = \frac{1}{15}$, $\beta_2 = \frac{7}{15}$, $\gamma_1 = \frac{5}{6}$, $\gamma_2 = \frac{10}{2}$, $T = 1$.

Prenons

$$h(t, x(t)) = \frac{t|x(t)|}{100 + 100|x(t)|} + \frac{1}{10},$$

et

$$f(t, x(t)) = \frac{t \sin^2(\frac{\pi}{2}t) \sin(x(t))}{1000}.$$

Donc, on a

$$|h(t, x(t)) - h(t, y(t))| \leq \frac{t}{100} |x - y|,$$

avec $\theta^* = \sup_{t \in [0,1]} |\theta(t)| = \frac{1}{100}$.

En choisissant $p(t) = \frac{1}{5}$ et $\psi(\|x\|) = 1$, on trouve

$$|f(t, x(t))| = \left| \frac{t \sin^2(\frac{\pi}{2}t) \sin(x(t))}{1000} \right| \leq \frac{1}{5}.$$

Ainsi, on trouve $M = 15.8114$, $N = 22.0853$ et $r > 0.4061$.

Il est clair que

$$\theta^* p^* \psi(\|x\|) M + \theta^* N \approx 0.1655 < 1.$$

Par le théorème (2.4), le problème aux limites (2.19) admet au moins une solution sur $[0, 1]$.

Chapitre 3

Résolution des problèmes d'inclusion différentielle fractionnaire

Ce chapitre se divise en deux parties, premièrement nous prouvons un résultat d'existence pour les inclusions différentielles hybrides d'ordre fractionnaire avec les conditions aux limites hybrides. Deuxièmement, nous donnons quelques conditions pour montrer les résultats d'existence des solutions pour les problèmes d'inclusion fractionnaire non hybride. Notre travail est basé sur les articles [\[10, 32, 36\]](#).

3.1 Cas d'un problème aux limites hybride

Le résultat d'existence de cette section est basé sur la théorie du point fixe pour les inclusions différentielles hybrides d'ordre fractionnaire sur un intervalle borné $[0, T]$ à la forme suivantes

$$(\lambda^C \mathcal{D}^\alpha + {}^R\mathcal{D}^\alpha) \left[\frac{x(t)}{h(t, x(t))} \right] \in F(t, x(t)), \quad 0 < t < T, \quad 1 < \alpha \leq 2, \quad (3.1)$$

avec les conditions aux limites hybrides

$$\begin{cases} \left[\frac{x(t)}{h(t, x(t))} \right]_{t=0} = 0, \\ \mu_1 {}^R\mathcal{D}^{\beta_1} \left[\frac{x(t)}{h(t, x(t))} \right]_{t=T} + {}^R\mathcal{D}^{\beta_2} \left[\frac{x(t)}{h(t, x(t))} \right]_{t=T} = \delta_1, \\ \mu_2 \mathcal{I}^{\gamma_1} \left[\frac{x(t)}{h(t, x(t))} \right]_{t=T} + \mathcal{I}^{\gamma_2} \left[\frac{x(t)}{h(t, x(t))} \right]_{t=T} = \delta_2. \end{cases} \quad (3.2)$$

Où

- ${}^C\mathcal{D}$ est représente la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $1 < \alpha \leq 2$.
- ${}^R\mathcal{D}$ est la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $1 < \alpha \leq 2$ ou d'ordre $0 \leq \beta_1, \beta_2 < \alpha$.
- $\mathcal{I}$ est l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\gamma_1, \gamma_2 > 0$.
- $h : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ est une fonction non nulle continue et $F : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ est une application multivoque.
- $\lambda, \mu_1, \mu_2, \delta_1, \delta_2$ sont des constantes entre 0 et 1.

3.1.1 Problème intégral

Définition 3.1. Une fonction $x \in AC([0, T], \mathbb{R})$ est une solution du problème (3.1) – (3.2), s'il existe une fonction $v \in L^1([0, T], \mathbb{R})$ avec $v(t) \in F(t, x(t))$ pour tout $t \in [0, T]$ et elle satisfait l'équation

$$(\lambda {}^C\mathcal{D}^\alpha + {}^R\mathcal{D}^\alpha) \left[\frac{x(t)}{h(t, x(t))} \right] = v(t), \quad 1 < \alpha \leq 2,$$

de plus, la fonction x satisfait les conditions (3.2).

On va écrire le problème (3.1) – (3.2) sous la forme d'une équation intégrale équivalente dans l'espace $C([0, T], \mathbb{R})$. Donc, d'après lemme 2.2 nous avons

$$\begin{aligned} x(t) = h(t, x(t)) & \left(\frac{1}{(\lambda + 1)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - r)^{\alpha-1} v(r) dr + \frac{t}{Q} \left[K_4 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} v(T) - K_2 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} v(T) \right. \right. \\ & + (\lambda + 1)(K_2 \delta_2 - K_4 \delta_1) + K_4 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} v(T) - K_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} v(T) \left. \right] + \frac{t^{\alpha-1}}{Q} \left[K_1 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} v(T) \right. \\ & \left. \left. - K_3 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} v(T) + (\lambda + 1)(K_3 \delta_1 - K_1 \delta_2) + K_1 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} v(T) - K_3 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} v(T) \right] \right), \end{aligned} \quad (3.3)$$

où les constantes K_i sont définies par (2.3).

3.1.2 Résultat d'existence

Les hypothèses suivantes seront utilisées ci-dessous

(A1) la fonction multivoque $F : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}_{cp,cv}(\mathbb{R})$ est L^1 -Carathéodory.

(A2) Il existe une fonction bornée $\theta : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que

$$|h(t, x_1) - h(t, x_2)| \leq \theta(t) |x_1 - x_2|, \quad \text{pour tout } x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ et } t \in [0, T].$$

(A3) Il existe une fonction positive $p \in L^1([0, T], \mathbb{R}_+)$ satisfaisant

$$\|F(t, x)\| = \sup\{|v|, v \in F(t, x(t))\} \leq p(t) \text{ pour tout } (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}.$$

(A4) Il existe une constante positive $r \in \mathbb{R}_+$ telle que

$$r > \frac{h^*(\|p\|_{L^1}M + N)}{1 - \theta^*(\|p\|_{L^1}M + N)},$$

où

$$h^* = \sup_{t \in [0, T]} |h(t, 0)|, \quad \|p\|_{L^1} = \int_0^T |p(r)|dr, \quad \theta^* = \sup_{t \in [0, T]} |\theta(t)|$$

et les constantes M et N sont définies respectivement par (2.5) et (2.7).

Théorème 3.1. [42] *On suppose que les hypothèses (A1) – (A4) sont vérifiées.*

Si

$$\theta^*(\|p\|_{L^1}M + N) < \frac{1}{2},$$

alors le problème (3.1) – (3.2) possède au moins une solution.

Démonstration. Nous allons transformer le problème aux limites (3.1) – (3.2) sous forme d'un problème de point fixe.

Pour cela, considérons l'opérateur multivoque $\mathcal{G} : C([0, T], \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}(C([0, T], \mathbb{R}))$ défini par

$$\mathcal{G}(x) = \left\{ y \in C([0, T], \mathbb{R}) : \begin{aligned} & y(t) = h(t, x(t)) \left(\frac{1}{(\lambda+1)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-r)^{\alpha-1} v(r) dr \right. \\ & \quad + \frac{t}{Q} \left[K_4 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} v(T) - K_2 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} v(T) \right. \\ & \quad \left. + (\lambda+1)(K_2 \delta_2 - K_4 \delta_1) + K_4 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} v(T) \right. \\ & \quad \left. - K_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} v(T) \right] + \frac{t^{\alpha-1}}{Q} \left[K_1 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} v(T) \right. \\ & \quad \left. - K_3 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} v(T) + (\lambda+1)(K_3 \delta_1 - K_1 \delta_2) \right. \\ & \quad \left. + K_1 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} v(T) - K_3 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} v(T) \right] \Bigg), \\ & \text{pour tout } v \in S_{F,x} \text{ et } t \in [0, T]. \end{aligned} \right\}$$

Il est clair que les points fixes de l'opérateur $\mathcal{G}$ sont les solutions du problème (3.1) – (3.2).

Maintenant, nous introduisons les deux opérateurs comme suit

$A : C([0, T], \mathbb{R}) \rightarrow C([0, T], \mathbb{R})$ par

$$(Ax)(t) = h(t, x(t)), \quad \forall t \in [0, T]$$

et l'opérateur multivoque $B : C([0, T], \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}(C([0, T], \mathbb{R}))$ par

$$B(x) = \left\{ z \in C([0, T], \mathbb{R}) : \begin{aligned} z(t) = & \frac{1}{(\lambda+1)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-r)^{\alpha-1} v(r) dr \\ & + \frac{t}{Q} \left[K_4 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} v(T) - K_2 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} v(T) \right. \\ & + (\lambda+1)(K_2 \delta_2 - K_4 \delta_1) \\ & + K_4 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} v(T) - K_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} v(T) \left. \right] \\ & + \frac{t^{\alpha-1}}{Q} \left[K_1 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} v(T) - K_3 \mu_1 \right. \\ & \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} v(T) + (\lambda+1)(K_3 \delta_1 - K_1 \delta_2) \\ & + K_1 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} v(T) - K_3 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} v(T) \left. \right], \forall v \in S_{F,x}. \end{aligned} \right\}$$

Donc, $\mathcal{G}x(t) = Ax(t)Bx(t)$ pour tout $t \in [0, T]$ et $x \in X = C([0, T], \mathbb{R})$.

On doit démontrer que les opérateurs A et B vérifient les conditions du théorème 1.8.

La démonstration sera constituée de plusieurs étapes.

- Étape 1 : A est un opérateur Lipschitzien sur $C([0, T], \mathbb{R})$.

Soient $x_1, x_2 \in X$ et $t \in [0, T]$, on utilise l'hypothèse (A2) alors

$$\begin{aligned} |(Ax_1)(t) - (Ax_2)(t)| &= |h(t, x_1(t)) - h(t, x_2(t))|, \\ &\leq \theta(t) |x_1(t) - x_2(t)|. \end{aligned}$$

En passant à la norme, on trouve

$$\|Ax_1 - Ax_2\|_\infty \leq \theta^* \|x_1 - x_2\|_\infty,$$

ceci implique que A est Lipschitzien avec la constante $\theta^* = \sup_{t \in [0, T]} |\theta(t)|$.

- Étape 2 : B est à valeurs convexes.

Soient $x \in X$ et $z_1, z_2 \in B(x)$, alors ils existent deux fonctions $v_1, v_2 \in S_{F,x}$ tel que pour tout $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} z_i(t) = & \frac{1}{(\lambda+1)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-r)^{\alpha-1} v_i(r) dr + \frac{t}{Q} \left[K_4 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} v_i(T) - K_2 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} v_i(T) \right. \\ & + (\lambda+1)(K_2 \delta_2 - K_4 \delta_1) + K_4 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} v_i(T) - K_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} v_i(T) \left. \right] + \frac{t^{\alpha-1}}{Q} \left[K_1 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} v_i(T) \right. \\ & - K_3 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} v_i(T) + (\lambda+1)(K_3 \delta_1 - K_1 \delta_2) + K_1 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} v_i(T) - K_3 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} v_i(T) \left. \right], \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Soit $0 \leq d \leq 1$ et pour chaque $t \in [0, T]$ on a

$$\begin{aligned}
(dz_1 + (1-d)z_2)(t) = & \frac{1}{(\lambda+1)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-r)^{\alpha-1} [dv_1(r) + (1-d)v_2(r)] dr + \frac{t}{Q} \left[\frac{K_4\mu_1}{\Gamma(\alpha-\beta_1)} \right. \\
& \int_0^T (T-r)^{\alpha-\beta_1-1} [dv_1(r) + (1-d)v_2(r)] dr - \frac{K_2\mu_2}{\Gamma(\alpha+\gamma_1)} \int_0^T (T-r)^{\alpha+\gamma_1-1} \\
& [dv_1(r) + (1-d)v_2(r)] dr + (\lambda+1)(K_2\delta_2 - K_4\delta_1) + \frac{K_4}{\Gamma(\alpha-\beta_2)} \\
& \int_0^T (T-r)^{\alpha-\beta_2-1} [dv_1(r) + (1-d)v_2(r)] dr - \frac{K_2}{\Gamma(\alpha+\gamma_2)} \int_0^T (T-r)^{\alpha+\gamma_2-1} \\
& [dv_1(r) + (1-d)v_2(r)] dr \left. \right] + \frac{t^{\alpha-1}}{Q} \left[\frac{K_1\mu_2}{\Gamma(\alpha+\gamma_1)} \int_0^T (T-r)^{\alpha+\gamma_1-1} [dv_1(r) \right. \\
& + (1-d)v_2(r)] dr - \frac{K_3\mu_1}{\Gamma(\alpha-\beta_1)} \int_0^T (T-r)^{\alpha-\beta_1-1} [dv_1(r) + (1-d)v_2(r)] dr \\
& + (\lambda+1)(K_3\delta_1 - K_1\delta_2) + \frac{K_1}{\Gamma(\alpha+\gamma_2)} \int_0^T (T-r)^{\alpha+\gamma_2-1} [dv_1(r) \\
& + (1-d)v_2(r)] dr - \frac{K_3}{\Gamma(\alpha-\beta_2)} \int_0^T (T-r)^{\alpha-\beta_2-1} [dv_1(r) + (1-d)v_2(r)] dr \left. \right].
\end{aligned}$$

Comme l'ensemble de sélection $S_{F,x}$ est convexe car F est à valeurs convexes, on aura

$$(dz_1 + (1-d)z_2) \in B(x).$$

D'où B est à valeurs convexes.

– Étape 3 : $B(\bar{\mathcal{B}}(0, r))$ est uniformément borné dans $C([0, T], \mathbb{R})$.

Soit $\bar{\mathcal{B}}(0, r) = \{x \in C([0, T], \mathbb{R}) : \|x\|_\infty \leq r\}$ un ensemble borné dans $C([0, T], \mathbb{R})$ avec r un nombre réel positif.

Soit $x \in \bar{\mathcal{B}}(0, r)$ donc pour tout $z \in B(x)$, il existe une fonction $v \in S_{F,x}$ tel que

$$\begin{aligned}
z(t) = & \frac{1}{(\lambda+1)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-r)^{\alpha-1} v(r) dr + \frac{t}{Q} \left[K_4\mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} v(T) - K_2\mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} v(T) \right. \\
& + (\lambda+1)(K_2\delta_2 - K_4\delta_1) + K_4 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} v(T) - K_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} v(T) \left. \right] + \frac{t^{\alpha-1}}{Q} \left[K_1\mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} v(T) \right. \\
& - K_3\mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} v(T) + (\lambda+1)(K_3\delta_1 - K_1\delta_2) + K_1 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} v(T) - K_3 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} v(T) \left. \right], \quad \forall t \in [0, T].
\end{aligned}$$

Nous avons $\|z\|_\infty \leq C$, en effet pour tout $t \in [0, T]$ on a

$$\begin{aligned}
|z(t)| &\leq \frac{1}{(\lambda+1)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-r)^{\alpha-1} |v(r)| dr + \frac{t}{|Q|} \left[\frac{K_4\mu_1}{\Gamma(\alpha-\beta_1)} \int_0^T (T-r)^{\alpha-\beta_1-1} |v(r)| dr \right. \\
&\quad + \frac{K_2\mu_2}{\Gamma(\alpha+\gamma_1)} \int_0^T (T-r)^{\alpha+\gamma_1-1} |v(r)| dr + (\lambda+1)(|K_2\delta_2| + |K_4\delta_1|) + \frac{K_4}{\Gamma(\alpha-\beta_2)} \\
&\quad \left. \int_0^T (T-r)^{\alpha-\beta_2-1} |v(r)| dr + \frac{K_2}{\Gamma(\alpha+\gamma_2)} \int_0^T (T-r)^{\alpha+\gamma_2-1} |v(r)| dr \right] + \frac{t^{\alpha-1}}{|Q|} \left[\frac{K_1\mu_2}{\Gamma(\alpha+\gamma_1)} \right. \\
&\quad \left. \int_0^T (T-r)^{\alpha+\gamma_1-1} |v(r)| dr + \frac{K_3\mu_1}{\Gamma(\alpha-\beta_1)} \int_0^T (T-r)^{\alpha-\beta_1-1} |v(r)| dr + (\lambda+1)(|K_3\delta_1| \right. \\
&\quad \left. + |K_1\delta_2|) + \frac{K_1}{\Gamma(\alpha+\gamma_2)} \int_0^T (T-r)^{\alpha+\gamma_2-1} |v(r)| dr + \frac{K_3}{\Gamma(\alpha-\beta_2)} \int_0^T (T-r)^{\alpha-\beta_2-1} |v(r)| dr \right].
\end{aligned}$$

Par (A3), on obtient

$$\begin{aligned}
|z(t)| &\leq \|p\|_{L^1} \left(\frac{T^\alpha}{(\lambda+1)\Gamma(\alpha+1)} + \frac{T}{|Q|} \left[\frac{K_4\mu_1 T^{\alpha-\beta_1}}{\Gamma(\alpha-\beta_1+1)} + \frac{K_2\mu_2 T^{\alpha+\gamma_1}}{\Gamma(\alpha+\gamma_1+1)} + \frac{K_4 T^{\alpha-\beta_2}}{\Gamma(\alpha-\beta_2+1)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{K_2 T^{\alpha+\gamma_2}}{\Gamma(\alpha+\gamma_2+1)} \right] + \frac{T^{\alpha-1}}{|Q|} \left[\frac{K_1\mu_2 T^{\alpha+\gamma_1}}{\Gamma(\alpha+\gamma_1+1)} + \frac{K_3\mu_1 T^{\alpha-\beta_1}}{\Gamma(\alpha-\beta_1+1)} + \frac{K_1 T^{\alpha+\gamma_2}}{\Gamma(\alpha+\gamma_2+1)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{K_3 T^{\alpha-\beta_2}}{\Gamma(\alpha-\beta_2+1)} \right] \right) + \left(\frac{T}{|Q|} (\lambda+1)(|K_2\delta_2| + |K_4\delta_1|) + \frac{T^{\alpha-1}}{|Q|} (\lambda+1)(|K_3\delta_1| + |K_1\delta_2|) \right), \\
&\leq \|p\|_{L^1} M + N = C.
\end{aligned}$$

On passe à la norme, on trouve $\|z\|_\infty \leq C$.

Alors, $B(\overline{\mathcal{B}}(0, r))$ est uniformément borné.

– Étape 4 : $B(\overline{\mathcal{B}}(0, r))$ est équicontinu dans l'espace $C([0, T], \mathbb{R})$.

Pour cela, soient $t_1, t_2 \in [0, T]$ avec $t_1 < t_2$, $\overline{\mathcal{B}}(0, r)$ un ensemble borné de $C([0, T], \mathbb{R})$ et $x \in \overline{\mathcal{B}}(0, r)$.

Pour chaque $z \in Bx$, il existe une fonction $v \in S_{F,x}$ tel que

$$\begin{aligned}
|z(t_2) - z(t_1)| &\leq \frac{1}{(\lambda + 1)\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} [(t_1 - r)^{\alpha-1} - (t_2 - r)^{\alpha-1}] |v(r)| dr + \frac{1}{(\lambda + 1)\Gamma(\alpha)} \\
&\quad \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - r)^{\alpha-1} |v(r)| dr + \frac{|t_2 - t_1|}{|Q|} \left[K_4 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} |v(T)| + K_2 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} |v(T)| \right. \\
&\quad \left. + (\lambda + 1)(|K_2 \delta_2| + |K_4 \delta_1|) + K_4 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} |v(T)| + K_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} |v(T)| \right] + \frac{|t_2^{\alpha-1} - t_1^{\alpha-1}|}{|Q|} \\
&\quad \left[K_1 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} |v(T)| + K_3 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} |v(T)| + (\lambda + 1)(|K_3 \delta_1| + |K_1 \delta_2|) \right. \\
&\quad \left. + K_1 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} |v(T)| + K_3 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} |v(T)| \right].
\end{aligned}$$

Par (A3), on a

$$\begin{aligned}
|z(t_2) - z(t_1)| &\leq \frac{\|p\|_{L^1}}{(\lambda + 1)\Gamma(\alpha + 1)} \left(2(t_2 - t_1)^\alpha + t_1^\alpha - t_2^\alpha \right) + \frac{|t_2 - t_1|}{|Q|} \left[\|p\|_{L^1} \left(\frac{K_4 \mu_1 T^{\alpha-\beta_1}}{\Gamma(\alpha - \beta_1 + 1)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{K_2 \mu_2 T^{\alpha+\gamma_1}}{\Gamma(\alpha + \gamma_1 + 1)} + \frac{K_4 T^{\alpha-\beta_2}}{\Gamma(\alpha - \beta_2 + 1)} + \frac{K_2 T^{\alpha+\gamma_2}}{\Gamma(\alpha + \gamma_2 + 1)} \right) + (\lambda + 1)(|K_2 \delta_2| + |K_4 \delta_1|) \right] \\
&\quad + \frac{|t_2^{\alpha-1} - t_1^{\alpha-1}|}{|Q|} \left[\|p\|_{L^1} \left(\frac{K_1 \mu_2 T^{\alpha+\gamma_1}}{\Gamma(\alpha + \gamma_1 + 1)} + \frac{K_3 \mu_1 T^{\alpha-\beta_1}}{\Gamma(\alpha - \beta_1 + 1)} + \frac{K_1 T^{\alpha+\gamma_2}}{\Gamma(\alpha + \gamma_2 + 1)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{K_3 T^{\alpha-\beta_2}}{\Gamma(\alpha - \beta_2 + 1)} \right) + (\lambda + 1)(|K_3 \delta_1| + |K_1 \delta_2|) \right].
\end{aligned}$$

Quand $t_1 \rightarrow t_2$, le membre droit de la dernière inégalité tend vers zéro, d'où $B(\bar{\mathcal{B}}(0, r))$ est équicontinu.

D'après le théorème d'Ascoli Arzelà 1.9, nous pouvons conclure que B est complètement continu.

– Étape 5 : B est à graphe fermé.

Soient $x_n \rightarrow x_*$ et $z_n \in B(x_n)$ tel que $z_n \rightarrow z_*$ donc, il suffit de montrer que $z_* \in B(x_*)$.

Comme $z_n \in B(x_n)$, il existe $v_n \in S_{F,x_n}$ tel que pour chaque $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} z_n(t) = & \frac{1}{(\lambda+1)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-r)^{\alpha-1} v_n(r) dr + \frac{t}{Q} \left[K_4 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} v_n(T) - K_2 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} v_n(T) \right. \\ & + (\lambda+1)(K_2 \delta_2 - K_4 \delta_1) + K_4 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} v_n(T) - K_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} v_n(T) \left. \right] + \frac{t^{\alpha-1}}{Q} \left[K_1 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} v_n(T) \right. \\ & \left. - K_3 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} v_n(T) + (\lambda+1)(K_3 \delta_1 - K_1 \delta_2) + K_1 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} v_n(T) - K_3 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} v_n(T) \right]. \end{aligned}$$

Montrons qu'il existe $v_* \in S_{F,x_*}$ tel que pour tout $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} z_*(t) = & \frac{1}{(\lambda+1)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-r)^{\alpha-1} v_*(r) dr + \frac{t}{Q} \left[K_4 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} v_*(T) - K_2 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} v_*(T) \right. \\ & + (\lambda+1)(K_2 \delta_2 - K_4 \delta_1) + K_4 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} v_*(T) - K_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} v_*(T) \left. \right] + \frac{t^{\alpha-1}}{Q} \left[K_1 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} v_*(T) \right. \\ & \left. - K_3 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} v_*(T) + (\lambda+1)(K_3 \delta_1 - K_1 \delta_2) + K_1 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} v_*(T) - K_3 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} v_*(T) \right]. \end{aligned}$$

Considérons l'opérateur linéaire continu $\Theta : L^1([0, T], \mathbb{R}) \rightarrow C([0, T], \mathbb{R})$ défini par

$$\begin{aligned} v \mapsto \Theta(v)(t) = & \frac{1}{(\lambda+1)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-r)^{\alpha-1} v(r) dr + \frac{t}{Q} \left[K_4 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} v(T) - K_2 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} v(T) \right. \\ & + (\lambda+1)(K_2 \delta_2 - K_4 \delta_1) + K_4 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} v(T) - K_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} v(T) \left. \right] + \frac{t^{\alpha-1}}{Q} \left[K_1 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} v(T) \right. \\ & \left. - K_3 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} v(T) + (\lambda+1)(K_3 \delta_1 - K_1 \delta_2) + K_1 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} v(T) - K_3 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} v(T) \right], \end{aligned}$$

pour tout $t \in [0, T]$. Donc, on a

$$\begin{aligned} |z_n(t) - z_*(t)| = & \left| \frac{1}{(\lambda+1)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-r)^{\alpha-1} [v_n(r) - v_*(r)] dr + \frac{t}{Q} \left[K_4 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} [v_n(T) - v_*(T)] \right. \right. \\ & \left. - K_2 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} [v_n(T) - v_*(T)] + K_4 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} [v_n(T) - v_*(T)] - K_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} [v_n(T) - v_*(T)] \right] \\ & + \frac{t^{\alpha-1}}{Q} \left[K_1 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} [v_n(T) - v_*(T)] - K_3 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} [v_n(T) - v_*(T)] + K_1 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} [v_n(T) \right. \\ & \left. - v_*(T)] - K_3 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} [v_n(T) - v_*(T)] \right] \left. \right|. \end{aligned}$$

Il est clair que

$$\|z_n - z_*\| \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad n \rightarrow \infty.$$

D'après le lemme 1.2, l'opérateur $\Theta \circ S_F$ est à graphe fermé.

De plus, on a $z_n \in \Theta(S_{F,x_n})$.

Comme $x_n \rightarrow x_*$, nous déduisons du lemme 1.2 que

$$\begin{aligned} z_*(t) = & \frac{1}{(\lambda+1)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-r)^{\alpha-1} v_*(r) dr + \frac{t}{Q} \left[K_4 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} v_*(T) - K_2 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} v_*(T) \right. \\ & + (\lambda+1)(K_2 \delta_2 - K_4 \delta_1) + K_4 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} v_*(T) - K_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} v_*(T) \left. \right] + \frac{t^{\alpha-1}}{Q} \left[K_1 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} v_*(T) \right. \\ & \left. - K_3 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} v_*(T) + (\lambda+1)(K_3 \delta_1 - K_1 \delta_2) + K_1 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} v_*(T) - K_3 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} v_*(T) \right], \forall t \in [0, T], \end{aligned}$$

pour $v_* \in S_{F,x_*}$ et ce qui implique B a un graphe fermé.

Par conséquent, B est semi continu supérieurement et a des valeurs compactes.

– Étape 6 : montrons que $2l^* \Delta < 1$.

En utilisant (A3) et d'après l'étape 3, on a

$$\begin{aligned} \Delta = \|B(x)\| &= \sup_{t \in [0, T]} \{|Bx(t)|, x \in X\}, \\ &\leq \sup_{t \in [0, T]} \left| \frac{1}{(\lambda+1)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-r)^{\alpha-1} v(r) dr + \frac{t}{Q} \left[K_4 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} v(T) - K_2 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} v(T) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\lambda+1)(K_2 \delta_2 - K_4 \delta_1) + K_4 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} v(T) - K_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} v(T) \right] + \frac{t^{\alpha-1}}{Q} \left[K_1 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} v(T) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - K_3 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} v(T) + (\lambda+1)(K_3 \delta_1 - K_1 \delta_2) + K_1 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} v(T) - K_3 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} v(T) \right] \right|, \\ &\leq \|p\|_{L^1} M + N. \end{aligned}$$

Par le théorème 3.1, on a $\theta^* \Delta \leq \theta^* (\|p\|_{L^1} M + N) < \frac{1}{2}$ et comme $l^* = \theta^*$, on obtient $l^* \Delta < \frac{1}{2}$.

– Étape 7 : on va prouver que la première l'alternative du théorème 1.8 n'est pas vérifiée.

Supposons que l'ensemble

$$\mathcal{E} = \{x \in X, \alpha_0 x \in (Ax)(Bx) \quad \text{pour} \quad \alpha_0 > 1\}$$

est non borné. Soit $x \in C([0, T], \mathbb{R})$ tel que $\alpha_0 x \in (Ax)(Bx)$ et $\|x\|_\infty = r$ pour $\alpha_0 > 1$.

Alors, il existe $v \in L^1([0, T], \mathbb{R})$ avec $v \in S_{F,x}$ tel que pour chaque $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} x(t) = & \frac{1}{\alpha_0} h(t, x(t)) \left(\frac{1}{(\lambda + 1)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-r)^{\alpha-1} v(r) dr + \frac{t}{Q} \left[K_4 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} v(T) - K_2 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} v(T) \right. \right. \\ & + (\lambda + 1)(K_2 \delta_2 - K_4 \delta_1) + K_4 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} v(T) - K_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} v(T) \left. \right] + \frac{t^{\alpha-1}}{Q} \left[K_1 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} v(T) \right. \\ & \left. \left. - K_3 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} v(T) + (\lambda + 1)(K_3 \delta_1 - K_1 \delta_2) + K_1 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} v(T) - K_3 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} v(T) \right] \right). \end{aligned}$$

Pour chaque $t \in [0, T]$, nous avons

$$\begin{aligned} |x(t)| \leq & \frac{1}{\alpha_0} |h(t, x(t))| \left(\frac{1}{(\lambda + 1)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-r)^{\alpha-1} |v(r)| dr + \frac{t}{|Q|} \left[K_4 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} |v(T)| \right. \right. \\ & + K_2 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} |v(T)| + (\lambda + 1)(|K_2 \delta_2| + |K_4 \delta_1|) + K_4 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} |v(T)| + K_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} |v(T)| \left. \right] \\ & + \frac{t^{\alpha-1}}{|Q|} \left[K_1 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} |v(T)| + K_3 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} |v(T)| + (\lambda + 1)(|K_3 \delta_1| + |K_1 \delta_2|) \right. \\ & \left. \left. + K_1 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} |v(T)| + K_3 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} |v(T)| \right] \right), \end{aligned}$$

d'après (A2) et (A3), on a

$$\begin{aligned} |x(t)| \leq & \left(|h(t, x(t)) - h(t, 0)| + |h(t, 0)| \right) \left(\frac{1}{(\lambda + 1)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-r)^{\alpha-1} p(r) dr + \frac{t}{|Q|} \left[K_4 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} p(T) \right. \right. \\ & + K_2 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} p(T) + (\lambda + 1)(|K_2 \delta_2| + |K_4 \delta_1|) + K_4 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} p(T) + K_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} p(T) \left. \right] + \frac{t^{\alpha-1}}{|Q|} \left[K_1 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} p(T) \right. \\ & \left. \left. + K_3 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} p(T) + (\lambda + 1)(|K_3 \delta_1| + |K_1 \delta_2|) + K_1 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} p(T) + K_3 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} p(T) \right] \right), \\ & \leq \left(\theta^* |x(t)| + h^* \right) \left(\|p\|_{L^1} M + N \right). \end{aligned}$$

Par suite

$$\|x\|_\infty \leq \frac{h^* \|p\|_{L^1} M + h^* N}{1 - \theta^* \|p\|_{L^1} M - \theta^* N}.$$

En remplaçant $\|x\|_\infty = r$ dans l'inégalité ci-dessus, on obtient que

$$r \leq \frac{h^* \|p\|_{L^1} M + h^* N}{1 - \theta^* \|p\|_{L^1} M - \theta^* N},$$

contredisant (A4).

Alors, l'opérateur $\mathcal{G}$ admet un point fixe qui est la solution du problème aux limites (3.1) – (3.2). $\square$

3.1.3 Exemple

Exemple 3.1. Soit le problème d'inclusion différentielle hybride d'ordre fractionnaire suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} (\frac{47}{54} {}^C D^{1.88} + {}^R D^{1.88}) \left[\frac{x(t)}{h(t, x(t))} \right] \in \left[\frac{|x(t)|}{4(|x(t)| + 1)} + \frac{1}{2}, \frac{|\sin x(t)|^4}{5(|\sin x(t)|^4 + 1)} + \frac{4}{5} \right], \\ \left[\frac{x(t)}{h(t, x(t))} \right]_{t=0} = 0, \\ \frac{7}{47} {}^R \mathcal{D}^{\frac{4}{20}} \left[\frac{x(t)}{h(t, x(t))} \right]_{t=1} + {}^R \mathcal{D}^{\frac{5}{20}} \left[\frac{x(t)}{h(t, x(t))} \right]_{t=1} = \frac{44}{77}, \\ \frac{8}{47} \mathcal{I}^{\frac{1}{10}} \left[\frac{x(t)}{h(t, x(t))} \right]_{t=1} + \mathcal{I}^{\frac{2}{10}} \left[\frac{x(t)}{h(t, x(t))} \right]_{t=1} = \frac{33}{77}. \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Où $\lambda = \frac{47}{54}$, $\alpha = 1.88$, $\mu_1 = \frac{7}{47}$, $\mu_2 = \frac{8}{47}$, $\beta_1 = \frac{4}{20}$, $\beta_2 = \frac{5}{20}$, $\gamma_1 = \frac{1}{10}$, $\gamma_2 = \frac{2}{10}$, $T = 1$.

Soient $h : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ une fonction continue tel que

$$h(t, x(t)) = \frac{t}{100} \cos(x(t)) + \frac{1}{10}$$

et $F : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ une application multivoque donnée par

$$F(t, x(t)) = \left[\frac{|x(t)|}{4(|x(t)| + 1)} + \frac{1}{2}, \frac{|\sin x(t)|^4}{5(|\sin x(t)|^4 + 1)} + \frac{4}{5} \right].$$

Donc la fonction h satisfait l'hypothèse (A2)

$$\begin{aligned} |h(t, x_1(t)) - h(t, x_2(t))| &\leq \frac{t}{100} |\cos(x_1(t)) - \cos(x_2(t))|, \\ &\leq \frac{t}{100} |x_1 - x_2|, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

avec $\theta^* = \sup_{t \in [0, 1]} |\theta(t)| = \frac{1}{100}$.

D'autre part, on a

$$|v| \leq \max \left(\frac{|x(t)|}{4(|x(t)| + 1)} + \frac{1}{2}, \frac{|\sin x(t)|^4}{5(|\sin x(t)|^4 + 1)} + \frac{4}{5} \right) \leq 1, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ et } v \in F(t, x(t))$$

et

$$\|F(t, x(t))\| = \sup\{|v| : v \in F(t, x(t))\} \leq 1,$$

avec $p(t) = 1$ pour tout $t \in [0, T]$ donc $\|p\|_{L^1} = 1$.

D'où (A3) est satisfaite.

On prend $M \approx 34.0876$, $N \approx 46.6521$ et $r > 0$ tel que $r > 3.5903$.

Finalement, on a la condition $\theta^*(\|p\|_{L^1}M + N) \approx 0.0347 < \frac{1}{2}$, alors d'après le théorème 3.1 le problème fractionnaire (3.4) admet au moins une solution sur $[0, 1]$.

3.2 Cas d'un problème aux limites non hybride

Le but de cette section est l'étude des résultats d'existence pour le problème d'inclusion différentiel fractionnaire non hybride a des valeurs non convexes définie comme suivant :

$$(\lambda^C \mathcal{D}^\alpha + {}^R\mathcal{D}^\alpha)x(t) \in F(t, x(t)), \quad \forall 0 < t < T, 1 < \alpha \leq 2, \quad (3.5)$$

avec les conditions

$$\begin{cases} x(0) = 0, \\ \mu_1 {}^R\mathcal{D}^{\beta_1}x(T) + {}^R\mathcal{D}^{\beta_2}x(T) = 0, \\ \mu_2 \mathcal{I}^{\gamma_1}x(T) + \mathcal{I}^{\gamma_2}x(T) = 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

Où

- ${}^C\mathcal{D}^\alpha$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $1 < \alpha \leq 2$.
- ${}^R\mathcal{D}^\alpha, {}^R\mathcal{D}^{\beta_i}$ sont représentés les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville d'ordre $1 < \alpha \leq 2$ et $0 \leq \beta_i < \alpha, i = 1, 2$ respectivement.
- $\mathcal{I}^{\gamma_i}$ est l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\gamma_i > 0, i = 1, 2$.
- $F : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ est une application multivoque et $\lambda, \mu_1, \mu_2 \in (0, 1]$.

3.2.1 Rappels

Dans ce qui suit, on présente quelques définitions et résultats fondamentaux qui seront utilisés dans cette partie.

Soit Ψ la famille de toutes les fonctions $\psi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ vérifiant les deux conditions suivantes

1. ψ est positive et croissante.
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \psi^n(t) < +\infty$ pour chaque $t > 0$.

Définitions 3.1. [33, 40] Soit (X, d_X) un espace métrique et soient $F : X \rightarrow \mathcal{P}_{f,b}(X)$ une application multivoque et $\eta : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ une application positive. On dit que

– F est $\eta - \psi$ -contraction si

$$\eta(x_1, x_2)H(F(x_1), F(x_2)) \leq \psi(d_X(x_1, x_2)),$$

pour tous $x_1, x_2 \in X$ et $\psi \in \Psi$.

– F est η -admissible si pour tout $x \in X$ et $y \in Fx$ avec $\eta(x, y) \geq 1$, on a $\eta(y, z) \geq 1$ pour tout $z \in Fy$.

Définition 3.2. [33] On appelle X a la condition (C_η) si pour toute suite $(x_n)_{n \geq 1}$ dans X qui converge vers x et $\eta(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ pour $n \in \mathbb{N}$ alors, il existe une sous suite (x_{n_l}) de $(x_n)_{n \geq 1}$ tel que $\eta(x_{n_l}, x) \geq 1$ pour tout $l \in \mathbb{N}$.

Définition 3.3. [5] Soient (X, d_X) un espace métrique et $F : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ une fonction multivoque. Un élément $x \in X$ est dit un point final (point stationnaire) de F si $Fx = \{x\}$.

Définition 3.4. [5] On dit que $F : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ a la propriété de point final approximatif si

$$\inf_{x \in X} \sup_{y \in Fx} d_X(x, y) = 0.$$

Théorème 3.2. [33] Soit (X, d_X) un espace métrique complet. Soient $\eta : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction positive et $\psi \in \Psi$ une application strictement croissante.

Supposons que $\mathcal{T} : X \rightarrow \mathcal{P}_{f,b}(X)$ une application multivoque $\eta - \psi$ -contraction et η -admissible.

De plus, il existe $x \in X$ et $y \in \mathcal{T}(x)$ tel que $\eta(x, y) \geq 1$.

Alors, $\mathcal{T}$ admet un point fixe dans X à condition l'espace X vérifie la condition (C_η) .

Théorème 3.3. [5] Soient (X, d_X) un espace métrique complet et $\mathcal{T} : X \rightarrow \mathcal{P}_{f,b}(X)$ une application multivoque vérifie

$$H(\mathcal{T}x_1, \mathcal{T}x_2) \leq \psi(d_X(x_1, x_2)), \text{ pour tous } x_1, x_2 \in X.$$

Où $\psi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ est une application s.c.s, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \inf(t - \psi(t)) > 0$ et $\psi(t) < t$ pour tout $t > 0$.

Alors, $\mathcal{T}$ admet un point final unique si et seulement si $\mathcal{T}$ a la propriété de point final approximatif.

3.2.2 Problème intégral

Définition 3.5. Une fonction $x \in AC([0, T], \mathbb{R})$ est appelée solution du problème fractionnaire (3.5)–(3.6), s'il existe une fonction $v \in L^1([0, T], \mathbb{R})$ avec $v(t) \in F(t, x(t))$ pour tout $t \in [0, T]$ telle que

$$(\lambda^C \mathcal{D}^\alpha + {}^R \mathcal{D}^\alpha)x(t) = v(t),$$

avec les conditions (3.6) sont vérifiées.

De plus, par lemme 2.1 et pour tout $t \in [0, T]$ nous avons

$$\begin{aligned} x(t) = & \frac{1}{(\lambda + 1)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - r)^{\alpha-1} v(r) dr + \frac{t}{Q} \left[K_4 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} v(T) - K_2 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} v(T) \right. \\ & \left. + K_4 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} v(T) - K_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} v(T) \right] + \frac{t^{\alpha-1}}{Q} \left[K_1 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} v(T) - K_3 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} v(T) \right. \\ & \left. + K_1 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} v(T) - K_3 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} v(T) \right]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

3.2.3 Premier résultat d'existence

Par suite, nous avons les hypothèses suivantes :

(A5) $F : [0, T] \times X \rightarrow \mathcal{P}_{cp}(X)$ est une application multivoque bornée et intégrable telle que pour tout $x \in X$, l'application $F(., x) : [0, T] \rightarrow \mathcal{P}_{cp}(X)$ est mesurable.

(A6) Il existe deux fonctions positives $\psi \in \Psi$ et $p \in C([0, T], \mathbb{R}_+)$ satisfaisant

$$H(F(t, x_1), F(t, x_2)) \leq p(t) \psi(|x_1 - x_2|) \frac{1}{M \|p\|} \quad \text{pour } x_1, x_2 \in X \quad \text{et } t \in [0, T],$$

avec $\|p\| = \sup_{t \in [0, T]} |p(t)|$ et M définit par (2.5).

(A7) Il existe une fonction $\sigma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\sigma(x_1, x_2) \geq 0, \quad \text{pour } x_1, x_2 \in X.$$

(A8) Pour toute suite $(x_n)_{n \geq 1}$ converge dans X vers x et pour tout $n \geq 1, t \in [0, T]$ on a

$$\sigma(x_n(t), x_{n+1}(t)) \geq 0.$$

Alors, il existe une sous suite $(x_{n_l})_{l \geq 1}$ de $(x_n)_{n \geq 1}$ tel que

$$\sigma(x_{n_l}(t), x(t)) \geq 0, \quad \text{pour tout } l \geq 1 \text{ et } t \in [0, T].$$

(A9) Il existe $x_0 \in X$ et $y \in \mathcal{T}(x_0)$ tel que

$$\sigma(x_0(t), y(t)) \geq 0, \quad \text{pour tout } t \in [0, T].$$

(A10) Pour tout $x \in X$ et $y \in \mathcal{T}(x)$ avec $\sigma(x(t), y(t)) \geq 0$, on a

$$\sigma(y(t), z(t)) \geq 0 \quad \text{pour tout } z \in \mathcal{T}(y) \text{ et } t \in [0, T].$$

Théorème 3.4. [42] *Sous les conditions (A5) – (A10) le problème d'inclusion (3.5) – (3.6) admet une solution sur $[0, T]$.*

Démonstration. Considérons l'opérateur $\mathcal{T} : C([0, T], \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}(C([0, T], \mathbb{R}))$ par

$$\mathcal{T}(x) = \left\{ y \in C([0, T], \mathbb{R}) : \begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{(\lambda+1)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-r)^{\alpha-1} v(r) dr + \frac{t}{Q} \\ &\quad \left[K_4 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} v(T) - K_2 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} v(T) \right. \\ &\quad \left. + K_4 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} v(T) - K_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} v(T) \right] + \frac{t^{\alpha-1}}{Q} \\ &\quad \left[K_1 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} v(T) - K_3 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} v(T) \right. \\ &\quad \left. + K_1 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} v(T) - K_3 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} v(T) \right], \forall v \in S_{F,x} \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

On remarque que les solutions du problème (3.5) – (3.6) sont des points fixes de l'opérateur $\mathcal{T}$.

Pour tout $x \in C([0, T], \mathbb{R})$, l'ensemble de sélection $S_{F,x}$ est non vide, alors par (A5) et le théorème 1.3, F admet une sélection mesurable.

Maniement, nous devons prouver que l'opérateur $\mathcal{T}$ satisfait les conditions du théorème 3.2.

– Étape 1 : montrons que $\mathcal{T}(x) \in \mathcal{P}_{f,b}(C([0, T], \mathbb{R}))$ pour chaque $x \in C([0, T], \mathbb{R})$.

Soit $(y_n)_{n \geq 1}$ une suite de $\mathcal{T}(x)$ tel que $y_n \rightarrow y$ dans $C([0, T], \mathbb{R})$. Alors, $y \in C([0, T], \mathbb{R})$ et il existe $v_n \in S_{F,x}$ tel que pour chaque $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} y_n(t) &= \frac{1}{(\lambda+1)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-r)^{\alpha-1} v_n(r) dr + \frac{t}{Q} \left[K_4 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} v_n(T) - K_2 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} v_n(T) \right. \\ &\quad \left. + K_4 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} v_n(T) - K_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} v_n(T) \right] + \frac{t^{\alpha-1}}{Q} \left[K_1 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} v_n(T) - K_3 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} v_n(T) \right. \\ &\quad \left. + K_1 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} v_n(T) - K_3 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} v_n(T) \right]. \end{aligned}$$

Comme F est à valeurs compactes, on peut extraire une sous suite v_n converge vers v dans $L^1([0, T], \mathbb{R})$ et donc $v \in S_{F,x}$. Alors, pour chaque $t \in [0, T]$, on a

$$\begin{aligned} y_n(t) \rightarrow y(t) &= \frac{1}{(\lambda+1)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-r)^{\alpha-1} v(r) dr + \frac{t}{Q} \left[K_4 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} v(T) - K_2 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} v(T) \right. \\ &\quad \left. + K_4 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} v(T) - K_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} v(T) \right] + \frac{t^{\alpha-1}}{Q} \left[K_1 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} v(T) - K_3 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} v(T) \right. \\ &\quad \left. + K_1 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} v(T) - K_3 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} v(T) \right]. \end{aligned}$$

De plus, puisque F a des valeurs compactes, alors pour tout $x \in C([0, T], \mathbb{R})$ l'ensemble $\mathcal{T}(x)$ est borné.

– Étape 2 : montrons que $\mathcal{T}$ est $\eta - \psi$ -contraction.

Définissons la fonction positive $\eta : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ comme suit :

$$\eta(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(x_1(t), x_2(t)) \geq 0, \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

Soient $x_1, x_2 \in X$ et $y_1 \in \mathcal{T}(x_2)$. Alors, il existe $v_1(t) \in F(t, x_2(t))$ tel que pour chaque $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} y_1(t) = & \frac{1}{(\lambda + 1)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - r)^{\alpha-1} v_1(r) dr + \frac{t}{Q} \left[K_4 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} v_1(T) - K_2 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} v_1(T) \right. \\ & + K_4 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} v_1(T) - K_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} v_1(T) \left. \right] + \frac{t^{\alpha-1}}{Q} \left[K_1 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} v_1(T) - K_3 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} v_1(T) \right. \\ & + K_1 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} v_1(T) - K_3 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} v_1(T) \left. \right]. \end{aligned}$$

L'hypothèse (A6) affirme que pour tout $t \in [0, T]$

$$H(F(t, x_1(t)), F(t, x_2(t))) \leq p(t) \psi(|x_1(t) - x_2(t)|) \frac{1}{M\|p\|},$$

pour tous $x_1, x_2 \in X$ tel que $\sigma(x_1(t), x_2(t)) \geq 0$.

Par conséquent, il existe $w \in F(t, x_1(t))$ tel que

$$|v_1(t) - w(t)| \leq p(t) \psi(|x_1(t) - x_2(t)|) \frac{1}{M\|p\|}, \quad \forall t \in [0, T].$$

Introduisons l'application multivoque $U : [0, T] \rightarrow \mathcal{P}(X)$ donnée par

$$U(t) = \left\{ w \in X : |v_1(t) - w(t)| \leq p(t) \psi(|x_1(t) - x_2(t)|) \frac{1}{M\|p\|}, \forall t \in [0, T] \right\}.$$

Comme l'opérateur multivoque $V(t) = U(t) \cap F(t, x_1(t))$ est mesurable.

Alors, V admet une sélection mesurable donc, $v_2(t) \in F(t, x_1(t))$ et pour chaque $t \in [0, T]$, on

a

$$|v_1(t) - v_2(t)| \leq p(t) \psi(|x_1(t) - x_2(t)|) \frac{1}{M\|p\|}. \quad (3.9)$$

Donc, on définit l'application $y_2 \in \mathcal{T}(x_1)$ comme suit pour $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} y_2(t) = & \frac{1}{(\lambda + 1)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - r)^{\alpha-1} v_2(r) dr + \frac{t}{Q} \left[K_4 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} v_2(T) - K_2 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} v_2(T) \right. \\ & + K_4 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} v_2(T) - K_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} v_2(T) \left. \right] + \frac{t^{\alpha-1}}{Q} \left[K_1 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} v_2(T) - K_3 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} v_2(T) \right. \\ & + K_1 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} v_2(T) - K_3 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} v_2(T) \left. \right]. \end{aligned}$$

Alors, pour chaque $t \in [0, T]$ on a

$$\begin{aligned}
|y_1(t) - y_2(t)| &\leq \frac{1}{(\lambda + 1)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - r)^{\alpha-1} |v_1(r) - v_2(r)| dr + \frac{t}{|Q|} \left[K_4 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} |v_1(T) - v_2(T)| \right. \\
&\quad + K_2 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} |v_1(T) - v_2(T)| + K_4 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} |v_1(T) - v_2(T)| + K_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} |v_1(T) - v_2(T)| \Big] \\
&\quad + \frac{t^{\alpha-1}}{|Q|} \left[K_1 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} |v_1(T) - v_2(T)| + K_3 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} |v_1(T) - v_2(T)| \right. \\
&\quad \left. + K_1 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} |v_1(T) - v_2(T)| + K_3 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} |v_1(T) - v_2(T)| \right],
\end{aligned}$$

en utilisant (3.9), on trouve

$$\begin{aligned}
|y_1(t) - y_2(t)| &\leq \frac{1}{M\|p\|} \left(\frac{1}{(\lambda + 1)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - r)^{\alpha-1} [p(r)\psi(|x_1(r) - x_2(r)|)] dr \right. \\
&\quad + \frac{t}{|Q|} \left[K_4 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} [p(T)\psi(|x_1(T) - x_2(T)|)] + K_2 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} [p(T)\psi(|x_1(T) - x_2(T)|)] \right. \\
&\quad \left. + K_4 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} [p(T)\psi(|x_1(T) - x_2(T)|)] + K_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} [p(T)\psi(|x_1(T) - x_2(T)|)] \right] \\
&\quad + \frac{t^{\alpha-1}}{|Q|} \left[K_1 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} [p(T)\psi(|x_1(T) - x_2(T)|)] + K_3 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} [p(T)\psi(|x_1(T) - x_2(T)|)] \right. \\
&\quad \left. + K_1 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} [p(T)\psi(|x_1(T) - x_2(T)|)] + K_3 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} [p(T)\psi(|x_1(T) - x_2(T)|)] \right] \Big).
\end{aligned}$$

D'où

$$\|y_1 - y_2\| \leq \frac{1}{M\|p\|} M\|p\| \psi(\|x_1 - x_2\|).$$

On arrive à prouver que

$$\eta(x_1, x_2) H(\mathcal{T}(x_1), \mathcal{T}(x_2)) \leq \psi(\|x_1 - x_2\|).$$

Donc, l'opérateur $\mathcal{T}$ est $\eta - \psi$ -contraction.

– Étape 3 : montrons que $\mathcal{T}$ est η -admissible.

Soient $x \in X$ et $y \in \mathcal{T}(x)$, on a $\eta(x, y) \geq 1$ implique que $\sigma(x(t), y(t)) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$.

D'après (A10), il existe un élément $z \in \mathcal{T}(y)$ tel que pour chaque $t \in [0, T]$

$$\sigma(y(t), z(t)) \geq 0,$$

ce qui donne $\eta(y, z) \geq 1$, alors $\mathcal{T}$ est η -admissible.

– Étape 4 : montrons que l'espace X a la condition (C_η) .

Supposons que $x \in X$ et $y \in \mathcal{T}(x)$ tel que pour tout $t \in [0, T]$

$$\sigma(x(t), y(t)) \geq 0 \quad \text{implique que} \quad \eta(x, y) \geq 1.$$

Considérons la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ de X avec $x_n \rightarrow x$ et $\eta(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors on trouve $\sigma(x_n(t), x_{n+1}(t)) \geq 0$ pour chaque $t \in [0, T]$.

D'après l'hypothèse (A8), il existe une sous suite $(x_{n_l})_{l \geq 1}$ de $(x_n)_{n \geq 1}$ tel que pour tout $t \in [0, T]$ on a $\sigma(x_{n_l}(t), x(t)) \geq 0$ et $l \in \mathbb{N}$ ce qui donne $\eta(x_{n_l}, x) \geq 1$ pour tout $l \geq 1$.

D'où X a la condition (C_η) .

Par conséquent, l'application multivoque $\mathcal{T}$ admet un point fixe qui est solution du problème d'inclusion (3.5) – (3.6). $\square$

3.2.4 Deuxième résultat d'existence

On commence par les hypothèses suivantes

(A11) La fonction $\psi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ est positive telle que ψ est s.c.s, $\lim_{t \rightarrow \infty} \inf(t - \psi(t)) > 0$ et $\psi(t) < t$ pour tout $t > 0$.

(A12) L'application multivoque $F : [0, T] \times X \rightarrow \mathcal{P}_{cp}(X)$ est bornée, intégrable et a des valeurs compactes et de plus, on a $F(\cdot, x) : [0, T] \rightarrow \mathcal{P}_{cp}(X)$ est mesurable pour tout $x \in X$.

(A13) Il existe une fonction positive $p \in C([0, T], \mathbb{R}_+)$ tel que :

$$H(F(t, x_1), F(t, x_2)) \leq p(t)\psi(|x_1 - x_2|) \frac{1}{M\|p\|}, \quad \forall x_1, x_2 \in X \text{ et } t \in [0, T],$$

où $\|p\| = \sup_{t \in [0, T]} |p(t)|$ et M est défini par (2.5).

(A14) L'opérateur $\mathcal{T}$ a la propriété de point final approximatif.

Théorème 3.5. [42] *Si les conditions (A11) – (A14) sont satisfaites. Alors, le problème non hybride (3.5) – (3.6) a une solution.*

Démonstration. Considérer l'application multivoque $\mathcal{T} : C([0, T], \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}(C([0, T], \mathbb{R}))$ définie par (3.8).

Nous avons que les solutions du problème (3.5) – (3.6) sont des points finaux de l'opérateur $\mathcal{T}$.

Il est clair que F admet une sélection mesurable car l'application $t \mapsto F(t, x(t))$ est mesurable pour

tout $t \in [0, T]$ et $x \in X$.

Ce théorème peut être démontré en deux étapes.

- Étape 1 : montrons que $\mathcal{T}(x) \in \mathcal{P}_{f,b}(C([0, T], \mathbb{R}))$ pour chaque $x \in C([0, T], \mathbb{R})$.

En utilisant le même raisonnement que précédemment, nous pouvons démontrer que $\mathcal{T}$ est à des valeurs fermées et bornées.

- Étape 2 : montrons que

$$H(\mathcal{T}(x_1), \mathcal{T}(x_2)) \leq \psi(d(x_1, x_2)), \quad \forall x_1, x_2 \in X.$$

Soient $x_1, x_2 \in X$ et $y_1 \in \mathcal{T}(x_2)$. Alors, il existe $v_1 \in F(t, x_2(t))$ tel que pour chaque $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} y_1(t) = & \frac{1}{(\lambda + 1)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - r)^{\alpha-1} v_1(r) dr + \frac{t}{Q} \left[K_4 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} v_1(T) - K_2 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} v_1(T) \right. \\ & + K_4 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} v_1(T) - K_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} v_1(T) \left. \right] + \frac{t^{\alpha-1}}{Q} \left[K_1 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} v_1(T) - K_3 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} v_1(T) \right. \\ & + K_1 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} v_1(T) - K_3 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} v_1(T) \left. \right]. \end{aligned}$$

L'hypothèse (A13) donne pour tout $t \in [0, T]$

$$H(F(t, x_1(t)), F(t, x_2(t))) \leq p(t) \psi(|x_1(t) - x_2(t)|) \frac{1}{M\|p\|}.$$

Par conséquent, il existe $w \in F(t, x_1(t))$ tel que

$$|v_1(t) - w(t)| \leq p(t) \psi(|x_1(t) - x_2(t)|) \frac{1}{M\|p\|}.$$

On Considère l'application multivoque $U : [0, T] \rightarrow \mathcal{P}(X)$ donnée par

$$U(t) = \left\{ w \in X : |v_1(t) - w(t)| \leq p(t) \psi(|x_1(t) - x_2(t)|) \frac{1}{M\|p\|}, \forall t \in [0, T] \right\}.$$

Puisque l'opérateur $V(t) = U(t) \cap F(t, x_1(t))$ est mesurable.

Alors, il existe une fonction $v_2(t)$ une sélection mesurable pour V donc, $v_2(t) \in F(t, x_1(t))$ et pour chaque $t \in [0, T]$, on a

$$|v_1(t) - v_2(t)| \leq p(t) \psi(|x_1(t) - x_2(t)|) \frac{1}{M\|p\|}. \quad (3.10)$$

Soit $y_2 \in \mathcal{T}(x_1)$ pour tout $t \in [0, T]$, on a

$$\begin{aligned} y_2(t) &= \frac{1}{(\lambda + 1)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - r)^{\alpha-1} v_2(r) dr + \frac{t}{Q} \left[K_4 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} v_2(T) - K_2 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} v_2(T) \right. \\ &\quad \left. + K_4 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} v_2(T) - K_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} v_2(T) \right] + \frac{t^{\alpha-1}}{Q} \left[K_1 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} v_2(T) - K_3 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} v_2(T) \right. \\ &\quad \left. + K_1 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} v_2(T) - K_3 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} v_2(T) \right]. \end{aligned}$$

Alors, pour chaque $t \in [0, T]$ on a

$$\begin{aligned} |y_1(t) - y_2(t)| &\leq \frac{1}{(\lambda + 1)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - r)^{\alpha-1} |v_1(r) - v_2(r)| dr + \frac{t}{Q} \left[K_4 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} |v_1(T) - v_2(T)| \right. \\ &\quad \left. + K_2 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} |v_1(T) - v_2(T)| + K_4 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} |v_1(T) - v_2(T)| + K_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} |v_1(T) - v_2(T)| \right] \\ &\quad + \frac{t^{\alpha-1}}{Q} \left[K_1 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} |v_1(T) - v_2(T)| + K_3 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} |v_1(T) - v_2(T)| \right. \\ &\quad \left. + K_1 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} |v_1(T) - v_2(T)| + K_3 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} |v_1(T) - v_2(T)| \right], \end{aligned}$$

on va utiliser (3.10), on obtient

$$\begin{aligned} |y_1(t) - y_2(t)| &\leq \frac{1}{M\|p\|} \left(\frac{1}{(\lambda + 1)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - r)^{\alpha-1} [p(r)\psi(|x_1(r) - x_2(r)|)] dr \right. \\ &\quad + \frac{t}{Q} \left[K_4 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} [p(T)\psi(|x_1(T) - x_2(T)|)] + K_2 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} [p(T)\psi(|x_1(T) - x_2(T)|)] \right. \\ &\quad \left. + K_4 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} [p(T)\psi(|x_1(T) - x_2(T)|)] + K_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} [p(T)\psi(|x_1(T) - x_2(T)|)] \right] \\ &\quad + \frac{t^{\alpha-1}}{Q} \left[K_1 \mu_2 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_1} [p(T)\psi(|x_1(T) - x_2(T)|)] + K_3 \mu_1 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_1} [p(T)\psi(|x_1(T) - x_2(T)|)] \right. \\ &\quad \left. + K_1 \mathcal{I}^{\alpha+\gamma_2} [p(T)\psi(|x_1(T) - x_2(T)|)] + K_3 \mathcal{I}^{\alpha-\beta_2} [p(T)\psi(|x_1(T) - x_2(T)|)] \right] \Bigg). \end{aligned}$$

Donc

$$\|y_1 - y_2\| \leq \psi(\|x_1 - x_2\|).$$

Finalement, on trouve

$$H(\mathcal{T}(x_1), \mathcal{T}(x_2)) \leq \psi(\|x_1 - x_2\|).$$

Par l'hypothèse (A14) et le théorème 3.3, nous trouvons que l'opérateur $\mathcal{T}$ admet unique point final. i.e. $\exists! x^* \in X$ tel que $\mathcal{T}(x^*) = \{x^*\}$ qui est solution du problème aux limites (3.5) – (3.6). $\square$

Exemple 3.2. On considère le problème aux limites non hybride suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\frac{47}{54} {}^C D^{1.88} + {}^R D^{1.88})x(t) \in \left[0, \frac{5e^t}{100} \frac{|\arctan x(t)|}{|\arctan x(t)| + 1}\right], \\ x(0) = 0, \\ \frac{7}{47} {}^R \mathcal{D}_{\frac{4}{20}} x(1) + {}^R \mathcal{D}_{\frac{5}{20}} x(1) = 0, \\ \frac{8}{47} \mathcal{I}_{\frac{1}{10}} x(1) + \mathcal{I}_{\frac{2}{10}} x(1) = 0, \end{array} \right. \quad (3.11)$$

ici on a $\lambda = \frac{47}{54}$, $\alpha = 1.88$, $\mu_1 = \frac{7}{47}$, $\mu_2 = \frac{8}{47}$, $\beta_1 = \frac{4}{20}$, $\beta_2 = \frac{5}{20}$, $\gamma_1 = \frac{1}{10}$, $\gamma_2 = \frac{2}{10}$, $T = 1$.

On a aussi $F : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ donnée par

$$F(t, x(t)) = \left[0, \frac{5e^t}{100} \frac{|\arctan x(t)|}{|\arctan x(t)| + 1}\right].$$

Nous prenons

- la fonction positive $\psi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ est donnée par $\psi(t) = \frac{t}{2}$, pour tout $t > 0$ tels que ψ est s.c.s, $\lim_{t \rightarrow \infty} \inf(t - \psi(t)) > 0$ et $\psi(t) < t$ pour tout $t > 0$.
- $p : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction continue définie par

$$p(t) = \frac{5e^t}{7}, \quad \text{pour tout } t \in [0, 1],$$

$$\text{avec } \|p\| = \frac{5e}{100} \approx 0.1359.$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} H(F(t, x_1(t)), F(t, x_2(t))) &\leq \frac{5e^t}{14} (|x_1(t) - x_2(t)|), \\ &= \frac{5e^t}{7} \psi(|x_1(t) - x_2(t)|), \\ &\leq p(t) \psi(|x_1(t) - x_2(t)|) \frac{1}{M\|p\|}, \end{aligned}$$

avec $M\|p\| \approx 0.3398$.

Comme toutes les conditions du théorème 3.5 sont vérifiées, donc le problème fractionnaire (3.11) a une solution.

Chapitre 4

Systèmes différentiels fractionnaires séquentiels hybrides multidimensionnels

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on présente un nouveau résultat d'existence pour des systèmes différentiels hybrides d'ordres fractionnaires multiples séquentiels avec des conditions aux limites hybrides en trois points, notre résultat est inspiré sur les travaux [1, 2, 7, 32].

K. S. Miller et B. Ross sont définis les dérivées fractionnaires séquentielles d'une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ par la formule suivante [37]

$$\mathcal{D}^\alpha f(t) = \left(\mathcal{D}^{\alpha_1} \mathcal{D}^{\alpha_2} \dots \mathcal{D}^{\alpha_n} \right) f(t),$$

avec $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

En général, $\mathcal{D}^\alpha$ peut être la dérivée de Riemann-Liouville, Caputo, Hadamard, Caputo-Hadamard ou n'importe quelle autre dérivée.

4.2 Présentation du problème

Soit le système d'inclusions différentielles fractionnaires séquentielles hybrides défini comme suit

$$\begin{cases} {}^C\mathcal{D}^{\alpha_1}(\lambda_1 + \mathcal{D}) \left[\frac{x_1(t)}{h_1(t, x_1(t), \mathcal{I}^{\gamma_1} x_1(t))} \right] \in F_1(t, x_1(t), \dots, x_m(t), x'_1(t), \dots, x'_m(t)), \\ {}^C\mathcal{D}^{\alpha_2}(\lambda_2 + \mathcal{D}) \left[\frac{x_2(t)}{h_2(t, x_2(t), \mathcal{I}^{\gamma_2} x_2(t))} \right] \in F_2(t, x_1(t), \dots, x_m(t), x'_1(t), \dots, x'_m(t)), \\ \vdots \\ {}^C\mathcal{D}^{\alpha_m}(\lambda_m + \mathcal{D}) \left[\frac{x_m(t)}{h_m(t, x_m(t), \mathcal{I}^{\gamma_m} x_m(t))} \right] \in F_m(t, x_1(t), \dots, x_m(t), x'_1(t), \dots, x'_m(t)), \end{cases} \quad (4.1)$$

associé aux conditions aux limites hybrides suivantes

$$\begin{cases} \left[\frac{x_i(t)}{h_i(t, x_i(t), \mathcal{I}^{\gamma_i} x_i(t))} \right]_{t=0} = 0, \\ \left[\frac{x_i(t)}{h_i(t, x_i(t), \mathcal{I}^{\gamma_i} x_i(t))} \right]_{t=1} = \mu_i \left[\frac{x_i(t)}{h_i(t, x_i(t), \mathcal{I}^{\gamma_i} x_i(t))} \right]_{t=\rho_i}, \\ \left[\left(\frac{x_i(t)}{h_i(t, x_i(t), \mathcal{I}^{\gamma_i} x_i(t))} \right)' \right]_{t=0} = \dots = \left[\left(\frac{x_i(t)}{h_i(t, x_i(t), \mathcal{I}^{\gamma_i} x_i(t))} \right)^{(n-1)} \right]_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

Où

- ${}^C\mathcal{D}^{\alpha_i}$ sont les dérivées fractionnaires de Caputo d'ordre $n-1 < \alpha_i \leq n$, $n \geq 2$, $i = 1, 2, \dots, m$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{D} = \frac{d}{dt}$.
- $\mathcal{I}^{\gamma_i}$ sont les intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville d'ordre $\gamma_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, m$.
- Les fonctions $h_i : [0, 1] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^*$ sont réelles continues pour tout $i = 1, 2, \dots, m$.
- $F_i : [0, 1] \times \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ sont des applications multivoques $\forall i = 1, 2, \dots, m$.
- $\lambda_i \in \mathbb{R}_+$, $\mu_i \in \mathbb{R}$ et $\rho_i \in (0, 1)$ sont des nombres réels pour $i = 1, 2, \dots, m$.

Maintenant, nous introduisons les espaces de Banach suivants

$$X_i = \{x_i : x_i \in C([0, 1], \mathbb{R}) \text{ et } x'_i \in C([0, 1], \mathbb{R})\},$$

muni de la norme

$$\|x_i\|_{X_i} = \|x_i\|_{\infty} + \|x'_i\|_{\infty},$$

où $\|x_i\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |x_i(t)|$ et $\|x'_i\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |x'_i(t)|$ pour tout $i = 1, 2, \dots, m$.

De plus, l'espace $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m$ est un espace de Banach dont la norme

$$\|(x_1, x_2, \dots, x_m)\|_X = \sum_{i=1}^m \|x_i\|_{X_i}.$$

4.3 Solution intégrale

Nous commençons d'abord par la définition suivante

Définition 4.1. Une fonction $x_i \in AC^{n-1}([0, 1], \mathbb{R})$ est dite une solution du problème (4.1) – (4.2), s'il existe une fonction $v_i \in L^1([0, 1], \mathbb{R})$ avec $v_i(t) \in F_i(t, x_1(t), \dots, x_m(t), x'_1(t), \dots, x'_m(t))$ pour tout $t \in [0, 1]$ et $i = 1, 2, \dots, m$ telle que

$${}^C\mathcal{D}^{\alpha_i}(\lambda_i + \mathcal{D}) \left[\frac{x_i(t)}{h_i(t, x_i(t), \mathcal{I}^{\gamma_i} x_i(t))} \right] = v_i(t), \quad n-1 < \alpha_i \leq n, n \geq 2,$$

et la fonction x_i satisfait les conditions aux limites (4.2).

En suite, on va introduire le lemme fondamental suivant pour présenter l'équation intégrale du problème aux limites (4.1) – (4.2).

Lemme 4.1. Soient $n-1 < \alpha_i \leq n$, $n \geq 2$ et $Q_i(1) - \mu_i Q_i(\rho_i) \neq 0$ pour tout $i = 1, 2, \dots, m$.

On suppose que $g_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue avec $i = 1, 2, \dots, m$. Alors le problème différentiel hybride d'ordre fractionnaire

$${}^C\mathcal{D}^{\alpha_i}(\lambda_i + \mathcal{D}) \left[\frac{x_i(t)}{h_i(t, x_i(t), \mathcal{I}^{\gamma_i} x_i(t))} \right] = g_i(t), \quad (4.3)$$

associé aux conditions aux limites hybrides suivantes pour tout $i = 1, 2, \dots, m$

$$\begin{cases} \left[\frac{x_i(t)}{h_i(t, x_i(t), \mathcal{I}^{\gamma_i} x_i(t))} \right]_{t=0} = 0, \\ \left[\frac{x_i(t)}{h_i(t, x_i(t), \mathcal{I}^{\gamma_i} x_i(t))} \right]_{t=1} = \mu_i \left[\frac{x_i(t)}{h_i(t, x_i(t), \mathcal{I}^{\gamma_i} x_i(t))} \right]_{t=\rho_i}, \\ \left[\left(\frac{x_i(t)}{h_i(t, x_i(t), \mathcal{I}^{\gamma_i} x_i(t))} \right)' \right]_{t=0} = \dots = \left[\left(\frac{x_i(t)}{h_i(t, x_i(t), \mathcal{I}^{\gamma_i} x_i(t))} \right)^{(n-1)} \right]_{t=0} = 0, \end{cases} \quad (4.4)$$

possède une solution x_i sous la forme suivante

$$x_i(t) = h_i(t, x_i(t), \mathcal{I}^{\gamma_i} x_i(t)) \left(\int_0^t e^{-\lambda_i(t-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} g_i(s) ds dr + \frac{Q_i(t)}{Q_i(1) - \mu_i Q_i(\rho_i)} \right. \\ \left. \times \left[\mu_i \int_0^{\rho_i} e^{-\lambda_i(\rho_i-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} g_i(s) ds dr - \int_0^1 e^{-\lambda_i(1-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} g_i(s) ds dr \right] \right),$$

où

$$Q_i(t) = \begin{cases} \frac{t^{n-1}}{\lambda_i} - \frac{(n-1)t^{n-2}}{\lambda_i^2} + \frac{(n-1)(n-2)t^{n-3}}{\lambda_i^3} - \dots + \frac{(n-1)t}{\lambda_i^{n-1}} - \frac{(n-1)!}{\lambda_i^n} (1 - e^{-\lambda_i t}) & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{t^{n-1}}{\lambda_i} - \frac{(n-1)t^{n-2}}{\lambda_i^2} + \frac{(n-1)(n-2)t^{n-3}}{\lambda_i^3} - \dots - \frac{(n-1)t}{\lambda_i^{n-1}} + \frac{(n-1)!}{\lambda_i^n} (1 - e^{-\lambda_i t}) & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases}$$

pour tout $t \in [0, 1]$ et $i = 1, 2, \dots, m$.

Démonstration. On suppose que x_i satisfait le problème (4.3) – (4.4) alors, on a

$${}^C \mathcal{D}^{\alpha_i} (\mathcal{D} + \lambda_i) \left[\frac{x_i(t)}{h_i(t, x_i(t), \mathcal{I}^{\gamma_i} x_i(t))} \right] = g_i(t), \quad \forall i = 1, 2, \dots, m.$$

On applique l'intégrale de Riemann-Liouville d'ordre α_i à l'équation ci-dessus, on trouve pour tout $i = 1, 2, \dots, m$

$$(\mathcal{D} + \lambda_i) \left[\frac{x_i(t)}{h_i(t, x_i(t), \mathcal{I}^{\gamma_i} x_i(t))} \right] = c_{0,i} + c_{1,i}t + \dots + c_{n-1,i}t^{n-1} + \mathcal{I}^{\alpha_i} g_i(t). \quad (4.5)$$

On multiplie l'équation (4.5) par $e^{\lambda_i t}$, en suite on va intégrer pour tout $t \in [0, 1]$ et $i = 1, 2, \dots, m$, on trouve

$$\left[\frac{x_i(t)}{h_i(t, x_i(t), \mathcal{I}^{\gamma_i} x_i(t))} \right] e^{\lambda_i t} = \int_0^t [c_{0,i} + c_{1,i}r + \dots + c_{n-1,i}r^{n-1}] e^{\lambda_i r} dr + \int_0^t e^{\lambda_i r} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} g_i(s) ds dr. \quad (4.6)$$

Après des calculs simples, on obtient

$$\begin{aligned} c_{0,i} \int_0^t e^{\lambda_i r} dr &= \frac{c_{0,i}}{\lambda_i} (e^{\lambda_i t} - 1), \\ c_{1,i} \int_0^t r e^{\lambda_i r} dr &= \frac{c_{1,i}}{\lambda_i^2} (\lambda_i t e^{\lambda_i t} - e^{\lambda_i t} + 1), \\ c_{2,i} \int_0^t r^2 e^{\lambda_i r} dr &= \frac{2c_{2,i}}{\lambda_i^3} \left(\frac{\lambda_i^2}{2} t^2 e^{\lambda_i t} - \lambda_i t e^{\lambda_i t} + e^{\lambda_i t} - 1 \right), \\ c_{3,i} \int_0^t r^3 e^{\lambda_i r} dr &= \frac{3!c_{3,i}}{\lambda_i^4} \left(\frac{\lambda_i^3}{3!} t^3 e^{\lambda_i t} - \frac{\lambda_i^2}{2} t^2 e^{\lambda_i t} + \lambda_i t e^{\lambda_i t} - e^{\lambda_i t} + 1 \right), \\ c_{4,i} \int_0^t r^4 e^{\lambda_i r} dr &= \frac{4!c_{4,i}}{\lambda_i^5} \left(\frac{\lambda_i^4}{4!} t^4 e^{\lambda_i t} - \frac{\lambda_i^3}{3!} t^3 e^{\lambda_i t} + \frac{\lambda_i^2}{2} t^2 e^{\lambda_i t} - \lambda_i t e^{\lambda_i t} + e^{\lambda_i t} - 1 \right), \end{aligned}$$

par récurrence, on a

$$c_{n-1,i} \int_0^t r^{n-1} e^{\lambda_i r} dr = \begin{cases} c_{n-1,i} \left(\frac{t^{n-1}}{\lambda_i} e^{\lambda_i t} - \frac{(n-1)t^{n-2}}{\lambda_i^2} e^{\lambda_i t} + \frac{(n-1)(n-2)t^{n-3}}{\lambda_i^3} e^{\lambda_i t} - \dots + \frac{(n-1)!t}{\lambda_i^{n-1}} e^{\lambda_i t} \right. \\ \left. - \frac{(n-1)!}{\lambda_i^n} (e^{\lambda_i t} - 1) \right), & \text{si } n \text{ est pair,} \\ c_{n-1,i} \left(\frac{t^{n-1}}{\lambda_i} e^{\lambda_i t} - \frac{(n-1)t^{n-2}}{\lambda_i^2} e^{\lambda_i t} + \frac{(n-1)(n-2)t^{n-3}}{\lambda_i^3} e^{\lambda_i t} - \dots - \frac{(n-1)!t}{\lambda_i^{n-1}} e^{\lambda_i t} \right. \\ \left. + \frac{(n-1)!}{\lambda_i^n} (e^{\lambda_i t} - 1) \right), & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

En utilisant les conditions aux limites (4.4), nous trouvons

$$\begin{aligned} c_{0,i} &= 0, \\ c_{1,i} &= 0, \\ c_{2,i} &= 0, \\ c_{3,i} &= 0, \\ c_{4,i} &= 0, \\ &\vdots \\ c_{n-2,i} &= 0, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} c_{n-1,i} &= \frac{1}{Q_i(1) - \mu_i Q_i(\rho_i)} \left[\mu_i \int_0^{\rho_i} e^{-\lambda_i(\rho_i-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} g_i(s) ds dr \right. \\ &\quad \left. - \int_0^1 e^{-\lambda_i(1-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} g_i(s) ds dr \right], \end{aligned}$$

avec $Q_i(1) - \mu_i Q_i(\rho_i) \neq 0$ pour tout $0 < \rho_i < 1$ et $\mu_i \in \mathbb{R}$.

On remplace $c_{0,i}, c_{1,i}, \dots, c_{n-1,i}$ dans (4.6), on aura

$$\begin{aligned} x_i(t) &= h_i(t, x_i(t), \mathcal{I}^{\gamma_i} x_i(t)) \left(\int_0^t e^{-\lambda_i(t-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} g_i(s) ds dr + \frac{Q_i(t)}{Q_i(1) - \mu_i Q_i(\rho_i)} \right. \\ &\quad \left. \times \left[\mu_i \int_0^{\rho_i} e^{-\lambda_i(\rho_i-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} g_i(s) ds dr - \int_0^1 e^{-\lambda_i(1-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} g_i(s) ds dr \right] \right), \end{aligned}$$

pour tout $i = 1, 2, \dots, m$. □

4.4 Résultat d'existence

D'abord, on donne un théorème important

Théorème 4.1. *Soit $g_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue pour tout $i = 1, 2, \dots, m$ tel que*

$$\|g_i\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |g_i(t)|.$$

Alors, on a les résultats suivants

1. $\left| \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} g_i(s) ds \right| \leq \frac{\|g_i\|_\infty}{\Gamma(\alpha_i + 1)},$
2. $\left| \int_0^t e^{-\lambda_i(t-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} g_i(s) ds dr \right| \leq \frac{(1-e^{-\lambda_i})}{\lambda_i \Gamma(\alpha_i + 1)} \|g_i\|_\infty,$
3. $\left| \int_0^{\rho_i} e^{-\lambda_i(\rho_i-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} g_i(s) ds dr \right| \leq \frac{(1-e^{-\lambda_i})}{\lambda_i \Gamma(\alpha_i + 1)} \|g_i\|_\infty,$
4. $\left| \int_0^1 e^{-\lambda_i(1-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} g_i(s) ds dr \right| \leq \frac{(1-e^{-\lambda_i})}{\lambda_i \Gamma(\alpha_i + 1)} \|g_i\|_\infty.$

Démonstration. On a

$$\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} ds = \frac{-1}{\alpha_i \Gamma(\alpha_i)} (t-s)^{\alpha_i} \Big|_0^t = \frac{t^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 1)}.$$

Donc, pour tout $t \in [0, 1]$ nous avons

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} g_i(s) ds \right| &\leq \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} |g_i(s)| ds, \\ &\leq \frac{t^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 1)} \|g_i\|_\infty, \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha_i + 1)} \|g_i\|_\infty. \end{aligned}$$

En suite, on a pour tout $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-\lambda_i(t-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} ds dr &= \int_0^t e^{-\lambda_i(t-r)} \frac{r^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 1)} dr, \\ &\leq \frac{t^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 1)} \int_0^t e^{-\lambda_i(t-r)} dr, \\ &\leq \frac{1}{\lambda_i \Gamma(\alpha_i + 1)} (1 - e^{-\lambda_i}). \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
 \left| \int_0^t e^{-\lambda_i(t-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} g_i(s) ds dr \right| &\leq \int_0^t e^{-\lambda_i(t-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} |g_i(s)| ds dr, \\
 &\leq \|g_i\|_\infty \int_0^t e^{-\lambda_i(t-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} ds dr, \\
 &\leq \frac{(1-e^{-\lambda_i})}{\lambda_i \Gamma(\alpha_i+1)} \|g_i\|_\infty.
 \end{aligned}$$

Avec le même raisonnement, on trouve 3 et 4. □

En suite, nous présentons les quantités suivantes :

$$\begin{aligned}
 M_i &= \frac{|1-e^{-\lambda_i}|}{\lambda_i \Gamma(\alpha_i+1)} + \left| \frac{Q_i(t)}{Q_i(1)-\mu_i Q_i(\rho_i)} \right| \left[\mu_i \frac{|1-e^{-\lambda_i}|}{\lambda_i \Gamma(\alpha_i+1)} + \frac{|1-e^{-\lambda_i}|}{\lambda_i \Gamma(\alpha_i+1)} \right], \\
 N_i &= \frac{|2-e^{-\lambda_i}|}{\Gamma(\alpha_i+1)} + \left| \frac{Q'_i(t)}{Q_i(1)-\mu_i Q_i(\rho_i)} \right| \left[\mu_i \frac{|1-e^{-\lambda_i}|}{\lambda_i \Gamma(\alpha_i+1)} + \frac{|1-e^{-\lambda_i}|}{\lambda_i \Gamma(\alpha_i+1)} \right],
 \end{aligned}$$

et

$$Q'_i(t) = \begin{cases} \frac{(n-1)t^{n-2}}{\lambda_i} - \frac{(n-1)(n-2)t^{n-3}}{\lambda_i^2} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)t^{n-4}}{\lambda_i^3} - \dots + \frac{(n-1)!}{\lambda_i^{n-1}}(1-e^{-\lambda_i t}) & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{(n-1)t^{n-2}}{\lambda_i} - \frac{(n-1)(n-2)t^{n-3}}{\lambda_i^2} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)t^{n-4}}{\lambda_i^3} - \dots - \frac{(n-1)!}{\lambda_i^{n-1}}(1-e^{-\lambda_i t}) & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Nous considérons les hypothèses suivantes

(C1) Il existe une application positive bornée $\theta_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que pour tout $t \in [0, 1]$ et

$(x_i, u_i), (\tilde{x}_i, \tilde{u}_i) \in \mathbb{R}^2, \forall i = 1, 2, \dots, m$ on a

$$|h_i(t, x_i, \tilde{x}_i) - h_i(t, u_i, \tilde{u}_i)| \leq \theta_i(t)(|x_i - u_i| + |\tilde{x}_i - \tilde{u}_i|).$$

(C2) Il existe une application positive bornée $\psi_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que

$$|h'_i(t, x_i, \tilde{x}_i) - h'_i(t, u_i, \tilde{u}_i)| \leq \psi_i(t)(|x_i - u_i| + |\tilde{x}_i - \tilde{u}_i|),$$

pour tous $x_i, \tilde{x}_i, u_i, \tilde{u}_i \in \mathbb{R}$ et $t \in [0, 1], i = 1, 2, \dots, m$.

(C3) Il existe une application positive $p_i \in L^1([0, 1], \mathbb{R}_+)$ qui vérifie

$$\begin{aligned}
 \|F_i(t, x_1(t), \dots, x_m(t), x'_1(t), \dots, x'_m(t))\| &= \sup\{|v_i| : v_i \in F_i(t, x_1(t), \dots, x_m(t), x'_1(t), \dots, x'_m(t))\}, \\
 &\leq p_i(t),
 \end{aligned}$$

pour tout $t \in [0, 1]$ et $x_i, x'_i \in \mathbb{R}$ avec $i = 1, 2, \dots, m$.

(C4) $F_i : [0, 1] \times \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathcal{P}_{cp,cv}(\mathbb{R})$ est une application multivoque L^1 -Carathéodory pour tout $i = 1, 2, \dots, m$.

(C5) Il existe une constante positive $r \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$r > \frac{\sum_{i=1}^m (h_i^* M_i + h_i'^* M_i + h_i^* N_i) \|p_i\|_{L^1}}{1 - \sum_{i=1}^m (\theta_i^* M_i + \psi_i^* M_i + \theta_i^* N_i) \left(1 + \frac{1}{\Gamma(\gamma_i+1)}\right) \|p_i\|_{L^1}},$$

où

$$\|p_i\|_{L^1} = \int_0^1 |p_i(r) dr|; \quad h_i^* = \sup_{t \in [0,1]} |h_i(t, 0, 0)|; \quad h_i'^* = \sup_{t \in [0,1]} |h_i'(t, 0, 0)|;$$

$$\theta_i^* = \sup_{t \in [0,1]} |\theta_i(t)| \quad \text{et} \quad \psi_i^* = \sup_{t \in [0,1]} |\psi_i(t)|.$$

Notre résultat d'existence est donner par

Théorème 4.2. *Supposons que les conditions (C1) – (C5) sont vérifiées. Alors le problème (4.1) – (4.2) admet au mois une solution dans X , si*

$$\sum_{i=1}^m (\theta_i^* + \psi_i^*) \left(1 + \frac{1}{\Gamma(\gamma_i + 1)}\right) (M_i + N_i) \|p_i\|_{L^1} < \frac{1}{2}.$$

Démonstration. On va transformer le problème (4.1) – (4.2) en un problème du point fixe, donc on définit l'opérateur multivoque $\mathcal{K} : X \rightarrow 2^X$ par

$$\mathcal{K}(x_1, x_2, \dots, x_m)(t) = \left(\mathcal{K}_1(x_1)(t), \mathcal{K}_2(x_2)(t), \dots, \mathcal{K}_m(x_m)(t) \right),$$

où

$$\mathcal{K}_i(x_i)(t) = \left\{ y_i \in X_i : \begin{aligned} & y_i(t) = h_i(t, x_i(t), \mathcal{I}^{\gamma_i} x_i(t)) \left(\int_0^t e^{-\lambda_i(t-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} v_i(s) ds dr \right. \\ & \quad + \frac{Q_i(t)}{Q_i(1) - \mu_i Q_i(\rho_i)} \left[\mu_i \int_0^{\rho_i} e^{-\lambda_i(\rho_i-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} v_i(s) ds dr \right. \\ & \quad \left. \left. - \int_0^1 e^{-\lambda_i(1-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} v_i(s) ds dr \right] \right), \forall v_i \in S_{F_i, (x_1, \dots, x_m)} \end{aligned} \right\}$$

pour tout $i = 1, 2, \dots, m$, on a

$$S_{F_i, (x_1, \dots, x_m)} = \{v_i \in L^1([0, 1], \mathbb{R}) : v_i(t) \in F_i(t, x_1(t), \dots, x_m(t), x_1'(t), \dots, x_m'(t)), \forall i = 1, 2, \dots, m\}.$$

D'abord, nous introduisons deux applications suivantes

$A : X \rightarrow X$ tel que pour tout $t \in [0, 1]$

$$A(x_1, x_2, \dots, x_m)(t) = \left(A_1(x_1)(t), A_2(x_2)(t), \dots, A_m(x_m)(t) \right),$$

où $A_i(x_i)(t) = h_i(t, x_i(t), \mathcal{I}^{\gamma_i} x_i(t))$ pour tout $i = 1, 2, \dots, m$.

Et $B : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ une application multivoque est donnée par

$$B(x_1, x_2, \dots, x_m)(t) = \left(B_1(x_1)(t), B_2(x_2)(t), \dots, B_m(x_m)(t) \right),$$

où

$$B_i(x_i)(t) = \left\{ z_i \in X_i : \begin{aligned} z_i(t) = & \int_0^t e^{-\lambda_i(t-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} v_i(s) ds dr + \frac{Q_i(t)}{Q_i(1) - \mu_i Q_i(\rho_i)} \\ & \times \left[\mu_i \int_0^{\rho_i} e^{-\lambda_i(\rho_i-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} v_i(s) ds dr \right. \\ & \left. - \int_0^1 e^{-\lambda_i(1-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} v_i(s) ds dr \right], \end{aligned} \right\}$$

pour tout $v_i \in S_{F_i, (x_1, \dots, x_m)}$ avec $i = 1, 2, \dots, m$. Alors, on a

$$\mathcal{K}(x_1, x_2, \dots, x_m) = A(x_1, x_2, \dots, x_m)B(x_1, x_2, \dots, x_m).$$

On va démontrer que les opérateurs A et B vérifient toutes les conditions du théorème du point fixe 1.8.

– Étape 1 : A est un opérateur Lipschitzien sur X .

Soient $(x_1, \dots, x_m), (u_1, \dots, u_m) \in X$, en utilisant (C1) et pour tout $t \in [0, 1]$, on a

$$\begin{aligned} |A_1(x_1)(t) - A_1(u_1)(t)| &= |h_1(t, x_1(t), \mathcal{I}^{\gamma_1} x_1(t)) - h_1(t, u_1(t), \mathcal{I}^{\gamma_1} u_1(t))|, \\ &\leq \theta_1(t) (|x_1(t) - u_1(t)| + |\mathcal{I}^{\gamma_1} x_1(t) - \mathcal{I}^{\gamma_1} u_1(t)|), \\ &\leq \theta_1(t) \left(1 + \frac{1}{\Gamma(\gamma_1 + 1)} \right) |x_1(t) - u_1(t)|. \end{aligned}$$

Donc,

$$\|A_1(x_1) - A_1(u_1)\|_\infty \leq \theta_1^* \left(1 + \frac{1}{\Gamma(\gamma_1 + 1)} \right) \|x_1 - u_1\|_\infty.$$

De même, on trouve

$$\|A_i(x_i) - A_i(u_i)\|_\infty \leq \theta_i^* \left(1 + \frac{1}{\Gamma(\gamma_i + 1)} \right) \|x_i - u_i\|_\infty, \quad \forall i = 1, 2, \dots, m.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} |A'_1(x_1)(t) - A'_1(u_1)(t)| &= |h'_1(t, x_1(t), \mathcal{I}^{\gamma_1} x_1(t)) - h'_1(t, u_1(t), \mathcal{I}^{\gamma_1} u_1(t))|, \\ &\leq \psi_1(t) (|x_1(t) - u_1(t)| + |\mathcal{I}^{\gamma_1} x_1(t) - \mathcal{I}^{\gamma_1} u_1(t)|), \\ &\leq \psi_1(t) \left(1 + \frac{1}{\Gamma(\gamma_1 + 1)} \right) |x_1(t) - u_1(t)|. \end{aligned}$$

Donc,

$$\|A'_1(x_1) - A'_1(u_1)\|_\infty \leq \psi_1^* \left(1 + \frac{1}{\Gamma(\gamma_1 + 1)}\right) \|x_1 - u_1\|_\infty.$$

De même, on trouve

$$\|A'_i(x_i) - A'_i(u_i)\|_\infty \leq \psi_i^* \left(1 + \frac{1}{\Gamma(\gamma_i + 1)}\right) \|x_i - u_i\|_\infty, \quad \forall i = 1, 2, \dots, m.$$

Ce qui implique que pour tout $i = 1, 2, \dots, m$

$$\begin{aligned} \|A_i(x_i) - A_i(u_i)\|_{X_i} &= \|A_i(x_i) - A_i(u_i)\|_\infty + \|A'_i(x_i) - A'_i(u_i)\|_\infty, \\ &\leq (\theta_i^* + \psi_i^*) \left(1 + \frac{1}{\Gamma(\gamma_i + 1)}\right) \|x_i - u_i\|_{X_i}. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \|A(x_1, x_2, \dots, x_m) - A(u_1, u_2, \dots, u_m)\|_X &= \sum_{i=1}^m \|A_i(x_i) - A_i(u_i)\|_{X_i}, \\ &\leq \sum_{i=1}^m (\theta_i^* + \psi_i^*) \left(1 + \frac{1}{\Gamma(\gamma_i + 1)}\right) \|x_i - u_i\|_{X_i}, \\ &\leq \sum_{i=1}^m (\theta_i^* + \psi_i^*) \left(1 + \frac{1}{\Gamma(\gamma_i + 1)}\right) \times \\ &\quad \|(x_1 - u_1, x_2 - u_2, \dots, x_m - u_m)\|_X. \end{aligned}$$

On déduit que A est une application Lipschitzienne sur X avec

$$l^* = \sum_{i=1}^m (\theta_i^* + \psi_i^*) \left(1 + \frac{1}{\Gamma(\gamma_i + 1)}\right).$$

– Étape 2 : B est à valeurs convexes.

Soient $(z_1, \dots, z_m), (\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_m) \in B(x_1, \dots, x_m)$, alors ils existent $(v_1, \dots, v_m), (\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_m) \in S_{F_1, (x_1, \dots, x_m)} \times S_{F_2, (x_1, \dots, x_m)} \times \dots \times S_{F_m, (x_1, \dots, x_m)}$ tel que pour tout $t \in [0, 1]$ et $i = 1, \dots, m$.

$$\begin{aligned} z_i(t) &= \int_0^t e^{-\lambda_i(t-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} v_i(s) ds dr + \frac{Q_i(t)}{Q_i(1) - \mu_i Q_i(\rho_i)} \\ &\times \left[\mu_i \int_0^{\rho_i} e^{-\lambda_i(\rho_i-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} v_i(s) ds dr - \int_0^1 e^{-\lambda_i(1-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} v_i(s) ds dr \right], \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{z}_i(t) = & \int_0^t e^{-\lambda_i(t-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} \tilde{v}_i(s) ds dr + \frac{Q_i(t)}{Q_i(1) - \mu_i Q_i(\rho_i)} \\ & \times \left[\mu_i \int_0^{\rho_i} e^{-\lambda_i(\rho_i-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} \tilde{v}_i(s) ds dr - \int_0^1 e^{-\lambda_i(1-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} \tilde{v}_i(s) ds dr \right]. \end{aligned}$$

Soit $0 \leq d \leq 1$, alors pour chaque $t \in [0, 1]$ et $i = 1, \dots, m$, on a

$$\begin{aligned} (dz_i + (1-d)\tilde{z}_i)(t) = & \int_0^t e^{-\lambda_i(t-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} [dv_i(s) + (1-d)\tilde{v}_i(s)] ds dr \\ & + \frac{Q_i(t)}{Q_i(1) - \mu_i Q_i(\rho_i)} \left[\mu_i \int_0^{\rho_i} e^{-\lambda_i(\rho_i-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} [dv_i(s) + (1-d)\tilde{v}_i(s)] ds dr \right. \\ & \left. - \int_0^1 e^{-\lambda_i(1-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} [dv_i(s) + (1-d)\tilde{v}_i(s)] ds dr \right]. \end{aligned}$$

Comme l'ensemble de sélection $S_{F_i, (x_1, \dots, x_m)}$ est convexe car F_i est à valeurs convexes pour tout $i = 1, \dots, m$, alors

$$[dz_i + (1-d)\tilde{z}_i] \in B_i(x_i).$$

Donc $d(z_1, \dots, z_m) + (1-d)(\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_m) = \left(dz_1 + (1-d)\tilde{z}_1, \dots, dz_m + (1-d)\tilde{z}_m \right) \in B(x_1, \dots, x_m)$.

D'où B est à des valeurs convexes.

– Étape 3 : $B(\mathcal{B}_r)$ est uniformément borné.

Soit $\mathcal{B}_r = \{(x_1, \dots, x_m) \in X : \|(x_1, \dots, x_m)\|_X \leq r\}$ un ensemble borné dans X pour tout $r > 0$.

Soient $(x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{B}_r$, alors pour tout $(z_1, \dots, z_m) \in B(x_1, \dots, x_m)$, ils existent $(v_1, \dots, v_m) \in$

$S_{F_1, (x_1, \dots, x_m)} \times S_{F_2, (x_1, \dots, x_m)} \times \dots \times S_{F_m, (x_1, \dots, x_m)}$ tel que pour tout $t \in [0, 1]$ et $i = 1, \dots, m$

$$\begin{aligned} z_i(t) = & \int_0^t e^{-\lambda_i(t-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} v_i(s) ds dr + \frac{Q_i(t)}{Q_i(1) - \mu_i Q_i(\rho_i)} \\ & \times \left[\mu_i \int_0^{\rho_i} e^{-\lambda_i(\rho_i-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} v_i(s) ds dr - \int_0^1 e^{-\lambda_i(1-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} v_i(s) ds dr \right]. \end{aligned}$$

Par (C3), nous avons pour tout $t \in [0, 1]$ et $i = 1, \dots, m$

$$\begin{aligned}
 |z_i(t)| &\leq \int_0^t e^{-\lambda_i(t-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} |v_i(s)| ds dr + \left| \frac{Q_i(t)}{Q_i(1) - \mu_i Q_i(\rho_i)} \right| \\
 &\times \left[\mu_i \int_0^{\rho_i} e^{-\lambda_i(\rho_i-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} |v_i(s)| ds dr + \int_0^1 e^{-\lambda_i(1-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} |v_i(s)| ds dr \right], \\
 &\leq \int_0^t e^{-\lambda_i(t-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} p_i(s) ds dr + \left| \frac{Q_i(t)}{Q_i(1) - \mu_i Q_i(\rho_i)} \right| \\
 &\times \left[\mu_i \int_0^{\rho_i} e^{-\lambda_i(\rho_i-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} p_i(s) ds dr + \int_0^1 e^{-\lambda_i(1-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} p_i(s) ds dr \right].
 \end{aligned}$$

Par le théorème 4.1, on a

$$\begin{aligned}
 |z_i(t)| &\leq \left(\frac{|1 - e^{-\lambda_i}|}{\lambda_i \Gamma(\alpha_i + 1)} + \left| \frac{Q_i(t)}{Q_i(1) - \mu_i Q_i(\rho_i)} \right| \left[\mu_i \frac{|1 - e^{-\lambda_i}|}{\lambda_i \Gamma(\alpha_i + 1)} + \frac{|1 - e^{-\lambda_i}|}{\lambda_i \Gamma(\alpha_i + 1)} \right] \right) \|p_i\|_{L^1}, \\
 &\leq M_i \|p_i\|_{L^1}.
 \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
 z'_i(t) &= -\lambda_i \int_0^t e^{-\lambda_i(t-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} v_i(s) ds dr + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} v_i(s) ds + \frac{Q'_i(t)}{Q_i(1) - \mu_i Q_i(\rho_i)} \\
 &\times \left[\mu_i \int_0^{\rho_i} e^{-\lambda_i(\rho_i-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} v_i(s) ds dr - \int_0^1 e^{-\lambda_i(1-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} v_i(s) ds dr \right].
 \end{aligned}$$

De la même manière, on trouve

$$\begin{aligned}
 |z'_i(t)| &\leq \left(\frac{|2 - e^{-\lambda_i}|}{\Gamma(\alpha_i + 1)} + \left| \frac{Q'_i(t)}{Q_i(1) - \mu_i Q_i(\rho_i)} \right| \left[\mu_i \frac{|1 - e^{-\lambda_i}|}{\lambda_i \Gamma(\alpha_i + 1)} + \frac{|1 - e^{-\lambda_i}|}{\lambda_i \Gamma(\alpha_i + 1)} \right] \right) \|p_i\|_{L^1}, \\
 &\leq N_i \|p_i\|_{L^1}.
 \end{aligned}$$

On conclut que

$$\begin{aligned}
 \|z_i\|_{X_i} &= \sup_{t \in [0,1]} |z_i(t)| + \sup_{t \in [0,1]} |z'_i(t)|, \\
 &\leq (M_i + N_i) \|p_i\|_{L^1}, \quad \forall i = 1, \dots, m.
 \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} \|(z_1, z_2, \dots, z_m)\|_X &= \sum_{i=1}^m \|z_i\|_{X_i}, \\ &\leq \sum_{i=1}^m (M_i + N_i) \|p_i\|_{L^1}, \end{aligned}$$

on déduit alors que $B(\mathcal{B}_r)$ est uniformément borné.

– Étape 4 : $B(\mathcal{B}_r)$ est équicontinu.

Soient $t_1, t_2 \in [0, 1]$ tel que $t_1 < t_2$ et $\mathcal{B}_r$ un ensemble borné de X , donc pour tout $(x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{B}_r$ et $(z_1, \dots, z_m) \in B(x_1, \dots, x_m)$ avec $i = 1, \dots, m$, on a

$$\begin{aligned} |z_i(t_2) - z_i(t_1)| &\leq \int_0^{t_1} [e^{-\lambda_i(t_2-r)} - e^{-\lambda_i(t_1-r)}] \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} |v_i(s)| ds dr \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_2} e^{-\lambda_i(t_2-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} |v_i(s)| ds dr + \left| \frac{Q_i(t_2) - Q_i(t_1)}{Q_i(1) - \mu_i Q_i(\rho_i)} \right| \\ &\quad \times \left[\mu_i \int_0^{\rho_i} e^{-\lambda_i(\rho_i-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} |v_i(s)| ds dr \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 e^{-\lambda_i(1-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} |v_i(s)| ds dr \right]. \end{aligned}$$

Maintenant, on utilise le théorème 4.1 et la condition (C3), on trouve

$$\begin{aligned} |z_i(t_2) - z_i(t_1)| &\leq \frac{\|p_i\|_{L^1}}{\Gamma(\alpha_i + 1)} \left(\int_0^{t_1} [e^{-\lambda_i(t_2-r)} - e^{-\lambda_i(t_1-r)}] dr + \int_{t_1}^{t_2} e^{-\lambda_i(t_2-r)} dr \right) \\ &\quad + \left| \frac{Q_i(t_2) - Q_i(t_1)}{Q_i(1) - \mu_i Q_i(\rho_i)} \right| \left[\mu_i \frac{|1 - e^{-\lambda_i}|}{\lambda_i \Gamma(\alpha_i + 1)} \|p_i\|_{L^1} + \frac{|1 - e^{-\lambda_i}|}{\lambda_i \Gamma(\alpha_i + 1)} \|p_i\|_{L^1} \right], \\ &\leq \frac{\|p_i\|_{L^1}}{\lambda_i \Gamma(\alpha_i + 1)} [e^{-\lambda_i t_1} - e^{-\lambda_i t_2}] + \left| \frac{Q_i(t_2) - Q_i(t_1)}{Q_i(1) - \mu_i Q_i(\rho_i)} \right| \times \\ &\quad \left[\mu_i \frac{|1 - e^{-\lambda_i}|}{\lambda_i \Gamma(\alpha_i + 1)} \|p_i\|_{L^1} + \frac{|1 - e^{-\lambda_i}|}{\lambda_i \Gamma(\alpha_i + 1)} \|p_i\|_{L^1} \right], \end{aligned}$$

si $t_1 \rightarrow t_2$ alors, on a $|z_i(t_2) - z_i(t_1)| \rightarrow 0$, pour tout $i = 1, 2, \dots, m$.

De même manière, on a

$$\begin{aligned}
 |z'_i(t_2) - z'_i(t_1)| &\leq \lambda_i \int_0^{t_1} [e^{-\lambda_i(t_2-r)} - e^{-\lambda_i(t_1-r)}] \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} |v_i(s)| ds dr \\
 &+ \lambda_i \int_{t_1}^{t_2} e^{-\lambda_i(t_2-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} |v_i(s)| ds dr \\
 &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \int_0^{t_1} [(t_2-s)^{\alpha_i-1} - (t_1-s)^{\alpha_i-1}] |v_i(s)| ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{\alpha_i-1} |v_i(s)| ds \\
 &+ \left| \frac{Q'_i(t_2) - Q'_i(t_1)}{Q_i(1) - \mu_i Q_i(\rho_i)} \right| \left[\mu_i \int_0^{\rho_i} e^{-\lambda_i(\rho_i-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} |v_i(s)| ds dr \right. \\
 &\left. + \int_0^1 e^{-\lambda_i(1-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} |v_i(s)| ds dr \right].
 \end{aligned}$$

Par (C3) et le théorème 4.1, on a

$$\begin{aligned}
 |z'_i(t_2) - z'_i(t_1)| &\leq \frac{\lambda_i \|p_i\|_{L^1}}{\Gamma(\alpha_i + 1)} \left(\int_0^{t_1} [e^{-\lambda_i(t_2-r)} - e^{-\lambda_i(t_1-r)}] dr + \int_{t_1}^{t_2} e^{-\lambda_i(t_2-r)} dr \right) \\
 &+ \frac{\|p_i\|_{L^1}}{\Gamma(\alpha_i)} \left(\int_0^{t_1} [(t_1-s)^{\alpha_i-1} - (t_2-s)^{\alpha_i-1}] ds + \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{\alpha_i-1} ds \right) \\
 &+ \left| \frac{Q'_i(t_2) - Q'_i(t_1)}{Q_i(1) - \mu_i Q_i(\rho_i)} \right| \left[\mu_i \frac{|1 - e^{-\lambda_i}|}{\lambda_i \Gamma(\alpha_i + 1)} \|p_i\|_{L^1} + \frac{|1 - e^{-\lambda_i}|}{\lambda_i \Gamma(\alpha_i + 1)} \|p_i\|_{L^1} \right], \\
 &\leq \frac{\|p_i\|_{L^1}}{\Gamma(\alpha_i + 1)} [e^{-\lambda_i t_1} - e^{-\lambda_i t_2}] + \frac{\|p_i\|_{L^1}}{\Gamma(\alpha_i + 1)} [2(t_2 - t_1)^{\alpha_i} + t_1^{\alpha_i} - t_2^{\alpha_i}] \\
 &+ \left| \frac{Q'_i(t_2) - Q'_i(t_1)}{Q_i(1) - \mu_i Q_i(\rho_i)} \right| \left[\mu_i \frac{|1 - e^{-\lambda_i}|}{\lambda_i \Gamma(\alpha_i + 1)} \|p_i\|_{L^1} + \frac{|1 - e^{-\lambda_i}|}{\lambda_i \Gamma(\alpha_i + 1)} \|p_i\|_{L^1} \right],
 \end{aligned}$$

si $t_1 \rightarrow t_2$ alors, on a $|z'_i(t_2) - z'_i(t_1)| \rightarrow 0$, pour tout $i = 1, 2, \dots, m$.

De plus, lorsque $t_1 \rightarrow t_2$ nous trouvons

$$|z_1(t_2) - z_1(t_1), z_2(t_2) - z_2(t_1), \dots, z_m(t_2) - z_m(t_1)| \rightarrow 0$$

et

$$|z'_1(t_2) - z'_1(t_1), z'_2(t_2) - z'_2(t_1), \dots, z'_m(t_2) - z'_m(t_1)| \rightarrow 0,$$

ce qui implique que $B(\mathcal{B}_r)$ est équicontinu.

D'après les étapes 3–4 et le théorème d'Ascoli- Arzela, on peut conclure que B est complètement continu.

– Étape 5 : B est à graphe fermé.

Soient $(x_1^n, \dots, x_m^n) \rightarrow (x_1^*, \dots, x_m^*)$ et $(z_1^n, \dots, z_m^n) \in B(x_1^n, \dots, x_m^n)$ tel que $(z_1^n, \dots, z_m^n) \rightarrow (z_1^*, \dots, z_m^*)$.

On va démontrer que $(z_1^*, \dots, z_m^*) \in B(x_1^*, \dots, x_m^*)$.

Comme $(z_1^n, \dots, z_m^n) \in B(x_1^n, \dots, x_m^n)$, ils existent $(v_1^n, \dots, v_m^n) \in S_{F_1, (x_1^n, \dots, x_m^n)} \times \dots \times S_{F_m, (x_1^n, \dots, x_m^n)}$

tel que pour tout $t \in [0, 1]$ et $i = 1, 2, \dots, m$

$$\begin{aligned} z_i^n(t) &= \int_0^t e^{-\lambda_i(t-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} v_i^n(s) ds dr + \frac{Q_i(t)}{Q_i(1) - \mu_i Q_i(\rho_i)} \\ &\quad \times \left[\mu_i \int_0^{\rho_i} e^{-\lambda_i(\rho_i-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} v_i^n(s) ds dr - \int_0^1 e^{-\lambda_i(1-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} v_i^n(s) ds dr \right]. \end{aligned}$$

Montrons qu'ils existent $(v_1^*, \dots, v_m^*) \in S_{F_1, (x_1^*, \dots, x_m^*)} \times \dots \times S_{F_m, (x_1^*, \dots, x_m^*)}$ tel que pour tout $t \in [0, 1]$

et $i = 1, 2, \dots, m$

$$\begin{aligned} z_i^*(t) &= \int_0^t e^{-\lambda_i(t-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} v_i^*(s) ds dr + \frac{Q_i(t)}{Q_i(1) - \mu_i Q_i(\rho_i)} \\ &\quad \times \left[\mu_i \int_0^{\rho_i} e^{-\lambda_i(\rho_i-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} v_i^*(s) ds dr - \int_0^1 e^{-\lambda_i(1-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} v_i^*(s) ds dr \right]. \end{aligned}$$

On considère l'opérateur linéaire continu $\Theta_i : L^1([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow C([0, 1], \mathbb{R})$ défini par

$$\begin{aligned} v_i \mapsto \Theta_i(v_i)(t) &= \int_0^t e^{-\lambda_i(t-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} v_i(s) ds dr + \frac{Q_i(t)}{Q_i(1) - \mu_i Q_i(\rho_i)} \\ &\quad \times \left[\mu_i \int_0^{\rho_i} e^{-\lambda_i(\rho_i-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} v_i(s) ds dr - \int_0^1 e^{-\lambda_i(1-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} v_i(s) ds dr \right]. \end{aligned}$$

Pour tout $t \in [0, 1]$ et $i = 1, 2, \dots, m$, on a

$$\begin{aligned} |z_i^n(t) - z_i^*(t)| &= \left| \int_0^t e^{-\lambda_i(t-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} [v_i^n(s) - v_i^*(s)] ds dr + \frac{Q_i(t)}{Q_i(1) - \mu_i Q_i(\rho_i)} \right. \\ &\quad \times \left[\mu_i \int_0^{\rho_i} e^{-\lambda_i(\rho_i-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} [v_i^n(s) - v_i^*(s)] ds dr \right. \\ &\quad \left. \left. - \int_0^1 e^{-\lambda_i(1-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} [v_i^n(s) - v_i^*(s)] ds dr \right] \right|. \end{aligned}$$

Donc, $\|z_i^n - z_i^*\| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

D'après le lemme 1.2, l'opérateur $\Theta_i \circ S_{F_i}$ est à graphe fermé pour tout $i = 1, 2, \dots, m$.

De plus, pour tout $i = 1, 2, \dots, m$, on a

$$z_i^n \in \Theta_i(S_{F_i, (x_1^n, \dots, x_m^n)}).$$

Comme $(x_1^n, \dots, x_m^n) \rightarrow (x_1^*, \dots, x_m^*)$, on déduit du lemme 1.2 que pour tout $i = 1, 2, \dots, m$ et $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} z_i^*(t) &= \int_0^t e^{-\lambda_i(t-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} v_i^*(s) ds dr + \frac{Q_i(t)}{Q_i(1) - \mu_i Q_i(\rho_i)} \\ &\quad \times \left[\mu_i \int_0^{\rho_i} e^{-\lambda_i(\rho_i-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} v_i^*(s) ds dr - \int_0^1 e^{-\lambda_i(1-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} v_i^*(s) ds dr \right], \end{aligned}$$

pour tout $v_i^* \in S_{F_i, (x_1^*, \dots, x_m^*)}$. Par conséquent, l'opérateur B est à un graphe fermé.

Par les étapes 3, 4 et 5, l'opérateur B est semi continue supérieurement et a des valeurs compactes.

– Étape 6 : montrer que $2l^* \Delta < 1$.

$$\begin{aligned} \Delta &= \|B(x_1, x_2, \dots, x_m)\|_X, \\ &= \|(B_1(x_1), B_2(x_2), \dots, B_m(x_m))\|_X, \\ &= \sum_{i=1}^m \|B_i(x_i)\|_{X_i}, \\ &= \sum_{i=1}^m \left[\sup_{t \in [0,1]} |B_i(x_i)(t)| + \sup_{t \in [0,1]} |B'_i(x_i)(t)| \right]. \end{aligned}$$

Par (C3) et l'étape 3, on trouve

$$\Delta \leq \sum_{i=1}^m (M_i + N_i) \|p_i\|_{L^1}.$$

Par le théorème 4.2, on a

$$\sum_{i=1}^m (\theta_i^* + \psi_i^*) \left(1 + \frac{1}{\Gamma(\gamma_i + 1)}\right) \Delta \leq \sum_{i=1}^m (\theta_i^* + \psi_i^*) \left(1 + \frac{1}{\Gamma(\gamma_i + 1)}\right) (M_i + N_i) \|p_i\|_{L^1} < \frac{1}{2}.$$

Comme $l^* = \sum_{i=1}^m (\theta_i^* + \psi_i^*) \left(1 + \frac{1}{\Gamma(\gamma_i + 1)}\right)$, on obtient $l^* \Delta < \frac{1}{2}$.

– Étape 7 : on va prouver que la première l’alternative du théorème 1.8 n’est pas vérifiée.

On considère l’ensemble suivant

$$\mathcal{E} = \{(x_1, \dots, x_m) \in X \text{ tel que } \alpha_0(x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{K}(x_1, \dots, x_m), \forall \alpha_0 > 1\}.$$

Soient $(x_1, \dots, x_m) \in X$ tel que $\|(x_1, \dots, x_m)\|_X = r$ et $\alpha_0 > 1$.

Alors, il existe $(v_1, v_2, \dots, v_m) \in S_{F_1, (x_1, \dots, x_m)} \times S_{F_2, (x_1, \dots, x_m)} \times \dots \times S_{F_m, (x_1, \dots, x_m)}$ tel que pour tout $t \in [0, 1]$ et $i = 1, 2, \dots, m$

$$\begin{aligned} x_i(t) = & \frac{1}{\alpha_0} h_i(t, x_i(t), \mathcal{I}^{\gamma_i} x_i(t)) \left(\int_0^t e^{-\lambda_i(t-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} v_i(s) ds dr + \frac{Q_i(t)}{Q_i(1) - \mu_i Q_i(\rho_i)} \right. \\ & \times \left. \left[\mu_i \int_0^{\rho_i} e^{-\lambda_i(\rho_i-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} v_i(s) ds dr - \int_0^1 e^{-\lambda_i(1-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} v_i(s) ds dr \right] \right). \end{aligned}$$

D’après (C1) et (C3), pour tout $t \in [0, 1]$ et $i = 1, 2, \dots, m$, on a

$$\begin{aligned} |x_i(t)| \leq & \frac{1}{\alpha_0} |h_i(t, x_i(t), \mathcal{I}^{\gamma_i} x_i(t))| \left(\int_0^t e^{-\lambda_i(t-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} |v_i(s)| ds dr + \left| \frac{Q_i(t)}{Q_i(1) - \mu_i Q_i(\rho_i)} \right| \right. \\ & \times \left. \left[\mu_i \int_0^{\rho_i} e^{-\lambda_i(\rho_i-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} |v_i(s)| ds dr + \int_0^1 e^{-\lambda_i(1-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} |v_i(s)| ds dr \right] \right), \\ \leq & \left(|h_i(t, x_i(t), \mathcal{I}^{\gamma_i} x_i(t)) - h_i(t, 0, 0)| + |h_i(t, 0, 0)| \right) \left(\int_0^t e^{-\lambda_i(t-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} p_i(s) ds dr \right. \\ & + \left| \frac{Q_i(t)}{Q_i(1) - \mu_i Q_i(\rho_i)} \right| \left[\mu_i \int_0^{\rho_i} e^{-\lambda_i(\rho_i-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} p_i(s) ds dr \right. \\ & \left. \left. + \int_0^1 e^{-\lambda_i(1-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} p_i(s) ds dr \right] \right), \\ \leq & \left(\theta_i^* \left(1 + \frac{1}{\Gamma(\gamma_i + 1)} \right) \|x_i\|_\infty + h_i^* \right) M_i \|p_i\|_{L^1}. \end{aligned}$$

Avec le même raisonnement, on a

$$\begin{aligned}
 |x'_i(t)| &\leq \frac{1}{\alpha_0} |h'_i(t, x_i(t), \mathcal{I}^{\gamma_i} x_i(t))| \left(\int_0^t e^{-\lambda_i(t-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} |v_i(s)| ds dr + \left| \frac{Q_i(t)}{Q_i(1) - \mu_i Q_i(\rho_i)} \right| \right. \\
 &\quad \times \left[\mu_i \int_0^{\rho_i} e^{-\lambda_i(\rho_i-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} |v_i(s)| ds dr + \int_0^1 e^{-\lambda_i(1-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} |v_i(s)| ds dr \right] \\
 &\quad + \frac{1}{\alpha_0} |h_i(t, x_i(t), \mathcal{I}^{\gamma_i} x_i(t))| \left(\lambda_i \int_0^t e^{-\lambda_i(t-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} |v_i(s)| ds dr + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} |v_i(s)| ds \right. \\
 &\quad + \left| \frac{Q'_i(t)}{Q_i(1) - \mu_i Q_i(\rho_i)} \right| \left[\mu_i \int_0^{\rho_i} e^{-\lambda_i(\rho_i-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} |v_i(s)| ds dr \right. \\
 &\quad \left. \left. + \int_0^1 e^{-\lambda_i(1-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} |v_i(s)| ds dr \right] \right).
 \end{aligned}$$

Par (C1) – (C3), on trouve

$$\begin{aligned}
 |x'_i(t)| &\leq \left(|h'_i(t, x_i(t), \mathcal{I}^{\gamma_i} x_i(t)) - h'_i(t, 0, 0)| + |h'_i(t, 0, 0)| \right) \left(\int_0^t e^{-\lambda_i(t-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} p_i(s) ds dr \right. \\
 &\quad + \left| \frac{Q_i(t)}{Q_i(1) - \mu_i Q_i(\rho_i)} \right| \left[\mu_i \int_0^{\rho_i} e^{-\lambda_i(\rho_i-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} p_i(s) ds dr \right. \\
 &\quad \left. \left. + \int_0^1 e^{-\lambda_i(1-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} p_i(s) ds dr \right] \right) + \left(|h_i(t, x_i(t), \mathcal{I}^{\gamma_i} x_i(t)) - h_i(t, 0, 0)| + |h_i(t, 0, 0)| \right) \\
 &\quad \left(\lambda_i \int_0^t e^{-\lambda_i(t-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} p_i(s) ds dr + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} p_i(s) ds + \left| \frac{Q'_i(t)}{Q_i(1) - \mu_i Q_i(\rho_i)} \right| \right. \\
 &\quad \left. \left[\mu_i \int_0^{\rho_i} e^{-\lambda_i(\rho_i-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} p_i(s) ds dr + \int_0^1 e^{-\lambda_i(1-r)} \int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} p_i(s) ds dr \right] \right), \\
 &\leq \left(\psi_i^* \left(1 + \frac{1}{\Gamma(\gamma_i + 1)} \right) \|x_i\|_\infty + h_i'^* \right) M_i \|p_i\|_{L^1} + \left(\theta_i^* \left(1 + \frac{1}{\Gamma(\gamma_i + 1)} \right) \|x_i\|_\infty + h_i^* \right) N_i \|p_i\|_{L^1}.
 \end{aligned}$$

On passe à la norme, on obtient

$$\|x_i\|_{X_i} = \|x_i\|_\infty + \|x'_i\|_\infty,$$

$$\leq \left(\theta_i^* M_i + \psi_i^* M_i + \theta_i^* N_i \right) \left(1 + \frac{1}{\Gamma(\gamma_i + 1)} \right) \|x_i\|_{X_i} \|p_i\|_{L^1} + \left(h_i^* M_i + h_i'^* M_i + h_i^* N_i \right) \|p_i\|_{L^1}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
 \|(x_1, x_2, \dots, x_m)\|_X &= \sum_{i=1}^m \|x_i\|_{X_i}, \\
 &\leq \sum_{i=1}^m \left(\theta_i^* M_i + \psi_i^* M_i + \theta_i^* N_i \right) \left(1 + \frac{1}{\Gamma(\gamma_i + 1)} \right) \|p_i\|_{L^1} \|(x_1, x_2, \dots, x_m)\|_X \\
 &\quad + \sum_{i=1}^m \left(h_i^* M_i + h_i'^* M_i + h_i^* N_i \right) \|p_i\|_{L^1}.
 \end{aligned}$$

Pour $\|(x_1, x_2, \dots, x_m)\|_X = r$, on obtient

$$r \leq \frac{\sum_{i=1}^m \left(h_i^* M_i + h_i'^* M_i + h_i^* N_i \right) \|p_i\|_{L^1}}{1 - \sum_{i=1}^m \left(\theta_i^* M_i + \psi_i^* M_i + \theta_i^* N_i \right) \left(1 + \frac{1}{\Gamma(\gamma_i + 1)} \right) \|p_i\|_{L^1}},$$

ce qui contredit (C5).

Par conséquent, l'opérateur $\mathcal{K}$ admet au moins un point fixe qui solution du problème (4.1)–(4.2). $\square$

4.5 Exemple

Exemple 4.1. *Considérons le système d'ordre fractionnaire de deux dimension suivant*

$$\left\{ \begin{aligned} {}^C \mathcal{D}^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{2} + \mathcal{D} \right) \left[\frac{x_1(t)}{\frac{t^2}{86\pi^5} (1 + |x_1(t) - \mathcal{I}^{\frac{1}{2}} x_1(t)|)} \right] &\in \left[t - 1, \sqrt{|\sin(x_1(t)^2)|}, \cos(x_1'(t)), (t + 1) \sin(x_2(t)), \right. \\ &\quad \left. (t^2 + 2) \cos(x_1'(t)) \right], \\ {}^C \mathcal{D}^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{4} + \mathcal{D} \right) \left[\frac{x_2(t)}{\frac{e^{\frac{t}{2}}}{86\pi^5} (1 + |x_2(t) - \mathcal{I}^{\frac{1}{2}} x_2(t)|)} \right] &\in \left[t - 5, \frac{(t^4 + 5)|x_1(t)|}{1 + |x_1(t)|}, \frac{t|x_2(t)^2|}{1 + |x_2(t)^2|}, \frac{\arctan(x_1(t))}{\pi}, \right. \\ &\quad \left. \frac{\cos(x_2'(t)) \arctan(x_1'(t))}{\pi} \right]. \end{aligned} \right. \quad (4.7)$$

Nous utilisons les conditions aux limites hybrides suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{x_1(t)}{\frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{86\pi^5} (1 + |x_1(t) - \mathcal{I}^{\frac{1}{2}} x_1(t)|)} \right]_{t=0} = 0, \\ \left[\frac{x_1(t)}{\frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{86\pi^5} (1 + |x_1(t) - \mathcal{I}^{\frac{1}{2}} x_1(t)|)} \right]_{t=1} = \left[\frac{x_1(t)}{\frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{86\pi^5} (1 + |x_1(t) - \mathcal{I}^{\frac{1}{2}} x_1(t)|)} \right]_{t=\frac{1}{2}}, \\ \left[\left(\frac{x_1(t)}{\frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{86\pi^5} (1 + |x_1(t) - \mathcal{I}^{\frac{1}{2}} x_1(t)|)} \right)' \right]_{t=0} = 0. \end{array} \right. \quad (4.8)$$

Et

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{x_2(t)}{\frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{86\pi^5} (1 + |x_2(t) - \mathcal{I}^{\frac{1}{2}} x_2(t)|)} \right]_{t=0} = 0, \\ \left[\frac{x_2(t)}{\frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{86\pi^5} (1 + |x_2(t) - \mathcal{I}^{\frac{1}{2}} x_2(t)|)} \right]_{t=1} = \left[\frac{x_2(t)}{\frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{86\pi^5} (1 + |x_2(t) - \mathcal{I}^{\frac{1}{2}} x_2(t)|)} \right]_{t=\frac{1}{2}}, \\ \left[\left(\frac{x_2(t)}{\frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{86\pi^5} (1 + |x_2(t) - \mathcal{I}^{\frac{1}{2}} x_2(t)|)} \right)' \right]_{t=0} = 0. \end{array} \right. \quad (4.9)$$

Où $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{3}$, $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1}{4}$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{2}$, $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $\rho_1 = \rho_2 = \frac{1}{2}$.

On prend

$$\begin{aligned} h_1(t, x_1(t), \mathcal{I}^{\gamma_1} x_1(t)) &= \frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{86\pi^5} (1 + |x_1(t) - \mathcal{I}^{\frac{1}{2}} x_1(t)|), \\ h_2(t, x_2(t), \mathcal{I}^{\gamma_2} x_2(t)) &= \frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{86\pi^5} (1 + |x_2(t) - \mathcal{I}^{\frac{1}{2}} x_2(t)|), \end{aligned}$$

$$F_1(t, x_1(t), x_2(t), x'_1(t), x'_2(t)) = \left[t-1, \sqrt{|\sin(x_1(t)^2)|}, \cos(x'_1(t)), (t+1) \sin(x_2(t)), (t^2+2) \cos(x'_1(t)) \right],$$

$$F_2(t, x_1(t), x_2(t), x'_1(t), x'_2(t)) = \left[t-5, \frac{(t^4+5)|x_1(t)|}{1+|x_1(t)|}, \frac{t|x_2(t)^2|}{1+|x_2(t)^2|}, \frac{\arctan(x_1(t))}{\pi}, \frac{\cos(x'_2(t)) \arctan(x'_1(t))}{\pi} \right],$$

et

$$\begin{aligned} Q_1(t) &= 2t - 8 + 4e^{-\frac{1}{2}t}, \quad Q'_1(t) = 2t + 2(1 - e^{-\frac{1}{2}t}), \\ Q_2(t) &= 4t - 32 + 16e^{-\frac{1}{4}t}, \quad Q'_2(t) = 4t + 4(1 - e^{-\frac{1}{4}t}). \end{aligned}$$

Alors, on obtient les constantes

$$\begin{aligned}
 M_1 &= \frac{|1 - e^{-\frac{1}{2}}|}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{3} + 1)} + \left| \frac{Q_1(t)}{Q_1(1) - Q_1(\frac{1}{2})} \right| \left[\frac{|1 - e^{-\frac{1}{2}}|}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{3} + 1)} + \frac{|1 - e^{-\frac{1}{2}}|}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{3} + 1)} \right], \\
 M_1 &= \frac{|1 - e^{-\frac{1}{4}}|}{\frac{1}{4}\Gamma(\frac{1}{3} + 1)} + \left| \frac{Q_2(t)}{Q_2(1) - Q_2(\frac{1}{2})} \right| \left[\frac{|1 - e^{-\frac{1}{4}}|}{\frac{1}{4}\Gamma(\frac{1}{3} + 1)} + \frac{|1 - e^{-\frac{1}{4}}|}{\frac{1}{4}\Gamma(\frac{1}{3} + 1)} \right], \\
 N_1 &= \frac{|2 - e^{-\frac{1}{2}}|}{\Gamma(\frac{1}{3} + 1)} + \left| \frac{Q'_1(t)}{Q_1(1) - Q_1(\frac{1}{2})} \right| \left[\frac{|1 - e^{-\frac{1}{2}}|}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{3} + 1)} + \frac{|1 - e^{-\frac{1}{2}}|}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{3} + 1)} \right], \\
 N_2 &= \frac{|2 - e^{-\frac{1}{4}}|}{\Gamma(\frac{1}{3} + 1)} + \left| \frac{Q'_2(t)}{Q_2(1) - Q_2(\frac{1}{2})} \right| \left[\frac{|1 - e^{-\frac{1}{4}}|}{\frac{1}{4}\Gamma(\frac{1}{3} + 1)} + \frac{|1 - e^{-\frac{1}{4}}|}{\frac{1}{4}\Gamma(\frac{1}{3} + 1)} \right].
 \end{aligned}$$

Donc, on obtient

$$M_1 \approx 19.75, \quad M_2 \approx 14.71, \quad N_1 \approx 109.49, \quad N_2 \approx 63.50.$$

On va montrer que toutes les conditions du théorème 4.2 sont vérifiées.

On suppose que $Q_i(1) - Q_i(\rho_i) \neq 0$ pour tout $i = 1, 2$.

– On doit prouver que les hypothèses (C1) et (C2) sont satisfaites.

Pour tous $(x_1, x_2), (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2), (u_1, u_2), (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) \in \mathbb{R}^2$ et $t \in [0, 1]$, on a

$$\begin{aligned}
 |h_1(t, x_1(t), \tilde{x}_1(t)) - h_1(t, u_1(t), \tilde{u}_1(t))| &\leq \left| \frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{86\pi^5} (1 + |x_1(t) - \tilde{x}_1(t)|) - \frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{86\pi^5} (1 + |u_1(t) - \tilde{u}_1(t)|) \right|, \\
 &\leq \frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{86\pi^5} (|x_1(t) - u_1(t)| + |\tilde{x}_1(t) - \tilde{u}_1(t)|), \\
 |h_2(t, x_2(t), \tilde{x}_2(t)) - h_2(t, u_2(t), \tilde{u}_2(t))| &\leq \left| \frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{86\pi^5} (1 + |x_2(t) - \tilde{x}_2(t)|) - \frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{86\pi^5} (1 + |u_2(t) - \tilde{u}_2(t)|) \right|, \\
 &\leq \frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{86\pi^5} (|x_2(t) - u_2(t)| + |\tilde{x}_2(t) - \tilde{u}_2(t)|),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |h'_1(t, x_1(t), \tilde{x}_1(t)) - h'_1(t, u_1(t), \tilde{u}_1(t))| &\leq \left| \frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{86\pi^5} [t(1 + |x_1(t) - \tilde{x}_1(t)|) + |x'_1(t) - \tilde{x}'_1(t)|] \right. \\
 &\quad \left. - \frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{86\pi^5} [t(1 + |u_1(t) - \tilde{u}_1(t)|) + |u'_1(t) - \tilde{u}'_1(t)|] \right|, \\
 &\leq \frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{86\pi^5} (|x_1(t) - u_1(t)| + |\tilde{x}_1(t) - \tilde{u}_1(t)| + |x'_1(t) - u'_1(t)| \\
 &\quad + |\tilde{x}_1(t) - \tilde{u}'_1(t)|), \\
 &\leq \frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{86\pi^5} \left(\|x_1 - u_1\|_{X_1} + \|\tilde{x}_1 - \tilde{u}_1\|_{X_1} \right),
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 |h'_2(t, x_2(t), \tilde{x}_2(t)) - h'_2(t, u_2(t), \tilde{u}_2(t))| &\leq \left| \frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{86\pi^5} [t(1 + |x_2(t) - \tilde{x}_2(t)|) + |x'_2(t) - \tilde{x}'_2(t)|] \right. \\
 &\quad \left. - \frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{86\pi^5} [t(1 + |u_2(t) - \tilde{u}_2(t)|) + |u'_2(t) - \tilde{u}'_2(t)|] \right|, \\
 &\leq \frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{86\pi^5} (|x_2(t) - u_2(t)| + |\tilde{x}_2(t) - \tilde{u}_2(t)| + |x'_2(t) - u'_2(t)| \\
 &\quad + |\tilde{x}_2(t) - \tilde{u}'_2(t)|), \\
 &\leq \frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{86\pi^5} \left(\|x_2 - u_2\|_{X_2} + \|\tilde{x}_2 - \tilde{u}_2\|_{X_2} \right).
 \end{aligned}$$

– Il existe deux applications positives $p_1, p_2 \in L^1([0, 1], \mathbb{R}_+)$ tels que pour tout $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}
 \|F_1(t, x_1(t), x_2(t), x'_1(t), x'_2(t))\| &= \sup\{|v_1| : v_1 \in F_1(t, x_1(t), x_2(t), x'_1(t), x'_2(t))\}, \\
 &\leq \max \left[t - 1, \sqrt{|\sin(x_1(t)^2)|}, \cos(x'_1(t)), (t + 1) \sin(x_2(t)), \right. \\
 &\quad \left. (t^2 + 2) \cos(x'_1(t)) \right], \\
 &\leq (t^2 + 2).
 \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
 \|F_2(t, x_1(t), x_2(t), x_1'(t), x_2'(t))\| &= \sup\{|v_2| : v_2 \in F_2(t, x_1(t), x_2(t), x_1'(t), x_2'(t))\}, \\
 &\leq \max \left[t - 5, \frac{(t^4 + 5)|x_1(t)|}{1 + |x_1(t)|}, \frac{t|x_2(t)|^2}{1 + |x_2(t)|^2}, \frac{\arctan(x_1(t))}{\pi}, \right. \\
 &\quad \left. \frac{\cos(x_2'(t)) \arctan(x_1'(t))}{\pi} \right], \\
 &\leq (t^5 + 4).
 \end{aligned}$$

Alors, on trouve

$$\|p_1\|_{L^1} = \int_0^1 |(r^2 + 2)dr| = \frac{7}{3}, \quad \|p_2\|_{L^1} = \int_0^1 |(r^4 + 5)dr| = \frac{26}{5}.$$

Pour tout $i = 1, 2$, nous avons

$$\begin{aligned}
 h_i^* &= \sup_{t \in [0,1]} |h_i(t, 0, 0)| = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{86\pi^5}, \quad h_i^{*'} = \sup_{t \in [0,1]} |h_i'(t, 0, 0)| = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{86\pi^5}, \\
 \theta_i^* &= \sup_{t \in [0,1]} |\theta_i(t)| = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{86\pi^5}, \quad \psi_i^* = \sup_{t \in [0,1]} |\psi_i(t)| = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{86\pi^5}.
 \end{aligned}$$

– Il existe une constante positive $r \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$r > \frac{\sum_{i=1}^2 (h_i^* M_i + h_i^{*'} M_i + h_i^* N_i) \|p_i\|_{L^1}}{1 - \sum_{i=1}^2 (\theta_i^* M_i + \psi_i^* M_i + \theta_i^* N_i) \left(1 + \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2}+1)}\right) \|p_i\|_{L^1}} \approx 0.11.$$

De plus, on a

$$\sum_{i=1}^2 (\theta_i^* + \psi_i^*) \left(1 + \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2}+1)}\right) (M_i + N_i) \|p_i\|_{L^1} \approx 0.26 < \frac{1}{2}.$$

Alors, Il est clair que le système (4.7) – (4.9) admet une solution.

Conclusion et perspectives

Dans cette thèse, nous avons présenté plusieurs résultats d'existence pour une équation différentielle d'ordre fractionnaire dans l'espace des fonctions réelles continues. Ces résultats sont basés sur la théorie du point fixe (le théorème de *Leray-Schauder*, *Krasnoselskii* et *Banach*).

Aussi, on a démontré quelques théorèmes importants sur l'existence de solutions des équations et des inclusions différentielles fractionnaires hybrides dans l'algèbre de Banach. On a utilisé les techniques de points fixes pour résoudre ces problèmes.

De plus, nous avons appliqué la notion " η -admissible" et le concept " $\eta - \psi$ -contraction" pour étudier le problème aux limites non hybride dans un espace métrique. Par ailleurs, on s'est intéressé à présenter l'existence de "point final" qui est solution du problème donné.

Finalement, nous avons vu les solutions d'un système des inclusions différentielles hybrides fractionnaires séquentielles de m -dimension selon la dérivée de Caputo.

Dans les perspectives proches,

- nous allons étudier une inclusion différentielle fractionnaire avec le second membre une application multivoque semi continue inférieurement.
- On va essayer d'appliquer des diverses contractions pour étudier les problèmes des inclusions différentielles fractionnaires.
- On va améliorer quelques résultats déjà obtenus et de voir ses résultats dans problèmes impulsifs ou flous fractionnaires.

Nous espérons que ce travail sert comme un premier pas vers d'autres travaux qui généralisent les résultats présentés dans cette thèse.

Bibliographie

- [1] Ahmad, B. ; Ntouyas, S.K. *A higher-order nonlocal three-point boundary value problem of sequential fractional differential equations*, Miskolc Mathematical Notes, 265-278(2014).
- [2] Ahmad, B. ; Ntouyas, S.K. *On higher-order sequential fractional differential inclusions with non-local three-point boundary conditions*, In Abstract and Applied Analysis, Hindawi, 1-10(2014).
- [3] Alizadehn, S. ; Baleanu, D. ; Rezapour, S. *Analyzing transient response of the parallel RCL circuit by using the Caputo Fabrizio fractional derivative*, Advances in Difference Equations, 1-19(2020).
- [4] Amara, A. *Existence results for hybrid fractional differential equations with three-point boundary conditions*, AIMS Math, 1074-1088(2020).
- [5] Amini-Harandi, A. *Endpoints of set-valued contractions in metric spaces*, Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications, 132-134(2010).
- [6] Aubin, J.P. ; Cellina, A. *Differential Inclusions : set valued maps and viability theory*, Springer Verlag Berlin Heidelberg(1984).
- [7] Aydogan, S.M. ; Sakar, F.M. ; Fatehi, M. ; Rezapour, S. ; Masiha, H.P. *Two hybrid and non-hybrid k -dimensional inclusion systems via sequential fractional derivatives*, Advances in Difference Equations, 1-21(2021).
- [8] Baleanu, D. ; Etemad, S. ; Pourrazi, S. ; Rezapour, S. *On the new fractional hybrid boundary value problems with three-point integral hybrid conditions*, Advances in Difference Equations, 1-21(2019).
- [9] Baleanu, D. ; Etemad, S. ; Rezapour, S. *A hybrid Caputo fractional modeling for thermostat with hybrid boundary value conditions*, Boundary Value Problems, 1-16(2020).
- [10] Baleanu, D. ; Etemad, S. ; Rezapour, S. *On a Caputo conformable inclusion problem with mixed Riemann-Liouville conformable integro-derivative conditions*, Advances in Difference Equations, 1-18(2020).

- [11] Baleanu, D. ; Jajarmi, A. ; Mohammadi, H. ; Rezapour, S. *A new study on the mathematical modelling of human liver with Caputo-Fabrizio fractional derivative*, Chaos, Solitons and Fractals 134, 109705(2020).
- [12] Baleanu, D. ; Mohammadi, H. ; Rezapour, S. *Analysis of the model of HIV-1 infection of $CD4^+$ T-cell with a new approach of fractional derivative*, Advances in Difference Equations, 1-17(2020).
- [13] Baleanu, D. ; Mohammadi, H. ; Rezapour, S. *A fractional differential equation model for the COVID-19 transmission by using the Caputo-Fabrizio derivative*, Advances in Difference Equations, 1-27(2020).
- [14] Baleanu, D. ; Rezapour, S. ; Saberpour, Z. *On fractional integro–differential inclusions via the extended fractional Caputo-Fabrizio derivation*, Boundary Value Problems, 1-17(2019).
- [15] Brebis, H. *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*, Masson, Paris(1983).
- [16] Charandabi, Z.Z. ; Rezapour, S. ; Eftefagh, M. *On a fractional hybrid version of the Sturm-Liouville equation*, Advances in Difference Equations, 1-29(2020).
- [17] Deimling, K. *Multivalued differential equations*, Walter de Gruyter Berlin, New York(1992).
- [18] Dhage, B.C. *Nonlinear Functional Boundary Value Problems in Banach Algebras Involving Carathéodories*, Kyungpook Mathematical Journal, 527-541(2006).
- [19] Dhage, B.C. *Existence results for neutral functional differential inclusions in Banach algebras*, Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications, 1290-1306(2006).
- [20] Dhage, B.C. ; Lakshmikantham, V. *Basic results on hybrid differential equations*, Nonlinear Analysis : Hybrid Systems 4, 414-424(2010).
- [21] Diethelm, K. *The Analysis of Fractional Differential Equation, An Application Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type*, Springer(2004).
- [22] Djebali, S. ; Ouahab, A. *Analyse Multivoque et Inclusions Différentielles*.
- [23] Edmunds, D.E. *Remarks on non-linear functional equations*, Mathematische Annalen, 233-239(1967).
- [24] Etemad, S. ; Pourrazi, S. ; Rezapour, S. *On a hybrid inclusion problem via hybrid boundary value conditions*, Advances in Difference Equations, 1-19(2020).

- [25] Etemad, S. ; Rezapour, S. ; Samei, M.E. *$\alpha - \psi$ -contractions and solutions of a q -fractional differential inclusion with three-point boundary value conditions via computational results*, Advances in Difference Equations, 1-40(2020).
- [26] Graef, J.R. ; Henderson, J. ; Ouahab, A. *Topological Methods for Differential Equations and Inclusions*, Monographs and Research Notes in Mathematics Series Profile, Boca Raton, CRC Press(2019).
- [27] Kilbass, A.A. ; Samko, S.G. ; Marichev, O.I. *Fractional integrals and derivatives theory and applications*, Breach Science publisher, Amsterdam(1993).
- [28] Kilbas, A.A. ; Srivastava, H.M. ; Trujillo, J.J. *Theory and applications of fractional differential Equations*, North Holland Mathematical studies 204, Amsterdam(2006) .
- [29] Komornik, V. *Précis d'analyse réelle : analyse fonctionnelle, intégrale de Lebesgue, espaces fonctionnels*, Ellipses(2002).
- [30] Mainard, F. *Fractional calculus : some basic problems in continuum and statistical mechanics*, Springer Vienna, 291-348(1997).
- [31] Miller, K.S. ; Ross, B. *An Introduction To The Fractional Calculus And Fractional Differential Equations*, Wiley, New York(1993).
- [32] Mohammadi, H. ; Rezapour, S. ; Etemad, S. ; Baleanu, D. *Two sequential fractional hybrid differential inclusions*, Advances in Difference Equations, 1-24(2020).
- [33] Mohammadi, B. ; Rezapour, S. ; Shahzad, N. *Some results on fixed points of $\alpha - \psi$ -Ciric generalized multifunctions*, Fixed Point Theory and Applications, 1-10(2013).
- [34] Niyom, S. ; Ntouyas, S.K. ; Laoprasittichok, S. ; Tariboon, J. *Boundary value problems with four orders of Riemann-Liouville fractional derivatives*, Advances in Difference Equations 2016, 1-14(2016).
- [35] Nouara, A. ; Amara, A. ; Kaslik, E. ; Etemad, S. ; Rezapour, S. ; Martinez, F. ; Kaabar, M. K. *A study on multiterm hybrid multi-order fractional boundary value problem coupled with its stability analysis of Ulam-Hyers type*, Advances in Difference Equations, 1-28(2021).
- [36] Ntouyas, S.K. ; Tariboon, J. *Fractional boundary value problems with multiple orders of fractional derivatives and integrals*, Electronic Journal of Differential Equations, 1-18(2017).

- [37] Podlubny, I. *Fractional Differential Equations :An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications*, Mathematics in science and engineering 198, Academic Press(1999).
- [38] Regina, S.B.; Iusem, A.N. *Set Valued Mappings and Enlargements of Monotone Operators*, springer(2008).
- [39] Samei, M.E.; Hedayati, V.; Rezapour, S. *Existence results for a fraction hybrid differential inclusion with Caputo-Hadamard type fractional derivative*, Advances in Difference Equations, 1-15(2019).
- [40] Samet, B.; Vetro, C.; Vetro, P. *Fixed point theorems for $\alpha - \psi$ -contractive type mappings*, Nonlinear analysis : theory, methods and applications, 2154-2165(2012).
- [41] Schwartz, L. *Analyse :topologie générale et analyse fonctionnelle*, Hermann edition des sciences et des arts, Paris(1992).
- [42] Soudani, L.; Amara, A.; Zennir, K.; Ahmad, J. *Duality of fractional derivatives : On a hybrid and non-hybrid inclusion problem*, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, 1-21(2024).
- [43] Sun, S.; Zhao, Y.; Han, Z.; Li, Y. *The existence of solutions for boundary value problem of fractional hybrid differential equations*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation 17, 4961-4967(2012).
- [44] Xu, L.; Dong, Q.; Li, G. *Existence and Hyers-Ulam stability for three-point boundary value problems with Riemann-Liouville fractional derivatives and integrals*, Advances in Difference Equations, 1-17(2018).
- [45] Zhao, Y.; Sun, S.; Han, Z.; Li, Q. *Theory of fractional hybrid differential equations*, Computers and Mathematics with Applications 62, 1312-1324(2011).