

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE OUARGLA

Faculté des sciences et des sciences de l'ingénieur  
département des sciences de l'ingénieur

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME D'INGENIEUR D'ETAT

Spécialité : Génie mécanique

Option : Energétique

Présenté par :

- BEN LAHBIB Mebrouk

*Thème*

Simulation des écoulements dans les puits producteurs avec injection

Soutenu publiquement devant le jury :

Mr. A. DJAFOUR	MA	U. Ouargla	Président
Mr. L. MEROUANI	MACC	U. Ouargla	Examineur
Mr. Y. TAMENE	MA	U. Ouargla	Examineur
Mr. N. SETTOU	MACC	U. Ouargla	Encadreur

Année Universitaire 2001/2002

# Remerciements

*Merci à Dieu.*

*Je tiens à exprimer ma respectueuse gratitude à monsieur le docteur NOUREDDINE SETTOU, qui à bien voulu mon encadrer.*

*Je remercie l'ingénieur AMEL BICI pour ses précieuses aides.*

*Je remercie tous ceux qui ont participé de près ou de loin dans la réalisation de ce travail.*

# SOMMAIRE

<i>Introduction</i> -----	5
---------------------------	---

## *Chapitre 1 : Formulation du problème*

1-1 Introduction -----	8
1-2 Définition du problème -----	8
1-3 Equations générales en mécanique des fluides	
1-3-1 Equation de continuité-----	10
1-3-2 Equation de quantité de mouvement-----	12
1-4 Transformation des équations en coordonnées cylindriques-----	13
1-5 Les hypothèses de calcul -----	14
1-6 Adimensionalisation des équations -----	16
1-7 Equations générales adimensionnées -----	18

## *Chapitre 2 : discrétisation et résolution*

2-1 Introduction -----	20
2-2 La méthode des volumes finis	
2-2-1 Principe de la méthode -----	20
2-2-2 Formulation mathématique -----	21
2-2-3 Conditions aux limites -----	22
2-2-4 Méthodes numériques -----	22
2-2-5 Localisation des faces de volume de contrôle -----	27
2-2-6 Les différents schémas de discrétisation -----	28
2-3 La discrétisation et la résolution numérique	
2-3-1 Le maillage-----	30
2-3-2 discrétisation des équations de l'écoulement -----	33
2-3-3 Intégration de l'équation de bilan sur le volume de contrôle -----	33
2-3-4 approximation des dérivées premières par rapport aux variables $r, z$ -----	35
2-3-5 approximation des variables $\Phi$ sur les faces -----	36
2-3-6 Conditions aux limites -----	38
2-3-7 La résolution numérique -----	41



2-4	L'algorithme de SIMPLE	
2-4-1	Equation de correction de pression -----	45
2-4-2	Correction par bloc-----	46
2-4-3	La sous-relaxation et la convergence -----	47
2-4-4	L'algorithme de SIMPLE -----	48
2-5	Structure de programme	
2-5-1	L'organigramme-----	50
2-5-2	Notation des variables relatives aux maillage -----	52
2-5-3	Les variables -----	54
2-5-4	Nombre de balayage -----	54
2-5-5	Facteur de sous relaxations -----	54
2-5-6	Contrôle des itérations -----	54
2-5-7	Système d'équation -----	57

**Chapitre 3 : Résultats et discussions**

3-1	L'influence de la taille du maillage sur les résultats-----	57
3-2	L'interprétation des figures-----	58
	Conclusion	
	Références	

## Introduction

L'utilité pratique de la mécanique des fluides est évidente à ses applications technologiques qui couvrent tout un spectre de domaines : aérodynamique, énergie, environnement, exploration pétrolière, espace, biotechnologie, hydraulique, génie des procédés, propulsion, métrologie, tribologie, turbomachines, ....etc.

Dans la mécanique des fluides on s'intéresse en général à deux types d'écoulements :

- Les écoulements externes, utiles dans la conception des profils aérodynamiques.
- Les écoulements internes, utiles dans la conception des systèmes de combustion, de refroidissement, d'hydraulique, ...etc.

La mécanique des fluides a connue un développement très rapide ce siècle. Plus récemment, grâce à l'apport de moyens informatiques puissants et au développement des méthodes numériques, la résolution numérique d'écoulements pratiques complexes incluant les phénomènes de turbulence avec des transferts de chaleur et / ou de masse, est devenue possible.

Dans ce présent travail nous avons traité un problème ; qui est un écoulement axisymétrique vertical, il représente un puit producteur avec injection, et nous avons résolu les équations qui le gèrent, ( équations de Navier- Stokes ) par une méthode numérique qui est la méthode des volumes finis à l'aide d'un programme en langage FORTRAN.

Cette étude est divisée en trois chapitres comme suit :

Dans le premier chapitre « *formulation du problème* » on va définir le problème et on va écrire les équations qui le gèrent (équations de Navier – Stokes ) en coordonnées cylindrique en prenant en compte les hypothèses qui concerne ce problème, puis on va adimensionner ces équations et les écrire sous forme des variables réduites pour approcher la réalité physique.

Dans le deuxième chapitre « *discrétisation et résolution* », une fois que les équations sont prêtent (projetées et adimensionnées ) on les discrétise pour pouvoir les résoudre , à l'aide d'une approximation par la méthode des volumes finis, où on va présenter brièvement cette méthode et donner les différents schémas de discrétisation, puis on va définir le maillage et ses différents paramètres.

La discrétisation est faite par le schéma ( central / upwind ) et nous obtenant finalement les équations discrétisées sous forme d'une représentation indicelle applicable dans le programme avec les conditions aux limites correspondants.

Le troisième chapitre « *résultats et discussions* » englobe les résultats obtenues par le programme et leurs interprétations, en introduisant à chaque fois au programme les données souhaitées, et on observe les résultats correspondants à l'aide d'un logiciel nommé « *TECPLOT 7* » ou des fichiers de résultats et on arrivant à la fin à une conclusion générale de ce travail.

## Chapitre -1-

### Formulation du problème



### 1-1- Introduction :

Dans le domaine pétrolier, nous pouvons rencontrer deux types d'écoulements :

1- Ecoulement axisymétrique ascendant (cas d'une exploitation naturelle) :

Dans ce cas le fluide d'exploitation monte sous la pression existante dans le réservoir vers l'extérieur, fig.(1-a).

2- Ecoulement coaxial (cas d'une exploitation assistée) :

Quand la pression du réservoir devient faible, on injecte un autre fluide dans le réservoir ce qui permet d'augmenter la production, fig.(1-b).

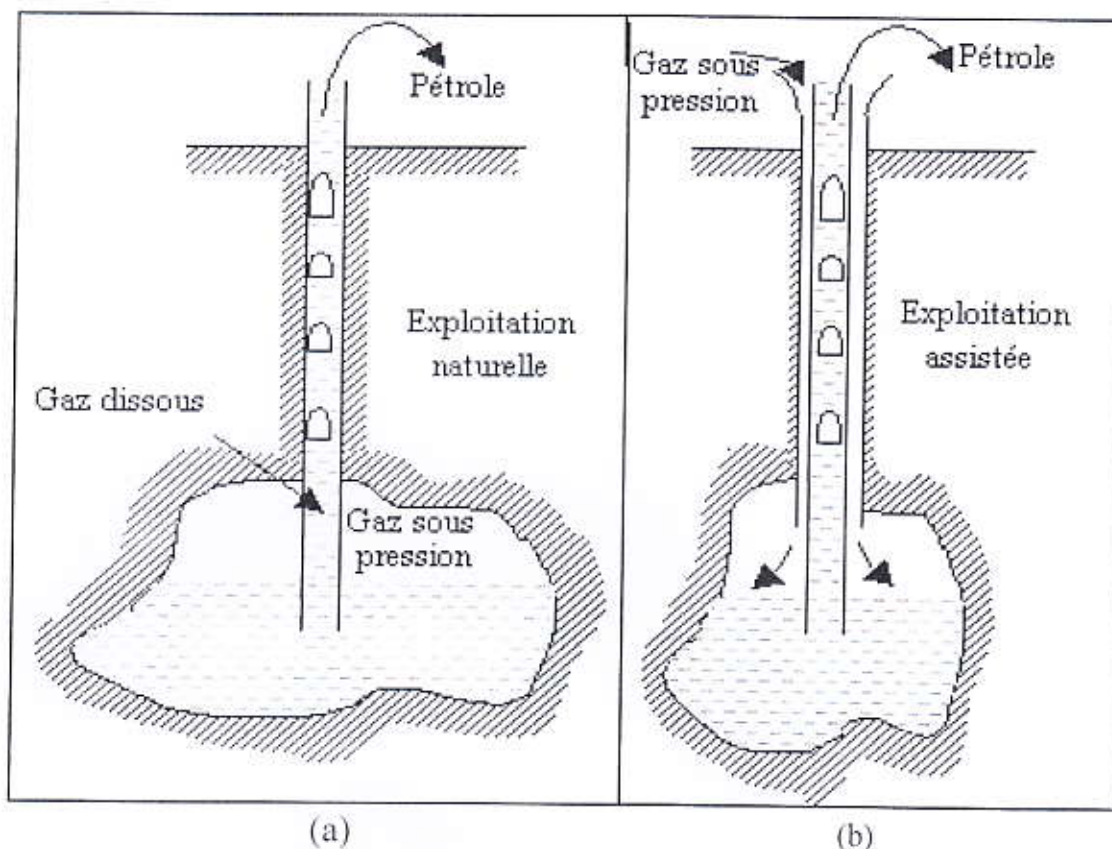


figure 1

Exploitation des gisements de pétrole (écoulements diphasiques)



Dans ce chapitre on va définir notre problème (écoulement coaxial axisymétrique), et on va établir les équations qui le gèrent. Ces équations sont l'équation de continuité et l'équation de quantité de mouvement pour un système d'écoulement monophasique, elles sont retrouvées par l'application des bilans de masse et de quantité de mouvement.

### 1-2 Définition du problème :

Le problème représente deux écoulements dans deux conduites coaxiales avec deux fluides. Les conduites sont verticales et le sens des écoulements est en opposition, ce qui représente pour notre cas un puit producteur avec injection.

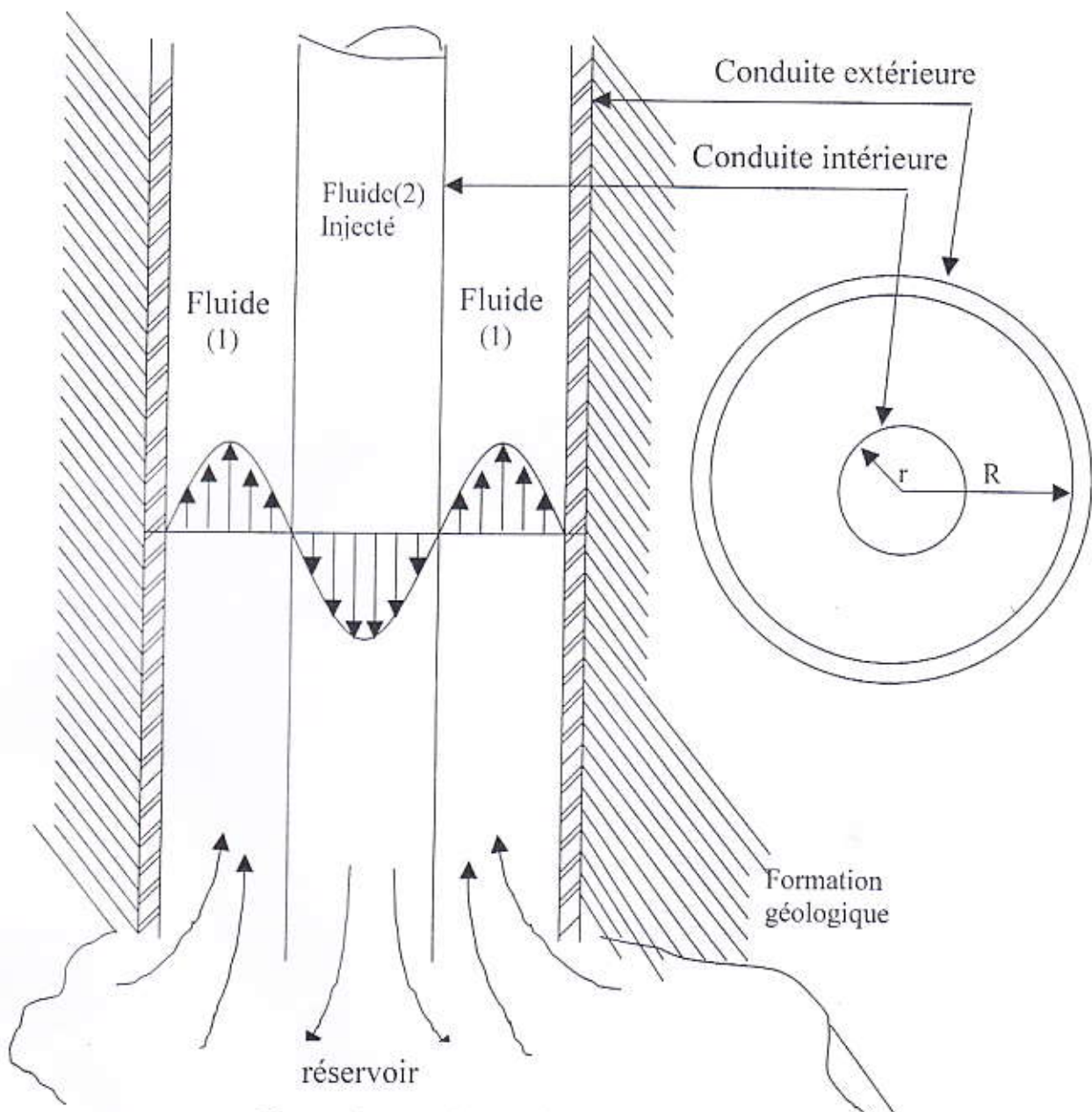


Figure 2 : représentation du problème

L'écoulement (1) est ascendant (densité  $\rho_1$  ).

L'écoulement (2) est descendant (densité  $\rho_2$  ).

Donc nous avons un écoulement (1) annulaire et un écoulement (2) tubulaire .

Dans ce problème on veut déterminer la répartition de la vitesse  $\vec{V}$  et de la pression  $P$  de ces deux écoulements dans chaque point de l'espace.

### **1-3 - Equations générales en mécanique des fluides :**

Pour connaître complètement le comportement d'un fluide il est nécessaire de déterminer en chaque point :

- La vitesse  $V$  définie par ces trois composantes  $u, v, w$  .
- La masse volumique  $\rho$  (seulement dans le cas d'un fluide à nature compressible ).
- La pression  $P$ .
- La température  $T$  (dans le cas d'échange de chaleur avec l'extérieur )

Soit au total six variables.

La thermodynamique nous enseigne qu'il existe pour chaque fluide une équation caractéristique qui, dans la pratique et dans le cas d'un seul composant , se met sous la forme :

$$F(P, \rho, T) = 0$$

Il reste cinq autres équations nécessaires et suffisantes pour déterminer les six variables indiquées plus haut, qui peuvent être établies à partir de bilans de masse, de quantité de mouvement et d'énergie.

Il faudra ajouter les conditions initiales et les conditions aux limites du problème .

Il est évident qu'énormément de problèmes pratiques ne nécessitent pas la connaissance complète de l'état du fluide à chaque instant, donc des six variables indiquées plus haut. [1]

#### **1-3-1- Equation de continuité :**

On raisonne sur une masse déterminée de fluide occupant au temps  $t$  un certain volume  $D$  ( *point de vue de Lagrange* ) fig.(3 ) [1]

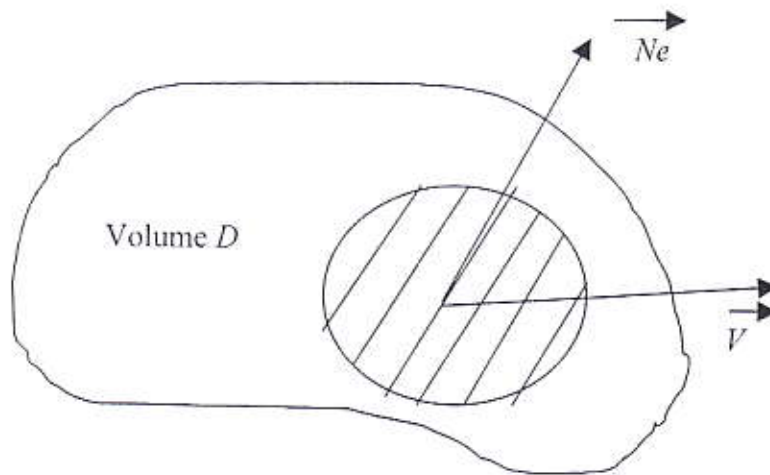


Figure 3 : masse élémentaire du fluide

La variation de la masse dans le volume  $D$  pour un temps  $dt$  peut s'écrire

$$\frac{d}{dt} \iiint_D \rho d\tau \quad (1)$$

$\rho$ : masse volumique du fluide.

$d\tau$ : volume infiniment petit.

Par définition, elle est nulle (volume de masse constante), on a donc :

$$\frac{d}{dt} \iiint_D \rho d\tau = 0 \quad (2)$$

Or on a :

$$\frac{d}{dt} \iiint_D \rho d\tau = \iiint_D \frac{d\rho}{dt} d\tau + \iint_{\Sigma} \rho \vec{V} \cdot \vec{N}_e ds = 0 \quad (3)$$

Si  $D$  est infiniment petit on a :

$$\iint_{\Sigma} \rho \vec{V} \cdot \vec{N}_e ds = \iiint_D \text{div} \rho \vec{V} d\tau$$

La relation (3) s'écrit alors pour le volume  $d\tau$  :

$$\frac{d\rho}{dt} d\tau + \text{div} \rho \vec{V} d\tau = 0$$



ou encor :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \rho + \rho \text{div} \vec{V} = 0 \quad (4)$$

C'est l'équation de continuité pour un fluide incompressible ( $\rho = \text{cte}$ ) elle se réduit à :

$$\text{div} \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (5)$$

L'équation sous cette forme est souvent utilisée pour simplifier les autres équations locales.

### 1-3-2- Equation de quantité de mouvement :

Cette équation est trouvée par l'application du principe fondamentale de la dynamique à un volume élémentaire de fluide.[1]

Elle est donnée sous la forme générale :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho \vec{F} - \overrightarrow{\text{grad}} P + \mu \Delta \vec{V} + \frac{1}{3} \mu \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div} \vec{V}) \quad (6)$$

C'est l'équation de Navier-Stokes, avec :

$\vec{V}$  : la vitesse du fluide.

$\mu$  : la viscosité dynamique.

$\vec{F}$  : forces volumiques par unité de masse.

$P$  : la pression du fluide.

a) si le fluide peut être considéré comme parfait ( $\mu = 0$ ) on a alors :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho \vec{F} - \overrightarrow{\text{grad}} P \quad (\text{l'équation d'Euler})$$

b)

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho (\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{V}$$

donc pour un écoulement permanent on a :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$$

donc :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho (\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{V}$$

pour les écoulements permanents et incompressibles on a :

$$\text{div} \vec{V} = 0 \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} = 0, \rho = \text{Cte} \right)$$

Si de plus  $\mu = \text{Cte}$  il vient :

$$(\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{V} = \overrightarrow{F} - \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} P + \frac{\mu}{\rho} \Delta \vec{V} \quad (7)$$

$\frac{\mu}{\rho} = \nu$  viscosité cinématique.

#### 1-4 Transformation des équations en coordonnées cylindriques :

Puisque la géométrie du domaine d'étude est axisymétrique et pour faciliter l'étude, on choisit les coordonnées cylindriques pour résoudre le problème, donc les équations considérées sont :

- l'équation de continuité,
- l'équation de quantité de mouvement (Navier-Stokes),

Où les inconnus sont :

- la vitesse  $\vec{V}$  du fluide on calcule ces composantes  $u, v, w$  selon les coordonnées  $(z, r, \theta)$ .
- la pression  $P$  du fluide le long de la conduite.

##### 1-4-1- L'équation de continuité en coordonnées cylindriques :

Si  $\rho = \text{cte}$  (fluide incompressible) l'équation de continuité en coordonnées cylindriques est donnée sous la forme :

$$\text{div} \vec{V} = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad (8)$$

### 1-4-2- L'équation de quantité de mouvement en coordonnées cylindriques :

On projète l'équation (7) sur les trois coordonnées  $r, \theta, z$  on aura :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + u \frac{\partial u}{\partial z} = g_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \nabla^2 u \quad (9)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + u \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{w^2}{r} = g_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left( \nabla^2 v - \frac{v}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \quad (10)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + v \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + u \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{vw}{r} = \frac{1}{r} g_\theta - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \nu \left( \nabla^2 w + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{w^2}{r^2} \right) \quad (11)$$

telle que:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

Ou :

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$g_z, g_r, g_\theta$  sont les projections de  $\vec{g}$  sur  $z, r, \theta$ .

### 1-5- Les hypothèses de calcul :

Les équations (8), (9), (10), (11) sont des équations générales qui sont applicables pour différents problèmes, alors dans notre cas on va d'abord définir les hypothèse et ensuite on va projeter ces équations sur le système de coordonnées cylindriques choisi.

Ces hypothèses sont:

- les fluides sont incompressibles
- l'écoulement est permanent ( $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ),
- les fluides sont supposées newtoniens,
- l'écoulement est supposé axisymétrique; les variations des grandeurs dans le sens azimutal sont nulles ( $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ ) et  $w = 0$

On projète les équations (8), (9), (10), (11) sur le problème en introduisant les hypothèses cités plus haut, donc on aura :

- l'équation de continuité devient :

$$\frac{v}{r} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} = 0$$



- l'équation de quantité de mouvement sur les deux axes  $z, r$ , devient :

$$v \frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial u}{\partial z} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$v \frac{\partial v}{\partial r} + u \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

$u$  : vitesse axiale

$v$  : vitesse radiale

Donc nous avons le système d'équation suivant :

$$\frac{v}{r} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} = 0 \quad (12)$$

$$v \frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial u}{\partial z} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (13)$$

$$v \frac{\partial v}{\partial r} + u \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (14)$$

Ces trois équations représentent l'équations de conservation de la masse et celle de la conservation de quantité de mouvement dans un écoulement axisymétrique verticale (ascendant ou descendant) où  $u, v$  sont les composantes du vecteur vitesse suivant les directions  $z$  et  $r$ .

Elle sont résolues en utilisant les conditions aux limites suivantes :

- sur les surfaces des conduites, la vitesse est nulle à cause de l'adhérence du fluide à la paroi qui est supposée de rigidité parfaite.
- le profil de vitesse à l'entrée du domaine est donnée (profil parabolique)

- à l'entrée du domaine ;  $\begin{cases} u=u(r) & \text{(profil donné)} \\ v=0 \end{cases}$

- à la sortie du domaine ;  $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \\ v=0 \end{cases}$

- sur l'axe de symétrie ;  $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r} = 0 \\ v=0 \end{cases}$  (dans le cas de l'écoulement axisymétrique).

- sur les parois latérales ;  $\begin{cases} u=0 \\ v=0 \end{cases}$

### **1-6 Adimensionalisation des équations :**

Pour permettre le passage d'une échelle de grandeur à une autre, il est nécessaire de définir des variables réduites. Le système de variable réduites permet d'approcher la réalité physique car leur existence et leur déroulement sont indépendants du système d'unité choisi. Ce changement de variables nécessite l'introduction de quantités caractéristiques propres à l'écoulement, on pose :

$$\begin{aligned} \rho^* &= \frac{\rho}{\rho_0} \\ p^* &= \frac{p}{\rho_0 V_0^2} \\ z^* &= \frac{z}{D_0} \quad , \quad r^* = \frac{r}{D_0} \\ u^* &= \frac{u}{V_0} \quad , \quad v^* = \frac{v}{V_0} \\ \mu^* &= \frac{\mu}{\mu_0} \end{aligned}$$

où :

$D_0$  : le diamètre de la conduite .

$V_0$  : la vitesse moyenne .

$\rho_0$  : la masse volumique moyenne du fluide.

$\mu_0$  : viscosité dynamique moyenne des fluide.

Après l'adimensionalisation des variables, nous obtenons les équations suivantes :

#### **1-6-1 l'équation de continuité :**

$$\frac{v}{r} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} = 0$$

en remplaçons  $v, u$  par leurs valeurs, on aura :

$$\frac{v_0 v^+}{D_0 r^+} + \frac{\partial v_0 u^+}{\partial D_0 z^+} + \frac{\partial v_0 v^+}{\partial D_0 r^+} = 0$$

$$\frac{v_0}{D_0} \left( \frac{v^+}{r^+} + \frac{\partial u^+}{\partial z^+} + \frac{\partial v^+}{\partial r^+} \right) = 0$$

donc :

$$\frac{v^+}{r^+} + \frac{\partial u^+}{\partial z^+} + \frac{\partial v^+}{\partial r^+} = 0$$

### 1-6-2 l'équation de quantité de mouvement

$$v \frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial u}{\partial z} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$v_0 v^+ \frac{\partial v_0 u^+}{\partial D_0 r^+} + v_0 u^+ \frac{\partial v_0 u^+}{\partial D_0 z^+} = -g - \frac{1}{\rho_0 \rho^+} \frac{\partial \rho_0 v_0^2 P^+}{\partial D_0 z^+} + \frac{\mu_0 \mu^+}{\rho_0 \rho^+} \left( \frac{\partial^2 v_0 u^+}{\partial D_0^2 (r^+)^2} + \frac{1}{D_0 r^+} \frac{\partial v_0 u^+}{\partial D_0 r^+} + \frac{\partial^2 v_0 u^+}{\partial D_0^2 (z^+)^2} \right)$$

$$\frac{v_0^2}{D_0} \left( v^+ \frac{\partial u^+}{\partial r^+} + u^+ \frac{\partial u^+}{\partial z^+} \right) = -g - \frac{1}{\rho_0 \rho^+} \frac{\partial \rho_0 v_0^2 P^+}{\partial D_0 z^+} + \frac{\mu_0 \mu^+}{\rho_0 \rho^+} \frac{v_0}{D_0^2} \left( \frac{\partial^2 u^+}{\partial (r^+)^2} + \frac{1}{r^+} \frac{\partial u^+}{\partial r^+} + \frac{\partial^2 u^+}{\partial z^+} \right)$$

$$\frac{v_0^2}{D_0} \left[ v^+ \frac{\partial u^+}{\partial r^+} + u^+ \frac{\partial u^+}{\partial z^+} \right] = -g - \frac{v_0^2}{D_0} \left[ \frac{1}{\rho_0 \rho^+} \frac{\partial \rho_0 P^+}{\partial z^+} \right] + \frac{\mu_0 \mu^+}{\rho_0 \rho^+} \frac{v_0}{D_0^2} \left[ \frac{\partial^2 u^+}{\partial (r^+)^2} + \frac{1}{r^+} \frac{\partial u^+}{\partial r^+} + \frac{\partial^2 u^+}{\partial z^+} \right]$$

$$v^+ \frac{\partial u^+}{\partial r^+} + u^+ \frac{\partial u^+}{\partial z^+} = \frac{g D_0}{v_0^2} - \frac{1}{\rho_0 \rho^+} \frac{\partial \rho_0 P^+}{\partial z^+} + \frac{\mu_0 \mu^+}{v_0 \rho_0 \rho^+ D_0} \left[ \frac{\partial^2 u^+}{\partial (r^+)^2} + \frac{1}{r^+} \frac{\partial u^+}{\partial r^+} + \frac{\partial^2 u^+}{\partial z^+} \right]$$

telle que :



$$-g \frac{D_0}{v_0^2} = -\frac{1}{Fr^2}, \text{ tel que : } Fr = \frac{v_0}{\sqrt{g D_0}}$$

$$\frac{v_0 D_0 \rho_0}{\mu_0} = Re$$

$Fr$  : nombre de Froude

$Re$  : nombre de Reynolds

Donc :

$$v^+ \frac{\partial u^+}{\partial r^+} + u^+ \frac{\partial u^+}{\partial z^+} = -\frac{1}{Fr^2} \frac{\partial P^+}{\partial z^+} + \frac{1}{Re} \frac{\mu^+}{\rho^+} \left( \frac{\partial^2 u^+}{\partial (r^+)^2} + \frac{1}{r^+} \frac{\partial u^+}{\partial r^+} + \frac{\partial^2 u^+}{\partial (z^+)^2} \right)$$

De même pour l'équation (10) :

$$v^+ \frac{\partial v^+}{\partial r^+} + u^+ \frac{\partial v^+}{\partial z^+} = -\frac{1}{Fr^2} \frac{\partial P^+}{\partial r^+} + \frac{1}{Re} \frac{\mu^+}{\rho^+} \left( \frac{\partial^2 v^+}{\partial (r^+)^2} + \frac{1}{r^+} \frac{\partial v^+}{\partial r^+} + \frac{\partial^2 v^+}{\partial (z^+)^2} \right)$$

### 1-7- Equations générales adimensionnées:

Finalement on écrit ce système de trois équations adimensionnelles. mais on va écrire les variables qui sont toujours adimensionnelles sans le signe (+).

$$\frac{v}{r} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} = 0 \quad (15)$$

$$\rho v \frac{\partial u}{\partial r} + \rho u \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\rho}{Fr^2} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{Re} \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (16)$$

$$\rho v \frac{\partial v}{\partial r} + \rho u \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\rho}{Fr^2} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{Re} \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (17)$$

telle que  $\rho, \mu, v, u, P, z, r$  sont des grandeurs adimensionnelles.

## Chapitre-2-

# Discrétisation et résolution

## **2-1-Introduction :**

la résolution analytique des équations de Navier-Stokes qui régissent ce problème est difficile et complexe : il est certain que des mécanismes physiques importants nous échappent. Donc la résolution n'est possible que si on fait une approximation de ces équations par une discrétisation numérique.

La discrétisation numérique qu'on a choisi pour la résolution c'est la discrétisation par la méthode des volumes finis.

Avant de passer à la discrétisation, on va faire un rappel sur cette méthode. [3]

## **2-2- La méthode des volumes finis :**

C'est une méthode qui est basée sur une approche par les volumes de contrôle. La principale caractéristique de la méthode comprend une formulation d'une loi en puissance des phénomènes combinés de convection-diffusion, le schéma de résolution qui consiste en une méthode " *block-correction* " couplée avec un procédé ligne par ligne, et enfin, un algorithme qui permet le traitement de l'interaction entre les équations de mouvement et de continuité. [3]

### **2-2-1- Principe de la méthode :**

La méthode des volumes finis est utilisée pour la discrétisation des lois de conservation.

Une loi de conservation exprime la conservation d'une quantité  $q(x,t)$ , qui peut être une énergie, une masse .....etc. [4]

$$Q(x,t) + \text{div}F(x,t) = f(x,t)$$

$$\text{div}F = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \dots = \frac{\partial F_d}{\partial x_d}$$

avec :  $d=1, 2$  ou  $3$

$F$  la quantité de flux qui exprime un mécanisme de transport de  $q$ , le terme de source  $f$  exprime un échange volumique possible due par exemple aux réactions chimiques entre les quantités conservées. [4]



## 2-2-2- Formulation mathématique :

### 2-2-2-1- Equation de mouvement :

En pratique, les situations mettant en jeu des écoulements de fluide, de chaleur et de masse sont provoquées par les principes de conservation de masse, de quantité de mouvement, d'énergie, espèces chimiques ...etc. Ces principes peuvent être exprimées en terme d'équations différentielles. L'avantage majeur de la formulation numérique provient du fait que les équations de conservation peuvent se ramener en une seule forme.

Si  $\Phi$  est la variable dépendante, l'équation différentielle générale correspondante, dans le cas stationnaire prend la forme :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \rho u_i \phi \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) + S \quad (18)$$

(1)                      (2)                      (3)

(1) : terme de convection

(2) : terme de diffusion

(3) : source

Quand l'écoulement est turbulent, les moyennes temporelles sont utilisées. Par suite, les quantités de l'équation (18) sont interprétées comme des valeurs moyennes de ces variables. Le fait de moyenner fait apparaître des termes additionnels qui seront traités à partir d'une redéfinition de  $\Gamma$  et  $S$ , par exemple,  $\Gamma$  peut dépendre de la viscosité turbulente ou de la diffusivité turbulente. [3]

### 2-2-2-2- Equation de continuité :

Alors que l'évolution de tous les variables  $\Phi$  est régie par une équation de type (18), le flux de vitesse  $\rho u_i$ , apparaissant dans (18) lui doit satisfaire à une autre relation ; C'est l'équation de continuité pour un écoulement donné, qui peut s'écrire pour le cas stationnaire : [3]

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0 \quad (19)$$

### 2-2-3- Conditions aux limites

Elles sont en générale de trois sortes :

- Des conditions de contact avec une paroi ; dans ce cas, on connaît soit la valeur du flux à cette limite soit une relation faisant intervenir la diffusion de ce flux.
- Des conditions (inflow) ; généralement , la valeur de  $\Phi$  dans le courant qui arrive, est connue.
- Des conditions (outflow) ; ou ni la valeur de  $\Phi$ , ni le flux ne sont connus . Néanmoins, si la méthode numérique est correctement formulée, aucune information extérieure n'est vraiment nécessaire.

### 2-2-4- Méthodes numériques

#### 2-2-4-1- Maillage et volume de contrôle :

Dans la méthode numérique décrite, l'objectif est de calculer les valeurs de la variable précédente, en un certain nombre de point d'un maillage discret. Les équations algébriques de ses valeurs (appelées équations de discrétisation), sont obtenues par l'intégration des équations régissant le problème sur un sous domaine autour de chaque point de maillage. Ces sous domaines sont appelés : volumes de contrôle.

La situation est quelque peu différente pour un volume de contrôle situe près d'une paroi. [3]

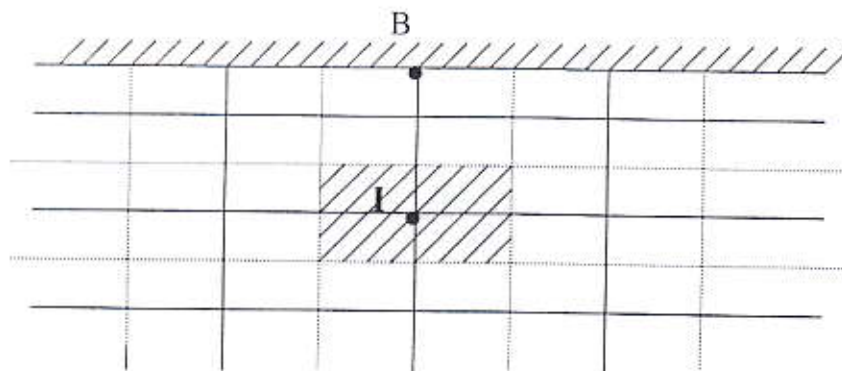


Figure 4 : le maillage et le volume de contrôle

La zone hachurée c'est le volume de contrôle.

### 2-2-4-2- Equations de conservation pour le volume de contrôle :

L'équation générale (18) peut, à présent, être intégrée sur un volume de contrôle est construit autour d'une point P du maillage. Les autres points voisins du maillage sont :  $N, S, E, W$  (Nord, Sud, Est, Ouest). [3]

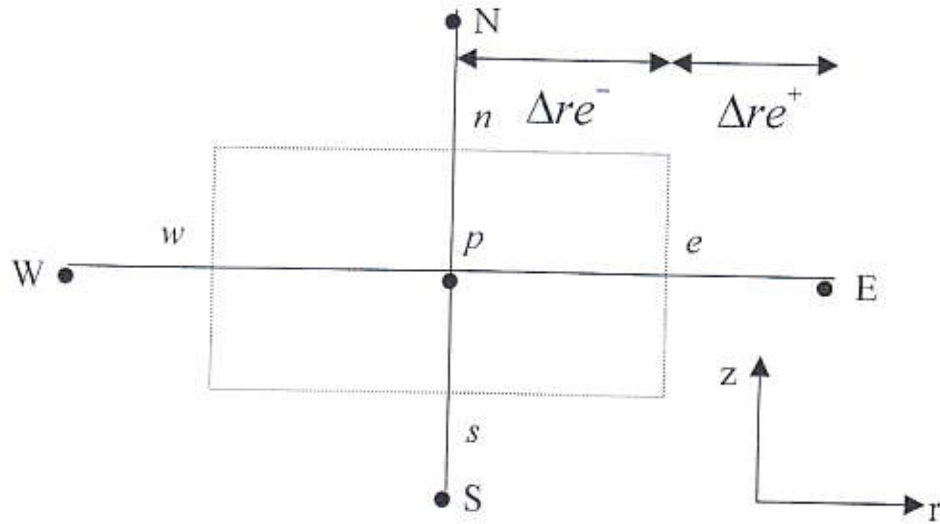


figure 5 : les paramètres correspondants aux volume de contrôle

Les faces correspondantes (du volume de contrôle) sont notées :  $e, w, n, et s$ . Il est plus pratique de combiner les deux flux de convection et de diffusion apparaissant dans l'équation (18). Soit  $J_i$  la somme de ces flux dans la direction  $i$ , soit :

$$J_i = \rho u_i \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \quad (20)$$

L'équation différentielle qui en résulte s'écrit :

$$\frac{\partial J}{\partial x_i} = S \quad (21)$$

L'intégration de cette équation sur le volume de contrôle de fig.(5) donne :

$$J_w A_w - J_e A_e + J_s A_s - J_n A_n + \bar{S} \Delta V = 0 \quad (22)$$



Les termes  $J$  représentent les flux appropriés aux volumes de contrôle.  $\bar{S}$  est la moyenne du terme source dans le volume de contrôle (pour les coordonnées cartésiennes :  $A_w=A_e$  et  $A_s=A_n$ ).

Considérons la région entre les points du maillage  $P$  et  $E$ , si le problème de convection diffusion entre ces deux points était unidimensionnel, la résolution donnerait un profil de  $\phi$  en exponentielle (solution exacte), soit :

$$J_e = F_e \left( \phi_p + \frac{\phi_p - \phi_e}{\text{EXP}(Pe) - 1} \right) \quad (23)$$

où  $Pe = \frac{F_e}{D_e}$  est le nombre de Peclet.

avec  $F_e = (\rho u)_e A_e =$  flux de masse, et  $D_e =$  conductance diffusive.

Si le coefficient de diffusion  $\Gamma$  est uniforme sur chaque volume de contrôle, donc :

$$D_e = A_e \left[ \frac{(\delta x)_e^-}{\Gamma_p} - \frac{(\delta x)_e^+}{\Gamma_e} \right]^{-1} \quad (24)$$

### 2-2-4-3 Simplification de l'expression de flux :

Etant donné la consommation en temps de calcul de la fonction exponentielle, de l'équation (23), on a cherché à approximer l'expression du flux. L'expression suivante en est assez bonne :

$$J = F_e \phi_p + (D_e A(|Pe|) + [-F_e, 0]) (\phi_p - \phi_e) \quad (25)$$

$$A(|Pe|) = \left[ 0, (1 - 0.5|Pe|) \right] \quad (26)$$

Ici, le symbole  $[a,b]$  indique qu'il faut prendre la plus grande des valeurs  $a$  et  $b$ . l'équation (26) est appelé : schéma au différences centrées. On peut montrer que la fonction  $A$  dans l'équation (26) est plus simple à calculer et que les équations (25) et (26) représentent une très bonne approximation de la solution exacte donnée par (23). [3]

Ici,  $F_e, F_w, F_n, F_s$ , sont les taux de masse traversant les faces respectives du volume de contrôle.  $P_e, P_w, P_n, P_s$ , sont les nombres de Peclet, et  $D_e, D_w, D_n, D_s$ , sont les conductances diffusives définies par (24). L'expression de  $a_p$  donnée par (34) découle de la supposition que les flux ( $F_i$ ) satisfont l'équation de continuité pour le volume de contrôle. A ce stade, il est courant d'écrire l'équation (28) sous une forme généralisée.

$$a_p \phi_p = \sum a_{nb} \phi_{nb} + b$$

où l'indice  $nb$  représente les points voisins. [3]

#### 2-2-4-6 Conditions aux limites :

D'après la fig.(4), on voit qu'à un état donné qu'il existe un volume de contrôle autour de chaque point de maillage, il y aura pour chacun une équation de discrétisation du type (28). Dans ce système d'équation, les valeurs de  $\phi$ , aux points limites, apparaîtront. Si ces valeurs (exemple  $\phi_b$ ) sont connues il n'y a plus de problème, si au lieu de cela, c'est une information sur le flux à la limite qui est donnée, il est nécessaire d'écrire une équation similaire à (23) pour le flux limite en terme de  $\phi_b$  et  $\phi_i$ . Ayant cette équation, la valeur inconnue de  $\phi_b$ , peut être éliminée de l'équation de volume de contrôle correspondant au point  $I$ . [3]

#### 2-2-4-7 Les quatre règles de base :

La méthode des volumes de contrôle est basée sur quatre règles qui sont suffisantes pour son application, elles sont :

##### **REGLE -1** *Consistance aux face du volume de contrôle*

Si une face est commune à deux volumes de contrôle adjacents, le flux qui la traverse doit être représenté par la même expression dans la discrétisation des équations pour les deux volume de contrôle.

##### **REGLE -2** *Positivité des coefficients .*

Tous les coefficients  $a_p$  et leurs coefficients voisins  $a_{nb}$  doivent être toujours positifs.

##### **REGLE -3** *Négativité de la pente de la linéarisation du terme source*

Lorsque le terme source est linéarisé à  $\bar{S} = S_c + S_p \phi_p$  le terme  $S_p$  doit être toujours inférieurs ou égal à zéro .



**REGLE -4** *sommation des coefficients voisins*

Nous exige que :  $a_p = \sum a_{nb}$

**2-2-5 Localisation des faces du volume de contrôle :**

On n'a pas spécifié comment les faces du volume de contrôle sont localisées dans la grille des points, car la dérivation de l'équation générale discrétisée a été donnée en coordonnées généralisées ; c'est pour cela qu'on n'a pas cité une particularité. Or il y a des cas particuliers pour lesquels on doit spécifier la localisation des faces du volume de contrôle. deux pratiques appelées A et B seront à noter en prenant le cas bidimensionnel, ainsi de même pour le cas uni et tridimensionnel. [3]

PRATIQUE -A- :

Les faces du volume de contrôle sont localisées au milieu entre les points de la grille.

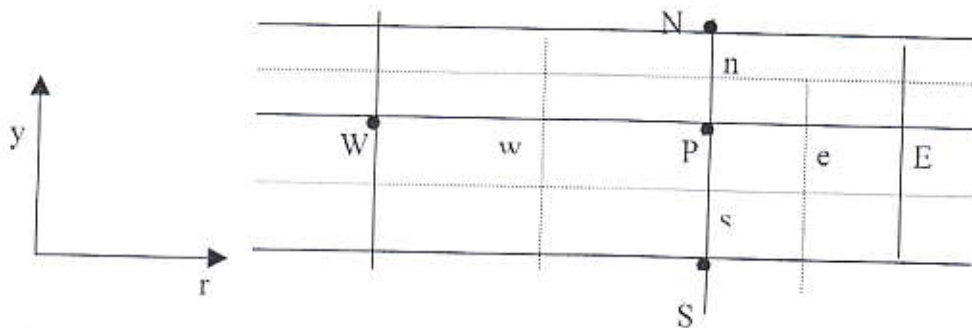


Figure 6 : Localisation des faces du volume de contrôle suivant la pratique -A-

La grille est librement dessinée, une conséquence est que le point P sera aisément observée sans qu'il soit pose au centre du volume de contrôle qui l'entoure.

PRATIQUE -B- :

Les points de la grille sont situés au centre des volumes de contrôle .

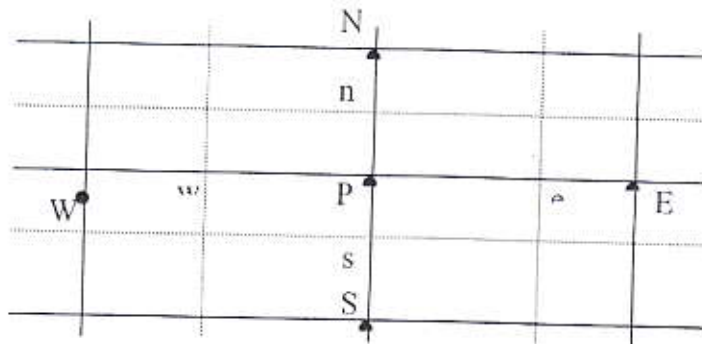


Figure 7 : localisation des faces de volume de contrôle suivant la pratique-B-



#### 2-2-4-4- Linéarisation de terme de source :

Si le terme source  $\bar{S}$  de l'équation (22) est connu, on n'a aucun problème, mais souvent ce terme dépend lui même de la variable  $\phi$ . Dans la mesure où l'équation résultante de la discrétisation reste linéaire, le terme source  $\bar{S}$  s'exprime par une fonction linéaire de  $\phi$ , soit :

$$\bar{S} = S_c + S_p \phi_p \quad (27)$$

où  $S_p$  est le coefficient de  $\phi_p$  et  $S_c$  la partie de  $\bar{S}$  qui ne dépend pas explicitement de  $\phi_p$ .

Trouver les meilleures expressions pour  $S_c$  et  $S_p$  dépend de l'exponentielle de  $S$ . Plusieurs formulations sont possibles. Il faut noter ici deux points très importants :

A- La linéarisation du terme source est souvent une opération cruciale, elle est la cause du succès de bon nombre de calculs décrivant des situations complexes.

B- Il est souhaitable que la linéarisation aboutisse à une valeur négative de  $S_p$ . Une valeur positive peut être cause de divergence. [3]

#### 2-2-4-5- Discrétisation finale des équations :

La substitution des relations obtenues dans les deux paragraphes précédentes, dans (22) permet d'aboutir à l'équation de discrétisation finale :

$$a_p \phi_p = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b \quad (28)$$

$$a_E = D_e A(|P_e|) + [-F_e, 0] \quad (29)$$

$$a_W = D_w A(|P_w|) + [-F_w, 0] \quad (30)$$

$$a_N = D_n A(|P_n|) + [-F_n, 0] \quad (31)$$

$$a_S = D_s A(|P_s|) + [-F_s, 0] \quad (32)$$

$$b = S_c \Delta V \quad (33)$$

$$a_p = a_E + a_W + a_N + a_S - S_p \Delta V \quad (34)$$

Il faut dessiner tout d'abord les limites du volume de contrôle puis placer les de la grille au centre de chaque volume.

Dans ce schéma, si les volumes de contrôle ne sont pas uniformes leurs faces ne seront pas placées au milieu des points de la grille.

### 2-2-6- Les différents schémas de discrétisation :

Les différents schémas de discrétisation pour la méthode des volume de contrôle sont :

- 1- schéma UPWIND
- 2- schéma EXPOENTIEL (*exact*)
- 3- schéma CENTRAL DIFFERENCE
- 4- schéma HYBRID
- 5- schéma POWER LAW

Tous ces schémas dépendent au nombre de Peclet, donc selon la fonction  $A(P)$  qu'on choisit le schéma qui convient.

FORMULE DE $A(P)$	SCHEMA
$1 - 0.5 P_e $ $\frac{1}{[0, 1 - 0.5 P_e ]}$ $[0, (1 - 0.1 P_e )^5]$	CENTRAL DIFFERENCE UPWIND HYBRID POWER LAW
$\frac{ P_e }{\text{EXP}(P_e) - 1}$	EXPONENTIEL

Tableau 1- la fonction  $A(P)$  pour les différents schémas

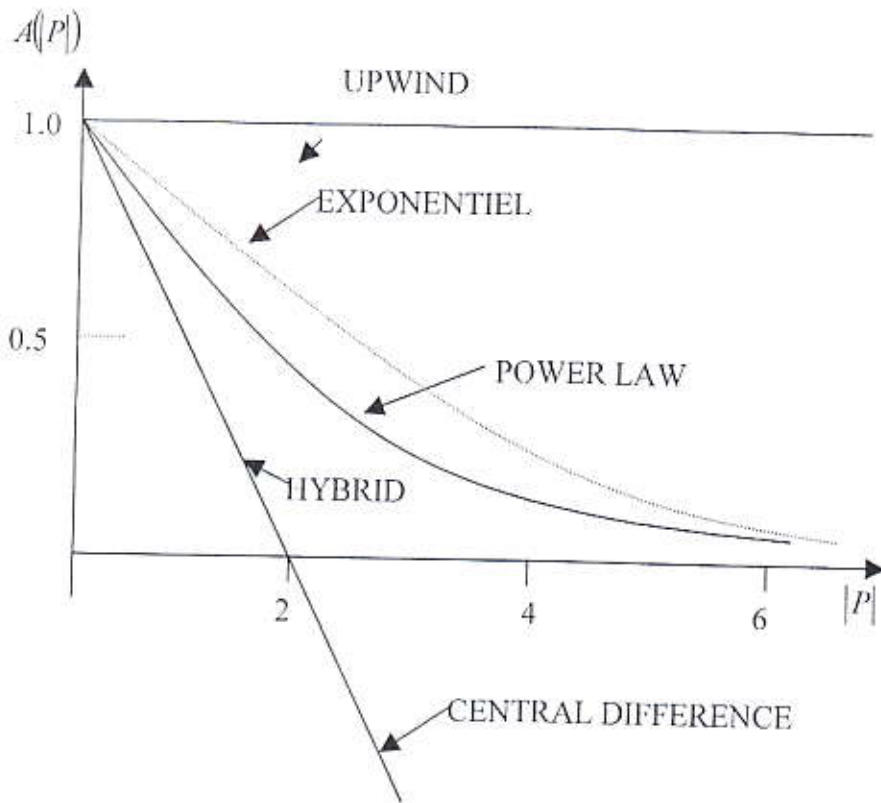


Figure 8: la présentation graphique de la fonction  $A(|P|)$  pour chaque schéma



## 2-3- La discrétisation et la résolution numérique

### 2-3-1 Le maillage :

Dans la méthode des volumes finis le champ d'écoulement ou le domaine de calcul est subdivisé en un ensemble de cellules couvrant le domaine tout entier sur lesquelles les lois de conservation sont appliquées afin de déterminer les variables du champ d'écoulement en certains points discrets des cellules appelés nœuds.

Les cellules peuvent être également triangulaire, quadrilatérales ...etc. Elles peuvent être des éléments dans un grille structurée ou non- structurée, comme le montre la figure ci -dessous.

Les équations linéaires obtenues par la discrétisation numérique peuvent être résolues par différentes méthodes itératives pour avoir la solution approchée. [4]

Les méthodes itératives d'approximation les plus utilisées sont :

- Méthode itérative de GAUSS-SEIDEL.
- Méthode itérative de ligne par ligne (LBL) combinée avec correction par Bloc.
- Méthode ILU.
- Méthode frottement implicite (SIP).
- Méthode implicite de direction alternée (ADI).

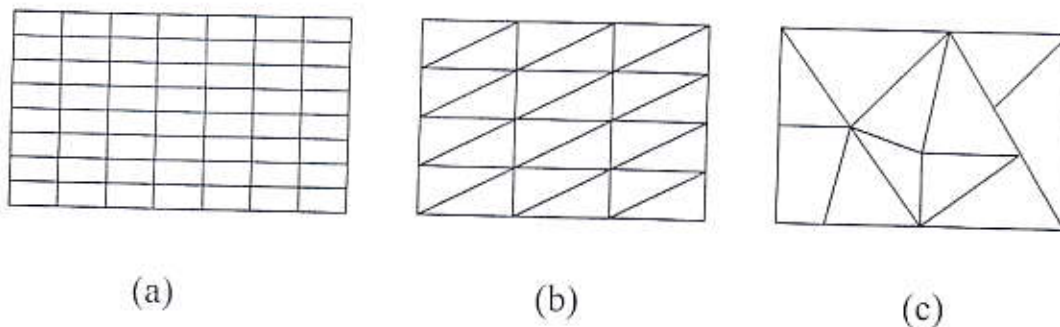


Figure 9: les différents types des grilles

- (a) grille rectangulaire structurée
- (b) grille triangulaire structurée
- (c) grille triangulaire non structurée

Le maillage utilisé dans ce travail est un maillage rectangulaire irrégulier. Les lignes du maillage sont raffinées dans les régions où il existe une grande variation des vitesses (au voisinage des parois).

L'intersection des lignes et des colonnes donne la naissance des nœuds où on va stocker les différentes valeurs de pression qui est une grandeur scalaire. Par contre les valeurs de  $u$  et  $v$  qui sont des grandeurs vectorielles sont stockées au milieu des segments reliant deux nœuds adjacents.

Un point du domaine est repéré par deux indices :

-un indice " $i$ " fait référence au plan parallèle à l'axe ( $oz$ ) où se trouve le point considéré.

-un indice " $j$ " qui précise la position de ce point sur l'axe ( $or$ ).

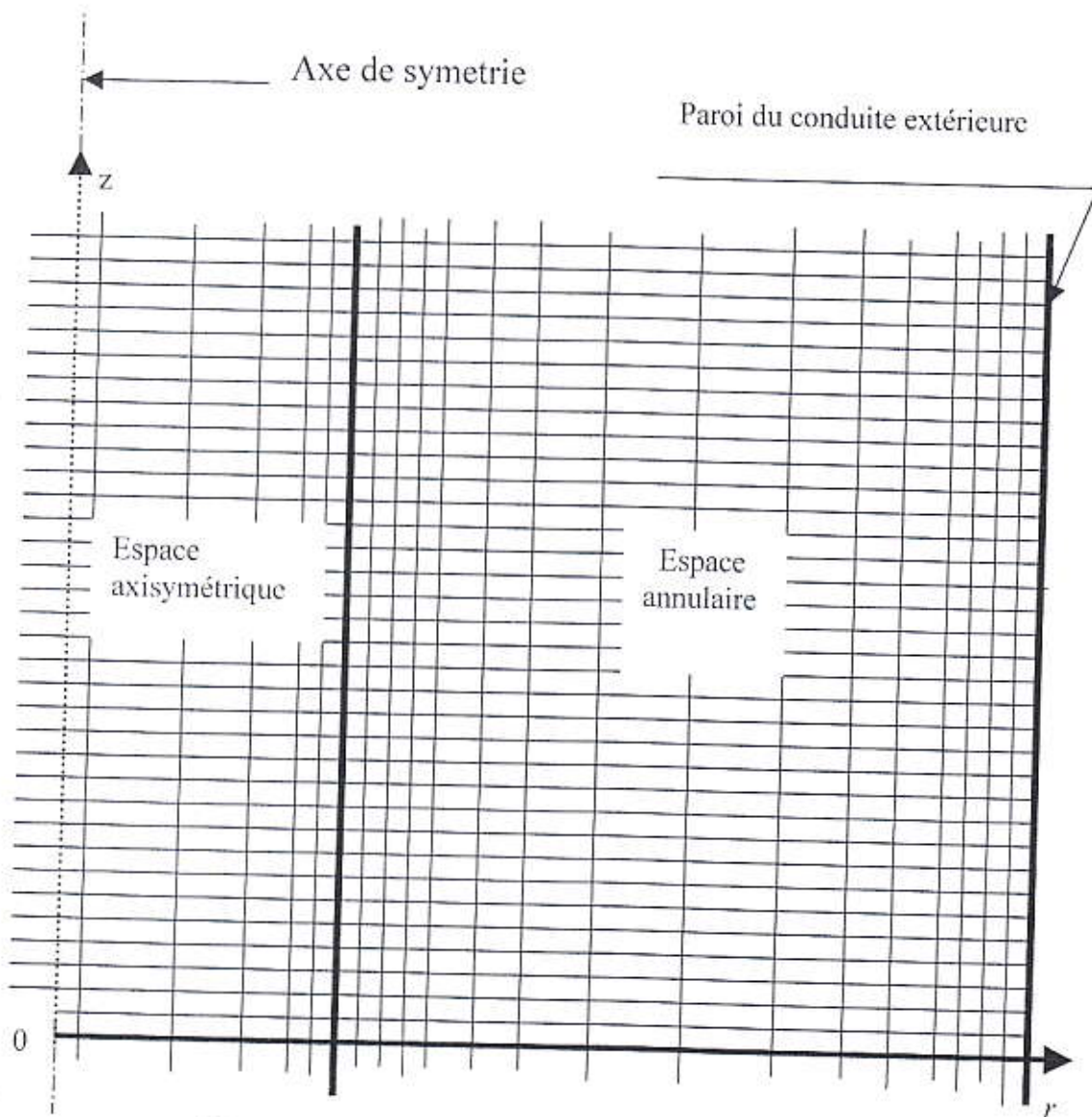


Figure 10 : maillage utilisé dans le domaine d'étude

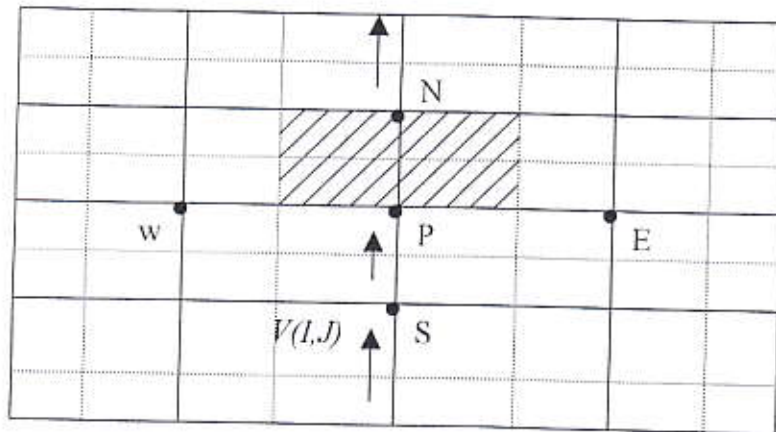


Figure 11 : volumes de contrôle entrelacés dans la direction  $z$

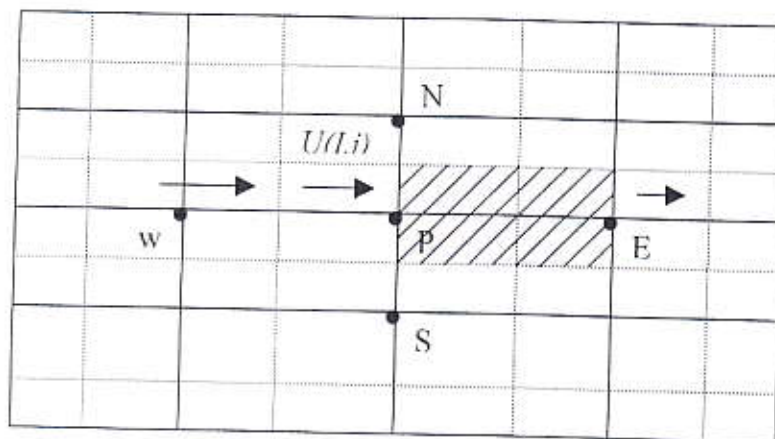


Figure 12 : volumes de contrôle entrelacés dans la direction  $r$

Le maillage est régulier dans la direction  $z$  (de pas constant) puisque le gradient de la vitesse est faible .

Dans la direction  $r$  le maillage est irrégulier. Les lignes sont raffinées au voisinage de les parois à cause du grand gradient de vitesse, ceci est du au phénomène d'adhérence à la paroi du fluide visqueux.



### 2-3-2- Discrétisation des équations de l'écoulement :

Pour un écoulement laminaire, incompressible et pour un fluide newtonien dans un système axisymétrique, l'équation de discrétisation est la suivante :

$$\frac{\partial}{\partial z}(\rho u \phi) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\rho r v \phi) - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial z} \left( \Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) - \frac{1}{\text{Re} r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = S_{\phi} \quad (35)$$

Pour  $\Gamma_{\phi}$  et  $S_{\phi}$  égales zéro et  $\phi$  égal 1, on obtient l'équation de continuité.

Pour  $\Gamma_{\phi}$  égal  $\mu$  et  $\phi$  égal  $u$  on obtient l'équation de quantité de mouvement

sur la direction  $z$  et  $S_{\phi} = -\frac{\rho}{Fr^2} \frac{\partial P}{\partial z}$

Pour  $\Gamma_{\phi}$  et  $\mu$  et  $\phi$  égal  $v$ , on obtient l'équation de quantité de mouvement

sur la direction  $r$  et  $S_{\phi} = -\frac{\partial P}{\partial r}$

### 2-3-3 Intégration de l'équation de bilan sur le volume de contrôle

Soit le volume de contrôle suivant :

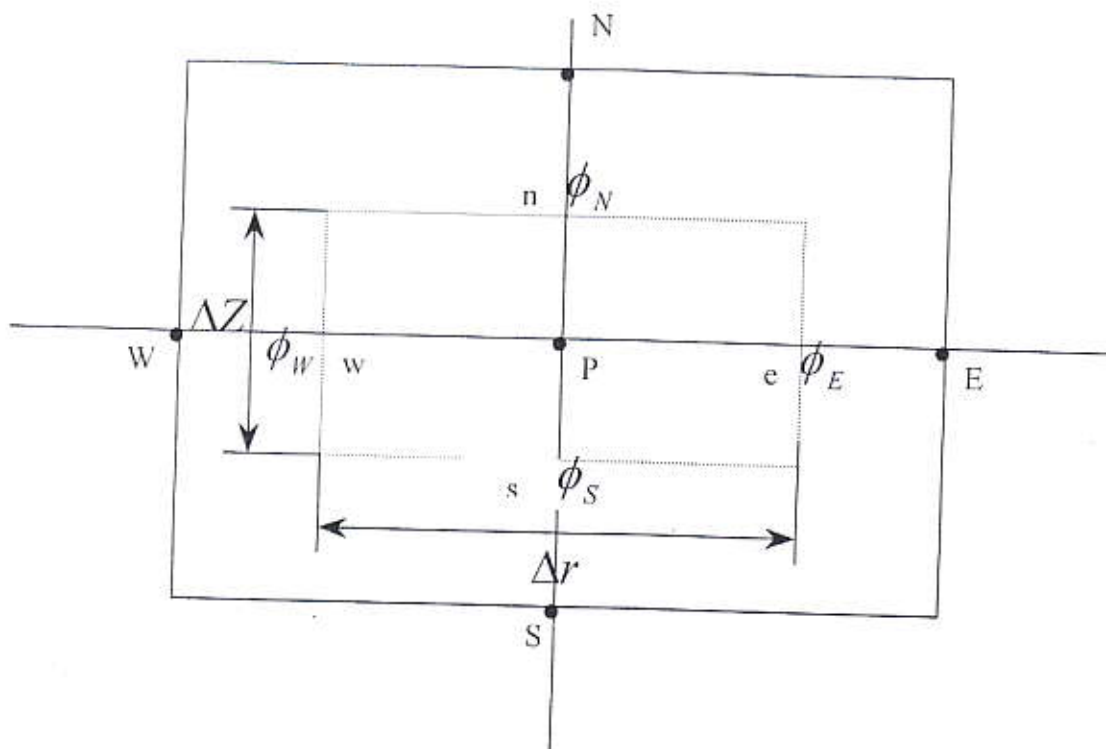


Figure 13 : volume de contrôle pour intégration

L'intégration de l'équation de bilan se fait comme suit:

On prend un volume élémentaire comme il démontre le schéma au-dessus où on fait l'équation (35) sur ce volume. On obtient :

$$\int_w^e [(u\rho\phi)_n - (u\rho\phi)_s] dr + \int_s^n [(v\rho\phi)_e - (v\rho\phi)_w] dz = \frac{1}{\text{Re}} \int_w^e \left[ \left( \mu \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_n - \left( \mu \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_s \right] dr$$

$$+ \frac{1}{\text{Re}} \int_s^n \left[ \left( r\mu \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)_e - \left( r\mu \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)_w \right] dz + \iint S\phi dV \quad (36)$$

on suppose que :

$\rho u$ ,  $\rho v$  sont uniformes le long des faces de volume de contrôle et que  $\phi$ ,  $\frac{\partial \phi}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial \phi}{\partial r}$  varient linéairement le long des faces on obtient :

$$\int_w^e (\rho\phi u)_n dr \cong (\rho u)_n \phi_n \Delta r$$

$$\int_w^e (\rho\phi u)_s dr \cong (\rho u)_s \phi_s \Delta r$$

$$\int_s^n (\rho\phi rv)_e dz \cong (\rho vr)_e \phi_e \Delta z$$

$$\int_s^n (\rho rv \phi)_w dz \cong (\rho vr)_w \phi_w \Delta z$$

$$\int_w^e \left( \mu \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_n dr \cong \mu_n \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_n \Delta r$$

$$\int_w^e \left( \mu \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_s dr \cong \mu_s \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_s \Delta r$$

$$\int_s^n \left( \mu r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)_e dz \cong \mu_e r \left( \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)_e \Delta z$$

$$\int_s^n \left( \mu r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)_w dz \cong \mu_w r \left( \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)_w \Delta z$$

L'équation (36) devient :

$$(\rho u \Delta r)_n \phi_n - (\rho u \Delta r)_s \phi_s + (\rho v \Delta z)_e \phi_e - (\rho v \Delta z)_w \phi_w =$$

$$\frac{1}{\text{Re}} \left( \mu \Delta r \left| \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_n - \mu \Delta r \left| \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_s + \mu r \Delta z \left| \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_e - \mu r \Delta z \left| \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_w \right) + \iint S_\phi \Delta V \quad (37)$$

Comme on a déjà annoncé dans la présentation du maillage le  $dV$  représente le volume de contrôle. [4]

#### 2-3-4 Approximation de la dérivée première par rapport aux variables $r, z$

- Par rapport à la variable  $z$  :

$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_n$  ,  $\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_s$  sont approchées en utilisant les différences centrées ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_n \cong \frac{\phi_N - \phi_P}{\Delta z} \\ \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_s \cong \frac{\phi_P - \phi_S}{\Delta z} \end{array} \right. \quad (38)$$

- Par rapport à la variable  $r$  :

$\left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_e$  ,  $\left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_w$  sont approchées en utilisant les différences centrées ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_e \cong \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta r} \\ \left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_w \cong \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta r} \end{array} \right. \quad (39)$$



2-3-5- Approximation des  $\phi$  sur les faces (schéma central / upwind) :

A) approximation de  $\phi_s$  ( la valeur de  $\phi$  sur la face sud ).

$$\phi_s = f_s \phi_S + (1 - f_s) \phi_P \quad (40)$$

Où  $f$  est un coefficient donne par :

$$\text{- Si } -2 < P_{ns} < 2 \quad P_{ns} = \frac{\rho_s u_s \Delta z}{\mu}$$

$$f_s = \frac{1}{2} \Rightarrow \phi_s = \frac{1}{2} (\phi_S + \phi_P) \quad \text{différences centrées.}$$

$$\text{- si } P_{ns} > 2 \quad f_s = 1 \quad \Rightarrow \phi_s = \phi_S \quad \text{schéma amont (upwind)}$$

$$\text{- si } P_{ns} < -2 \quad f_s = 0 \quad \Rightarrow \phi_s = \phi_P \quad \text{schéma aval (upwind)}$$

B) Les valeurs sont approchées de la même manière que celle de  $\phi_s$  on obtient alors :

$$\phi_e = f_e \phi_E + (1 - f_e) \phi_P$$

$$\phi_n = f_n \phi_N + (1 - f_n) \phi_P$$

$$\phi_w = f_w \phi_W + (1 - f_w) \phi_P$$

On substitue les valeurs de  $\delta\phi$  de (38) et (39) et de  $\phi$  de (40) dans l'équation (37) on obtient :

$$A_P \phi_P = A_E \phi_E + A_W \phi_W + A_N \phi_N + A_S \phi_S + S_\phi \quad (41)$$

où :

$$A_N = -(\rho u \Delta r)_n f_n + \frac{1}{\text{Re}} \mu \frac{\Delta r}{\Delta z} \Big|_n$$

$$A_S = (\rho u \Delta r)_s f_s + \frac{1}{\text{Re}} \mu \frac{\Delta r}{\Delta z} \Big|_s$$

$$A_E = -(\rho v \Delta z)_e f_e + \frac{1}{\text{Re}} \mu \frac{\Delta z}{\Delta r} \Big|_e$$

$$A_W = (\rho v \Delta z)_w f_w + \frac{1}{\text{Re}} \mu \frac{\Delta z}{\Delta r} \Big|_w$$

$$A_P = A_N + A_S + A_E + A_W$$

$$S_\phi = \overline{S_\phi} \Delta r \Delta z$$

- Sur l'axe  $z$  
$$\overline{S_\phi} = -\frac{\rho}{Fr^2} \frac{\partial \overline{P}}{\partial z}$$

- Sur l'axe  $r$  
$$\overline{S_\phi} = -\frac{\partial \overline{P}}{\partial r}$$

Les équations discrétisées pour  $u(i, j)$ ,  $v(i, j)$  sont les suivantes :

$$A_P^u U_P = A_E^u U_E + A_W^u U_W + A_N^u U_N + A_S^u U_S - \rho \frac{\Delta r \Delta z}{Fr^2} - \Delta r (P_N - P_P) \quad (42)$$

$$A_P^v V_P = A_E^v V_E + A_W^v V_W + A_N^v V_N + A_S^v V_S + \Delta z (P_E - P_P) \quad (43)$$

avec : 
$$U_P \equiv U_{i,j} \quad P_E \equiv P_{i,j+1}$$

$$V_p \equiv V_{IJ}$$

$$P_W \equiv P_{I,J-1}$$

$$P_p \equiv P_{IJ}$$

$$P_N \equiv P_{I+1,J}$$

$$P_S \equiv P_{I-1,J}$$

P : pression .

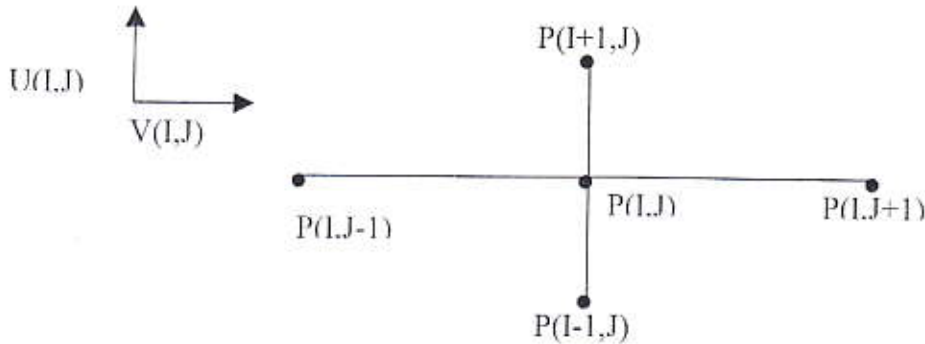


Figure 14 : représentation des pressions aux nœuds du maillage

### 2-3-6- Conditions aux limites :

Les équations utilisées sont elliptiques, leurs discrétisation aux nœuds adjacents à la frontière les conditions aux limites sont exigées pour la résolution du système d'équations algébriques résultant.

Les conditions aux limites sont généralement de deux types :

- Conditions de *Dirichlet*: on impose les valeurs des variables sur les frontières.
- condition de *Newman* : on impose les gradients normaux aux frontières.

Les types des frontières rencontrées dans les calculs présents sont :

- l'entrée du domaine.
- la sortie du domaine .
- les parois des conduites (uniquement des parois latérales ) .
- l'axe de symétrie  $\frac{\partial v}{\partial r}=0$

#### 2-3-6-1- l'entrée du fluide :

La distribution de la vitesse longitudinal à l'entrée du fluide est obtenue par interpolation à partir du profil expérimental. aussi puisqu' on a suppose que l'écoulement est parallèle en tous nœuds de l'entrée.



### 2-3-6-2- La sortie du fluide :

L'écoulement est supposé développé, ce qui implique un gradient normal nul pour toutes les variables :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad \text{et} \quad v = 0$$

$A_N^N$  et  $A_N^E$  seront appliquées aux équations discrétisées pour et ceci pour tous les volumes de contrôle adjacents.

### 2-3-6-3- Les parois

Nous avons dans ce problème seulement des parois latérales des deux conduites, donc la face est et la face ouest ( $E$  et  $W$ )

On prend un volume de contrôle pour la première composante de la vitesse ( $u$ ) dont la face est est en contact avec la paroi de la conduite (la conduite extérieur où intérieur) :

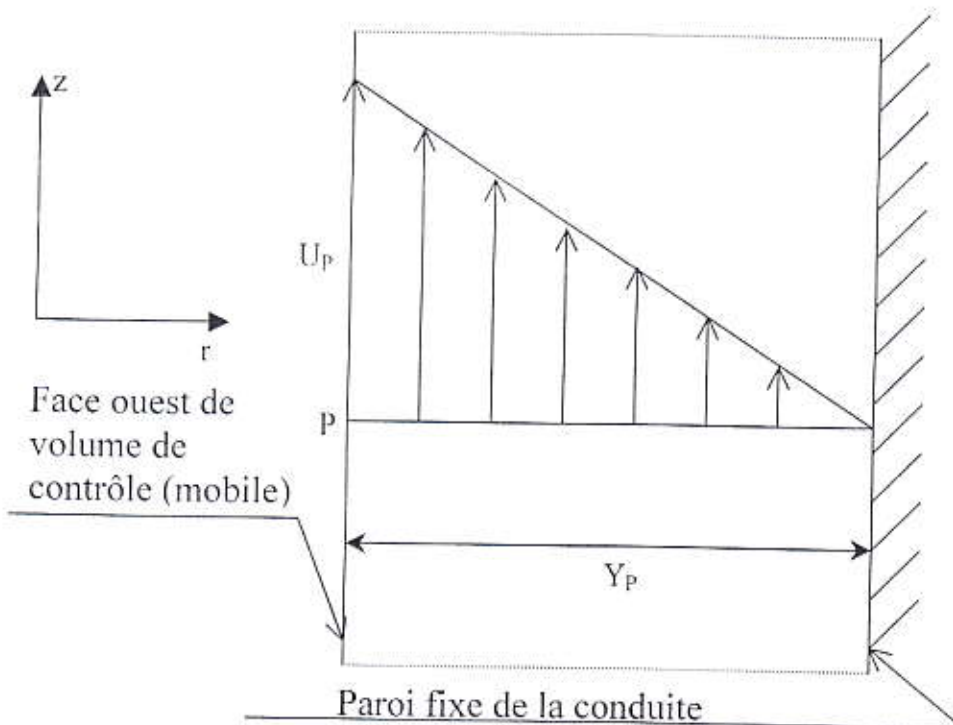


Figure 15 : volume de contrôle en contact avec la paroi

Puisque l'écoulement existant entre la paroi et le nœud P est de type Couette (fluide visqueux), il résulte donc une variation linéaire de la vitesse en fonction de la distance à la paroi. Ce type d'écoulement donne la naissance des contraintes tangentielles qui sont données par la relation suivante :

$$\tau = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_P = \mu \frac{u}{y_P} \quad (44)$$

La relation de quantité de mouvement à travers la face Nord du volume de contrôle est donnée par :

$$F_N = (\rho v)_N A_N U_N - \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{A_N} \quad (45)$$

Puisque la paroi est imperméable la vitesse normale  $V_E=0$  l'équation (45) se réduit à :

$$F_E = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_E A_E = \mu \frac{A_E U_p}{y_p}$$

La condition aux limites pour  $u$  est incorporée en supprimant le lien entre  $u_p$  et  $u_E$  en mettant  $A_E=0$  et en incorporant le flux d'une façon implicite en passant par le terme  $S_p(i, j)$ .

La condition au limite pour  $v$  est aussi incorporée en mettant  $A_E=0$  dans l'équation discrétisée.

En raison de l'adhérence du fluide aux parois, la quantité de mouvement est nulle c'est à dire que les vitesses aux parois égalent à zéro, donc elles ne sont jamais corrigées.

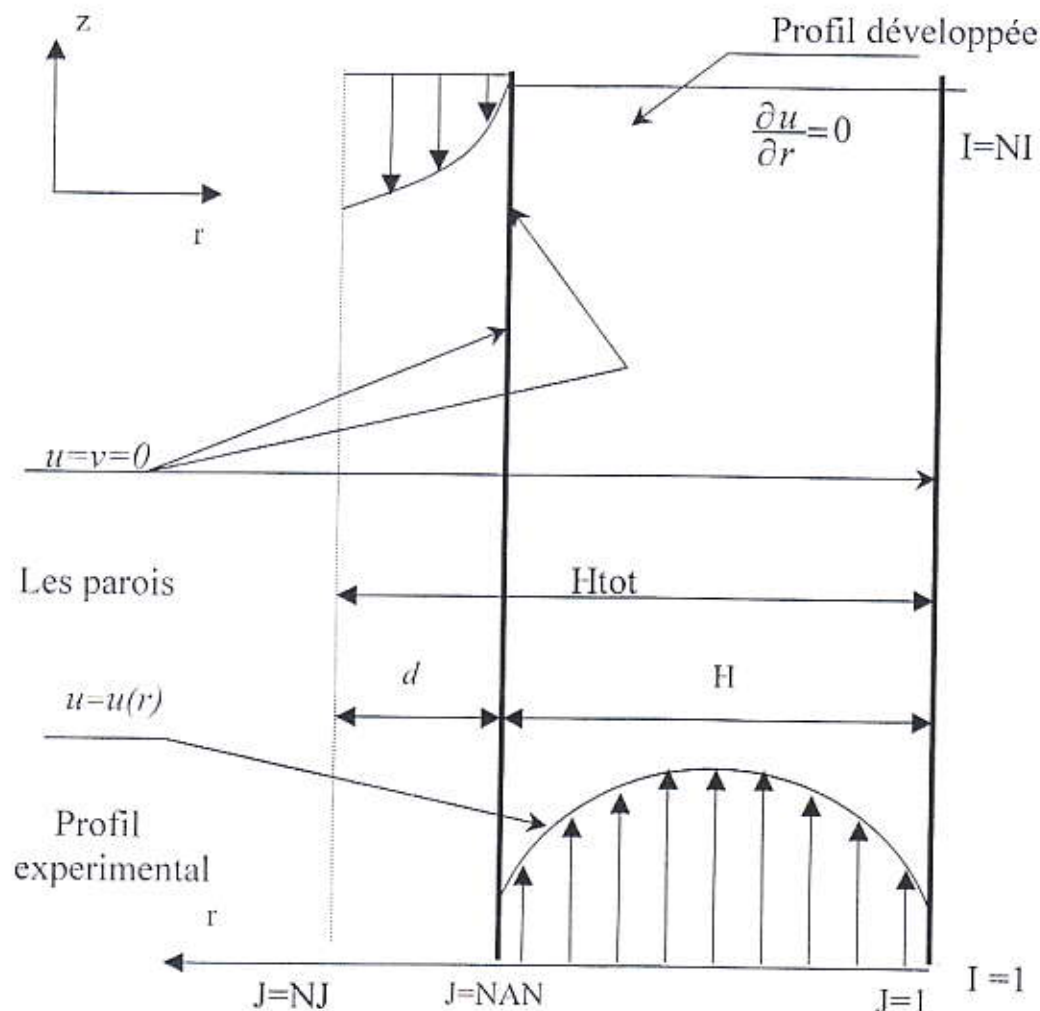


Figure 16 : parameters caracterisants la géométrie du domaine de calcul.

Les conditions aux limites relatives aux equations discrétisées sont comme suit :

$$u(I,1)=0 \quad \text{et } v(I,1)=0$$

$$u(I,NAN)=0 \quad \text{et } v(I,NAN)=0$$

si  $I=1$  et  $J=1,NAN$   $u=f(r)$  et  $v=0$  (l'entrée du fluide  $\rho_1$ )

si  $I=NI$  et  $J=1,NAN$   $u=f(NI-1)$  et  $v=0$  (sortie du fluide  $\rho_1$ )

si  $I=NI$  et  $J=NAN,NJ$   $u=f(r)$  et  $v=0$  (entrée du fluide  $\rho_2$ )

#### 2-3-6-4- L'axe de symétrie :

Sur tout l'axe de symétrie, correspondant à l'écoulement axisymétrique descendant, on peut indiquer qu'il y a une continuité de la première composante de vitesse  $u$  et un équilibre dynamique (égalité de la pression).

$$u(I, NJ-1) = u(I, NJ)$$

$$v(I, NJ-1) = -v(I, NJ)$$

$$P(I, NJ-1) = P(I, NJ)$$

#### 2-3-7- La résolution numérique :

D'après la précision des conditions aux limites pour une variable  $\phi$  choisi, les équations ne sont autre qu'un système linéaire de  $(NI-2) \times (NJ-2)$  équations linéaires dont la résolution permettra de déterminer les fonctions cherchées  $u$  et  $v$  aux nœuds du domaine d'étude.

Sous sa forme matricielle classique on à :

$$A \phi = B$$

NI et NJ sont les nombres des lignes de maillage dans la direction verticale et horizontale.

Chaque équation ayant la forme :

$$A_{I,J} \phi_{I,J} = A_{I,J+1} \phi_{I,J+1} + A_{I,J-1} \phi_{I,J-1} + A_{I+1,J} \phi_{I+1,J} + A_{I-1,J} \phi_{I-1,J} + S_\phi$$

avec I variant de 2 à NI-1.



Ceci s'écrit sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix}
 a_{2,2} & \dots & a_{2,N,I-1} \\
 a_{3,2} & \dots & a_{3,N,I-1} \\
 \dots & \dots & \dots \\
 a_{N-1,2} & \dots & a_{N-1,N,I-1}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \phi_{2,2} \\
 \phi_{3,2} \\
 \vdots \\
 \phi_{ni,2} \\
 \phi_{2,3} \\
 \phi_{3,2} \\
 \vdots \\
 \phi_{ni,nj}
 \end{bmatrix}
 = S \phi$$

$A$  est une matrice de  $(NI-2) \times (NJ-2)$  éléments.

La résolution directe du système d'équations algébriques ci-dessus est très coûteuse.

Parmi les méthodes numériques les plus utilisées dans ce cas, les méthodes semi- itératives où on va choisir une d'entre elles qui se nomme la méthode ligne par ligne. L'objet de cette méthode c'est de déterminer les valeurs de  $\phi$  sur chaque ligne indépendamment des autres lignes. Donc pour déterminer les valeurs de  $\phi$  sur la ligne  $I$  on suppose que les valeurs de  $\phi$  sur les lignes voisins  $(I+1)$  et  $(I-1)$  sont connues.

L'équation pour chaque nœud de la ligne  $(I)$  est alors réduite à une équation qui contient seulement trois inconnus  $\phi_p, \phi_e, \phi_w$  ou  $\phi_{I,J}, \phi_{I-1,J}, \phi_{I+1,J}$ .

On suppose qu'on a un nombre de points dans chaque ligne de maillage et qui varie de 1 à  $N$ . Les deux points 1 et  $N$  sont les points correspondent conditions aux limites.

Donc les équations de discrétisation pour la ligne  $I$  s'écrivent en utilisant la relation suivante :

$$a_I \phi_I = b_I \phi_{I-1} + c_I \phi_{I+1} + d_I' \quad (a)$$

$$a_I \phi_I - b_I \phi_{I-1} - c_I \phi_{I+1} = d_I'$$

$$\text{pour } I=1, N \quad c_I=0 \quad b_N=0$$

les valeurs de  $\phi_0, \phi_{N+1}$  sont supposées connues.

$$a_I = a_p, \quad b_I = a_e, \quad c_I = a_w$$

$$d_I' = (a_n \phi_n) + (a_s \phi_s) + d$$

L'ensemble des équations pour les points de la ligne I prend alors la forme suivante :

$$-b_2 \phi_1 + a_2 \phi_2 - c_2 \phi_3 = d_2'$$

$$-b_3 \phi_2 + a_3 \phi_3 - c_3 \phi_4 = d_3'$$

$$\begin{array}{cccc} * & * & * & \\ & * & * & * \\ & & * & * & * \\ & & & * & * & * \end{array} = d_I'$$

$$\begin{array}{cccc} * & * & * & \\ & * & * & * \\ & & * & * & * \\ & & & * & * & * \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} * & * & * & \\ & * & * & * \\ & & * & * & * \\ & & & * & * & * \end{array}$$

$$b_N \phi_{N-1} + a_N \phi_N - c_N \phi_{N+1} = d_N'$$

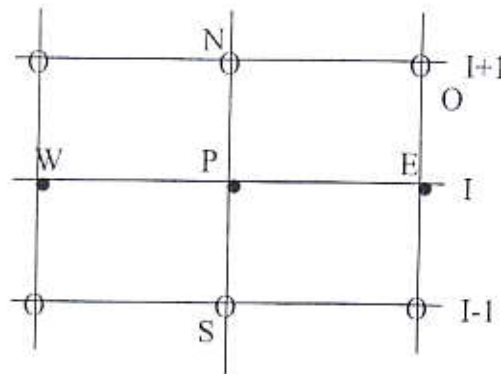


Figure 17 : élément de maillage caractérisant la résolution

- les valeurs connues
- les valeurs inconnues

Ce système d'équations est résolu en utilisant l'algorithme de THOMAS. On remarque que pour  $I=2$  la relation (a) relie  $\phi_2$  avec  $\phi_1$  et  $\phi_3$  est en fonction de  $\phi_2$  comme l'indique cette relation donc on peut la réduire pour aboutir une à autre relation qui nous donnera la valeur de  $\phi_2$  en fonction de  $\phi_3$ .

La forme générale de cette relation est :

$$\phi_I = p_I \phi_{I+1} + Q_I \quad (b)$$

$$\phi_{I+1} = p_{I+1} \phi_{I+2} + Q_{I+1} \quad (c)$$

On substitue l'équation (c) à l'équation on obtient donc:

$$a_I \phi_I = b_I \phi_{I+1} + c_I (p_{I+1} \phi_{I+2} + Q_{I+1}) + d_I \quad (d)$$

on réarrange cette équation pour quelle prend la même forme de l'équation (b), on abouti à :

$$p_I = \frac{b_I}{a_I - c_I p_{I+1}} \quad (e)$$

$$Q_I = \frac{d_I + c_I Q_{I+1}}{a_I - c_I p_{I+1}} \quad (f)$$

Toutes ces équations sont des relations de récurrence.

$$p_I = \frac{b_I}{a_I} \quad \text{et} \quad Q_I = \frac{d_I}{a_I} \quad (g)$$

$p_N = 0$  puisque ( $b_N = 0$ ) donc :

$$\phi_N = Q_N$$

Pour déterminer les valeurs de  $\phi_I$  sur la ligne I, on procède aux étapes suivants :

1. Calculer  $p_I$  et  $Q_I$  d'après la relation (g)
2. On utilise les relations de récurrence (e) et (f) pour déterminer  $p_I, Q_I$  ainsi que  $I = 2, \dots, N$ .
3. On impose  $\phi_N = Q_N$
4. On utilise l'équation (b) pour  $I = N-1, \dots, 1$  ; On abouti donc à la détermination des valeurs de  $\phi_{N-1}, \dots, \phi_1$  . [4]

#### 2-4- L'algorithme de SIMPLE :

Le mot semi implicite dans le nom SIMPLE (semi- implicit –methode-for- pressur-links- equations) a été utilise pour reconnaître l'omission des termes qui représente une influence implicite ou indirecte de correction de pression sur la vitesse. Cet algorithme à été développe par Patanker entre 1927-1929. [4]



### 2-4-1 équation de la correction de pression :

Pour résoudre l'équation (42) et (43) et l'équation de la correction de pression nous utilisons la procédure de SIMPLE.

Si le champ de vitesses  $u^*$  et  $v^*$  résultant de la résolution de l'équation (42) et (43) vérifie l'équation de continuité alors  $u^*$  et  $v^*$  sont exactes, sinon on améliore la pression donnée  $P^*$  de telle façon que :

$$P = P^* + P' \quad (46)$$

Où  $P'$  est la correction de la pression et  $P$  est la pression correcte. Avec une correction de pression, le champ de vitesse correcte est calculé par :

$$u_N = u_N^* + \frac{\Delta z}{a_N^u} (P_P' - P_N') \quad (47)$$

$$v_e = v_e^* + \frac{\Delta r}{a_e^v} (P_P' - P_e') \quad (48)$$

On intègre l'équation de continuité .

$$\frac{\partial \rho u}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho v r}{\partial r} = 0 \quad (49)$$

sur le volume de contrôle entourant le nœud  $p$  l'équation intégrée s'écrit :

$$((\rho u)_n - (\rho u)_s) \Delta r + ((\rho v r)_e - (\rho v r)_w) \Delta z = 0 \quad (50)$$

On introduit dans l'équation (50) les équations (47) et (48) on aura l'équation de discrétisation de  $p$  suivante : appelée équation de correction de pression : [4]

$$A'_p P'_p = A'_N P'_N + A'_S P'_S + A'_E P'_E + A'_W P'_W + b'_p \quad (51)$$

$$A'_N = \frac{\rho \Delta r \Delta z}{A_N}$$

$$A'_S = \frac{\rho \Delta r \Delta z}{A_S}$$

$$A'_E = \frac{\rho \Delta r \Delta z}{A_E}$$

$$A'_W = \frac{\rho \Delta r \Delta z}{A_W}$$

$$b'_P = (\rho u_S^* - \rho u_N^*) \Delta r + (\rho v_W^* - \rho v_E^*) \Delta z$$

$$A'_P = A'_N + A'_S + A'_E + A'_W$$

### 2-4-2 Correction par bloc :

L'équation de discrétisation générale peut être exprimée ( $\Phi$  peut être P ou P') pour  $I=2, \dots, m$  et  $J=1, \dots, n$  comme :

$$a_{I,J} \phi_{I,J} = b_{I,J} \phi_{I,J} + c_{I,J} \phi_{I,J} + d_{I,J} \phi_{I,J} + e_{I,J} + f_{I,J} \quad (52)$$

Soit  $\phi_{I,J}^*$  un champ divergent obtenu de la technique ligne par ligne. L'idée centrale de la procédure de correction par bloc est de corriger  $\phi_{I,J}^*$  en lui additionnant les corrections uniforme  $\bar{\phi}_I$  le long de la ligne I :

$$\phi_{I,J} = \phi_{I,J}^* + \bar{\phi}_I \quad (53)$$

En substituant (53) dans (52), on obtient le système suivant qui sera résolu par l'algorithme de THOMAS : [4]

$$A_I \bar{\phi}_I = B_I \bar{\phi}_{I+1} + C_I \bar{\phi}_{I-1} + D_I$$

où  $A_I, B_I, C_I, D_I$ , sont donnés par

$$A_I = \sum_{J=2}^n a_{I,J} - d_{I,J} - e_{I,J}$$

$$B_I = \sum_{J=2}^n b_{I,J}$$

$$C_I = \sum_{J=2}^n c_{I,J}$$

$$D_I = \sum_{J=2}^n b_{I,J} \phi_{I+1,J}^* + c_{I,J} \phi_{I+1,J}^* + d_{I,J} \phi_{I+1,J}^* + e_{I,J} \phi_{I,J-1}^* + f_{I,J} - a_{I,J} \phi_{I,J}^*$$

### 2-4-3- La sous relaxation et la convergence

#### 2-4-3-1- La sous relaxation :

La sous relaxation est essentielle pour l'accélération de la convergence. La forme explicite pour la sous relaxation d'une variable générale en une position (P) peut être exprimée par :

$$\phi_p = \alpha \phi_p^K + (1-\alpha) \phi_p^{K+1} \quad (54)$$

où  $K$  dénote le nombre d'itérations et  $\alpha$  est le facteur de sous relaxation qui est un constante variant de 0 à 1.

La sous relaxation peut être introduite implicitement dans l'équation algébrique pour  $\phi_p$ , en substituant pour celle-ci à partir de l'équation (1), on obtient alors :

$$A_p \phi_p = \sum_{l=e,w,n,s} A_l \phi_l + Su + \frac{(1-\alpha)}{\alpha} A_p \phi_p^K \quad (55)$$

En pratique cette méthode est plus favorable puisque (55) permet l'application de la sous relaxation sans qu'on a besoin de  $\phi_p^{K+1}$ .

Les facteurs de sous relaxation utilisées dans ce travail sont :

$$\alpha_u = 0.5$$

$$\alpha_v = 0.5$$

$$\alpha_p = 0.5$$

#### b) La Convergence

La convergence est vérifiée à la fin de chaque itération en comparant la somme des valeurs absolues des source ( $\sum |R_\phi|$ ) sur tous les volumes de contrôle.

Pour chaque variable, avec une valeur de référence  $R_{\phi,ref}$  (typiquement le flux de la variable d'intérêt à travers l'entrée du domaine de calcul).

$$R_\phi = A_p \phi_p - (A_E \phi_E + A_W \phi_W + A_N \phi_N + A_S \phi_S + Su)$$

Dans ce travail, la convergence est supposée atteinte lorsque la somme des source résiduelles normalisées pour chaque variable  $\phi$ .

$$\frac{\sum |R_\phi|}{R_{\phi,ref}}$$

La valeur de  $R_{\phi,ref}$  dans le cas des équations pour  $u$  et  $v$  était prise égale au flux de la quantité de mouvement à l'entrée et pour l'équation de correction de la pression était prise égale au flux massique à travers la section d'entrée.



#### 2-4-4 L'algorithme de SIMPLE :

Pour déterminer les distributions de  $u, v, P$  dans le domaine d'écoulement, on doit suivre les étapes suivantes : [4]

- 1- On donne les champs  $u^*, v^*, P^*$ .
- 2- On calcule les coefficients et les sources dans chacune des équations (42) et (43).
- 3- On résout les équations (26) (27) par la méthode de ligne par ligne.
- 4- On résout l'équation (46) de la correction de pression.
- 5- On corrige les champs des vitesses  $u^*, v^*$  avec  $u, v$  obtenues d'après les équations (47) et (48).
- 6- On corrige  $P$  avec  $P^*$ .
- 7- On répète les étapes de (1) à (6) jusqu'à la convergence.

#### 2-5 Structure du programme

Le programme utilisé est constitué d'un programme principal *AXIS* et sept sous-programmes : *INIT*, *PROMOD*, *LISOLV*, *PRINT* et *CALCΦ* ( $\Phi=U, V, P$ ).

##### \* *AXIS*

C'est le programme principal où s'effectuent les opérations initiales et finales (ex : calcul des coordonnées des nœuds du maillage) et aussi le contrôle des itérations et la vérification de la convergence.

##### \* *INIT*

- Calcul des quantités géométriques du maillage et donne les valeurs initiales aux variables  $U, V, P$  aux coefficients  $A_p, A_E, A_W, A_N, A_S$  aux sources  $S_u$  et  $S_p$ , etc.

##### \* *CALC U AXI* et *CALC U ANU*

- Calcule des coefficients et les sources dans le système d'équations pour  $U_{axi}$  (respectivement  $U_{anu}$ ) incorporant les conditions aux limites pour  $U_{axi}$  (resp.  $U_{anu}$ ) en appelant *ENTRY MODU AXI* (resp. *ENTRY MODU ANU*) dans *PROMOD*.

- Résoudre le système d'équations pour  $U_{axi}$  et  $U_{anu}$  (donnant ainsi  $U^{K+1}$  à partir de  $U^K, V^K, P^K$ ) en appelant la subroutine *LISOLV*. ( $K$  étant le nombre d'itérations).
- Calcul de résidu *RESORU AXI* (resp. *RESORU ANU*) pour la vérification ultérieure de la convergence dans *AXIS*.

**\*CALCV AXI et CALCV ANU**

- Calcule les coefficients et les sources dans le système d'équation pour  $V_{axi}$  (resp.  $V_{anu}$ ).
- Incorpore les conditions aux limites pour  $V_{axi}$  (resp.  $V_{anu}$ ) en appelant *ENTRY MODV AXI* (resp. *ENTRY MODV ANU*).
- La résolution du système d'équations pour  $V$  (*axi* et *anu*) (donnant ainsi  $V^{K+1}$  à partir de  $U^{K+1}, V^K, P^K$ ) en appelant la subroutine *LISOLV*.
- Le calcul de résidu *RESORV* (*axi* et *anu*) pour la vérification ultérieure de la convergence dans *AXIS*.

**\*CALCP**

- Calcule les coefficients et les sources dans le système d'équations pour  $P'$ .
- Résoudre le système d'équations pour  $P'$  (donnant ainsi  $P^{K+1}$  à partir des  $U^{K+1}, V^{K+1}$ ) en appelant la subroutine *LISOLV*.
- Calcule le résidu *RESORM* pour la vérification ultérieure de la convergence dans *AXIS*.
- Corrige les champs de pressions et de vitesse en ajoutant les corrections  $P^{K+1}, U^{K+1}, V^{K+1}$  à  $P^K, U^K, V^K$ .

**\*PROMOD**

Contient deux entrées, *ENTRY MODU* (*axi* et *anu*) et *ENTRY MODV* (*axi* et *anu*) qui permettent respectivement l'incorporation des conditions aux limites nécessaires pour la résolution des équations pour  $U, V$ .

**\*LISOLV**

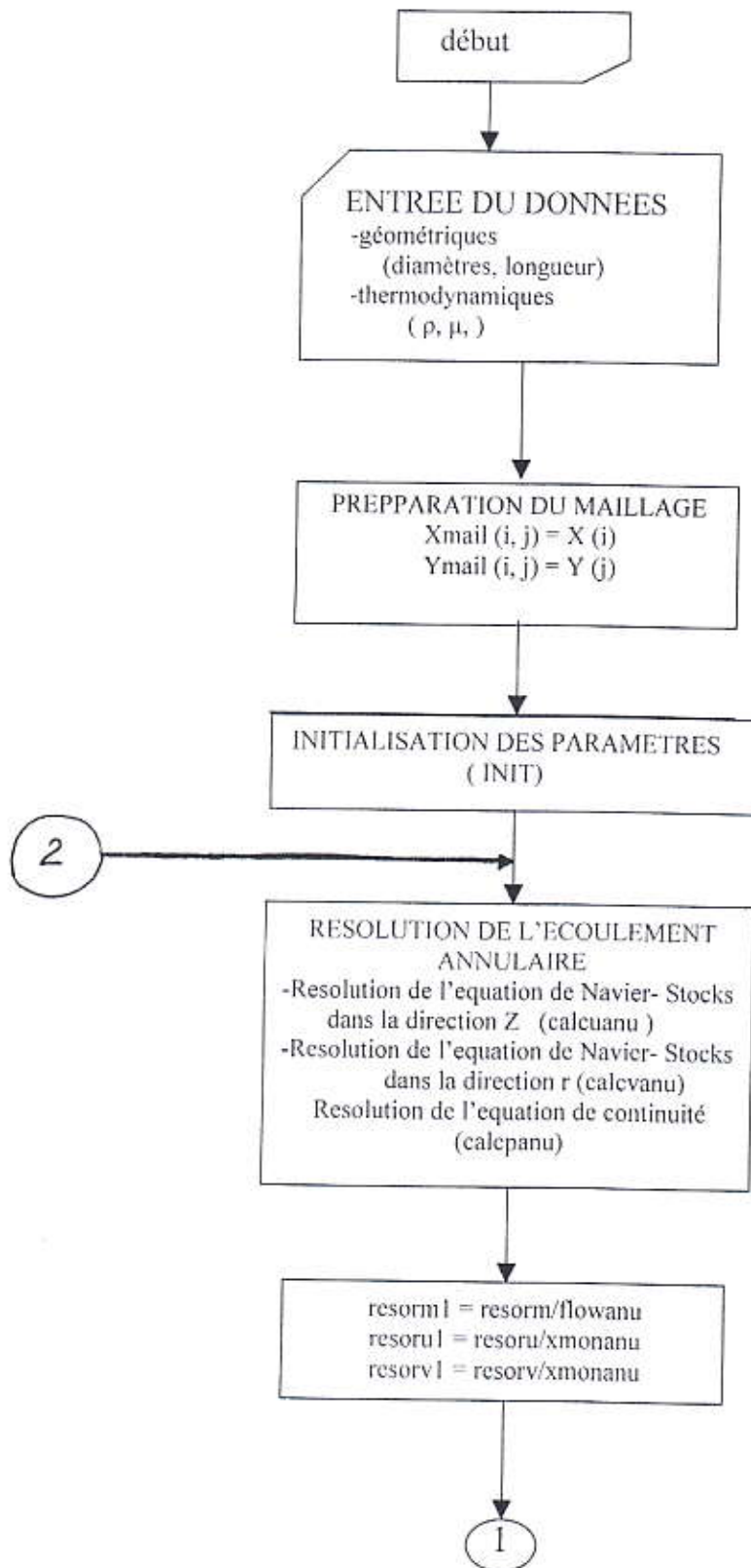
Permet la résolution d'un système d'équation par la méthode *TDMA*.

**\*PRINT**

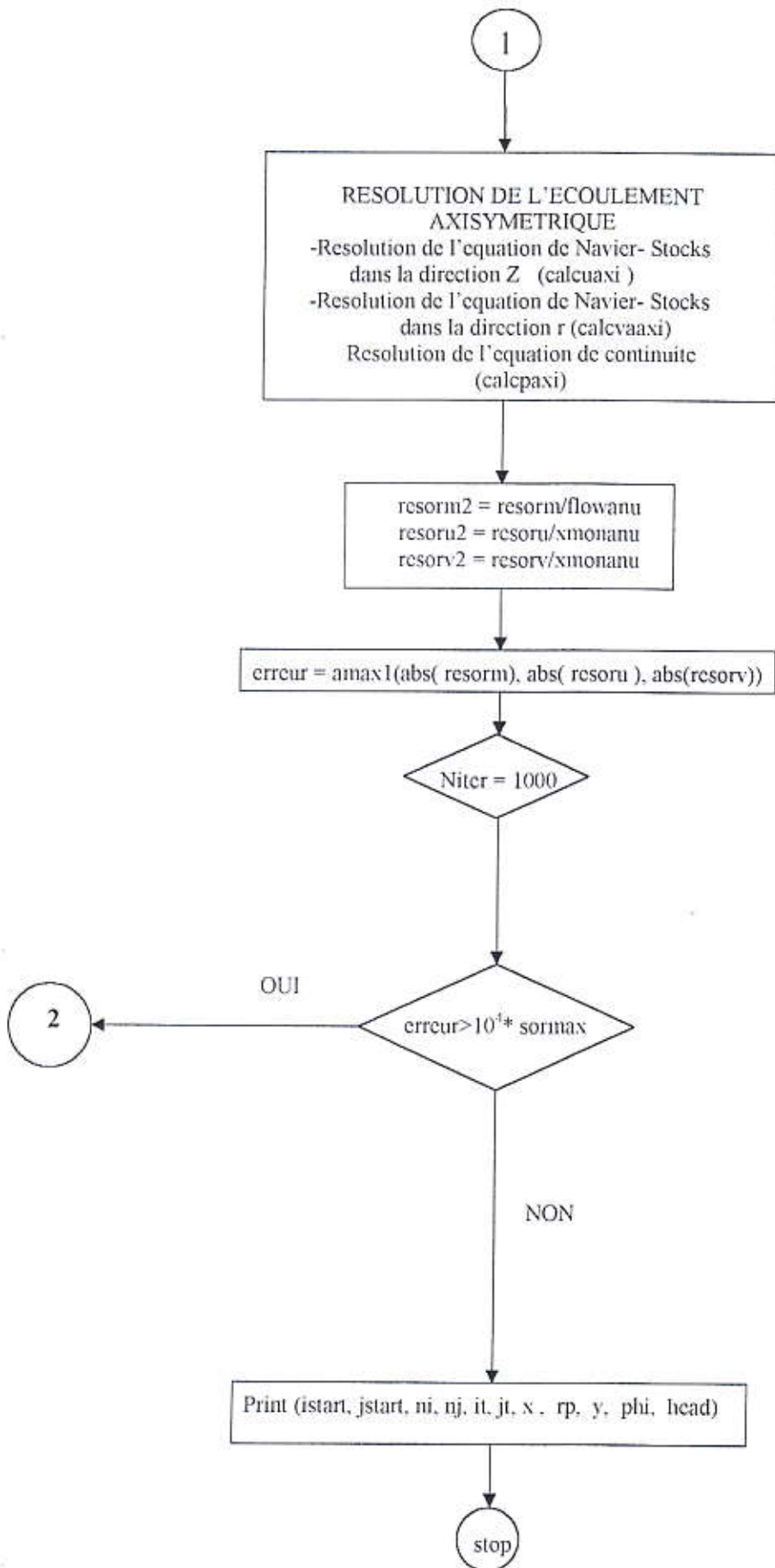
Permet l'écriture des résultats finaux ou des résultats intermédiaires (après un certain nombre d'itérations) sous forme des tableaux.

Les sous programmes *INIT, LISOLV, PRINT, et CALCΦ* ( $\Phi = U, V, P$ ) sont indépendants du problème traité. Les modifications relatives à un problème donné se font seulement dans *AXIS* et *PROMOD*.

## 2-5-1- L'organigramme







## 2-5-2 Notation des variables relatives aux maillage

### 2-5-2-1- Volume de contrôle pour la pression P

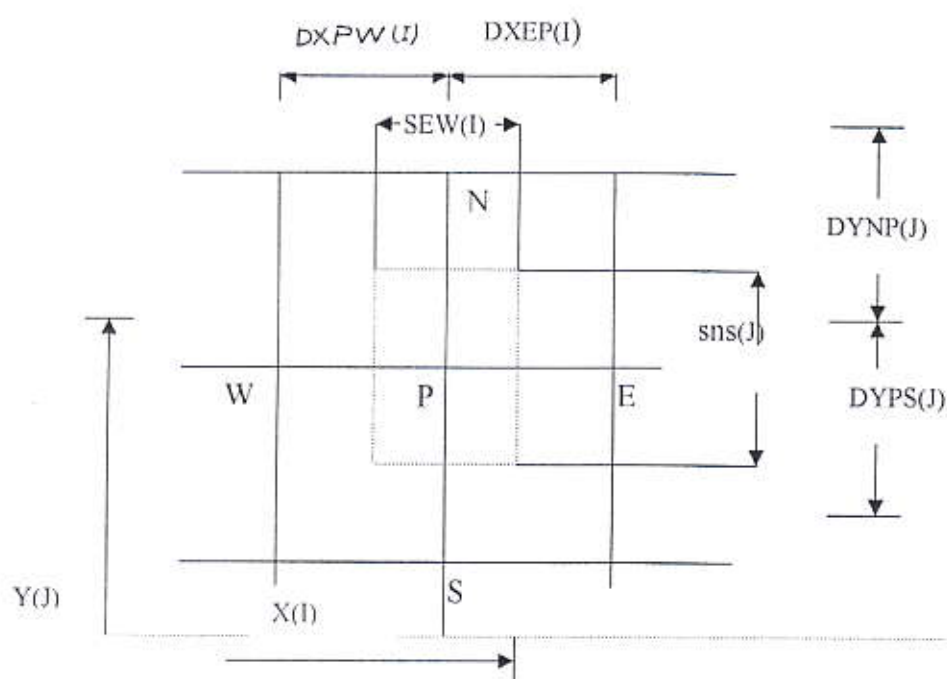


Figure 18 : les paramètres du volume de contrôle pour la pression P

2-5-2-2- Volume de contrôle pour U

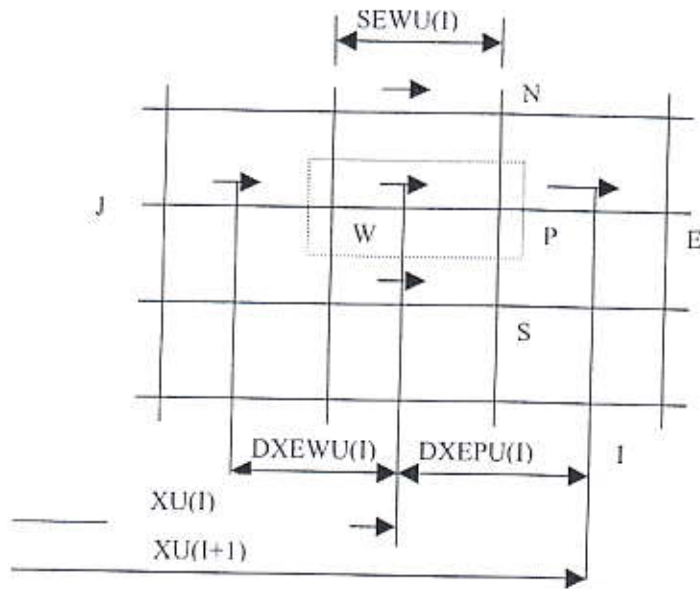


Figure 19 : les paramètres du volume de contrôle pour la vitesse U

2-5-2-3- Volume de contrôle pour V

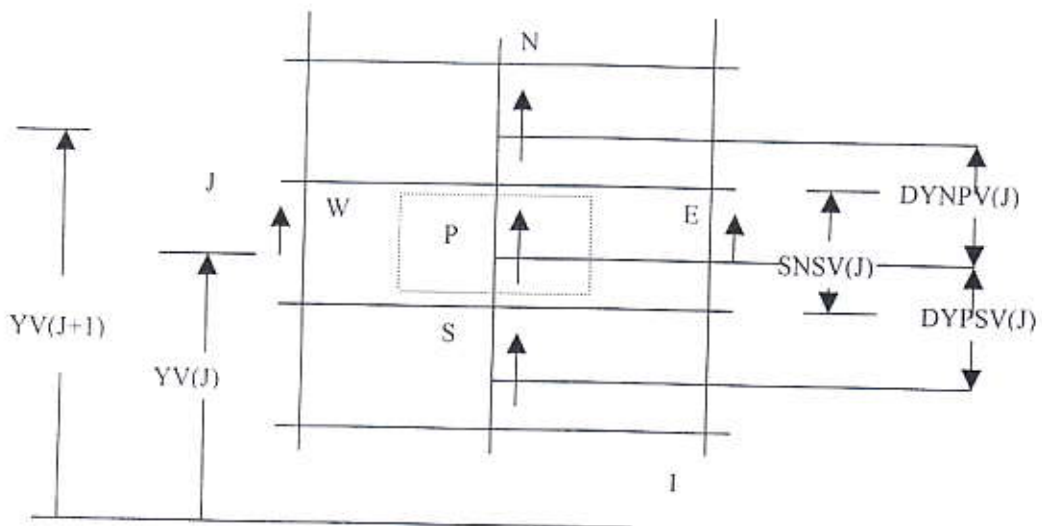


Figure 20 : les paramètres de volume de contrôle pour la vitesse V



### 2-5-3 Variables

Les figures (20) montre la manière dont les différentes variables sont stockées . Les variables scalaires (pression , correction de pression ) sont stockées à l'intersection des lignes horizontales et verticales du maillage (nœuds ) , leurs notation dans le programme sont les suivantes :

$$P \dots \dots \dots P(I,J) \quad \text{et} \quad P' \dots \dots \dots PP(I,J)$$

Les vitesses sont stockées aux milieux des segments joignant les nœuds , leurs notation dans le programme sont les suivantes :

$$U \dots \dots \dots U(I,J) \quad \text{et} \quad V \dots \dots \dots V(I,J)$$

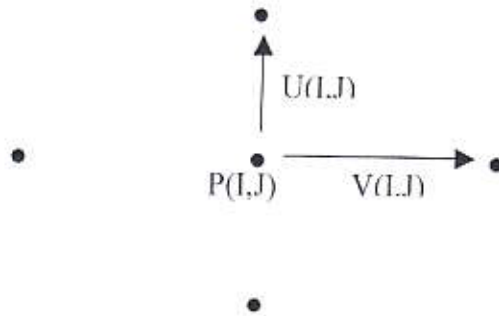


Figure 21 : le stockage de la pression et des vitesses

### 2-5-4- Nombre de balayage :

La notation utilisée pour le nombre d'applications de la procédure ligne par ligne (TDMA ) pour la variable  $\Phi$  est  $NSWP\Phi$  , ex :  $NSWP = 1$  est spécifiée lorsque on veut un balayage seulement pour l'équation de la quantité de mouvement dans la direction ( $U$ ).

### 2-5-5- Facteur de sous relaxation :

la notation utilisée pour le facteur de sous -relaxation des différentes variables est  $URF\Phi$  . généralement ceci prend des valeurs comprises entre 0.5 et 1.

### 2-5-6- Contrôle des itérations :

Les itérations sont comptées en utilisant  $NITER$ . La somme des résidus absolus des sources est dénotée dans le cas de  $U$  et  $V$  par  $RESOR\Phi$ . Dans le cas de  $P'$ ,  $RESORM$  représente les valeurs absolus des sources massiques.

Les calculs s'arrêtent lorsque un des cas suivantes apparaît :

$$\left\{ \begin{array}{l} - NITER = MAXIT, \text{ ou} \\ - SORCE > 10.E04 * SORMAX \Rightarrow \text{divergence} \\ - SORCE < SORMAX \Rightarrow \text{convergence} \end{array} \right.$$

où :

$$\left\{ \begin{array}{l} - SORCE = \text{MAX} (RESORM, RESORU, RESORV) \\ - MAXIT = \text{nombre maximal d'itération.} \\ - SORMAX = \text{valeur maximale du résidu acceptable.} \end{array} \right.$$

Après chaque itération,  $NITER$ ,  $RESOR\Phi$  et  $RESORM$  et les variables  $U, V$  et  $P$  en une position choisie ( $IMON$ ,  $JMON$ ) sont imprimés sur l'écran.

Les tableaux des variables  $U, V, P$  sont imprimés sur l'écran à chaque fois qu'un nombre d'itérations est exécuté.

### 2-5-7- Système d'équations :

La forme générale des équations programmée est la suivante :

$$(a_p + c_p)\Phi_p^{K+1} = a_e\Phi_e + a_w\Phi_w + a_n\Phi_n + a_s\Phi_s + c + c_p^K$$

$$\text{où } a_p = a_e + a_w + a_n + a_s - s_p$$

$$c_p = \max(0, SMP)$$

$SMP$  : flux net du volume de contrôle.

Les symboles *FORTRAN* pour les coefficients figurant dans cette équation sont :

$$\begin{array}{l} a_p \dots \dots \dots AP(I, J) \\ a_e \dots \dots \dots AE(I, J) \\ a_w \dots \dots \dots AW(I, J) \\ a_n \dots \dots \dots AN(I, J) \\ a_s \dots \dots \dots AS(I, J) \\ s_p + c_p \dots \dots \dots SP(I, J) \\ (c + c_p\Phi^K) \dots \dots \dots SU(I, J) \end{array}$$

Les coefficients contenus dans les formules de correction des vitesses sont dénotées par :

$$\begin{array}{l} D_u \dots \dots \dots DU(I, J) \\ D_v \dots \dots \dots DV(I, J) \end{array}$$

## *Chapitre -3-*

### *Résultats et discussions*

### 3-1- Influence de la taille du maillage sur les résultats :

Dans tous les problèmes des méthodes numériques, le maillage a un influence directe sur le résultat, pour montrer cet influence nous avons changé la taille du maillage d'une manière progressive et nous avons trouvé les résultats suivants :

	(50 , 20 )	(60 , 30 )	(80 , 40 )	(90 , 45 )	(100 , 50 )
Maxit	1500	1500	1500	1500	1500
Reanu	200	200	200	200	200
Reaxi	100	100	100	100	100
Resoru	8.38 E-6	1.10 E-5	1.92 E-5	4.87 E-5	2.47 E-4
Resorv	2.74 E-6	3.23 E-6	5.11 E-6	6.94 E-6	7.75 E-6
Resorm	6.95 E-2	2.44 E-2	1.37 E-2	1.15 E-2	0.92 E-2
Résidu	6.95 E-2	2.44 E-2	1.37 E-2	1.15 E-2	0.92 E-2

Tableau 2 : Influence de la taille du maillage sur les résultats

D'après le tableau on remarque que la valeur du résidu entre les tailles du maillage équivalente à (80,40), (90,45) et (100,50) ne varie pas beaucoup. D'où on peut prendre une taille du maillage de (100,50) comme un maillage optimisé .

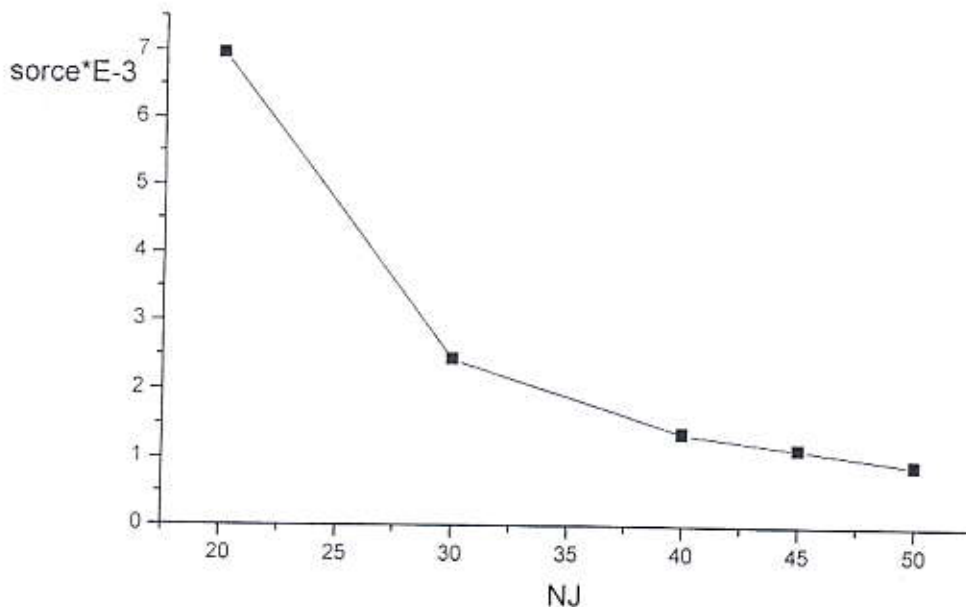


Figure 22 : la variation de résidu par rapport à la taille du maillage



### 3-2- Interprétation du résultats

Le programme est construit pour résoudre deux types d'écoulements, et ceci par le changement du sens de l'écoulement axisymétrique et l'adaptation des conditions aux limites en entrée et sortie. On obtient donc deux écoulements contre-courant ou deux écoulements co-courant.

#### 3-2-1- Écoulements contre-courants :

Pour obtenir des écoulements contre-courants, on applique des conditions aux limites opposées à l'entrée et à la sortie pour les deux écoulements :

- Ecoulement annulaire : entrée (condition Dirichlet)  $I=2$   
sortie (condition de Neumann)  $I=NI$
- Ecoulement axisymétrique : entrée (condition Dirichlet)  $I=NI$ ,  
sortie (condition de Neumann)  $I=2$

On fait la résolution des équations de mouvement associés à des conditions aux limites pour plusieurs valeurs de nombre de Reynolds annulaire  $(Re)_{anu}=100, 200, 300$ , et on fixe la valeur du Reynolds axisymétrique,  $(Re)_{axi}=50$ , et on varie le rapport des diamètres  $d/htot$  entre les valeurs  $0.25, 0.10, 0.75$ .

Les profils de vitesse ayant pour composantes  $u$  et  $v$  qui sont représentées dans le plan méridien.

Les résultats sont présentés à la fin de ce chapitre sous forme des figures.

Les figures (23), (24), (25) représentent les profils des vitesses  $u$  et  $v$  des deux écoulements pour un nombre de Reynolds annulaire égal respectivement à 100, 200, 300, et pour un rapport des diamètres  $d/htot$  égal 0.25. On voit que le profil de vitesse à l'entrée de l'écoulement annulaire est parabolique selon la condition au limite d'entrée (condition de Dirichlet). On voit aussi que sur les parois  $u = v = 0$  (condition d'adhérence), et au voisinage des parois, il y a un gradient de vitesse très élevé cela est due aux forces de frottement engendrées par la viscosité du fluide.

Les profils de vitesse de l'écoulement axisymétrique sont semi-paraboliques à cause de la symétrie. L'écoulement à la sortie est développé (condition de Neumann).

Les figures (26), (27), (28) représentent les profils de vitesse pour les mêmes nombres de Reynolds et un rapport des diamètres  $d/htot = 0.10$ . En plus des remarques précédentes, on voit que le gradient de vitesse au





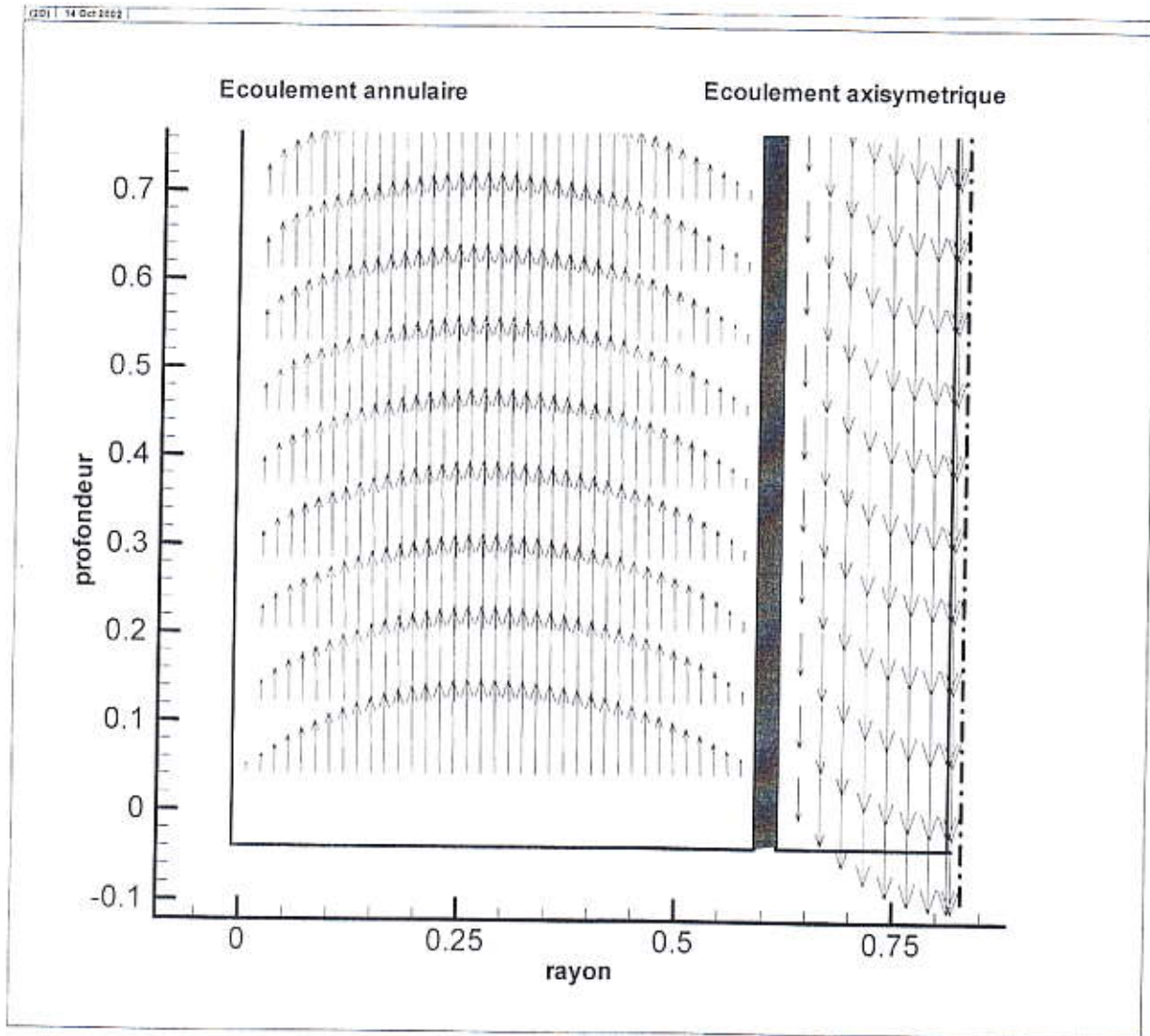


Figure 23 : écoulements contre-courants

Le rapport des diamètres :	$d/H_{tot} = 0.25$
Nombre des nœuds annulaires :	$n_{anu} = 40$
Nombre des nœuds axisymétriques :	$n_{axi} = 10$
Nombre d'itérations :	$n_{iter} = 1500$
Le nombre de Reynolds annulaire :	$Re_{anu} = 100$
Le nombre de Reynolds axisymétrique :	$Re_{axi} = 50$

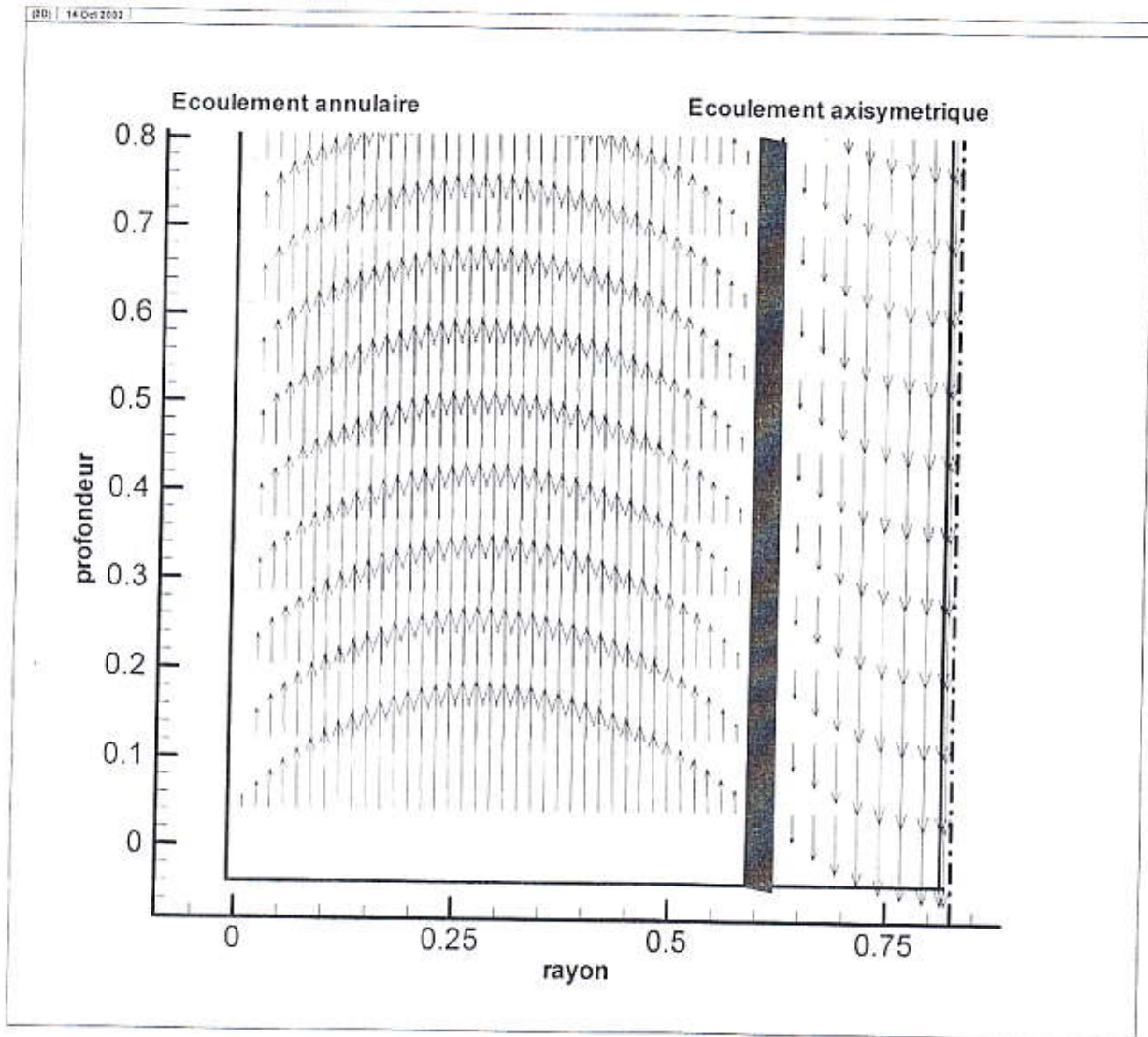


Figure 24 : écoulements contre-courants

Le rapport des diamètres :	$d / H_{tot} = 0.25$
Nombre des nœuds annulaires :	$n_{anu} = 40$
Nombre des nœuds axisymétriques :	$n_{axi} = 10$
Nombre d'itérations :	$n_{iter} = 1500$
Le nombre de Reynolds annulaire :	$Re_{anu} = 200$
Le nombre de Reynolds axisymétrique :	$Re_{axi} = 50$



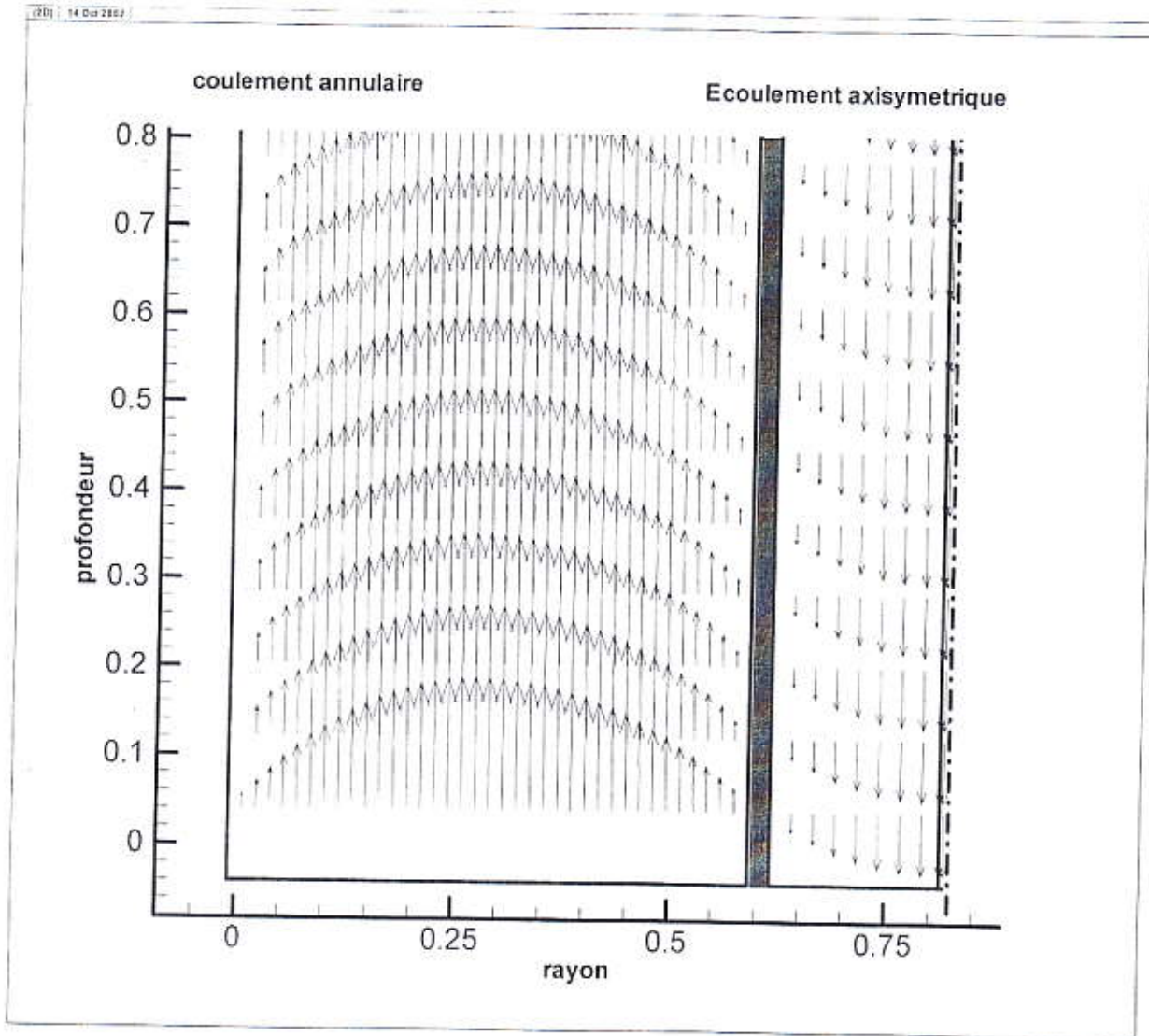


Figure 25 : écoulements contre-courants

Le rapport des diamètres :	$d / H_{tot} = 0.25$
Nombre des nœuds annulaires :	$n_{anu} = 40$
Nombre des nœuds axisymétriques :	$n_{axi} = 10$
Nombre d'itérations :	$n_{iter} = 1500$
Le nombre de Reynolds annulaire :	$Re_{anu} = 300$
Le nombre de Reynolds axisymétrique :	$Re_{axi} = 50$

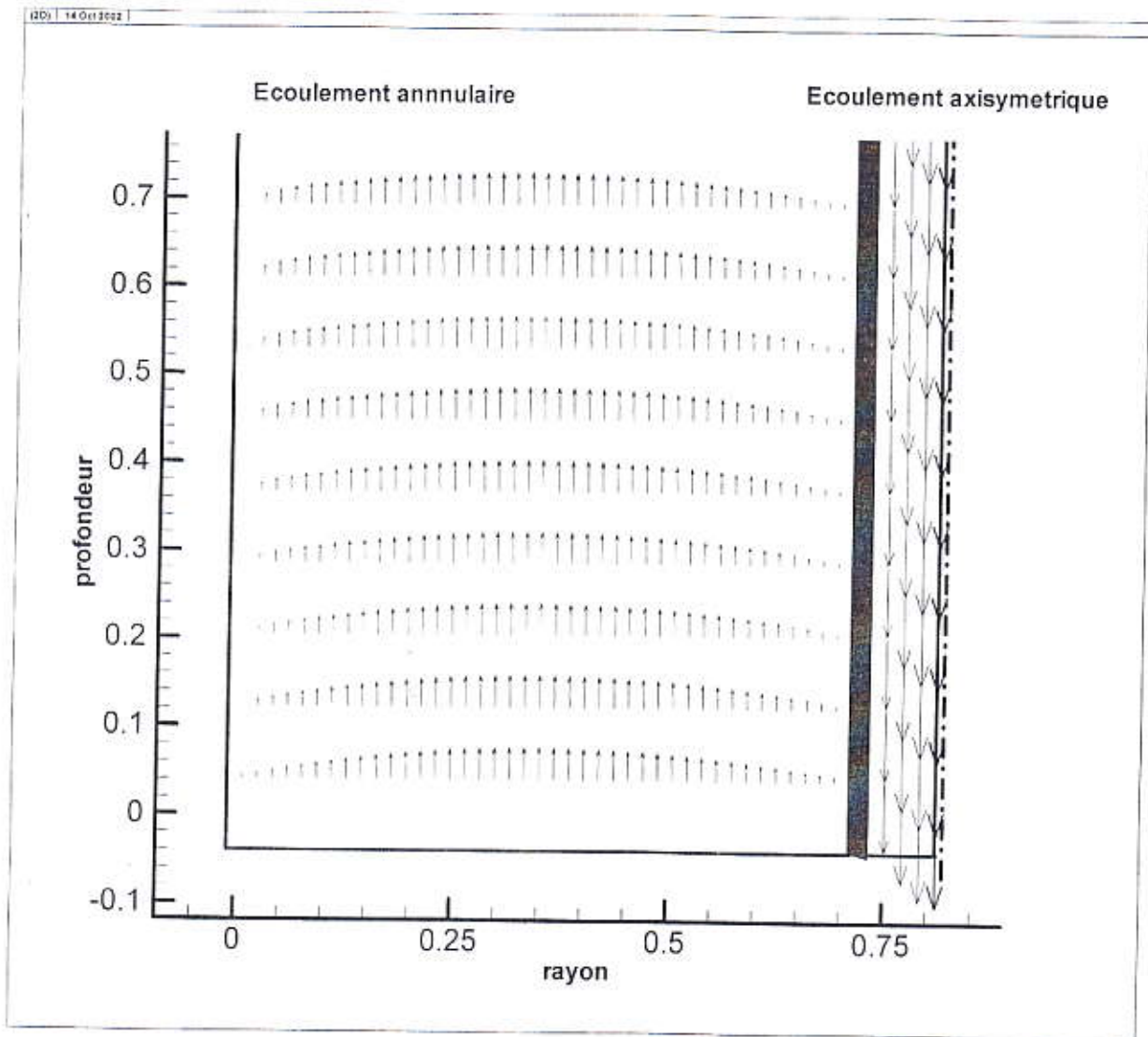


Figure 26 : écoulements contre-courants

Le rapport des diamètres :	$d / H_{tot} = 0.10$
Nombre des nœuds annulaires :	$n_{anu} = 40$
Nombre des nœuds axisymétriques :	$n_{axi} = 10$
Nombre d'itérations :	$n_{iter} = 1500$
Le nombre de Reynolds annulaire :	$Re_{anu} = 100$
Le nombre de Reynolds axisymétrique :	$Re_{axi} = 50$

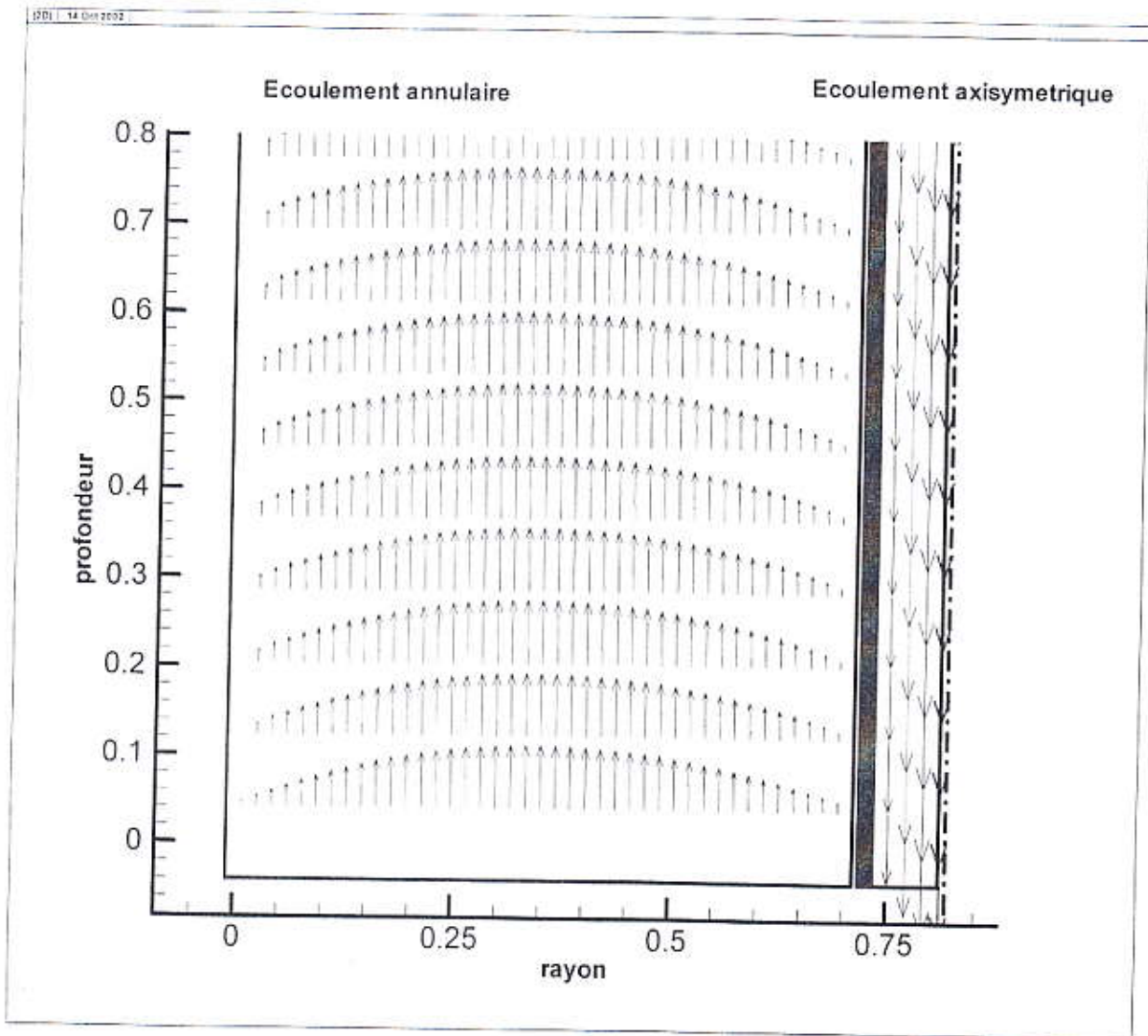


Figure 27 : écoulements contre-courants

Le rapport des diamètres :	$d / H_{tot} = 0.10$
Nombre des nœuds annulaires :	$nanu = 40$
Nombre des nœuds axisymétriques :	$naxi = 10$
Nombre d'itérations :	$niter = 1500$
Le nombre de Reynolds annulaire :	$Reanu = 200$
Le nombre de Reynolds axisymétrique :	$Reaxi = 50$

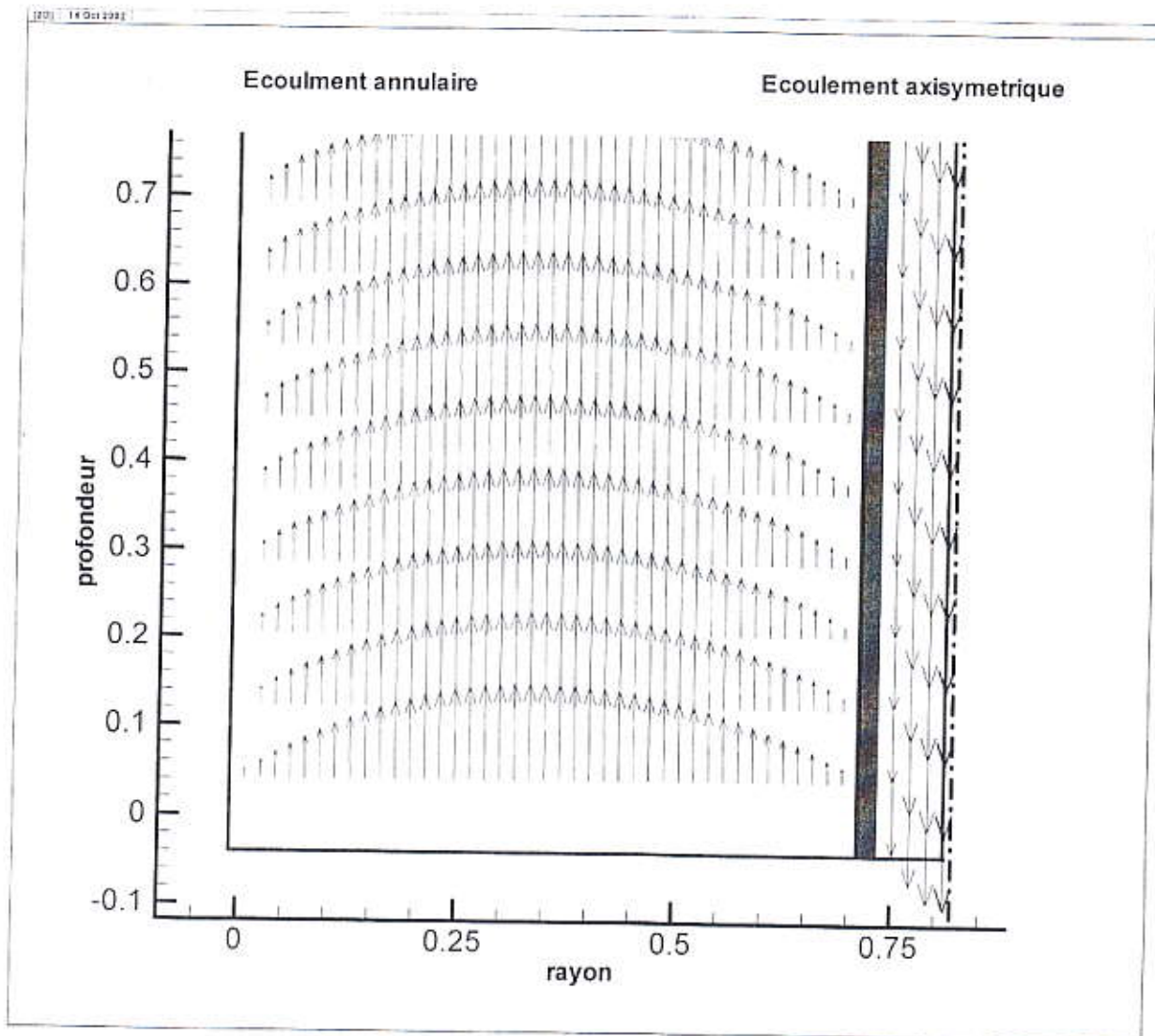


Figure 28 : écoulements contre-courants

Le rapport des diamètres :	$d / H_{tot} = 0.10$
Nombre des nœuds annulaires :	$n_{anu} = 40$
Nombre des nœuds axisymétriques :	$n_{axi} = 10$
Nombre d'itérations :	$n_{iter} = 1500$
Le nombre de Reynolds annulaire :	$Re_{anu} = 300$
Le nombre de Reynolds axisymétrique :	$Re_{axi} = 50$



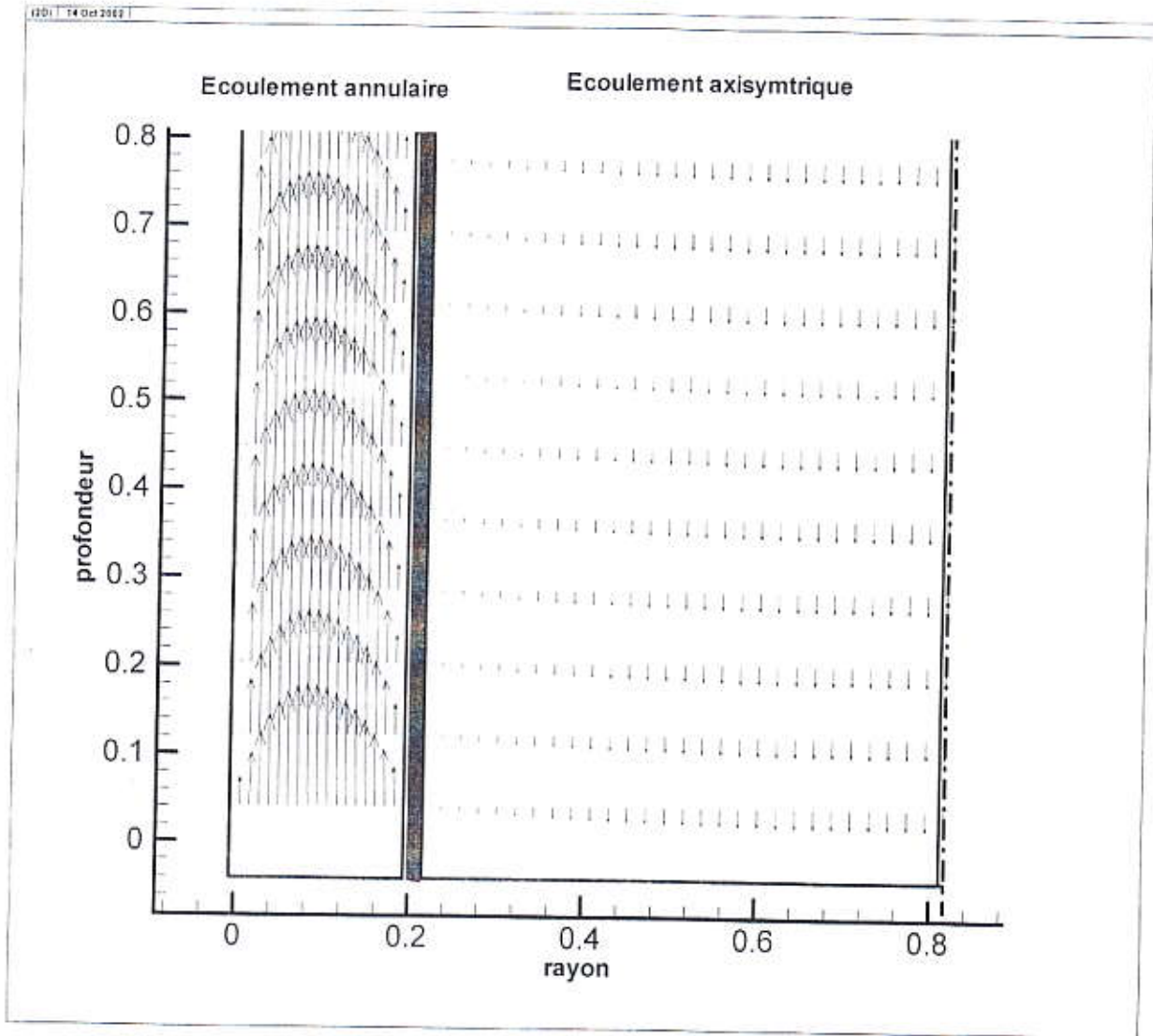


Figure 29 : écoulements contre-courants

Le rapport des diamètres :	$d / H_{tot} = 0.75$
Nombre des nœuds annulaires :	$nanu = 40$
Nombre des nœuds axisymétriques :	$naxi = 10$
Nombre d'itérations :	$niter = 1500$
Le nombre de Reynolds annulaire :	$Reanu = 100$
Le nombre de Reynolds axisymétrique :	$Reaxi = 50$

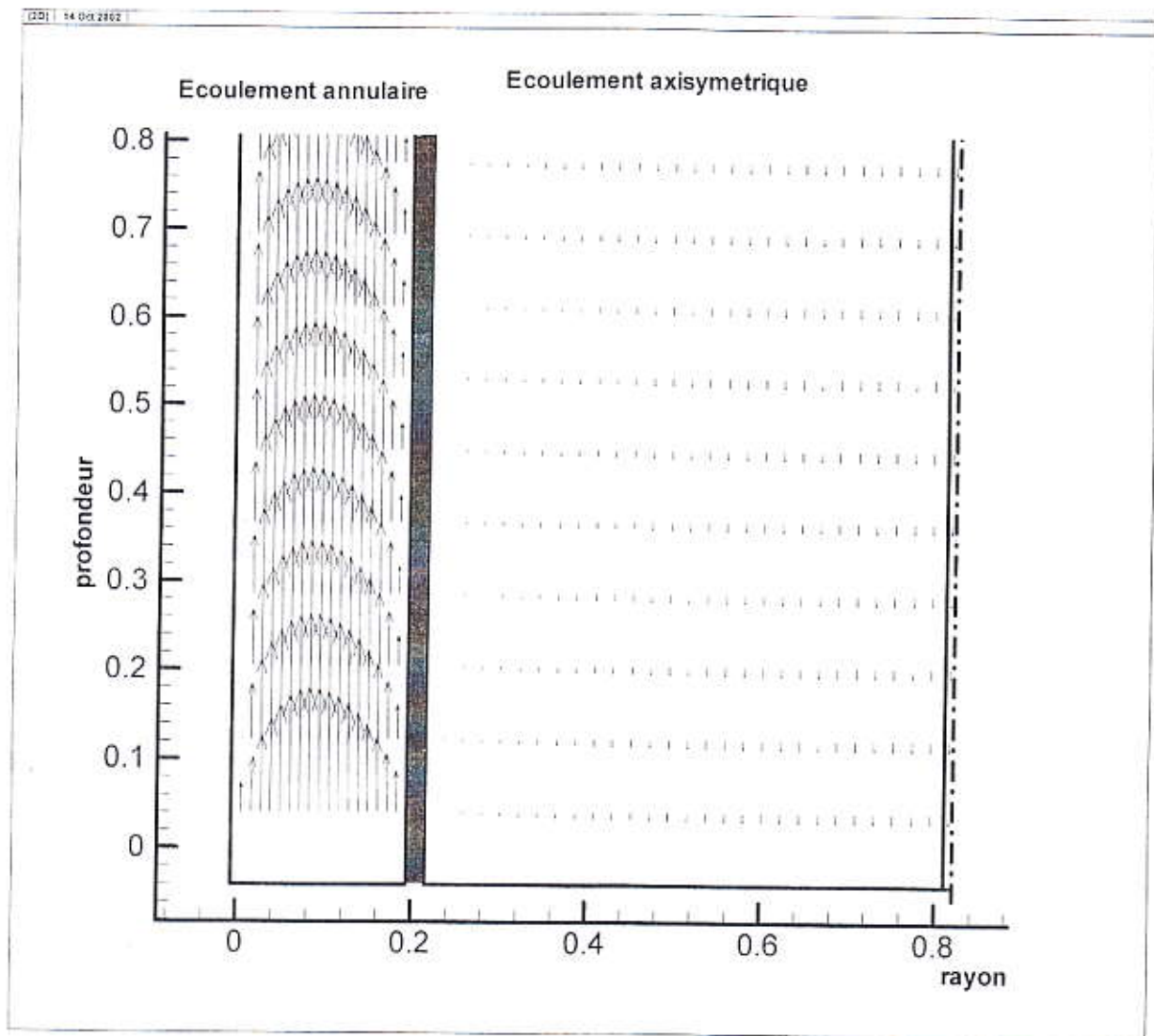


Figure 30 : écoulements contre-courants

Le rapport des diamètres :	$d / H_{tot} = 0.75$
Nombre des nœuds annulaires :	$n_{anu} = 40$
Nombre des nœuds axisymétriques :	$n_{axi} = 10$
Nombre d'itérations :	$n_{iter} = 1500$
Le nombre de Reynolds annulaire :	$Re_{anu} = 200$
Le nombre de Reynolds axisymétrique :	$Re_{axi} = 50$

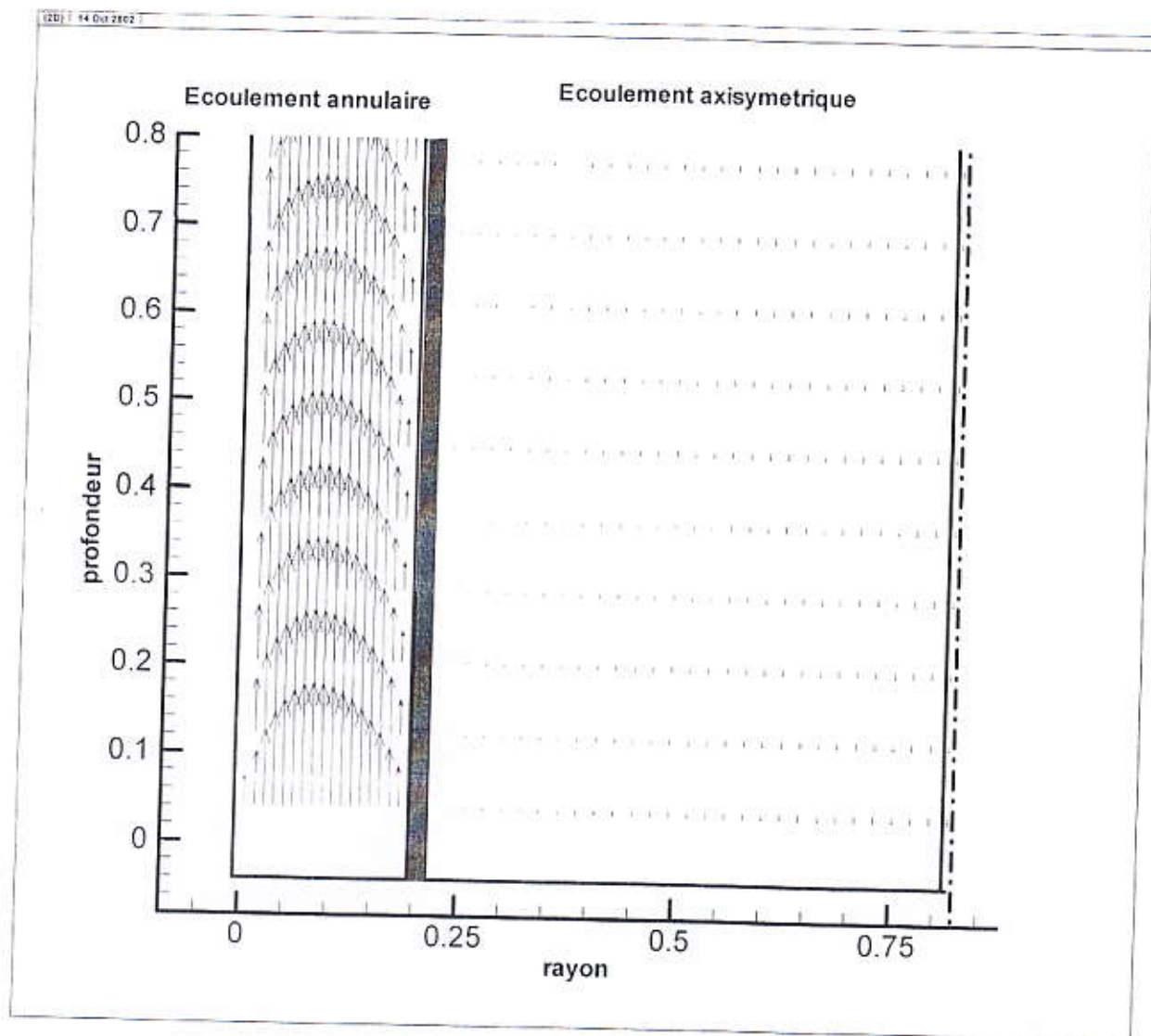


Figure 31 : écoulements contre-courants

Le rapport des diamètres :	$d / H_{tot} = 0.75$
Nombre des nœuds annulaires :	$n_{anu} = 40$
Nombre des nœuds axisymétriques :	$n_{axi} = 10$
Nombre d'itérations :	$n_{iter} = 1500$
Le nombre de Reynolds annulaire :	$Re_{anu} = 300$
Le nombre de Reynolds axisymétrique :	$Re_{axi} = 50$

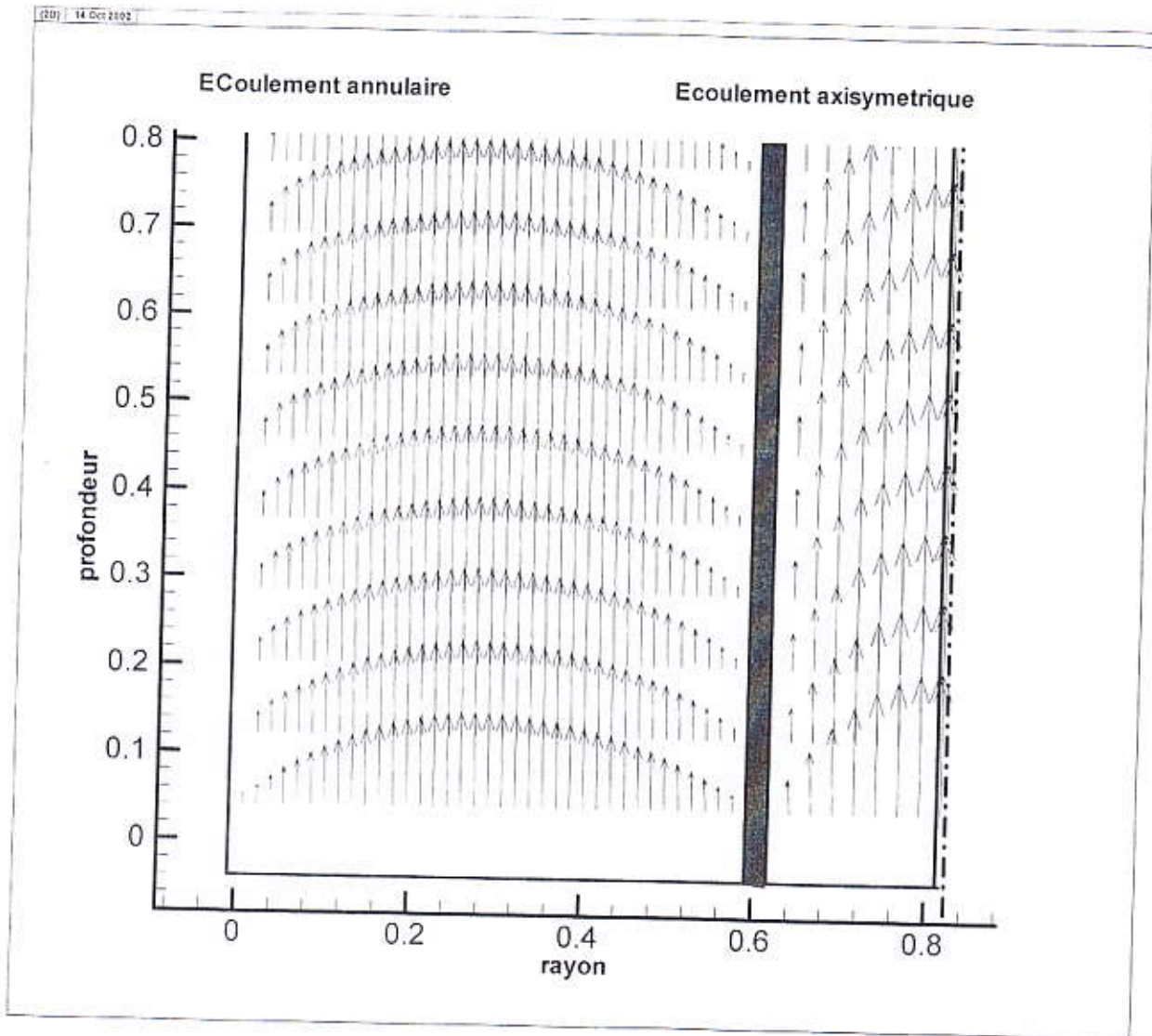


Figure 32: écoulements co-courants

Le rapport des diamètres :	$d/H_{tot} = 0.25$
Nombre des nœuds annulaires :	$n_{anu} = 40$
Nombre des nœuds axisymétriques :	$n_{axi} = 10$
Nombre d'itérations :	$n_{iter} = 1500$
Le nombre de Reynolds annulaire :	$Re_{anu} = 100$
Le nombre de Reynolds axisymétrique :	$Re_{axi} = 50$



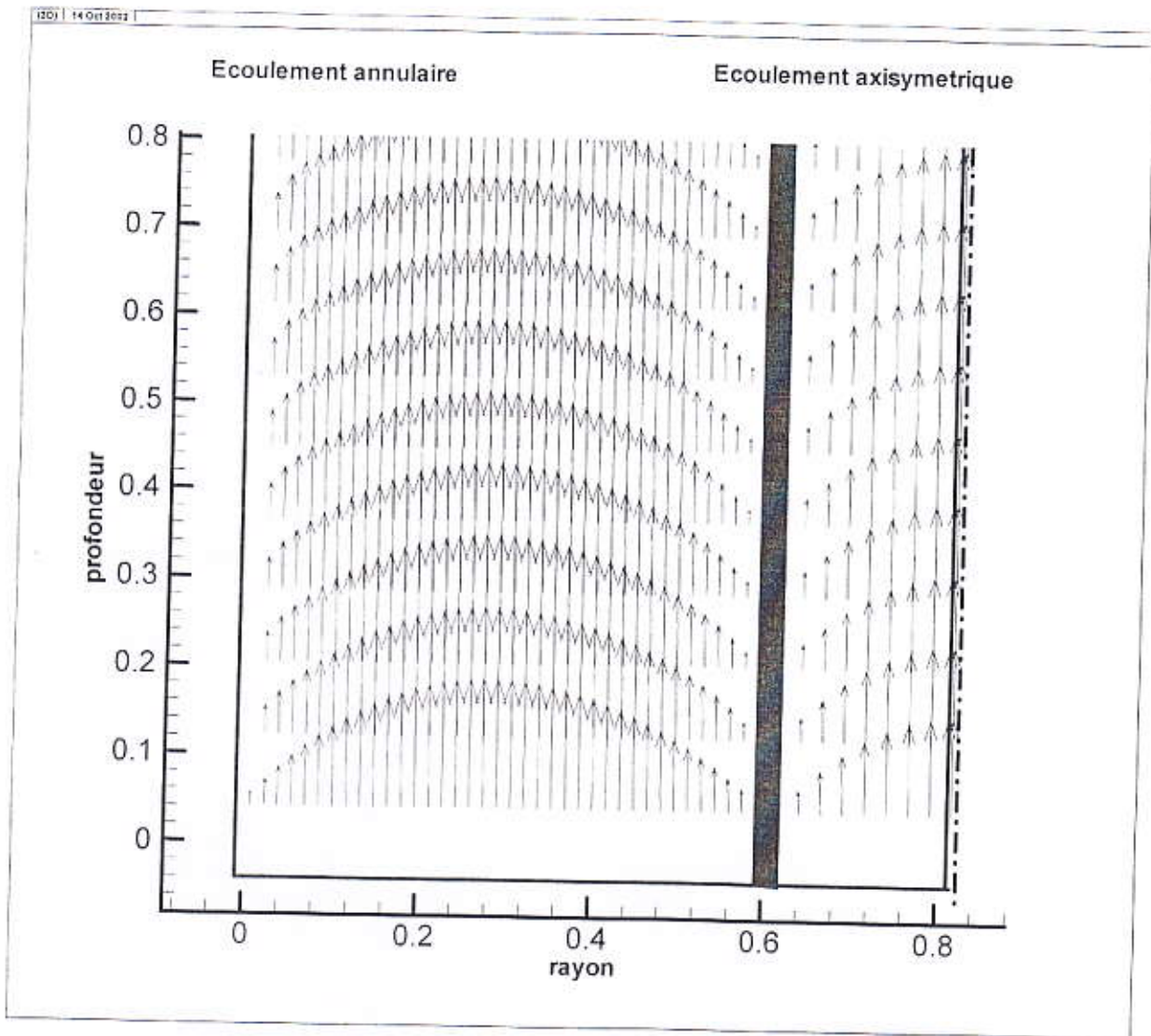


Figure 33 : écoulements co-courants

Le rapport des diamètres :	$d/H_{tot} = 0.25$
Nombre des nœuds annulaires :	$n_{anu} = 40$
Nombre des nœuds axisymétriques :	$n_{axi} = 10$
Nombre d'itérations :	$n_{iter} = 1500$
Le nombre de Reynolds annulaire :	$Re_{anu} = 200$
Le nombre de Reynolds axisymétrique :	$Re_{axi} = 50$

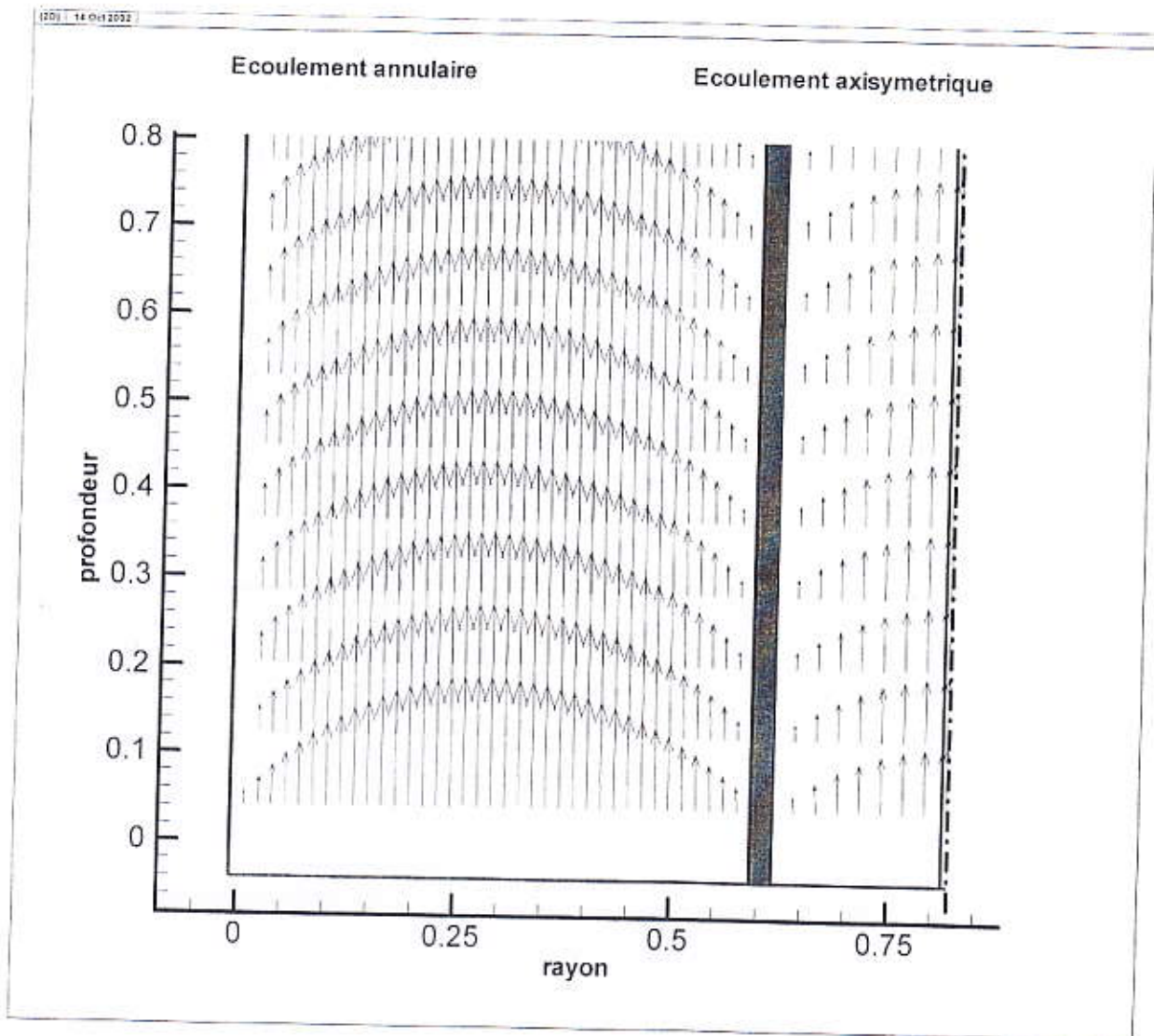


Figure 34 : écoulements co-courants

Le rapport des diamètres :	$d/H_{tot} = 0.25$
Nombre des nœuds annulaires :	$n_{anu} = 40$
Nombre des nœuds axisymétriques :	$n_{axi} = 10$
Nombre d'itérations :	$n_{iter} = 1500$
Le nombre de Reynolds annulaire :	$Re_{anu} = 300$
Le nombre de Reynolds axisymétrique :	$Re_{axi} = 50$

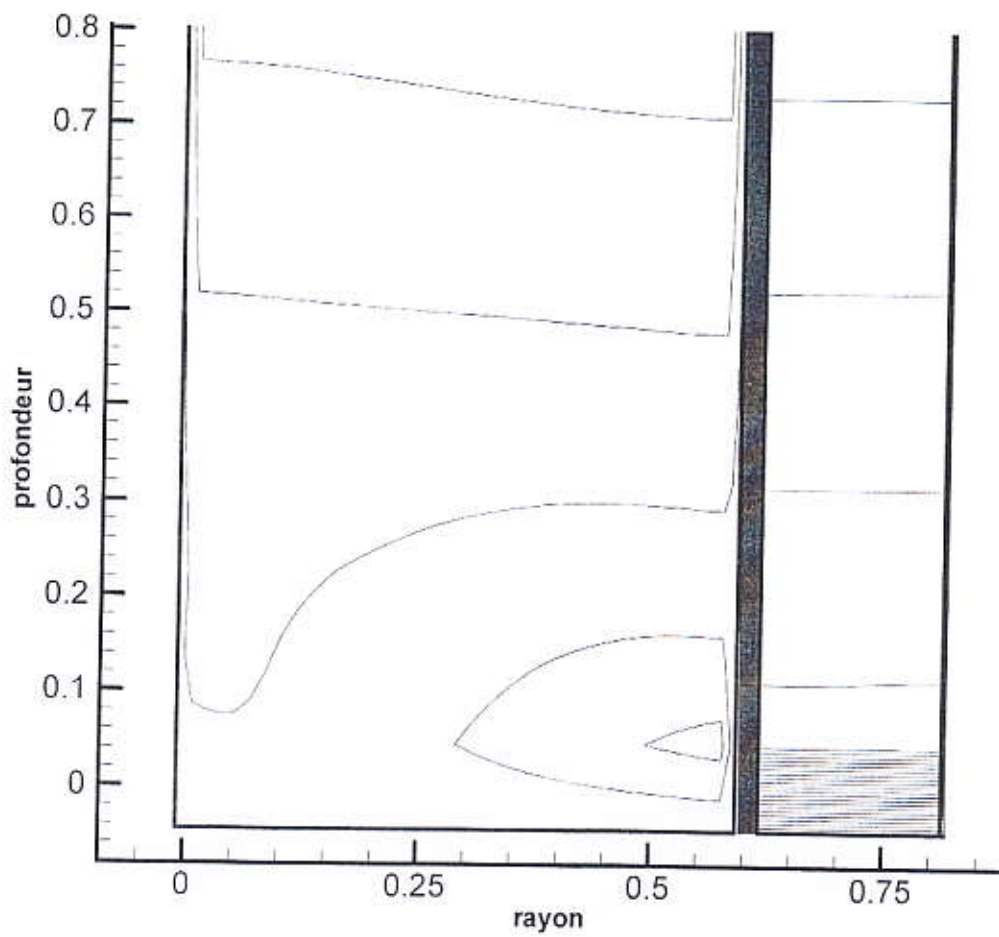


Figure 35 : la répartition de la pression  
 - Entrée annulaire  
 - Sortie axisymétrique

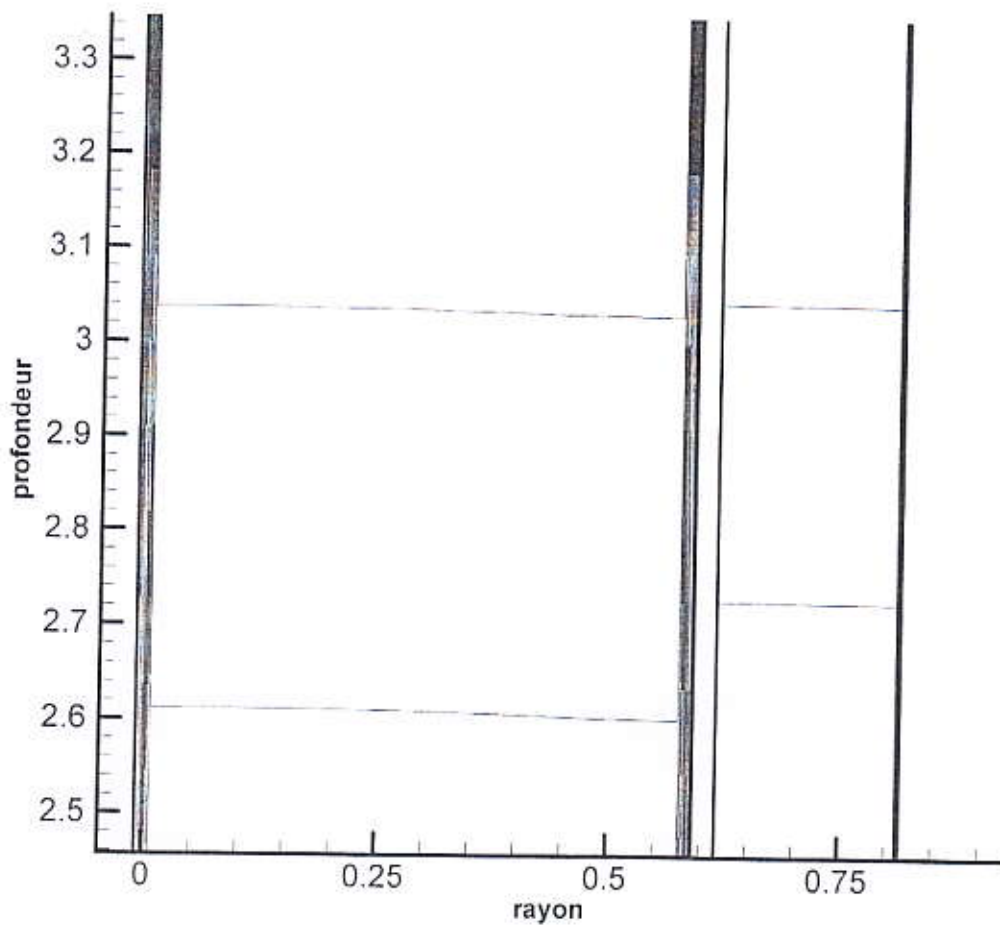


Figure 36 : la répartition de la pression le long des conduites



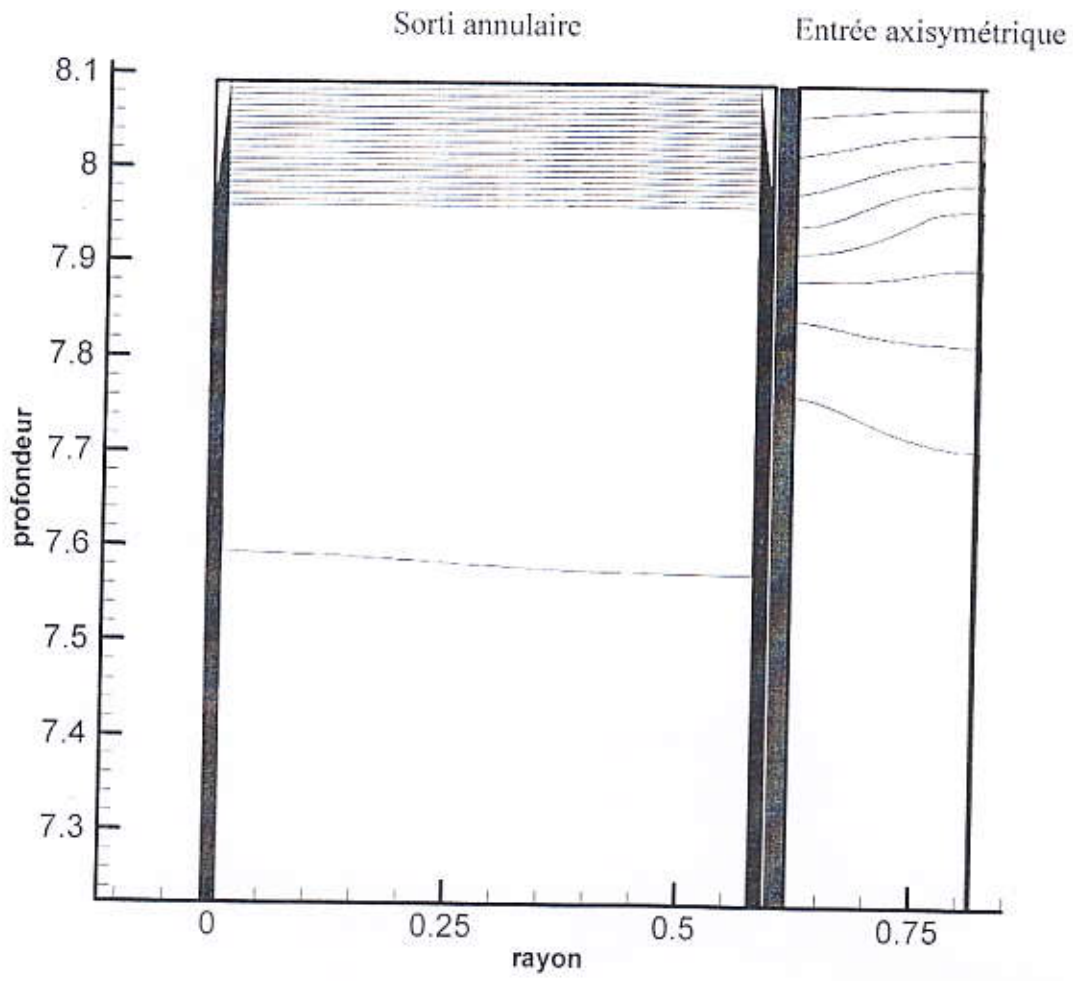


Figure 37 : la répartition de la pression  
 - sortie annulaire.  
 - entrée axisymétrique.

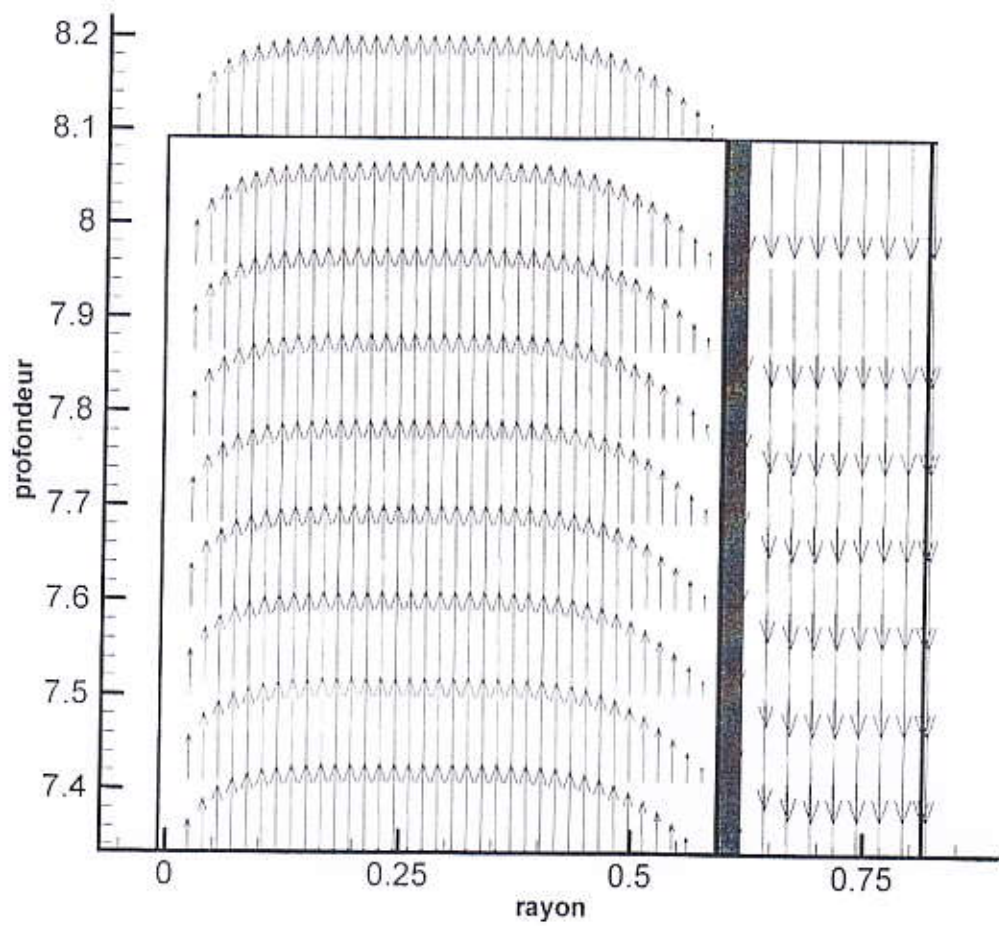


Figure 38 : profil à l'entrée axisymétrique uniforme et profil à la sortie annulaire qui est devenu parabolique.

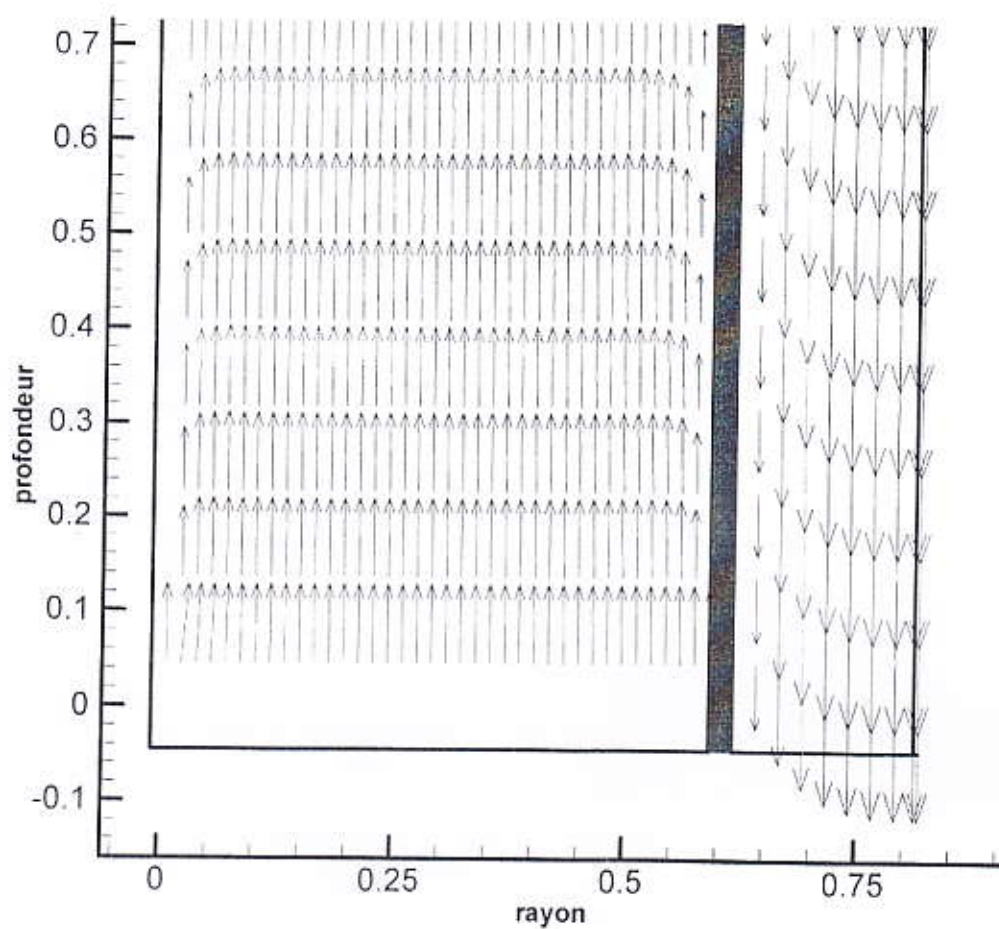


Figure 39 : profil à l'entrée annulaire uniforme et profil axisymétrique à la sortie qui est devenu parabolique.

## Conclusion

La modélisation des problèmes des écoulements axisymétriques verticales conduit à des équations en général elliptiques, et d'après l'étude de ce travail, on conclut que les paramètres agissant fortement sur la forme de l'écoulement sont le nombre de Reynolds et le rapport des diamètres ( $d/h_{tot}$ ).

On peut aussi tirer l'importance des plusieurs paramètres résultants de ce travail, tel que l'optimisation de la longueur efficace pour que l'écoulement devient développé et les profils des vitesses prennent leur forme parabolique.

Les résultats numériques auxquels nous avons abouti comme l'influence de la taille de maillage sur l'exactitude des résultats et l'influence de la viscosité des fluides sur les profils des vitesses, sont très satisfaisants et confirment la validité de tout le travail effectué (équations, simplification, conditions aux limites, discrétisation, résolution numérique, et programmation).

Le programme que nous avons établi est général et peut être adopté à tout phénomènes similaires.

Finalement, nous tenons à mentionner que l'hypothèse de stationnarité a borné le travail et que l'instationnarité s'avère plus intéressante ; et fait chemin à des études plus élaborées.



## Références

- [1] M.Hug : " mécanique des fluides appliquée " editions EYROLLES 1975
- [2] M.Damou : " mécanique des fluids " , OPU
- [3] Y.Demagh, Y.Laala, A.Bendaas : " étude numérique des champs dynamiques et thermiques dans un cylindre poreux vertical " , mémoire de fin d'étude d'ingénieur , université de Batna 1992.
- [4] A. Bici : " simulation des écoulements laminaires axisymétriques avec un changement brusque de section " , mémoire de fin d'étude d'ingénieur , université de Ouargla 2000.