



**UNIVERSITE KASDI MERBAH
OUARGLA
FACULTE DES SCIENCES
ET SCIENCES DE L'INGENIEUR**

N° d'ordre : ...
N° de série : ...

DEPARTEMENT DE MECANIQUE ET ELECTRONIQUE

Mémoire
Présenté pour l'obtention du diplôme de

MAGISTERE

**Spécialité : Génie Mécanique
Option : Thermo-énergétique**

Présenté par :
DRID MOHAMED MEBROUK

Thème
**Valorisation de l'énergie géothermique
et étude des formes de conversion**

Soutenu publiquement le : 28 / 06 / 2008
Devant le jury composé de

| | | |
|-------------------------|---|-------------------|
| BOUZID Nouredine | Maître de Conférences (Université de Kasdi Merbah OUARGLA) | Président |
| SAOULI Salah | Professeur (Université de Kasdi Merbah OUARGLA) | Examineur |
| BENMOUSSA Hocine | Professeur (Université de El-Hadj Lakhdar BATNA) | Examineur |
| SETTOU Nouredine | Professeur (Université de Kasdi Merbah OUARGLA) | Rapporteur |

Remerciements

A la fin de ce modeste travail j'ai réalisé que je n'ai pas l'accomplir que grâce à la contribution d'un grand nombre de personnes, et que quoi que je dise, je ne pourrai jamais tous autant les remercier.

Après cela, je remercie profondément mon directeur de mémoire Monsieur Pr : SETTOU Nourddine, qui je tiens à lui exprimer mes sincères reconnaissances pour me faire part de son expérience.

Un remerciement chaleureux est adressé à Monsieur BENMOUSSA Hocine, Professeur de l'université de Batna, pour l'intérêt qu'il a bien voulu porter à ce travail en acceptant de l'examiner et d'être membre du jury de ce mémoire.

Mes vifs remerciements s'adressent également à Monsieur SAOULI Salah, Professeur à l'université de Ouargla, Monsieur BOUZID Noureddine, Maître de conférences à l'université de Ouargla, pour avoir accepté de faire partie du jury et pour leur intérêt à mon travail.

Je remercie aussi Monsieur Pr : Z.Nemouchi qui donné le goût de la mécanique des fluides.

Et j'exprime aussi ma gratitude à mes amis H.BELAHIA et B.NEGROU ma gratitude pour leur aides durant la réalisation de ce travail.

Nous sommes profondément reconnaissance à la direction de l'institut de Génie Mécanique de l'université de Ouargla y compris tous nos enseignants pour leur collaboration et leur aide, au grand merci aussi Monsieur T.Guermit M.A.C.C à l'Université de Ouargla.

Sans oublier toute personne ayant participé de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire.

Nous prions *ALLAH* de les remercier tous éternellement.

DÉDICACES

A ma mère,

A mon père,

Pour laide si efficace qu'ils ma apporter.

A tout mes frères et sœurs,

A tout mes amis,

Et tout ma famille,

A tout mes enseignants,

Et en particulier à une personne qui m'est très chère et qui a toujours su m'aider

Je dédie ce modeste travail ...

Table des matières

| | |
|-------------------------|------|
| Remerciements | ii |
| Dédicaces..... | iii |
| Table des matières..... | iv |
| Liste des figures..... | vii |
| Liste des tableaux..... | viii |
| Nomenclature | ix |

Chapitre I: L'énergie géothermique

| | |
|---|----|
| I.1) Introduction | 01 |
| I.2) La géothermie | 01 |
| I.2.1- principe de la géothermie | 02 |
| I.2.2- flux géothermique..... | 02 |
| I.2.3- Le gradient géothermique..... | 03 |
| I.2.4- Estimation des conductivités thermiques des roches | 04 |
| I.2.5- Evaluation du flux de chaleur..... | 05 |
| I.2.6- Principaux types de ressources géothermiques | 06 |
| I.2.6.1- Réservoirs de vapeur | 06 |
| I.2.6.2- Réservoirs d'eau chaude | 07 |
| I.2.6.3- La géothermie des roches fracturées | 07 |
| I.2.7- les ressources en énergie géothermique | 07 |
| I.2.7.1- Ressources de faibles profondeurs | 07 |
| I.2.7.2- Ressources des grandes profondeurs | 07 |
| I.2.8- Domaines d'application et importance de la géothermie | 09 |
| I.2.9- L'exploitation de la géothermie dans le monde | 09 |
| I.2.10- les potentialités de la région de Ouargla en énergie géothermique | 10 |
| I.2.10.1- L'énergie géothermique | 11 |
| I.2.10.2- La géothermie basse énergie | 11 |
| I.2.11- Géothermie Économie..... | 12 |
| I.2.12- Exemple | 12 |

Chapitre II: Formulation mathématique

| | |
|--|----|
| II.1- Introduction | 14 |
| II.2- Equations de base | 14 |
| II.2.1- Equation de Continuité..... | 14 |
| II.2.2- Équation de quantité de mouvement..... | 15 |
| II.2.3- Equation de conservation de l'énergie..... | 18 |
| II.3- Système de coordonnées..... | 18 |
| II.4- Hypothèses simplificatrices | 18 |
| II.5- Equations simplifiées et transformées en coordonnées cylindriques..... | 19 |
| II.5-1- Equation de continuité | 19 |
| II.5-2- Equation de conservation de quantité de mouvement | 19 |
| II.5.3- Equation de conservation de l'énergie..... | 20 |
| II.6- Equations de mouvement pour un écoulement turbulent | 20 |
| II.7- Les équations adimensionnées | 21 |

| | |
|---|-----------|
| II.7.1-Transformation des équations | 22 |
| II.8-Application hydrodynamique | 25 |
| II.8.1-Propriétés physiques du fluide en présence | 25 |
| II.8.2- Domaine de l'écoulement..... | 25 |
| II.8.2.1-Géométrie..... | 25 |
| II.8.2.2-Volume d'étude et système de coordonnées utilisé | 25 |
| II.8.2.3-Maillage | 26 |
| II.8.3-Conditions initiales | 26 |
| II.8.3.1-Les vitesses | 27 |
| II.8.3.2-La pression | 27 |
| II.8.4-Conditions aux limites | 27 |
| II.8.4.1-Conditions aux limites dynamiques | 27 |
| II.8.4.1.1-Condition à la limite entrée | 27 |
| II.8.4.1.2-Condition à la limite sortie | 27 |
| II.8.4.2- Conditions aux limites thermiques..... | 28 |
| II.8.4.2.1-Conditions à la limite entrée | 28 |
| II.8.4.2.2- Condition à la limite sortie | 29 |
| II.8.4.2.3-Conditions aux parois..... | 29 |

Chapitre III : La résolution numérique par la méthode des volumes finis

| | |
|--|-----------|
| III.1-Introduction | 31 |
| III.2-Méthode des volumes finis | 32 |
| III.2.1-Principe de la méthode | 32 |
| III.2.2- Calcul des surfaces | 34 |
| III.2.3- Application à l'intégration d'une équation de convection-diffusion | 35 |
| III.2.4- Discrétisation spatiale..... | 35 |
| III.2.4.1- Le terme de diffusion | 35 |
| III.2.4.2-Le terme de convection | 37 |
| III.2.4.3-Schémas de discrétisation des termes convectifs..... | 38 |
| III.2.4.3.1- Schéma aux différences centrées CDS | 38 |
| III.2.4.3.2- Schéma Upwind UDS1 | 39 |
| III.2.4.3.3 Schéma hybride..... | 40 |
| III.2.4.3.4- Schéma de loi de puissance | 41 |
| III.2.4.4- Conclusion sur les schémas de discrétisation du terme de convection | 41 |
| III.2.5-Le terme source..... | 41 |
| III.2.6- Résolution par méthode de balayage | 43 |
| III.2.7-Algorithmme SIMPLE | 44 |
| III.2.7.1-Introduction..... | 44 |
| III.2.7.2- Calcul des champs de vitesses | 44 |
| III.2.7.3- Maintien de la condition d'incompressibilité..... | 46 |
| III.2.7.3.1- Equation de correction de la vitesse | 46 |
| III.2.7.3.2- Equation de correction de la pression..... | 46 |
| III.2.7.4- Séquence des opérations | 47 |
| III.2.8- Algorithmme SIMPLE-R (SIMPLE Revised) | 48 |
| III.2.8.1- Principe de l'algorithme | 48 |
| III.2.8.2- Equation de la pression | 48 |
| III.2.8.3- Séquence des opérations..... | 49 |

| | |
|--|-----------|
| III.2.9- Intégration des conditions aux limites | 49 |
| III.2.9.1- Conditions de paroi..... | 50 |
| III.2.9.2- Condition d'entrée : ($\Phi^D = U, V, T$) | 51 |
| III.2.9.3- Condition de symétrie : ($\Phi^N = U, V, T$) | 51 |
| III.2.10- Stabilité et convergence | 52 |
| III.2.10.1- Nature de la procédure d'itération et technique de sous- relaxatio | 52 |
| III.2.10.2- Critères de convergence..... | 53 |
| III.3- Description générale du programme..... | 53 |

Chapitre IV: Validation du programme et analyse des résultats

| | |
|---|-----------|
| IV.1- Introduction | 55 |
| IV.2-Validation du programme | 56 |
| IV.3- Résultats et discussions | 57 |
| IV.3.1-Optimisation du maillage | 57 |
| IV.3.2-Influence du nombre de Reynolds sur les résidus | 59 |
| IV.3.3-Influence du nombre de Péclet | 60 |
| IV.3.3.1-Premier cas | 60 |
| IV.3.3.2-Deuxième cas..... | 63 |
| IV.3.4-Influence de la géométrie | 65 |
| IV.3.4.1-Premier cas | 65 |
| IV.3.4.2-Deuxième cas | 67 |
| IV.4-Une application..... | 68 |
| IV.4.1- Machines frigorifiques à absorption..... | 68 |
| IV.4.2 -Représentation schématique et principe de fonctionnement | 68 |
| IV.4.3 - Machine à absorption avec $\text{NH}_3\text{-H}_2\text{O}$ | 69 |
| IV.4.3.1- Description | 69 |
| IV.4.3.2- Fonctionnement | 70 |
| IV.4.4 - Avantages et inconvénients | 71 |
| IV.4.5 - Amélioration du cycle | 71 |
| IV.4.6 - Calcul thermique de l'installation | 73 |
| IV.4.6.1-Facteur de circulation | 73 |
| IV.4.6.2- Le calcul thermique | 73 |
| IV.4.6.3- Le calcul des flux échangés | 74 |
| IV.4.7- L'équilibre énergétique | 75 |
| IV.4.8- Le coefficient de performance de l'installation | 75 |
| VI.4.9- Exemple de calcul d'un cycle à simple étage | 76 |
| Conclusion générale | 78 |
| Bibliographie | 79 |

Liste des figures

Chapitre I: L'Energie Géothermique :

| | |
|--|----|
| <i>Figure I.1</i> : Concept du gradient géothermique Séquence des formations (A à D) ayant des conductivités différentes | 04 |
|--|----|

Chapitre II: Formulation Mathématique :

| | |
|---|----|
| <i>Figure II.1</i> : Représentation des flux de fluide | 14 |
| <i>Figure II.2</i> : Action à la surface de l'élément fluide suivant $o\bar{x}$ | 16 |
| <i>Figure II.3</i> : Schématisation du maillage utilisé..... | 26 |
| <i>Figure II.3</i> : Conditions aux limites dynamiques | 28 |
| <i>Figure II.4</i> : Condition aux limites thermique | 30 |

Chapitre III : La Résolution Numérique Par La Méthode Des Volumes Finis :

| | |
|--|----|
| <i>Figure III. 1</i> : Volumes de contrôle sur r | 33 |
| <i>Figure III. 2</i> : Volumes de contrôle sur z | 33 |
| <i>Figure III. 3</i> : Volumes de contrôle sur le plan transversal | 33 |
| <i>Figure III. 4</i> : Volume de contrôle dans l'espace | 34 |
| <i>Figure III. 5</i> : Approximation linéaire | 35 |
| <i>Figure III.6</i> : Localisation décalée pour U et V | 45 |
| <i>Figure III.7</i> : Intégration des conditions aux limites | 50 |
| <i>Figure III. 8</i> : Organigramme du programme | 54 |

Chapitre IV: Validation du programme et Analyse des résultats :

| | |
|---|----|
| <i>Figure IV.1</i> : Schéma d'écoulement dans un puits injecteur producteur | 55 |
| <i>Figure IV.2</i> : Comparaison des profils de vitesse avec $Re = 10^6$ | 56 |
| <i>Figure IV.3</i> : Comparaison des profils de vitesse avec $Re = 100$ | 56 |
| <i>Figure IV.4</i> : Optimisation du maillage | 58 |
| <i>Figure IV.5</i> : Influence du nombre de Reynolds sur le résidu de la vitesse suivant oz | 59 |
| <i>Figure IV.6</i> : Influence du nombre de Reynolds sur le profil de la température avec $Pr = 1$ dans le premier cas | 61 |
| <i>Figure IV.7</i> : Influence du nombre de Prandtl sur le profil de la température avec $Re = 10^5$ dans le premier cas | 62 |
| <i>Figure IV.8</i> : Influence du nombre de Reynolds sur le profil de la température avec $Pr = 1$ dans le Deuxième cas | 63 |
| <i>Figure IV.9</i> : Influence du nombre de Prandtl sur le profil de la température avec $Re = 10^5$ dans le Deuxième cas | 64 |
| <i>Figure IV.10</i> : Influence de la géométrie sur le champ de la température avec $Pr = 1$ et $Re = 10^5$ dans le premier cas | 66 |
| <i>Figure IV.11</i> : Influence de la géométrie sur le champ de la température avec $Pr = 1$ et $Re = 10^5$ dans le deuxième cas étage | 67 |
| <i>Figure IV.12</i> : Machine à absorption simple étage par la superposition de deux cycles de Rankine d'une machine thermique et PAC étage | 68 |
| <i>Figure IV.13</i> : Machine à absorption NH_3-H_2O | 70 |
| <i>Figure IV.14</i> : Description schématique du cycle à absorption à simple étage | 72 |

List des tableaux

Chapitre I: L'Energie Géothermique :

| | |
|---|----|
| <i>Tableau I.1:</i> Conductibilité thermique de différents types de Roche | 06 |
| <i>Tableau I.2 :</i> évolution de capacité de production de l'énergie électrique a travers le monde | 9 |
| <i>Tableau I.3 :</i> Classement des pays produit l'énergie électrique par la géothermie | 10 |

Chapitre II: Formulation Mathématique :

Chapitre III : La Résolution Numérique Par La Méthode Des Volumes Finis :

| | |
|---|----|
| <i>Tableau III.1 :</i> Termes des équations à discrétiser | 32 |
|---|----|

Chapitre IV: Validation du programme et Analyse des résultats :

| | |
|---|----|
| <i>Tableau IV.1 :</i> comparaison de l'erreur relative de Fluent et le code présent | 57 |
| <i>Tableau IV.2 :</i> Ensemble de données pour l'optimisation du maillage | 57 |
| <i>Tableau IV.3:</i> Ensemble de données pour l'évaluation du schéma Upwind | 59 |
| <i>Tableau IV.4:</i> Ensemble de données pour évaluer l'influence du nombre de Péclet dans le premier cas | 60 |
| <i>Tableau IV.5:</i> Ensemble de données pour évaluer l'influence du nombre de Péclet dans le deuxième cas | 63 |
| <i>Tableau IV.6 :</i> Influence du nombre de Reynolds et Prandtl sur la température moyenne à la sortie | 65 |
| <i>Tableau IV.7:</i> Ensemble de données pour évaluer l'influence de la géométrie dans le premier cas | 65 |
| <i>Tableau IV.8:</i> Ensemble de données pour évaluer l'influence de la géométrie dans le deuxième cas | 67 |
| <i>Tableau IV.9 :</i> L'équilibre énergétique pour une machine à simple étage | 75 |
| <i>Tableau IV.10 :</i> Résultats de calcul d'un cycle à simple étage | 76 |

Nomenclature

| | | |
|--|---|-------------------|
| λ | Conductivité thermique | (W/m.K) |
| g_G | Gradient géothermique | ($^{\circ}C/m$) |
| q_G | Flux géothermique | (W/ m^2) |
| T | Température | (K) |
| T_s | Température moyenne à la surface du sol | (K) |
| R_{eij} | Résistivité thermique | (m.K/ W) |
| F_x, F_y, F_z | Forces de volume | (N) |
| F_{ext} | Forces extérieures | (N) |
| m | Masse d'une particule fluide | (Kg) |
| γ_x | Accélération de la pesanteur | (m/ s^2) |
| f | Effort à distance par unité de masse | (N/Kg) |
| ν | Viscosité cinématique | |
| μ | Viscosité dynamique | (micropois) |
| ρ | Densité | (Kg/ m^3) |
| P | Pression | (N/ m^2) |
| $\tau_{yx}, \tau_{zx}, \tau_{xy}, \tau_{zy}$ | Les contraintes tangentielles | (N/ m^2) |
| $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ | Les contraintes normales | (N/ m^2) |
| \vec{V} | Vecteur vitesse | (m/s) |
| U | Composante de la vitesse suivant la direction x | (m/s) |
| V | Composante de la vitesse suivant la direction y | (m/s) |
| W | Composante de la vitesse suivant la direction Z | (m/s) |
| C_p | Chaleur massique du fluide. | (J/Kg.K) |
| β | Coefficient d'expansion thermique | (-) |
| q | Source de chaleur interne | (K) |
| Φ | Fonction de dissipation visqueuse | |
| ε_{ij} | Tenseur de déformation | (-) |
| ρ^+ | Masse volumique adimensionnelle | (-) |
| μ^+ | Viscosité dynamique adimensionnelle | (-) |
| V^+ | Vitesse adimensionnelle suivant la direction y | (-) |
| U^+ | Vitesse adimensionnelle suivant la direction x | (-) |
| T^+ | Température adimensionnelle | (-) |
| P^+ | Pression adimensionnelle | (-) |
| r^+ | longueur radiale adimensionnelle | (-) |
| z^+ | Longueur longitudinale adimensionnelle | (-) |
| \bar{U} | Vitesse moyenne | (m/s) |
| \bar{P} | Pression moyenne | (bar) |
| \bar{T} | Température moyenne | (K) |
| μ_t | Viscosité turbulente | (micropois) |
| l_m | Longeur de mélange | |
| $Q_{entrée}$ | : Débit d'entrée | (Kg/s) |

| | | |
|----------------|---|--|
| $V_{entrée}$ | Vitesse d'entrée | (m/s) |
| H_f | Epaisseur | (m) |
| H | Enthalpie molaire | (KJ/kmole) |
| h | Enthalpie massique | (KJ/kg) |
| v | Volume massique | (m ³ /Kg) |
| t | Temps | (s) |
| T_p | Température de la paroi | (°C, K) |
| ΔT | Gradient de température | (°C, K) |
| P | Pression | (bar) |
| M | Masse molaire | (kg/kmole) |
| μ | Viscosité dynamique | (micropois) |
| ζ | Concentration massique | (Kg de NH ₃ /kg de mélange) |
| $\Delta \zeta$ | Taux de dégazage | (-) |
| x | Concentration molaire de la phase liquide | (kmole de NH ₃ /kmole de mélange liquide) |
| C_p | Chaleur spécifique à pression constante | (KJ/kg K) |
| m | Masse | (Kg) |
| f_c | Facteur de circulation | (-) |
| W_p | Puissance spécifique de la pompe | (KW/Kg) |
| φ | Flux de chaleur | (KW) |
| q | Flux massique | (KJ/Kg) |
| \dot{m}_g | Débit massique de la vapeur d'ammoniac | (Kg/s) |
| \dot{m}_r | Débit massique de la solution riche | (Kg/s) |
| \dot{m}_p | Débit massique de la solution pauvre | (Kg/s) |
| COP | Coefficient de performance | (-) |
| E | Efficacité de l'échangeur | (-) |
| NUT | Nombre d'unité de transfert | (-) |
| A | Surface d'échange | (m ²) |
| f | Facteur de correction | (-) |
| Re | Nombre de Reynolds | (-) |
| Nu | Nombre de Nusselt | (-) |
| Pr | Nombre de Prandtl | (-) |

Chapitre I

L'énergie géothermique

Chapitre I: L'énergie géothermique

I.1- Introduction:

L'énergie renouvelable est une source d'énergie qui se renouvelle assez rapidement pour être considérée comme inépuisable à l'échelle de l'homme. Les énergies renouvelables sont issues de phénomènes naturels réguliers ou constants provoqués par les astres, principalement le Soleil (rayonnement), mais aussi la Lune (marée) et la Terre (énergie géothermique).

L'énergie géothermique par rapport aux autres énergies renouvelables présente l'avantage de ne pas dépendre des conditions atmosphériques (soleil, pluie, vent). C'est donc une source d'énergie quasi-continue car elle est interrompue uniquement par des opérations de maintenance sur la centrale géothermique ou le réseau de distribution de l'énergie. Les gisements géothermiques ont une durée de vie de plusieurs dizaines d'années.

Nous rattacherons à ce chapitre l'énergie géothermique qui est souvent considérée comme renouvelable ; elle n'est pas dérivée de l'énergie solaire, mais de la chaleur dégagée par la croûte terrestre, grâce aux radioéléments naturels qu'elle contient. Les meilleures perspectives paraissent offertes par les roches sèches et profondes à haute température (au-delà de 150°C) dans lesquelles on fait circuler de l'eau qui sert de caloporteur. On peut alors générer de l'électricité par une turbine. Cette géothermie haute énergie bénéficie du développement des recherches en modélisation des transferts de fluides, ainsi que du suivi géophysique et géochimique des opérations. Elle est aussi une des rares énergies renouvelables exploitables à plein temps [1,2].

Les autres formes de géothermie, la géothermie très basse énergie exploite des réservoirs situés à moins de 100 mètres et dont les eaux ont une température inférieure à 30°C. On l'utilise pour le chauffage et la climatisation, via une pompe à chaleur. La géothermie basse énergie s'appuie, elle, sur des aquifères à des températures comprises entre 30°C et 100°C. On l'exploite dans des réseaux de chaleur pour le chauffage urbain ou dans le cadre de procédés industriels, par exemple.

I.2- La géothermie:

La géothermie (mot issu du grec « géo » = terre et « thermos » = chaud) est la science qui étudie les phénomènes thermiques internes du globe terrestre. C'est aussi l'ensemble des applications techniques qui permettent d'exploiter les sources d'énergie géothermique.

On peut énumérer quatre bonnes raisons en faveur de l'exploitation de l'énergie géothermique:

- La géothermie est une source d'énergie indigène et respectueuse de l'environnement. Elle n'engendre dans l'atmosphère ni substances polluantes, ni dioxyde de carbone et remplace de manière idéale les agents énergétiques fossiles.
- La géothermie est disponible en permanence. Elle ne dépend pas des conditions climatiques (soleil, pluie, vent) des saisons ou des heures de la journée. Les gisements géothermiques ont une durée de vie de plusieurs dizaines d'années.
- Inépuisable à la dimension de l'ère humaine, la géothermie fait partie des énergies renouvelables, donc durable, les besoins de la génération actuelle peuvent être satisfaits sans prêter à ceux des générations futures.
- Les installations géothermiques sont à peine perceptibles en surface. Elles revendiquent un espace minimum près du forage.

- Les seuls impacts environnementaux de cette énergie presque renouvelable concernent le plus souvent le rejet en surface de l'eau résiduaire fortement chargée en sels (quand il n'y a pas réinjection) et les émissions de gaz incondensables, comme l' H_2S qui a une odeur nauséabonde [2].

1.2.1- Principe de la géothermie:

Le principe consiste à extraire l'énergie géothermique contenue dans le sol pour l'utiliser sous forme de chauffage ou pour la transformer en électricité. Il existe un flux géothermique naturel à la surface du globe, mais il est si faible qu'il ne peut être directement capté. En réalité on exploite la chaleur accumulée, stockée dans certaines parties du sous sol (nappes d'eau).

On distingue trois types de géothermie:

- La géothermie privilégiée avec des sources hydrothermales très chaudes, ou forage très profond. C'est la seule forme d'énergie géothermique qui permet de produire de l'électricité à partir de $150^{\circ}C$, soit directement à partir de gisements de vapeur ou d'eau chaude, ou après injection d'eau en profondeur et récupération de chaleur.
- La géothermie de basse énergie : géothermie des nappes profondes (entre quelques centaines et plusieurs milliers de mètres) aux températures situées entre $30^{\circ}C$ et $100^{\circ}C$ principale utilisation : les réseaux de chauffage urbain.
- La géothermie de très basse énergie : géothermie des faibles profondeurs aux niveaux de température compris entre $10^{\circ}C$ et $30^{\circ}C$. principale utilisation : les chauffages et la climatisation.

1.2.2- flux géothermique:

Il n'est pas possible d'observer les processus thermiques qui se déroulent au sein de la croûte terrestre et dans le manteau sous-jacent. Toutefois, grâce à l'étude des dégagements thermiques à la surface de notre planète,

Il y a un flux de chaleur, appelé flux géothermique q_G (W/m^2), à travers la croûte terrestre (continentale et marine) causé par la chaleur transférée du manteau à la base de la croûte terrestre ainsi que par la désintégration des matériaux radioactifs contenus dans la croûte. Le flux géothermique montre le comportement général suivant.

- Le flux diminue avec l'âge géologique à cause de la désintégration du matériel radioactif impliqué.
- Le flux est maximal à la surface de la terre et diminue avec la profondeur à cause de la réduction de la quantité de matériel radioactif sous-jacent.
- Le flux varie géographiquement mais relativement uniforme sur de vastes étendues.

Pour la majorité des problèmes d'intérêt, compte tenu des faibles profondeurs et de l'étendue restreinte des études hydrogéologiques, même régionales, la flux géothermique pourra être considéré constant à la fois en fonction de la profondeur et sur l'ensemble de la région d'étude considérée. Pour les continents, le flux géothermique moyen varie entre $40 mW/m^2$ dans les cratons stables et $70 mW/m^2$ dans les provinces tectoniques tertiaires.

Le flux géothermique est transféré par conduction à travers la croûte terrestre. Pour que ce flux se fasse vers la surface de la terre, ceci implique forcément que la température est plus élevée en profondeur qu'à la surface de la terre. Compte tenu du temps généralement très long pendant lequel le flux géothermique s'est maintenu pratiquement constant dans une région donnée, les conditions de transfert de chaleur du flux géothermique peuvent généralement être considérées en régime permanent.

augmentant en fonction du gradient géothermique de la formation. La température atteinte à la surface la formation sous-jacente sera le point de départ du profil de température à travers cette formation, et ainsi de suite [2].

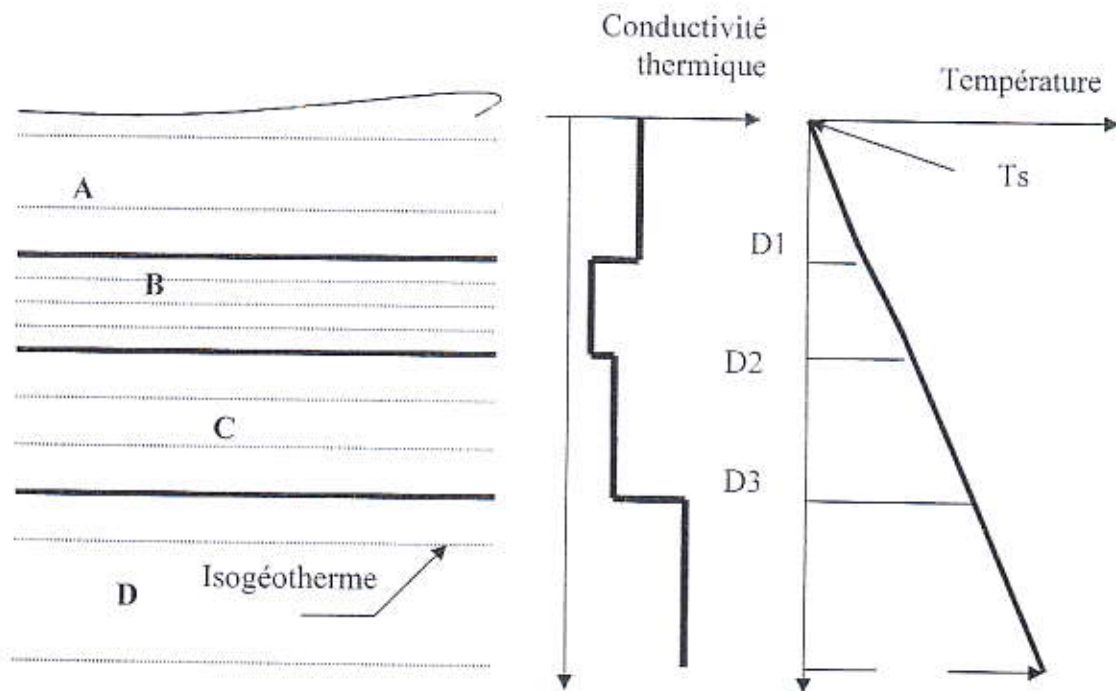


Figure I. 1: Concept du gradient géothermique Séquence des formations (A à D) ayant des conductivités différentes

Lorsque l'évolution de la température à travers toute l'épaisseur de la croûte terrestre est considérée, il faut alors tenir compte de la diminution du flux géothermique avec la profondeur. Dans la partie supérieure de la croûte, les gradients géothermiques sont soumis à toutes sortes de perturbations qui donnent en fait des indications importantes sur plusieurs processus géologiques: perturbations par la topographie en région montagneuse; effet persistant de la dernière glaciation et effet majeur de la présence de pergélisol sur le gradient géothermique; effets de processus tectoniques, volcaniques, géothermiques et intrusions de sel. Enfin, l'identification de régions de forts gradients géothermiques est faite lors de l'évaluation du potentiel d'exploitation de l'énergie géothermique. Cette énergie renouvelable pourrait représenter globalement un apport plus important à la consommation énergétique.

I.2.4- Estimation des conductivités thermiques des roches :

La conductivité thermique mesure l'aptitude des roches au transfert de chaleur par conduction. Elle influence directement sur la configuration des isothermes. Leur évaluation peut être réalisée par deux approches différentes.

- Mesure directe par la méthode de l'aiguille chauffante en laboratoire pour quelques échantillons.
- Estimation à partir de la composition minéralogique, en tenant compte de la porosité et des valeurs publiées dans la littérature pour différents minéraux

augmentant en fonction du gradient géothermique de la formation. La température atteinte à la surface la formation sous-jacente sera le point de départ du profil de température à travers cette formation, et ainsi de suite [2].

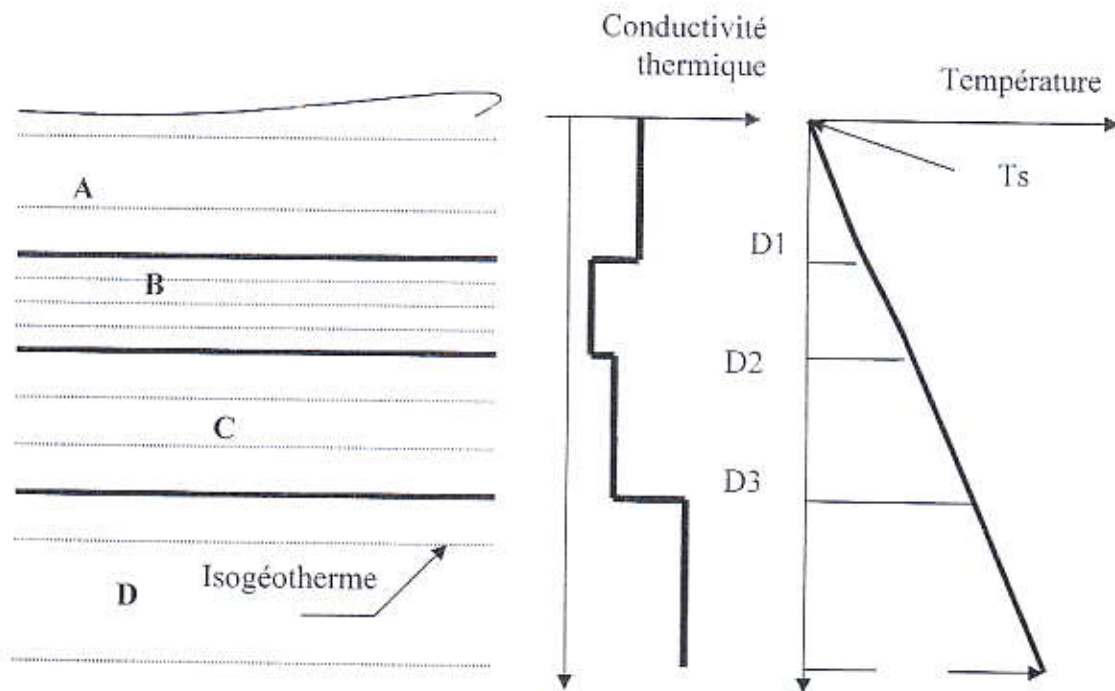


Figure I. 1: Concept du gradient géothermique Séquence des formations (A à D) ayant des conductivités différentes

Lorsque l'évolution de la température à travers toute l'épaisseur de la croûte terrestre est considérée, il faut alors tenir compte de la diminution du flux géothermique avec la profondeur. Dans la partie supérieure de la croûte, les gradients géothermiques sont soumis à toutes sortes de perturbations qui donnent en fait des indications importantes sur plusieurs processus géologiques: perturbations par la topographie en région montagneuse; effet persistant de la dernière glaciation et effet majeur de la présence de pergélisol sur le gradient géothermique; effets de processus tectoniques, volcaniques, géothermiques et intrusions de sel. Enfin, l'identification de régions de forts gradients géothermiques est faite lors de l'évaluation du potentiel d'exploitation de l'énergie géothermique. Cette énergie renouvelable pourrait représenter globalement un apport plus important à la consommation énergétique.

I.2.4- Estimation des conductivités thermiques des roches :

La conductivité thermique mesure l'aptitude des roches au transfert de chaleur par conduction. Elle influence directement sur la configuration des isothermes. Leur évaluation peut être réalisée par deux approches différentes.

- Mesure directe par la méthode de l'aiguille chauffante en laboratoire pour quelques échantillons.
- Estimation à partir de la composition minéralogique, en tenant compte de la porosité et des valeurs publiées dans la littérature pour différents minéraux

La conductivité d'une roche est fonction de la conductivité de la matrice solide λ_s et celle de fluide qu'elle contient λ_f , la relation s'exprime par la formule [3]:

$$\lambda_s = (\lambda_f)^\phi \cdot (\lambda_s)^{(1-\phi)} \quad (I-3)$$

- ϕ est la porosité du milieu.

Quand la roche est pluri minérale, la conductivité de matrice λ_s est calculée à l'aide d'un modèle géométrique:

$$\lambda_s = \prod_{i=1}^n \lambda_i^{e_i} \quad (I-04)$$

Où e_i représente la proportion dans la roche du minérale de conductivité λ_i . La composition minéralogique peut être déduire des a partir des analyses sur les carotte.

Quand une formation est composée d'une alternance de fines couches des roches simples, la conductivité de la formation peut être calculée par un modèle en série [4]:

$$\lambda_s = \left(\sum_{i=1}^n \frac{e_i}{\lambda_i} \right) \quad (I-05)$$

Le tableau (I.1) donne les valeurs des roches les plus courantes sont données à titre indicatif [5].

I.2.5- Evaluation du flux de chaleur:

Le calcul de flux de chaleur peut être réalisé par inversion stochastique en utilisant l'algorithme développé par Vasseur et al. (1985). Pour un milieu stratifié de n couches horizontales et semi infinies, dont la $j^{ème}$ couche est d'épaisseur H_j et de résistivité thermique $R_{e_j} = 1/\lambda_j$, la température T_j à une profondeur z_j est liée à celle de la surface T_0 par l'équation [4]:

$$T_i = T_0 + q_s \cdot \sum_{j=1}^n H_j \cdot R_{e_j} \quad (I-06)$$

Cet algorithme donne la valeur optimale, après itérations jusqu'à convergence, du flux chaleur à la surface.

| Type de roche | Conductibilité thermique $\lambda(W/mK)$ | | |
|-------------------------------|--|----------|-----|
| | min | typique | max |
| Roches magmatiques | | | |
| Basalte | 1.3 | 1.7 | 2.3 |
| Diorite | 2.0 | 2.6 | 2.9 |
| Gabbro | 1.7 | 1.9 | 2.5 |
| Granit | 2.1 | 3.4 | 4.1 |
| Péridotite | 3.8 | 4.0 | 5.3 |
| Rhyolithe | 3.1 | 3.3 | 3.4 |
| Roches métamorphiques | | | |
| Gneiss | 1.9 | 2.9 | 4.0 |
| Marbre | 1.3 | 2.1 | 3.1 |
| Méta quartzite | | Env. 5.8 | |
| Micaschistes | 1.5 | 2.0 | 3.1 |
| Schistes argileux | 1.5 | 2.1 | 2.1 |
| Roches sédimentaires | | | |
| Calcaire | 2.5 | 2.8 | 4.0 |
| Marne | 1.5 | 2.1 | 3.5 |
| Quartzite | 3.6 | 6.0 | 6.6 |
| Sel | 5.3 | 5.4 | 6.4 |
| Grés | 1.3 | 2.3 | 5.1 |
| Roches argileuses, limoneuses | 1.1 | 2.2 | 3.5 |
| Roches non consolidées | | | |
| Gravier, sec | 0.4 | 0.4 | 0.5 |
| Gravier, saturé d'eau | | Env. 1.8 | |
| Moraine | 1.0 | 2.0 | 2.5 |
| Sable, sec | 0.3 | 0.4 | 0.8 |
| Sable, saturé d'eau | 1.7 | 2.4 | 5.0 |
| Argile/limon, sec | 0.4 | 0.5 | 1.0 |
| Argile/limon, saturé d'eau | 0.9 | 1.7 | 2.3 |

Tableau I.1: Conductibilité thermique de différents types de Roche.

1.2.6- Principaux types de ressources géothermiques:

La chaleur géothermique peut-être exploitée grâce à la présence dans le sous-sol de véritables gisements où se trouve stockée l'énergie calorifique. Selon la nature des terrains, on classera ces gisements en trois catégories : réservoirs de vapeur, réservoirs d'eau chaude, ou roches chaudes sèches.

Les deux premiers types de gisements sont constitués par des infiltrations d'eau circulant dans une couche géologique perméable et poreuse recouverte de terrains imperméables [5].

1.2.6.1- Réservoirs de vapeur :

Si l'eau de gisement est partiellement vaporisée, elle pourra être récupérée sous la forme de vapeur sèche directement utilisable pour faire tourner les turbines des centrales électriques. Cependant, ces gisements de vapeur sont relativement rares. Les gisements les plus connus sont Lardarello (Italie), Geysers (Californie) et Matsukawa (Japon).

1.2.6.2- Réservoirs d'eau chaude :

Le plus souvent, l'eau des gisements géothermiques reste liquide et, suivant sa température, elle peut être utilisée soit pour le chauffage, soit pour la production d'électricité. Dans ce dernier cas, la baisse de pression que subit l'eau chaude pendant sa remontée vers la surface produit sa vaporisation de sorte qu'en tête de puits on dispose d'un mélange diphasique eau-vapeur dont on peut utiliser la phase gazeuse pour alimenter des turbines.

1.2.6.3- La géothermie des roches fracturées:

Consiste à récupérer la chaleur de roches chaudes en profondeur par une circulation d'eau vers la surface. Elle constitue une énorme réserve d'énergie puisque l'exploitation de la chaleur contenue dans une sphère de 1 km de rayon permettrait d'alimenter pendant un siècle une centrale électrique de 10 MW.

La principale difficulté consiste à créer un échangeur souterrain par stimulation hydraulique des fractures existantes dans la roche en profondeur.

1.2.7- les ressources en énergie géothermique :

Selon la profondeur des gisements les ressources en énergie géothermique peuvent se classer, on prend compte les moyennes de leurs exploitation comme suit :

1.2.7.1- Ressources de faibles profondeurs:

- Sondes géothermiques
- Collecteur enterré horizontal
- Captage de l'eau souterraine
- Pieux échangeurs (pieux de fondation)

1.2.7.2- Ressources des grandes profondeurs:

- Sondes géothermiques profondes
- Aquifère profond
- Eau du tunnel
- Hot dry rock (roches chaudes sèches)

a) Captage de l'eau souterraine:

Lorsque la perméabilité du terrain est suffisamment élevée. L'eau de la nappe phréatique est une source froide idéale pour une pompe à chaleur. L'exploitation de la nappe phréatique fait appel à un puits unique ou multiple (puits de production et injection).

b) Pieux échangeurs:

Un pieu échangeur est un pieu de fondation dans lequel un tube ou un réseau de tube a été installé de manière à pouvoir faire circuler un fluide caloporteur pour échanger de la chaleur avec le terrain. Ses deux principales fonctions sont donc de reporter en profondeur les charges d'une construction et de servir d'échangeur de chaleur avec le terrain. Un réseau de pieux de fondation est mis en œuvre lorsque le sol en surface n'a pas une résistance suffisante pour supporter les charges de l'ouvrage par l'intermédiaire de fondations superficielles. D'une longueur unitaire pouvant varier

de quelques mètres à plusieurs dizaines de mètres, une partie ou la totalité des pieux peuvent être équipés à une en « pieu échangeur ». Le système de pieux échangeurs, généralement raccordé à une pompe à chaleur, permet d'extraire la chaleur du sous sol pour satisfaire des besoins de chaleur en hiver et d'y rejeter des charges thermiques issues de la production de froid en été [5].

c) Aquifère profond:

Les bains thermaux sont certainement la forme la plus ancienne d'exploitation de l'énergie géothermique. Alors que l'on exploitait initialement les sources d'eau chaude jaillissant en surface, on n'a pas tardé à augmenter tant le débit que la température en effectuant des sondages et en construisant des puits. Des forages géothermiques profonds permettent de nos jours de pomper de l'eau thermale à la surface et de l'exploiter à diverses fins de chauffage selon le principe de l'utilisation en cascades.

Si les eaux souterraines profondes ne sont pas que faiblement minéralisées (moins de 2 g/L) et s'il est possible d'évacuer l'eau refroidie après l'extraction thermique dans un exutoire (cours d'eau ou lac), un seul forage de production suffira alors (forage singlet). Si la teneur minérale dépasse 2 g/L, un second forage est nécessaire pour réinjecter l'eau refroidie dans les profondeurs (doublet).

Le principe de fonctionnement d'un doublet géothermique est comme suit : un forage de production amène de l'eau thermale chaude à la surface au moyen d'une pompe immergée ; un échangeur de chaleur ainsi qu'une pompe à chaleur disposée en aval permettent d'obtenir la température de chauffage désirée. Le circuit de chauffage est restitué à l'aquifère par un forage d'injection.

d) Hot Dry Rock (roches chaudes sèches):

Depuis les années 70, un certain nombre de programmes de recherche ont été lancés pour développer la technologie Hot Dry Rock (HDR). Tout d'abord aux Etats-Unis, puis Angleterre, ensuite en Allemagne, en France, au Japon et en Suède. Des projets relativement récents ont débuté en Australie et en Suisse.

Le principe de fonctionnement du Hot Dry Rock est relativement simple. On extrait l'énergie géothermique d'un réservoir souterrain créé artificiellement en vue de la production de chaleur et d'électricité. Dans le réservoir géothermique fissuré, l'eau injectée se réchauffe puis revient à la surface de la terre par un ou plusieurs forages de production. Un échangeur de chaleur transfère l'énergie à un deuxième circuit alimentant un turbogénérateur pour produire d'électricité. L'utilisation de machines ORC (Organic Rankine Cycle) permet une production de courant économique déjà à des températures de 100°C environ en tête de forage. Une grande partie de la chaleur résiduelle peut être injectée dans un réseau de chauffage à distance. Un puits d'injection complète le circuit fermé et restitue l'eau refroidie au réservoir.

Le réservoir géothermique souterrain est créé en élargissant hydrauliquement les systèmes de fractures naturelles. Après avoir effectué un premier forage à grande profondeur (4000-6000 m), on injecte de l'eau sous une pression de plusieurs centaines de bars. Pour maintenir la pression le temps nécessaire à la formation du réservoir (plusieurs semaines), on injecte de l'eau à mesure que la taille du réservoir se développe. Le développement du réservoir est détecté par des techniques de mesure micro sismique. Elle écoute chaque mouvement de rocher pendant le procédé de stimulation, et permettent de localiser précisément les sources de chaque émission de façon tridimensionnelle [5].

1.2.8- Domaines d'application et importance de la géothermie:

On estime la puissance géothermique de la terre à 30 milliards de *kW* et le nombre de calories renfermé dans les premiers 2000m de la croûte terrestre à plusieurs milliers de fois celles qui sont contenues dans les réserves de combustibles fossiles. Le gradient géothermique varie de quelques degrés à quelques dizaines de degrés par 100 m. Il n'en reste pas moins que cette énergie n'est mobilisable que grâce à des structures géologiques favorables, ce qui explique le bilan modeste de son utilisation : 5000 *MW* dans le monde pour produire de l'électricité et autant pour le chauffage des bâtiments. On doit en effet distinguer entre la géothermie de haute énergie, généralement utilisée pour la production électrique (source supérieure à 150°C) et la géothermie de basse et moyenne énergie dans laquelle on utilise directement la chaleur sans autre transformation.

1.2.9- L'exploitation de la géothermie dans le monde :

Actuellement, quelques 50 pays utilisent leurs ressources géothermiques à un stade industriel plus ou moins avancé. Les ressources de vapeur à haute température et haute pression sont essentiellement exploitées pour produire de l'électricité. Une vingtaine de pays (USA, Philippines, Mexique, Italie, Nouvelle-Zélande, Indonésie, Japon, Islande, etc.) totalisent une puissance installée plus de 8'000 *MW* électriques. Par contre, les ressources à moyenne ou basse température servent pour des usages directs, en majorité le chauffage de bâtiments et de serres, mais aussi la pisciculture et les usages associés au thermalisme et à l'industrie. Près de 60 pays (USA, Chine, Islande, Turquie, Suisse, Allemagne, Canada, Suède, France, Hongrie, Japon, Italie, Nouvelle-Zélande,...etc.) totalisent une puissance installée plus de 16'000 *MW* thermiques, les deux tableaux suivant présentant l'évolution de la production mondiale de la puissance électriques .

| La production en électricité. (<i>MWe</i>) | 1990 | 1995 | 1999 | 2002 |
|--|-------------|-------------|-------------|-------------|
| Union européenne | 552 | 641 | 805 | 883 |
| Autre pays d'Europe | 76 | 81 | 213 | 297 |
| Totale des pays européenne | 628 | 722 | 1018 | 1180 |
| Amérique du nord | 3475 | 3570 | 2983 | 2 971 |
| Centre et sud d'Amérique | 131 | 231 | 407 | 416 |
| Totale des pays d'Amérique | 3606 | 3801 | 3390 | 3387 |
| Asie | 1270 | 1979 | 3075 | 3 220 |
| Océania | 283 | 286 | 437 | 441 |
| L'Afrique | 49 | 49 | 54 | 128 |
| Totale mondiale | 5836 | 6837 | 7974 | 8356 |

Tableau I.2 : évolution de capacité de production de l'énergie électrique à travers le monde en *MWe* (source : EurObserEr, 2000 et 2003)

| pays | Energie (MWe) | La production totale (GWh/an) |
|------------------|---------------|-------------------------------|
| USA | 2228 | 15470 |
| Philippines | 1909 | 9181 |
| Italie | 785 | 4403 |
| Mexique | 755 | 5681 |
| Indonésie | 590 | 4575 |
| Japon | 547 | 3532 |
| Nouvelle-Zélande | 437 | 2268 |
| Islande | 170 | 1138 |
| Salvador | 161 | 800 |
| Costa rica | 143 | 592 |
| Rest | 249 | 1621 |
| totale | 7974 | 49261 |

Tableau I.3 : Classement des pays produisant l'énergie électrique par la géothermie
(source : EurObserEr, 2000)

I.2.10- les potentialités de la région de Ouargla en énergie géothermique:

On appelle énergies renouvelables celles dont les sources sont indéfiniment disponibles à la surface de la terre. Elles s'opposent aux réserves épuisables (combustibles, minerais) dont le renouvellement ne peut se réaliser qu'à l'échelle des temps géologiques. On admet couramment que le pétrole et le gaz seront raréfiés à l'échéance d'un demi siècle. Le charbon en revanche pourrait assurer un relais de plusieurs centaines d'années. Pour le moment le Sahara est bien pourvu en énergie fossile grâce à ses gisements de pétrole et surtout de gaz. Il est possible cependant que dans certains cas précis d'autres sources d'énergie dites renouvelables soient plus rentables ou plus pratiques à mettre en œuvre (pour le dessalement des eaux saumâtres par exemple).

A notre connaissance, et en l'absence d'un recensement exhaustif des nappes chaudes ou très chaudes, les seules sources géothermiques de la région sont à basse énergie, c'est à dire inférieures à 60°C. La nappe du Continental Intercalaire pourrait bien sûr être sollicitée dans ses régions d'artésianisme pour chauffer les immeubles (et des serres) à Ouargla par exemple ou à Touggourt. En général on réinjecte l'eau après refroidissement, mais dans le cas du Sahara les besoins d'irrigation sont tels qu'on pourrait envisager une utilisation agricole de l'eau succédant au chauffage urbain. Ce qui serait une méthode clairement efficace pour amortir le coût de la réalisation du forage dont la durée de vie est assez souvent brève dans ces régions [10].

Les installations de chauffage basse énergie ne demandent pas une technologie compliquée et font appel aux mêmes matériaux que ceux de la distribution d'eau urbaine. Il y a certainement des précautions à prendre pour éviter la corrosion et l'entartrage au cours du refroidissement de l'eau. En France dans la région parisienne plusieurs centaines de milliers de logements sont chauffés par la nappe du Dogger 85°C. Mais ce type d'utilisation demande une grande concentration de l'habitat.

Les autres nappes (complexe terminal ou phréatique) ont une température généralement supérieure à 20°C et inférieure à 30°C. On est dans le domaine de l'utilisation des pompes à chaleur dont le coût et l'efficacité ne présentent pas pour le moyen terme un grand intérêt à la région

1.2. 10.1- L'énergie géothermique:

En dehors de l'énergie solaire, la région de Ouargla est assez bien pourvu en nappes aquifères chaudes ou très chaudes qui permettent la mise en œuvre de cette énergie géothermique. Elle est surtout utilisable pour le chauffage des habitations ou des serres de production en hiver. Cette application est d'ailleurs déjà assez couramment utilisée pour les serres dans la région, mais elle devrait certainement être intelligemment développée pour éviter de gaspiller des thermies qui au total sont gratuites, puisque les ouvrages sont avant tout destinés au puisage de l'eau. Dans la mesure où les géothermies ne sont utilisables que si elles sont véhiculées par les eaux souterraines et que celles ci sont pour l'essentiel fossiles dans la région, en l'absence de réinjection, il est quelque peu abusif de parler d'énergie renouvelable [6].

1.2.10.2- La géothermie basse énergie:

La géothermie basse énergie (50°C à 90°C) peut se développer dans les zones à gradient normal où des formations géologiques favorables (porosité, perméabilité, épaisseur importantes) sont situées à une profondeur suffisante pour atteindre les températures que l'on cherche. Dans la plupart des cas, la réinjection est recommandée, non seulement pour protéger l'environnement (les eaux sont salines), mais aussi pour maintenir la pression du gisement et, plus généralement, pour permettre une meilleure exploitation à long terme (cas de l'Allemagne et de la France). Ce type de géothermie est économique à l'heure actuelle, toutefois, la faisabilité des opérations doit être déterminée au cas par cas. En effet, d'une part la ressource est très diverse selon les régions (profondeur des nappes exploitables, souvent superposées, variant de 800 m à 3000 m) et, d'autre part, le type des besoins en surface (nombre de logements à raccorder, dispersion, mode de chauffage dans les locaux) varie et doit être adapté au mieux à la ressource. Les potentiels énergétiques de ce type de géothermie sont bien connus grâce aux nombreuses campagnes pétrolières dont les résultats sont en général disponibles dans les zones de bassins sédimentaires.

Il existe dans le Sud algérien des nappes d'eaux fossiles géothermales à grande profondeur (albien), ce qui représente un potentiel géothermique très important. Cette énergie thermique permet de développer l'agriculture sous serres (heating greenhouse) et même pour chauffer les locaux et habitations (comme en Allemagne).

La température de l'eau, à la sortie de ces forages, varie entre 50°C et 73°C ; la plupart de ces forages sont artésiens et l'eau émerge sous une pression d'une vingtaine de bars. Le débit d'exploitation est généralement compris entre 80 et 100 l/s, soit une moyenne de 7 800 m³/jour.

La chaleur de cette eau est exploitée dans le but d'améliorer la production et la précocité des primeurs (tomate, concombre, melon, etc.) dont le rôle est très important dans le développement de la région. Cette eau est utilisée, après refroidissement, pour l'irrigation des cultures et de la palmeraie.

Plusieurs expériences de chauffage de serres agricoles ont été menées à Touggourt et Ouargla par le CDER (on peut citer aussi les expériences tunisiennes sur ce sujet, dans des conditions comparables). Les serres sont chauffées individuellement par un système monté en parallèle ; les volumes d'eau débités pour le chauffage sont faibles, puisque l'un des principaux

objectifs est, par ailleurs, de refroidir l'eau qui, recueillie puis reprise par pompage, est valorisée pour l'irrigation des cultures [7].

I.2.11- Géothermie économie:

Le système géothermique se positionne au premier rang comme étant le système le plus rentable et économique. La géothermie réside dans son principe de récupération d'énergie gratuite et du renouvellement de la nature. La seule consommation d'énergie est le fonctionnement du compresseur. Son coût est largement inférieur à celui des techniques traditionnelles. Le système permet de réduire les coûts de chauffage de 60% à 70% par rapport au chauffage électrique classique et peut atteindre 75% dans certains cas, là où le sol le permet. En climatisation, il réduit de 30% les coûts par rapport à un climatiseur à l'air conventionnel. En plus du chauffage et de la climatisation, l'unité géothermique est aussi munie d'un désurchauffeur qui permet une réduction de 40% à 50% sur la consommation d'eau chaude domestique.

a) Efficacité

L'efficacité du système est mesurée par son coefficient de performance C.O.P qui est le rapport entre l'énergie consommée et l'énergie fournie. Celui-ci se situe en moyenne entre 3 et 4, soit 1 *KW* d'électricité consommé par le compresseur pour 3 à 4 *KW* fournis et libérés dans la maison.

B) Rentabilité

Comme c'est le cas pour la plupart des technologies écologiques et économiques, les systèmes géothermiques exigent des coûts d'installation plus élevés que les technologies conventionnelles. L'investissement supplémentaire exigé par la géothermie est récupéré grâce aux économies d'énergie réalisées au cours des années suivant son installation. Une grande maison affiche habituellement des besoins en chauffage supérieurs et la possibilité d'économies est plus grande qu'une maison plus petite. Cela fait en sorte que la période de récupération (pay back) se fait plus rapidement. Habituellement la période de récupération se fait entre 5 et 10 ans pour des résidences et en moins de 5 ans pour des bâtiments commerciaux [30].

I.2.12- Exemple (Canada) [31]:

Une maison de 160 m² sur un vaste terrain et ils veulent payer le moins cher possible pour la chauffer. Le gaz naturel n'est pas encore disponible dans leur quartier, mais il est question de prolonger la conduite de gaz derrière leur propriété d'ici un ou deux ans. Ils étudient tour à tour l'appareil de chauffage à l'électricité, celui au gaz propane qu'ils pourront convertir au gaz naturel d'ici un an ou deux ans et un système géothermique. Voici le coût de chacune de ces trois options:

| | |
|---|-----------|
| Appareil de chauffage électrique et de conditionnement d'air | 5 900 \$ |
| Appareil de chauffage au gaz propane et conditionnement d'air à rendement élevé | 6 400 \$ |
| Système géothermique | 12 800 \$ |

Une estimation des coûts annuels de combustibles donne les résultats suivants :

| | Chauffage | Refroidissement | Eau chaude | Total |
|--|-----------|-----------------|------------|----------|
| Appareil de chauffage électrique | 1 208 \$ | 119 \$ | 400 \$ | 1 727 \$ |
| Appareil de chauffage au propane à rendement élevé | 1 228 \$ | 119 \$ | 497 \$ | 1 844 \$ |
| Appareil de chauffage au gaz à rendement élevé | 670 \$ | 119 \$ | 309 \$ | 1 098 \$ |
| Système géothermique | 356 \$ | 54 \$ | 270 \$ | 680 \$ |

Une période de récupération simple est facile à calculer. Soustrayez le coût d'installation d'un système de celui d'un système géothermique et divisez la réponse par les économies sur le coût du combustible. Ainsi,

| | |
|--|-----------|
| Système géothermique | 12 800 \$ |
| Appareil de chauffage électrique et de conditionnement d'air | 5 900 \$ |
| Différence de coût | 6 900 \$ |

La période de récupération simple est donc calculée comme suit :

$$6\,900 \$ \div (1\,727 \$ - 680 \$) = 6,6 \text{ ans.}$$

Une analyse du flux d'encaisse illustre votre sortie de fonds annuelle si vous possédez et si vous utilisez un système. Si vous financez l'achat de votre maison durant plus de 20 ans, la différence de coûts pour installer un système de chauffage et de conditionnement de l'air est également financée. Le calcul du coût du cycle de vie fait progresser de quelques pas l'analyse du flux d'encaisse en additionnant le coût de l'inflation aux combustibles, le coût de remplacement de votre équipement à la fin de sa durée de vie prévue, le coût d'un emprunt pour installer le système et les autres coûts. Tous ces coûts sont basés sur une estimation d'une période de plus de 20 ans et sont assez difficiles à calculer. Il vaut cependant la peine de prendre note des points suivants :

- La durée de vie prévue de la thermopompe d'un SG est d'environ 18 à 20 ans, à peu près la même que celle d'un appareil de chauffage classique. Un conditionneur d'air ou une thermopompe à air classique devrait durer entre 12 et 15 ans seulement parce que l'unité placée à l'extérieur est exposée aux intempéries.
- La durée de vie prévue d'une boucle souterraine peut atteindre entre 50 et 75 ans. Même si la thermopompe doit être remplacée au bout de 20 ans, la boucle souterraine pourra servir beaucoup plus longtemps.
- Il semblerait que le coût des combustibles fossiles augmentera plus rapidement que celui de l'électricité au début du XXI^e siècle en raison de la demande croissante provoquée par le passage en Amérique du Nord du charbon au gaz naturel.

Chapitre II

Formulation mathématique

Chapitre II: Formulation mathématique

II.1- Introduction :

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la modélisation des écoulements incompressible et visqueux dans des conduites axisymétriques et annulaires. Ces écoulements peuvent être laminaires ou turbulents avec des gradients de température longitudinale important dans des configurations géométriques diverses.

Notre étude fait intervenir de nombreux phénomènes au niveau de l'écoulement, qu'il est nécessaire d'analyser correctement si nous souhaitons effectuer une bonne formulation mathématique de notre problème physique. Parmi ces phénomènes, nous pouvons citer la variation importante de la température dans le domaine d'étude. Selon la profondeur des puits, il y a des différences de température le long de la verticale. Celles-ci peuvent avoir une influence déterminante sur l'écoulement.

Pour cette raison, le modèle nécessite une équation de la température. Cette équation, découlant de celle de l'énergie, est de type convection-diffusion.

Le modèle choisi pour la turbulence est le modèle de longueur de mélange (modèle zéro équation). Malgré sa simplicité, il présente une bonne modélisation pour la prise en compte des effets turbulents dans les conduites cylindriques.

II.2- Equations de base :

Les relations nécessaires pour prédire l'évolution d'un écoulement monophasique au sein d'une géométrie donnée sont les équations de Navier-Stokes. Ces équations sont déduites des principes fondamentaux de la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Les variables qui en découlent dans le cas le plus générale sont la masse volumique, les trois composantes de la vitesse, la pression et la température du fluide. Ces variables sont toutes fonctions des coordonnées de l'espace et du temps.

Précisons que nous présentons tout d'abord les équations de base (en laminaire) avant de passer aux équations moyennées.

II.2.1- Equation de continuité :

Cette équation exprime la conservation de masse contenue dans un volume élémentaire. Cela veut dire que la variation de masse dans un volume dV égale à la somme algébrique des débits sortants et entrants [8].

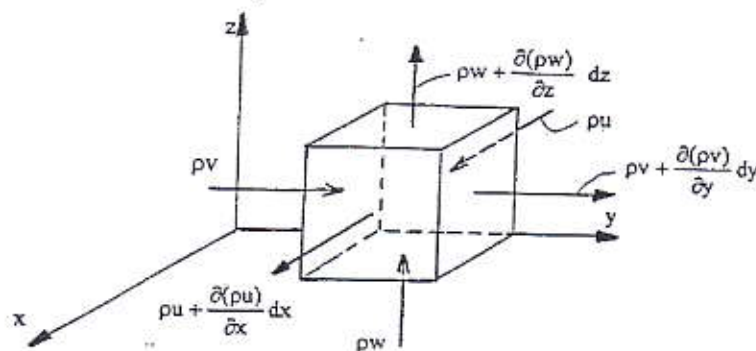


Figure II.1 : Représentation des flux de fluide.

- masse total entrant dans un parallélépipède ayant pour cotés dx, dy, dz.

$$\rho [Udydz + Vdxdz + Wdxdy] dt \quad (\text{II. 1})$$

- masse total sortant au même instant

$$\left[\rho U + \frac{\partial \rho U}{\partial x} dx \right] dydzdt + \left[\rho V + \frac{\partial \rho V}{\partial y} dy \right] dxdzdt + \left[\rho W + \frac{\partial \rho W}{\partial z} dz \right] dxdydt \quad (\text{II. 2})$$

- La quantité de masse occupant l'unité de volume dV pendant l'unité de temps dt est donc :

$$dm = \left[\frac{\partial(\rho U)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho W)}{\partial z} \right] dxdydzdt \quad (\text{II. 3})$$

- La variation de masse à l'intérieur de l'élément pendant la même durée dt :

$$dm = - \frac{\partial \rho}{\partial t} dt dxdydz \quad (\text{II. 4})$$

En égalant les deux équations (II. 3), et (II. 4) on obtient l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho W)}{\partial z} = 0 \quad (\text{II. 5})$$

Ou encore sous forme plus compacte :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0 \quad (\text{II. 6})$$

II.2.2- Équation de quantité de mouvement:

La variation de la quantité de mouvement par unité de temps du système est égale à la résultante des forces extérieures agissant sur le système. Ce qui s'exprime pour un élément fluide $dV = dxdydz$ de masse constante se déplaçant avec le fluide, par la relation:

$$d \left(\frac{m \vec{V}}{dt} \right) = \rho dV \frac{d\vec{V}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext} \quad (\text{II. 7})$$

Les forces intérieures forment un système équivalent à zéro.

- Forces extérieures :

$$\text{Forces extérieures} = \sum \text{Forces de volume} + \sum \text{Forces de surface}$$

- Forces de surface

Suivant $\vec{\alpha x}$:

$$\left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right) dydz + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) dxdz + \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dxdy \quad (\text{II. 8})$$

Suivant $o\bar{y}$:

$$\left(\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} dy \right) dydz + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dydz + \left(\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz \right) dx dy \quad (\text{II. 9})$$

Suivant $o\bar{z}$:

$$\left(\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dz \right) dx dy + \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx \right) dydz + \left(\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy \right) dx dz \quad (\text{II.10})$$

- Forces de volume :

$$F_x, F_y, F_z$$

Après projection de l'équation de la dynamique suivant, $o\bar{x}$, $o\bar{y}$ et $o\bar{z}$:

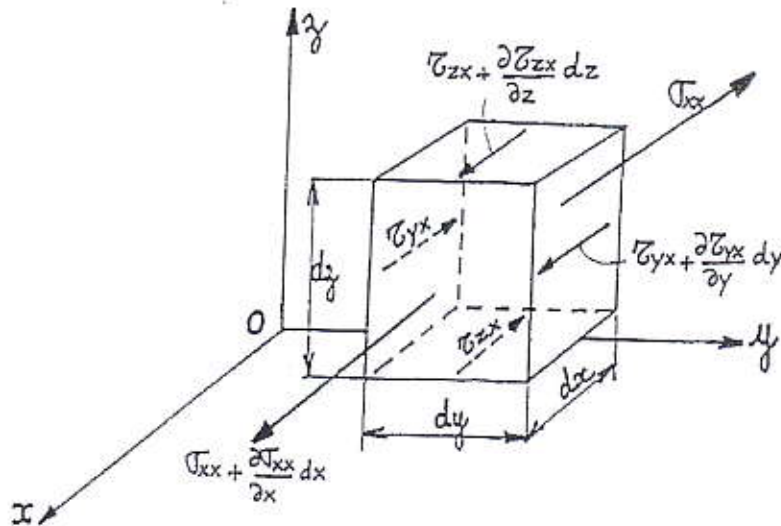


Figure II.2 : Action à la surface de l'élément fluide suivant $o\bar{x}$

$$\left[\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right] dV + F_x = \gamma_x \cdot dm \quad (\text{II. 11})$$

On divise par dV , et on remplace $dm = \rho dx dy dz$

$$\rho \gamma_x = \frac{F_x}{dV} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \quad (\text{II.12})$$

- La relation entre le tenseur de contrainte et le taux de déformation est donnée par les expressions suivantes [8] :

$$\sigma_{xx} = \varepsilon \operatorname{div} \vec{V} + 2\mu \frac{\partial U}{\partial x} - P \quad (\text{II. 13})$$

$$\tau_{yx} = \mu \left[\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right] \quad (\text{II. 14})$$

$$\tau_{zx} = \mu \left[\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} \right] \quad (\text{II. 15})$$

Avec :

ε : Viscosité de dilatation

μ : Viscosité dynamique

En remplaçant la contrainte $\sigma_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{zx}$ par l'équation (II.12), on trouve:

$$\rho \gamma_x = \frac{F_x}{dV} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\varepsilon \operatorname{div} \vec{V} + 2\mu \frac{\partial U}{\partial x} - P \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) \right] \quad (\text{II.16})$$

$$\rho \gamma_x = \frac{F_x}{dV} - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\varepsilon \operatorname{div} \vec{V} + \mu \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) \right] + \mu \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right] + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) \right] \cdot \left[\left(\frac{\partial \mu}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] \cdot \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) \right] \quad (\text{II.17})$$

Soit encore en identifiant $\operatorname{div} \vec{V}$ et le Laplacien de U.

$$\rho \gamma_x = \frac{F_x}{dV} - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[(\varepsilon + \mu) \operatorname{div} \vec{V} \right] + \mu \nabla^2 U + \left[\left(\frac{\partial \mu}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] \cdot \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) \right] \quad (\text{II.18})$$

En retenant le cas du fluide incompressible pour lesquels le terme $\operatorname{div} \vec{C}$ est nul (équation de continuité), en posant d'autre part :

\vec{f} : Effort à distance par unité de masse

$$\vec{f} = \frac{\vec{F}}{\rho \, dx \, dy \, dz} \quad (\text{II.19})$$

ν : Viscosité cinématique

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (\text{I.20})$$

En remplace par l'équation (II.18) en trouve l'équation suivant :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + W \frac{\partial U}{\partial z} = f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right] + \left[\left(\frac{\partial \mu}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] \cdot \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) \right] \quad (\text{II.21})$$

- de la même manière suivant les autres directions :

Suivant oy :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + W \frac{\partial V}{\partial z} = f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right] + \left[\left(\frac{\partial \mu}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] \cdot \left[\left(\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} \right) \right] \quad (\text{II.22})$$

Suivant $o\bar{z}$:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + U \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial y} + W \frac{\partial W}{\partial z} = f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right] + 2 \left[\left(\frac{\partial \mu}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] \cdot \left[\left(\frac{\partial W}{\partial z} \right) \right] \quad (\text{II.23})$$

II.2.3- Equation de conservation de l'énergie :

D'après le premier principe de la thermodynamique et avec l'introduction de la fonction Φ nommée fonction de dissipation et mesurant la quantité de chaleur, provenant de l'énergie mécanique [9], l'équation de conservation d'énergie s'écrit :

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = \text{div} (\lambda \cdot \bar{\nabla} T) + T\beta \frac{dT}{dt} + q + \Phi \quad (\text{II.24})$$

Avec :

C_p : Chaleur massique du fluide.

λ : Conductivité thermique du fluide.

β : Coefficient d'expansion thermique (constant) :

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$$

q : Source de chaleur interne.

Φ : Fonction de dissipation visqueuse:

$$\Phi = -\frac{2}{3} \mu \cdot e + 2\mu \cdot \left(\varepsilon_{ij} \cdot \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) \quad (\text{II.25})$$

Avec : ε_{ij} C'est les composantes du tenseur de déformation.

II.3- Système de coordonnées :

Puisque chaque équation des variables indépendantes doit être intégrée sur tous les volumes élémentaires, il y a une économie de temps et de mémoire à réaliser en travaillant avec peu de variables indépendantes. Un choix judicieux du système de coordonnées peut parfois réduire le nombre des variables indépendantes exigées [10].

L'écoulement axisymétrique dans une conduite circulaire semble être tridimensionnel dans un système de coordonnées cartésien mais est bidimensionnel dans un système de coordonnées cylindriques sans la dépendance de θ .

II.4- Hypothèses simplificatrices :

En premier lieu, nous considérons des écoulements de fluides incompressibles donc :

$$\text{div} \vec{U} = 0 \quad \text{et} \quad \rho = C^{\text{te}}$$

Autrement dit, nous supposons que la masse volumique du fluide est indépendante de la pression et les variations avec la température sont négligeables, hypothèse qui est valable pour la quasi-totalité

des liquides (comme l'eau) et pour les gaz vérifiant la relation $\frac{1}{2} M^2 \ll 1$ (M étant le nombre de Mach = U/c et c la vitesse du son [11]).

En deuxième lieu, l'écoulement est permanent ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$) et aussi supposé axisymétrique, donc les variations des grandeurs dans le sens azimutal sont nulles.

En dernier lieu, nous considérons que les variations de la conductivité thermique λ avec T sont en général très modérées : dans le cas de l'eau, entre 0 et 300°C, les valeurs de λ s'étalent entre 0.54 et 0.68 $Wm^{-1}K^{-1}$ [12]. La chaleur spécifique C_p est considérée constantes, cette approximation est valide puisque les gradients de température étant assez faibles et nous allons approcher des écoulements de fluide turbulents dans lesquels le transport moléculaire est négligeable par rapport au transport turbulent.

Quant aux variations de la viscosité dynamique μ (par conséquent celles de ν puisque ρ est constante) sont considérables avec la température pour l'eau et de nombreux liquides : entre 20 et 100°C, pour l'eau μ varie de 10^{-2} à $2.81 \cdot 10^{-2} kg m^{-1} s^{-1}$ [12].

Les variations du nombre de Prandtl sont, de ce fait importantes avec la température : pour l'eau, Pr passe de 7 à 1.74 de 20 à 100°C [3].

Le nombre de Reynolds varie également de façon très sensible avec la température du fait des variations de $\mu(T)$ (à ρU constant).

Donc μ est choisie variable avec la température selon la formule [13] :

$$\mu = \frac{\mu_0}{1 + aT + bT^2} \quad (II.26)$$

Tels que :

$$a = 0.033368 \text{ } ^\circ C^{-1}$$

$$b = 0.00022 \text{ } ^\circ C^{-2}$$

$$\mu_0 = 1.161 \times 10^{-3} \cdot Kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}$$

II.5- Equations simplifiées et transformées en coordonnées cylindriques :

En se plaçons dans le cadre de ces hypothèses, certaines simplifications peuvent être apportées aux équations précédentes.

II.5-1- Equation de continuité :

L'écoulement étant permanent et incompressible, l'équation de continuité écrite dans un système de coordonnées cylindriques est comme suit :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rU_r) + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0 \quad (II.27)$$

II.5-2- Equation de conservation de quantité de mouvement :

Le théorème de quantité de mouvement exprime que la variation de la quantité de mouvement par unité de temps du système est égale à l'ensemble des forces extérieures au système. En coordonnées cylindriques l'équation s'écrit :

Sur l'axe Or :

$$\rho \left(U_r \frac{\partial U_r}{\partial r} + U_z \frac{\partial U_r}{\partial z} \right) = - \frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left(\Delta U_r - \frac{U_r}{r^2} \right) + \frac{d\mu}{dt} \bar{\nabla} T \cdot \left(\bar{\nabla} U_r + \frac{\partial \bar{U}}{\partial r} \right) \quad (II.28)$$

$$\text{Avec : } \bar{\nabla} T \cdot \left(\bar{\nabla} U_r + \frac{\partial \bar{U}}{\partial r} \right) = 2 \frac{\partial T}{\partial r} \cdot \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{\partial T}{\partial z} \left(\frac{\partial U_r}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial r} \right) \quad (\text{II. 29})$$

$$\text{Et } \Delta U_r = \frac{\partial^2 U_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 U_r}{\partial z^2} \quad (\text{II. 30})$$

Sur l'axe OZ :

$$\rho \left(U_r \frac{\partial U_z}{\partial r} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) = -\rho g - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \cdot \Delta U_z + \frac{d\mu}{dt} \bar{\nabla} T \cdot \left(\bar{\nabla} U_z + \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \right) \quad (\text{II. 31})$$

$$\text{Avec : } \bar{\nabla} T \cdot \left(\bar{\nabla} U_z + \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial T}{\partial z} \cdot \frac{\partial U_z}{\partial z} + \frac{\partial T}{\partial r} \left(\frac{\partial U_r}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial r} \right) \quad (\text{II.32})$$

$$\text{Et } \Delta U_z = \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U_z}{\partial r} \right) \quad (\text{II. 33})$$

II.5.3- Equation de conservation de l'énergie :

Puisque ρ est constante et nous n'avons ni source ni puits de chaleur donc $\beta = 0$ et $q = 0$.

Et $e = 0$ puisque $\text{div} \bar{U} = 0$ donc l'équation d'énergie se réduit à l'expression suivante :

$$\rho C_p \left(U_r \frac{\partial T}{\partial r} + U_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \lambda \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \Phi \quad (\text{II. 34})$$

$$\text{Avec : } \Phi = 2\mu \left[\left(\frac{\partial U_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{U_r}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \mu \left(\frac{\partial U_r}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial r} \right)^2 \quad (\text{II. 35})$$

II.6- Equations de mouvement pour un écoulement turbulent :

Un écoulement turbulent est donc composé de "filets fluides" qui, au lieu de conserver leur individualité en glissant uniquement les uns sur les autres comme dans un écoulement laminaire, échangent entre eux des particules fluides. Ainsi, le fluide zigzague, s'enroule sur lui-même et semble se déplacer au hasard autour de la direction générale de l'écoulement.

Cet état désordonné survient en réalité lorsque la vitesse du fluide devient supérieure à une limite au-delà de laquelle la viscosité ne suffit plus à régulariser les mouvements.

Ainsi, il est courant de caractériser le régime d'un écoulement par un nombre adimensionnel, le nombre de Reynolds, qui correspond au rapport des forces d'inertie aux forces visqueuses :

$$\text{Re} = \frac{\rho U D}{\mu} \quad (\text{II.36})$$

où : ρ est la masse volumique,

μ est la viscosité dynamique moléculaire.

U et D sont la vitesse et la distance caractéristique de l'écoulement.

Dans un écoulement, la transition entre un régime laminaire et un régime turbulent s'effectue généralement pour un nombre de Reynolds critique égal à 2500. Un écoulement est considéré pleinement turbulent lorsque le nombre de Reynolds est supérieur à 5000.

Nous allons présenter dans ce qui suit les caractéristiques principales des modèles les plus utilisés, en nous attachant sur le modèle à zéro équation choisi dans la suite de notre étude.

Les équations deviennent donc :

Equation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{U}_j) = 0 \quad (\text{II. 37})$$

Equation de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \bar{U}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{U}_i \bar{U}_j) = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \mu_T) \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) \right] + \rho g \quad (\text{II. 38})$$

Equation d'énergie :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho c \bar{T}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho c \bar{T} \bar{U}_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\lambda + \frac{\mu_T}{\sigma_T} \right) \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \right] + S_T \quad (\text{II. 39})$$

La viscosité turbulente μ_T joue un rôle équivalent à celui de la viscosité en régime laminaire. La différence ici est que μ_T ne correspond pas à une propriété du fluide connu, mais dépend des coordonnées du point choisie, des conditions aux frontières et initiales et d'une façon générale de tous les paramètres du problème.

En pratique, à l'heure actuelle, on rencontre des études à applications industrielles fournissant les valeurs $\mu_T(x, y, z)$ se rapportant à certains écoulements turbulents. Cela peut effectivement être une façon commode de stocker des informations d'origine expérimentale en vue de calculs sur ordinateurs.

Finalement, nous n'avons plus à déterminer que 4 variables ($2U_i, P, T$) à l'aide de 4 équations. Donc le système d'équations est fermé.

Toutes les équations peuvent être mises sous la forme d'une équation générale de convection-diffusion pour la variable Φ :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \Phi \bar{U}_i) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) + S_\Phi \quad (\text{II. 40})$$

1. Transport de Φ par convection par l'écoulement moyen.
2. Transport de Φ par diffusion moléculaire et diffusion turbulente.
3. Terme de création ou de destruction de Φ .

Elles seront résolues grâce à des conditions initiales et aux limites par la méthode des volumes finis

II.7- Les équations adimensionnées :

Pour permettre le passage d'une échelle de grandeur à une autre, il est nécessaire de définir des variables réduites. Le système de variables réduites permet d'approcher la réalité physique car leur existence et leur déroulement sont indépendants du système d'unité choisi. Ce changement de variables nécessite l'introduction de quantités caractéristiques propres à l'écoulement. Il est commode de choisir pour grandeur de référence :

- une unité de vitesse V_0 , à partir des données ou caractéristiques du problème.
- une unité de longueur D_0 , à partir des données ou caractéristiques du problème.
- une unité de masse volumique ρ_0 , à partir des données ou caractéristiques du problème.

- la température sera adimensionnée à partir des températures extrêmes T_f et T_c définies à partir des données du problème.

On pose alors :

$$\begin{aligned} \rho^* &= \frac{\rho}{\rho_0} \quad , \quad P^* = \frac{P}{\rho_0 V_0^2} \quad , \quad z^* = \frac{z}{D_0} \\ r^* &= \frac{r}{D_0} \quad , \quad U^* = \frac{U}{V_0} \quad , \quad V^* = \frac{V}{V_0} \\ \mu^* &= \frac{\mu}{\mu_0} \quad , \quad T^* = \frac{T - T_f}{T_c - T_f} \end{aligned}$$

μ_0 Viscosité dynamique moyenne du fluide.

II.7.1-Transformation des équations :

a) Transformation de l'équation de continuité :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV) + \frac{\partial U}{\partial z} = 0 \quad (\text{II. 41})$$

Ceci devient :

$$\left(\frac{V_0}{D_0} \right) \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* V^*) + \left(\frac{V_0}{D_0} \right) \frac{\partial U^*}{\partial z^*} = 0 \quad (\text{II. 42})$$

Donc :

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* V^*) + \frac{\partial U^*}{\partial z^*} = 0 \quad (\text{II. 43})$$

On remarque qu'il n'y a pas de données réduites pour l'équation de continuité.

b) Transformation de l'équation de quantité de mouvement sur z :

$$\begin{aligned} \rho \left(V \frac{\partial U}{\partial r} + U \frac{\partial U}{\partial z} \right) &= -\rho g - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U_z}{\partial r} \right) \right) \\ &+ \frac{d\mu}{dt} \left(2 \frac{\partial T}{\partial z} \cdot \frac{\partial U_z}{\partial z} + \frac{\partial T}{\partial r} \left(\frac{\partial U_r}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial r} \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{II. 44})$$

Cela devient :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\rho_0 V_0^2}{D_0} \right) \rho^* \left(V^* \frac{\partial U^*}{\partial r^*} + U^* \frac{\partial U^*}{\partial z^*} \right) &= -\rho^* \rho_0 g - \left(\frac{\rho_0 V_0^2}{D_0} \right) \frac{\partial P^*}{\partial z^*} + \left(\frac{V_0 \mu_0}{D_0^2} \right) \mu^* \cdot \left(\frac{\partial^2 U^*}{\partial z^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial U^*}{\partial r^*} \right) \right) \\ &+ \left(\frac{V_0 \mu_0}{D_0 \Delta T} \right) \frac{d\mu^*}{dT^*} \left(2 \frac{\Delta T}{\Delta z^*} \cdot \frac{\partial U^*}{\partial z^*} + \frac{\Delta T}{\Delta r^*} \left(\frac{\partial V^*}{\partial z^*} + \frac{\partial U^*}{\partial r^*} \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{II.45})$$

Soit :

$$\rho^+ \left(V^+ \frac{\partial U^+}{\partial r^+} + U^+ \frac{\partial U^+}{\partial z^+} \right) = -\rho^+ \left(\frac{gD_0}{V_0^2} \right) - \frac{\partial P^+}{\partial z^+} + \left(\frac{\mu_0}{\rho_0 D_0 V_0} \right) \mu^+ \cdot \left(\frac{\partial^2 U^+}{\partial z^{+2}} + \frac{1}{r^+} \frac{\partial}{\partial r^+} \left(r^+ \frac{\partial U^+}{\partial r^+} \right) \right) \quad (\text{II.46})$$

$$+ \left(\frac{\mu_0}{\rho_0 D_0 V_0} \right) \frac{d\mu^+}{dT^+} \left(2 \frac{\partial T^+}{\partial z^+} \cdot \frac{\partial U^+}{\partial z^+} + \frac{\partial T^+}{\partial r^+} \left(\frac{\partial V^+}{\partial z^+} + \frac{\partial U^+}{\partial r^+} \right) \right)$$

Il apparaît deux données réduites :

- 1) $\frac{\rho_0 D_0 V_0}{\mu_0}$: nombre de Reynolds (R_e).
- 2) $\frac{V_0}{\sqrt{gD_0}}$: nombre de Froude (F_r).

Ces deux nombres sont très importants.

Le nombre de Reynolds mesure l'influence de la vitesse du fluide. On conçoit que plus un corps est dense et plus ses dimensions soit importantes, plus l'effet de sa vitesse sera important. On comprend alors l'apparition au numérateur d'une dimension caractéristique, et la densité du fluide utilisé. Du numérateur, apparaît la viscosité, grandeur exprimant la difficulté du corps fluide à se déformer et à se déplacer au contact de parois solides.

On dit que le nombre de Reynolds exprime le rapport de l'influence de l'inertie sur celle de la viscosité.

Le nombre de Froude mesure l'influence de la pesanteur. Pour comprendre sa composition, élevons-le au carré et multiplions numérateur et dénominateur par ρ . On obtient le rapport de l'énergie cinétique du fluide au travail susceptible d'être effectué par la pesanteur.

Pour μ^+ elle devient une donnée réduite du problème. Mais, il faudrait mettre sous forme adimensionnelle la relation exprimant $\mu = f(T)$ [9].

C) Transformation de l'équation d'énergie :

L'équation d'énergie s'écrit :

$$\rho_0 \rho^+ C_p \left(\frac{\Delta T \cdot V_0}{D_0} \right) \left(V^+ \frac{\partial T^+}{\partial r^+} + U^+ \frac{\partial T^+}{\partial z^+} \right) = \lambda \left(\frac{\Delta T}{D_0^2} \right) \left[\frac{1}{r^+} \frac{\partial}{\partial r^+} \left(r^+ \frac{\partial T^+}{\partial r^+} \right) + \frac{\partial^2 T^+}{\partial z^{+2}} \right]$$

$$+ 2\mu^+ \left(\frac{\mu_0 V_0^2}{D_0^2} \right) \left[\left(\frac{\partial V^+}{\partial r^+} \right)^2 + \left(\frac{V^+}{r^+} \right)^2 + \left(\frac{\partial U^+}{\partial z^+} \right)^2 \right] \quad (\text{II.47})$$

$$+ \mu^+ \left(\frac{\mu_0 V_0^2}{D_0^2} \right) \left(\frac{\partial V^+}{\partial z^+} + \frac{\partial U^+}{\partial r^+} \right)^2$$

En multipliant par $\frac{D_0}{\rho_0 V_0 C_p \Delta T}$, et en transformant, il vient :

$$\begin{aligned}
\rho^+ \left(V^+ \frac{\partial T^+}{\partial r^+} + U^+ \frac{\partial T^+}{\partial z^+} \right) &= \left(\frac{\lambda}{\mu_0 C_p} \right) \left(\frac{\mu_0}{D_0 \rho_0 V_0} \right) \left[\frac{1}{r^+} \frac{\partial}{\partial r^+} \left(r^+ \frac{\partial T^+}{\partial r^+} \right) + \frac{\partial^2 T^+}{\partial z^{+2}} \right] \\
&+ 2\mu^+ \left(\frac{V_0^2}{C_p \Delta T} \right) \left(\frac{\mu_0}{V_0 \rho_0 D_0} \right) \left[\left(\frac{\partial V^+}{\partial r^+} \right)^2 + \left(\frac{V^+}{r^+} \right)^2 + \left(\frac{\partial U^+}{\partial z^+} \right)^2 \right] \\
&+ \mu^+ \left(\frac{V_0^2}{C_p \Delta T} \right) \left(\frac{\mu_0}{V_0 \rho_0 D_0} \right) \left(\frac{\partial V^+}{\partial z^+} + \frac{\partial U^+}{\partial r^+} \right)^2
\end{aligned} \tag{II.48}$$

Il apparaît, comme données réduites :

$\frac{D_0 \rho_0 V_0}{\mu_0}$: Reynolds par ailleurs

$\frac{\mu_0 C_p}{\lambda} = \frac{\mu_0 / \rho_0}{\lambda / \rho_0 C_p} = \frac{\nu_0}{a}$: Nombre de Prandtl (Pr). Il s'agit du rapport des diffusivités de quantité de mouvement et de la diffusivité thermique.

$\frac{C_p \Delta T}{V_0^2}$: est le nombre d'Eckert (Ec), il est important si la dégradation de l'énergie mécanique en chaleur est importante. On peut le négliger dans le cas inverse [9].

Donc les équations en adimensionnel, deviennent :

L'équation de continuité :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV) + \frac{\partial U}{\partial z} = 0 \tag{II.49}$$

L'équation de quantité de mouvement sur l'axe Oz :

$$\begin{aligned}
\rho \left(V \frac{\partial U}{\partial r} + U \frac{\partial U}{\partial z} \right) &= - \left(\frac{1}{F_r^2} \right) \rho - \frac{\partial P}{\partial z} + \left(\frac{1}{R_e} \right) \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) \right) \\
&+ \left(\frac{1}{R_e} \right) \frac{d\mu}{dT} \left(2 \frac{\partial T}{\partial z} \cdot \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial T}{\partial r} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial r} \right) \right)
\end{aligned} \tag{II.50}$$

L'équation de quantité de mouvement sur l'axe Or :

$$\begin{aligned}
\rho \left(V \frac{\partial V}{\partial r} + U \frac{\partial V}{\partial z} \right) &= - \frac{\partial P}{\partial r} + \left(\frac{1}{R_e} \right) \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) - \frac{V}{r^2} \right) \\
&+ \left(\frac{1}{R_e} \right) \frac{d\mu}{dT} \left(2 \frac{\partial T}{\partial r} \cdot \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial T}{\partial z} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial r} \right) \right)
\end{aligned} \tag{II.51}$$

L'équation d'énergie :

$$\begin{aligned} \rho \left(V \frac{\partial T}{\partial r} + U \frac{\partial T}{\partial z} \right) = & \left(\frac{1}{R_c P_r} \right) \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] \\ & + 2\mu \left(\frac{1}{R_c E_c} \right) \left[\left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{V}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right] \\ & + \mu \left(\frac{1}{R_c E_c} \right) \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 \end{aligned} \quad (\text{II. 52})$$

II.8-Application hydrodynamique :

Nous nous consacrons dans cette partie à l'aspect hydrodynamique du modèle numérique. Nous nous pouvons pas garantir une bonne représentation du comportement de l'écoulement sans une description extrêmement fine de l'ensemble des variables du système. C'est une fois que ces derniers seront correctement modélisés que nous pourrons introduire une équation de la température et prendre en compte tous les aspects physiques.

Nous nous plaçons donc dans le cadre d'écoulements incompressibles axisymétriques permanent, monophasiques, turbulent.

Les variables que nous souhaitons déterminer sont les deux composantes de la vitesse, la pression et la température en tout points de l'espace (r,z). Dans cette optique, ce sont les équations de continuité et de quantité de mouvement et l'équation d'énergie, qui sont résolues.

II.8.1-Propriétés physiques du fluide en présence :

Notre écoulement est d'une manière générale composé de deux domaines séparés annulaire et axisymétrique, mais dans les deux domaine circule le même fluide (eau).

Les propriétés physiques du fluide qui nous intéresse sont la masse volumique ρ et la viscosité dynamique μ . il est possible d'introduire ces quantités à partir de l'interface de notre code de calcul.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi pour l'eau :} \quad \rho &= 998.8 \cdot \text{Kg} / \text{m}^3 \\ \mu_0 &= 1.161 \times 10^{-3} \cdot \text{Kg} / \text{m} \cdot \text{s} \end{aligned} \quad (\text{II. 53})$$

II.8-2- Domaine de l'écoulement :

II.8.2.1-Géométrie :

L'outil de simulation que nous développons vise à décrire des écoulements dans un puits producteur avec injection, avec configuration verticale, soit d'une profondeur de l'ordre de 1300 m et de diamètre de l'ordre de 0.5 mètre.

II.8.2.2-Volume d'étude et système de coordonnées utilisé :

La géométrie du domaine d'étude, dans lequel évoluera de l'eau, est pour commencer celle d'un tronçon d'une conduite de longueur $l_{conduite}$, de diamètre extérieur D_{ext} et diamètre intérieur D_{int} avec des sections longitudinal uniformes.

Compte tenu de la géométrie, nous adoptons un système de coordonnées cylindriques pour définir les limites de notre domaine et résoudre les équations du système.

II.8.2.3-Maillage :

Dans une géométrie cylindrique, nous découpons le domaine selon une grille de volumes de contrôle (cellules) cylindriques, la taille de volumes de contrôle n'est pas uniforme sur l'ensemble de la configuration ; elle varie cependant lentement et demeure du même ordre de grandeur sur tout le domaine pour ne pas introduire trop d'erreur au niveau de la résolution numérique des équations.

Pour la même raison, chaque cellule possède des dimensions proportionnées les unes par rapport aux autres.

Notre domaine est divisé en trois régions, un écoulement annulaire supérieur, inférieur et axisymétrique. Puisque, les gradients des vitesses en rapprochant des deux parois extérieur et intérieurs de la conduite axisymétrique, le maillage dans ces régions serait raffiné plus que l'autre région.

Donc, le maillage représenté dans la *Figure II.3* selon r et z est choisi uniforme avec un nombre des nœuds modéré puisque les gradients dans le sens longitudinal sont faibles.

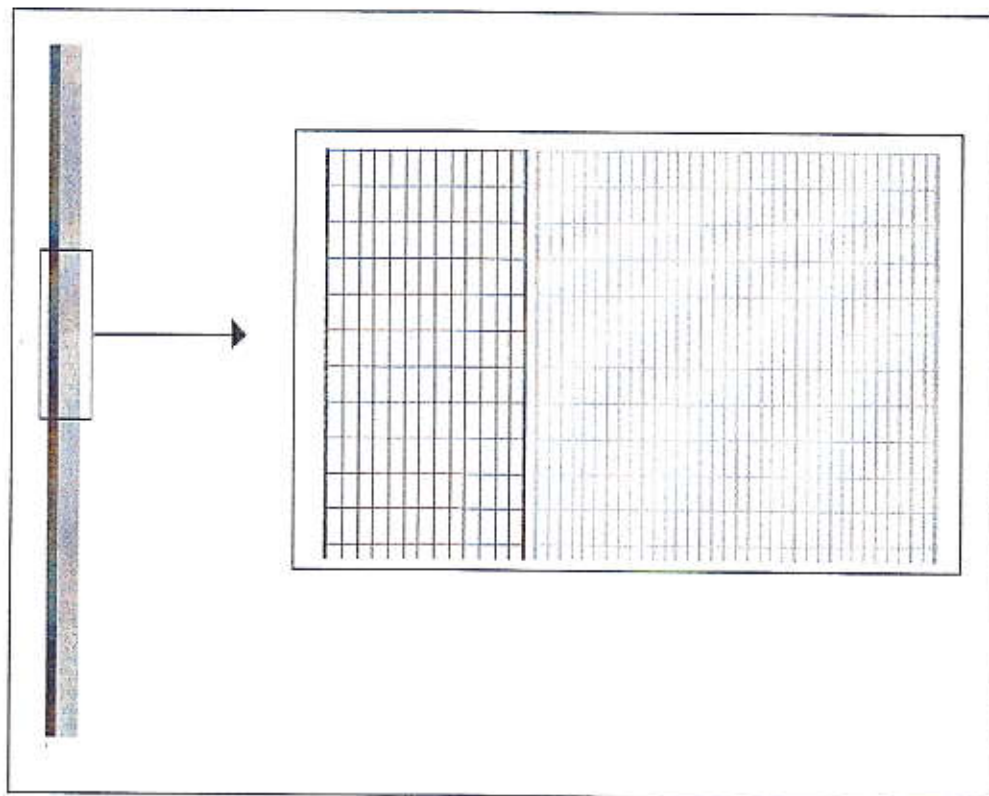


Figure II.3 : schématisation du maillage utilisé.

II.8.3-Conditions initiales :

Nous devons fournir des conditions initiales qui représentent l'état de base du modèle à l'instant où commence la simulation. Dans le cas d'une simulation sans état initial intégralement connu à partir d'une autre simulation précédente, les conditions initiales de chaque variable sont pris égale à zéro par défaut.

Afin que nous ne soyons pas gérés par des problèmes de divergence, nous devons constituer un état initial qui s'éloigne le moins possible d'une certaine réalité. Toutefois, nous devons garder à

l'esprit que ces conditions initiales ne constituent qu'une base théorique aux calculs ultérieurs. Nous pouvons donc simplifier certaines spécifications lorsque nous savons que cela n'a pas d'incidence sur la résolution numérique.

II.8.3.1-Les vitesses :

Nous choisissons un profil de vitesse parabolique dans les deux écoulements annulaires et axisymétriques. Bien évidemment, ce type de profil est rencontré en pratique et il suffit largement à l'initialisation.

II.8.3.2-La pression :

Nous cherchons à initialiser la pression dans les deux écoulements à la pression hydrostatique à partir d'une pression de référence fixée à zéro à la limite supérieure du domaine. La pression n'intervient que par son gradient dans les équations, le choix de cette pression de référence n'influence aucunement la solution finale mais peut jouer un rôle non négligeable sur la rapidité de convergence de la résolution numérique des équations. La pression est simplement définie à une constante additive près.

La pression hydrostatique en un point est en toute rigueur équivalente au poids de la colonne de fluide au-dessus de ce point.

II.8.4-Conditions aux limites :

Nous abordons la partie de la modélisation qui nous a posé le plus de problème dans la mesure où nous avons dû faire face à de nombreuses instabilités numériques. En effet, la spécification des conditions aux limites demeure le problème essentiel dans l'étude des écoulements. En particulier, les conditions sur les deux coté de la paroi axisymétrique sont souvent les plus délicates à déterminer.

II.8.4.1-Conditions aux limites dynamiques :

II.8.4.1.1-Condition à la limite entrée :

Pour les deux écoulements, nous décidons de faire porter tout naturellement la condition à la limite amont sur le débit d'eau entrant $Q_{entrée}$. Cependant, nous choisissons d'être plus précis et fixons finalement le champ de vitesse amont. Avec l'adaptation du profile de parabolique le plus rencontré dans les conduites cylindriques.

Donc, nous allons adapté des conditions de Dirichlet sur les vitesses. Autrement dit, dans un premier temps, nous avons besoin de former la composante longitudinale de la vitesse débitante. Nous l'imposons égale au rapport du débit d'eau d'entrée à la surface de passage amont.

En ce qui concerne la vitesse transversale $V_{entrée}$, elle est fixée nulle dans toute la section amont.

II.8.4.1.2-Condition à la limite sortie :

Pour modéliser la sortie, nous décidons d'une manière générale d'imposer une condition de Neumann avec des gradients normaux nuls sur toutes les variables.

Il faut dire que, notre choix c'est porté sur une condition de type "mass flow boundary" afin de laisser le programme calculer lui même le débit d'eau en sortie. Cependant, à tout moment, le débit aval doit être obligatoirement identique au débit amont, ce qui est réalisable pour un écoulement permanent. Dans la figure II.4 on représente les conditions aux limites dynamiques.

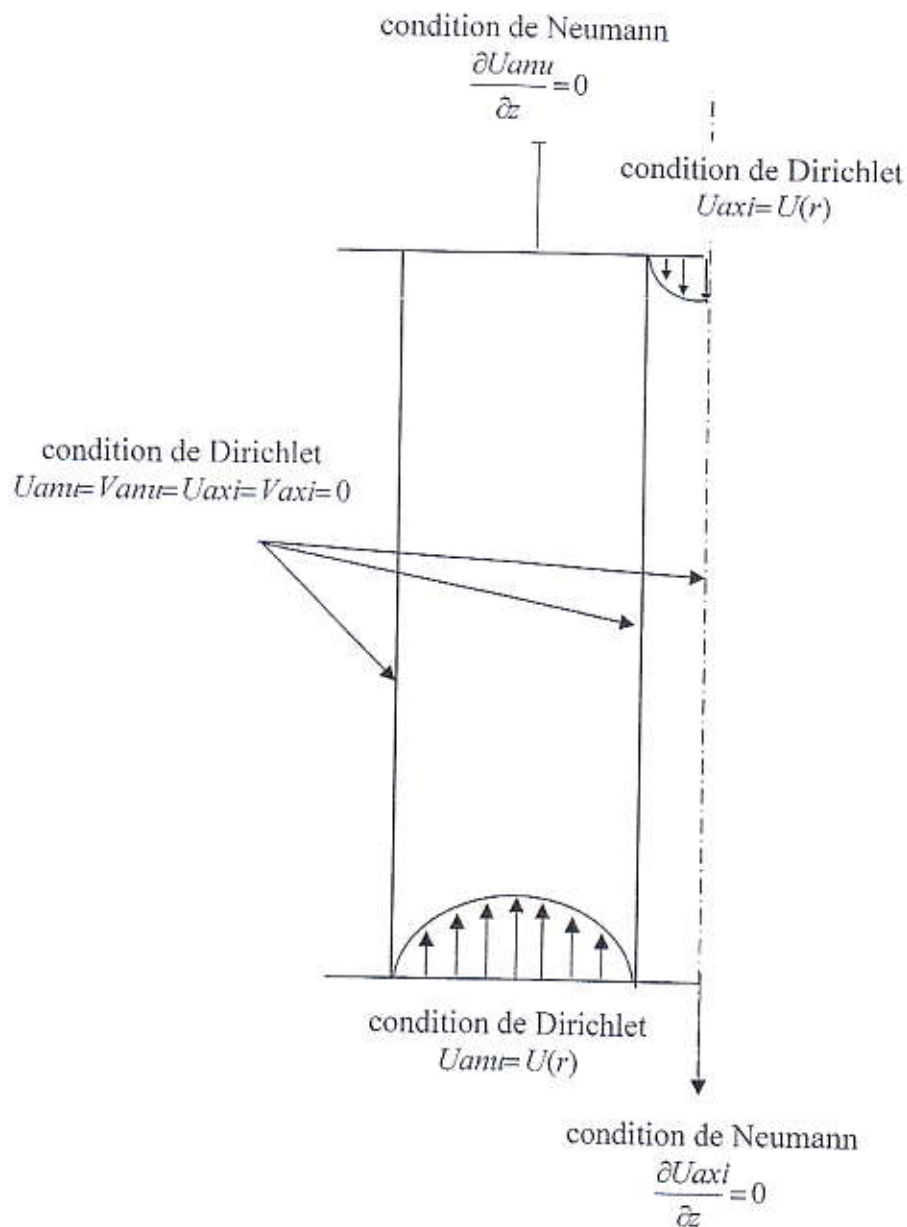


Figure II.4 : Conditions aux limites dynamiques

II.8.4.2- Conditions aux limites thermiques :

II.8.4.2.1-Conditions à la limite entrée :

Nous choisissons d'imposer une condition de type Dirichlet sur la limite amont tel que :

Pour l'écoulement annulaire ascendant $T_{z_{\max}} = T_c$

Pour l'écoulement axisymétrique descendant $T_{z_0} = T_f$

II.8.4.2.2- Condition à la limite sortie :

Pour la limite sortie des deux écoulement, nous choisissons d'imposer une condition de type Neumann (nous supposons l'écoulement est développer), tel que :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{\text{sortie}} = 0 \quad (\text{II. 54})$$

II.8.4.2.3-Conditions aux parois :

Sur la paroi latérale de l'écoulement annulaire, nous choisissons d'imposer un profil linéaire de imposé de la température. Ce profil est identique au profil de température de la géologie. Cette condition est valable en considérant que la géologie comme un milieu semi-infini. Donc le profil sera comme suit :

$$T(R_{\text{ext}}, z) = T_0 + A \times z \quad (\text{II. 55})$$

Tandis que sur la paroi de la conduite axisymétrique, nous choisissons d'imposer une condition de conservation de flux. Tel que :

$$h_{\text{annu}} (T_c - T_p) = h_{\text{axi}} (T_p - T_f) \quad (\text{II. 56})$$

Donc nous pouvons déterminer la température à la paroi :

$$T_p = \frac{h_{\text{annu}} T_c + h_{\text{axi}} T_f}{h_{\text{annu}} + h_{\text{axi}}} \quad (\text{II. 57})$$

Avec : h_{annu} est le coefficient de convection dans écoulement annulaire.

h_{axi} est le coefficient de convection dans l'écoulement axisymétrique.

T_p la température à la paroi axisymétrique.

Les coefficients de convection annulaire et axisymétrique, sont calculés à partir du nombre de Nusselt défini pour un écoulement dans des conduites pour un régime turbulent [12].

$$Nu = 0.023 R_e^{0.8} P_r^{0.33} \quad (\text{II. 58})$$

$$\text{Ainsi : } h = \frac{\lambda \cdot Nu}{D_h} \quad (\text{II. 59})$$

Avec : λ conductibilité du fluide en présence.

Et D_h le diamètre hydraulique défini pour les deux écoulements comme suit :

Pour l'écoulement annulaire $D_h = D_{\text{ext}} - D_{\text{int}}$

Pour l'écoulement axisymétrique $D_h = D_{\text{int}}$

D_{ext} : Diamètre de la conduite extérieur.

D_{int} : Diamètre de la conduite intérieur.

Les conditions aux limites thermiques sont indiquées sur la figure II.5.

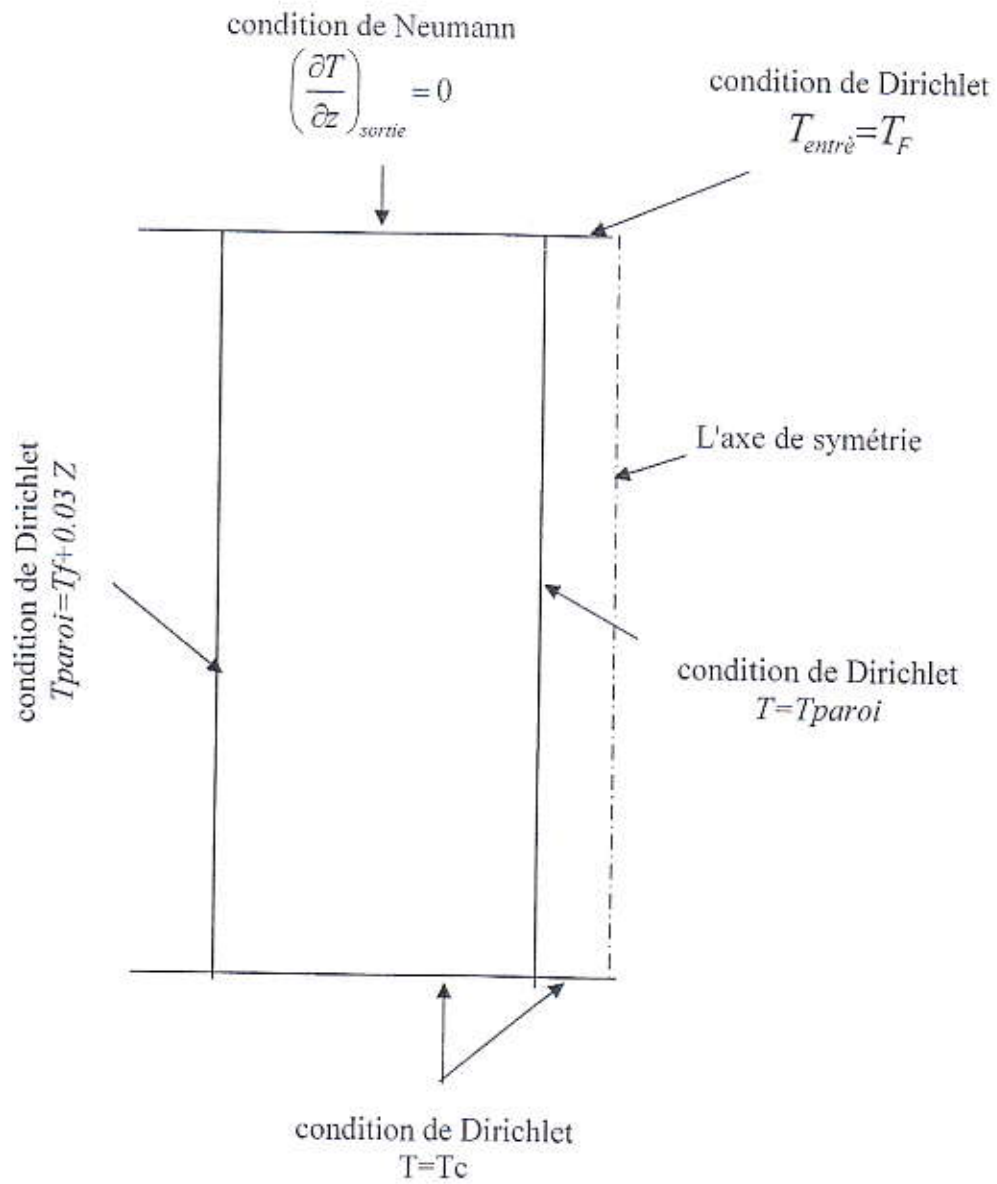


Figure II.5 : Conditions aux limites thermiques

Chapitre III

La résolution numérique par la
méthode des volumes
finis

Chapitre III : La résolution numérique par la méthode des volumes finis

III.1-Introduction :

Les trois grandes méthodes numériques utilisées dans les codes tridimensionnels sont les volumes finis, les différences finies et les éléments finis.

La méthode des différences finies consiste à discrétiser les équations continues aux nœuds d'un maillage prédéfini en calculant chaque dérivée partielle à l'aide des séries de Taylor tronquée pour obtenir des équations linéaires reliant la valeur des inconnues en un nœud aux valeurs de ces mêmes inconnues aux nœuds voisins.

La technique des éléments finis discrétise l'espace à l'aide d'éléments géométriques simples (triangle ou quadrangle en générale). Comme elle permet de modéliser des géométries très complexes, elle est parfois préférée par la méthode des volumes finis.

Ensuite, la forme forte des équations est remplacée par la forme faible dans laquelle les inconnues sont approximées par une combinaison linéaire de fonctions de base dont le support est un des éléments.

La méthode des volumes finis, choisie par notre programme et largement décrite par Patankar S.V. [14], consiste à discrétiser le domaine de l'écoulement en une multitude de volumes de contrôle (i.e. cellules) puis d'effectuer des bilans (de masse, de quantité de mouvement...) sur ces petits volumes. Pour cette raison, la formulation fait apparaître des intégrales triples de volume.

L'avantage déterminant des volumes finis par rapport aux autres méthodes est qu'ils sont conservatifs; en bref, tout ce qui sort d'un volume de contrôle entre dans un autre.

En pratique, il est courant de procéder dans l'autre sens. Chaque équation continue est intégrée sur chaque volume de contrôle puis le théorème d'Ostrogradsky est utilisé à fin de transformer certaines intégrales de volume en intégrales de surface :

$$\iiint \frac{\partial B_j}{\partial x_i} dV = \iint_A B_j n_j dA \quad (\text{III.1})$$

où \vec{B} est un vecteur quelconque.

\vec{n} est un vecteur unitaire normal à la surface A quelconque du volume V .

Ainsi donc, la contribution de ce travail, qui se situe sur plan numérique, consiste à adopter les deux formulations suivantes :

-D'une part, une méthode intégrale qui repose sur une technique d'approximation polynomiale locale des variables. Sa relative simplicité de mise en œuvre et son efficacité font qu'elle est employée pour résoudre divers problèmes de couche limite.

-D'autre part, une méthode de type volume de contrôle qui a pour qualité principale de réduire les instabilités numériques. Elle a été développée par Patankar (1980). Celui-ci garde les équations de Navier Stokes sous leur forme primitive, combine des schémas aux différences finies centrés et décentrés, et développe un algorithme numérique consistant à prédire un champ de vitesse intermédiaire et à résoudre une équation elliptique pour la pression [15].

III.2-Méthode des volumes finis :

III.2-1-Principe de la méthode :

La formulation différences finies adoptée ici, consiste en une approche du type volume de contrôle. Son principe est basé sur le fait de proposer un champ de pression qui permet d'obtenir une première approximation du champ de vitesse de l'écoulement. Puis, on applique des corrections du champ de pression dans le but de rendre le champ de vitesse résultant conforme avec l'équation de continuité. Cette procédure a été réexaminée par la suite et adapté à de multiples problèmes de convection-diffusion [15].

D'abord, rappelons que nous pouvons écrire les équations sous la forme générale suivante :

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \Phi U_i)}_1 = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right)}_2 + \underbrace{S_\Phi}_3 \quad (\text{III.2})$$

Pour nous donner une idée de la forme des termes à discrétiser, nous allons fournir dans le tableau suivant, la valeur de Φ , Γ_Φ et S_Φ pour chacune des équations en présence.

| EQUATION DE CONTINUITÉ | |
|---|---|
| Φ | 1 |
| Γ_Φ | 0 |
| S_Φ | 0 |
| Equation de quantité de mouvement sur z | |
| Φ | \bar{U}_z |
| Γ_Φ | μ |
| S_Φ | $-\rho g - \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{d\mu}{dt} \bar{\nabla} T \cdot \left(\bar{\nabla} U_z + \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \right)$ |
| Equation de quantité de mouvement sur r | |
| Φ | \bar{U}_r |
| Γ_Φ | μ |
| S_Φ | $-\frac{\partial P}{\partial r} - \mu \frac{U_r}{r^2} + \frac{d\mu}{dt} \bar{\nabla} T \cdot \left(\bar{\nabla} U_r + \frac{\partial \bar{U}}{\partial r} \right)$ |
| Equation d'énergie | |
| Φ | T |
| Γ_Φ | λ / C_p |
| S_Φ | $2\mu \left[\left(\frac{\partial U_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{U_r}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \mu \left(\frac{\partial U_r}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial r} \right)$ |

Tableau III.1 : Termes des équations à discrétiser.

Pour aborder l'intégration de l'équation (III .2), nous commençons par définir à l'intérieur du domaine de calcul un maillage constitué d'un réseau de points $P_{IJ}(I \cdot \Delta r, J \cdot \Delta z)$ dans un repère à coordonnées cylindriques.

L'approche du type volume de contrôle exige que l'on définisse autour du point P_{IJ} un volume élémentaire sur lequel on va intégrer l'équation aux dérivées partielles. Pour deux points voisins, les volumes de contrôle respectifs doivent posséder un côté commun. Il s'en suit que la réunion de tous les volumes de contrôle couvre l'ensemble du domaine de calcul.

Cette propriété fondamentale va nous permettre de mettre en évidence des propriétés de conservation des flux locaux et globaux, propriétés d'un grand intérêt en ce qui concerne la résolution numérique des équations [15].

Par ailleurs afin de donner une description suffisamment claire des méthodes de discrétisation employées, nous allons nous appuyer sur les figures suivantes.

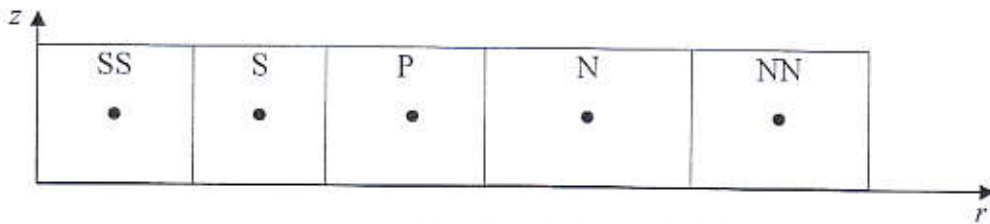


Figure III. 1: volumes de contrôle sur r .

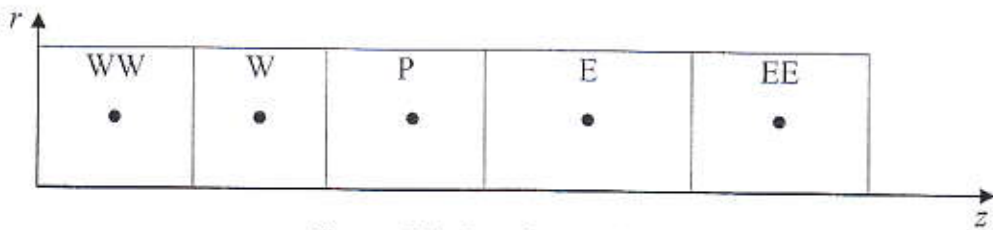


Figure III. 2: volumes de contrôle sur z .

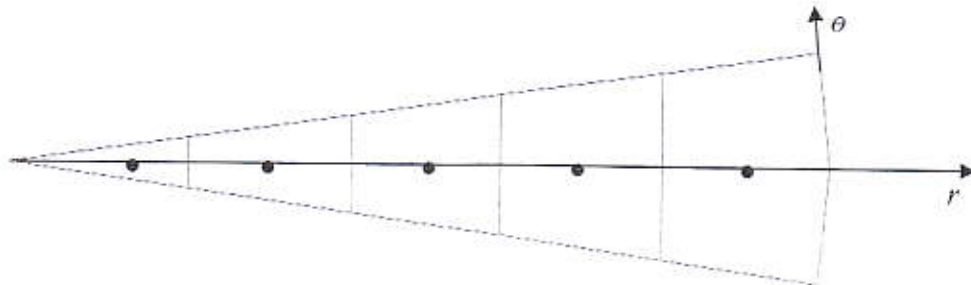


Figure III. 3: volumes de contrôle sur le plan transversal.

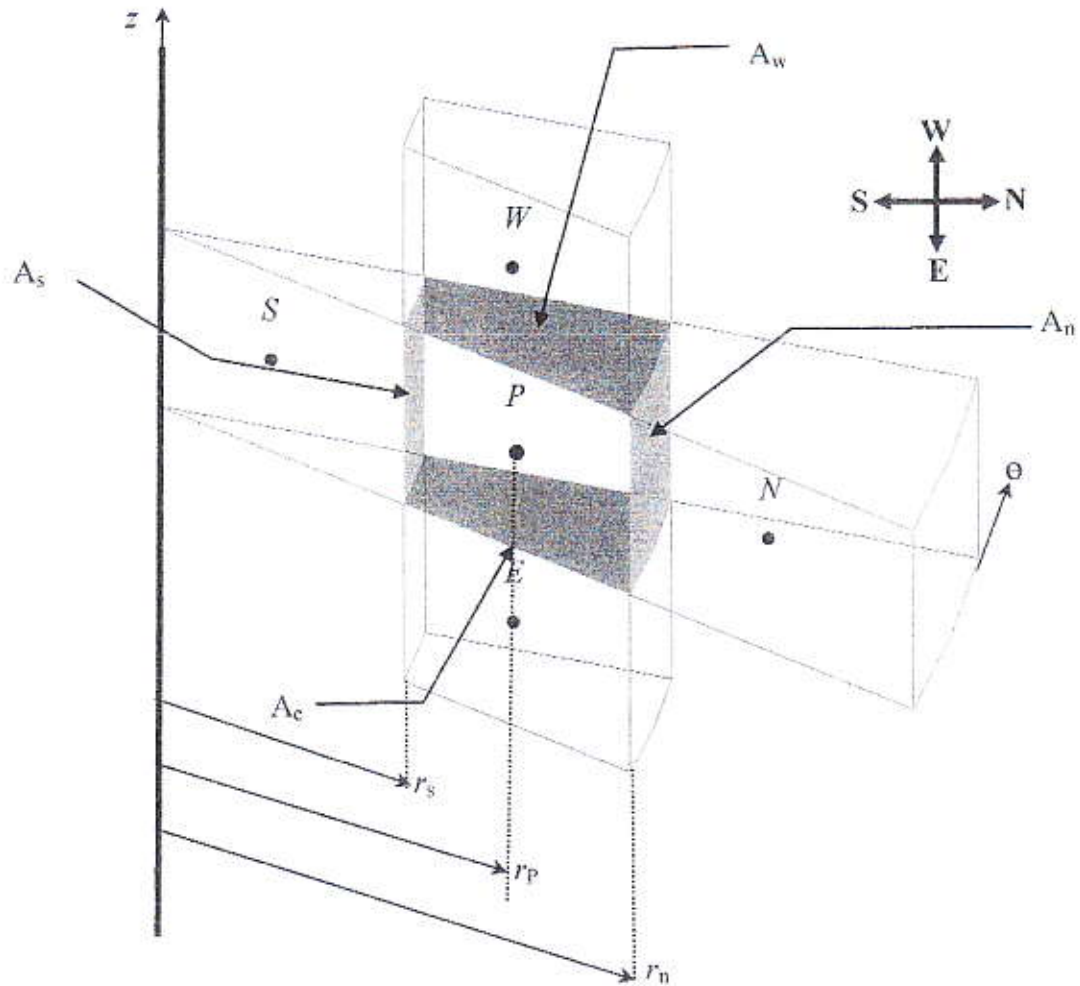


Figure III. 4 : volume de contrôle dans l'espace

III.2.2- Calcul des surfaces :

Pour l'élément de volume cylindrique ci-dessus, on peut déterminer les quatre surfaces suivantes :

$$A_n = r_n \cdot \Delta\theta \cdot \Delta z$$

$$A_s = r_s \cdot \Delta\theta \cdot \Delta z$$

$$A_e = A_w = r_p \cdot \Delta\theta \cdot \Delta r$$

Pour $\Delta\theta = 1$, on retrouve :

$$A_n = r_n \cdot \Delta z$$

$$A_s = r_s \cdot \Delta z$$

$$A_e = A_w = r_p \cdot \Delta r$$

III.2.3- Application à l'intégration d'une équation de convection-diffusion :

Pour illustrer la méthode du volume de contrôle, nous allons l'appliquer sur une équation de type convection-diffusion.

Ainsi donc, l'intégration de l'équation (III .2) sur un volume de contrôle V de frontière A , donne :

$$\iint_{A_i} \rho \Phi \overline{U_j} \cdot n_j dA = \iint_{A_i} \Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \cdot n_j dA + \iiint V S_\Phi dV \quad (III .3)$$

L'évaluation des différentes intégrales de l'équation (III .3) demande que l'on fasse un certain nombre d'approximations de façon à former un système d'équations linéaires liant entre elles les valeurs de la fonction Φ aux points P_{ij} . L'une des difficultés de cette évaluation est le choix des profils adéquats exprimant l'évolution de Φ entre les points du maillage.

III.2.4- Discrétisation spatiale :

III.2.4.1- Le terme de diffusion :

Dans un premier temps, le terme de diffusion est décomposé selon les quatre faces du volume du contrôle étudié :

$$\begin{aligned} \iint_{A_i} \Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \cdot n_j dA = & \left[\Gamma_{\Phi_e} A_e \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_e - \Gamma_{\Phi_w} A_w \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_w \right] \\ & + \left[\Gamma_{\Phi_n} A_n \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_n - \Gamma_{\Phi_s} A_s \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_s \right] \end{aligned} \quad (III .4)$$

Dans un deuxième temps, chaque terme est calculé indépendamment des autres. Nous ne développons ici que le terme de la face e , le calcul des autres termes s'effectuant de manière tout à fait analogue.

Pour obtenir une valeur au centre de la face e , le schéma centré utilise le centre de la maille amont P et le centre de la maille aval E afin d'effectuer une approximation linéaire entre ces deux points.

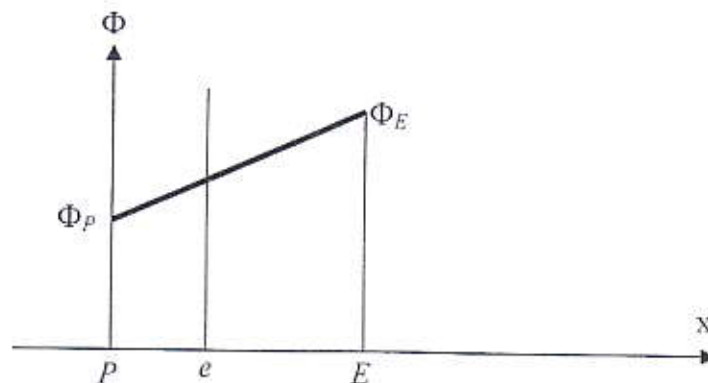


Figure III. 5: Approximation linéaire.

Cette technique permet de connaître le coefficient de diffusion au centre de la face e dans un maillage non uniforme avec une précision d'ordre deux dans la mesure où elle fait intervenir les distances entre le centre de la face et les deux centres de mailles voisines :

$$\Gamma_{\phi_e} = \frac{\overline{eE} \cdot \Gamma_{\phi_p} + \overline{Pe} \cdot \Gamma_{\phi_e}}{eE + Pe} \quad (\text{III.5})$$

Le gradient en e est également déterminé grâce à cette approximation linéaire :

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_e = \frac{\Phi_e - \Phi_p}{PE} \quad (\text{III.6})$$

Il est intéressant de noter qu'avec cette approximation, le gradient est identique en tous les points placés entre les deux centres de la maille P et E , la discrétisation du gradient sur la face e est donc effectuée identiquement pour un maillage uniforme ou non uniforme.

Néanmoins, l'évaluation du gradient avec la formule précédente perd en précision pour un maillage non uniforme. La discrétisation n'est du second ordre que lorsque la face e se trouve à égale distance des deux points P et E , c'est-à-dire dans un maillage uniforme [16].

Pour bien éclairer cette méthode de discrétisation, nous allons l'appliquer sur le cas particulier du terme de diffusion de l'équation de conservation de quantité de mouvement dans la direction z qui constitue un exemple type.

On considère μ variable dans l'espace donc :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu \cdot r \frac{\partial U_z}{\partial r} \right) \quad (\text{III.7})$$

On va intégrer cette quantité sur un volume de contrôle. On commence par la première partie, rappelons que les variations dans le sens azimutal sont nulles donc on prend $\Delta\theta = 1$:

$$\begin{aligned} \int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) \cdot r dr dz \cdot \Delta\theta &= r \Delta r \Delta\theta \cdot \int_w^e \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) \cdot dz \\ &= r_p \Delta r \Delta\theta \cdot \left[\left(\mu \frac{\partial U_z}{\partial z} \right)_e - \left(\mu \frac{\partial U_z}{\partial z} \right)_w \right] \\ &= \left[A_e \mu_e \left(\frac{\partial U_z}{\partial z} \right)_e - A_w \mu_w \left(\frac{\partial U_z}{\partial z} \right)_w \right] \end{aligned} \quad (\text{III.8})$$

De même pour la deuxième partie :

$$\begin{aligned} \int_w^e \int_s^n \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu \cdot r \frac{\partial U_z}{\partial r} \right) \cdot r dr dz \cdot \Delta\theta &= \Delta z \Delta\theta \int_s^n \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu \cdot r \frac{\partial U_z}{\partial r} \right) \cdot dr \\ &= \Delta z \left[\left(\mu \cdot r \frac{\partial U_z}{\partial r} \right)_n - \left(\mu \cdot r \frac{\partial U_z}{\partial r} \right)_s \right] \\ &= \left[\Delta z \cdot r_n \mu_n \left(\frac{\partial U_z}{\partial r} \right)_n - \Delta z \cdot r_s \mu_s \left(\frac{\partial U_z}{\partial r} \right)_s \right] \\ &= \left[A_n \mu_n \left(\frac{\partial U_z}{\partial r} \right)_n - A_s \mu_s \left(\frac{\partial U_z}{\partial r} \right)_s \right] \end{aligned} \quad (\text{III.9})$$

Donc l'intégration du terme de diffusion sur un volume de contrôle nous donne :

$$\int_{w,s}^e \int_{r,s}^n \mu \left(\frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U_z}{\partial r} \right) \right) \cdot r dr dz \cdot \Delta \theta = \left[A_e \mu_e \left(\frac{\partial U_z}{\partial z} \right)_e - A_w \mu_w \left(\frac{\partial U_z}{\partial z} \right)_w \right] + \left[A_n \mu_n \left(\frac{\partial U_z}{\partial r} \right)_n - A_s \mu_s \left(\frac{\partial U_z}{\partial r} \right)_s \right] \quad (\text{III.10})$$

Les dérivées partielles $\left(\frac{\partial U_z}{\partial z} \right)_e, \left(\frac{\partial U_z}{\partial z} \right)_w, \left(\frac{\partial U_z}{\partial r} \right)_n, \left(\frac{\partial U_z}{\partial r} \right)_s$ sont approximées comme nous l'avons indiquée par un développement en série de Taylor à l'ordre 2 autour des points e, w, n et s .

Afin d'alléger les expressions on considère $U_z = U$ et $U_r = V$ dans ce qui suit :

Donc le second membre de l'expression précédente devient :

$$D_e(U_E - U_P) - D_w(U_P - U_W) + D_n(U_N - U_P) - D_s(U_P - U_S) \quad (\text{III.11})$$

Expression dans laquelle :

$$\begin{aligned} D_e &= \frac{A_e \mu_e}{\Delta z_e} \\ D_w &= \frac{A_w \mu_w}{\Delta z_w} \\ D_n &= \frac{A_n \mu_n}{\Delta r_n} \\ D_s &= \frac{A_s \mu_s}{\Delta r_s} \end{aligned} \quad (\text{III.12})$$

Les termes D_m ($m = e, w, n, s$) s'appellent les termes de diffusion et sont toujours positifs.

III.2.4.2-Le terme de convection :

Les termes à déterminer sont les suivants :

$$\iint_{\Delta} \rho \Phi \cdot \bar{U}_j n_j dA = \rho [\Phi_e U_e A_e - \Phi_w U_w A_w] + \rho [\Phi_n V_n A_n - \Phi_s V_s A_s] \quad (\text{III.13})$$

Ainsi le terme de convection de l'équation de conservation de quantité de mouvement dans la direction z est :

$$\rho \left(U_r \frac{\partial U_z}{\partial r} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) \quad \text{ou} \quad \rho \left(V \frac{\partial U}{\partial r} + U \frac{\partial U}{\partial z} \right) \quad (\text{III.14})$$

De la même manière que les termes diffusifs, nous intégrons les termes convectifs de cette équation, on retrouve :

$$C_e U_e - C_w U_w + C_n U_n - C_s U_s \quad (\text{III.15})$$

Expression dans laquelle :

$$\begin{aligned}
 C_e &= U_e A_e \\
 C_w &= U_w A_w \\
 C_n &= V_n \Lambda_n \\
 C_s &= V_s A_s
 \end{aligned}
 \tag{III .16}$$

Avant de définir les vitesses aux centres des surfaces, il faut connaître le schéma de discrétisation des termes convectifs.

III.2.4.3-Schémas de discrétisation des termes convectifs :

III.2.4.3.1- Schéma aux différences centrées CDS :

En utilisant un développement en série de Taylor de $U_m (m = e, w, n, s)$ à l'ordre 2, l'équation (III .15)est approximée par :

$$C_e \frac{U_E + U_P}{2} - C_w \frac{U_P + U_W}{2} + C_n \frac{U_N + U_P}{2} - C_s \frac{U_P + U_S}{2}
 \tag{III .17}$$

Ainsi donc, l'expression définitive en l'absence du terme source qui correspond à une discrétisation CDS de l'équation de conservation de quantité de mouvement dans la direction z est alors :

$$\begin{aligned}
 &C_e \frac{U_E + U_P}{2} - C_w \frac{U_P + U_W}{2} + C_n \frac{U_N + U_P}{2} - C_s \frac{U_P + U_S}{2} \\
 &- D_e(U_E - U_P) + D_w(U_P - U_W) - D_n(U_N - U_P) + D_s(U_P - U_S) = 0
 \end{aligned}
 \tag{III .18}$$

Cette dernière équation peut être regroupée sous la forme générale suivante :

$$ApU_P = AeU_E + AwU_W + AnU_N + AsU_S
 \tag{III .19}$$

En identifiant cette équation à l'équation précédente, on obtient :

$$\begin{aligned}
 Ae &= D_e - \frac{C_e}{2} \\
 Aw &= D_w + \frac{C_w}{2} \\
 An &= D_n - \frac{C_n}{2} \\
 As &= D_s + \frac{C_s}{2} \\
 Ap &= \sum_m Am + S_C
 \end{aligned}
 \tag{III .20}$$

Avec :

$$S_C = C_e - C_w + C_n - C_s
 \tag{III .21}$$

Les coefficients $Am(m = e, w, n, s)$ représentent l'influence de la convection et de la diffusion aux quatre faces du volume de contrôle, en terme du débit massique C_m et de la diffusion D_m .

Etant donné que suivant la grandeur et le signe des termes C_m , et plus précisément ceux de la composante respective de la vitesse, les coefficients Am peuvent être positifs ou négatifs.

Cependant, il a été montré pour un problème unidimensionnel [14] que la réalité physique des problèmes des écoulements et/ou de transfert de chaleur exige que leurs valeurs soient positifs ou nulles.

Des solutions non physiques peuvent être apparaître si les coefficients Am deviennent négatifs, c'est-à-dire que, chaque fois que, en un point du réseau, on aura :

$$|Pe_m| > 2 \quad \text{Avec :} \quad Pe_m = \frac{C_m}{D_m} \quad (III .22)$$

Appelé nombre de Péclet de la grille, indique le rapport du transfert de la matière et/ou de la chaleur par convection au transfert par diffusion. Il est toujours théoriquement possible, en choisissant un maillage suffisamment fin, de ce placer dans ces conditions telles que la discrétisation d'une équation de type convection diffusion par un schéma CDS. Cependant, pour des valeurs élevées du module de la vitesse, ces possibilités restent malheureusement théoriques puisque une augmentation du nombre de points du maillage a toujours des limite parce qu'elle se traduit souvent par des encombrements en mémoire et du temps de calcul sur ordinateur qui peuvent rapidement devenir prohibitifs [15].

La formulation centrée des flux convectifs n'est donc généralement employée que dans le cas des écoulements modérés pour lesquels les problèmes de stabilité numérique ne sont pas critiques. Aussi, pour que tous les coefficients Am soient positifs, les nombres de Péclet locaux Pe_m doivent être inférieurs à 2 en valeur absolue.

III.2.4.3.2- Schéma Upwind UDS1 :

L'un des remèdes pour pallier les difficultés citées précédemment est l'utilisation des schémas décentrés (schéma Upwind) dans lesquels le bilan des flux convectifs calculé à l'aide d'une formulation non symétrique. La justification des schémas décentrés se trouve dans le fait que le terme dérivée particulière représente le transport d'une quantité le long d'une caractéristique de l'écoulement, et que le transfert d'information se fait donc de l'amont vers l'aval [16].

Ceci signifie que, si U_e est positive, une meilleur approximation de la valeur de U au point e , U_e (dans le cas générale Φ_e), est celle qui existe au point P , U_p (Φ_p), au lieu de la moyenne des deux valeurs adjacentes $\frac{U_E + U_P}{2}$ ou $(\frac{\Phi_E + \Phi_P}{2})$. De plus, lorsque la valeur de la vitesse de l'écoulement est élevée, la quantité de (chaleur ou matière) convectée entre les points E et P est plus importante que celle diffusée entre ces deux points, de telle manière que le flux diffusif à travers la face e peut être légitimement négligé vis-à-vis au flux convectif.

Soit, suivant la direction $E \rightarrow W$:

$$\begin{aligned} \text{Si } U_e > 0 : \quad & \Phi_e = \Phi_p \quad \text{et} \quad \Phi_w = \Phi_W \\ \text{Si } U_e < 0 : \quad & \Phi_e = \Phi_E \quad \text{et} \quad \Phi_w = \Phi_P \end{aligned} \quad (III .23)$$

Donc, la discrétisation des termes convectifs devient :

$$\begin{aligned}
 C_e U_e - C_w U_w + C_n U_n - C_s U_s = & U_p \cdot \sup(C_e, 0) - U_E \cdot \sup(-C_e, 0) \\
 & - U_W \cdot \sup(C_w, 0) + U_P \cdot \sup(-C_W, 0) \\
 & + U_P \cdot \sup(C_n, 0) - U_N \cdot \sup(-C_n, 0) \\
 & - U_S \cdot \sup(C_s, 0) + U_P \cdot \sup(-C_s, 0)
 \end{aligned} \tag{III .24}$$

sup. désigne l'opérateur maximum.

Cette expression montre que, suivant le sens de l'écoulement dynamique, on ne tient compte que des effets de la maille juste en amont de l'interface. La maille en aval ne contribue pas au calcul des flux convectifs.

Maintenant, nous identifions l'expression qui correspond à une discrétisation UDS1 de l'équation (III .19).

Nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 Ae &= D_e + \sup(-C_e, 0) \\
 Aw &= D_w + \sup(C_w, 0) \\
 An &= D_n + \sup(-C_n, 0) \\
 As &= D_m + \sup(C_s, 0) \\
 Ap &= \sum_m Am + S_C
 \end{aligned} \tag{III .25}$$

Le schéma UDS1, de précision spatiale de premier ordre, vérifie donc la condition de transport (un schéma numérique aux différences finies est dit transportif lorsque l'effet d'une perturbation d'une grandeur, telle que la température, est sensible dans la même direction que la vitesse). De ce point de vue, le schéma décentré paraît plus logique que le schéma centré, mais c'est surtout à des vitesses d'écoulement élevées dans des maillage grossiers qu'on obtient des solutions physiquement acceptables.

L'utilisation du schéma UDS1 dans les zone de l'écoulement où la condition sur le nombre de Péclet local (Pe_m) vérifie :

$$|Pe_m| < 2$$

est superflue car cela revient à dégrader la précision du schéma alors qu'on sait que la formulation CDS ne poserait pas ce problème. Cette remarque est à la base de la discrétisation hybride, exposé au paragraphe suivant.

III.2.4.3.3 Schéma hybride :

Ce schéma, dont la précision spatiale est réduite au premier ordre, possède les propriétés de transport et de convection.

Le schéma hybride se réduit à l'approximation centrée CDS lorsque $|Pe_m| < 2$, mais il devient identique au schéma Upwind UDS1 lorsque $|Pe_m| > 2$.

Il se présente donc comme étant une combinaison de ces deux schémas.

Les coefficients A_m sont donnés par :

$$\begin{aligned}
 Ae &= \sup\left(-C_e, D_e - \frac{C_e}{2}, 0\right) \\
 Aw &= \sup\left(C_w, D_w + \frac{C_w}{2}, 0\right) \\
 An &= \sup\left(-C_n, D_n - \frac{C_n}{2}, 0\right) \\
 As &= \sup\left(C_s, D_s + \frac{C_s}{2}, 0\right) \\
 Ap &= \sum_m A_m + S_c
 \end{aligned}
 \tag{III .26}$$

Il est à noter que cette formulation est valable pour n'importe quelle localisation des interfaces entre les mailles. Elle permet de fournir des solutions physiquement acceptables aux divers problèmes sans toutefois garantir la précision des solutions obtenues [16].

III.2.4.3.4- Schéma de loi de puissance :

La meilleure approximation de la solution exacte est donnée par le schéma de loi de puissance, laquelle a été décrite par Patankar [14]. Bien que un peu plus compliqué que le schéma hybride, les formules du schéma de loi de puissance ne sont pas particulièrement coûteuses en temps de calcul; elles ne fournissent une très bonne représentation de la solution exacte. Pour $|Pe_m| > 10$, ce schéma devient identique au schéma hybride.

Par exemple, a la maille E :

$$Ae = D_e \sup\left(0, \left(1 - \frac{0.1 - |C_e|}{D_e}\right)^5\right) + \sup(0, -C_e)
 \tag{III .27}$$

La formulation loi de puissance est conseillée dans les problèmes de convection-diffusion. Cependant, le schéma hybride peut être utilisé dans n'importe quelle situation.

III.2.4.4- Conclusion sur les schémas de discrétisation du terme de convection :

Tous les schémas, à l'exception des différences centrées, donnent des solutions physiquement acceptables. Mais puisque c'est le nombre de Péclet de la grille qui caractérise le comportement d'un schéma numérique, il est possible de raffiner le maillage de sorte que Pe_m devienne assez petit (< 2) pour le schéma aux différences centrées ce qui permet d'obtenir des solution raisonnables.

III.2.5-Le terme source :

Au même titre que le terme de convection, le terme source est calculé à l'aide de schéma centré de second ordre.

Pour commencer, le terme source est mis sous la forme suivante :

$$\iiint S_\phi dV = \overline{S_\phi} \cdot V
 \tag{III .28}$$

où : $\overline{S_\phi}$ est la valeur moyenne de la source S_ϕ sur la cellule.

V est le volume de la cellule.

Pour cela, toutes les variables intervenant dans S_ϕ prennent la valeur de la variable au centre de la maille et tous les gradients, y compris celui de la pression pour les équations de la quantité de mouvement, sont discrétisés au centre de la maille à l'aide de schéma centré du second ordre.

Puis, le terme $\overline{S_\phi} \cdot V$ est écrit sous la forme linéaire suivante :

$$\overline{S_\phi} \cdot V = S_u + S_p \Phi_p \quad (\text{III .29})$$

Pour notre cas, le terme source de l'équation de conservation de la quantité de mouvement sur l'axe z discrétisé de la manière suivante :

$$-\rho g - \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{d\mu}{dT} \bar{\nabla} T \cdot \left(\bar{\nabla} U_z + \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \right) \quad (\text{III .30})$$

L'intégration de cette quantité sur un volume de contrôle nous donne :

$$\int_e^w \int_s^n \left(-\rho g - \frac{\partial P}{\partial z} \right) r dr dz \cdot \Delta\theta + \int_e^w \int_s^n \frac{d\mu}{dT} \bar{\nabla} T \cdot \left(\bar{\nabla} U_z + \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \right) r dr dz \cdot \Delta\theta \quad (\text{III .31})$$

On commence par la première intégrale, remplaçant :

$$\begin{aligned} \int_e^w \int_s^n \left(-\rho g - \frac{\partial P}{\partial z} \right) r dr dz \cdot \Delta\theta &= -\rho g \cdot r \Delta r \Delta z \Delta\theta - \int_e^w P \cdot r dr \cdot \Delta\theta \\ &= -\rho g \cdot V - (A_e P_e - A_w P_w) \end{aligned} \quad (\text{III .32})$$

La deuxième intégrale nous donne avec le remplacement de U_z par U et U_r par V :

$$\begin{aligned} \int_e^w \int_s^n \frac{d\mu}{dT} \bar{\nabla} T \cdot \left(\bar{\nabla} U_z + \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \right) r dr dz \cdot \Delta\theta &= \int_e^w \int_s^n \frac{d\mu}{dT} \left(2 \frac{\partial T}{\partial z} \cdot \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial T}{\partial r} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial r} \right) \right) r dr dz \cdot \Delta\theta \\ &= \frac{d\mu}{dT} \left[2 \cdot \frac{(T_e - T_w)}{\Delta z} \cdot (A_e U_e - A_w U_w) + \frac{(T_n - T_s)}{\Delta r} \cdot ((A_n U_n - A_s U_s) + (A_e V_e - A_w V_w)) \right] \end{aligned} \quad (\text{III .33})$$

$\frac{d\mu}{dT}$ est calculé d'après le modèle choisi pour la variation de μ en fonction de T :

$$\frac{d\mu}{dT} = - \frac{\alpha + 2\beta T}{(1 + \alpha T + \beta T^2)^2} \quad (\text{III .34})$$

Donc le terme source sera :

$$\begin{aligned} S_\phi &= - \frac{\alpha + 2\beta T}{(1 + \alpha T + \beta T^2)^2} \left[2 \cdot \frac{(T_e - T_w)}{\Delta z} \cdot (A_e U_e - A_w U_w) + \frac{(T_n - T_s)}{\Delta r} \cdot ((A_n U_n - A_s U_s) + (A_e V_e - A_w V_w)) \right] \\ &\quad - \rho g \cdot V - A_e (P_e - P_w) \end{aligned} \quad (\text{III .35})$$

III.2.7-Algorithmme SIMPLE ("Semi-Implicite Method for Pressure – Linked Equation"):

III.2.7.1-Introduction:

Les équations aux différences finies des deux composantes de la vitesse U et V sont couplées entre elles par l'intermédiaire du champ de pression P . la résolution de ces équations couplées conduit à des systèmes matriciels pleins en raison de la nature elliptique de l'équation de pression dans le cas d'un écoulement incompressible. Si l'on veut éviter de résoudre des équations couplées, il faut avoir recours à un processus itératif, ce qui permet d'appliquer à chacune des deux composantes de vitesse le même algorithme de résolution. Ce processus itératif suppose que l'on se donne un champ de pression estimé P^* et ainsi on peut en déduire un champ de vitesse correspondant \vec{U}^* . Dans ces conditions le champ \vec{U}^* peut ne pas satisfaire l'équation de conservation de la masse. Il faut donc trouver un algorithme qui permet de modifier P^* et par conséquent \vec{U}^* de manière à ce que l'équation de continuité soit satisfaite [14].

Ceci est l'objet du présent algorithme. Le calcul des champs de vitesse et de pression se fait à l'aide des équations de quantité de mouvement et de continuité, discrétisées sur un maillage dont le choix se révèle être un élément essentiel à la bonne marche de l'algorithme.

III.2.7.2- Calcul des champs de vitesses :

La discrétisation de l'équation de conservation de la quantité de mouvement dans la direction r sera obtenue de la même manière que celle de l'équation de conservation de l'énergie en introduisant tous qui est terme source dans le terme B dans l'équation (III .37).

Comme l'algorithme SIMPLE est basé sur l'utilisation d'un champ de pression estimé pour pouvoir déterminer une première approche du champ de vitesse, il intéressant de ne pas introduire les gradient de pression dans le terme source B durant la discrétisation des équations de quantité de mouvement [14].

Afin de rendre possible l'application de l'algorithme, il est intéressant de ne pas discrétiser les champs de vitesse et de pression sur la même grille. Ainsi, nous allons décrire les deux réseaux de points utilisés pour discrétiser les différentes équations aux dérivées partielles gouvernant le problème physique. Le choix de la grille favoriser, d'une part les propriétés de conservation en passant d'un volume de contrôle à un autre et d'autre part faciliter la résolution numérique du système d'équations et le traitement des conditions aux limites. Les deux grille différentes sont donc définies de la manière suivante :

- une grille dite principale pour le calcul des variables P et T .
- une grille dite décalée pour évaluer les champs de vitesse et dont les nœuds sont localisés à mi-distance de ceux de la grille principale *figure III.6*. Chaque composante du vecteur vitesse U ou V est seulement décalée dans sa propre direction [14].

Dans le cas des deux maillage, les propriétés de conservation restent vérifiées et les approximations doivent être choisies de telle façon que les expressions algébriques puissent représenter au mieux la variable en question.

Supposons maintenant que nous connaissons un champ de pression P , défini aux différents points du réseau *figure III.6*. a. L'intégration des deux équations de quantité de mouvement sur le volume de contrôle des *figure III.6*. b et c entraîne le système d'équations suivant :

$$(Ap)_U U_p = \sum_m (Am)_U U_m + B_U + A_{ew} (P_W - P_p) \quad \text{(III .40)}$$

$$(Ap)_V V_p = \sum_m (Am)_V V_m + B_V + A_{ns} (P_S - P_p) \quad \text{(III .41)}$$

Tel que A_{ew} et A_{ns} sont des surfaces moyennes dans les deux directions.

Le terme $A_{ew}(P_w - P_e)$ est la force de pression agissant sur le volume de contrôle de la composante U , avec A_{ew} la surface sur laquelle agit la différence de pression.

Pour la composante de la vitesse V , le terme source B_v est calculé de la même façon que dans le cas de la composante U .

L'expression du coefficient $(Am)_v$ ($m = E, W, N, S$) sont généralement de la même forme que celle calculée dans l'autre direction. Les composantes des champs de vitesse intermédiaires, calculées à partir d'un champ de pression estimé P^* seront notées U^* , V^* tant qu'elles ne vérifient pas l'équation de continuité.

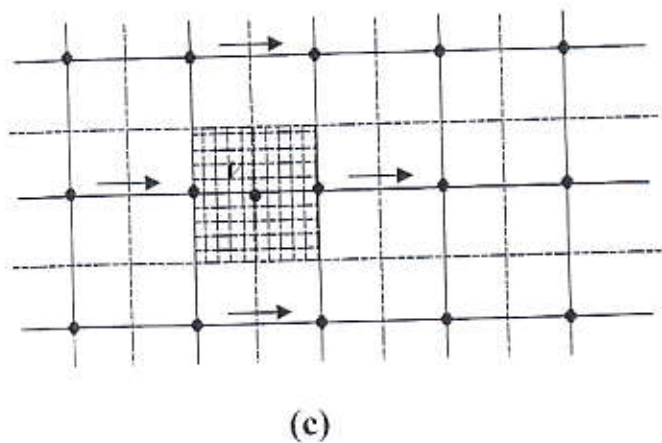
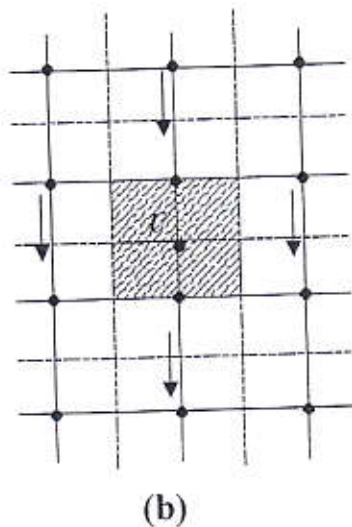
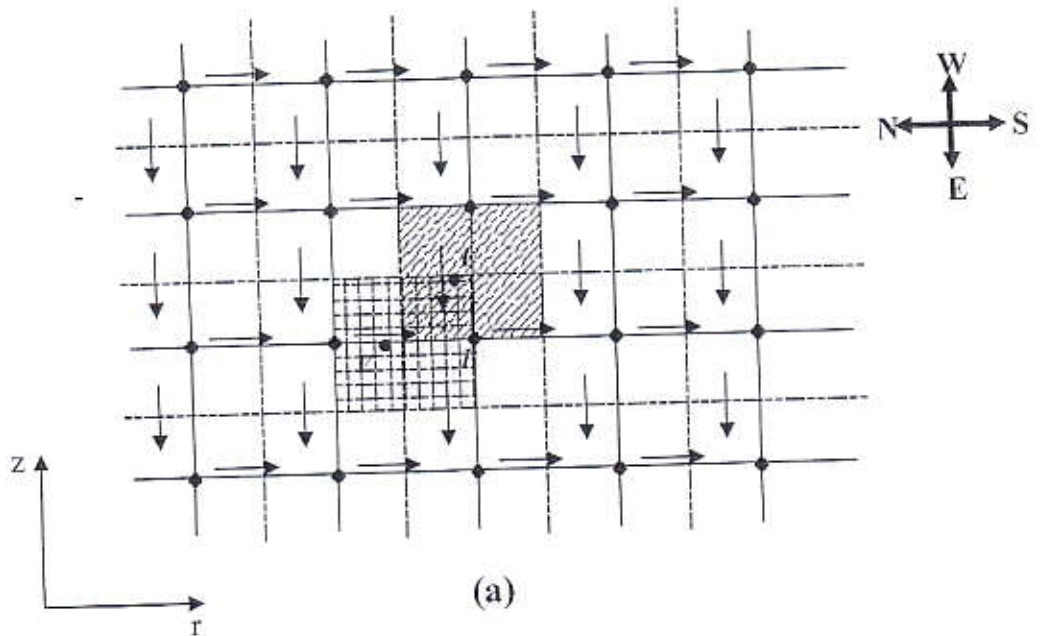


Figure (III.6) : (a)- Localisation décalée pour U et V .

\downarrow : U , \rightarrow : V , \bullet : pour P, T

(b)- Volume de contrôle pour U .

(c)- Volume de contrôle pour V .

III.2.7.3- Maintien de la condition d'incompressibilité :

III.2.7.3.1- Equation de correction de la vitesse :

Nous l'avons dit, notre objectif fondamental est de trouver un moyen permettant de corriger le champ de pression estimé P^* de telle façon que le champ de vitesse calculé (U^*, V^*) puisse progressivement s'améliorer jusqu'à ce que la condition d'incompressibilité soit remplie. Soit P' la correction de pression cherchée : cette correction entraîne, par conséquent, la modification du champ de vitesse calculé de sorte que, si U' et V' représentent les composantes des corrections de U et V , on puisse écrire les champs corrects de pression et de vitesse comme suit [14]:

$$\begin{aligned} P &= P^* + P' \\ U &= U^* + U' \\ V &= V^* + V' \end{aligned} \tag{III .42}$$

En remplaçant U et V par leur expressions dans les équations précédentes, il vient que :

$$\begin{aligned} AeU'_e &= \sum_m AmU'_m + A_{ew}(P'_p - P'_E) \\ AnV'_n &= \sum_m AmV'_m + A_{ns}(P'_p - P'_N) \end{aligned} \tag{III .43}$$

A ce stade, on annule carrément les termes $\sum_m AmU'_m$ et $\sum_m AmV'_m$, ($m = e, w, n, s$) afin que le système d'équation final puisse s'écrire sous la forme d'un système matriciel facile à résoudre à l'aide de la méthode d'élimination de Gauss-Seidel. En effet, si ces termes avaient été retenus, ils auraient dû être exprimés en fonction des termes de correction de pression et de vitesse des voisins U_m et V_m . Ces voisins prennent à leur tour les leurs et ainsi de suite.

Finalement, la formule de correction de la vitesse fournit la correction de pression sur toutes les mailles du domaine de calcul et l'équation de correction de la pression devient intraitable. Les équation de correction de U et V aux mailles e et n se réduisent à :

$$\begin{aligned} U_e &= U^* + \frac{A_{ew}}{Ae}(P'_p - P'_E) \\ V_n &= V^* + \frac{A_{ns}}{An}(P'_p - P'_N) \end{aligned} \tag{III .44}$$

Ces équations seront utilisées pour obtenir l'équation de correction de la pression établie dans le paragraphe suivant.

III.2.7.3.2- Equation de correction de la pression :

Cette équation est faite à partir de l'équation de continuité, écrite sous la forme discrétisée suivante :

$$(U_e - U_w)A_{ew} + (V_n - V_s)A_{ns} = 0 \tag{III .45}$$

En substituant les équations de correction de vitesse dans cette dernière équation, on obtient une équation en P' qui s'écrit sous la forme :

$$Ap.P' = \sum_m Am.P'_m + B_p \quad (III.46)$$

Avec :

$$\begin{aligned} A_E &= \frac{A_{ew}}{A_e} \cdot A_e \\ A_W &= \frac{A_{ew}}{A_w} \cdot A_e \\ A_N &= \frac{A_{ns}}{A_n} \cdot A_n \\ A_S &= \frac{A_{ns}}{A_s} \cdot A_s \\ Ap &= \sum_m Am \\ B_p &= (U_w^* - U_e^*)A_{ew} + (V_s^* - V_n^*)A_{ns} \end{aligned} \quad (III.47)$$

B_p représente la source masse produite par le champ de vitesse \bar{U}^* et que les corrections successives de la pression doivent anéantir. Si, au cours de la résolution numérique du système d'équation, la valeur de ce terme devient assez faible, le champ de vitesse pourra vérifier la condition d'incompressibilité et la correction de la pression ne sera plus nécessaire.

Comme l'équation générale en Φ , l'équation de correction de la pression sera résolue itérativement à l'aide de la méthode de balayage. Mais, pour cette équation, le coefficient Ap est identiquement égal à la somme des coefficients voisins Am ($m = E, W, N, S$), contrairement au cas des équations de conservation de l'énergie et de quantité de mouvement.

III.2.7.4- Séquence des opérations :

L'ensemble des calculs qui interviennent dans la résolution des équations mentionnées précédemment à l'aide de l'algorithme SIMPLE peut se résumer comme suit [14] :

1. Lire la définition du maillage, les conditions aux frontières et construire la grille décalée pour les composantes de la vitesse.
2. Se donner un champ de pression estimé P^* .
3. Calculer les composantes intermédiaires de la vitesse U^* et V^* aux nœuds de leurs grilles décalées en résolvant les équations de conservation de quantité de mouvement.
4. En résolvant l'équation de correction de la pression, calculer la correction de pression P' nécessaire pour corriger le champ de vitesse \bar{U} en vue de satisfaire l'équation de continuité.
5. Calculer le champ de pression P en additionnant P' à P^* .
6. Calculer les composantes de la vitesse U et V à l'aide des équations de correction de la vitesse (III.44).
7. Résoudre l'équation discrétisée pour la température ou pour une autre variable Φ si elle influence le champ de l'écoulement par l'intermédiaire des termes sources, des propriétés physiques du fluide, etc. (si par contre Φ n'influence pas le champ de l'écoulement, il vaut mieux la calculer après que la convergence soit atteinte).
8. Poser $P^* = P$ reprendre l'exécution à l'étape 3 en répétant toute la procédure jusqu'à ce que la condition de convergence soit remplie.

III.2.8- Algorithme SIMPLE-R (SIMPLE Revised) :

III.2.8.1- Principe de l'algorithme :

Cet algorithme a été créé pour donner une solution convergente plus rapidement que SIMPLE. Dans ce dernier, le champ de pression P' obtenu à l'aide de l'équation de correction de la pression est approché à cause de l'omission des termes $\sum_m AmU'_m$ et $\sum_m AmV'_m$. Ceci a pour conséquence l'obtention de corrections mauvaises et exagérées de champ de pression P ce qui peut pénaliser la convergence de la procédure de résolution. Ainsi, il paraît plus intéressant d'introduire un champ de vitesse permettant de calculer une distribution de pression plutôt, que d'introduire directement un champ de pression estimé [14].

Ceci est l'objet de l'algorithme de SIMPLE-R qui, premièrement, utilise l'équation de correction de la pression uniquement pour corriger les composantes de la vitesse et deuxièmement, déterminer le champ de pression établie ci-dessous.

III.2.8.2- Equation de la pression :

L'équation de quantité de mouvement (121) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$U_e = \frac{\sum_m AmU_m + B_U}{Ae} + \frac{A_{ew}}{Ae} (P_P - P'_E) \quad \text{(III .48)}$$

On définit une pseudo-vitesse, fonction uniquement des vitesses des points voisins, définie par :

$$\hat{U}_e = \frac{\sum_m AmU_m + B_U}{Ae} \quad \text{(III .49)}$$

L'équation précédente devient alors :

$$U_e = \hat{U}_e + \frac{A_{ew}}{Ae} (P_P - P'_E) \quad \text{(III .50)}$$

De la même façon, nous pouvons écrire que :

$$V_e = \hat{V}_e + \frac{A_{ns}}{An} (P_P - P'_N) \quad \text{(III .51)}$$

Il est facile de voir la similarité entre ces équations et les équations de l'algorithme SIMPLE écrites en fonction des composantes U^* et V^* . Il s'ensuit alors que, si la formulation de l'équation de correction de pression est effectuée avec ces nouvelles relations, l'équation pour la pression P serait de la forme :

$$ApP_p = \sum_m Am.P_m + B_p \quad \text{(III .52)}$$

Les coefficients Am ($m = P, E, W, N, S$) sont donnés par les équations (III .47)

. Quant au terme source B_p , il est donné par :

$$B_p = (\hat{U}_w - \hat{U}_e)A_{ew} + (\hat{V}_s - \hat{V}_n)A_{ns} \quad \text{(III .53)}$$

La formulation du terme source B_p est la seule différence entre l'équation de pression et l'équation de correction de pression. Mais, la différence fondamentale est marquée par le fait qu'aucune approximation n'a été introduite durant l'établissement de l'équation de pression. Ainsi, si on utilise un champ de vitesse correcte pour calculer les pseudo- vitesses, l'équation de pression pourra donner un champ de pression correcte en un petit nombre d'itérations [15].

III.2.8.3- Séquences des opérations :

L'algorithme SIMPLE-R utilise un processus itératif qui consiste à résoudre l'équation de pression pour obtenir un champ de pression et à utiliser l'équation de correction de la pression uniquement pour corriger les composantes de la vitesse. La séquence des opérations peut être classée de la façon suivante [14]:

1. (voir l'étape 1 de l'algorithme SIMPLE).
2. Se donner un champ de vitesse proposé (champ de vitesse initial).
3. Calculer les coefficients pour les équations de quantité de mouvement sans le terme : $-\overline{\text{grad}P}$ et ainsi déterminer \hat{U} et \hat{V} à partir de ses équations.
4. Calculer les coefficients de l'équation de pression et la résoudre pour obtenir un champ de pression P .
5. Poser $P^* = P$ et résoudre les équations de quantité de mouvement pour obtenir les composantes U^* et V^* .
6. Calculer le terme source B_p à partir de l'équation (III.53) et ainsi résoudre l'équation en P' .
7. Corriger le champ de vitesse en utilisant les équations correspondantes, mais sans corrigé le champ de pression.
8. Résoudre l'équation discrétiser pour la Température T (ou toute autre variable Φ).
9. Si les critères de convergence ne sont pas remplis, reprendre l'exécution à partir de l'étape 3.

III.2.9- Intégration des conditions aux limites :

L'introduction concrète des conditions aux limites s'effectue ensuite lors de la résolution des équations discrétisées dans les mailles intérieures jouxtant les frontières du domaine global. Elle ne se produit pas de la même manière selon s'il s'agit de conditions de Dirichlet, de conditions de Neumann ou de conditions de paroi. Néanmoins, le lien est en règle générale coupé avec la frontière en question en imposant nul le coefficient correspondant à la cellule extérieure et en introduisant dans le terme source le terme provenant de l'influence de la frontière sur le domaine [16].

Lorsque les équations sont discrétisées dans les mailles internes bordant les frontières du domaine, certaines modifications doivent être apportées aux schémas de discrétisation. C'est en effet à ce moment là que les conditions aux limites interviennent, les mailles en question n'étant plus entourées que de trois mailles au lieu de quatre.

En réalité, les changements dépendent directement du type de condition appliquée à chaque variable. Afin de simplifier les expressions, nous noterons Φ^D les variables vérifiant des conditions de Dirichlet et Φ^N celles satisfaisant des conditions de Neumann.

Supposons que nous nous trouvons dans les mailles jouxtant la frontière "EST" de la géométrie globale. Les variables Φ^D s'appuient sur leurs valeurs en A tandis que les variables Φ^N se reposent sur leurs valeurs en B, selon la figure suivante :

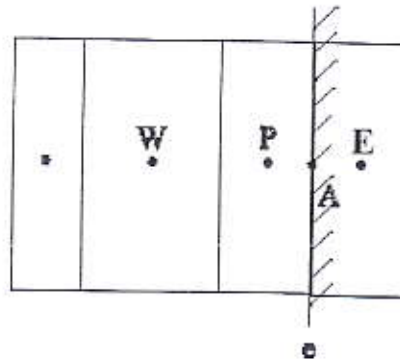


Figure (III.7) : Intégration des conditions aux limites.

Les quatre types de conditions à la limite intervenant dans notre modèle ("condition de paroi", "amont", "aval", "plan de symétrie") agissent en outre de manière assez différente sur la discrétisation des équations.

III.2.9.1- Conditions de paroi :

Nous avons déjà très largement décrit l'intégration des conditions de paroi dans les différentes équations (cf. Chap II). Pour certaines équations, le lien est coupé avec la paroi en annulant tous les termes calculés précisément sur la face de la cellule correspondant à la paroi et en ajoutant des termes sources caractérisant l'influence de la frontière solide sur l'écoulement. Pour d'autres, elles ne sont pas résolues traditionnellement, la valeur de la variable étant directement imposée au centre de la maille.

La particularité des conditions de paroi oblige, pour certaines variables, à imposer directement une valeur de variable Φ_{fix} au centre des cellules jouxtant la frontière. Ceci est réalisé en imposant les valeurs suivantes dans l'équation de la variable en question :

$$\begin{aligned} Ap &= 1 \\ Am &= 0 \quad (m = N, S, E, W) \\ B &= \Phi_{fix} \end{aligned} \tag{III .54}$$

Et finalement :

$$\Phi_P = \Phi_{fix} \tag{III .55}$$

Cette technique est d'ailleurs également employée pour les cellules solides non poreuses qui pourraient être introduites dans la géométrie en utilisant par exemple $\Phi_{fix}=0$ pour les équations de la quantité de mouvement.

III.2.9.2- Condition d'entrée : ($\Phi^D = U, V, T$)

Pour le terme de diffusion, le terme du gradient est discrétisé de la façon suivante :

$$\left(\frac{\partial \Phi^D}{\partial z}\right)_e = \left(\frac{\partial \Phi^D}{\partial z}\right)_A = \frac{\Phi_A^D - \Phi_p^D}{P\Delta} \quad (\text{III .56})$$

Concernant le terme de convection, le schéma employé est le suivant, quelque soit l'équation :

$$\Phi_e^D = \Phi_A^D \quad (\text{III .57})$$

Quant au terme source, il nécessite la même formule utilisée pour le terme de convection ainsi que la formule suivante :

$$\left(\frac{\partial \Phi^D}{\partial z}\right)_p = \frac{\Phi_A^D - \Phi_w^D}{W\Delta} \quad (\text{III .58})$$

III.2.9.3- Condition de symétrie : ($\Phi^N = U, V, T$)

Pour le terme de diffusion, le terme de gradient est discrétisé de la façon suivante :

$$\left(\frac{\partial \Phi^N}{\partial z}\right)_e = \frac{\Phi_B^N - \Phi_p^N}{P\Delta} \quad (\text{III .59})$$

Si le schéma choisi pour le terme de convection est le schéma Upwind, la discrétisation s'effectue comme suite :

$$\begin{aligned} \Phi_e^N &= \Phi_p^N & \text{si } U_e > 0 \\ \Phi_e^N &= \Phi_B^N & \text{si } U_e < 0 \end{aligned} \quad (\text{III .60})$$

Si non, s'il s'agit d'un schéma centré, il vient :

$$\Phi_e^N = \frac{\Phi_p^N + \Phi_B^N}{2} \quad (\text{III .61})$$

Quant au terme source, il nécessite les relations suivantes :

$$\left(\frac{\partial \Phi^N}{\partial z}\right)_p = \frac{\Phi_B^N - \Phi_w^N}{W\Delta} \quad (\text{III .62})$$

$$\left(\frac{\partial \Phi^N}{\partial z}\right)_B = \frac{\Phi_B^N - \Phi_p^N}{P\Delta} \quad (\text{III .63})$$

Le lien est donc supprimé avec les frontières dans les mailles bordant les limites du domaine. Tous les termes calculés ci-dessus sont ensuite introduits comme termes sources dans les équations.

III.2.10- Stabilité et convergence :

III.2.10.1- Nature de la procédure d'itération et technique de sous-relaxation :

La technique d'itération simplifie énormément la construction de méthode numérique et fournit un moyen pour traiter le caractère non-linéaire et couplé les équations algébriques.

Dans cette technique, il est souvent souhaitable d'accélérer (sur-relaxer) ou de ralentir (sous-relaxer) les variations des variables dépendantes d'une itération à une autre. La sur-relaxation est généralement utilisée en conjonction avec la méthode standard de Gauss Seidel; le schéma résultant est connu sous le nom de SLOR ("Successive Line Over-Relaxation"). Pour éviter la divergence des solutions itératives des équations à fort caractère non-linéaire, la sous-relaxation est vivement conseillée [15].

En supposant B et A_p constantes entre deux itérations successives, nous pouvons écrire que la variable Φ_p à l'itération $(K + 1)$ est :

$$\Phi_p^{(K+1)} = \Phi_p^{(K)} + \left(\frac{\sum_m A_m \Phi_m^{(K+1)} + B}{A_p} - \Phi_p^{(K)} \right) \quad \text{(III .64)}$$

La quantité entre parenthèses représente en fait la variation de Φ produite par une itération courante. Cette variation peut être modifiée par l'introduction du facteur de relaxation α_Φ , de sorte qu'on se permette d'écrire :

$$\Phi_p^{(K+1)} = \Phi_p^{(K)} + \alpha_\Phi \left(\frac{\sum_m A_m \Phi_m^{(K+1)} + B}{A_p} - \Phi_p^{(K)} \right) \quad \text{(III .65)}$$

Ou encore :

$$\frac{A_p}{\alpha_\Phi} \Phi_p^{(K+1)} = \sum_m A_m \Phi_m^{(K+1)} + B + (1 - \alpha_\Phi) \frac{A_p}{\alpha_\Phi} \Phi_p^{(K)} \quad \text{(III .66)}$$

Il est évident que la convergence est atteinte quand $\Phi_p^{(K+1)}$ devient identique à $\Phi_p^{(K)}$, ce qui implique que la valeur convergente finale de Φ_p satisfait l'équation d'origine. N'importe quel schéma de relaxation doit, bien sûr, posséder cette propriété : la solution convergente, bien que obtenue par l'utilisation de facteurs de relaxation arbitraires, doit encore satisfaire l'équation de base.

Dans notre cas, les variations de U , V et T ont été sous relaxées à la manière de l'équation précédente, cependant la pression l'a été comme suit :

$$P = P^* + \alpha_p (P' - P_{ref}) \quad \text{(III .67)}$$

Dans la méthode de volume de contrôle adoptée ici, il n'y avait pas de différence fondamentale entre la résolution d'un problème stationnaire et celle d'un problème instationnaire.

Dans le premier cas, nous commençons par estimer des valeurs de la variable Φ et nous procédons afin d'obtenir une solution finale convergente. Cependant, dans le second cas, étant donné les valeurs de Φ à l'instant précédent t , nous estimons les valeurs de Φ à l'instant $t + \Delta t$ et nous cherchons itérativement les bonnes valeurs convergentes de Φ à ce même instant.

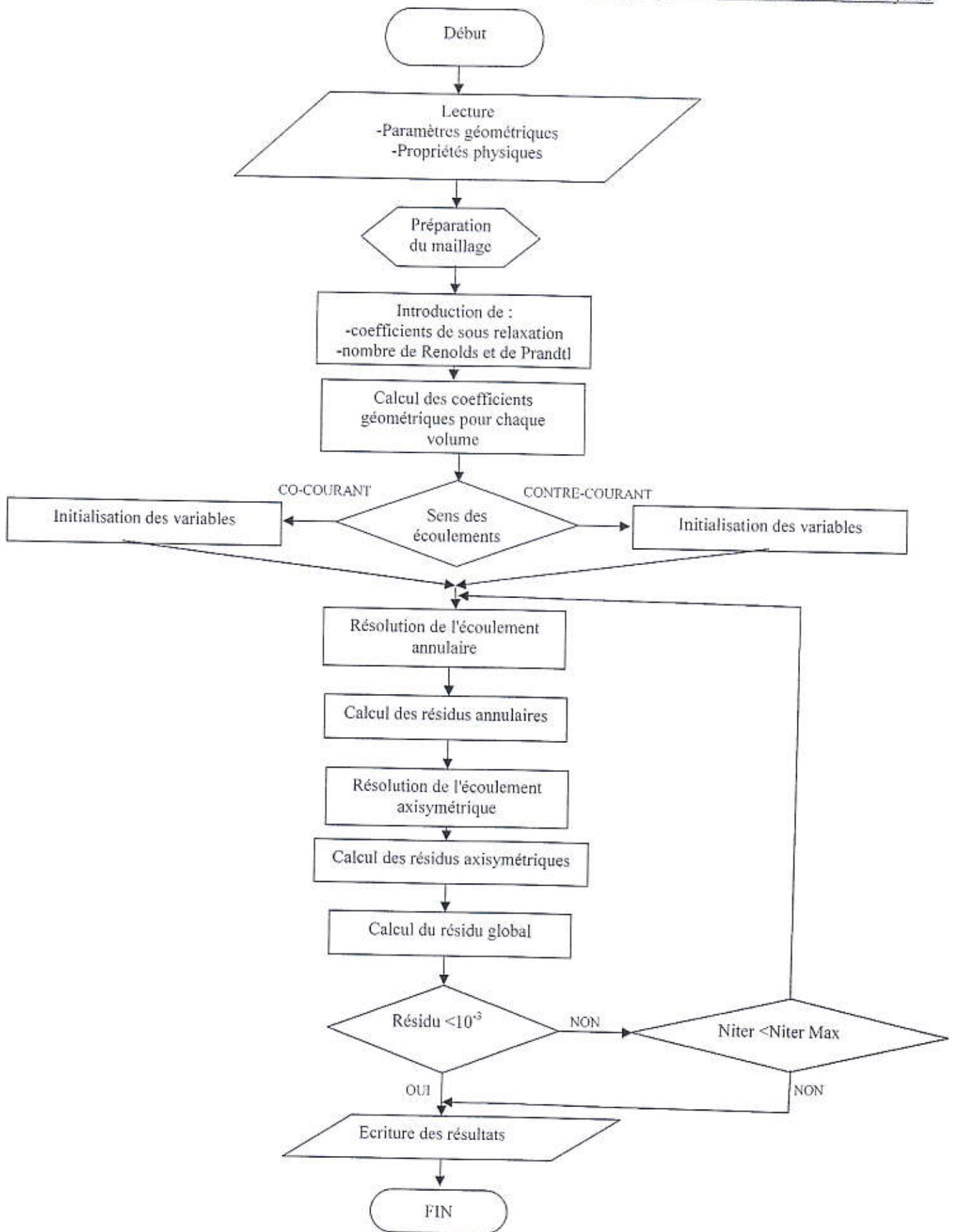


Figure III. 8 : Organigramme du programme

Chapitre IV

Validation du programme et
Analyse des résultats

Chapitre IV: Validation du programme et analyse des résultats

IV.1-Introduction :

Le premier objectif de ce chapitre est d'effectuer une validation de notre modèle hydrodynamique. Tout d'abord, nous testons nos résultats avec le code commercial Fluent, puis nous vérifions, si le modèle répond de manière cohérente à la modification de certains paramètres de l'écoulement.

En deuxième lieu on va faire une simulation pour voir l'influence de la géométrie et les nombres adimensionnels à savoir le nombre de Reynolds et Prandtl. Pour choisir le meilleur cas dans ce système on se propose d'étudier les deux cas possible d'écoulement :

Premier cas : Ecoulement axisymétrique : injecteur, écoulement annulaire : producteur.

Deuxième cas : Ecoulement annulaire : injecteur, écoulement axisymétrique : producteur.

A la fin de cette étude on va choisir l'écoulement qui nous donne la meilleure gain de l'énergie thermique. Cette énergie récupéré peut être utilisée quelques applications tels que : la machine frigorifique à absorption, la pompe à chaleur, la turbine

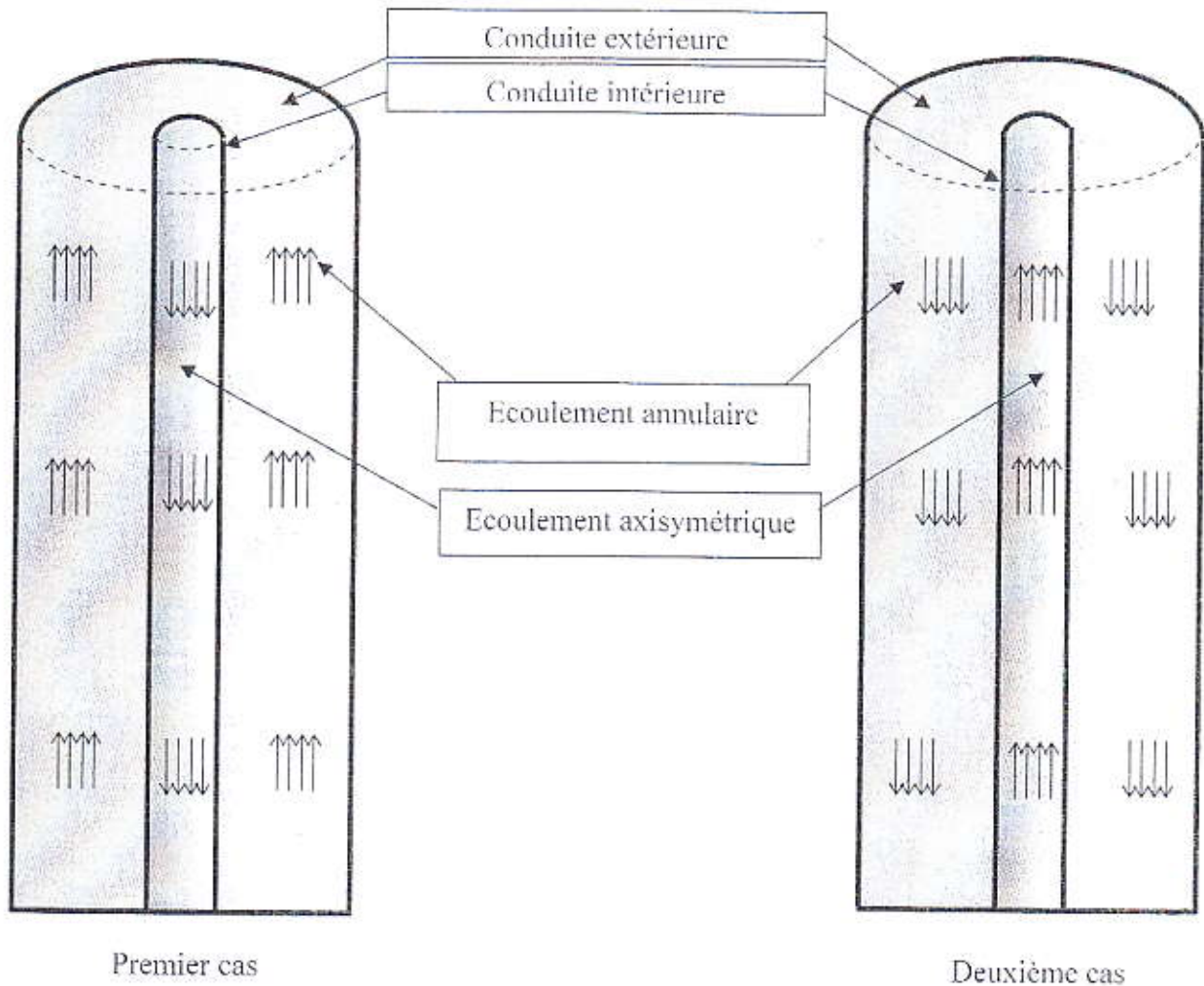


Figure IV.1 : Schéma d'écoulement dans un puits injecteur producteur

IV.2-Validation du programme :

Une comparaison à été faite sur le champ de température (les isothermes) obtenu par code présent et le code Fluent, avec le même nombre de nœuds (100X50) et même nombre de Reynolds ($Re = 10^6, 100$). (Figures IV.2, figures IV.3)

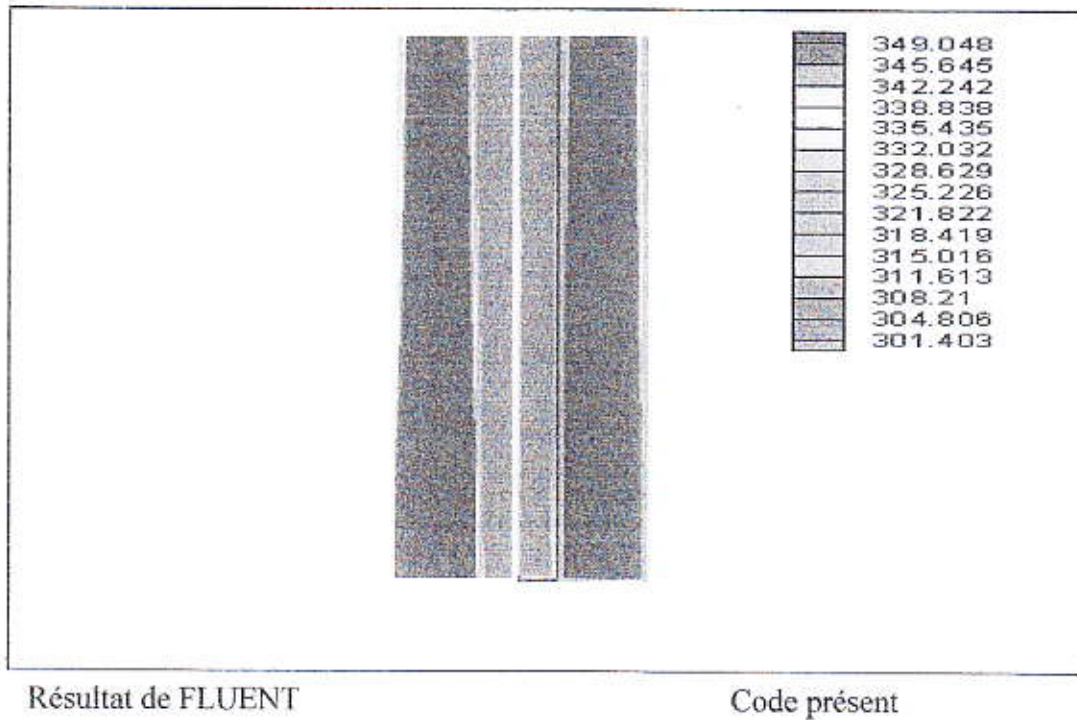


Figure IV.2 : Comparaison des profils de vitesse avec $Re = 10^6$.

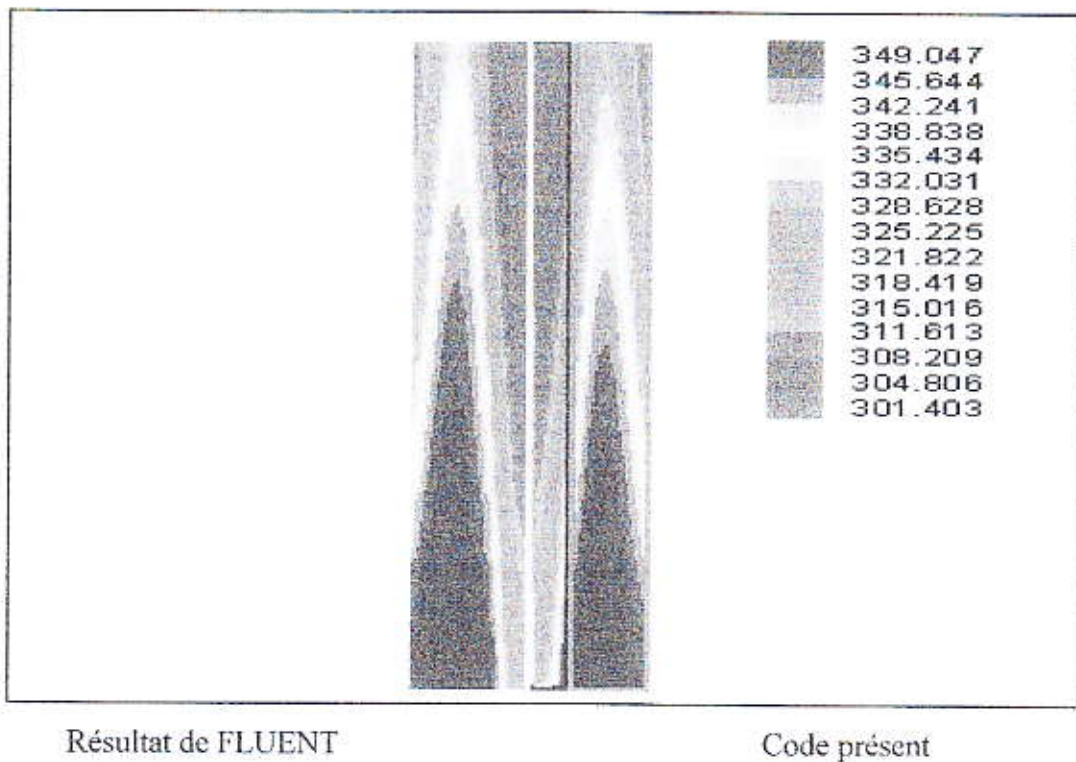


Figure IV.3 : Comparaison des profils de vitesse avec $Re = 100$.

Nous remarquons une parfaite correspondance des champs de température dans la région axisymétrique, par contre la région annulaire où nous observons une différence au niveau de la zone près de la paroi latérale que ce soit pour le cas $Re=10^6$ ou $Re=100$ ceci issue de la condition au limite laquelle nous avons mis. Pour la simulation dans le programme une fonction linéaire a été utilisée au niveau de la paroi latérale et pour Fluent nous avons découpé cette paroi en plusieurs éléments où la température varie d'une manière linéaire.

Le tableau suivant nous donne les valeurs de la température moyenne à la sortie calculer par Fluent et le code présent ainsi que l'erreur relative entre les deux.

| | Résultat de FLUENT | Code présent | Erreur relative |
|-----------|--------------------|--------------|-----------------|
| $Re=100$ | 321.0544 | 319.5248 | 0.49% |
| $Re=10^6$ | 348.8867 | 347.131 | 0.50% |

Tableau IV.1: comparaison de l'erreur relative de Fluent et le code présent.

IV.3- Résultats et discussions :

IV.3.1-Optimisation du maillage :

L'ensemble des données est résumé dans le tableau suivant :

| Données du programme | | | | | |
|-----------------------------------|-----------|---------------------------|----|-----------------------|------|
| $Pr=1$ | $Re=10^5$ | Sens des écoulements | | Géométrie | |
| | | axisymétrique ; injecteur | | Rap = 1/3 | |
| Maillage du domaine de simulation | | | | | |
| N_i | 100 | | | Nb max de cellules | 7500 |
| N_j | 25 | 50 | 75 | | |

Tableau IV.2 : Ensemble de données pour l'optimisation du maillage

En ce qui concerne la convergence, nous avons fixé un résidu global inférieur ou égal à 10^{-3} .

Nous avons effectué une étude de sensibilité sur l'axe transversal pour voir le nombre optimal des nœuds dans cette direction, il s'avère que le nombre des volumes de contrôles optimal est de 100 volumes dans le sens transversal. La direction latérale ayant un fort gradient des variables qui existent dans ce sens, nous avons essayé d'optimiser le maillage en variant le nombre de nœuds dans ce sens et on remarque l'évolution du résidu global au cours des itérations. Pour cela, nous avons testé le programme sur trois valeurs du nombre de nœuds dans la direction transversal celle indiquées dans le tableau ci-dessus et nous avons obtenir le graphe suivant :

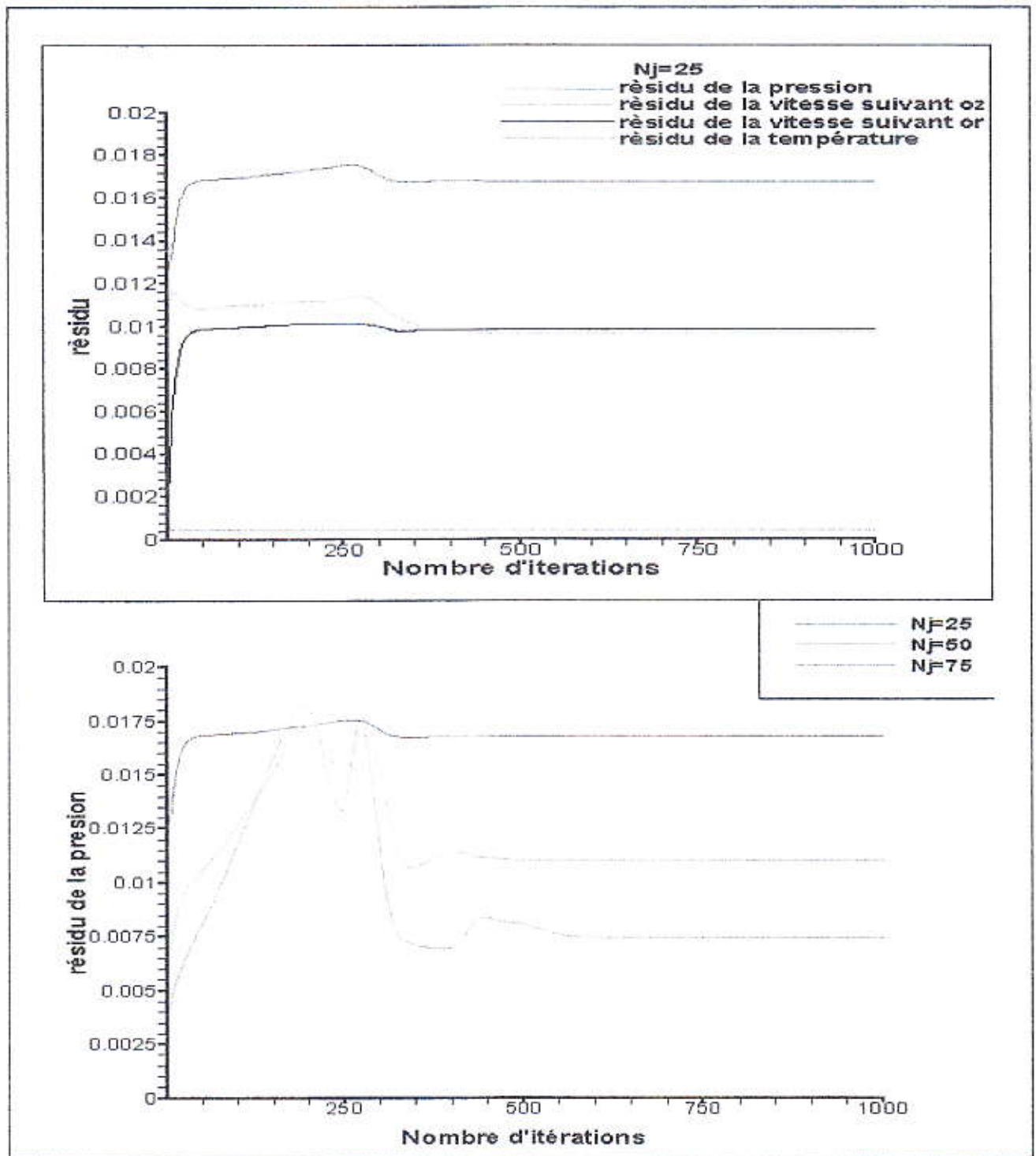


Figure IV.4 : Optimisation du maillage

D'après le Figure ci-dessus, on peut remarquer que pour un nombre de nœuds $N_j=25$ le résidu reste important après un certain nombre d'itérations. Par contre, pour $N_j=50$ ou 75 le résidu diminue considérablement par rapport au premier cas et il reste stable pour $N_j>50$.

Donc le choix optimisé de N_j est 50 et cela pour ne pas encombré la mémoire ou augmenté le temps de simulation si on prend N_j supérieur à 50.

IV.3.2-Influence du nombre de Reynolds sur les résidus :

Lorsque la valeur de la vitesse et par conséquent Reynolds de l'écoulement est élevée, la quantité de (chaleur ou matière) convectée entre les points E (centre de la cellule aval) et P est plus importante que celle diffusée entre ces deux points, de telle manière que le flux diffusif à travers la face e peut être légitimement négligé vis-à-vis au flux convectif. Donc plus le Reynolds est élevé plus le Schéma Upwind donne une bonne approximation de la variable dépendante au centre des faces des cellules. Et cela est très clair dans la *Figure IV.5*, qui montre l'évolution des différents résidus au cours des itérations en variant le Reynolds.

L'ensemble de données :

| Données du programme | | | |
|-----------------------------------|-------------------------------|---------------------------|-----------|
| Pr =1 | Re = 10^4 , 10^5 , 10^6 | Sens des écoulements | Géométrie |
| | | axisymétrique : injecteur | |
| Maillage du domaine de simulation | | | |
| Ni | 100 | Nb max de cellules | 5000 |
| Nj | 50 | | |

Tableau IV.3: Ensemble de données pour l'évaluation du schéma Upwind

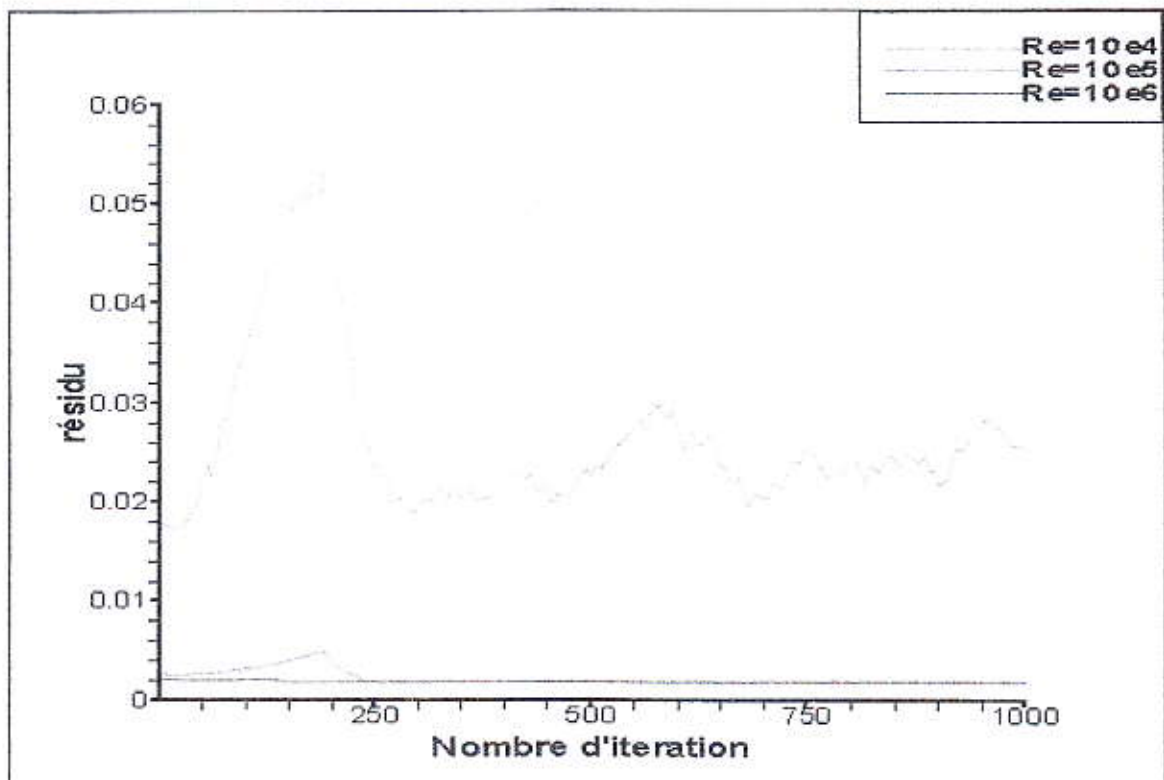


Figure IV.5: Influence du nombre de Reynolds sur le résidu de la vitesse suivant Oz

D'après le graphe ci-dessus, on peut remarquer que pour un nombre de Reynolds $Re=10^4$ le résidu reste important après un certain nombre d'itérations. Par contre, pour $Re=10^5$ ou 10^6 le résidu diminue considérablement par rapport au premier cas et il reste stable pour $Re>10^5$.

IV.3.3-Influence du nombre de Péclet :

Le nombre de Péclet qui apparaît dans l'équation (II.52) au deuxième chapitre a une influence déterminante sur le profil de la température. Ainsi, ce nombre représente le rapport du transfert de la chaleur par convection au transfert par diffusion. Et comme le nombre de Péclet est égal au produit des deux nombre de Reynolds et de Prandtl, nous allons procéder de la manière suivante : d'une part on fixe le nombre de Prandtl et on varie le Reynolds et d'autre part on fait l'inverse.

Notons, que nous allons fixé $Pr = 1$ et variant le Re puis on fixe $Re = 10^5$ et variant Pr est ça pour les deux cas d'écoulement axisymétrique injecteur ; écoulement annulaire producteur et l'inverse. Pour les autres combinaisons le même phénomène se répète. En ce qui concerne la valeur du rapport des rayons, nous avons choisi le rapport 2/3 parce que c'est le plus proche de la réalité.

IV.3.3.1-Premier cas :

L'ensemble de données :

| Données du programme | | | |
|-----------------------------------|-------------------------|---------------------------|-----------|
| Pr=1, 2, 5 | Re = $10^4, 10^5, 10^6$ | Sens des écoulements | Géométrie |
| | | axisymétrique : injecteur | |
| Maillage du domaine de simulation | | | |
| Ni | 100 | Nb max de cellules | 5000 |
| Nj | 50 | | |

Tableau IV.4: Ensemble de données pour évaluer l'influence du nombre de Péclet dans le premier cas

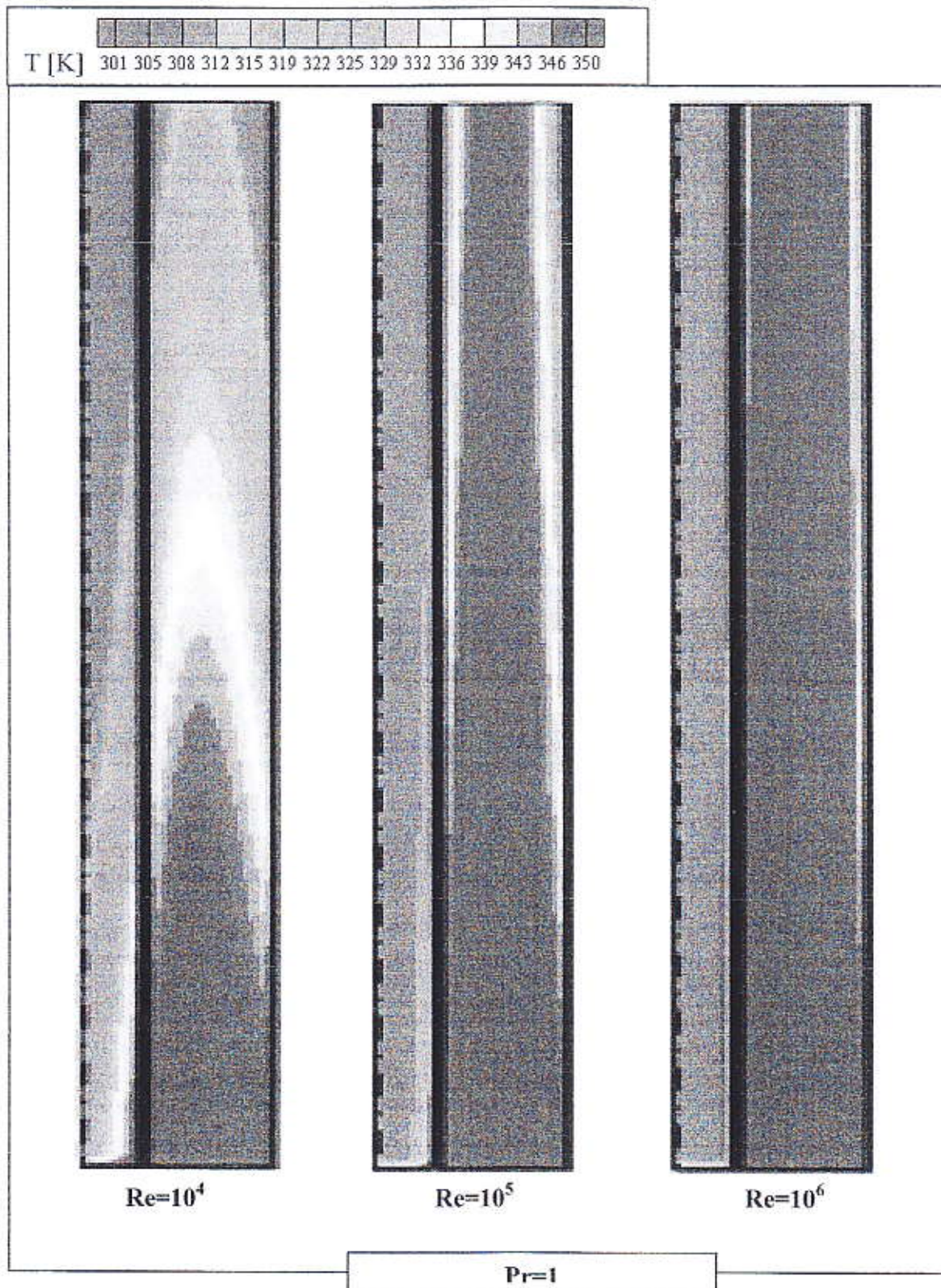


Figure IV.6 : Influence du nombre de Reynolds sur le profil de la température avec $Pr = 1$ dans le premier cas

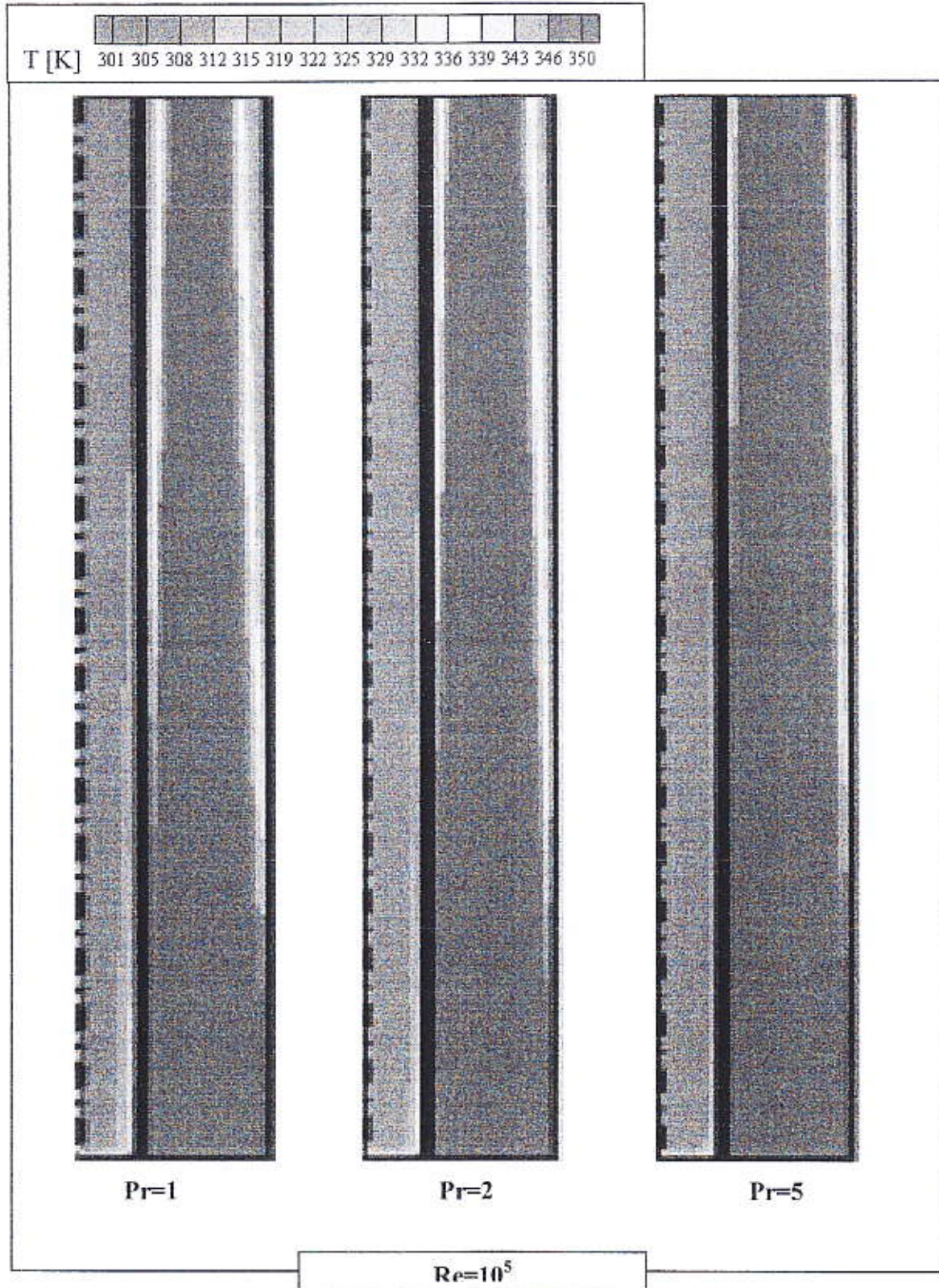


Figure IV.7 : Influence du nombre de Prandtl sur le profil de la température avec $Re = 10^5$ dans le premier cas

IV.3.3.2-Deuxième cas :

| Données du programme | | | |
|-----------------------------------|-------------------------------|----------------------------|-----------|
| Pr = 1, 2, 5 | Re = 10^4 , 10^5 , 10^6 | Sens des écoulements | Géométrie |
| | | axisymétrique : producteur | Rap = 2/3 |
| Maillage du domaine de simulation | | | |
| Ni | 100 | Nb max de cellules | 5000 |
| Nj | 50 | | |

Tableau IV.5: Ensemble de données pour évaluer l'influence du nombre de Péclet dans le deuxième cas

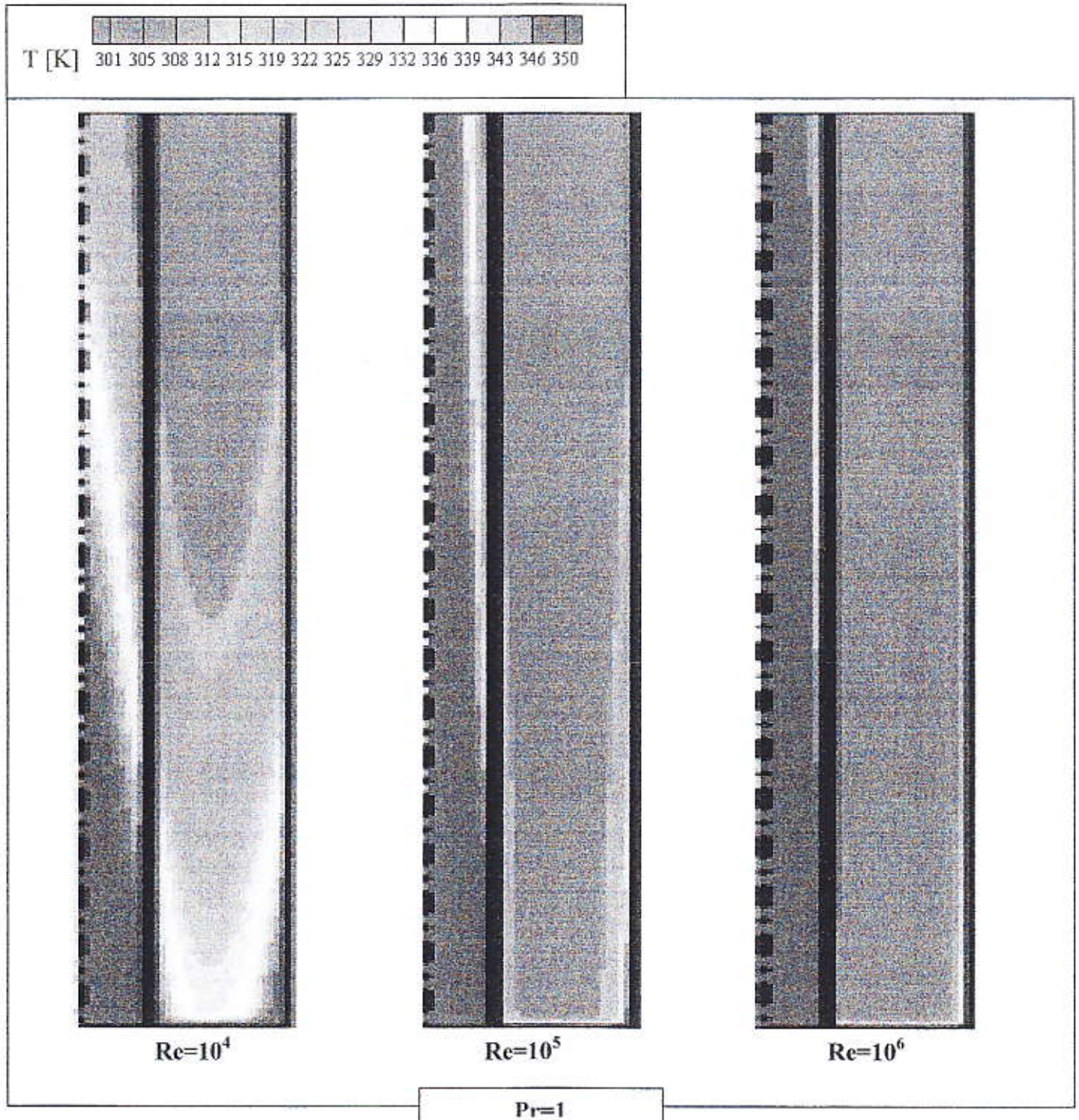


Figure IV.8: Influence du nombre de Reynolds sur le profil de la température avec Pr = 1 dans le deuxième cas

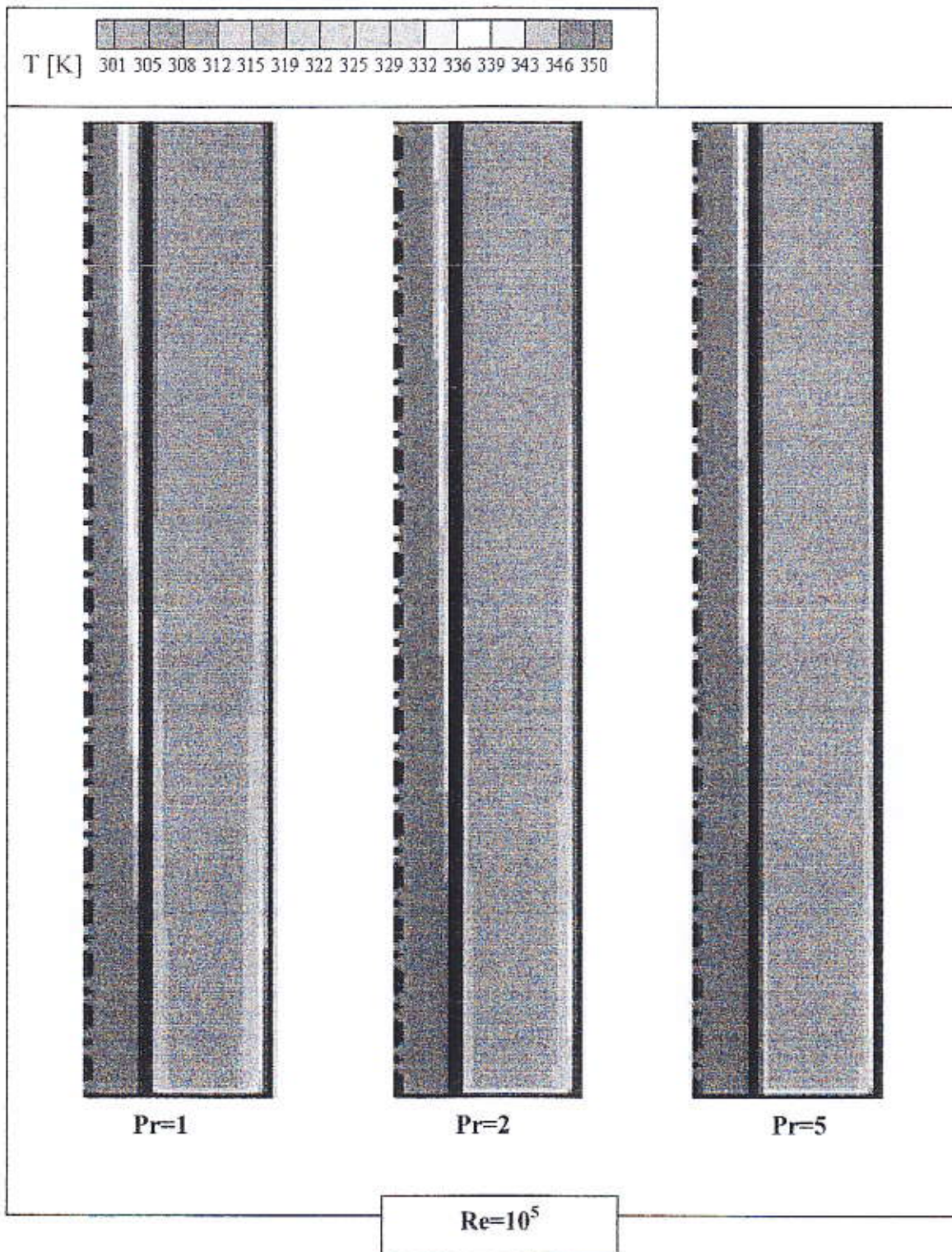


Figure IV.9: Influence du nombre de Prandtl sur le profil de la température avec $Re = 10^5$ dans le deuxième cas

Les résultats obtenus sur les *Figures (IV.6, IV.7, IV.8 et IV.9)* montrent que notre modèle répond d'une manière logique avec les variations de ces deux derniers nombres (Re et Pr), plus en augmentant l'un de ces deux les profils de la température deviennent plus accentués et cela indique que le transfert par convection est beaucoup plus important que celui par conduction, on se coïncide avec la définition du nombre de Péclet.

A la fin de cette partie pour remarquer l'influence du nombre de Péclet sur la température moyenne à la sortie pour choisir la température la plus élevée à la sortie, on mis le tableau suivant :

| Pr | Re | la température moyenne à la sortie[k] | |
|----|--------|---------------------------------------|--------------|
| | | Premier cas | Deuxième cas |
| 1 | 10^4 | 318 | 313.5 |
| | 10^5 | 337.7 | 333 |
| | 10^6 | 345 | 339 |
| 2 | 10^4 | 326 | 320 |
| | 10^5 | 340 | 336 |
| | 10^6 | 345 | 340 |
| 5 | 10^4 | 330 | 329 |
| | 10^5 | 343 | 338 |
| | 10^6 | 347 | 341 |

Tableau IV.6 : Influence du nombre de Reynolds et Prandtl sur la température moyenne à la sortie

Nous remarquons qu'avec les mêmes valeurs de Re et Pr, les températures moyennes obtenues à la sortie au premier cas sont toujours supérieures à celles obtenues en deuxième cas.

Cela nous permet de choisir le premier cas (écoulement axisymétrique injecteur, écoulement annulaire producteur), qui nous donne le meilleur gain d'énergie.

IV.3.4-Influence de la géométrie :

IV.3.4.1-Premier cas :

Ensemble de données :

| Données du programme | | | |
|-----------------------------------|-------------|---------------------------|---------------------|
| Pr =1 | Re = 10^5 | Sens des écoulements | Géométrie |
| | | axisymétrique : injecteur | Rap =1/3, 1/2 , 2/3 |
| Maillage du domaine de simulation | | | |
| Ni | 100 | Nb max de cellules | 5000 |
| Nj | 50 | | |

Tableau IV.7: Ensemble de données pour évaluer l'influence de la géométrie dans le premier cas

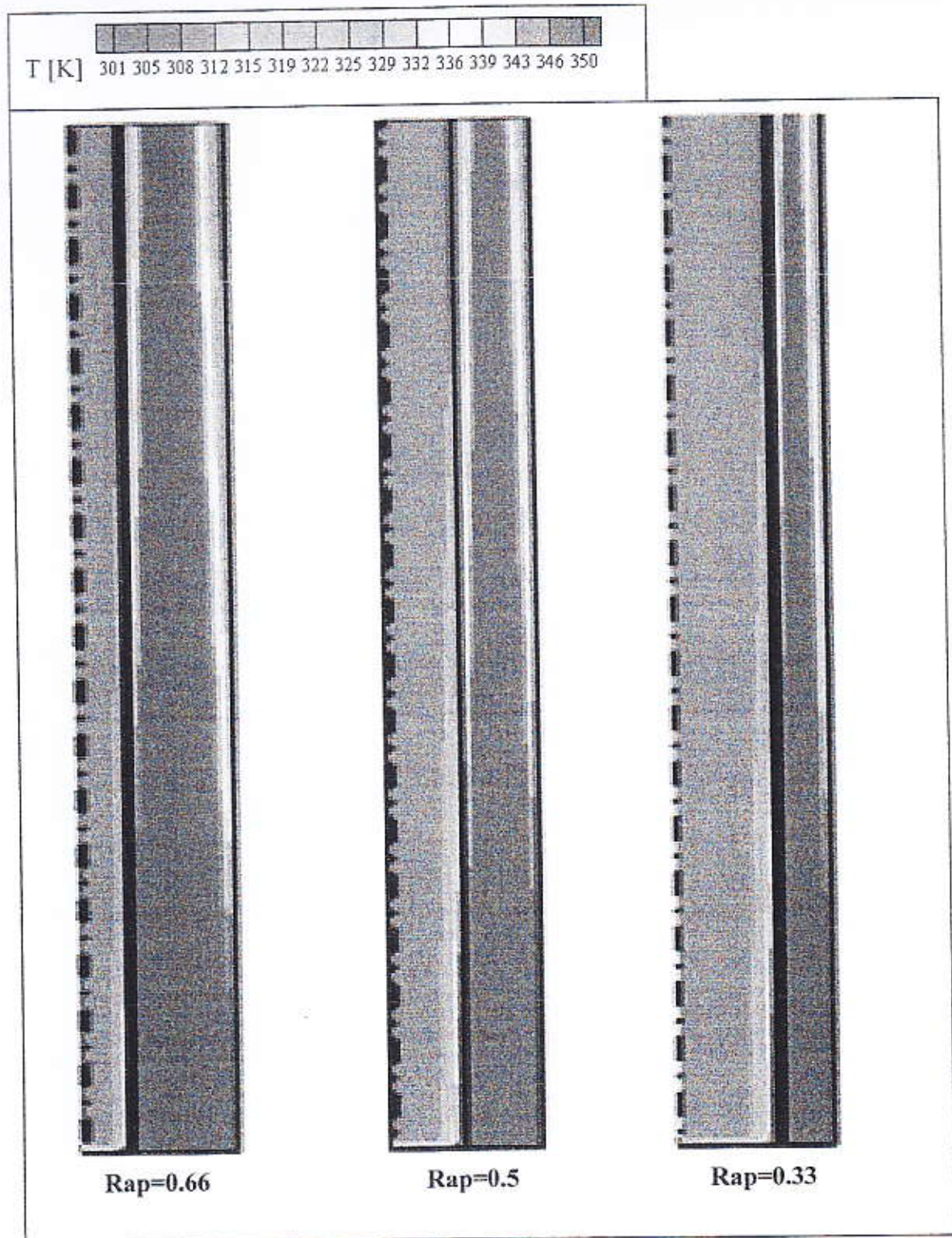


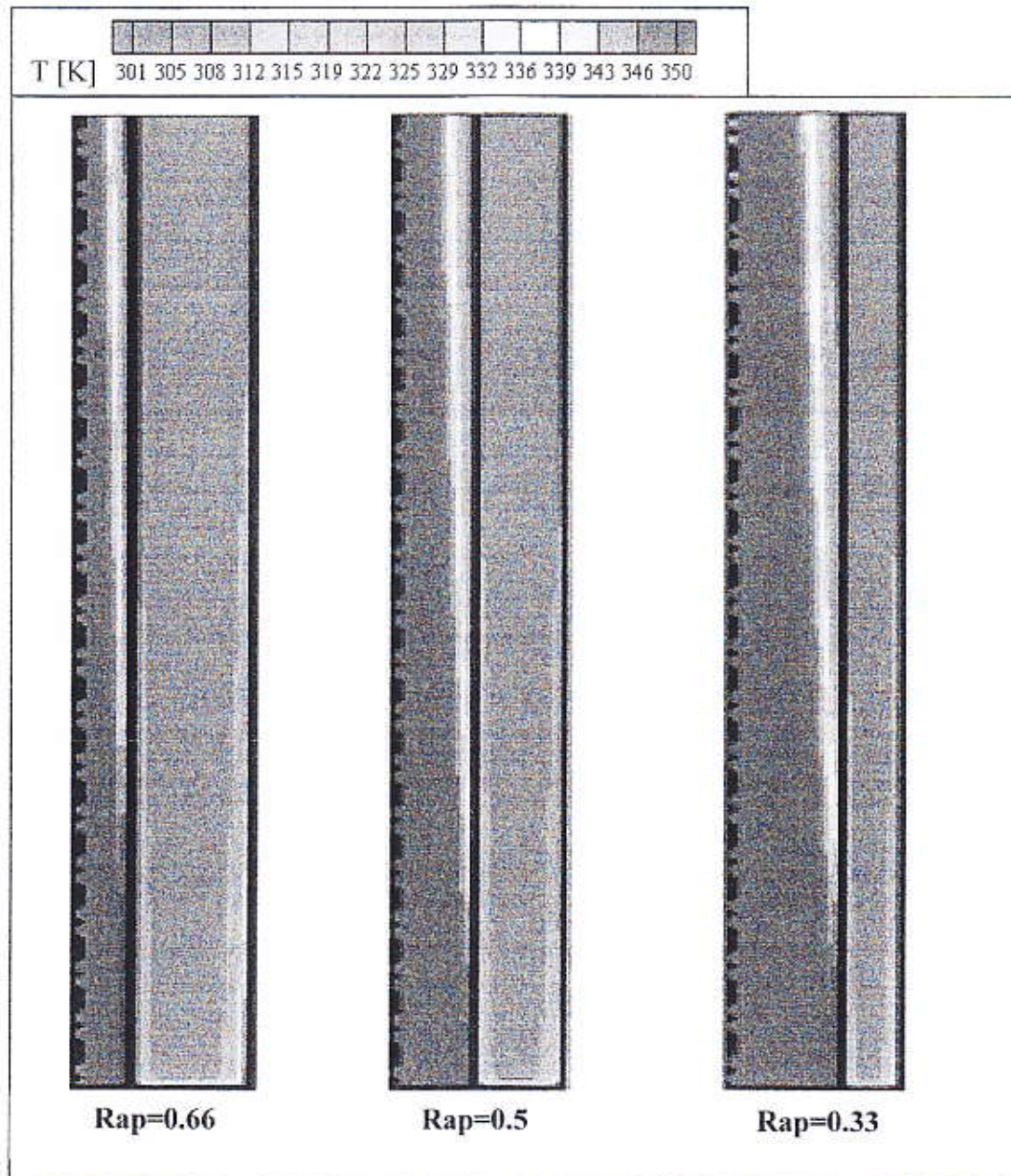
Figure IV.10 : Influence de la géométrie sur le champ de la température avec $Pr = 1$ et $Re = 10^5$ dans le premier cas

IV.3.4.2-Deuxième cas :

Ensemble de données :

| Données du programme | | | |
|-----------------------------------|-------------|----------------------------|---------------------|
| Pr = 1 | Re = 10^5 | Sens des écoulements | Géométrie |
| | | axisymétrique : producteur | Rap = 1/3, 1/2, 2/3 |
| Maillage du domaine de simulation | | | |
| Ni | 100 | Nb max de cellules | 5000 |
| Nj | 50 | | |

Tableau IV.8: Ensemble de données pour évaluer l'influence de la géométrie dans le deuxième cas

Figure IV.11 : Influence de la géométrie sur le champ de la température avec Pr = 1 et Re = 10^5 dans le deuxième cas .

Sur les *figure IV.10* et *figure IV.11* on remarque que plus le diamètre hydraulique diminue plus la zone chaude (en rouge) diminue et cela est dû à la diminution du flux convectif chaud.

IV.4- Une application :

Pour récupérer la chaleur de la croûte terrestre on ajoute au système géothermique une pompe à chaleur.

IV.4.1- Machines frigorifiques à absorption :

Depuis sa lointaine origine, l'histoire des machines à absorption a connu de nombreuses péripéties, preuve en est un article de MAIURI daté de 1935 et titré « la renaissance de la machine frigorifique à absorption pour la production industrielle du froid » [21].

Bien que leur importance soit beaucoup plus réduite que celle des systèmes à compression, ces machines connaissent des développements importants (recherche sur l'utilisation de l'énergie géothermique et sur les économies d'énergie).

La circulation du frigorigène n'est pas due à un compresseur mécanique mais à la circulation par pompe d'un liquide absorbant dont la teneur en frigorigène absorbé, dépend de la pression. Le travail mécanique nécessaire est très réduit et le système en contrepartie consomme de la chaleur [22].

IV.4.2- Représentation schématique et principe de fonctionnement :

Donc, on peut représenter un cycle d'une machine à absorption par la combinaison de deux cycles de Rankine d'une machine thermique et une machine frigorifique en superposition et il en résulte un cycle de machine à absorption simple étage représenté dans la *figure (IV.12)*. La machine thermique joue le rôle du moto-compresseur d'une machine frigorifique à compression [23].

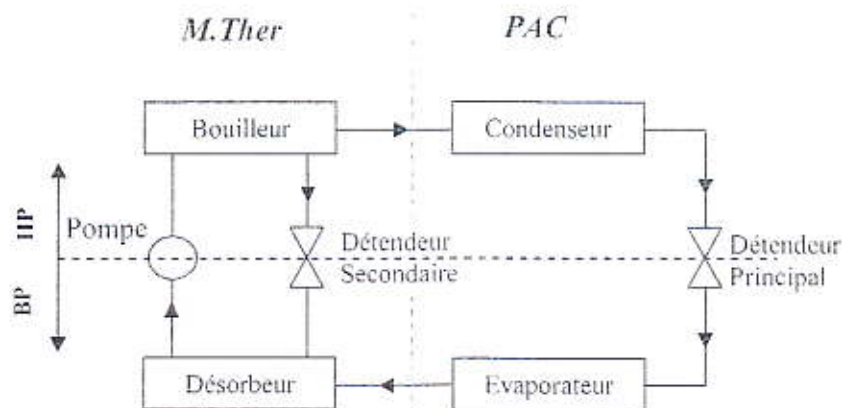


Figure IV.12 : Machine à absorption simple étage par la superposition de deux cycles de Rankine d'une machine thermique et PAC.

Le principe de fonctionnement de ces machines repose sur la théorie et les propriétés des mélanges (ou couples) binaires. Les mélanges utilisés dans ces machines comprennent un « solvant » et un fluide frigorigène qui, en un certain point du cycle est « absorbé » par le solvant d'où le nom donné à ce type de machine ; et en un autre point est libéré du solvant.

Afin d'obtenir ce résultat, il est nécessaire que le solvant présente à froid une très grande affinité pour le fluide frigorigène ; lorsque la température du mélange s'élève, cette affinité diminue et il y a dégagement du fluide frigorigène du solvant [24].

Les deux principaux couples binaires utilisés industriellement sont les couples suivants :

| Couple | Solvant | Fluide Frigorigène |
|------------------------|--------------------|--------------------|
| Ammoniac-Eau | Eau | Ammoniac |
| Eau-Bromure de lithium | Bromure de lithium | Eau |

IV.4.3- Machine à absorption avec $\text{NH}_3\text{-H}_2\text{O}$:

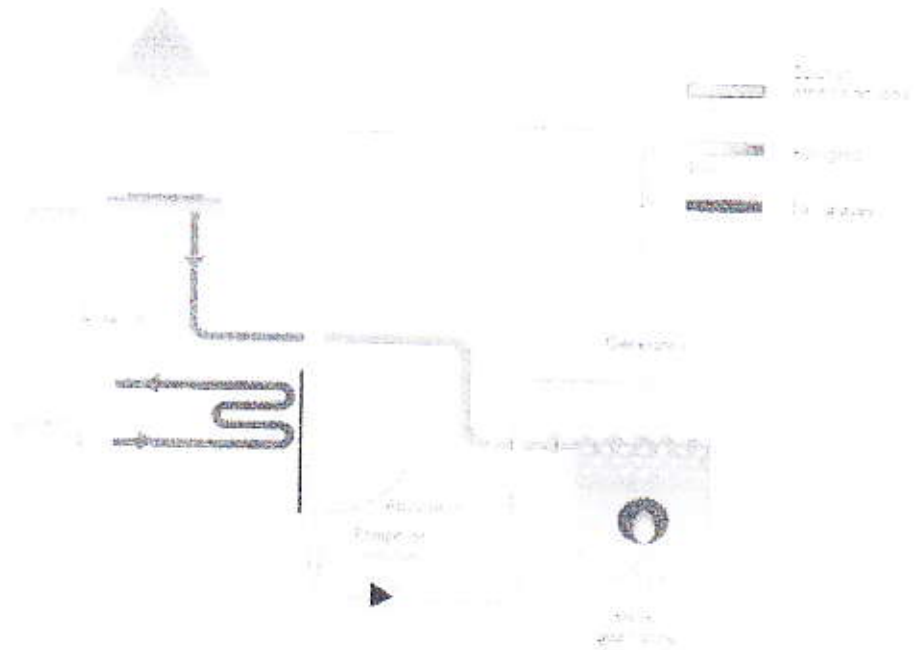
Cette machine utilise la propriété que présente l'eau à basse température d'absorber l'ammoniac (1000 fois son volume à 0°C) et de libérer par chauffage la presque totalité du gaz absorbé (à 100°C) [24]. Ces vapeurs d'ammoniac une fois condensées pourront donc nous assurer la production de froid désirée dans un évaporateur.

IV.4.3.1. Description :

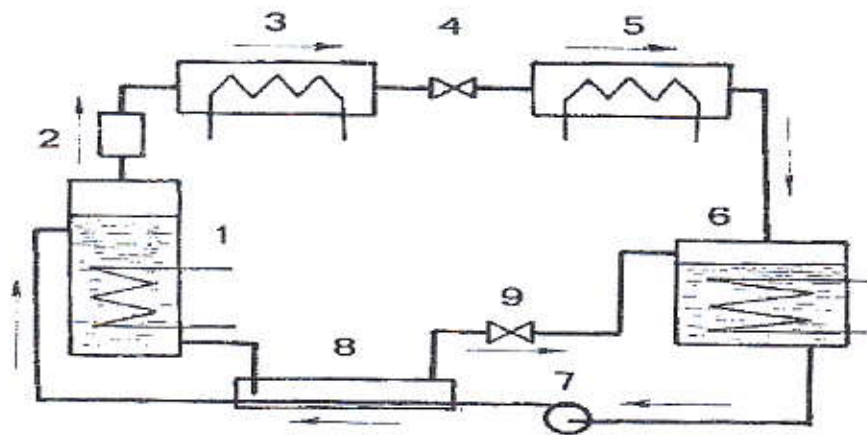
Une telle machine comprend *figure (I.13)* :

- Un bouilleur (1) dans lequel sera chauffé la solution ammoniacale.
- Un rectificateur-séparateur d'eau (2) libérant l'ammoniac des gouttelettes d'eau entraînées.
- Un condenseur (3).
- Un détendeur (4).
- Un évaporateur (5).
- Un absorbeur (6).
- Une pompe de circulation de solution (7).
- Un échangeur thermique (8).
- Un robinet régleur de débit de solution (9).

a- Schéma technologique



b- Schéma de principe

Figure IV.13 : Machine à absorption NH_3-H_2O

IV.4.3.2- Fonctionnement :

La solution ammoniac-eau est chauffée dans le bouilleur (1) par le serpentin de vapeur. La solubilité de l'ammoniac dans l'eau diminue, l'ammoniac gazeux se dégage sous une pression très voisine de sa tension de vapeur saturante à la température de la solution en ébullition. La solution restant dans le bouilleur s'appauvrit en ammoniac d'où le nom de solution pauvre qui lui est donné.

L'ammoniac gazeux se sépare des gouttelettes d'eau entraînées mécaniquement par le fluide dans le rectificateur-séparateur (2) et va se condenser dans le condenseur (3).

L'ammoniac liquide est admis à travers le détendeur (4) à l'évaporateur (5) où, détendu, il s'y vaporise sous la pression P_5 correspondant à sa température d'évaporation T_5 . Les vapeurs provenant de cette vaporisation sont acheminées vers l'absorbeur (6) où elles rencontrent la solution pauvre venant du bouilleur et dont le débit est réglé par le robinet de réglage (9).

L'absorbeur est maintenu à une température très voisine de la température ambiante par une circulation d'eau, afin de favoriser au maximum la dissolution de l'ammoniac dans la solution pauvre, d'une part ; et d'autre part d'éliminer à l'extérieur du système, la chaleur provenant de la dissolution de l'ammoniac dans l'eau.

La solution ammoniacale pauvre ainsi enrichie par absorption d'ammoniac : d'où l'appellation de solution riche ; est prise en charge par une pompe (7) permettant de compenser la différence de pression existant entre l'absorbeur et le bouilleur.

Nous avons donc une circulation de deux fluides :

- L'ammoniac pratiquement pur qui, entre la sortie du bouilleur et l'entrée à l'absorbeur, subit les transformations habituelles d'un fluide frigorigène ;
- La solution ammoniacale, alternativement pauvre et riche qui circule entre le bouilleur et l'absorbeur.

L'échangeur thermique (8) a pour but d'améliorer le rendement de la machine en refroidissant la solution pauvre avant son admission à l'absorbeur, et en réchauffant la solution riche avant son retour au bouilleur.

Les détendeurs (4) et (9), ainsi que la pompe (7), assurent la délimitation des circuits haute et basse pressions rôle que jouait à lui seul le détendeur dans les machines à compression mécanique.

Donc le schéma nous montre que le seul organe mécanique de l'installation est la pompe à solution (7).

IV.4.4 - Avantages et inconvénients

a- Avantages

- ✓ Elles consomment essentiellement de l'énergie calorifique ;
- ✓ Leurs utilisations sont intéressantes si on dispose d'une source de chaleur (chaleur gratuite perdue) ;
- ✓ Intérêt d'avoir de l'eau comme fluide frigorigène : pas de toxicité ;
- ✓ Machines silencieuses et sans vibrations.

b- Inconvénients

- ✓ COP faible face aux machines à compression ;
- ✓ Puissances thermiques importantes à évacuer ;
- ✓ Fonctionnement en très basse pression :
 - Problème de construction ; étanchéité importante.
 - Cristallisation de l'eau (panne).
 -

IV.4.5- Amélioration du cycle :

a- Échangeur solution riche-solution pauvre (économiseur) :

La solution appauvrie à la concentration ζ_{sp} sort relativement chaude du bouilleur et la solution enrichie à la concentration ζ_{sr} sort relativement froide de l'absorbeur.

On améliore beaucoup le rendement en faisant passer les deux solutions dans un échangeur de chaleur, qui refroidit la solution pauvre et réchauffe la solution riche.

b- Échangeur vapeur froide-condensat (échangeur Liq-Vap) :

Le sous refroidissement du liquide sortant du condenseur augmente la production de froid par unité de masse du fluide frigorigène et permet donc de réduire, à puissance frigorifique égale, le débit masse du fluide frigorigène. Par ailleurs, l'absorption se produit à une température nettement supérieure à la température d'évaporation.

Il s'ensuit que, le plus souvent, on améliore le rendement on disposant d'un échangeur de chaleur entre la vapeur sortant de l'évaporateur et le liquide sortant du condenseur. L'amélioration

est cependant nettement inférieure à celle qui résulte de l'échangeur de chaleur entre solution riche et solution pauvre [25].

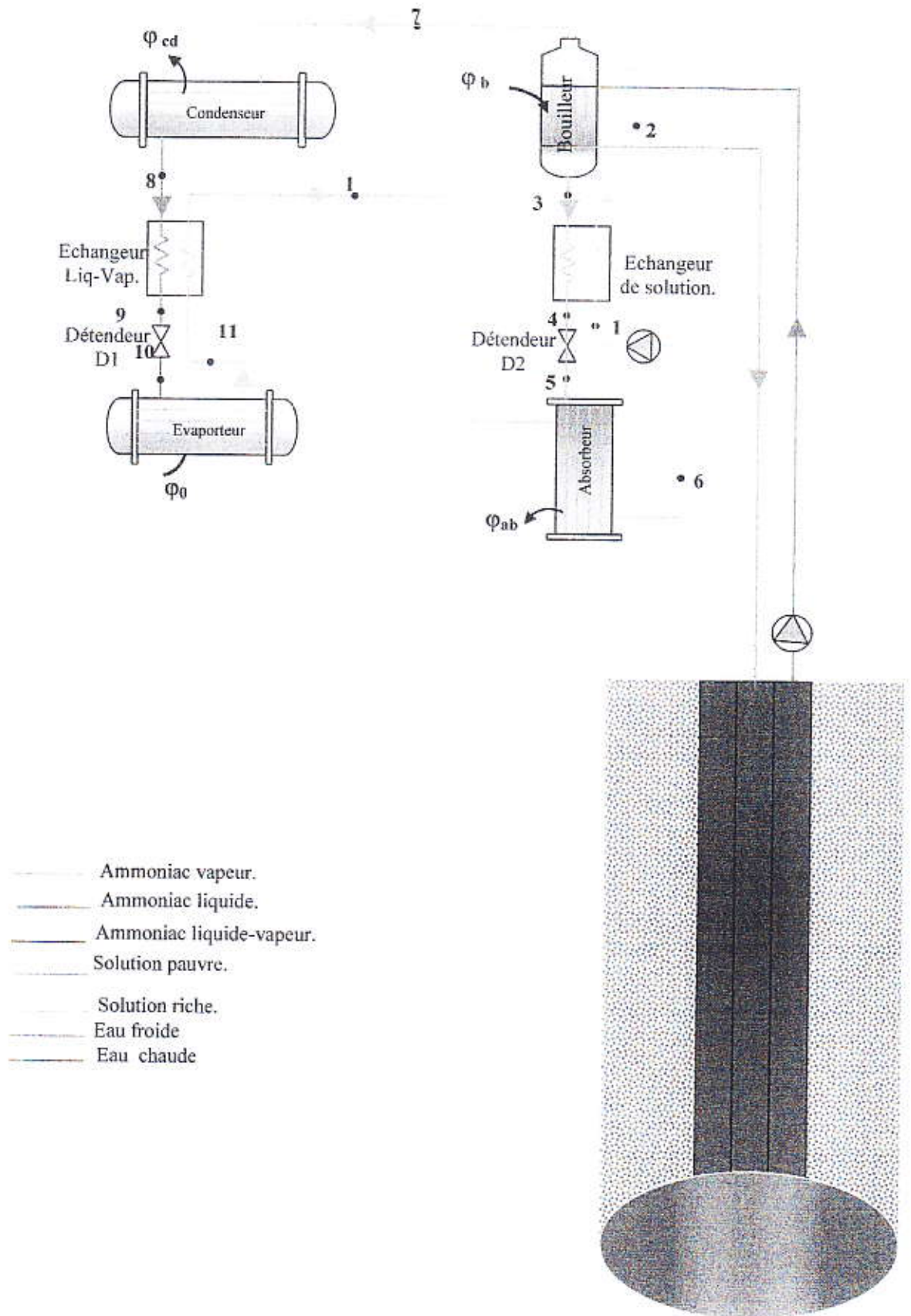


Figure IV.14 : Description schématique du cycle à absorption à simple étage.

IV.4.6 - Calcul thermique de l'installation :

Les machines frigorifiques à absorption mono-étagées sont soumises à certaines conditions limites de fonctionnement et qui, une fois dépassées, ne peuvent atteindre la température d'évaporation désirée voir même l'arrêt de fonctionnement.

La possibilité d'obtention de la température d'évaporation nécessaire ou non, est dictée par des températures limites qui se résument en :

- La température moyenne du chauffage (T_{ch}), qui est dans les conditions idéales de transfert de chaleur dans le bouilleur, égale à la température finale de la solution pauvre à la sortie du bouilleur ;
- La température d'entrée du fluide de refroidissement (l'eau), (T_c) dans les conditions de travail idéales, égale à la température à la fin d'absorption (T_0) ;
- La température du fluide froid réalisée (T_0), qui dans le cas d'une surface infinie de transfert de chaleur dans l'évaporateur égale à la température finale de vaporisation (T_{11}).

IV.4.6.1 -Facteur de circulation :

Il est défini comme étant le rapport des flux massiques de la solution riche \dot{m}_{sr} , refoulée par la pompe, et de vapeur d'ammoniac désorbé au bouilleur \dot{m}_a [25] :

$$f_c = \frac{\dot{m}_{sr}}{\dot{m}_a} = \frac{\xi_{sr} - \xi_{sp}}{\xi_{sr} - \xi_{sp}} \quad (IV.1)$$

Où ξ_g : la concentration de vapeur d'ammoniac générée à la sortie du générateur est supposée aux environs de 99.7 % ;

ξ_{sp} : la concentration de la solution pauvre à la sortie du bouilleur ;

ξ_{sr} : la concentration de la solution riche à la sortie de l'absorbeur ;

$\Delta\xi = \xi_{sr} - \xi_{sp}$: taux de dégazage (interval de neutralisation).

D'après les recommandations, si le facteur de circulation f_c est supérieure à 20, ceci correspond à un taux de dégazage $\Delta\xi = (2-3) \%$, le cycle n'est plus possible, car une petite variation de l'une des trois températures du système pourrait conduire à un taux de dégazage nul, ce qui rendrait le cycle physiquement impossible et une machine réelle cesserait de fonctionner avant cela. Il est donc recommandé de prendre des valeurs pour le taux de dégazage supérieures à 5 %, néanmoins des valeurs plus importantes ne sont pas conseillées [23].

IV.4.6.2- Le calcul thermique :

Pour le calcul du cycle thermodynamique (à partir de la figure (IV.14)), les trois températures (T_c , T_e , T_0), sont souvent des données du projet. La pression de condensation (P_c) et de vaporisation (P_0), doivent être choisit en fonction de ces trois températures.

Les valeurs d'enthalpies doivent être obtenues à partir des propriétés des données du fluide de travail NH_3-H_2O ; elles dépendent de l'état thermodynamique qui à son tour dépend des conditions de fonctionnement des points d'état voisins.

- L'enthalpie de la solution riche à la sortie de l'absorbeur :

$$h_6 = f(\xi_{sr}, T_6, P_{ab})$$

- L'enthalpie de la solution riche à la sortie de la pompe :

$$h_7 = f(\xi_{sr}, T_1, P_c)$$

$$T_1 = f(P_c, \xi_{sr})$$

- L'enthalpie de la solution pauvre à la sortie du bouilleur :

$$h_3 = f(\xi_{sp}, T_3, P_c)$$

- L'enthalpie de la solution riche à la sortie de l'économiseur :

$$h_2 = f(\xi_{or}, T_2, P_c)$$

$$T_2 = T_1 + \Delta T_{ec1}, \quad \Delta T_{ec1} = (5 + 10) \text{ } ^\circ\text{C}$$

- L'enthalpie de la solution pauvre à la sortie de l'économiseur :

$$h_4 = f(\xi_{sp}, T_4, P_{ob})$$

$$T_4 = T_3 - \frac{fc}{(fc-1)\eta_{ec}} \Delta T_{ec}, \quad \Delta T_{ec} = (5 + 10) \text{ } ^\circ\text{C}$$

- L'enthalpie de la solution pauvre à l'entrée de l'absorbeur :

$$h_5 = h_4$$

- L'enthalpie de la vapeur à la sortie du bouilleur :

$$h_7 = f(T_7, P_7)$$

$$T_7 = T_2 + \Delta T_7, \quad \Delta T_7 = (4 + 6) \text{ } ^\circ\text{C}$$

- L'enthalpie de l'ammoniac liquide saturé à la sortie du condenseur :

$$h_8 = f(T_c, P_c)$$

- L'enthalpie de l'ammoniac liquide à l'entrée et à la sortie du sous-refroidisseur :

$$h_{11} = f(T_{11}, P_0)$$

$$h_{12} = h_{11} + Cp_{lv}(T_{11}) \Delta T_{st}$$

$$T_{12} = T_{11} + \Delta T_{st}$$

$$h_9 = h_8 - Cp_{lv}(T_8) \Delta T_{st}$$

$$h_{10} = h_9$$

IV.4.6.3- Le calcul des flux échangés :

- Le flux massique échangé dans le bouilleur :

$$q_b = (h_7 - h_3) + fc(h_3 - h_2)$$

- Le flux massique échangé dans l'absorbeur :

$$q_{ab} = fc(h_6 - h_5) + (h_5 - h_{12})$$

- Le flux massique échangé dans l'évaporateur :

$$q_0 = (h_{11} - h_{10})$$

- Le flux massique échangé dans le condenseur :

$$q_{cd} = (h_7 - h_8)$$

- Le flux massique échangé dans le sous-refroidisseur :

$$q_{stf} = (h_8 - h_9)$$

- Le flux massique échangé dans l'économiseur :

$$q_{ec} = fc(h_2 - h_1)$$

- La puissance spécifique de la pompe de solution riche :

$$Wp = fc(h_1 - h_6)$$

- Le débit massique de la vapeur d'ammoniac qui circule dans l'installation :

$$\dot{m}_v = \frac{\varphi_0}{q_0}$$

- Le flux de chaleur au niveau du condenseur :

$$\varphi_{cd} = \dot{m}_v q_{cd}$$

- Le flux de chaleur au niveau du bouilleur :

$$\varphi_b = \dot{m}_a q_b$$

- Le flux de chaleur au niveau de l'absorbeur :

$$\varphi_{ab} = \dot{m}_a q_{ab}$$

- Le flux de chaleur au niveau du sous-refroidisseur :

$$\varphi_{sf} = \dot{m}_a q_{sf}$$

- Le flux de chaleur au niveau de l'économiseur :

$$\varphi_{ec} = \dot{m}_a q_{ec}$$

- Les débits massiques en circulation :

- ✓ Le débit massique de la solution riche :

$$\dot{m}_{sr} = m_a f_c$$

- ✓ Le débit massique de la solution pauvre :

$$\dot{m}_{sp} = m_a (f_c - 1)$$

- ✓ Le débit massique de l'eau chaude à l'entrée du bouilleur :

$$\dot{m}_{ch} = \frac{\varphi_b}{Cp_{ch}(T_{ch1} - T_{ch2})}$$

IV.4.7- L'équilibre énergétique :

Elle est basée sur les lois de conservation d'énergie au niveau de chaque élément ainsi que les équations d'équilibre du mélange NH_3-H_2O . Les équations du modèle mathématique pour chaque élément sont regroupées ci-après dans le tableau suivant.

| | | |
|---|--|--|
| Bouilleur | Absorbeur | Echangeur de solution |
| $\varphi_b = h_3 \dot{m}_3 + h_7 \dot{m}_7 - h_2 \dot{m}_2$ | $\varphi_{ab} = h_5 \dot{m}_5 + h_{12} \dot{m}_{12} - h_b \dot{m}_b$ | $\varphi_{ec} = h_3 \dot{m}_3 - h_4 \dot{m}_4$ |
| Condenseur | Évaporateur | Sous-refroidisseur |
| $\varphi_{cd} = h_7 \dot{m}_7 - h_8 \dot{m}_8$ | $\varphi_0 = h_{11} \dot{m}_{11} - h_{10} \dot{m}_{10}$ | $\varphi_{sr} = h_8 \dot{m}_8 - h_9 \dot{m}_9$ |
| Pompe de solution | Détendeur D1 | Détendeur D2 |
| $W_p = h_1 \dot{m}_1 - h_6 \dot{m}_6$ | $h_9 = h_{10}$ | $h_4 = h_5$ |

Tableau IV.9 : L'équilibre énergétique pour une machine à simple étage.

IV.4.8-Le coefficient de performance de l'installation :

L'efficacité d'une machine thermique, qui est une grandeur sans dimension, peut s'exprimer

Qualitativement comme : $\frac{\text{ce qui est utile}}{\text{ce que l'on fournit}}$

$$(COP)_{\text{réel}} = \frac{\varphi_0}{\varphi_b + W_p} \quad (IV.2)$$

L'efficacité théorique maximale d'une machine frigorifique à absorption est réalisée par un cycle Carnot :

$$(COP)_{\text{idéal}} = \frac{\varphi_0}{\varphi_b} \quad (IV.3)$$

IV.4.9- Exemple de calcul d'un cycle à simple étage :

On suppose une machine frigorifiques à absorption avec NH_3-H_2O , La température à la fin de la vaporisation $5\text{ }^\circ\text{C}$, La température de la solution riche à la sortie de l'absorbeur $20\text{ }^\circ\text{C}$, La température de la solution pauvre à la sortie du bouilleur $70\text{ }^\circ\text{C}$ et La température de condensation $25\text{ }^\circ\text{C}$. la capacité frigorifique demandée φ_0 à 100 KW , Le rendement de l'économiseur et de sous refroidisseur à $0,8$.

a- calcul thermique :

Les données du calcul :

$$T_{11} = 5\text{ }^\circ\text{C} \quad , \quad T_5 = 25\text{ }^\circ\text{C} \quad ,$$

$$T_6 = 20\text{ }^\circ\text{C} \quad , \quad T_3 = 70\text{ }^\circ\text{C} \quad ,$$

$$\varphi_0 = 100\text{ KW} \quad , \quad \eta_{ec} = \eta_{sr} = 0,8 \quad .$$

D'après le calcul thermique, on obtient :

| Etat | h |
|------|---------|
| 1 | -5,27 |
| 2 | 27,06 |
| 3 | 77,79 |
| 4 | 18,04 |
| 5 | 18,04 |
| 6 | -144,08 |
| 7 | 1376,33 |
| 8 | 117,57 |
| 9 | 46,57 |
| 10 | 46,57 |
| 11 | 1276,25 |
| 12 | 1281,39 |

| | | | | | | |
|--------------|----------------|--------------|----------------|----------------|----------------|---------------|
| q_{ec} | q_{sr} | q_b | q_{cd} | q_{nb} | q_0 | \dot{m}_0^c |
| 131,25 | 70,99 | 1504,45 | 1258,75 | 1917,31 | 1229,68 | 0,081 |
| Wp | φ_{sr} | φ_b | φ_{cd} | φ_{nb} | φ_{ec} | f^c |
| 45,82 | 5,75 | 121,86 | 101,95 | 155,3 | 10,63 | 4,06 |
| COPth | | 0,817 | COPr | | 0,594 | |

Tableau IV.10 : Résultats de calcul d'un cycle à simple étage

b- Comparaison des coûts de chauffage en fonction du mode utilisé :

D'après la référence [32] qui nous donne le coût de chauffage d'un local (besoin en chauffage $121,86\text{ KW}$) en fonction du mode énergétique utilisé :

- Pompe à chaleur géothermique : 27.15 €
- Chaudière à condensation, fioul : 35.19 €
- Chaudière à condensation, gaz : 35.96 €
- Chauffage bois (granulé) : 36.92 €
- Chaudière gaz plus panneaux solaires : 43.91 €

Nous remarquons que l'utilisation d'une source géothermique pour le chauffage telle que : une pompe à chaleur, sa coûté moins chère que d'autre source utilisée.

C- Application :

D'après l'exemple suivant on remarque que ce système besoins $121Kw$ pour leur fonctionnement. Pour cela on va faire une étude de dimensionnement. Pour ressortir cette quantité d'énergie à partir d'un puits géothermique. Nous supposons que les paramètres de ce gisement sont proches de celles de la ville de Ouargla, qui sont :

- Un gradient de température de $30^{\circ}C$.
- La profondeur de puits à l'environ de $1km$.
- Le diamètre de puits injecteur est de $0.244m$ et le diamètre de puits producteur est de $[0.26-0.34m]$.

D'après la simulation, nous avons trouvé que le débit nécessaire pour récupérer cette quantité d'énergie est égal à $150 m^3/h$.

Conclusion générale

Dans ce travail, nous avons abordé un outil (programme Fortran) pour simuler l'écoulement axisymétrique de l'eau dans un puits (producteur injecteur).

Nous avons proposé un modèle efficace qui permet d'exploiter d'énergie géothermique. L'étude montre que ce code présent nous donne des valeurs très proche avec le code commercial Fluent. D'après les résultats numériques obtenus, nous constatons que plusieurs paramètres mis en jeu tel que : le dimensionnement de puits, le gradient de la température, le nombre de Reynolds et Prandtl. Les résultats obtenus ont montré qu'il y a une relation proportionnelle entre le nombre de Reynolds et la quantité de chaleur récupérée. Il s'avère que la température à la sortie au niveau de puits producteur prend une valeur maximale pour $Re=10^6$. Par contre elle prend une valeur minimale pour $Re=10^2$.

L'étude montre aussi que le choix de puits injecteur et producteur jeu un rôle important dans ce système de récupération. La position de l'axisymétrique injecteur et l'annulaire producteur nous a donné la meilleure quantité d'énergie géothermique récupérable.

En point de vu économique l'étude montre que l'énergie géothermique peut être remplacé les autres types d'énergie conventionnelle au moindre coût. Il reste un seul problème qui représente le coût d'installation de ce type d'énergie.

Bibliographie

- [1]- **T. Bernard et al.** Perspectives énergétiques Tome VIII rapport présenté à l'academie des sciences Paris (France) le 15/02/2005
- [2]-**R. Lefebvre**, Ecoulement multiphase en milieux poreux Automne. Sixième édition l'université Laval 2006.
- [3] - **P. Bia et al.** L'exploitation des gisements d'hydrocarbures. Editions Technip Paris (France) : 1974.
- [4]- **D Takherist et I. Hamdi.** Anomalie thermique de in Salah conséquences possibles sur le potentiel pétrolier, contribution de sonatrach division exploration WEC (Sonatrach Schlumberger) (Algérie) ; 1995.
- [5]- **D.Pahud**, Geothermal energy and heat storage Laboraorio di Energia, Ecologia ed Economia; 2002. site internet [http:// www.Leeed.cti.supsi.ch/urec.htm](http://www.Leeed.cti.supsi.ch/urec.htm) consulter en date de 05/2007.
- [6]- Etude du plan directeur général de développement des régions sahariennes. Etude élaborée par le Bureau National d'Etudes pour le Développement Rural, Bouchaoui-Chéraga- Tipaza (Algérie) ; Mai 1999.
- [7]- **B. Bouchkima**, L'eau de la nappe albiennne du sud algérien. Recueil des communications des journées techniques et scientifiques sur la qualité des eaux du sud. Volume III EL Oued (Algérie) ; mai 2003.
- [8]- **R.REY** : Ingénierie des fluides et des machines. Editions ENSAM, Paris Juillet 2000.
- [9]- **Michel Hug** , Mécanique des fluides appliquées, EYROLLES – Paris 1975.
- [10]- **SUHS V.Patankar**. Numerical heat transfer and fluid flow, Hemisphere Publishing Corporation, united State Of America 1980.
- [11]- **Nathalie Buil**- modélisation tridimensionnelle du transport de polluants dans les écoulements à surface liber. Thèse pour obtenir le titre de docteur à l'université Claude Bernard-Lyon1.janvier, 1999.
- [12]- **J.Taine-J.P Petit**, Transfert thermique, DUNOD- Paris 1995.
- [13]- **Régis .JOULIE**, mécanique des fluides appliquées, ELLIPSES – Paris 1998.
- [14]- **Lucien. Borel**- Thermodynamique et énergétique .Presses polytechnique et universitaire romandes, Lausanne 1991.
- [15]- **SUHAS V. PATANKAR**- Numerical heat transfer and fluid flow. Hemisphere Publishing Corporation, United State of America 1980.

- [16]- **Samir. BEN CHIKH**, Etude numérique comparative des solutions exactes et approchées de la convection naturelle instationnaire en milieu confiné stratifié, Thèse pour obtenir le grade de docteur de l'université de Poitiers, Mars 1987.
- [17]- **Nathalie Buil**, Modélisation tridimensionnelle de transport de polluantes dans les écoulements à surface libre, Thèse pour obtenir le titre de docteur à l'université de Claude Bernard-Lyon1, janvier 1999.
- [18]- **Dale A. Anderson, John C. Tannehill, Richard H. Pletcher**, Computational fluid mechanics and heat transfer, Hemisphere Publishing Corporation, United State of America 1984.
- [19]- **M. boumahrat- A. Gourdin**, méthode numérique appliquée, OPU-Alger 1993.
- [20]- **D. Euvrad**, Résolution numérique des équations aux dérivées partielles, MASON-Paris 1994.
- [21]- **Meunier.f, Kouschic.S.C**, Comparative thermodynamic study of sorption systems, second lan analysis. In.J. of Refrigeration, Vol 19, 1996, GB.
- [22]- **Pierre Rapin**, Formulaire du froid. 10^{ème} Edition, DUNOD.
- [23]- **Keith.E.Herold, Standford**, Absorption chillers and heat pumps. 1996 Crs press
- [24]- **Pierre Rapin, Patrick Jacquard**, Technologie des installations frigorifiques 8^{ème} édition DUNDO -2004 .
- [25]- **Georges Vrinat**, Technique de l'Ingénieur, Production du froid - Machine frigorifique à absorption, B 551 p1-7 -2001 .
- [26]- **André BONTEMPS et Alain GARRIGUE**, Technique de l'Ingénieur, Échangeurs de chaleur B 2 340 P4-1994.
- [27] **JACQUES PADET**, Echangeurs thermiques, méthodes globales de calcul. Edition Masson, Paris, 1993.
- [28] **JEAN CASTAING-LASVIGNOTTES**, Technologie et principes de fonctionnement des échangeurs de chaleur. Institut Français du froid industriel, 2001.
- [29]- **Kherris Sahraoui**, Simulation des cycles de machins frigorifiques à absorption, Mémoire de magister, Université de Tiaret 2008.
- Site d'internet :**
- [30]- Site web: http://www.lvsairmecanic.ca/geothermie_economie.php (Site consulté en Octobre 2007)
- [31]- Site web: <http://www.canren.gc.ca> (Site consulté en Octobre 2007)
- [32]- Site web:
http://www.focus.de/immobilien/energiesparen/heizkosten/heizkosten_aid_28214.html
(Site consulté en décembre 2007)