



République algérienne démocratique et populaire

Ministère de l'Enseignement supérieur

et de la Recherche scientifique

Université Kasdi Merbah, Ouargla



Faculté de mathématiques et des sciences des matériaux

Departement de MATHEMATIQUES

Mémoire pour l'obtention du diplôme de Master

Domaine : mathématiques

Spécialité : Modélisation et Analyse Numérique

Présenté par : Mebarki Ahmed Elaid

Thème :

Synchronisation d'une application chaotique sans points fixes

Date d'évaluation : 29/05/2025

Devant le jury :

Mr H. Abassi	Président	M.C.A	Université Kasdi Merbah- Ourgla
Mr M. Kouidri	Examineur	M.C.A	Université Kasdi Merbah- Ourgla
Mr M. Mammeri	Rapporteur	M.C.B	Université Kasdi Merbah- Ourgla

Année académique : 2024/2025

RÉSUMÉ

ملخص

يتناول هذا البحث موضوع تزامن الأنظمة الديناميكية الفوضوية التي لا تحتوي على نقاط ثابتة. يقدم دراسة شاملة حول الاستقرار والتزامن لبعض التطبيقات الفوضوية الثنائية والثلاثية الأبعاد، مع اقتراح طرق تحكم تكيفية لضمان الاستقرار والتزامن. تم دعم فعالية هذه الطرق من خلال محاكاة عددية، ويهدف هذا العمل إلى تعميق فهم السلوكيات المعقدة في الأنظمة الديناميكية وتقديم حلول فعالة للتحكم فيها.

الكلمات المفتاحية : تزامن، أنظمة فوضوية، نقاط ثابتة، تحكم تكيفي، استقرار، محاكاة عددية

Abstract :

This thesis explores the synchronization of chaotic dynamical systems without fixed points. It presents a detailed study of the stability and synchronization of 2D and 3D chaotic maps. Adaptive control strategies are proposed to achieve stabilization and synchronization, and numerical simulations validate the effectiveness of the proposed methods. This work aims to deepen the understanding of complex behaviors in dynamical systems and to offer effective control approaches.

Keywords : Synchronization, Chaotic Systems, Fixed Points, Adaptive Control, Stability, Numerical Simulation

Résumé :

Ce mémoire traite de la synchronisation des systèmes dynamiques chaotiques sans points fixes. Il présente une étude approfondie de la stabilité et de la synchronisation de certaines applications chaotiques bidimensionnelles et tridimensionnelles. Des méthodes de contrôle adaptatives sont proposées pour atteindre la stabilisation et la synchronisation, avec des validations à travers des simulations numériques. Cette recherche vise à renforcer la compréhension des comportements complexes dans les systèmes dynamiques et à fournir des approches efficaces pour les contrôler.

Mots-clés : Synchronisation, Systèmes chaotiques, Points fixes, Contrôle adaptatif, Stabilité, Simulation numérique

REMERCIEMENTS

Au terme de ce travail, je tiens à exprimer mes sincères remerciements à toutes les personnes qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce mémoire.

Je remercie tout particulièrement mon encadrant, **Dr. Mohammed Mammeri**, pour sa disponibilité, ses conseils pertinents, et son encadrement rigoureux tout au long de ce travail. Sa patience et sa bienveillance ont été d'un grand soutien.

Je tiens également à exprimer ma gratitude aux membres du jury : **Mr H. Abbasi, et Mr Kouidri Mohammed**, pour l'honneur qu'ils me font en acceptant d'évaluer ce travail.

Je remercie l'ensemble des enseignants du département de mathématiques de l'Université Kasdi Merbah – Ouargla pour la qualité de leur enseignement et leur accompagnement durant mon parcours universitaire.

Je n'oublie pas de remercier ma famille, en particulier mes parents, pour leur soutien indéfectible, leurs sacrifices, et leurs encouragements constants. Leur présence à mes côtés a été essentielle.

Enfin, mes pensées vont aussi à mes amis et collègues de promotion, pour leur entraide, leur bonne humeur et les précieux moments partagés.

À toutes et à tous, merci du fond du cœur.

إهداء

إلهي لا يطيب الليل إلا بشرك ولا يطيب النهار إلا بطاعتك
ولا تطيب اللحظات إلا بذكرك لك الحمد والشكر
إلى من بلغ الرسالة وأدى الأمانة ونصح الأمة وإلى نبي الرحمة ونور
العالمين صلوات ربي وسلامه عليك،
إلى من من أحمل اسمه بكل افتخار وعلمي العطاء بدون انتظار
أرجو من الله أن يمد في عمرك ويشفيك
لترى ثماره قد حان قطفها بعد طول انتظار (والدي الحبيب)
إلى ملاكي فالحياة ومعنى الحب والحنان وبسمة الحياة وسر الوجود
إلى من كان دعاؤها سر نجاتي وحنانها بلسم جراحي إلى ست
الحبايب (أمي الغالية)
إلى من كانوا يضيئون لي الطريق ويساندوني إخوتي، وكل أصدقائي
الأحباب دون استثناء كل باسمه أحبكم
إلى أساتذتي الكرام وكل من سقط من قلبي سهواً
أهدي ثمرة جهدي

مباركي أحمد العيد

Mebarki Ahmed Elaid

- $x(t), y(t), z(t)$: Variables d'état des systèmes dynamiques.
- F, G : Applications ou fonctions dynamiques utilisées dans les modèles.
- $e(t)$: Erreur de synchronisation entre le système maître et esclave.
- A : Matrice de coefficients ou matrice Jacobienne.
- U : Contrôle appliqué pour la stabilisation ou la synchronisation.
- $V(x)$: Fonction de Lyapunov pour l'analyse de la stabilité.
- λ : Exposant de Lyapunov, indicateur de sensibilité aux conditions initiales.
- k_1, k_2 : Gains de rétroaction dans les couplages de synchronisation.
- x^* : Point d'équilibre ou point fixe.
- $\phi(t)$: Flot associé à un système dynamique continu.

TABLE DES MATIÈRES

Remerciements	ii
Dédicace	iii
Notations	iv
Introduction Générale	3
1 Préliminaire sur les Systèmes Chaotiques Discrets	5
1.1 Introduction	5
1.2 Systèmes discrete dans le temps	6
1.2.1 Définition et représentation	6
1.2.2 Orbites négatives et orbites positives	6
1.2.3 Points fixes	7
1.3 Stabilité et convergence des systèmes dynamiques	7
1.3.1 Stabilité des points d'équilibres	8
1.3.2 Stabilité au sens de Lyapunov	8
1.3.3 Méthode directe d'étude de la stabilité au sens de Lyapunov	11
1.4 Attracteur et attracteur chaotique [16]	12
1.5 Sensibilité aux conditions initiales	13
1.6 Attracteur	14
1.6.1 Ensemble invariant	14

1.6.2	Propriétés d'attracteurs	15
1.6.3	Les différents types d'attracteurs	16
1.7	Attracteurs chaotiques	16
1.7.1	Définitions d'attracteur chaotique	17
1.7.2	Les différents types d'attracteurs chaotiques	17
1.8	Exposants de Lyapunov	18
1.9	Routes vers le chaos (bifurcation)	24
1.9.1	Différente types des routes	25
1.9.2	Diagramme de bifurcation	25
1.10	Conclusion	27
2	Synchronisation des Systèmes Dynamiques Discrets	28
2.1	Introduction	28
2.2	Définitions de la synchronisation	29
2.2.1	Définition de la synchronisation en mathématiques :	29
2.3	Classes de synchronisation :	30
2.3.1	Synchronisation par couplage bidirectionnel :	30
2.3.2	Synchronisation par couplage unidirectionnelle	31
2.4	Types de synchronisation des systèmes discrets	32
2.4.1	Synchronisation complète	32
2.4.2	Anti-Synchronisation	33
2.4.3	Synchronisation Décalée	33
2.4.4	Synchronisation Projective	34
2.4.5	Synchronisation FSHP	34
2.4.6	Synchronisation Généralisée	35
2.4.7	Synchronisation Q-S	35
2.5	Méthodes de synchronisation	36
2.5.1	Méthode du contrôleur actif	36
2.5.2	Méthode du Backstepping	38
2.5.3	Méthode du Mode Glissant	39
2.6	Conclusion	42

3	Stabilisation et Synchronisation des applications Chaotiques Sans points fixes	43
3.1	Introduction	43
3.2	Application Chaotique sans points fixes en 2D	44
3.2.1	Points fixes de la application	44
3.2.2	Dynamique de la application	46
3.3	Analyse de la stabilité d'applications chaotique sans points fixes en 2D	48
3.3.1	Présentation du système étudié	48
3.3.2	Étude des points d'équilibre	48
3.3.3	Analyse locale par la matrice Jacobienne	48
3.3.4	Étude de la stabilité locale	49
3.3.5	Stabilisation par une loi de contrôle adaptative	50
3.4	Synchronisation d'une application chaotique 2D sans points fixes	52
3.4.1	Système Maître (m)	52
3.4.2	Système Esclave (s)	53
3.4.3	Définition des Erreurs et Dynamique	53
3.4.4	Conception des Lois de Contrôle	54
3.4.5	Simulation Numérique	56
3.4.6	Analyse des Résultats	58
3.5	Étude de la stabilisation et de la synchronisation du système Lozi en 3D sans point fixe	59
3.6	Application du système de Lozi et étude de la crise de frontière [20]	60
3.7	Analyse de la stabilité de l'application du système de Lozi en 3D sans points fixes	61
3.7.1	Points fixes de la application du système de Lozi	61
3.8	Analyse de l'Absence des Points Fixes	62
3.8.1	Étude numérique	65
3.8.2	Stabilisation par une loi de contrôle adaptative	68
3.9	Synchronisation d'applications chaotique en 3D sans points fixes	70
3.9.1	Système Maître (m)	70

3.9.2	Système Esclave (s)	70
3.9.3	Dynamique des erreurs	71
3.9.4	Conception du Contrôleur	72
3.9.5	Simulation numérique	73
3.9.6	Analyse des Résultats	76
3.10	Conclusion	78
	Conclusion Générale	79

TABLE DES FIGURES

1.1	Stabilité d'un point d'équilibre.	9
1.2	Stabilité asymptotique.	10
1.3	Stabilité exponentielle	10
1.4	L'évolution d'une population d'individus dans le temps pour des conditions initiales très proches $U_{n+1} = 4a(1 - U_n)(U_0 = 0.3 \text{ et } U_0 = 0.00001)$	14
1.5	attracteur de Hnon avec $(a, b) = (1.4, 0.3)$ et $(x_0 = 0.25; y_0 = 0.25)$	18
1.6	Exposants de Lyapunov de l'application 1.13	21
1.7	Exposants de Lyapunov ($n > 1$) de l'application 1.15 avec $a = 0.4$ et $b = 0.3$	24
1.8	Diagramme de bifurcation de l'application 1.16 avec $a = 1.4, b = 0.3,$ $\lambda_1 = 0.42,$ et $\lambda_2 = -1.62$	27
2.1	- L'attracteur chaotique d'Hitzl-Zele lorsque $(\alpha; \beta) = (1.07; 0.3)$	32
3.1	Attracteur étrange de l'application 3.1 pour $a = 0,01, b = 0,1, c = 2, d = 0,1$ et $(x_0, y_0) = (1,5, 0,5)$	46
3.2	Diagramme de bifurcation (a) et exposants de Lyapunov (b) lors de la variation de c pour $a = 0.01, b = 0.1, d = 0.1$ et $(x_0, y_0) = (1.5, 0.5)$	47
3.3	Stabilisation lors de l'application de la loi de contrôle proposée : (a) $x(n)$ et (b) $y(n)$	51
3.4	Erreur de stabilisation dans le plan $x - y$	52
3.5	Évolution des états lors de l'application du contrôle : (a) $x_m(n), x_s(n)$ et (b) $y_m(n), y_s(n)$	58

3.6	Erreurs de synchronisation entre la système maître et la système esclave . . .	59
3.7	Comportement chaotique observé	65
3.8	Comportement régulier observé	65
3.9	Diagramme de bifurcation de l'application (3.20) obtenu pour $b = 0.9$, $c = -0.9$, et $a = 0.03$ avec la condition $b + c = 0$	66
3.10	Variation de l'exposant de Lyapunov maximal selon les paramètres $b = 0.9$, $c = -0.9$, et $a = 0.03$ avec la condition $b + c = 0$	67
3.11	Évolution des trajectoires $x(n)$, $y(n)$ et $cz(n)$ sous contrôle adaptatif. . . .	69
3.12	Évolution des erreurs de stabilisation dans les plans (x, y) , (y, z) et (x, z) . . .	69
3.13	Évolution des états : (a) $x_m(n), x_s(n)$, (b) $y_m(n), y_s(n)$, (c) $z_m(n), z_s(n)$. . .	77
3.14	Évolution des erreurs de synchronisation $e_x(n), e_y(n), e_z(n)$	77

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Dans le cadre du développement scientifique et technologique contemporain, la compréhension des systèmes dynamiques chaotiques est devenue un enjeu majeur, tant sur le plan théorique que pratique. Ces systèmes, bien qu'issus de lois déterministes, présentent un comportement apparemment désordonné et imprévisible, ce qui les rend fascinants et complexes à analyser. Leur étude s'avère essentielle pour modéliser et anticiper de nombreux phénomènes naturels, techniques, et même sociaux, où la sensibilité aux conditions initiales et les interactions non linéaires jouent un rôle crucial.

Ce mémoire s'inscrit dans cette dynamique scientifique et ambitionne de contribuer à la compréhension des systèmes chaotiques, en particulier ceux dépourvus de points fixes. Il propose une exploration rigoureuse des fondements mathématiques, des propriétés dynamiques et des mécanismes de synchronisation de ces systèmes, avec une attention particulière portée aux approches de stabilisation par des lois de contrôle adaptatives.

Le contenu de ce travail est organisé en trois chapitres complémentaires :

Le premier chapitre constitue une introduction théorique aux systèmes dynamiques discrets chaotiques. Il présente les notions fondamentales telles que les orbites, les points fixes, la stabilité locale et globale, les attracteurs chaotiques, ainsi que les exposants de Lyapunov. Une attention particulière est accordée aux routes vers le chaos, notamment les bifurcations, qui permettent de comprendre les transitions vers des comportements dynamiques complexes.

Le deuxième chapitre est consacré à la problématique de la synchronisation dans les systèmes dynamiques chaotiques. Ce phénomène, qui consiste à faire coïncider les états de deux ou plusieurs systèmes dynamiques, est au cœur de nombreuses applications modernes, notamment dans le traitement du signal, la sécurité des communications, et la biologie. Plusieurs formes de synchronisation sont abordées, telles que la synchronisation complète, anti-synchronisation, généralisée, ou projective, avec une classification claire des méthodes de couplage utilisées.

Le troisième chapitre porte sur la stabilisation et la synchronisation des applications chaotiques bidimensionnelles et tridimensionnelles sans points fixes. Ce chapitre présente

des stratégies de contrôle innovantes basées sur des approches adaptatives. Des simulations numériques sont réalisées pour illustrer l'efficacité des lois de commande proposées, offrant ainsi une validation pratique des concepts théoriques développés.

À travers cette recherche, nous visons à approfondir la compréhension des comportements chaotiques complexes et à développer des outils efficaces pour leur maîtrise. Nous espérons également que ce mémoire puisse servir de point de départ à des travaux futurs dans ce domaine en pleine expansion, et qu'il contribue, à sa mesure, à l'essor des sciences mathématiques appliquées.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRE SUR LES SYSTÈMES CHAOTIQUES

DISCRETS

1.1 Introduction

Ce chapitre présente une introduction aux systèmes dynamiques discrets dans le temps, qui sont utilisés pour modéliser des phénomènes évoluant à des instants discrets. Ces systèmes, représentés par des équations en différences, sont particulièrement adaptés aux environnements numériques. Le chapitre traite des propriétés dynamiques fondamentales telles que les points fixes, les orbites, la stabilité locale et globale, ainsi que les attracteurs, en mettant un accent particulier sur les attracteurs chaotiques. Il aborde également des notions avancées comme la sensibilité aux conditions initiales, les exposants de Lyapunov et les bifurcations, qui constituent des chemins vers le chaos. L'objectif est de poser les bases théoriques nécessaires pour comprendre la dynamique chaotique et préparer l'étude des techniques de contrôle et de synchronisation dans les chapitres suivants.

1.2 Systèmes discrete dans le temps

1.2.1 Définition et représentation

L'étude de la stabilité des solutions périodiques, grâce à la dynamique de Poincaré aux multiplicateurs caractéristiques, permet d'entrevoir l'importance des applications discretes, ou dans un langage plus prosaïque, des suites récurrentes. Un système dynamique discrete est de la forme :

$$x_{k+1} = G(x_k) \quad (1.1)$$

où G est une application régulière d'un ouvert U de \mathbb{R} dans lui même. le système dynamique continu $\frac{dx}{dt} = v(x)$ peut être étudié comme une application discrète si, au lieu de considérer son flot continu ϕ_t on considère $\tau > 0$ ("sorte" de période d'échantillonnage) et l'application associée :

$$G : U \rightarrow U$$

$$x \rightarrow G(x) = \phi_\tau(x)$$

Comme $\phi_\tau \circ \phi_\tau = \phi_{2\tau}$, il est clair que l'étude de ϕ_t lorsque $t \rightarrow +\infty$ et celle de

$$G^k = \underbrace{G \circ G \circ \dots \circ G}_{k\text{-fois}}$$

lorsque l'entier k tend vers $+\infty$ doivent être très similaires. Nous rappelons ici, succinctement, comment les notions et résultats précédents, introduits pour les systèmes dynamiques continus, se transposent aux systèmes discrets.

1.2.2 Orbites négatives et orbites positives

Orbite positive

Une orbite positive O^+ d'un point x_0 dans \mathbb{R}^n est la suite des images de x_0 par les composées successives de

$$O^+(x_0) = \{x_0, G(x_0), G^2(x_0), \dots, G^k(x_0), \dots\}$$

Si G est inversible alors :

$$G^{-k}(x_0) = \underbrace{G^{-1} \circ G^{-1} \circ \dots \circ G^{-1}}_{k\text{-fois}}(x_0)$$

Orbite négative

Une orbite négative O^- d'un point x_0 dans \mathbb{R}^n est la suite des images de x_0 par les composées successives de G :

$$O^-(x_0) = \{x_0, G(x_0), G^{-2}(x_0), \dots, G^{-k}(x_0), \dots\}$$

Si $O^+(x_0)$ et $O^-(x_0)$ existent alors l'orbite $O(x_0)$ de x_0 est l'ensemble :

$$O(x_0) = O^+(x_0) \cup O^-(x_0)$$

1.2.3 Points fixes

Soit un système autonome ou non, caractérisé par l'équation d'état (1.1) ou (1.2), un état d'équilibre est caractérisé par la relation suivante :

$$F(x) = 0 \tag{1.2}$$

Tout solution x vérifiant cette relation est appelée position d'équilibre, point singulier, point fixe ou encore solution stationnaire.

On distingue seulement deux types d'attracteurs qui sont des points fixes. Il s'agit des nœuds stables et des foyers stables. [23]

1.3 Stabilité et convergence des systèmes dynamiques

L'étude qualitative permet de voir le comportement des solutions sans avoir à résoudre l'équation différentielle. En particulier, elle permet l'étude locale des solutions autour de points d'équilibre. [22]

1.3.1 Stabilité des points d'équilibres

La notion de stabilité est très importante pour l'étude du comportement des systèmes dynamiques linéaires et non-linéaires, l'analyse de la stabilité d'un système consiste à étudier son comportement lorsqu'il est déplacé d'un point d'équilibre. Cela passe par l'analyse de la trajectoire de l'état du système lorsque son état initial est proche d'un point ou d'une trajectoire d'équilibre.

Les points d'équilibres jouent un rôle capital dans l'étude des systèmes dynamiques Henri Poincaré (1854-1912) montra que pour caractériser un système dynamique à plusieurs variables, il n'est pas nécessaire de calculer les solutions détaillées ; il suffit en effet de connaître les points fixes (points d'équilibres) et leurs stabilité. Ce résultat de grande importance simplifie considérablement l'étude des systèmes non-linéaires au voisinage de ces points. Alors pour déterminer la stabilité d'un point d'équilibre, il faut étudier le comportement des solutions dans un petit voisinage de celui-ci.

Plusieurs définitions de la stabilité ont été proposées. Parmi celles-ci se trouve la définition de stabilité au sens de Lyapunov.

1.3.2 Stabilité au sens de Lyapunov

On considère l'ensemble des systèmes non linéaires décrits par l'équation dynamique suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x(t), t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.3)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^n$ est continue

Définition : 1.1 (stabilité) *Un point d'équilibre x^* de 1.3 est **stable** au sens de Lyapunov si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \|x_0 - x^*\| < \delta \implies \|x(t) - x^*\| < \epsilon, \text{ pour tout } t > 0$$

Dans le cas contraire, x^ est dit instable.*

Ainsi, la stabilité au sens de Lyapunov signifie que la trajectoire $x(t)$, avec une condition initiale $x(t_0)$, doit rester proche du point d'équilibre x^ . Pour cela, les solutions $x(t)$*

doivent rester à l'intérieur de la région délimitée par $\|x(t) - x^*\| < \epsilon$, c.-à-d. rester dans un "tube" de rayon ϵ autour de la trajectoire $x(t) = x^*$, Fig. 1.1.

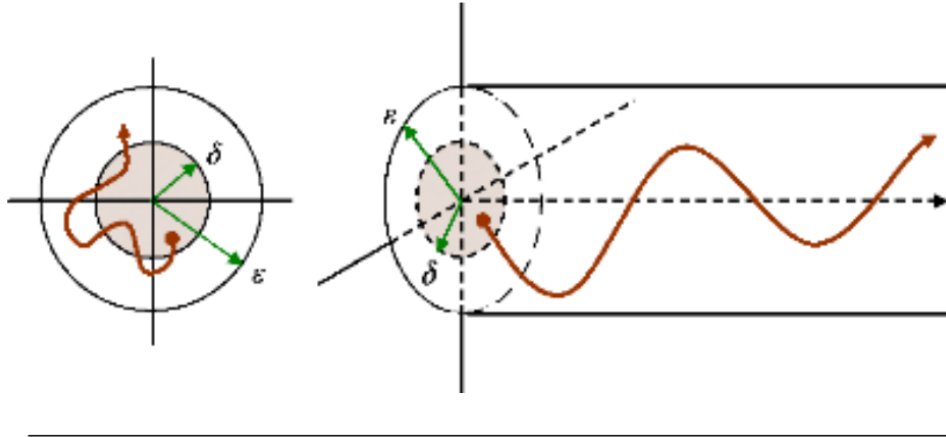


FIGURE 1.1 – Stabilité d'un point d'équilibre.

Définition : 1.2 (Stabilité asymptotique) Un point d'équilibre x^* de 1.3 est **asymptotiquement stable** au sens de Lyapunov si il est stable au sens de Lyapunov et si de plus existe $\delta_0 > 0$ avec $0 < \delta_0 < \delta$ tel que

$$\|x_0 - x^*\| < \delta_0 \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x^* \quad (1.4)$$

La stabilité asymptotique signifie que non seulement le point d'équilibre est stable, mais qu'on est aussi capable de déterminer un domaine proche du point d'équilibre tel que n'importe quelle trajectoire, issue d'un état initial $x(t_0)$ appartenant à ce domaine, tende vers x^* quand t tend vers ∞ , Fig. 1.2.

La stabilité asymptotique est la propriété généralement recherchée en pratique. Il faut cependant remarquer que la définition ci-dessus ne donne pas d'information sur la vitesse à laquelle la trajectoire $x(t)$ converge vers l'équilibre. C'est pourquoi, on introduit la notion de stabilité exponentielle qui permet de caractériser cette vitesse.

Définition : 1.3 (Stabilité exponentielle) Un point d'équilibre x^* de 1.3 est **exponentiellement stable** s'il existe des constantes positives a, b, δ tel que

$$\|x_0 - x^*\| < \delta \implies \|x(t) - x^*\| \leq a \exp(-bt) \|x_0 - x^*\|, \text{ pour tout } t > 0 \quad (1.5)$$

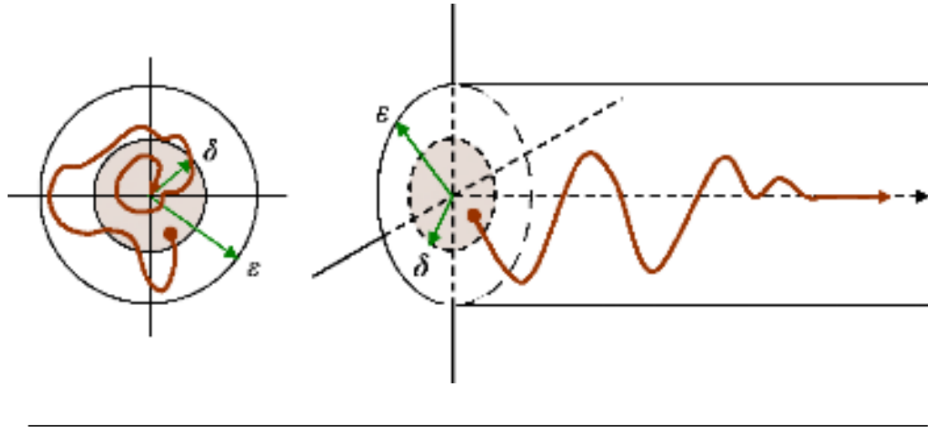


FIGURE 1.2 – Stabilité asymptotique.

Cette stabilité signifie que le vecteur d'état, pour une condition initiale $x(t_0)$, converge vers un point d'équilibre x^* plus rapidement qu'une fonction exponentielle ; b est appelé le taux de convergence. Par ailleurs, la stabilité exponentielle implique la stabilité asymptotique qui implique elle-même la stabilité d'un point d'équilibre. La figure Fig. 1.3 illustre schématiquement la définition de la stabilité exponentielle.

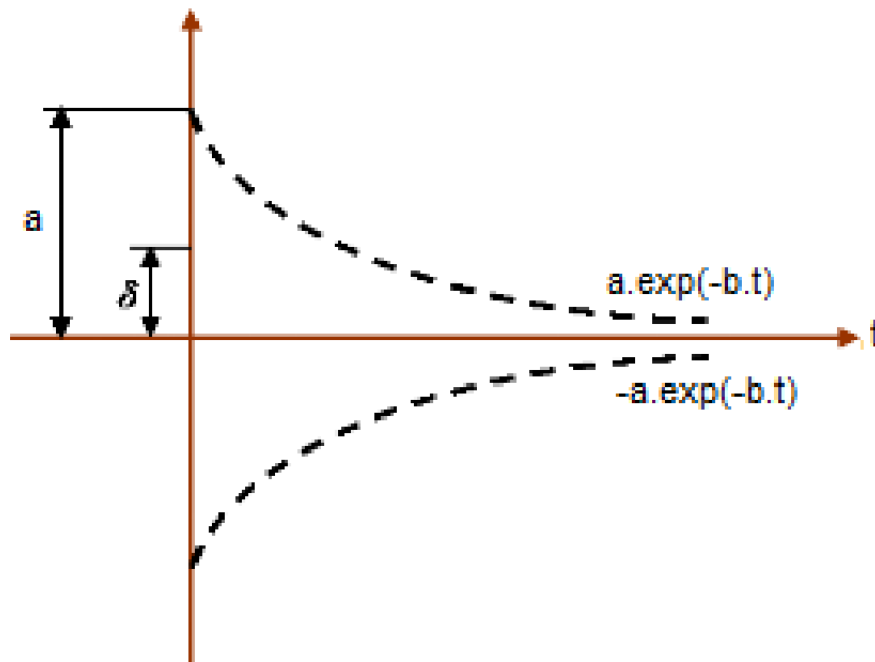


FIGURE 1.3 – Stabilité exponentielle

Dans chacune des définitions précédentes, la stabilité est définie de manière locale

Remarque: 1.1 Si le point d'équilibre est stable, asymptotiquement stable (exponentiel-

lement stable) quel que soit le vecteur d'état initial x_0 dans \mathbb{R}^n alors le point d'équilibre est globalement stable, globalement asymptotiquement stable (globalement exponentiellement stable).

1.3.3 Méthode directe d'étude de la stabilité au sens de Lyapunov

Lyapunov a proposé une méthode, appelée méthode directe de Lyapunov, est basée sur la recherche d'une fonction particulière, notée $V(x)$ et appelée fonction de Lyapounov, si une telle fonction existe alors le système est stable. Cette méthode est difficile à mettre en oeuvre, mais elle est d'une portée beaucoup plus générale. Notons que la méthode directe de Lyapounov nous donne une condition suffisante de stabilité, c'est-à-dire que le système peut être stable même devant l'impossibilité de trouver une fonction de Lyapounov car il n'y a pas de règle générale pour trouver une telle fonction.

Fonction de Lyapunov

Soit x^* est un point d'équilibre du système 1.3. Soit $V : W \mapsto \mathbb{R}$, une fonction différentiable définie sur un voisinage W de x^* telle que

$$\begin{aligned} V(x^*) &= 0 \\ V(x) &> 0 \quad \text{si } x \neq x^* \end{aligned}$$

Posons :

$$\dot{V} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} \dot{x}_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} f_j(x)$$

alors on a le théorème suivant.

Théorème: 1.1 — Si $\dot{V}(x) \leq 0$ dans $W - \{x^*\}$ alors x^* est stable

— Si $\dot{V}(x) < 0$ dans $W - \{x^*\}$ alors x^* asymptotiquement stable

— Si $\dot{V}(x) > 0$ dans $W - \{x^*\}$ alors x^* est instable

On dit aussi que la fonction \dot{V} est semi-définie négative dans le premier cas, définie négative dans le deuxième cas et définie positive dans le troisième cas. Pour la démonstration de ce théorème voir [11].

Stabilité locale [22]

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction réelle définie un système dynamique discret, soit $Df(x_0)$ sa matrice Jacobienne évaluée au point fixe x_0 de l'application f , pour simplifier les notions de la stabilité locale du point fixe x_0 on introduit la notion de multiplicateur et pour caractériser la nature de ce point fixe nous donnons les définitions :

Définition : 1.4 *Les valeurs propres du jacobien $Df(x_0)$ sont appelées multiplicateurs caractéristiques de f en x_0 .*

Définition : 1.5 *Le point fixe x_0 de f est dit stable si ses multiplicateurs caractéristiques sont tous de module strictement inférieur à 1.*

Définition : 1.6 *Le point fixe x_0 de f est dit instable si l'un des multiplicateurs est de module strictement supérieur à 1.*

Définition : 1.7 *Le point fixe x_0 de f est dit point selle si au moins un multiplicateur est de module strictement inférieur à 1 et les autres multiplicateurs sont tous de module strictement supérieur à 1.*

1.4 Attracteur et attracteur chaotique [16]

La notion d'attracteur, bien qu'utile en dynamique des systèmes, ne possède pas encore de définition universellement admise. Elle est liée à la description des comportements asymptotiques d'un système dynamique. La présence de plusieurs attracteurs dans un système implique l'existence de plusieurs régimes asymptotiques distincts. Un attracteur étant un ensemble invariant, sa dimension dans un espace tridimensionnel est strictement inférieure à 3. Cependant, lorsqu'on cherche des attracteurs ni ponctuels (dimension 0 ou 1), ni cycliques (dimension 2), on s'intéresse à des objets géométriques complexes de dimension non entière : les *fractales*, selon la terminologie introduite par Mandelbrot. Parmi ces structures, on distingue les *attracteurs étranges* ou *chaotiques*, qui combinent comportements périodiques et chaotiques. Ils sont caractérisés par la *sensibilité aux conditions initiales* (SCI), où des trajectoires proches divergent exponentiellement.

Cette coexistence paradoxale entre attraction et divergence est rendue possible grâce au concept d'*hyperbolicité* : l'attracteur attire dans certaines directions (variété stable) tout en repoussant dans d'autres (variété instable). Ces phénomènes ne peuvent apparaître que dans des espaces de phase d'au moins trois dimensions. À long terme, les trajectoires issues du bassin d'attraction convergent vers l'attracteur étrange, illustrant ainsi la dynamique propre aux systèmes chaotiques.

1.5 Sensibilité aux conditions initiales

La **S.C.I** est un phénomène découvert dès la fin du **XIX**ème siècle par **Poincaré** dans des travaux concernant le problème à N corps en mécanique céleste, puis par **Hadamard** avec un modèle mathématique abstrait aujourd'hui baptisé « flot géodésique sur une surface à courbure négative ». Ce découvert a entraîné un grand nombre de travaux importants, principalement dans le domaine des mathématiques. Il a été redécouvert en 1963 par **Lorenz** lors de ses travaux en météorologie. [17]

Cette sensibilité explique le fait que, pour un système chaotique, une modification infime des conditions initiales peut entraîner des résultats imprévisibles sur le long terme. Ce résultat est souvent vulgarisé sous le nom « d'effet papillon » .

La **S.C.I** se traduit mathématiquement par l'hyperbolicité d'une partie de l'espace des phases d'un système , hyperbolicité à laquelle est associée un ensemble d'exposants de **Lyapunov** positifs, ainsi qu'une entropie topologique également positive.

Exemple: 1.1 *S.C.I*

- *L'évolution d'une population d'individus dans le temps pour des conditions initiales très proches.*

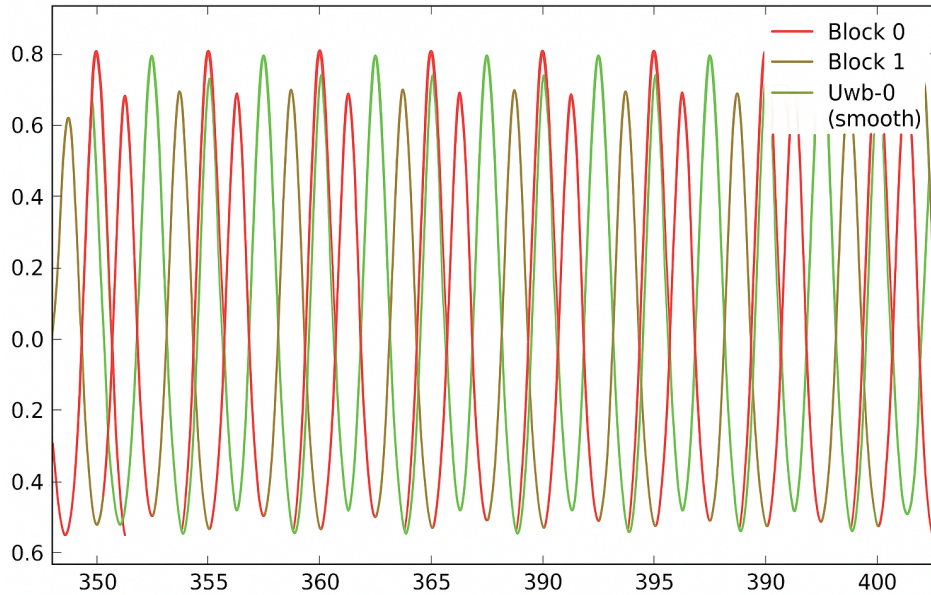


FIGURE 1.4 – L'évolution d'une population d'individus dans le temps pour des conditions initiales très proches $U_{n+1} = 4a(1 - U_n)$ ($U_0 = 0.3$ et $U_0 = 0.00001$).

1.6 Attracteur

1.6.1 Ensemble invariant

Définition : 1.8 [8] Soit A un sous-ensemble de l'espace des phases U ; A est dit (resp. positivement invariant) par un flots φ_t , si pour tout t dans \mathbb{R} (resp. dans $[0; +\infty[$, $\varphi_t(A)$ est inclus dans A).

Définitions d'attracteur

Définition : 1.9 Dans la littérature on trouve plusieurs définitions d'attracteur. En général, un attracteur est défini comme une sous-partie fermée de l'espace des phases qui "attire" toutes les autres orbites vers elle. On donne une seule définition possible d'attracteur

Définition : 1.10 (Guckenheimer ; Holmes) : Soit $\langle X, g \rangle$ un système dynamique discrète, Une sous-partie A de X est appelée attracteur si et seulement si les conditions suivantes sont réalisées :

1. A est fermée .
2. A est positivement invariante .

3. A est attractive, c'est-à-dire, il existe un voisinage ouvert U de A tel que :

- U est positivement invariant .
- U est attiré par $A \forall u \in U$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d(g^t(u), A) = 0$$

Dans l'espace \mathbb{R}^2 considérons le système dynamique discret dont la fonction successeur est la suivante :

$$g : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow \begin{pmatrix} x + y \\ x + y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

La variété instable

$$\mathbb{R}_1^2 = W^i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$$

est non-vide, fermée, et strictement positivement invariante. De plus, elle est un attracteur global en un seul pas. Au contraire, la variété stable

$$\mathbb{R}_2^2 = W^s = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = -y\}$$

est non-vide, fermée et strictement positivement invariante mais n'est pas un attracteur.

1.6.2 Propriétés d'attracteurs

1. A est un sous ensemble borné de l'espace est de volume nul, invariant par le flot φ_t autrement dit, tout point de l'espace d'état qui appartient à un attracteur demeure à l'intérieur de cet attracteur pour tout t : Il existe un ensemble $B \subset A$, tel que pour tout voisinage de A , la trajectoire qui prend son origine dans B se trouve au bout d'un temps fini dans ce voisinage de A . Autrement dit, toute trajectoire qui a son origine dans B tend vers l'attracteur, cette "zone d'influence" est le (Bassin d'attraction) .
2. Un attracteur est indécomposable c'est-à-dire que la réunion de deux attracteurs

n'est pas un attracteur.

1.6.3 Les différents types d'attracteurs

Il existe deux types d'attracteurs : les attracteurs réguliers et les attracteurs étranges ou chaotiques.

Attracteurs réguliers

Les attracteurs réguliers caractérisent l'évolution d'application non chaotique, et peuvent être de trois sortes nous allons en apprendre davantage sur le premier sorte :

Les points fixes

Toute solution x_0 vérifiant la relation $g(x_0) = 0$ est appelée position d'équilibre, point singulier, point fixe, ou encore solution stationnaire. On distingue seulement deux types d'attracteurs qui sont des points fixes. Il s'agit des noeuds stables et des foyers stables, représentés . Le point d'équilibre unique d'un pendule amorti est l'exemple classique de ce type d'attracteur.

1.7 Attracteurs chaotiques

Il n'existe pas à proprement parler de définition positive des orbites chaotiques. Un mouvement chaotique est non déterministe mais il ne s'agit pas d'un mouvement aléatoire. Il possède un spectre fréquentiel continu (caractère erratique) et présente en outre une extrême sensibilité aux conditions initiales. En effet deux orbites chaotiques initiées avec des conditions initiales très voisines vont diverger et s'écarter l'une de l'autre très rapidement. La vitesse de divergence de deux orbites initialement voisines peut être étudiée à partir des exposants de Lyapunov afin de caractériser la nature du chaos observé. On peut définir un attracteur chaotique (ou attracteur étrange) comme étant un attracteur de volume nul qui n'est ni un point fixe, ni cycle limite, ni quasi-périodique. Dans une section de Poincaré, un attracteur chaotique décrit une infinité de points dont l'ensemble possède une structure topologique auto-similaire avec une dimension fractale non

entière[5]. De ce fait, on ne peut pas réduire un mouvement chaotique à un point fixe ou un cycle limite comme pour les autres comportements asymptotiques. Néanmoins, les solutions chaotique présentent des propriétés de périodicité dans l'espace non pas euclidien mais celui d'**Hausdorff** [6].

1.7.1 Définitions d'attracteur chaotique

Définition : 1.11 *L'attracteur chaotique(ou étrange) est une forme géométrique plus complexe qui caractérise l'évolution du dynamiques des applications chaotiques. Un sous-ensemble borné A de l'espace des phases est un attracteur étrange ou chaotique pour une application T de l'espace s'il existe un voisinage R de A , c'est à dire que pour tout point de A il existe une boule contenant ce point et contenue dans R vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *Attraction : R est une zone de capture, ce qui signifie que toute orbite par T dont le point initial est dans R , est entièrement contenue dans R . De plus, toute orbite de ce type devient et reste aussi proche de A que l'on veut*
2. *Il est contenu dans un espace fini. son volume est nul. sa dimension est fractale (non entière)*
3. *Presque toute trajectoire sur l'attracteur à la propriété de ne jamais passer deux fois sur le même point, chaque trajectoire est presque sûrement apériodique.*
4. *Deux trajectoires proches à l'instant t voient localement leur distance augmenter à une vitesse exponentielle (SCI).*

1.7.2 Les différents types d'attracteurs chaotiques

Nous donnons une classification commune d'attracteurs chaotiques des systèmes dynamiques. En règle générale, à l'heure actuelle, les attracteurs chaotiques peuvent être classés en trois types principales :

1. Attracteur hyperbolique.
2. Attracteur de type de Lorenz.
3. Quasi attracteurs.

Exemple: 1.2 . (L'attracteur de Hénon) [10] et [9] : L'attracteur de **M. Hénon** (1976), associé à une application $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de la forme $(x, y) \rightarrow (X = 1 - ax^2 + y, Y = bx)$, est initialement issu d'un problème d'astronomie concernant les amas globulaires. Le système différentiel initial (application de Hénon - Heiles) est un système hamiltonien non intégrable, il est traité par la méthode des surfaces de section de Poincaré pour lui associer. Un système du plan dans lui-même dont l'étude plus abordable permet d'analyser le problème initial et ici de décrire son comportement chaotique par l'attracteur de Hénon. Ce procédé d'analyse d'un système différentiel non intégrable (et c'est le cas le plus souvent !) par une méthode de section est assez courant, bien que l'application itératif associé soit lui aussi non linéaire, son analyse est souvent plus facile à développer .

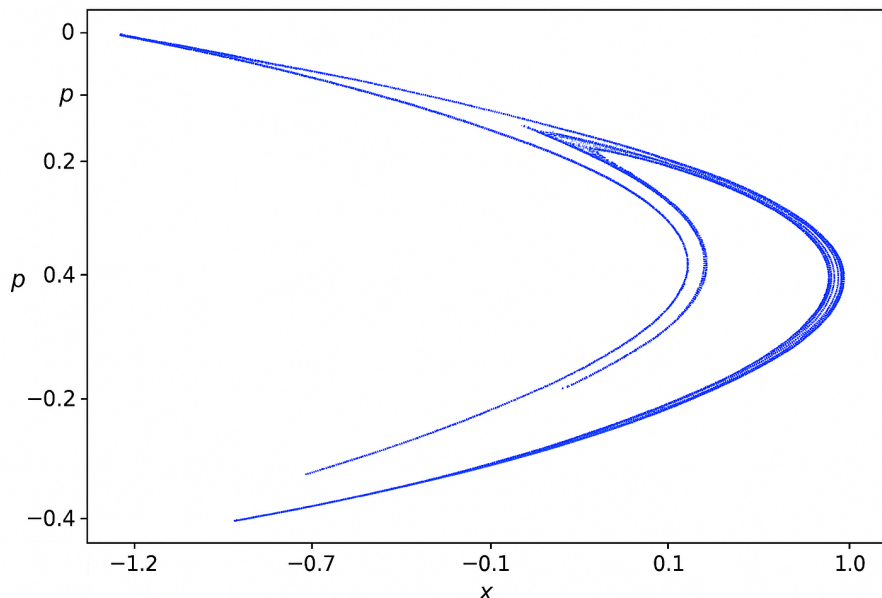


FIGURE 1.5 – attracteur de Hnon avec $(a, b) = (1.4, 0.3)$ et $(x_0 = 0.25; y_0 = 0.25)$.

1.8 Exposants de Lyapunov

Les exposants de Lyapunov sont utilisés pour quantifier la divergence potentielle entre deux orbites dérivées de conditions initiales proches, ce qui permet d'évaluer la sensibilité d'un système chaotique à ses conditions initiales. L'espace des phases possède autant d'exposants de Lyapunov que sa dimension [?, ?, ?]. Voici le système dynamique non linéaire

discret suivant :

$$x(k+1) = F(x(k)) \quad (1.6)$$

Nous partons du principe que la trajectoire issue d'un état initial $x(0)$ aboutit à un attracteur. Ainsi, $x(k)$ est confinée à l'intérieur de l'attracteur.

Nous sélectionnons deux conditions initiales très similaires, notées $x(0)$ et $\hat{x}(0)$, et nous observons le comportement des trajectoires qui en découle. Si on suppose que les deux trajectoires $x(k)$ et $\hat{x}(k)$ divergent de manière exponentielle, après k il suit :

$$|\hat{x}(k) - x(k)| = |\hat{x}(0) - x(0)|e^{\lambda k} \quad (1.7)$$

λ précise le taux de divergence par itération des deux trajectoires, dont la formule est décrite ci-après.

$$\lambda = \frac{1}{k} \ln \left| \frac{\hat{x}(k) - x(k)}{\hat{x}(0) - x(0)} \right| \quad (1.8)$$

pour $x(0)$ et $\hat{x}(0)$ qui sont très proches, le module de la différence $\epsilon = |\hat{x}(0) - x(0)|$ tend à se rapprocher de zéro, alors on obtient :

$$\lambda_L = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \ln \left| \frac{\hat{x}(k) - x(k)}{\hat{x}(0) - x(0)} \right| \quad (1.9)$$

Cela donne :

$$L = \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{k} \ln \left| \begin{array}{c} \tilde{x}(k) - x(k) \\ \tilde{x}(k-1) - x(k-1) \\ \tilde{x}(k-2) - x(k-2) \\ \vdots \\ \tilde{x}(0) - x(0) \end{array} \right| \quad (1.10)$$

ce qui peut être réécrit sous la forme :

$$L = \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \ln \left| \frac{\tilde{x}(i+1) - x(i+1)}{\tilde{x}(i) - x(i)} \right| \quad (1.11)$$

Sachant que :

$$\tilde{x}(i+1) \approx F(\tilde{x}(i)), \quad x(i+1) \approx F(x(i)),$$

on obtient :

$$L = \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \ln \left| \frac{F(\tilde{x}(i)) - F(x(i))}{\tilde{x}(i) - x(i)} \right| \quad (1.12)$$

En prenant la limite lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, cela devient :

$$L = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \ln \left| \frac{dF(x(i))}{dx(i)} \right| \quad (2.6)$$

La quantité L , appelée **exposant de Lyapunov**, mesure le taux moyen de divergence entre deux trajectoires issues de conditions initiales très proches.

Exemple 1.1 : Exposant de Lyapunov d'une application en temps discret

Considérons l'application de la tente définie par

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 2(1-x), & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases} \quad (1.13)$$

L'exposant de Lyapunov $h(x)$ mesure la sensibilité aux conditions initiales. Il est défini par

$$h(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |T'(x_i)|,$$

où $x_i = T^{i-1}(x)$ représente l'image du point initial x après $i - 1$ itérations de l'application T .

La dérivée de l'application T est donnée par

$$T'(x) = \begin{cases} 2, & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ -2, & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1, \end{cases} \quad (1.14)$$

et ainsi, la valeur absolue de la dérivée est constante et vaut

$$|T'(x)| = 2$$

pour presque tout $x \in [0, 1]$, à l'exception de $x = \frac{1}{2}$ où la dérivée n'est pas définie, ce qui n'a toutefois pas d'impact sur le calcul pour presque tout x .

Étant donné que $|T'(x_i)| = 2$ pour presque toute trajectoire, l'expression de l'exposant de Lyapunov se simplifie en

$$h(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln 2 = \ln 2.$$

Puisque $h(x) = \ln 2 > 0$, l'application de la tente présente un comportement chaotique caractérisé par une sensibilité exponentielle aux conditions initiales. Deux points initialement proches divergent en moyenne selon la relation

$$e^{n \ln 2} = 2^n,$$

ce qui indique une divergence extrêmement rapide des trajectoires.

Certaines trajectoires particulières, comme celles associées aux points fixes $x = 0$ ou $x = \frac{2}{3}$, peuvent présenter un exposant de Lyapunov différent. Toutefois, pour presque tout x , l'exposant est bien égal à $\ln 2$. De plus, l'application de la tente est ergodique, ce qui implique que la moyenne temporelle $h(x)$ est indépendante du point initial pour presque tout x , justifiant ainsi l'universalité du résultat $h(x) = \ln 2$.

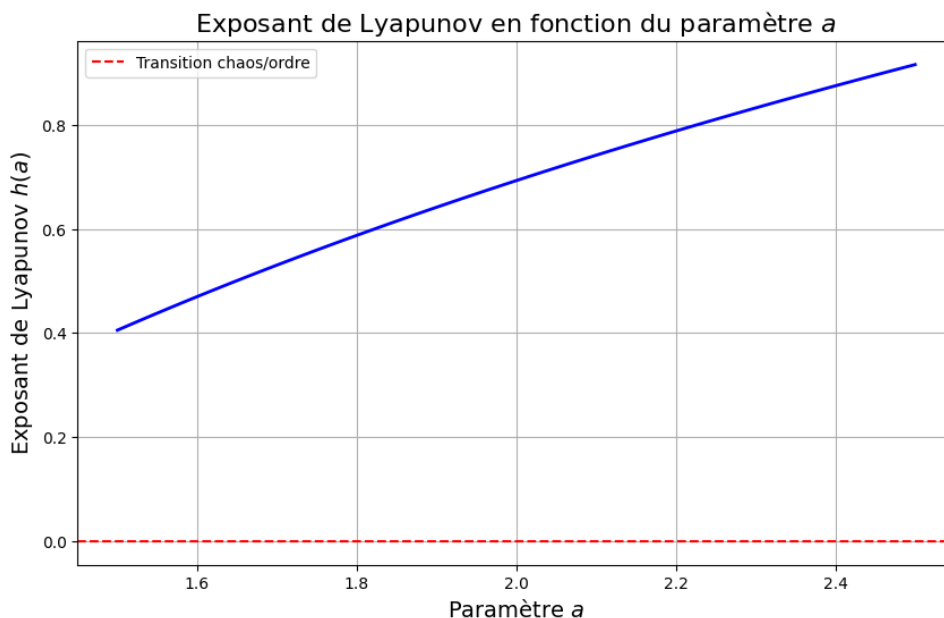


FIGURE 1.6 – Exposants de Lyapunov de l'application 1.13

Dans le cas d'un système de dimension $n > 1$, il existe n exposants de Lyapunov $L^{(j)}$ ($j = 1, 2, \dots, n$), chacun mesurant le taux de divergence selon une direction différente de

l'espace des phases.

Pour le calcul des exposants de Lyapunov, en partant d'un point initial $x(0) \in \mathbb{R}^n$, le comportement infinitésimal autour de $x(k)$ est caractérisé par la matrice Jacobienne suivante :

$$DF(x(i)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x(i))}{\partial x_1(i)} & \cdots & \frac{\partial f_1(x(i))}{\partial x_n(i)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x(i))}{\partial x_1(i)} & \cdots & \frac{\partial f_n(x(i))}{\partial x_n(i)} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

On note :

$$J_k = DF(x(k-1)) \cdots DF(x(0)), \quad \text{avec } J_0 = DF(x(0)).$$

L'exposant de Lyapunov associé est alors donné par :

$$L^{(j)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln |\lambda_j(J_k \cdots J_1)|, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.8)$$

où $\lambda_j(\cdot)$ désigne la j -ième valeur propre.

En analysant les exposants de Lyapunov d'un système, nous pouvons en déduire la nature du comportement du système de la manière suivante :

- Si $L_n \leq \cdots \leq L_1 < 0$, alors il existe des points fixes asymptotiquement stables.
- Si $L_1 = 0$ et $L_n \leq \cdots \leq L_2 < 0$, l'attracteur est un cycle limite asymptotiquement stable.
- Si $L_1 = \cdots = L_k = 0$ et $L_n \leq \cdots \leq L_{k+1} < 0$, l'attracteur est un tore de dimension k , correspondant à un comportement quasi-périodique.
- Si $L_1 > 0$ et $\sum_i L_i < 0$, alors l'attracteur est chaotique.
- Si $L_1 > L_2 > \cdots > L_k > 0$ et $\sum_i L_i < 0$, l'attracteur est un attracteur étrange.

Exemple 1.2 : Exposant de Lyapunov d'une application en temps discret ($n > 1$)

Considérons une application en temps discret de la forme

$$x_{n+1} = T_b(x_n) = \begin{cases} bx_n & \text{for } x_n < \frac{1}{2} \\ b(1 - x_n) & \text{for } \frac{1}{2} \leq x_n \end{cases} \quad (1.15)$$

où $a = 1.4$ et $b = 0.3$ sont des paramètres. Un exemple classique de ce type d'application est l'application de Hénon. L'exposant de Lyapunov permet de mesurer la sensibilité aux conditions initiales dans de tels systèmes dynamiques.

L'exposant de Lyapunov $h(x)$ est défini par

$$h(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |f'(x_i)|,$$

où $f'(x_i)$ désigne la dérivée de f évaluée le long de la trajectoire $\{x_i\}$ générée par les itérations successives de f .

Dans le cas où f correspond à l'application de Hénon, celle-ci est définie par

$$f(x, y) = (1 - ax^2 + y, bx).$$

La matrice Jacobienne associée à cette application est donnée par

$$J = \begin{pmatrix} -2ax & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}.$$

Le calcul exact de l'exposant de Lyapunov nécessite une étude numérique des valeurs propres de J évaluées le long d'une trajectoire typique.

Pour les paramètres $a = 1.4$ et $b = 0.3$, il est observé numériquement que le système présente un comportement chaotique, caractérisé par un exposant de Lyapunov positif. Plus précisément, cet exposant est estimé autour de 0.42 pour la composante x .

La positivité de l'exposant de Lyapunov ($h(x) > 0$) indique la présence de chaos, c'est-à-dire une forte sensibilité aux conditions initiales. Il est important de noter que

cet exposant dépend fortement des paramètres : une variation de a ou b peut entraîner une bifurcation, faisant passer $h(x)$ d'une valeur négative (stabilité) à une valeur positive (chaos).

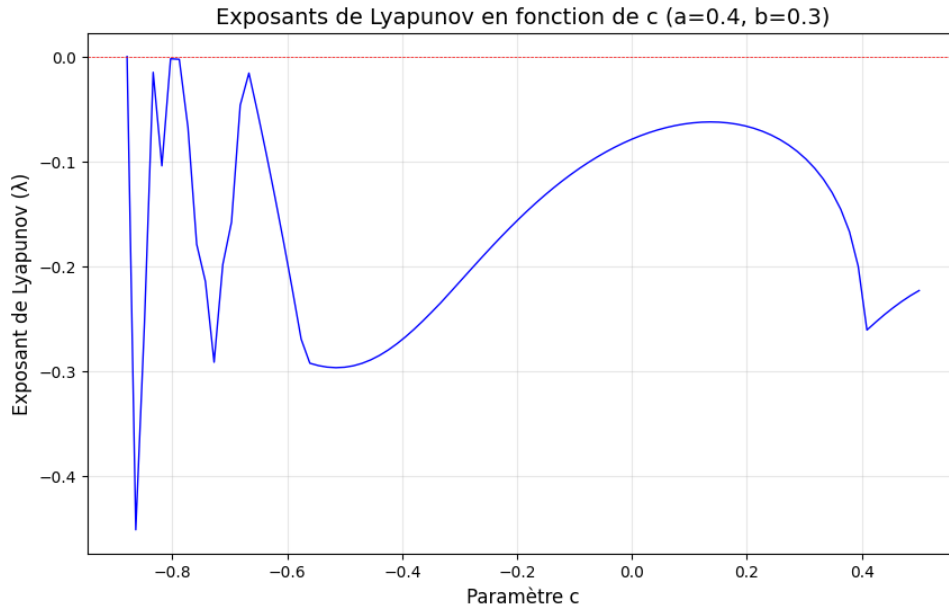


FIGURE 1.7 – Exposants de Lyapunov ($n > 1$) de l'application 1.15 avec $a = 0.4$ et $b = 0.3$

1.9 Routes vers le chaos (bifurcation)

La théorie de la bifurcation étudie le changement que subit une application sous la variation d'un paramètre ou plus, donc la bifurcation signifie un changement dans le comportement qualitatif d'une application, suite à une variation d'un paramètre de l'application. Par exemple déstabilisation d'un point fixe stable, apparition ou disparition d'un cycle ou d'un attracteur. La valeur pour laquelle la bifurcation se produit est nommée le point de bifurcation. Notons que la transition vers le chaos s'opère selon des bifurcations, il existe plusieurs scénarios qui décrivent le passage du point fixe au chaos. On constate dans tous les cas que l'évolution du point fixe vers le chaos n'est progressive, mais marquée des changements discontinus qu'on a déjà appelé bifurcation.

1.9.1 Différents types de routes

Dans cette section, on considère trois types de routes locales : La route de doublement de période, la route point selle (ou nœud-col) et la route de Neimark. Ces routes sont locales car elles peuvent être analysées par la linéarisation de l'application au voisinage d'un point fixe ou d'un cycle limite. Tous les types de bifurcations étudiées correspondent toujours à $|\lambda_i| = 1$ (où λ_i représente les multiplicateurs).

Route doublement de période ($\lambda_i = -1$)

Cette route a lieu lorsqu'un des multiplicateurs est égal à -1 . Un cycle d'ordre k qui subit cette route va changer de nature et crée un cycle d'ordre $2k$ de la même nature. C'est-à-dire, un point fixe stable d'ordre 1, par exemple, devient instable en même temps que l'apparition d'un cycle d'ordre 2 stable.

Route nœud-col ($\lambda = +1$)

La route $\lambda = +1$ correspond à la situation où l'un des multiplicateurs est égale à $+1$. Ce type de route donne naissance à deux cycles d'ordre k en même temps, l'un est attractif et l'autre est instable.

1.9.2 Diagramme de bifurcation

Le diagramme de bifurcation est un tracé des points de l'état stationnaire du système en fonction du paramètre de contrôle. Typiquement, on choisit un état variable et on trace la valeur limite de celui-ci en fonction d'un seul paramètre de contrôle. Pour les systèmes discontinus, on trace simplement les valeurs successives d'un état variable. Un diagramme de bifurcation résume l'information sur l'espace d'état et la variation en fonction du paramètre peut être visualisée. La transition d'un état stationnaire vers le chaos peut être observée. Représentation visuelle de la transition vers le chaos : Le graphique ci-dessous illustre comment l'état du système évolue en fonction de différentes valeurs du paramètre de contrôle. Ce diagramme permet de visualiser clairement le passage du système d'un état stationnaire à un état chaotique.

Exemple 1.3 : Diagramme de bifurcation L'application de Hénon est définie par le système d'équations discrètes suivant :

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + y_n, \\ y_{n+1} = bx_n, \end{cases} \quad (1.16)$$

où les paramètres sont fixés à $a = 1.4$ et $b = 0.3$, des valeurs classiques connues pour induire un comportement chaotique.

Pour estimer les exposants de Lyapunov associés à cette dynamique, une méthode numérique est employée, basée sur l'algorithme de Benettin, qui utilise l'orthogonalisation de Gram-Schmidt afin de calculer les deux exposants caractéristiques du système. La dynamique locale est décrite par la matrice Jacobienne

$$J = \begin{pmatrix} -2ax & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix},$$

évaluée le long de la trajectoire générée par le système. Afin de minimiser l'influence des conditions initiales, un transitoire de 1000 itérations est ignoré avant d'entamer le calcul effectif.

Les résultats attendus indiquent un premier exposant de Lyapunov λ_1 d'environ 0.42, traduisant la présence de chaos par une divergence exponentielle des trajectoires proches. Le second exposant, λ_2 , est estimé autour de -1.62 , révélant une contraction exponentielle dans une autre direction de l'espace des phases.

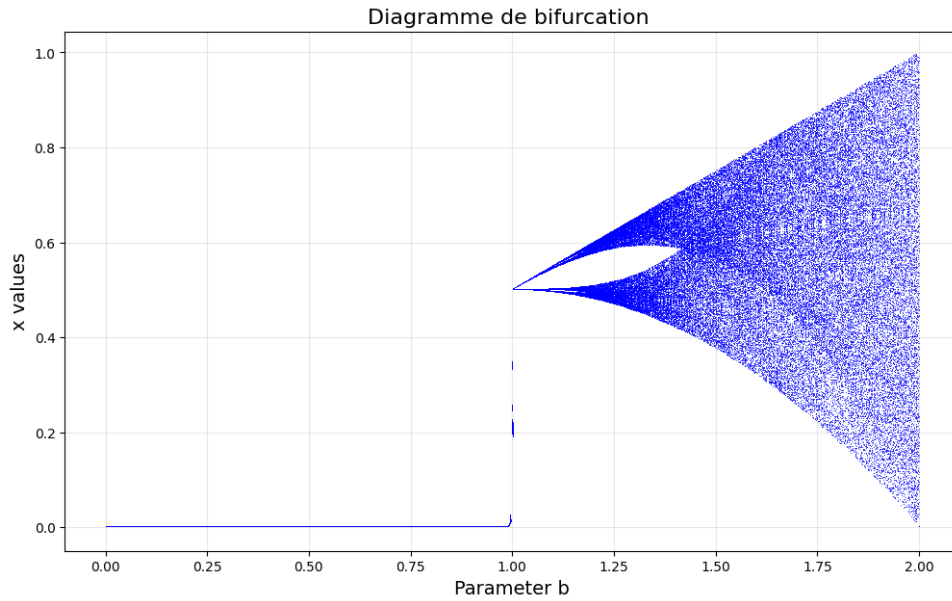


FIGURE 1.8 – Diagramme de bifurcation de l’application 1.16 avec $a = 1.4$, $b = 0.3$, $\lambda_1 = 0.42$, et $\lambda_2 = -1.62$

1.10 Conclusion

des instants de temps discrets. Après avoir défini et représenté mathématiquement ces systèmes, le chapitre explore des concepts clés tels que les orbites, les points fixes, et la stabilité.

Il présente ensuite la notion d’attracteur, en particulier les attracteurs chaotiques, en mettant en évidence des propriétés essentielles comme la sensibilité aux conditions initiales et la dépendance non linéaire. Le chapitre décrit aussi les ensembles invariants, les bassins d’attraction, et les différents types d’attracteurs.

Une attention particulière est portée à l’exposant de Lyapunov, qui permet d’évaluer la stabilité des systèmes chaotiques en temps discret. Enfin, le chapitre explore les routes vers le chaos, notamment à travers les bifurcations et leurs diagrammes, qui illustrent la transition d’un comportement régulier à un comportement chaotique.

CHAPITRE 2

SYNCHRONISATION DES SYSTÈMES DYNAMIQUES

DISCRETS

2.1 Introduction

Ce chapitre traite de la synchronisation dans les systèmes chaotiques, qui présentent un comportement apparemment aléatoire bien qu'ils soient déterministes, et sont extrêmement sensibles aux conditions initiales. La recherche sur la synchronisation a été introduite pour la première fois par Pecora et Carroll en 1990, et est devenue un domaine d'application dans des secteurs variés tels que la **synchronisation**, le **traitement du signal**, la **robotique**, et les **systèmes biologiques**.

Le chapitre aborde différents types de synchronisation, tels que la **synchronisation complète**, la **synchronisation anti**, la **synchronisation décalée**, la **synchronisation projective**, ainsi que des formes plus avancées comme la **synchronisation généralisée** et la **synchronisation Q-S**. Il présente également les méthodes de synchronisation utilisées dans la littérature, notamment la **méthode du contrôleur actif**, la **méthode du backstepping**, et la **méthode du mode glissant**, chacune offrant des avantages particuliers en termes de **flexibilité**, de **simplicité d'implémentation**, ou d'**adaptation aux systèmes non linéaires**.

L'objectif de ce chapitre est de fournir un cadre conceptuel et méthodologique pour comprendre et mettre en œuvre la synchronisation dans les systèmes chaotiques, qu'ils

soient discrets ou continus.

2.2 Définitions de la synchronisation

Définition : 2.1 (d'après Larousse) *La synchronisation est un mot grec composé de deux parties : Syn signifie ensemble et Chrono signifie temps. C'est l'action de synchroniser pour créer une simultanéité entre plusieurs opérations, selon le temps.*

Définition : 2.2 (générale) *La synchronisation est un moyen de maintenir un mouvement périodique (ou chaotique). La synchronisation de deux systèmes dynamiques signifie que chaque système évolue en suivant le comportement de l'autre système.*

2.2.1 Définition de la synchronisation en mathématiques :

Après plusieurs tentatives de définir le mouvement synchronisé, Brown et Kocarev ont récemment fourni une définition mathématique de la synchronisation. Pour construire la définition, ils supposent qu'un système dynamique global, de dimension finie et déterministe, peut être divisé en deux sous systèmes :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x(t)) \\ \dot{y} = f(y(t)) \end{cases} \quad (2.1)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ et $y(t) \in \mathbb{R}^m$ sont des vecteurs qui peuvent avoir des dimensions différentes.

Définition : 2.3 (Brown et Kocarev) *Les sous-systèmes des Equations 21 sont synchronisés sur la trajectoire de $\varphi(\omega_0)$, par rapport aux propriétés g_x et g_y ; s'il existe un instant indépendant de l'application h tel que $\|h(g_x; g_y)\| = 0$ [3]*

Avec le choix de g_x, g_y , et h , on peut déterminer le type de synchronisation. Cette approche conduit à l'idée qu'il existe différents types de synchronisation.

2.3 Classes de synchronisation :

Il existe deux classes de synchronisation suivant le sens dont l'énergie est échangée entre les deux systèmes chaotiques ;

- la synchronisation par couplage unidirectionnel
- la synchronisation par couplage bidirectionnel

2.3.1 Synchronisation par couplage bidirectionnel :

Dans le couplage bidirectionnel, l'énergie est transférée entre les systèmes dans les deux sens, c'est à dire chaque système peut jouer le rôle d'un système maître et un système esclave en même temps. Afin d'observer le comportement de synchronisation, nous considérons deux systèmes chaotiques n - dimensionnels identiques avec différentes conditions initiales. Les systèmes maître et esclave sont décrits respectivement par les relations 22 et 23. Le troisième terme du côté droit a été ajouté à la dynamique des systèmes à des fins de conception de commande.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(x(t)) + k_1(y(t) - x(t)) \quad (2.2)$$

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + f(y(t)) + k_2(x(t) - y(t)) \quad (2.3)$$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice constante, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction non linéaire continue, k_1 et k_2 sont des matrices diagonales qui sont utilisés comme gains de rétroaction à calculer.

En considérant :

$$e(t) = y(t) - x(t) \quad (2.4)$$

$$f(y) - f(x) = M_{x,y}e \quad (2.5)$$

avec : $M_{x,y}$: la matrice des coefficients (x et y).

La dynamique d'erreur peut s'écrire :

$$\dot{e}(t) = (A + M_{x,y} - (k_1 - k_2))e(t) \quad (2.6)$$

Puisqu'un système chaotique a des trajectoires bornées, $M_{x,y} = M(x, y)$ est une matrice bornée. Le théorème suivant donne la condition suffisante pour que le système 2.6 soit globalement stable [24].

Théorème: 2.1 *S'il existe une matrice constante symétrique définie positive P et une constante $\varepsilon > 0$, telles que :*

$$(A + M_{x,y} - (k_1 - k_2))^T P + P(A + M_{x,y} - (k_1 - k_2)) \leq -\varepsilon I \quad (2.7)$$

Est satisfaite uniformément pour tout x et y , où I est la matrice d'identité, alors le système de dynamique d'erreur 2.6 est globalement stable, c'est-à-dire que les systèmes 2.2 et 2.3 sont synchronisés. [24]

2.3.2 Synchronisation par couplage unidirectionnelle

- **Le maître** : est un système indépendant.
- **L'esclave** : est un système dépendant du système maître.

Lors d'une synchronisation par couplage unidirectionnel, le transfert de l'énergie d'un système à l'autre entre deux systèmes est réalisé à l'aide d'un élément fonctionnant dans un seul sens, donc on n'a qu'un seul système maître qu'est l'émetteur et un seul système esclave qu'est le récepteur.

Par rapport au théorème précédent, le résultat peut être simplifié comme la condition de couplage unidirectionnel lorsque

Hitzl et Zele [12] ont proposé une généralisation du système de Hénon donnée par

$$\begin{cases} x_1(k+1) = \phi x_2(k), \\ x_2(k+1) = x_3(k) + 1 - \psi x_2^2(k), \\ x_3(k+1) = \phi x_2(k) + x_1(k), \end{cases}$$

où ϕ et ψ sont des paramètres du système.

La figure 2.1 illustre le comportement chaotique de ce système pour les valeurs $(\psi, \phi) = (1,07; 0,3)$.

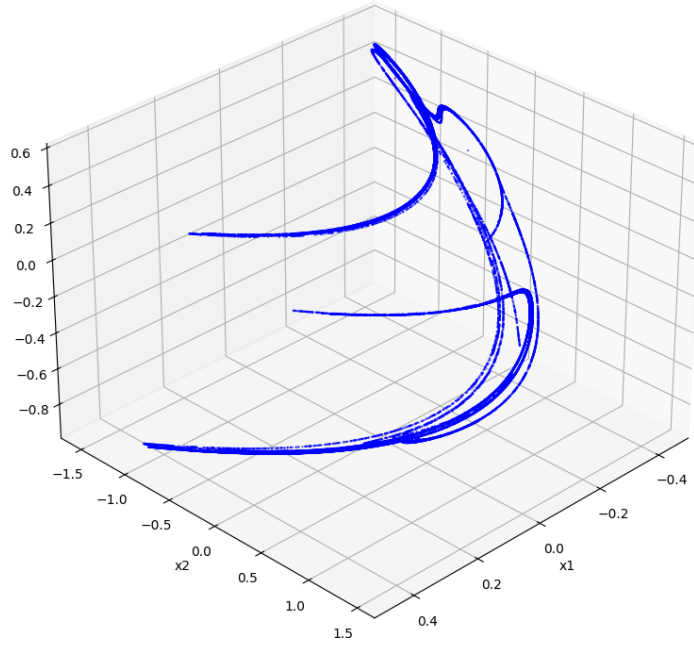


FIGURE 2.1 -- L'attracteur chaotique d'Hitzl-Zele lorsque $(\alpha; \beta) = (1.07; 0.3)$

2.4 Types de synchronisation des systèmes discrets

Dans cette section, nous introduisons différents types de synchronisation à savoir la synchronisation complète, l'anti-synchronisation, la synchronisation décalée, la synchronisation FSHP, la synchronisation généralisée, et la synchronisation Q-S.

2.4.1 Synchronisation complète

On considère un système chaotique maître représenté par

$$X(k+1) = F(X(k)), \quad (2.8)$$

d'où $X(k) \in \mathbb{R}^n$ est l'état du système 2.8 et $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Et un système chaotique esclave donné par

$$Y(k+1) = G(Y(k)) + U, \quad (2.9)$$

Soit $Y(k) \in \mathbb{R}^n$ l'état du système 2.9, $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, et $U = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$ et un vecteur de

contrôle à déterminer. On définit l'erreur de la synchronisation complète en tant que :

$$e(k) = Y(k) - X(k). \quad (2.10)$$

Ainsi, le problème consiste est de déterminer le contrôleur U de sorte que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|e(k)\| = 0. \quad (2.11)$$

D'où $\|\cdot\|$: est la norme euclidienne.

Si $F = G$, la relation devient une synchronisation complète identique.

Si $F \neq G$, c'est une synchronisation complète non identique.

La synchronisation complète est donc une coïncidence complète entre les variables d'état des deux systèmes synchronisés [18].

2.4.2 Anti-Synchronisation

Théoriquement, deux systèmes sont anti-synchronisés si d'une part, le système maître et le système esclave ont des vecteurs d'état identiques en valeur absolue mais avec des signes opposés et que d'autre part, la somme des vecteurs d'état des deux systèmes tend vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini [1]. L'erreur d'anti-synchronisation peut donc être définie comme suit

$$e(k) = Y(k) + X(k). \quad (2.12)$$

2.4.3 Synchronisation Décalée

Les chercheurs ont découvert que deux systèmes dynamiques chaotiques non identiques peuvent exposer un phénomène de synchronisation dans lequel les variables dynamiques des deux systèmes deviennent synchronisées, mais avec un **décalage** en temps [4]. On dit qu'on a une synchronisation **retardée** (ou **anticipée**) si les variables d'état $Y(k)$ du système chaotique esclave converge vers les variables d'état $X(k)$ décalée dans le temps du système chaotique maître comme l'indique la relation ci-dessous

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|Y(k) - X(k - \tau)\| = 0, \quad (\text{ou } \lim_{k \rightarrow \infty} \|Y(k) - X(k + \tau)\|), \quad \forall \tau > 0. \quad (2.13)$$

avec τ un nombre positif très petit ou grand, selon le type de synchronisation observée. Dans le cas d'une synchronisation **retardée**, le système esclave reproduit l'état passé du système maître, tandis que dans le cas d'une synchronisation **anticipée**, le système esclave semble prédire l'évolution future du maître.

Ce type de synchronisation est particulièrement pertinent dans les applications de communication sécurisée, de traitement du signal et de modélisation biologique, où le délai temporel peut représenter un décalage physique, un temps de transmission, ou encore une réponse adaptative dans un système complexe.

L'étude et la mise en œuvre de la synchronisation décalée nécessitent souvent des stratégies de couplage spécifiques et des ajustements de paramètres fins afin d'assurer la stabilité et la convergence du régime synchronisé.

2.4.4 Synchronisation Projective

On dit qu'on a une **synchronisation projective** si les variables d'état $y_i(k)$ du système chaotique esclave $Y(k) = (y_i(k))_{1 \leq i \leq n}$ se synchronisent avec une constante multiple de l'état $x_i(k)$ du système chaotique maître $X(k) = (x_i(k))_{1 \leq i \leq n}$, tels que [25].

$$\exists \alpha_i \neq 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} |y_i(k) - \alpha_i x_i(k)| = 0, \quad \forall (x(0), y(0)), \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.14)$$

Le cas où tous les α_i sont égaux à 1 représente un cas de synchronisation complète. Le cas où tous les α_i sont égaux à -1 représente un cas d'antisynchronisation complète.

2.4.5 Synchronisation FSHP

On dit qu'on a une **synchronisation FSHP** (en anglais *Full State Hybrid Projective Synchronization*), si chaque variable d'état $y_i(k)$, $1 \leq i \leq n$, du système chaotique esclave se synchronise avec une combinaison linéaire des variables d'état $x_i(k)$, $1 \leq i \leq n$, du système chaotique maître, tels que :

$$\exists (\beta_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \left| y_i(k) - \sum_{j=1}^n \beta_{ij} x_j(k) \right| = 0, \quad \forall (x(0), y(0)), \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.15)$$

La synchronisation FSHP est une généralisation de la synchronisation projective [?,

?, ?, ?, ?]

2.4.6 Synchronisation Généralisée

La synchronisation généralisée est considérée comme une généralisation de la synchronisation complète, de l'anti-synchronisation et de la synchronisation projective, dans le cas des systèmes chaotiques de dimensions et de modèles différents [19]. Elle se manifeste par une relation fonctionnelle entre les deux systèmes chaotiques couplés. On considère un couple de systèmes maître-esclave représenté par :

$$\begin{cases} X(k+1) = F(X(k)), \\ Y(k+1) = G(Y(k)) + U, \end{cases} \quad (2.16)$$

où $X(k) \in \mathbb{R}^n$, $Y(k) \in \mathbb{R}^m$ sont les états des systèmes maître et esclave, respectivement, $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $G : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, et $U = (u_i)_{1 \leq i \leq m}$ est un vecteur de contrôle.

S'il existe un contrôleur U et une fonction $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ telles que toutes les trajectoires des systèmes maître et esclave, avec les conditions initiales $x(0)$ et $y(0)$, vérifient :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|Y(k) - \phi(X(k))\| = 0, \quad \forall x(0), \forall y(0), \quad (2.17)$$

alors, les systèmes maître-esclave définis par (2.16) se synchronisent au sens *généralisé* par rapport à la fonction ϕ .

Si la fonction ϕ est définie par $\phi(X(k)) = \Lambda X(k)$ avec $\Lambda = (\Lambda_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, on dit qu'on a une synchronisation **full-state hybrid projective** [7].

2.4.7 Synchronisation Q-S

La **synchronisation Q-S** est considérée comme une généralisation de tous les types de synchronisations précédentes.

Nous disons qu'un système maître n -dimensionnel $X(k)$ et un système esclave m -dimensionnel $Y(k)$ sont en synchronisation Q-S dans une dimension d , s'il existe un

contrôleur $U = (u_i)_{1 \leq i \leq m}$ et deux fonctions

$$Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad S : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^d$$

telles que l'erreur de synchronisation définie par :

$$e(k) = Q(X(k)) - S(Y(k)) \tag{2.18}$$

vérifie :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|e(k)\| = 0.$$

2.5 Méthodes de synchronisation

Cette section est consacrée à la présentation de diverses méthodes de synchronisation les plus performantes et les plus rencontrées

2.5.1 Méthode du contrôleur actif

L'application du **contrôle actif** pour la synchronisation des systèmes chaotiques a été proposée par Bai et Lonngren [2]. C'est une technique efficace qui a démontré sa puissance non seulement pour la synchronisation des systèmes identiques, mais aussi pour celle des systèmes non identiques. De plus, cette méthode présente une grande simplicité d'implémentation de l'algorithme [?, ?].

Soient deux systèmes chaotiques à synchroniser, maître et esclave, définis par :

$$x(k+1) = F(x(k)), \tag{2.19}$$

$$y(k+1) = G(y(k)) + U, \tag{2.20}$$

où $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $y(k) \in \mathbb{R}^n$ sont les états des systèmes maître et esclave, respectivement, $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $U = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$ est un contrôleur à déterminer.

Pour que les deux systèmes se synchronisent, il faut que l'erreur entre leurs trajectoires

converge vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini. Cette erreur est définie par :

$$\begin{aligned} e(k+1) &= y(k+1) - x(k+1) \\ &= G(y(k)) - F(x(k)) + U. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Si l'on peut exprimer la différence $G(y(k)) - F(x(k))$ de la manière suivante :

$$G(y(k)) - F(x(k)) = Ae(k) + N(x(k), y(k)), \quad (2.22)$$

alors l'erreur peut s'écrire :

$$e(k+1) = Ae(k) + N(x(k), y(k)) + U, \quad (2.23)$$

où $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice constante, et N une fonction non linéaire.

Le contrôleur U est proposé sous la forme :

$$U = V - N(x(k), y(k)), \quad (2.24)$$

où V est le contrôleur actif, défini par :

$$V = Le(k), \quad (2.25)$$

avec L une matrice de contrôle à déterminer.

On obtient donc la formule finale de l'évolution de l'erreur :

$$e(k+1) = (A - L)e(k).$$

Donc, le problème de la synchronisation entre le système maître (2.19) et le système esclave (2.20) est transformé en un problème de **zéro-stabilité** du système suivant :

$$e(k+1) = (A - L)e(k). \quad (2.26)$$

Le théorème suivant est un résultat immédiat issu de la théorie de la stabilité des

systemes dynamiques lineaires discrets.

Théorème: 2.2 *Le système maître (2.19) et le système esclave (2.20) sont globalement synchronisés sous la loi de contrôle définie par (2.24), si et seulement si la matrice de contrôle L est choisie de telle sorte que toutes les valeurs propres de la matrice $(A - L)$ soient strictement à l'intérieur du disque unité du plan complexe.*

2.5.2 Méthode du Backstepping

La méthode du **backstepping** est une méthode récursive qui se base sur le choix d'une fonction de Lyapunov et la conception du contrôleur nécessaire [?, ?, ?]. On considère que le système maître et le système esclave sont définis comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, x_3), \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{cases} \quad (2.27)$$

et

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = f_1(y_1, y_2), \\ \dot{y}_2 = f_2(y_1, y_2, y_3), \\ \vdots \\ \dot{y}_n = f_n(y_1, y_2, \dots, y_n) + u, \end{cases} \quad (2.28)$$

où f_1 est une fonction linéaire, f_i ($i = 2, 3, \dots, n$) sont des fonctions non linéaires, et u est un contrôleur qui doit être choisi de manière appropriée pour obtenir la synchronisation entre les systèmes (2.27) et (2.28).

L'erreur de synchronisation est définie comme suit :

$$\begin{cases} e_1 = y_1 - x_1, \\ e_2 = y_2 - x_2, \\ \vdots \\ e_n = y_n - x_n. \end{cases} \quad (2.29)$$

Alors, la dynamique du système d'erreur s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = g_1(e_1, e_2), \\ \dot{e}_2 = g_2(e_1, e_2, e_3), \\ \vdots \\ \dot{e}_n = g_n(e_1, e_2, \dots, e_n) + u, \end{cases} \quad (2.30)$$

où g_1 est une fonction linéaire, et g_i ($i = 2, 3, \dots, n$) sont des fonctions non linéaires. L'objectif est de calculer une loi de contrôle u qui assure la convergence du système d'erreurs e_i ($i = 1, 2, \dots, n$) vers l'origine en utilisant l'algorithme backstepping.

Pour cela, le système d'erreur (2.30) doit être décomposé en sous-systèmes :

$$e_1; (e_1, e_2); (e_1, e_2, e_3); \dots; (e_1, e_2, \dots, e_n),$$

et pour chaque sous-système, on définit une fonction de Lyapunov V_j positive :

$$V_j(e_j, u_j, \beta_j), \quad (2.31)$$

où j est l'ordre du sous-système, et u_j, β_j représentent, respectivement, la loi de contrôle et le contrôleur virtuel du sous-système d'ordre j . Les contrôleurs u_j et β_j sont calculés à chaque fois de telle sorte que :

$$\dot{V}_j < 0.$$

Remarque: 2.1 *Il existe plusieurs avantages dans cette méthode :*

- *Elle présente une procédure systématique pour la sélection du contrôleur.*
- *Elle peut être appliquée à différents systèmes chaotiques.*
- *Elle offre la possibilité de réaliser la synchronisation avec un seul contrôleur.*
- *Le contrôleur calculé offre une simplicité dans l'implémentation de l'algorithme.*

2.5.3 Méthode du Mode Glissant

Dans la théorie du contrôle robuste, la méthode du **mode glissant** est souvent pratiquée en raison de ses avantages inhérents, tels que la réalisation facile, la réponse rapide,

une bonne performance transitoire ainsi que sa sensibilité aux incertitudes des paramètres et des perturbations externes [?, ?, ?, ?].

Soient les systèmes chaotiques maître et esclave donnés par les formes suivantes :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(x(t)), \quad (2.32)$$

et

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + f(y(t)) + u, \quad (2.33)$$

où $x(t)$ et $y(t)$ représentent respectivement les états du système maître et du système esclave, A est une matrice de coefficient, $f(x(t))$ et $f(y(t))$ sont des fonctions non linéaires des états, et u est un contrôleur. D'où $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $y(k) \in \mathbb{R}^n$ sont les états des systèmes maître et esclave, respectivement, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice constante, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction non-linéaire et $u \in \mathbb{R}^n$ est un contrôleur à déterminer.

L'erreur entre le système maître (2.32) et le système esclave (2.33) est définie par :

$$e = y - x.$$

La dynamique de l'erreur peut s'écrire comme suit :

$$\dot{e} = Ae + \Delta(x, y) + u, \quad (2.34)$$

où $\Delta(y, x) = f(y(t)) - f(x(t))$.

Si on se base sur le principe du contrôle actif pour éliminer la partie non-linéaire du système d'erreur (2.34), la loi de contrôle u est choisie comme suit :

$$u = Bv - \Delta(x, y), \quad (2.35)$$

où v est le contrôleur actif et B un vecteur constant de gain qui doit être calculé de telle sorte que le couple (A, B) soit contrôlable. En substituant (2.35) dans (2.34), la

dynamique de l'erreur est simplifiée comme suit :

$$\dot{e} = Ae + Bv. \quad (2.36)$$

Ainsi, le problème de synchronisation peut être remplacé par un équivalent problème de stabilisation de la solution $e = 0$ du système (2.36) par un choix approprié du contrôleur en mode glissant.

Dans la méthode du mode glissant [13], nous définissons la surface de glissement s comme suit :

$$s(e) = Ce = \sum_{j=1}^n c_j e_j, \quad (2.37)$$

où C est un vecteur constant à déterminer. Le système contrôlé doit satisfaire :

$$s(e) = 0; \quad \dot{s}(e) = 0.$$

Alors, on peut écrire :

$$\dot{s}(e) = C(\dot{e}) = C(Ae + Bv) = 0.$$

Donc, le contrôleur v est donné par :

$$v = (CB)^{-1}CAe, \quad (2.38)$$

où C est choisi de telle sorte que $CB \neq 0$. L'existence de $(CB)^{-1}$ est une condition nécessaire.

La nouvelle forme de l'erreur de synchronisation est donnée par :

$$\dot{e} = (I - B(CB)^{-1}C) Ae. \quad (2.39)$$

Pour assurer la stabilité asymptotique du système contrôlé, le vecteur C doit être choisi de telle sorte que les parties réelles des valeurs propres de la matrice

$$I - B(CB)^{-1}CA \quad (2.40)$$

soient toutes négatives.

$$\dot{s} = q \operatorname{sgn}(s) - ks, \quad (2.41)$$

où $\operatorname{sgn}(\cdot)$ est la fonction signe, et $q, k > 0$ sont des constantes. Dans ce cas, le contrôleur v est donné par :

$$v = (CB)^{-1} [C(kI + A)e + q \operatorname{sgn}(s)], \quad (2.42)$$

ce qui est équivalent à :

$$v = \begin{cases} (CB)^{-1} [C(kI + A)e + q \operatorname{sgn}(s)], & \text{si } s(e) > 0, \\ (CB)^{-1} [C(kI + A)e + q \operatorname{sgn}(s)], & \text{si } s(e) < 0. \end{cases} \quad (2.43)$$

Théorème: 2.3 *Le système maître (2.32) et le système esclave (2.33) sont globalement synchronisés par le contrôleur*

$$u = Bv - \Delta(x, y), \quad (2.44)$$

où v est défini par (2.42), (A, B) est contrôlable, et $q, k > 0$.

2.6 Conclusion

L'objectif principal de ce chapitre était de présenter, les différents types de synchronisation et les diverses méthodes de synchronisation les plus performantes. La dernière section de ce chapitre est consacrée aux techniques de transmission sécurisée d'informations les plus rencontrées qui sont basées sur le principe de synchronisation chaotique.

CHAPITRE 3

STABILISATION ET SYNCHRONISATION DES APPLICATIONS CHAOTIQUES SANS POINTS FIXES

3.1 Introduction

Ce chapitre explore un domaine fascinant des systèmes dynamiques complexes : le chaos qui émerge en l'absence de points d'équilibre stables. Nous nous concentrons sur un ensemble spécifique de règles non linéaires décrivant l'évolution de deux quantités interagissantes. Une découverte initiale cruciale est que ce système particulier, dans certaines conditions naturelles, ne possède aucun "point fixe" réel, c'est-à-dire aucun état où le système resterait inchangé. Cette absence d'ancres stables est un indicateur de dynamiques potentiellement complexes, car le système est constamment en mouvement, explorant ses états possibles et pouvant mener à un comportement chaotique. Nos observations expérimentales confirment l'émergence du chaos pour des valeurs spécifiques des paramètres, soulignant que des systèmes sans points fixes peuvent générer des comportements dynamiques riches et imprévisibles.

L'étude approfondie de la manière dont le comportement du système évolue avec la variation d'un paramètre révèle une transition progressive vers le chaos, suivant un chemin de doublement de période. Le fait que cette transition se produise dans un système dépourvu d'un point de départ stable simple (un cycle de période 1) met en évidence la singularité de sa dynamique. Forts de cette exploration initiale, les sections suivantes

analyseront la stabilité de ces systèmes chaotiques intrinsèquement instables, examineront des méthodes pour les contrôler et exploreront la synchronisation de deux tels systèmes. L'objectif global de ce chapitre est d'éclairer le monde intrigant des dynamiques chaotiques qui se déploient sans la présence familière de points fixes.

3.2 Application Chaotique sans points fixes en 2D

Pour examiner des comportements dynamiques complexes, nous prenons en compte un système de applications non linéaires bidimensionnelles en temps discret régis par le système d'équations récursives suivant :

$$\begin{cases} x_{n+1} &= x_n + y_n, \\ y_{n+1} &= y_n - ay^3 - x_n y_n + b(x_n)^2 - c(y_n)^2 + d, \end{cases} \quad (3.1)$$

où $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$ sont des paramètres strictement positifs. Cette application représente les interactions non linéaires entre les variables d'état x and y . En raison des non-linéarités cubiques et quadratiques, elle peut manifester un comportement complexe et potentiellement chaotique.

3.2.1 Points fixes de la application

Les points fixes sont les solutions $E(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquelles l'état du système reste constant à travers les itérations, ce qui signifie :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n = x, \\ y_{n+1} = y_n = y. \end{cases} \quad (3.2)$$

En substituant dans les équations de application 3.1, nous obtenons :

$$\begin{cases} x &= x + y, \\ y &= y - ay^3 - xy + bx^2 - cy^2 + d. \end{cases} \quad (3.3)$$

La première équation se simplifie en :

$$x = x + y \quad \Rightarrow \quad y = 0.$$

En remplaçant $y = 0$ dans la deuxième équation, nous obtenons :

$$\begin{aligned} y &= y - ay^3 - xy + bx^2 - cy^2 + d \\ \Rightarrow bx^2 + d &= 0 \end{aligned}$$

Toutefois, comme les valeurs de b et d sont strictement positives, l'équation $bx^2 + d = 0$ n'a pas de solution réelle. C'est-à-dire :

$$bx^2 + d = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = -\frac{d}{b} \notin \mathbb{R}$$

Ainsi, dans les conditions données, le système ne présente pas de véritables points fixes. L'absence de points fixes indique que le système ne tolère pas d'équilibre stable dans le domaine réel, ce qui est souvent le signe d'un comportement dynamique complexe, y compris l'éventualité du chaos en fonction des valeurs de paramètres et des conditions initiales.

Pour $a = 0.01, b = 0.1, c = 2, d = 0.1$ et les conditions initiales $(x_0, y_0 = (1.5, 0.5))$, nous constatons du chaos sur la application (voir 3.1). Comme la application signalée dans [21], la application de l'Équation 3.1 appartient à une catégorie de applications sans point fixe. Par rapport à la application mentionnée dans [21], la application présentée dans l'Équation 3.1 ne présente pas un caractère fractionnaire.

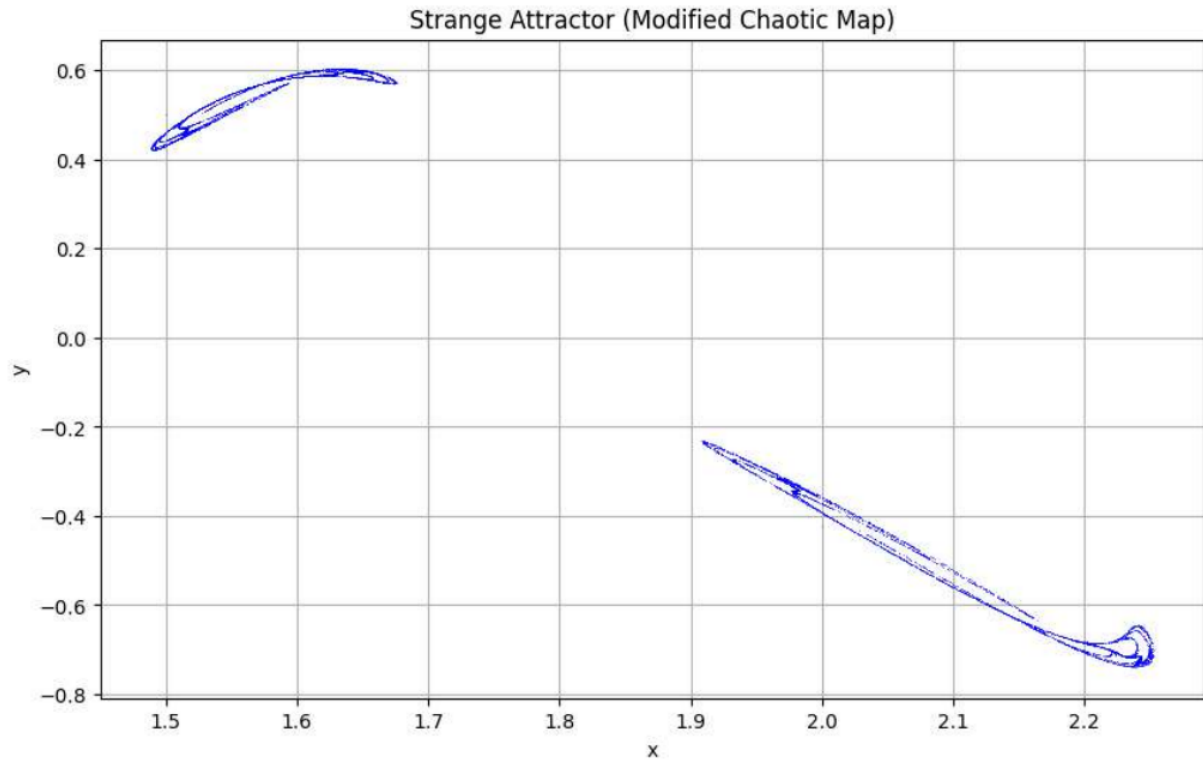


FIGURE 3.1 – Attracteur étrange de l'application 3.1 pour $a = 0,01, b = 0,1, c = 2, d = 0,1$ et $(x_0, y_0) = (1,5, 0,5)$

3.2.2 Dynamique de la application

On a étudié la dynamique de la application proposée. On a constaté que la application révèle des dynamiques intéressantes lorsque le paramètre c est modifié tout en maintenant $a = 0.01, b = 0.1, d = 0.1$ et $(x_0, y_0) = (1.5, 0.5)$. Il est à noter que, dans le but de maintenir le système en état NE (sans équilibre), nous avons fixé les paramètres b et d . L'utilisation du paramètre a comme paramètre de bifurcation n'a pas démontré de voie claire vers le chaos et a parfois donné lieu à des solutions non bornées pour certaines valeurs. Par conséquent, nous avons sélectionné c comme le paramètre de bifurcation. De plus, il est à noter que la condition initiale utilisée dans nos simulations n'a pas été dominante et a seulement influencé le régime transitoire initial. Comme le montre le diagramme de bifurcation (Figure 3.2a) et les exposants locaux de Lyapunov à temps fini (Figure 3.2b), la fonction décrite dans l'Équation 3.1 suit un parcours de doublement périodique vers le chaos. L'intervalle temporel pour le calcul des exposants de Lyapunov locaux à temps fini [15] est de 10 000. Puisqu'elle n'a pas d'équilibre, elle est dépourvue de cycle de période

1. La bifurcation débute à partir d'un cycle de période 2. Par la suite, le processus de doublement périodique se poursuit jusqu'à l'émergence du chaos juste avant $c = 2$

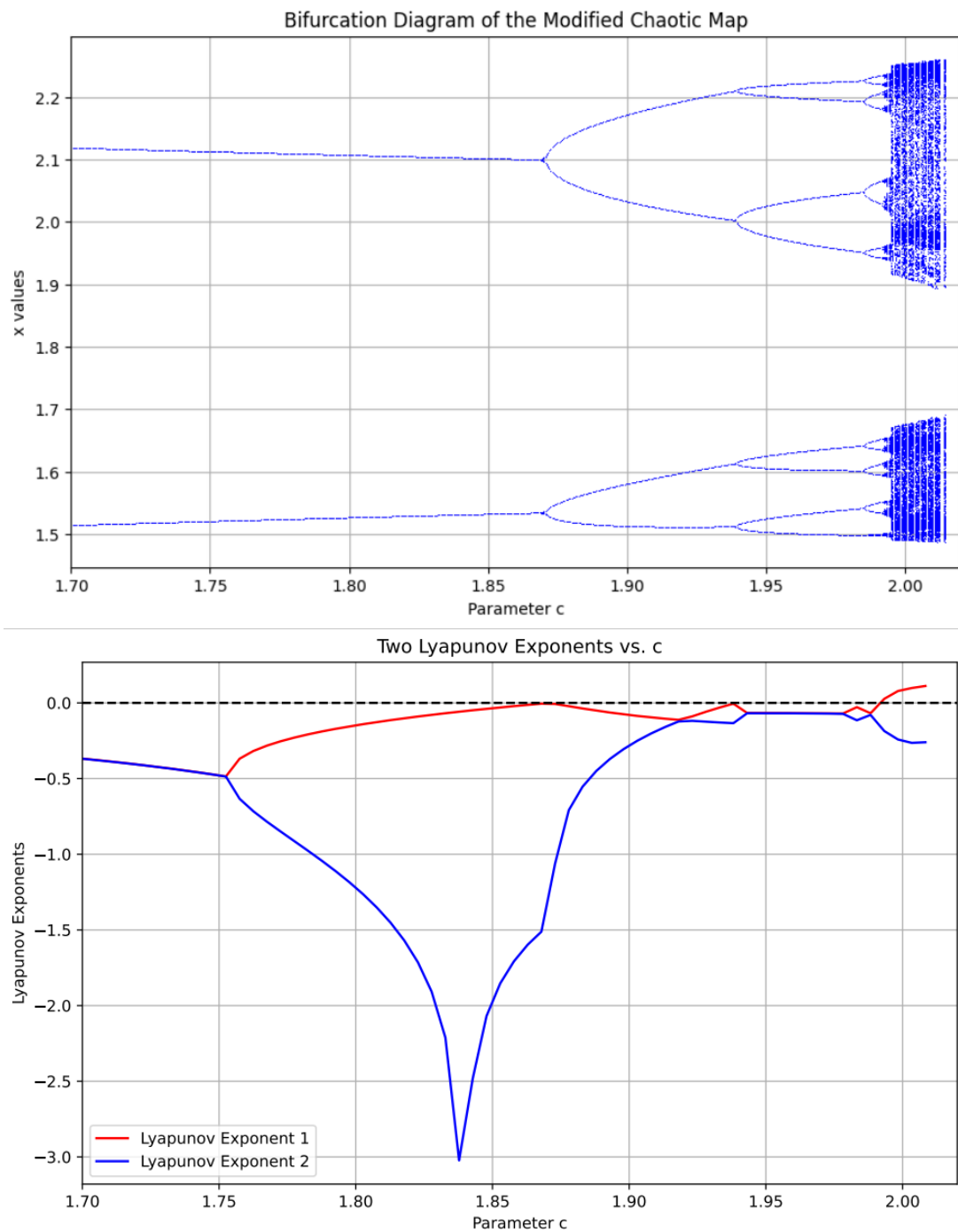


FIGURE 3.2 – Diagramme de bifurcation (a) et exposants de Lyapunov (b) lors de la variation de c pour $a = 0.01, b = 0.1, d = 0.1$ et $(x_0, y_0) = (1.5, 0.5)$.

3.3 Analyse de la stabilité d'applications chaotique sans points fixes en 2D

3.3.1 Présentation du système étudié

On considère le système dynamique discret suivant :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n, \\ y_{n+1} = y_n - ay_n^3 - x_n y_n + bx_n^2 - cy_n^2 + d \end{cases} \quad (3.4)$$

Notre objectif est double : analyser la stabilité ou le chaos inhérent au système, puis proposer une loi de contrôle permettant de stabiliser l'origine.

3.3.2 Étude des points d'équilibre

Les points d'équilibre sont déterminés en résolvant le système suivant :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n \Rightarrow y_n = 0, \\ y_{n+1} = y_n \Rightarrow -ay_n^3 - x_n y_n + bx_n^2 - cy_n^2 + d = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

Avec $y_n = 0$, l'équation devient :

$$bx^2 + d = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{d}{b}$$

Donc :

- Si $d > 0$ et $b > 0$: aucune solution réelle.
- Si $d < 0$ et $b > 0$: deux solutions réelles : $x^* = \pm\sqrt{-\frac{d}{b}}$

Les points d'équilibre sont donc : $(x^*, y^*) = (\pm\sqrt{-\frac{d}{b}}, 0)$

3.3.3 Analyse locale par la matrice Jacobienne

La matrice Jacobienne générale du système est :

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n} & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial y_n} \\ \frac{\partial y_{n+1}}{\partial x_n} & \frac{\partial y_{n+1}}{\partial y_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2bx - y & 1 - 3ay^2 - x - 2cy \end{bmatrix}$$

Au point d'équilibre $(x^*, 0)$, la Jacobienne devient :

$$J^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2bx^* & 1 - x^* \end{bmatrix}$$

On calcule les valeurs propres à partir de l'équation caractéristique :

$$\det(J^* - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 2bx^* & 1 - x^* - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(1 - x^* - \lambda) - 2bx^* = 0$$

Ce qui donne l'équation quadratique :

$$\lambda^2 - (2 - x^*)\lambda + (1 - x^*) - 2bx^* = 0$$

3.3.4 Étude de la stabilité locale

Considérons le système étudié avec les paramètres suivants : $a = 0.01$, $b = 0.1$, et $d = -0.1$. Ces valeurs permettent de déterminer le point fixe du système. En résolvant l'équation $x^* = \sqrt{1}$, on obtient simplement $x^* = 1$. Ce point constitue une solution stationnaire autour de laquelle il est pertinent d'analyser la stabilité.

À proximité de ce point, nous calculons la matrice jacobienne du système, notée J^* , qui représente l'évolution locale des trajectoires :

$$J^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.2 & 0 \end{bmatrix}$$

L'étude de stabilité repose sur l'analyse des valeurs propres de cette matrice. Pour cela, on considère l'équation caractéristique associée :

$$\det(J^* - \lambda I) = (1 - \lambda)(-\lambda) - 0.2 = 0$$

Ce qui donne :

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + 0.2 = 0$$

Les racines de ce polynôme quadratique sont calculées comme suit :

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 0.8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{0.2}}{2}$$

En évaluant cette expression, on obtient deux valeurs propres réelles approximatives :

$$\lambda_1 \approx 0.723, \quad \lambda_2 \approx 0.277$$

Ces deux valeurs sont strictement inférieures à 1 en module. Ainsi, d'après les critères classiques de stabilité pour les systèmes discrets, le point fixe est **localement asymptotiquement stable**. Cela signifie que les trajectoires proches de ce point convergeront vers celui-ci au fil du temps.

Il convient toutefois de noter que cette stabilité locale ne garantit pas une stabilité globale. En particulier, si l'on modifie certains paramètres du système comme le paramètre c , qui n'apparaît pas directement dans ce calcul mais influence le comportement global il est possible que le système présente un comportement plus complexe, voire chaotique. Une étude complémentaire, notamment par des simulations numériques et le calcul des exposants de Lyapunov, pourrait fournir un aperçu plus complet de la dynamique globale.

3.3.5 Stabilisation par une loi de contrôle adaptative

L'objectif est désormais de concevoir une loi de contrôle qui stabilise le système à l'origine. On introduit deux termes de contrôle u_x et u_y :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n + u_x, \\ y_{n+1} = y_n - ay_n^3 - x_n y_n + bx_n^2 - cy_n^2 + d + u_y \end{cases} \quad (3.6)$$

La loi de contrôle suivante permet de stabiliser le système :

$$\begin{cases} u_x &= -\frac{1}{3}x_n, \\ u_y &= -\frac{1}{3}y_n + ay_n^3 + x_ny_n - bx_n^2 + cy_n^2 - d \end{cases} \quad (3.7)$$

En substituant u_x et u_y , le système devient :

$$\begin{cases} x_{n+1} &= \frac{1}{3}x_n + y_n, \\ y_{n+1} &= \frac{1}{3}y_n \end{cases} \quad (3.8)$$

La forme matricielle du système d'erreur est :

$$(x(n+1), y(n+1))^T = \mathbf{M} \times (x(n), y(n))^T \quad (3.9)$$

où

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Les valeurs propres de M sont inférieures à 1 en valeur absolue, garantissant la stabilité asymptotique de l'origine.

Nous avons illustré le résultat en sélectionnant les paramètres $(a, b, c, d) = (0, 04, 0, 5, 3, 0, 5)$ et $(x_0, y_0) = (2, 1)$. Dans 3.4, l'évolution des états vérifie la loi de contrôle.

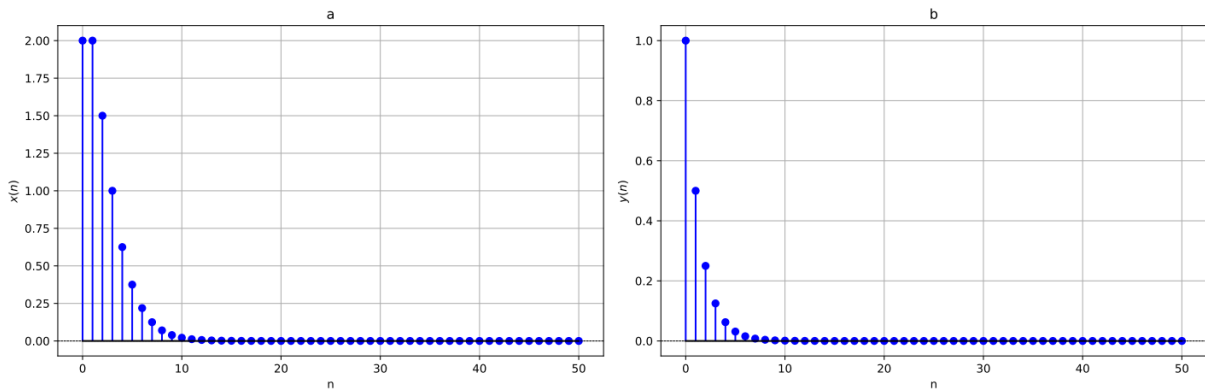


FIGURE 3.3 – Stabilisation lors de l'application de la loi de contrôle proposée : (a) $x(n)$ et (b) $y(n)$

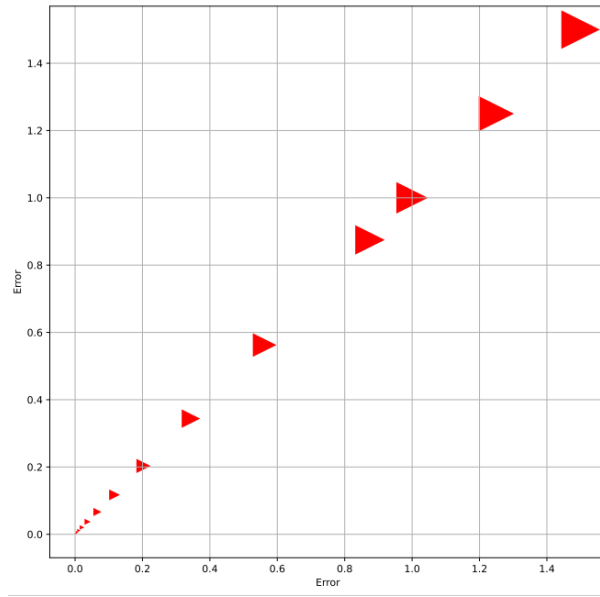


FIGURE 3.4 – Erreur de stabilisation dans le plan $x - y$

3.4 Synchronisation d'une application chaotique 2D sans points fixes

3.4.1 Système Maître (m)

Nous considérons le système conducteur (maître) décrit par :

$$\begin{cases} x_m(n+1) &= y_m(n), \\ y_m(n+1) &= x_m(n) + \alpha x_m^2(n) + \beta y_m^2(n) - \gamma x_m(n)y_m(n) - \eta, \end{cases} \quad (3.11)$$

où $x_m(n), y_m(n)$ sont les variables d'état et $\alpha, \beta, \gamma, \eta$ sont des paramètres déterminant le comportement dynamique du système. Comme démontré dans [14], ce système présente des comportements chaotiques remarquables sans aucun point fixe, ce qui en fait un exemple important de systèmes à attracteurs cachés. Ce système s'inspire de la célèbre application de Hénon mais avec des non-linéarités supplémentaires qui enrichissent sa dynamique.

3.4.2 Système Esclave (s)

Le système esclave (réponse) est donné par :

$$\begin{cases} x_s(n+1) = x_s(n) + y_s(n) + u_1(n), \\ y_s(n+1) = y_s(n) - ay_s^3(n) - x_s(n)y_s(n) + bx_s^2(n) - cy_s^2(n) + d + u_2(n), \end{cases} \quad (3.12)$$

où $x_s(n), y_s(n)$ sont les variables d'état du système esclave, et $u_1(n), u_2(n)$ sont les lois de contrôle destinées à réaliser la synchronisation. Les termes non linéaires dans ce système (en particulier le terme cubique $y_s^3(n)$) introduisent une complexité supplémentaire dans la dynamique.

3.4.3 Définition des Erreurs et Dynamique

On commence par définir les erreurs de synchronisation entre le système maître et le système esclave :

$$\begin{cases} e_1(n) = x_s(n) - x_m(n), \\ e_2(n) = y_s(n) - y_m(n) \end{cases} \quad (3.13)$$

En utilisant les équations (3.11) et (3.12), on obtient les dynamiques des erreurs :

$$\begin{cases} e_1(n+1) = x_s(n+1) - x_m(n+1), \\ e_2(n+1) = y_s(n+1) - y_m(n+1) \end{cases} \quad (3.14)$$

Développons chaque équation :

Pour $e_1(n+1)$:

$$\begin{aligned} e_1(n+1) &= x_s(n+1) - x_m(n+1) \\ &= x_s(n) + y_s(n) - y_m(n) \\ &= e_1(n) + e_2(n) + x_m(n) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Pour $e_2(n+1)$:

$$\begin{aligned}
e_2(n+1) &= y_s(n+1) - y_m(n+1) \\
&= \left[y_s(n) - ay_s^3(n) - x_s(n)y_s(n) + bx_s^2(n) - cy_s^2(n) + d \right] \\
&\quad - \left[x_m(n) + \alpha x_m^2(n) + \beta y_m^2(n) - \gamma x_m(n)y_m(n) - \eta \right] \\
&= e_2(n) + \left(-ay_s^3(n) - x_s(n)y_s(n) + bx_s^2(n) - cy_s^2(n) + d \right. \\
&\quad \left. - x_m(n) - \alpha x_m^2(n) - \beta y_m^2(n) + \gamma x_m(n)y_m(n) - \eta \right)
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Donc la dynamique des erreurs est :

$$\begin{cases} e_1(n+1) = x_s(n) + y_s(n) + u_1(n) - y_m(n), \\ e_2(n+1) = y_s(n) - ay_s^3(n) - x_s(n)y_s(n) + bx_s^2(n) - cy_s^2(n) + d + u_2(n) \\ \quad - [x_m(n) + \alpha x_m^2(n) + \beta y_m^2(n) - \gamma x_m(n)y_m(n) - \eta]. \end{cases} \tag{3.17}$$

3.4.4 Conception des Lois de Contrôle

Théorème: 3.1 *En choisissant les lois de contrôle suivantes :*

$$\begin{cases} u_1(n) = y_m(n) - x_s(n) - y_s(n) - k_1 e_1(n), \\ u_2(n) = x_m(n) + \alpha x_m^2(n) + \beta y_m^2(n) - \gamma x_m(n)y_m(n) - \eta \\ \quad - y_s(n) + ay_s^3(n) + x_s(n)y_s(n) - bx_s^2(n) + cy_s^2(n) - d - k_2 e_2(n), \end{cases} \tag{3.18}$$

avec $0 < k_1, k_2 < 1$, le système maître (3.11) et le système esclave (3.12) se synchronisent asymptotiquement.

Preuve: 3.1 *En substituant les lois de contrôle (3.18) dans la dynamique des erreurs (3.17), on obtient le système d'erreur réduit :*

$$\begin{cases} e_1(n+1) = -k_1 e_1(n), \\ e_2(n+1) = -k_2 e_2(n). \end{cases} \tag{3.19}$$

Considérons la fonction candidate de Lyapunov :

$$V(n) = e_1^2(n) + e_2^2(n).$$

Dans le cadre de l'analyse de stabilité, le théorème de Lyapunov fournit un outil puissant pour étudier le comportement des systèmes dynamiques autour de leurs points d'équilibre. Considérons un système décrit par $\dot{x} = f(x)$ avec un point d'équilibre à $x = 0$.

Théorème: 3.2 (Lyapunov version simplifiée) :

Si on peut trouver une fonction $V(x)$ telle que :

- $V(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$ et $V(0) = 0$ (positive définie)
- $\dot{V}(x) = \frac{dV}{dt} \leq 0$ pour tout $x \neq 0$ (dérivée semi-négative définie)

alors le point d'équilibre $x = 0$ est stable.

Cette approche présente l'avantage de ne pas nécessiter la résolution explicite des équations différentielles du système. En pratique, on choisit souvent comme fonction candidate l'énergie totale du système (somme des énergies cinétique et potentielle pour les systèmes mécaniques). La condition sur la dérivée $\dot{V}(x)$ assure que cette énergie ne croît pas au cours du temps, garantissant ainsi la stabilité.

La variation de la fonction candidate de Lyapunov est donnée par :

$$\begin{aligned} \Delta V(n) &= V(n+1) - V(n) \\ &= e_1^2(n+1) + e_2^2(n+1) - e_1^2(n) - e_2^2(n) \\ &= k_1^2 e_1^2(n) + k_2^2 e_2^2(n) - e_1^2(n) - e_2^2(n) \\ &= (k_1^2 - 1)e_1^2(n) + (k_2^2 - 1)e_2^2(n). \end{aligned}$$

Pour que $\Delta V(n) < 0$ pour tout $e_1(n), e_2(n) \neq 0$, il suffit que $|k_1| < 1$ et $|k_2| < 1$. Dans ces conditions, selon le théorème de stabilité de Lyapunov, les erreurs convergent asymptotiquement vers zéro, garantissant ainsi la synchronisation des deux systèmes.

3.4.5 Simulation Numérique

Avant de procéder à la simulation, nous avons défini un ensemble de paramètres permettant de modéliser la dynamique du système maître-esclave. Les coefficients non linéaires du système, à savoir α , β , γ et η , ont été fixés à 0,1 afin de représenter un comportement modéré. De même, les paramètres du système esclave a , b , c et d sont également choisis égaux à 0,1, assurant ainsi une structure similaire entre les deux systèmes. Les coefficients de contrôle k_1 et k_2 sont fixés à 0,5 pour garantir une bonne convergence sans compromettre la stabilité du système. La simulation est effectuée sur $N = 1000$ itérations, avec des conditions initiales distinctes pour les deux systèmes.

Pour cette simulation numérique, nous avons utilisé le langage Python, notamment les bibliothèques NumPy et Matplotlib, afin de coder et visualiser le processus de synchronisation. Le code suivant illustre l'implémentation complète de cette simulation :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parametres du systeme
alpha = beta = gamma = eta = 0.1
a = b = c = d = 0.1
k1 = k2 = 0.5 # Coefficients de controle
N = 1000      # Nombre d'iterations

# Initialisation
xm, ym = np.zeros(N), np.zeros(N)
xs, ys = np.zeros(N), np.zeros(N)
e1, e2 = np.zeros(N), np.zeros(N)

# Conditions initiales
xm[0], ym[0] = 0.5, -0.5
xs[0], ys[0] = 0.1, 0.1

# Simulation
for n in range(N-1):
    # Systeme maitre
    xm[n+1] = ym[n]
```

```

ym[n+1] = xm[n] +  $\alpha$ *xm[n]**2 +  $\beta$ *ym[n]**2 -  $\gamma$ *xm[n]*ym[n] -  $\eta$ 

# Calcul des erreurs
e1[n] = xs[n] - xm[n]
e2[n] = ys[n] - ym[n]

# Lois de controle
u1 = ym[n] - xs[n] - ys[n] - k1*e1[n]
u2 = (xm[n] +  $\alpha$ *xm[n]**2 +  $\beta$ *ym[n]**2 -  $\gamma$ *xm[n]*ym[n]
-  $\eta$  - ys[n] + a*ys[n]**3 + xs[n]*ys[n] - b*xs[n]**2
+ c*ys[n]**2 - d - k2*e2[n])

# Systeme esclave
xs[n+1] = xs[n] + ys[n] + u1
ys[n+1] = (ys[n] - a*ys[n]**3 - xs[n]*ys[n]
+ b*xs[n]**2 - c*ys[n]**2 + d + u2)

# Visualisation
plt.figure(figsize=(12, 8))
plt.subplot(2, 1, 1)
plt.plot(xm, label='xm')
plt.plot(xs, '--', label='xs')
plt.ylabel('States')
plt.legend()

plt.subplot(2, 1, 2)
plt.plot(ym, label='ym')
plt.plot(ys, '--', label='ys')
plt.ylabel('States')
plt.legend()

plt.figure(figsize=(12, 8))
plt.plot(e1, label='e1')
plt.plot(e2, label='e2')
plt.xlabel('Iterations')
plt.ylabel('Errors')

```

```
plt.legend()
plt.show()
```

Listing 3.1 – Simulation du système maître-esclave

3.4.6 Analyse des Résultats

Les simulations numériques confirment les résultats théoriques :

- Lorsque $0 < k_1, k_2 < 1$, les erreurs de synchronisation convergent exponentiellement vers zéro.
- Le choix des gains de contrôle influence directement la vitesse de convergence - des valeurs plus proches de zéro accélèrent la synchronisation.
- Les états du système esclave (x_s, y_s) suivent fidèlement ceux du système maître (x_m, y_m) après une période transitoire.

La figure 3.5 montre l'évolution temporelle des états des systèmes dans les équations 2.25 et 2.26 après le contrôle. Comme indiqué dans la figure 3.6, la synchronisation est obtenue.

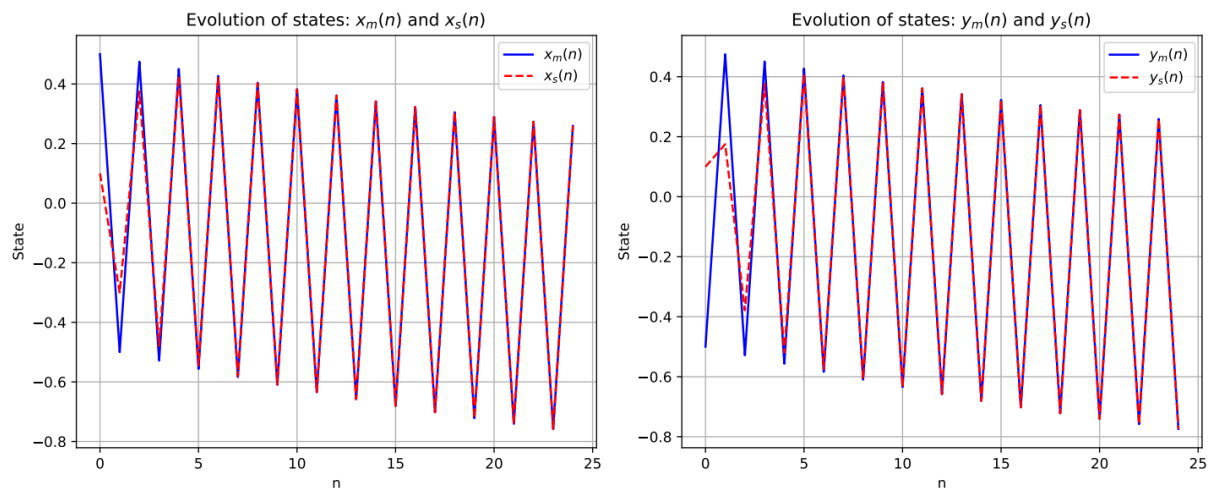


FIGURE 3.5 – Évolution des états lors de l'application du contrôle : (a) $x_m(n), x_s(n)$ et (b) $y_m(n), y_s(n)$

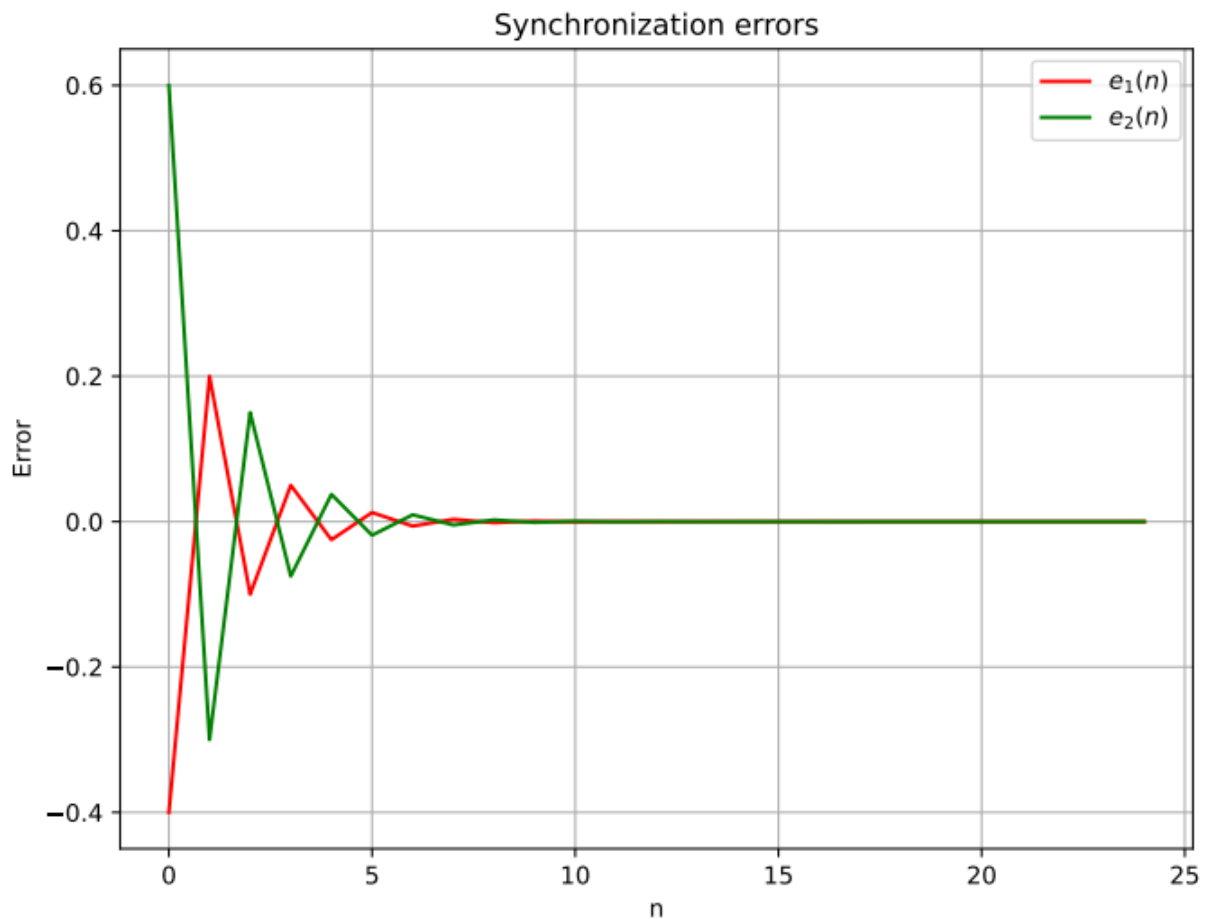


FIGURE 3.6 – Erreurs de synchronisation entre la système maître et la système esclave

3.5 Étude de la stabilisation et de la synchronisation du système Lozi en 3D sans point fixe

Hypothèse de l'étude : Dans cet exemple, nous examinons une version modifiée du système de Hénon en trois dimensions. Ce modèle est spécifiquement conçu pour générer un comportement chaotique et irrégulier, caractérisé par une sensibilité exacerbée aux conditions initiales et par l'absence de points fixes lors de la synchronisation.

Cette particularité rend l'analyse de la stabilité particulièrement délicate, les approches classiques reposant sur la linéarisation locale autour des points fixes n'étant pas applicables.

Objectif de l'étude : L'objectif principal de cette étude est d'analyser les mécanismes de stabilisation et de synchronisation dans un système chaotique dépourvu de points fixes.

Pour y parvenir, nous faisons appel à des méthodes avancées telles que la synchronisation généralisée et la synchronisation qualitative, qui permettent d'établir une correspondance fonctionnelle entre les états de deux systèmes chaotiques, même en l'absence de repères fixes.

3.6 Application du système de Lozi et étude de la crise de frontière [20]

La nouvelle application du système de Lozi en dimension trois, notée (3.20), constitue une simplification de l'application de Hénon en 3D. Dans cette nouvelle version, le terme non linéaire z^2 est remplacé par $|z|$. L'application du système de Lozi (3.20) est ainsi définie par :

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} y \\ z \\ a + bx + cy - |z| \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

Cette application présente des attracteurs chaotiques pour certaines valeurs des paramètres de bifurcation a , b et c .

Considérons une trajectoire (x_t, y_t, z_t) pour $t = 0, 1, \dots$, associée à l'application (3.21). En posant $x = z_{t-2}$, $y = z_{t-1}$, et $z = z_t$, l'application (3.21) peut être reformulée sous la forme :

$$z_{t+1} = a + bz_{t-2} + cz_{t-1} - |z_t| \quad (3.21)$$

Pour analyser le comportement de l'application (3.21), l'espace \mathbb{R}^3 est divisé en deux régions linéaires définies par :

$$\begin{cases} \mathcal{D}_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0\}, \\ \mathcal{D}_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z < 0\}. \end{cases}$$

Dans chacune de ces deux zones \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 , l'expression affine de l'application (3.21) est donnée par :

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \begin{pmatrix} y \\ z \\ a + bx + cy - z \end{pmatrix}, & \text{si } (x, y, z) \in \mathcal{D}_1, \\ \begin{pmatrix} y \\ z \\ a + bx + cy + z \end{pmatrix}, & \text{si } (x, y, z) \in \mathcal{D}_2. \end{cases} \quad (3.22)$$

3.7 Analyse de la stabilité de l'application du système de Lozi en 3D sans points fixes

3.7.1 Points fixes de la application du système de Lozi

Dans cette section, nous étudions l'existence des points fixes de l'application (3.21) ainsi que leur stabilité.

Théorème: 3.3 (Existence des points fixes) *Si $b + c - 2 \neq 0$ et $b + c \neq 0$, alors l'application (3.21) admet deux points fixes donnés par :*

$$S_1 = \left(\frac{a}{b+c-2}, \frac{a}{b+c-2}, \frac{a}{b+c-2} \right), \quad S_2 = \left(\frac{a}{b+c}, \frac{a}{b+c}, \frac{a}{b+c} \right).$$

Preuve: 3.2 *Les points fixes de l'application (3.21) correspondent aux solutions réelles du système suivant :*

$$\begin{cases} y = x, \\ z = y, \\ a + bx + cy - |z| = z. \end{cases} \quad (3.23)$$

En substituant $y = x$ et $z = y$, on obtient :

$$a + bz + cz - |z| = z. \quad (3.24)$$

Cas particulier : *Pour $a = 0$, une solution triviale est le point fixe $(0, 0, 0)$.*

Sinon, en étudiant les différentes possibilités :

— Si $S_1 \in \mathcal{D}_1$, alors à partir de l'équation (3.24), on a $(b + c - 2)z = a$, d'où

$$z = \frac{a}{b + c - 2}.$$

Cette solution est valide si $a > 0$ et $b < 2 - c$, ou si $a < 0$ et $b > 2 - c$.

— Si $S_2 \in \mathcal{D}_2$, alors à partir de l'équation (3.24), on obtient $(b + c)z = a$, soit

$$z = \frac{a}{b + c},$$

ce qui est valable lorsque $a > 0$ et $b > c$, ou bien $a < 0$ et $b < c$.

Corollaire: 3.1 *Si $b + c = 2$ ou $b + c = 0$, alors toutes les orbites de l'application (3.21) sont non bornées. En revanche, si $b + c \neq 2$ et $b + c \neq 0$, il existe une possibilité d'avoir des orbites bornées pour l'application (3.21).*

3.8 Analyse de l'Absence des Points Fixes

Théorème: 3.4 (Inverse du Théorème 3.21) *Si $b + c = 2$ ou $b + c = 0$, alors l'application (3.21) ne possède aucun point fixe réel. En particulier, toutes les trajectoires de l'application (3.21) sont non bornées.*

Preuve: 3.3 *Rappelons que les points fixes de l'application (3.21) sont les solutions réelles du système suivant :*

$$\begin{cases} y = x, \\ z = y, \\ a + bx + cy - |z| = z. \end{cases} \quad (3.25)$$

En substituant $y = x$ et $z = y = x$, on obtient une équation en une seule variable :

$$a + (b + c)x - |x| = x. \quad (3.26)$$

Examinons les deux cas suivants :

- Si $x \geq 0$, alors $|x| = x$, et l'équation (3.26) devient :

$$a + (b + c)x - x = 0,$$

soit :

$$a + (b + c - 1)x = 0.$$

- Si $x < 0$, alors $|x| = -x$, et l'équation (3.26) devient :

$$a + (b + c)x + x = 0,$$

soit :

$$a + (b + c + 1)x = 0.$$

Dans les deux cas, pour qu'un point fixe existe, il faut que x puisse être exprimé comme :

$$x = -\frac{a}{b + c - 1} \quad (\text{si } x \geq 0), \quad \text{ou} \quad x = -\frac{a}{b + c + 1} \quad (\text{si } x < 0).$$

Or, si $b + c = 2$, alors dans le premier cas $b + c - 1 = 1$, et dans le second cas $b + c + 1 = 3$; cependant, si $b + c = 0$, alors $b + c - 1 = -1$, et $b + c + 1 = 1$.

Dans ces cas particuliers ($b + c = 2$ ou $b + c = 0$), on constate que :

- Si $a \neq 0$, alors $x \neq 0$, et donc $|x|$ est non nul, ce qui ne permet pas de satisfaire (3.26) sans contradiction.
- Si $a = 0$, alors $x = 0$, mais dans ce cas l'équation (3.26) devient $0 = 0$, ce qui donne un point fixe $(0, 0, 0)$.

Cependant, il a été montré précédemment que pour $a = 0$, l'orbite n'est pas bornée, ce qui implique que ce "point fixe" n'est pas stable au sens dynamique.

Par conséquent, dans les conditions $b + c = 2$ ou $b + c = 0$, **l'application (3.21) ne possède aucun véritable point fixe stable** et toutes les trajectoires sont non bornées.

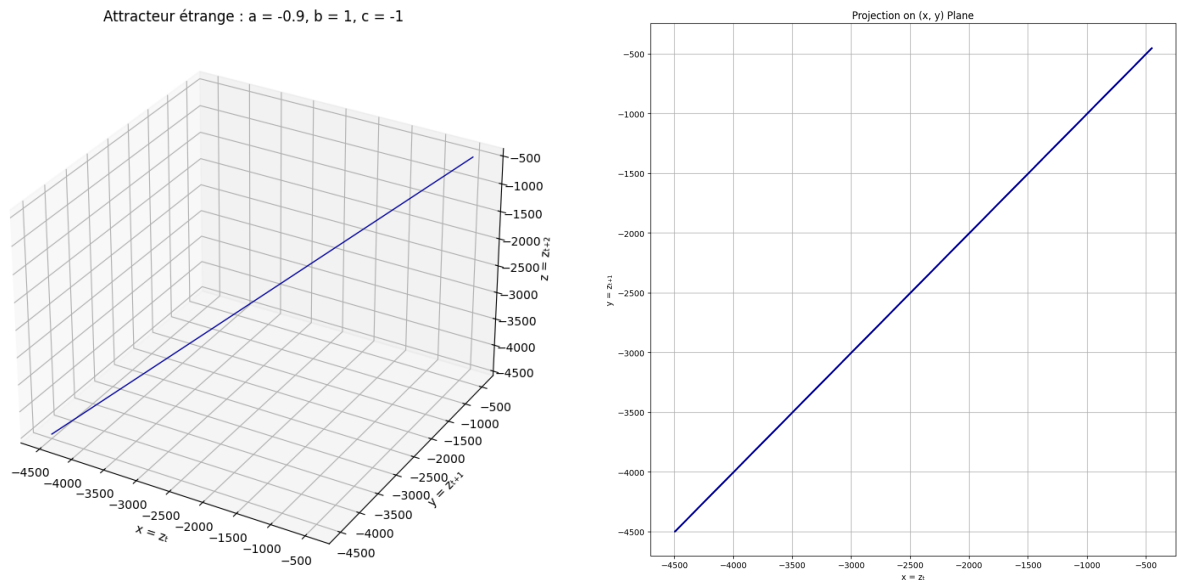
Remarque: 3.1 *Ce résultat souligne la difficulté d'appliquer les méthodes classiques de linéarisation autour des points fixes pour l'étude de la dynamique de ce système chaotique en absence de points fixes.*

Théorème: 3.5 (Analyse de l'Instabilité Locale) *Si les paramètres de l'application (3.21) vérifient $b + c = 2$ ou $b + c = 0$, alors la matrice Jacobienne évaluée aux points critiques n'admet aucun spectre à valeurs propres de module strictement inférieur à un. Ainsi, l'application (3.21) ne possède aucun point fixe localement stable.*

Étude des attracteurs sans points fixes

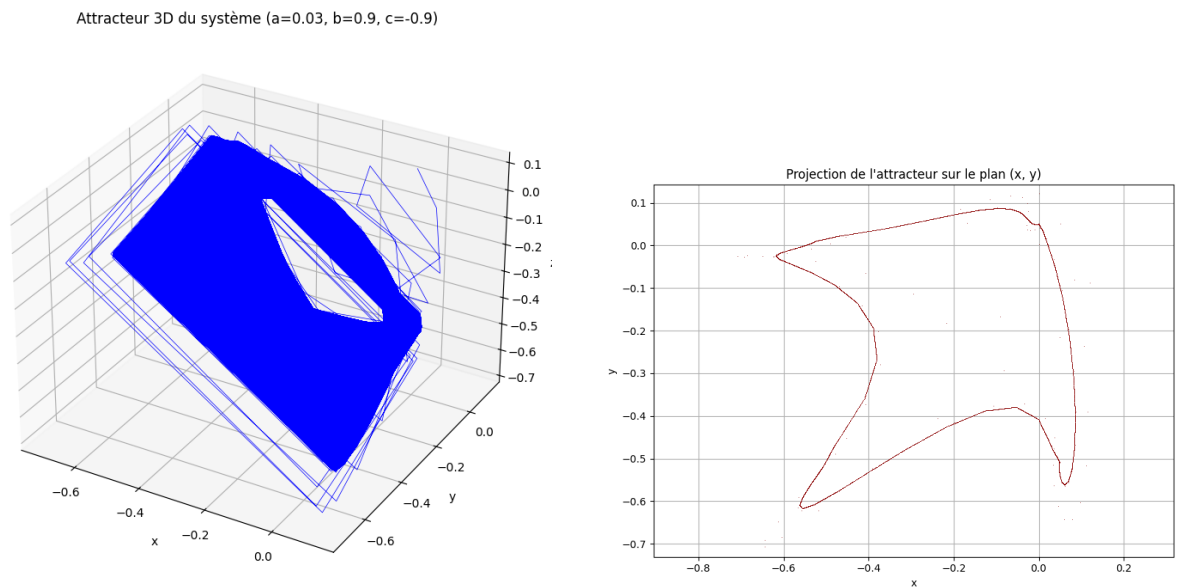
Pour les paramètres $b = 1$, $c = -1$, $a = -0,9$, on observe un comportement chaotique caractérisé par un attracteur étrange visible en trois dimensions dans la Figure 3.7(a). La projection de ce même attracteur sur le plan (x, y) est présentée dans la Figure 3.7(b). Ce type de comportement met en évidence la dynamique complexe du système en l'absence de points fixes.

Lorsque les paramètres sont modifiés à $a = 0,03$, $b = 0,9$, $c = -0,9$, la dynamique devient régulière. L'attracteur obtenu dans ce cas est montré en 3D dans la Figure 3.8(a), et sa projection dans le plan (x, y) est donnée dans la Figure 3.8(b). On constate une structure plus ordonnée et prévisible du système.



(a) Attracteur étrange en 3D ($a = -0,9$, $b = 1$, $c = -1$) (b) Projection (x, y) de l'attracteur étrange ($a = -0,9$, $b = 1$, $c = -1$)

FIGURE 3.7 – Comportement chaotique observé



(a) Attracteur régulier en 3D ($a = 0,03$, $b = 0,9$, $c = -0,9$) (b) Projection (x, y) de l'attracteur régulier ($a = 0,03$, $b = 0,9$, $c = -0,9$)

FIGURE 3.8 – Comportement régulier observé

3.8.1 Étude numérique

Dans cette section, nous analysons le comportement dynamique global de l'application (3.20) en fonction des variations du paramètre de bifurcation a . Les outils utilisés incluent

le calcul des exposants de Lyapunov, la représentation des diagrammes de bifurcation, ainsi que la visualisation des portraits de phase.

Les paramètres sont fixés à $b = 0.29$, $c = 0.9$ et la condition initiale est choisie comme $x_0 = y_0 = z_0 = 2.01$. Le paramètre de bifurcation a varie dans l'intervalle $[0, 2]$. Pour les valeurs de a telles que $0 \leq a < 1.56$, l'application (3.20) présente un comportement chaotique, ce qui est confirmé par la présence d'un exposant de Lyapunov positif. À titre d'exemple, pour $a = 1$, le spectre des exposants de Lyapunov est donné par $L_1 = L_2 = 0.0912$, $L_3 = -1.4201$, ce qui confirme la présence d'un attracteur chaotique de dimension de Lyapunov approximative 2.1302.

Lorsque $1.56 \leq a < 1.66$, une fenêtre de périodicité émerge, marquant une transition vers un comportement périodique. Cette alternance entre régimes périodiques et chaotiques, observée pour des intervalles successifs de a , constitue un exemple typique de *route vers le chaos par intermittence*. En particulier, pour $1.66 \leq a < 1.82$, une nouvelle zone chaotique réapparaît, tandis que pour $1.82 \leq a \leq 2$, le système revient à un régime périodique.

Le diagramme de bifurcation (voir Fig. 3.9) et le spectre de l'exposant de Lyapunov maximal (voir Fig. 3.10) illustrent clairement ces transitions dynamiques.

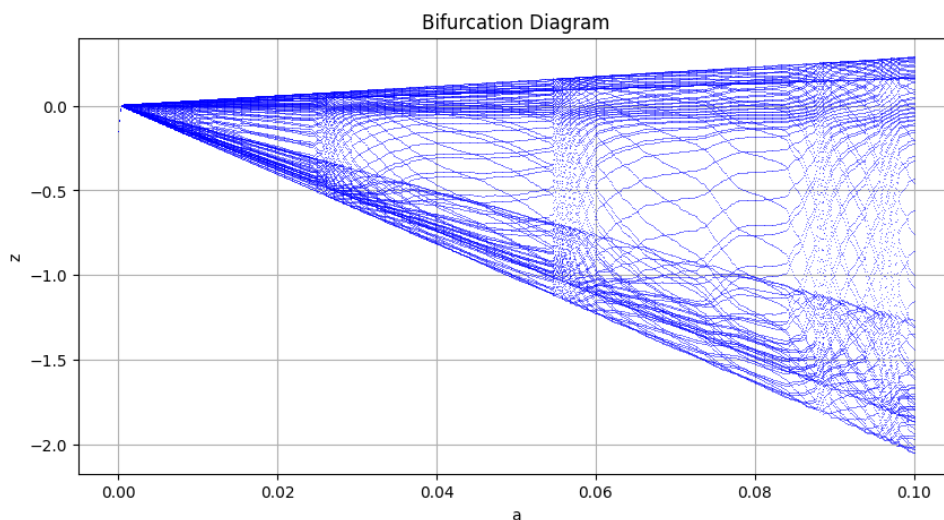


FIGURE 3.9 – Diagramme de bifurcation de l'application (3.20) obtenu pour $b = 0.9$, $c = -0.9$, et $a = 0.03$ avec la condition $b + c = 0$.

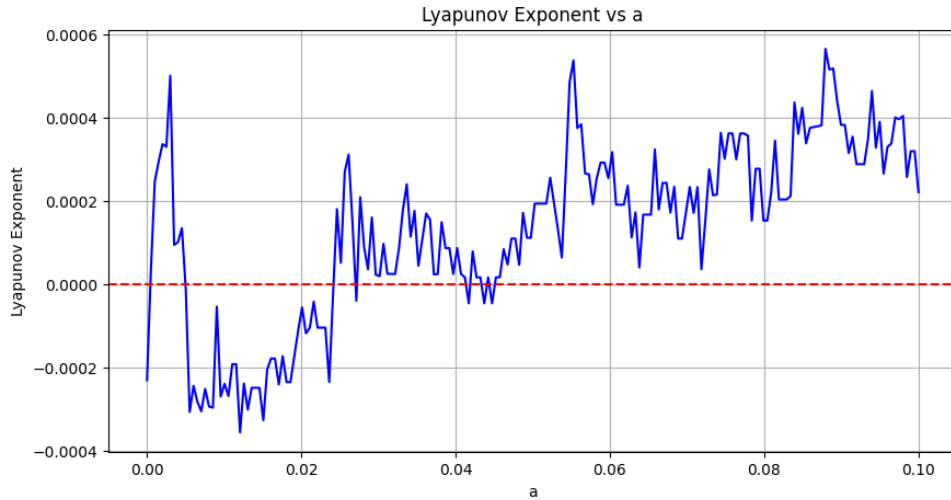


FIGURE 3.10 – Variation de l'exposant de Lyapunov maximal selon les paramètres $b = 0.9$, $c = -0.9$, et $a = 0.03$ avec la condition $b + c = 0$.

Cas des points non fixes : $b + c = 0$ et $a < 0$ Une situation particulière émerge lorsque la condition $b + c = 0$ est satisfaite et que $a < 0$. Dans ce cas, le système ne possède pas de points fixes réels. L'absence de points d'équilibre entraîne un comportement dynamique distinct, dominé par l'absence d'ancrage vers un état stationnaire. L'évolution du système est alors entièrement déterminée par la dynamique transitoire, pouvant générer des oscillations non bornées ou des régimes erratiques complexes, selon les conditions initiales. Cette propriété souligne l'importance de la configuration des paramètres dans la structuration de l'espace des phases du système.

Route vers le chaos par intermittence Le diagramme de bifurcation révèle que l'application (3.20) ne suit pas un scénario classique de route vers le chaos (comme la cascade de périodes), mais plutôt une *route par intermittence*. Ce comportement se manifeste par des transitions brusques entre régimes périodiques et chaotiques, appelées *crises*. On peut identifier trois types de crises : la crise de frontière (disparition ou apparition soudaine d'un attracteur chaotique), la crise intérieure (augmentation soudaine de la dimension de l'attracteur), et la crise par fusion d'attracteurs (plusieurs attracteurs chaotiques fusionnent en un seul).

3.8.2 Stabilisation par une loi de contrôle adaptative

L'objectif est de stabiliser le système suivant par l'introduction de trois termes de contrôle u_x , u_y et u_z :

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n + u_x, \\ y_{n+1} = z_n + u_y, \\ z_{n+1} = a + bx_n + cy_n - |z_n| + u_z \end{cases} \quad (3.27)$$

Nous cherchons à stabiliser le système autour d'un point cible (x_d, y_d, z_d) , ou à l'origine, en définissant les erreurs :

$$\begin{cases} e_1(n) = x_n - x_d(n), \\ e_2(n) = y_n - y_d(n), \\ e_3(n) = z_n - z_d(n) \end{cases} \quad (3.28)$$

La loi de contrôle proposée est de type proportionnel :

$$\begin{cases} u_x = -l_1 e_1(n), \\ u_y = -l_2 e_2(n), \\ u_z = -l_3 e_3(n) \end{cases} \quad (3.29)$$

où $l_1, l_2, l_3 \in (0, 2)$ sont des gains de rétroaction.

En substituant ces termes dans le système, on obtient les équations d'erreur :

$$\begin{cases} e_1(n+1) = (1 - l_1)e_1(n) + e_2(n), \\ e_2(n+1) = (1 - l_2)e_2(n) + e_3(n), \\ e_3(n+1) = (1 - l_3)e_3(n) + \Phi(x_n, y_n, z_n) \end{cases} \quad (3.30)$$

où $\Phi(x, y, z)$ regroupe les perturbations dues aux non-linéarités du système, en particulier le terme $|z|$.

La dynamique du système d'erreur peut être exprimée sous forme matricielle :

$$\mathbf{e}(n+1) = M\mathbf{e}(n) + \Phi(n) \quad (3.31)$$

avec

$$\mathbf{e}(n) = \begin{pmatrix} e_1(n) \\ e_2(n) \\ e_3(n) \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 - l_1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 - l_2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 - l_3 \end{pmatrix}, \quad \Phi(n) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Phi(x_n, y_n, z_n) \end{pmatrix}$$

La stabilité est assurée si les valeurs propres de la matrice M sont strictement inférieures à 1 en valeur absolue, ce qui est garanti si $0 < l_i < 2$ pour $i = 1, 2, 3$.

Les résultats sont illustrés dans les figures suivantes :

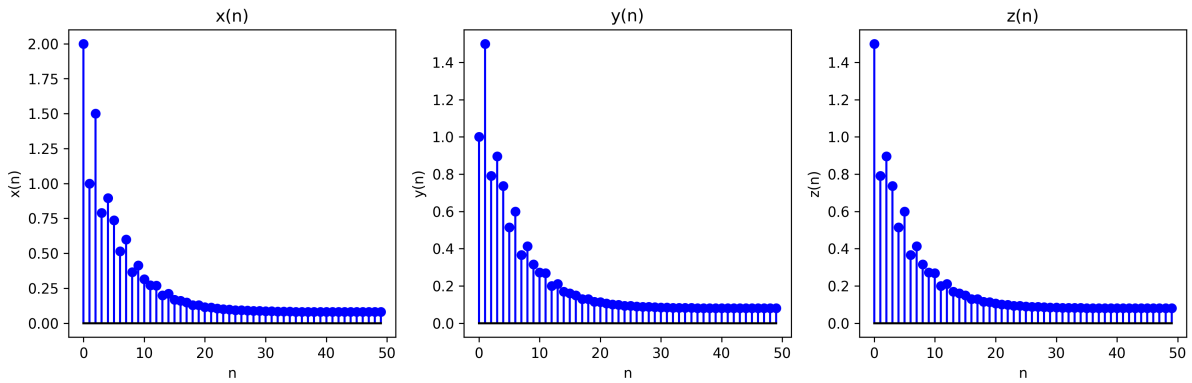


FIGURE 3.11 – Évolution des trajectoires $x(n)$, $y(n)$ et $cz(n)$ sous contrôle adaptatif.

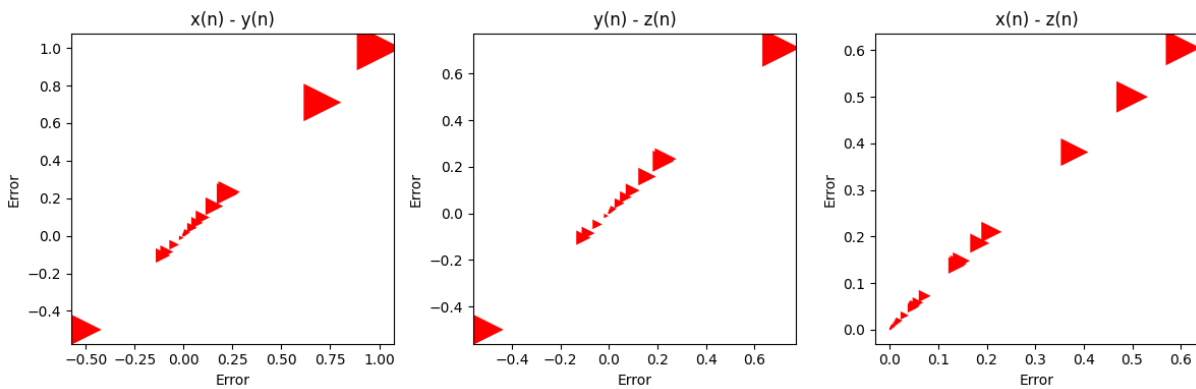


FIGURE 3.12 – Évolution des erreurs de stabilisation dans les plans (x, y) , (y, z) et (x, z) .

Cette approche permet de stabiliser efficacement un système dynamique chaotique, même en présence de non-linéarités non modélisées, en utilisant des lois de contrôle simples mais robustes.

3.9 Synchronisation d'applications chaotique en 3D sans points fixes

Nous étudions un système dynamique discret tridimensionnel chaotique défini par :

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} y \\ z \\ a + bx + cy - |z| \end{pmatrix}.$$

Conditions chaotiques :

Lorsque $b + c = 0$ et $a < 0$, le système n'admet pas de points fixes et présente un comportement chaotique.

Objectif : Synchroniser un système esclave (s) avec un système maître (m) identique.

3.9.1 Système Maître (m)

Nous considérons le système conducteur (maître) décrit par :

$$\begin{cases} x_m(n+1) = y_m(n) \\ y_m(n+1) = z_m(n) \\ z_m(n+1) = a + bx_m(n) + cy_m(n) - |z_m(n)| \end{cases} \quad (3.32)$$

3.9.2 Système Esclave (s)

Le système esclave (réponse) est donné par :

$$\begin{cases} x_s(n+1) = y_s(n) + u_x(n) \\ y_s(n+1) = z_s(n) + u_y(n) \\ z_s(n+1) = a + bx_s(n) + cy_s(n) - |z_s(n)| + u_z(n) \end{cases} \quad (3.33)$$

où u_x, u_y, u_z sont des signaux de contrôle.

3.9.3 Dynamique des erreurs

On commence par définir les erreurs de synchronisation entre le système maître et le système esclave :

$$\begin{cases} e_x(n) = x_s(n) - x_m(n), \\ e_y(n) = y_s(n) - y_m(n), \\ e_z(n) = z_s(n) - z_m(n) \end{cases} \quad (3.34)$$

En utilisant les équations dynamiques des systèmes maître et esclave, on obtient les dynamiques des erreurs :

$$\begin{cases} e_x(n+1) = x_s(n+1) - x_m(n+1), \\ e_y(n+1) = y_s(n+1) - y_m(n+1), \\ e_z(n+1) = z_s(n+1) - z_m(n+1) \end{cases} \quad (3.35)$$

Développons chaque équation :

Pour $e_x(n+1)$:

$$\begin{aligned} e_x(n+1) &= x_s(n+1) - x_m(n+1) \\ &= y_s(n) + u_x(n) - y_m(n) \\ &= e_y(n) + u_x(n) \end{aligned} \quad (3.36)$$

Pour $e_y(n+1)$:

$$\begin{aligned} e_y(n+1) &= y_s(n+1) - y_m(n+1) \\ &= z_s(n) + u_y(n) - z_m(n) \\ &= e_z(n) + u_y(n) \end{aligned} \quad (3.37)$$

Pour $e_z(n+1)$:

$$\begin{aligned} e_z(n+1) &= z_s(n+1) - z_m(n+1) \\ &= [a + bx_s(n) + cy_s(n) - |z_s(n)| + u_z(n)] \\ &\quad - [a + bx_m(n) + cy_m(n) - |z_m(n)|] \\ &= b(x_s(n) - x_m(n)) + c(y_s(n) - y_m(n)) - (|z_s(n)| - |z_m(n)|) + u_z(n) \\ &= be_x(n) + ce_y(n) - (|z_s(n)| - |z_m(n)|) + u_z(n) \end{aligned} \quad (3.38)$$

Ainsi, la dynamique complète des erreurs devient :

$$\begin{cases} e_x(n+1) = e_y(n) + u_x(n), \\ e_y(n+1) = e_z(n) + u_y(n), \\ e_z(n+1) = be_x(n) + ce_y(n) - (|z_s(n)| - |z_m(n)|) + u_z(n) \end{cases} \quad (3.39)$$

3.9.4 Conception du Contrôleur

Pour annuler les erreurs et synchroniser les deux systèmes, on adopte un contrôleur linéaire défini comme suit :

$$\begin{cases} u_x(n) = -l_x e_x(n) - e_y(n) \\ u_y(n) = -l_y e_y(n) - e_z(n) \\ u_z(n) = -be_x(n) - ce_y(n) + (|z_s(n)| - |z_m(n)|) - l_z e_z(n) \end{cases} \quad (3.40)$$

Dynamique des erreurs contrôlées : En remplaçant les expressions de $u_x(n)$, $u_y(n)$ et $u_z(n)$ dans le système d'erreur, on obtient :

$$\begin{cases} e_x(n+1) = -l_x e_x(n) \\ e_y(n+1) = -l_y e_y(n) \\ e_z(n+1) = -l_z e_z(n) \end{cases} \quad (3.41)$$

Analyse de stabilité : Considérons la fonction de Lyapunov suivante, positive définie :

$$V(n) = e_x^2(n) + e_y^2(n) + e_z^2(n). \quad (3.42)$$

L'évolution de cette fonction au pas suivant est donnée par :

$$\begin{aligned} \Delta V(n) &= V(n+1) - V(n) \\ &= e_x^2(n+1) + e_y^2(n+1) + e_z^2(n+1) - V(n) \\ &= l_x^2 e_x^2(n) + l_y^2 e_y^2(n) + l_z^2 e_z^2(n) - V(n) \\ &= (l_x^2 - 1)e_x^2(n) + (l_y^2 - 1)e_y^2(n) + (l_z^2 - 1)e_z^2(n). \end{aligned}$$

Pour que $\Delta V(n) < 0$ pour tout $(e_x(n), e_y(n), e_z(n)) \neq (0, 0, 0)$, il suffit que :

$$0 < l_x, l_y, l_z < 1.$$

Dans ces conditions, la fonction de Lyapunov décroît strictement, ce qui garantit la stabilité asymptotique de l'origine du système d'erreurs. Autrement dit, les erreurs de synchronisation convergent exponentiellement vers zéro, assurant ainsi la synchronisation du système esclave avec le système maître.

3.9.5 Simulation numérique

Dans cette simulation, nous avons utilisé les paramètres $a = 0,03$, $b = 0.9$ et $c = -0.9$ pour modéliser la dynamique du système. Les conditions initiales ont été choisies différemment pour le maître et l'esclave afin d'observer le comportement de synchronisation : le système maître commence avec $(x_m(0), y_m(0), z_m(0)) = (0,1, 0,2, 0,3)$, tandis que le système esclave démarre avec $(x_s(0), y_s(0), z_s(0)) = (0,5, -0,1, 0,4)$. Les gains de correction appliqués aux erreurs entre les deux systèmes sont identiques dans chaque dimension, fixés à $l_x = l_y = l_z = 0,5$. Les résultats obtenus montrent que les trajectoires du maître et de l'esclave se synchronisent efficacement après environ dix itérations, ce qui valide la performance du schéma de contrôle utilisé.

Le code suivant illustre l'implémentation complète de cette simulation :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Paramtres du syst me
a = 0.03
b = 0.9
c = -0.9
l1, l2, l3 = 0.5, 0.5, 0.5 # Gains de contr le

# V rification des conditions : a < 0 et b + c = 0
if not (a < 0 and b + c == 0):
    raise ValueError("Les conditions ne sont pas respect es : il faut a <
```

```

    0 et b + c = 0")

# Conditions initiales
xm, ym, zm = [0.1], [0.2], [0.3] # Ma tre
xs, ys, zs = [0.5], [-0.1], [0.4] # Esclave

# Simulation sur 50 it rations
n_steps = 50

for n in range(n_steps):
    # Syst me ma tre
    xm.append(ym[n])
    ym.append(zm[n])
    zm.append(a + b * xm[n] + c * ym[n] - abs(zm[n]))

    # Calcul des erreurs
    ex = xs[n] - xm[n]
    ey = ys[n] - ym[n]
    ez = zs[n] - zm[n]

    # Loi de contr le
    u1 = -l1 * ex - ey
    u2 = -l2 * ey - ez
    u3 = -b * ex - c * ey + (abs(zs[n]) - abs(zm[n])) - l3 * ez

    # Syst me esclave avec contr le
    xs.append(ys[n] + u1)
    ys.append(zs[n] + u2)
    zs.append(a + b * xs[n] + c * ys[n] - abs(zs[n]) + u3)

# Cr ation des figures
plt.figure(figsize=(15, 10))

# Figure 1: volution des tats
plt.subplot(2, 2, 1)
plt.plot(xm, 'b-', label='xm(n) (ma tre)')

```

```

plt.plot(xs, 'r--', label='x_s(n) (esclave)')
plt.title('(a) volution de x_m(n) et x_s(n)')
plt.xlabel('It rations (n)')
plt.ylabel('Valeurs')
plt.legend()
plt.grid(True)

plt.subplot(2, 2, 2)
plt.plot(ym, 'b-', label='y_m(n) (ma tre)')
plt.plot(ys, 'r--', label='y_s(n) (esclave)')
plt.title('(b) volution de y_m(n) et y_s(n)')
plt.xlabel('It rations (n)')
plt.ylabel('Valeurs')
plt.legend()
plt.grid(True)

plt.subplot(2, 2, 3)
plt.plot(zm, 'b-', label='z_m(n) (ma tre)')
plt.plot(zs, 'r--', label='z_s(n) (esclave)')
plt.title('(c) volution de z_m(n) et z_s(n)')
plt.xlabel('It rations (n)')
plt.ylabel('Valeurs')
plt.legend()
plt.grid(True)

# Calcul des erreurs de synchronisation
ex = [xs[i] - xm[i] for i in range(n_steps + 1)]
ey = [ys[i] - ym[i] for i in range(n_steps + 1)]
ez = [zs[i] - zm[i] for i in range(n_steps + 1)]

# Figure 2: Erreurs de synchronisation
plt.subplot(2, 2, 4)
plt.plot(ex, 'g-', label='e_x(n)')
plt.plot(ey, 'm-', label='e_y(n)')
plt.plot(ez, 'c-', label='e_z(n)')
plt.title('Erreurs de synchronisation')

```

```
plt.xlabel('It rations (n)')
plt.ylabel('Erreurs')
plt.legend()
plt.grid(True)

plt.tight_layout()
plt.show()
```

Listing 3.2 – Simulation du système maître-esclave

3.9.6 Analyse des Résultats

Les simulations numériques valident pleinement les résultats théoriques pour la synchronisation dans l'espace tridimensionnel :

- Lorsque $0 < l_x, l_y, l_z < 1$, les erreurs de synchronisation $e_x(n), e_y(n), e_z(n)$ convergent exponentiellement vers zéro.
- Le choix des gains l_x, l_y, l_z influence directement la rapidité de la convergence – des valeurs plus proches de zéro induisent une synchronisation plus rapide.
- Les états du système esclave (x_s, y_s, z_s) reproduisent fidèlement les trajectoires du système maître (x_m, y_m, z_m) après une courte phase transitoire.

La figure 3.13 illustre l'évolution temporelle des trois états des systèmes maître et esclave. La synchronisation entre les deux systèmes est confirmée par la figure 3.14, qui montre la convergence des erreurs vers zéro.

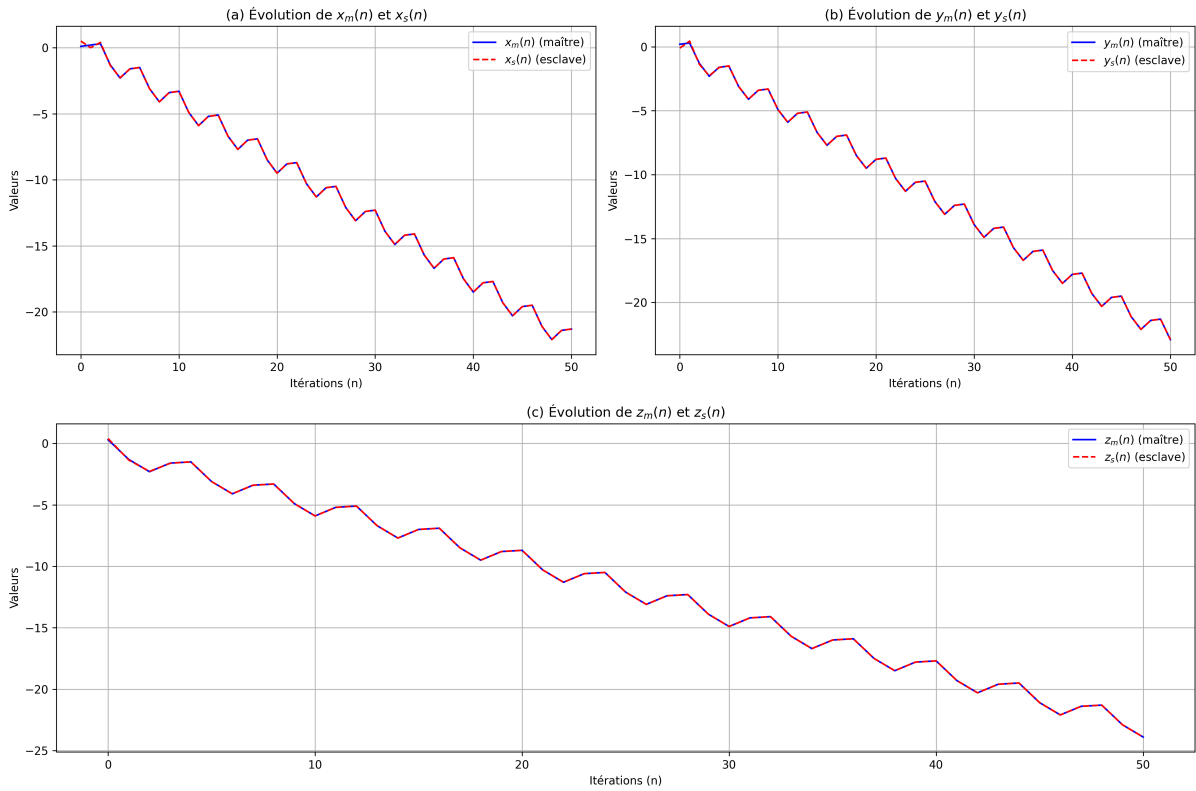


FIGURE 3.13 – Évolution des états : (a) $x_m(n), x_s(n)$, (b) $y_m(n), y_s(n)$, (c) $z_m(n), z_s(n)$

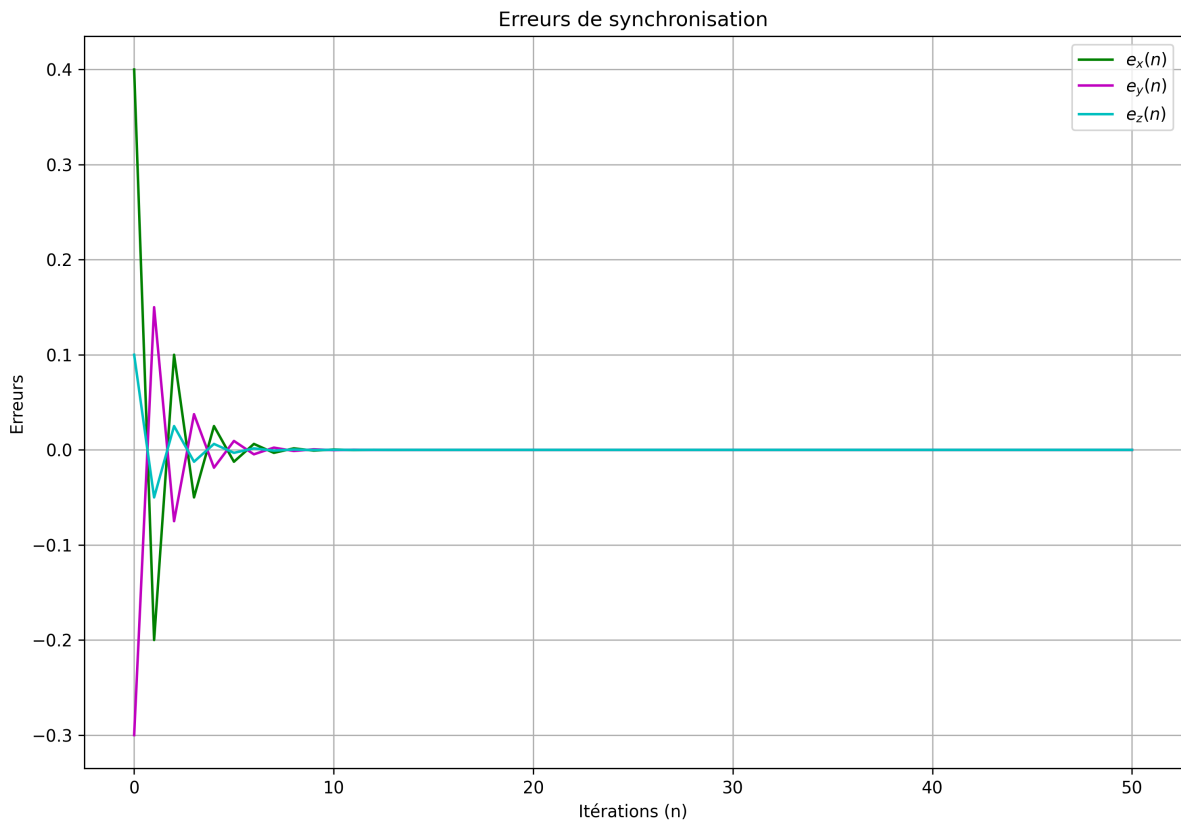


FIGURE 3.14 – Évolution des erreurs de synchronisation $e_x(n), e_y(n), e_z(n)$

3.10 Conclusion

En résumé, dans le troisième chapitre, nous avons étudié l'analyse de la stabilité et la synchronisation adaptative des applications chaotiques sans points fixes. Nous avons discuté des défis posés par l'absence d'états d'équilibre et examiné le rôle crucial des exposants de Lyapunov et des techniques adaptatives dans la réalisation de la synchronisation.

Nos résultats soulignent l'importance de comprendre la synchronisation dans les systèmes chaotiques pour des applications dans les systèmes de contrôle. Malgré les complexités impliquées, ce chapitre souligne que des stratégies innovantes peuvent être développées pour exploiter efficacement le comportement chaotique. Cette exploration contribue à la recherche en cours dans la théorie du chaos et ouvre des voies pour de futures applications dans la dynamique des applications chaotiques.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Au terme de ce mémoire, nous avons exploré un pan essentiel de la dynamique des systèmes chaotiques sans points fixes, en mettant en évidence leur complexité, leur sensibilité aux conditions initiales, ainsi que leur comportement apparemment imprévisible mais gouverné par des lois déterministes.

À travers une analyse rigoureuse et progressive, nous avons présenté les fondements mathématiques des systèmes dynamiques discrets, en particulier les attracteurs chaotiques et les phénomènes de bifurcation. Ensuite, nous avons étudié en profondeur les différentes approches de synchronisation et de stabilisation, en mettant l'accent sur les lois de contrôle adaptatives appliquées à des applications bidimensionnelles et tridimensionnelles sans points fixes.

Les résultats obtenus à l'aide de simulations numériques confirment l'efficacité des techniques proposées et soulignent leur pertinence dans le contexte des systèmes non linéaires complexes. Ces contributions, bien qu'académiques, ouvrent des perspectives d'applications dans des domaines variés tels que la cryptographie, le traitement du signal, ou encore la modélisation de phénomènes biologiques.

Ce travail ne constitue qu'une étape vers une compréhension plus fine du chaos contrôlé. Il appelle à des recherches futures, notamment sur des modèles plus complexes, des systèmes à retard ou à dimension infinie, et sur des méthodes de synchronisation robustes face à l'incertitude et aux perturbations externes.

Ainsi, ce mémoire pose les bases d'une réflexion approfondie sur la manière dont les comportements chaotiques, longtemps perçus comme nuisibles ou imprévisibles, peuvent au contraire être exploités de manière bénéfique grâce à une maîtrise rigoureuse des outils mathématiques et numériques modernes.

- [1] M. Adeli and H. Zarabadipoor. Anti-synchronization of discrete-time chaotic systems using optimization algorithms. *International Journal of Electronic Signals and Systems*, pages 143–147, 2011.
- [2] E.-W. Bai and K. E. Lonngren. Synchronization of two lorenz systems using active control. *Chaos, Solitons & Fractals*, 8(1) :51–58, 1997.
- [3] R. Brown and L. Kocarev. A unifying definition of synchronization for dynamical systems. *Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 10(2) :344–349, 2000.
- [4] M. Diao, Y.-G. Yu, S. Wang, and J.-Z. Yu. Hybrid lag function projective synchronization of discrete chaotic systems with different orders. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 11(7) :503–508, 2010.
- [5] Z. Elhadj and J. Sprott. On the robustness of chaos in dynamical systems : Theories and applications. *Frontiers of Physics in China*, 3(2) :195, 2008.
- [6] S. H. Georg and W. Just. Deterministic chaos. an introduction, 2005.
- [7] G. Grassi and D. A. Miller. Dead-beat full state hybrid projective synchronization for chaotic maps using a scalar synchronizing signal. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 17(4) :1824–1830, 2012.
- [8] N. Hamri and E. Zeraoulia. Etude de quelques types de systèmes chaotiques. 2006.
- [9] M. Hénon. Numerical study of quadratic area-preserving mappings. *Quarterly of applied mathematics*, 27(3) :291–312, 1969.

- [10] M. Henon. A two-dimensional mapping with a strange attractor. *Communications in Mathematical Physics*, 50 :376–392, 1976.
- [11] M. W. Hirsch and S. Smale. *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, volume 11 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, New York, 1974.
- [12] D. L. HITZL and F. Zele. An exploration of the hénon quadratic map. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 14(3) :305–326, mar 1985.
- [13] J. Y. Hung, W. Gao, and J. C. Hung. Variable structure control : A survey. *IEEE transactions on industrial electronics*, 40(1) :2–22, 1993.
- [14] L. Y. W. Z. e. a. Jiang, H. Hidden chaotic attractors in a class of two-dimensional maps. *Nonlinear Dyn* 85, page 2719–2727, 2016.
- [15] N. V. Kuznetsov, G. A. Leonov, T. N. Mokaev, A. Prasad, and M. D. Shrimali. Finite-time lyapunov dimension and hidden attractor of the rabinovich system. *Nonlinear Dynamics*, 92(2) :267–285, 2018.
- [16] C. Li, W. Deng, and D. Xu. Chaos synchronization of the chua system with a fractional order. *Physica A : Statistical Mechanics and Its Applications*, 360(2) :171–185, 2006.
- [17] C. Li, X. Liao, and K.-w. Wong. Lag synchronization of hyperchaos with application to secure communications. *Chaos, Solitons & Fractals*, 23(1) :183–193, 2005.
- [18] J. Lu. Generalized (complete, lag, anticipated) synchronization of discrete-time chaotic systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 13(9) :1851–1859, 2008.
- [19] Z.-j. Ma, Z.-r. Liu, and G. Zhang. Generalized synchronization of discrete systems. *Applied Mathematics and Mechanics*, 28(5) :609–614, 2007.
- [20] M. Mammeri. A Novel Chaotic Attractors in Piecewise Version of the 3D Hénon Map. *Advanced Studies in Theoretical Physics*, 9 :461 – 473, 06 2015.
- [21] A. Ouannas, X. Wang, A.-A. Khennaoui, S. Bendoukha, V.-T. Pham, and F. E. Alsaadi. Fractional form of a chaotic map without fixed points : Chaos, entropy and control. *Entropy*, 20(10), 2018.

- [22] O. Rabiaa. *Systèmes dynamiques et chaos : Différentes méthodes de contrôle et de synchronisation*. PhD thesis, Université frères mentouri - Constantine 1, 2018.
- [23] G. SALMA. *Choatification des applications linéaires en n -D par une fonction bornée*. PhD thesis, Université KASDI Merbah Ouargla, 2023.
- [24] A. Senousi. *Systèmes dynamiques chaotiques et synchronisation*. PhD thesis, Université Mohamed Khider–BISKRA, 2020.
- [25] B. Xin and Z. Wu. Projective synchronization of chaotic discrete dynamical systems via linear state error feedback control. *Entropy*, 17(5) :2677–2687, 2015.