

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ KASDI MERBAH, OUARGLA

FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET SCIENCES DES MATÉRIAUX

DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté en exécution partielle des exigences du :

Master en mathématique

Option : **Probabilités et Statistiques**

Présenté par : Messaoudi Hanane

Titre :

**Existence, unicité et stabilité des solutions pour les équations
différentielles stochastiques rétrogrades dirigée par processus de
Lévy à coefficients localement Lipschitz**

Comité d'examen :

Amara Abdelkader	Prof	U.Ouargla	Président
Saouli Mostapha Abdelouahab	MC.A	U.Ouargla	Superviseur
Mansoul Brahim	MA.A	U.Ouargla	Examineur

2025

Remerciements

Je me prosterne en toute humilité pour exprimer ma gratitude infinie envers Allah le tout puissant, qui m'a accordé la force, la persévérance et la volonté d'accomplir ce travail. Sans

Sa grâce, rien n'aurait été possible.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance au docteur **Saouli Mostapha Abdelouahab** pour son encadrement scientifique rigoureux et éclairé, ses précieux conseils qui ont orienté mes recherches, sa patience et sa disponibilité tout au long de ce travail et son suivi continu et son engagement sans faille.

Mes remerciements les plus sincères vont à monsieur **Mansoul Brahim** et professeur **Amara Abdelkader** pour avoir accepté d'évaluer ce mémoire et pour leurs commentaires constructifs qui ont considérablement enrichi la qualité de ce travail et contribué à mon perfectionnement scientifique.

J'exprime ma gratitude éternelle à ma chère famille pour son soutien inconditionnel à chaque étape de mon parcours, son accompagnement tant moral que matériel et son amour et ses sacrifices qui ont rendu possible cette réalisation.

Je tiens à remercier l'ensemble du corps professoral du département de mathématiques pour la qualité de la formation reçue, le savoir transmis avec passion et l'accompagnement pédagogique tout au long de mon cursus.

MESSAOUDI HANANE © 2025

Dédicace

À celle qui incarne l'amour inconditionnel, bien plus précieuse à mes yeux que ma propre existence. Par son abnégation et ses sacrifices sans limites, elle a fait de mon bonheur sa

raison d'être – **ma mère**-aimée, mon premier amour et mon éternel refuge.

À celui qui guide mes pas sur les sentiers de la vie, dont la sagesse et la bienveillance illuminent chacun de mes chemins. Son soutien indéfectible et ses actions généreuses ont

façonné l'homme que je suis – **mon père**, mon pilier et mon modèle.

À mes frères et sœurs, compagnons de route qui ont transformé chaque épreuve en force :

Abdenmour, Abderrhmane et Ala, pour leur soutien inébranlable face aux défis de la vie.

À ma douce moitié, **Cherifa**, mon étoile polaire et ma partenaire de voyage, dont la présence réconfortante et l'amour constant ont été ma lumière dans les moments les plus

sombres.

À ma chère amie **Ouissal**, pour son soutien précieux et ces instants de complicité qui ont égayé mon quotidien.

À **Dounia**, complice d'études et d'ambitions, merci pour ton partage intellectuel et ton encouragement tout au long de ce parcours exigeant.

À **Ahmed Yacine** et tous ceux qui ont croisé ma route avec bienveillance, votre amitié a été un cadeau inestimable.

MESSAOUDI HANANE © 2025

Abréviations et notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de cette mémoire sont expliquées ci-dessous :

$\mathbb{E}[X]$	Espérance à X .
$\mathbb{E}[X \mathcal{B}]$	Espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{B}$.
$EDSR$	Équation différentielle stochastique rétrograde.
$\mathbb{P}$	Probabilité.
$\mathbb{P}-p.s$	Probabilité presque sûrement.
$\mathbb{P}-p.p$	Probabilité presque partout.
Ω	Espace fondamental d'une expérience aléatoire.
$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$	Espace de probabilité.
MB	Mouvement Brownien.
$\ f\ _{L^p}$	La norme $\mathbb{L}_p$ de la fonction f .
$\mathbb{R}^d$	Espace réel euclidien de dimension d .
$\mathbb{I}_B$	fonction indicatrice de l'ensemble B .
$\mathcal{S}^2$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Espace des processus } \phi = \{\phi_t : t \in [0, T]\}, \mathcal{F}_t - \text{progressivement mesurables} \\ \text{à valeur réelle tellesque : } \ \phi\ ^2 = \mathbb{E} \int_0^T \phi ^2 dt < \infty. \end{array} \right.$
$\mathcal{P}^2$	Sous-espace de $\mathcal{S}^2$ formé par les processus prévisibles.
l^2	Espace des séquences $(\varkappa_n)_{n \geq 0}$ à valeurs réelles tellesque $\sum_{i=0}^{\infty} \varkappa_i^2$ est finie.
$\mathcal{S}^2(l^2)$ et $\mathcal{P}^2(l^2)$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Les espaces correspondants de processus évalués en } l^2 \\ \text{numée de la norme : } \ \phi\ _{l^2}^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{E} \int_0^T \left \phi_t^{(i)} \right ^2 dt. \end{array} \right.$

Table des matières

Remerciements	i
Dédicace	ii
Abréviations et Notations	iii
Table des matières	iv
Introduction	1
1 Généralités sur l'analyse stochastique	3
1.1 Espérance conditionnelle	3
1.2 Processus stochastiques en temps continu	6
1.2.1 Quelques notions de base	6
1.2.2 Martingales	7
1.2.3 Mouvement Brownien	8
1.2.4 Processus de Lévy	13
1.3 Intégrales stochastiques et formule d'Itô	15
1.3.1 Intégrale d'Itô	15
1.3.2 Formule d'Itô	18
1.4 Théorèmes de représentation des martingales	22
1.4.1 Théorème de représentation de martingale Brownien	22
1.4.2 Théorème de représentation des martingales locales	23

2	Equations différentielles stochastiques rétrogrades dirigées par une famille	
	des martingales	25
2.1	Formulation de problème et hypothèses	25
2.2	Existence et unicité des solutions	26
2.3	Théorème de comparaison	33
3	Etude d'EDSR dirigée par processus de Lévy sous hypothèses de Lipschitz	
	local	37
3.1	Existence, unicité et la stabilité des solutions d'EDSRs sous des hypothèses	
	localement Lipschitziennes	38
	Conclusion	48
	Annex : Quelques outils mathématiques	51

Introduction

Ce mémoire est consacré à l'étude des équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR, ou BSDEs en anglais), une classe d'équations différentielles stochastiques dont la valeur est déterminée par une condition terminale. Introduites par Pardoux et Peng dans leur article fondateur [10], les EDSR ont suscité un intérêt croissant en théorie des probabilités et en mathématiques appliquées, notamment en raison de leurs liens profonds avec le contrôle stochastique optimal, les jeux stochastiques et la finance mathématique (El Karoui et al. [4]) et aussi des nombreuses applications en partial differential equation voir [9, 14]. Elles constituent également un outil puissant pour l'étude des équations aux dérivées partielles, offrant des représentations probabilistes de leurs solutions (Pardoux et Peng [11]).

Une EDSR non linéaire est définie de la manière suivante : soit ξ une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$ -mesurable et de carré intégrable, et soit $f(t, Y, Z)$ une fonction progressivement mesurable. Alors, l'EDSR associée s'écrit :

$$\begin{cases} dY_t = -f(t, Y_t, Z_t) dt + Z_t dW_t \\ Y_T = \xi, \end{cases}$$

où W est un mouvement brownien défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Sous l'hypothèse que le coefficient f est uniformément lipschitzien, cette équation admet une solution unique, comme le démontre le théorème de représentation des martingales d'Itô.

L'étude des EDSR a été étendue à des cadres plus généraux, notamment celui des processus de Lévy. Dans [8], Nualart et Schoutens ont établi un théorème de représentation des martingales pour ces processus, ouvrant la voie à l'analyse des EDSR dirigées par des proces-

sus de Lévy ([9]). Sous des conditions de Lipschitz sur le coefficient, ils ont prouvé l'existence et l'unicité des solutions.

Dans ce travail, nous étudions des EDSR dirigées à la fois par un mouvement brownien standard et un processus de Lévy indépendant, avec un coefficient lipschitzien ou localement lipschitzien. Nous montrons que, dans le cas localement lipschitzien, si la constante de Lipschitz L_N associée à la boule $B(0, N)$ et vérifie $L_N \leq L + \sqrt{\log(N)}$, alors l'EDSR admet une solution unique, sans imposer de condition de bornitude sur la donnée terminale ξ (supposée seulement de carré intégrable). De plus, nous établissons un théorème de comparaison et un résultat de stabilité des solutions dans le cas où le générateur est seulement Lipschitz, ce travail est une généralisation des travaux antérieurs ([1], [2]) au cadre des EDSR dirigées par des processus de Lévy.

Ce mémoire est organisé en trois chapitres :

Premier chapitre : Nous introduisons les notions fondamentales du calcul stochastique, incluant l'espérance conditionnelle, mouvement brownien, les intégrales stochastiques et les théorèmes de représentation des martingales, qui serviront de base théorique à notre étude.

Deuxième chapitre : Nous étudions des résultats d'existence et d'unicité pour les solutions d'EDSR gouvernées par des processus de Lévy et aussi le principe de comparaison des solutions.

Troisième chapitre : Nous étendons ces résultats au cas des EDSR avec un générateur localement lipschitzien, en mettant en lumière existence et unicités des solutions et les propriétés de stabilité.

Chapitre 1

Généralités sur l'analyse stochastique

Pour une étude approfondie des concepts abordés dans ce chapitre, incluant les démonstrations complètes et les applications pratiques, nous invitons le lecteur à consulter les travaux de [3, 5, 6, 7, 8, 16].

1.1 Espérance conditionnelle

Théorème 1.1 *Soit $\mathcal{B}$ un sous-tribu de $\mathcal{A}$, et soit $X \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Il existe un unique élément de $\mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$, noté $\mathbb{E}[X|\mathcal{B}]$, tel que*

$$\forall B \in \mathcal{B}, \mathbb{E}[X\mathbb{I}_B] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{B}]\mathbb{I}_B]. \quad (1.1)$$

On a plus généralement, pour toute variable aléatoire réelle bornée $\mathcal{B}$ -mesurable Y ,

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{B}]Y]. \quad (1.2)$$

Si $X \geq 0$, on a $\mathbb{E}[X|\mathcal{B}] \geq 0$ p.s.

Remarque 1.1 *Le point crucial est le fait que $\mathbb{E}[X|\mathcal{B}]$ est $\mathcal{B}$ -mesurable.*

Dans ce qui suit, nous référerons à (1.1) ou (1.2) comme la propriété caractéristique de $\mathbb{E}[X|\mathcal{B}]$.

Preuve. Commençons par la prouver de l'unicité. Soit Y' et Y'' deux variables aléatoires dans $\mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ telles que

$$\forall B \in \mathcal{B}, \mathbb{E}[X' \mathbb{I}_B] = \mathbb{E}[X \mathbb{I}_B] = \mathbb{E}[X'' \mathbb{I}_B].$$

Prenant $B = \{X' > X''\}$ (qui est dans $\mathcal{B}$ puisque X' et X'' sont tous deux mesurables par rapport à $\mathcal{B}$), nous avons

$$\mathbb{E}[(X' - X'') \mathbb{I}_{\{X' > X''\}}] = 0.$$

ce qui implique que $\{X' \leq X''\}$ *p.s.*, et on a de même $\{X' \geq X''\}$ *p.s.*, ce qui signifie que X' et X'' sont égaux en tant qu'éléments de $\mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Passons maintenant à l'existence. Nous supposons tout d'abord que $X \geq 0$, et nous laissons G être la mesure sur $(\Omega, \mathcal{B})$ définie par

$$\forall B \in \mathcal{B}, G(B) = \mathbb{E}[X \mathbb{I}_B].$$

Soulignons que nous ne définissons $G(B)$ que pour $B \in \mathcal{B}$. Nous pouvons également considérer $\mathbb{P}$ comme une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{B})$, en restreignant la correspondance $B \rightarrow \mathbb{P}(B)$ à $B \in \mathcal{B}$, et il est immédiat que $G < \mathbb{P}$. Le théorème de Radon-Nikodym appliqué aux mesures de probabilité $\mathbb{P}$ et G sur l'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{B})$ permet d'obtenir l'existence d'une variable aléatoire X , $\mathcal{B}$ -mesurable non négative telle que

$$\forall B \in \mathcal{B}, \mathbb{E}[X \mathbb{I}_B] = G(B) = \mathbb{E}[\tilde{X} \mathbb{I}_B].$$

En prenant $B = \Omega$, on a $\mathbb{E}[\tilde{X}] = \mathbb{E}[X] < \infty$, et donc $\tilde{X} \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$. La variable aléatoire satisfait (1.1). Lorsque X est de signe quelconque, il suffit de prendre

$$\mathbb{E}[X | \mathcal{B}] = \mathbb{E}[X^+ | \mathcal{B}] - \mathbb{E}[X^- | \mathcal{B}].$$

et il est clair que (1.1) est également une variable. Enfin, pour voir que (1.1) implique (1.2), nous nous basons sur les arguments habituels de la théorie de mesure.. (1.2) découle de (1.1)

lorsque Y est une variable aléatoire simple (ne prenant qu'un nombre infini de valeurs), et dans le cas général, la variable aléatoire Y peut s'écrire comme la limite ponctuelle d'une séquence $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires simples $\mathcal{B}$ -mesurables qui sont uniformément dominées par la même constante H (c'est-à-dire $|Y| \leq H$). et le théorème de convergence dominée donne le résultat souhaité. ■

Propriétés de l'espérance conditionnelle

1. Si $X \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et X est $\mathcal{B}$ -mesurable, alors $\mathbb{E}[X | \mathcal{B}] = X$.
2. L'application $X \rightarrow \mathbb{E}[X | \mathcal{B}]$ est linéaire sur $\mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
3. Si $X \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X | \mathcal{B}]] = \mathbb{E}[X]$.
4. Si $X \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, alors $|\mathbb{E}[X | \mathcal{B}]| \leq \mathbb{E}[|X| | \mathcal{B}]$ p.s. et, en conséquence, $\mathbb{E}[|\mathbb{E}[X | \mathcal{B}]|] \leq \mathbb{E}[|X|]$. Par conséquent, l'application $X \rightarrow \mathbb{E}[X | \mathcal{B}]$ est une contraction de $\mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
5. Si $X, X' \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $X \geq X'$, alors $\mathbb{E}[X | \mathcal{B}] \geq \mathbb{E}[X' | \mathcal{B}]$ p.s.

Preuve. La propriété 1. découle immédiatement de l'unicité dans le Théorème (1.1). De même, pour la propriété 2., nous observons que, si $X, X' \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $\beta, \beta' \in \mathbb{R}$ la variable aléatoire

$$\beta \mathbb{E}[X | \mathcal{B}] + \beta' \mathbb{E}[X' | \mathcal{B}],$$

satisfait la propriété caractéristique (1.1) de l'espérance conditionnelle de $\beta X + \beta' X'$. Propriété 3. est le cas particulier $B = \Omega$ dans (1.1). Pour la propriété 4, en utilisant le fait que $X \geq 0$ implique $\mathbb{E}[X | \mathcal{B}] \geq 0$ nous avons

$$|\mathbb{E}[X | \mathcal{B}]| = |\mathbb{E}[X^+ | \mathcal{B}] - \mathbb{E}[X^- | \mathcal{B}]| \leq \mathbb{E}[X^+ | \mathcal{B}] + \mathbb{E}[X^- | \mathcal{B}] = \mathbb{E}[|X| | \mathcal{B}].$$

Enfin, la propriété 5. est immédiate par linéarité. ■

Interprétation géométrique de l'espérance conditionnelle

Théorème 1.2 Si $X \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, alors $\mathbb{E}[X | \mathcal{B}]$ est la projection orthogonale de X sur $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$.

Preuve. L'inégalité de Jensen montre que $\mathbb{E}[X|\mathcal{B}]^2 \leq \mathbb{E}[X^2|\mathcal{B}]$, *p.s.* Cela implique que $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{B}]^2] \leq \mathbb{E}[\mathbb{E}[X^2|\mathcal{B}]] = \mathbb{E}[X^2] < \infty$, et donc la variable aléatoire $\mathbb{E}[X|\mathcal{B}]$ appartient à $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. D'autre part, pour toute variable aléatoire $\mathcal{B}$ -mesurable bornée Y , par utilisation de propriété caractéristique (1.2), on obtient

$$\mathbb{E}[Y(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{B}])] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[Y\mathbb{E}[X|\mathcal{B}]] = 0.$$

Par conséquent, $X - \mathbb{E}[X|\mathcal{B}]$ est orthogonal à l'espace de toutes les variables aléatoires $\mathcal{B}$ -mesurable et bornées, et ce dernier espace est dense dans $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Il s'ensuit que $X - \mathbb{E}[X|\mathcal{B}]$ est orthogonal à $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, ce qui donne le résultat souhaité. ■

1.2 Processus stochastiques en temps continu

1.2.1 Quelques notions de base

Pour modéliser un phénomène aléatoire dépendant du temps un modèle mathématique est donné par un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et une fonction $X : \mathbb{R}_+ \times (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Définition 1.1 Soit $X = (X_t)_{t \in T}$ une famille de variables aléatoires indexée par un ensemble d'indices $T = \mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \mathbb{N}, \dots$. On appelle processus stochastique toute fonction qui associe à chaque $t \in T$ une variable aléatoire X_t à valeurs dans espace probabilisable $(\mathbb{E}, \Sigma)$.

Remarque 1.2 En général, un processus dépend de deux paramètres : le temps $t \in T$, et est l'aléatoire $\omega \in \Omega$.

Pour un temps fixé t , l'état du processus est donné par la variable aléatoire $X_t(\omega)$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Si ω est fixé $t \mapsto X_t(\omega)$ est appelé trajectoire du processus.

Définition 1.2 Une filtration dans un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une famille de sous-tribus croissante $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, c'est-à-dire que pour tous instants s et t tels que $s \leq t$, on a $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$.

Définition 1.3 La filtration naturelle associée à un processus $\{X_t, t \in I\}$ est la famille $\{\mathcal{F}_t^X, t \in I\}$ définie par :

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, s \leq t).$$

Définition 1.4 Un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est adapté par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ si pour tout t , $(X_t)_{t \geq 0}$ est $\mathcal{F}_t$ -mesurable.

Remarque 1.3 Un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est toujours adapté à la filtration naturelle.

Définition 1.5 Un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est dit progressivement mesurable si, $\forall T > 0$ la fonction

$$(t, \omega) \in ([0, T], \mathcal{B}[0, T]) \times (\Omega, \mathcal{F}_t) \rightarrow X_t(\omega) \in (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})).$$

est mesurable.

Remarque 1.4 Un processus progressivement mesurable est mesurable et adapté.

Proposition 1.1 Si un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est continue à droite (ou continue à gauche) et adapté alors il est progressivement mesurable.

1.2.2 Martingales

Définition 1.6 Une famille adaptée $(M_t)_{t \geq 0}$ des variables aléatoires dans $\mathbb{L}^1$ est :

- Une martingale si, $\forall t \geq s, \mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s$.
- Une surmartingale si, $\forall t \geq s, \mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] \leq M_s$.
- Une sous-martingale si, $\forall t \geq s, \mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] \geq M_s$.

Proposition 1.2 Soit le martingale $(M_t)_{t \geq 0}$ alors pour tout $t \in [0, T]$ on a l'égalité suivante : $\mathbb{E}[M_t] = \mathbb{E}[M_0]$.

Preuve. On a $\mathbb{E}[M_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_0]] = \mathbb{E}[M_0]$, pour tout $t \in [0, T]$. ■

Proposition 1.3 Soit $(M_t)_{t \geq 0}$ une martingale de carré intégrable, alors $\forall t \geq s$, on a

$$\mathbb{E}[(M_t - M_s)^2 | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[M_t^2 - M_s^2 | \mathcal{F}_s].$$

Preuve. Par l'inégalité $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(M_t - M_s)^2 | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[(M_t)^2 | \mathcal{F}_s] - 2M_s \mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] + (M_s)^2 \\ &= \mathbb{E}[M_t^2 - M_s^2 | \mathcal{F}_s].\end{aligned}$$

on retrouve donc que $(M)^2$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -sous martingale. ■

Proposition 1.4 (Inégalité de Doob) Soit $(M_t)_{t \geq 0}$ une martingale de carré intégrable et à trajectoires continues alors $\forall T \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |M_t|^2 \right) \leq 4 \mathbb{E}(M_T^2).$$

Définition 1.7 (Martingale locale) Il est considéré comme une martingale locale, un processus $(X_t)_{t \in T}$, lorsque $(X_t)_{t \in T}$ est un processus adapté avec des trajectoires continues, et qu'il existe une suite croissante $(V_n)_{n \geq 0}$ de temps d'arrêt convergeant vers ∞ . De plus, pour tout n , le processus d'arrêt $(X_t)_{t \in T}^{V_n}$ est une martingale uniformément intégrable.

Définition 1.8 (Semi martingale) Un processus $(X_t)_{t \in T}$ est considéré comme une semi-martingale lorsqu'il est adapté et admet une décomposition de la forme $X = X_0 + M + A$, où M est une martingale locale nulle en 0 et A est un processus adapté nul en 0.

1.2.3 Mouvement Brownien

Le mouvement brownien doit son nom au botaniste Robert Brown, qui l'observa pour la première fois en 1827. En étudiant au microscope des grains de pollen en suspension dans l'eau, Brown remarqua que ces particules présentaient un mouvement aléatoire et incessant, qu'il attribua initialement à une manifestation de vie. Cependant, des expériences ultérieures révélèrent que ce phénomène se produisait également avec des particules inorganiques, suggérant une origine physique plutôt que biologique. Cette découverte marqua les prémices d'une compréhension théorique approfondie, qui sera plus tard formalisée par Albert Einstein (1905) et Paul Langevin, établissant les bases mathématiques du mouvement brownien

comme un processus stochastique fondamental en physique et en probabilités.

Construction de Mouvement Brownien (La marche aléatoire)

Le mouvement brownien peut être obtenu comme limite d'échelle de marches aléatoires renormalisées, un résultat fondamental lié au théorème central limite et à la théorie des processus stochastiques.

Considérons sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ une famille de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes et équidistribuées :

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2}, \text{ avec } i \in \mathbb{N}^*$$

On associe à cette famille la suite $(S_n, n \geq 0)$ définie par : $S_0 = 0$ et $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

Plus précisément, on définit une famille de variables aléatoires indexées par les réels de la forme $\frac{k}{N}, k \in \mathbb{N}$, par :

$$Z_{\frac{k}{N}} = \frac{1}{\sqrt{N}} S_k.$$

On a

$$\mathbb{E}\left(Z_{\frac{k}{N}}\right) = 0 \quad \text{et} \quad \text{VAR}\left(Z_{\frac{k}{N}}\right) = \frac{k}{N}.$$

Les propriétés d'indépendance et de stationnarité de la marche aléatoire restent vérifiées, soit :

1. Si $k \geq k'$, $Z_{\frac{k}{N}} - Z_{\frac{k'}{N}}$ est indépendant de $\left(Z_{\frac{h}{N}}, h \leq k'\right)$.
2. Si $k \geq k'$, $Z_{\frac{k}{N}} - Z_{\frac{k'}{N}}$ est de même loi que $Z_{\frac{k-k'}{N}}$.

On définit un processus à temps continu $(Z_t, t \geq 0)$ à partir de $Z_{\frac{h}{N}}$ en imposant à la fonction $t \rightarrow Z_t$ d'être affine entre $\frac{k}{N}$ et $\frac{k+1}{N}$.

Pour cela, N étant fixé, on remarque que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, il existe $k(t) \in \mathbb{N}$ unique tel que : $\frac{k(t)}{N} \leq t < \frac{k(t)+1}{N}$ et on pose

$$Z_t^N = Z_{\frac{k}{N}} + N \left(t - \frac{k}{N}\right) \left(Z_{\frac{k+1}{N}} - Z_{\frac{k}{N}}\right).$$

où $k = k(t)$.

Pour $t = 1$, on a $Z_1^N = \frac{1}{\sqrt{N}}S_N$. Le théorème centrale limite implique alors que Z_1^N converge en loi vers une variable aléatoire centrée réduite.

On montre alors que le processus (Z_t^N) converge (au sens des lois) vers un mouvement Brownien W .

En particulier : $(Z_{t_1}^N, Z_{t_2}^N, \dots, Z_{t_k}^N) \xrightarrow{\text{loi}} (H_{t_1}, H_{t_2}, \dots, H_{t_k})$ pour tout k -ouple $(t_1, \dots, t_k)$.

Définition 1.9 *Le mouvement brownien standard est un processus stochastique $(W_t)_{t \geq 0}$ à valeurs réelles vérifiant les conditions suivantes :*

1. $W_0 = 0$ p.s.
2. Si $t_0 < t_1 < \dots < t_n$, alors les accroissements $W_{t_i} - W_{t_{i-1}}$ sont indépendants (pour tout $0 \leq i \leq n$).
3. Pour $s, t \geq 0$ tels que $s < t$, $W_t - W_s$ suit une loi normal $N(0, t - s)$.
4. La fonction $t \rightarrow W_t(\omega)$ est continue p.s.

La variation quadratique

Définition 1.10 (Variation d'ordre p) Soit $\Lambda = \{t_0 = 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = t\}$ une subdivision de $[0, t]$ avec $|\Lambda| = \sup_i |t_i - t_{i-1}|$ et pour $p > 1$ on définit

$$V_t^{(p)}(h, \Lambda) = \sum_{i=1}^n |h(t_i) - h(t_{i-1})|^p,$$

alors $h : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ à variation totale d'ordre p si $\forall 0 \leq t \leq T$:

$$\sup_{\Lambda} V_t^{(p)}(h, \Lambda) < \infty.$$

Remarque 1.5 Si $\lim_{t \rightarrow \infty} V_t^{(p)}(h) < \infty$ avec $V_t^{(p)}(h) = \limsup_{|\Lambda| \rightarrow 0} V_t^{(p)}(h, \Lambda)$ on dit que h de variation d'ordre p bornée.

Proposition 1.5 Les trajectoires de MB sont presque sûrement à variation totale infinie sur $[0, T]$.

Définition 1.11 *Un processus est dit à variation quadratique finie si il existe un processus fini $\langle X \rangle_t$ tel que $|\Lambda^n| \rightarrow 0$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_t^{(2)}(X, \Lambda^n) = \langle X \rangle_t, p.s.,$$

Propriétés trajectoires d'un MB

Proposition 1.6 *Soit (W_t) représente un mouvement brownien, alors presque sûrement*

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow +\infty} W_t &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\sup_{s \leq t} W_s \right) = +\infty, \\ \liminf_{t \rightarrow -\infty} W_t &= -\infty, \end{aligned}$$

de plus

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{W_t}{t} = 0$$

Proposition 1.7 (Dérivabilité) *Le mouvement brownien (W_t) ne possède pas de dérivée en zéro*

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \left| \frac{W_h - W_0}{h} \right| = \infty, p.s.$$

Propriétés de Markov

Le mouvement brownien possède une propriété de Markov forte, qui renforce la propriété de Markov classique en permettant de conditionner par des temps d'arrêt (et pas seulement par des temps déterministes) pour tout s , le processus $(X_t, t \geq 0)$ défini par $X_t = W_{t+s} - W_s$ est un mouvement Brownien indépendant de $\mathcal{F}_s$.

Théorème 1.3 *Pour f borelienne bornée, $\mathbb{E}(f(W_k) | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(f(W_k) | \phi(W_t))$ pour $k > t$.*

Preuve. On fait apparaître les accroissements et on utilise les propriétés de l'espérance conditionnelle

$$\mathbb{E}(f(W_k) | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(f(W_k - W_t + W_t) | \mathcal{F}_t) = \Psi(k - t, W_t)$$

avec $\Psi(k - t, x) = \mathbb{E}(f(W_k - W_t + x)) = \mathbb{E}(f(Y + x))$ où Y a même loi que $W_k - W_t$, soit une loi $\mathcal{N}(0, u - t)$. Par les mêmes arguments, $\mathbb{E}(f(W_k) | \phi(W_t)) = \Psi(k - t, W_t)$. On a très précisément

$$\Psi(s, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \int_{\mathbb{R}} f(y) \exp\left(-\frac{(y - x)^2}{2s}\right) dy.$$

■

Proposition 1.8 (*Propriété de Markov forte*) *Soit τ un temps d'arrêt à valeurs finies. On a alors $\mathbb{E}(f(W_{\tau+s}) | \mathcal{F}_\tau) = \mathbb{E}(f(W_{\tau+s}) | \phi(W_\tau))$. En particulier, pour tout temps d'arrêt fini τ , le processus $(X_t, t \geq 0)$ défini par $X_t = W_{t+\tau} - W_\tau$ est un mouvement Brownien indépendant de $\mathcal{F}_\tau$.*

Propriétés des martingale

Proposition 1.9 *Le processus W est une $(\mathcal{F}_t)$ -martingale et aussi le processus $(W_t^2 - t, t \geq 0)$ est une $(\mathcal{F}_t)$ -martingale.*

Preuve. On utilise l'indépendance des accroissements pour calculer les espérances conditionnelles, et d'utiliser la propriété $\mathbb{E}(X | \mathcal{G}) = \mathbb{E}(X)$ quand X et $\mathcal{G}$ sont indépendants. Soit $s \leq t$:

$$\mathbb{E}(W_t | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(W_t - W_s | \mathcal{F}_s) + \mathbb{E}(W_s | \mathcal{F}_s) = W_s.$$

De même $\mathbb{E}((W_t - W_s)^2 | \mathcal{F}_s) = t - s$ et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((W_t - W_s)^2 | \mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(W_t^2 | \mathcal{F}_s) + W_s^2 - 2W_s \mathbb{E}(W_t | \mathcal{F}_s) \\ &= \mathbb{E}(W_t^2 | \mathcal{F}_s) - W_s^2. \end{aligned}$$

On obtient alors

$$\mathbb{E}(W_t^2 - t | \mathcal{F}_s) = W_s^2 - s.$$

■

Proposition 1.10 *Soit W_1 et W_2 deux MB indépendants. Le produit $W_1 W_2$ est une $(\mathcal{F}_t)$ -martingale.*

Preuve. On peut le faire en utilisant le lemme suivant : Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux tribus, N et M deux variable aléatoire telles que $N \vee \mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont indépendantes ainsi que $M \vee \mathcal{G}$ et $\mathcal{F}$ alors : $\mathbb{E}(NM | \mathcal{F} \vee \mathcal{G}) = \mathbb{E}(N | \mathcal{F}) \mathbb{E}(M | \mathcal{G})$. ■

Proposition 1.11 *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le processus $(\exp(\lambda W_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t), t \geq 0)$ est une $(\mathcal{F}_t)$ -martingale. Réciproquement, si X est un processus continue tels que $(\exp(\lambda X_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t), t \geq 0)$ est une martingale pour tout λ réel, le processus X est un Brownien.*

Preuve. Par indépendance

$$\mathbb{E} \left(\left(\exp \left\{ \lambda (W_t - W_s) - \frac{1}{2} \lambda^2 (t - s) \right\} \right) \middle| \mathcal{F}_s \right) = \mathbb{E} \left(\exp \left\{ \lambda (W_t - W_s) - \frac{1}{2} \lambda^2 (t - s) \right\} \right).$$

L'espérance du second membre se calcule comme une transformée de Laplace d'une variable aléatoire gaussienne. On trouve

$$\mathbb{E} \left(\exp \left\{ \lambda (W_t - W_s) - \frac{1}{2} \lambda^2 (t - s) \right\} \right) = 1,$$

et

$$\mathbb{E} \left(\left(\exp \left\{ \lambda W_t - \frac{1}{2} \lambda^2 t \right\} \right) \middle| \mathcal{F}_s \right) = \exp \left\{ \lambda W_s - \frac{1}{2} \lambda^2 s \right\}.$$

La réciproque facile utilise la caractérisation des variables aléatoires gaussiennes au moyen de leur transformée de Laplace. ■

1.2.4 Processus de Lévy

Les processus de Lévy constituent une classe fondamentale de processus stochastiques en théorie des probabilités, généralisant à la fois le mouvement brownien et les processus à sauts. Introduits par Paul Lévy dans les années 1930, ils sont caractérisés par des accroissements indépendants et stationnaires, ainsi que par une continuité stochastique (absence de sauts fixes).

Définition 1.12 *Processus de Lévy est un processus stochastique à valeurs réelles défini $X = \{X_t, t \geq 0\}$ dans un espace de probabilité complet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est appelé un processus*

de Lévy si X a des accroissements stationnaires et indépendants et si $X_0 = 0$. un processus de Lévy possède une modification càdlàg (continues à droite avec une limites à gauche) que nous considérerons toujours.

Soit un processus de Lévy et notons :

$$X_{t-} = \lim_{s \rightarrow t, s < t} X_s, \quad t \geq 0,$$

le processus à limite gauche, et définissons $\Delta X_t = X_t - X_{t-}$ comme la taille du saut au temps.

Il est connue que la loi de est infiniment divisible avec une fonction caractéristique de la forme

$$\mathbb{E}[\exp(i\theta X_t)] = (\eta(\theta))^t.$$

où $\eta(\theta)$ est la fonction caractéristique de X_t . La fonction $\varphi(\theta) = \log \eta(\theta)$ est appelée l'exposant caractéristique, et elle satisfait la célèbre formule de Lévy-Khintchine (Voir [?]) :

$$\varphi(\theta) = ia\theta - \frac{\delta^2}{2}\theta^2 + \int_{-\infty}^{+\infty} (\exp(\theta ix) - 1 - \mathbf{1}_{\{|x| < 1\}} \theta ix) v(dx).$$

où $a \in \mathbb{R}$, $\delta^2 \geq 0$ et v est une mesure sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ avec :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1 \wedge x^2) v(dx) < \infty.$$

La mesure v est appelée la mesure de Lévy de X .

Dans ce cas, l'exposant caractéristique peut s'écrire sous la forme :

$$\varphi(\theta) = -i\tilde{a}\theta + \int_{-\infty}^{+\infty} (\exp(\theta ix) - 1) v(dx).$$

où $\tilde{a}$ est appelé coefficient de dérive. De plus, si le processus de Lévy prend des valeurs dans $\mathbb{R}$ et ne possède pas de sauts négatifs, alors le support de la mesure de Lévy est inclus dans $\mathbb{R}$. Un cas particulier de ces processus est celui des subordonateurs.

Remarque 1.6 Grâce aux propriétés des accroissements indépendants et stationnaires ainsi

qu'à la régularité des trajectoires, on peut démontrer qu'un processus de Lévy est entièrement caractérisé par son exposant caractéristique.

Définition 1.13 (subordonateur) *Un subordonateur est un processus de Lévy à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, ce qui signifie que ses trajectoires sont monotones croissantes.*

Dans le cadre des subordonateurs, on travaille plus souvent avec la transformée de Laplace qu'avec la transformée de Fourier. On sait alors qu'il existe une fonction appelée exposant de Laplace définie par :

$$\forall t \geq 0, \forall \theta \geq 0, \mathbb{E} [\exp (-\theta X_t)] = \exp (-t\varphi (\theta)).$$

et en utilisant l'équation précédente, on obtient :

$$\forall \theta \geq 0, \frac{\varphi (\theta)}{\theta} = \tilde{a} + \int_0^{+\infty} \exp (-\theta t) v (dt).$$

où $v (t)$ est une mesure de Lévy sur $(0, +\infty)$.

1.3 Intégrales stochastiques et formule d'Itô

1.3.1 Intégrale d'Itô

L'intégrale d'Itô est un outil fondamental en calcul stochastique, permettant d'intégrer des processus aléatoires par rapport à des mouvements browniens ou, plus généralement, des martingales. Développée par Kiyoshi Itô dans les années 1940, cette théorie généralise l'intégrale classique (de Riemann ou Lebesgue) pour tenir compte de la nature non différentiable et à variation quadratique finie des trajectoires browniennes.

Il est nécessaire d'attribuer une signification à la variable aléatoire :

$$\int_0^T \theta_s dW_s.$$

Lorsqu'on effectue l'intégration d'une fonction f par rapport à une fonction g dérivable, et que f est régulière, on peut définir son intégrale comme suit :

$$\int_0^T f(s) dg(s) = \int_0^T f(s) g'(s) ds.$$

Si g n'est pas dérivable mais seulement à variation bornée, on peut toujours définir l'intégrale comme :

$$\int_0^T f(s) dg(s) = \lim_{\pi_n \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} g(t_i) (f(t_{i+1}) - f(t_i)),$$

Cette intégrale ainsi définie est appelée intégrale de Stieljes.

Dans le cas du mouvement brownien qui n'est pas à variation bornée, il n'est pas possible de définir cette limite trajectoire par trajectoire. Cependant, étant donné que le mouvement brownien a une variation quadratique finie, il est naturel de définir l'intégrale par rapport à celui-ci comme une limite dans $\mathcal{L}^2$ de cette variable aléatoire.

$$\int_0^T \theta_s dW_s = \lim_{\pi_n \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \theta_{t_i} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}).$$

Il est important de noter que la convergence fait référence à la convergence des variables aléatoires dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$. Ainsi, il sera nécessaire d'exiger que le processus soit $\mathcal{L}^2(\Omega, [0, T])$ pour cela.

Il est également nécessaire que l'intégrande θ soit $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -adaptée pour θ_{t_i} être indépendante de $W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$. En finance, θ_t représentera la quantité d'actif risqué dans notre portefeuille à l'instant t , tandis que dW_t sera la variation infinitésimale de cet actif risqué. Ainsi, il est logique de vouloir imposer qu'elle soit $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -adaptée. Si ce n'était pas le cas, il serait toujours possible de définir une intégrale par rapport au mouvement brownien, mais elle serait significativement différente en raison de la variation quadratique non nulle du mouvement brownien.

En fin de compte, nous allons procéder à la construction de l'intégrale stochastique sur

l'ensemble.

$$\mathcal{L}_{\mathcal{F}}^2(\Omega, [0, T]) = \left\{ \text{contient des processus } (\theta_t)_{0 \leq t \leq T} \text{ càdlàg de carré intégrable et } (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0} \text{ -- adaptée} \right\}.$$

Proposition 1.12 *Sur espace $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}^2(\Omega, [0, T])$, l'intégrale stochastique satisfait les propriétés suivantes :*

- (a) $\theta \rightarrow \int_0^t \theta_s dW_s$ est linéaire.
- (b) $t \rightarrow \int_0^t \theta_s dW_s$ est continue p.s.
- (c) $\left(\int_0^t \theta_s dW_s \right)_{0 \leq t \leq T}$ est processus $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -- adapté.
- (d) Propriété d'isométrie :

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t \theta_s dW_s \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^t \theta_s^2 ds \right].$$

- (e) La variation quadratique de l'intégrale stochastique est donnée par :

$$\left\langle \int_0^t \theta_s dW_s \right\rangle = \int_0^t \theta_s^2 ds.$$

- (f) De manière plus générale, on a :

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t \theta_s dW_s \middle| \mathcal{F}_s \right] = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E} \left[\left(\int_0^t \theta_s dW_s \right)^2 \middle| \mathcal{F}_s \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^t \theta_s^2 ds \middle| \mathcal{F}_s \right].$$

- (g) $\left(\int_0^t \theta_s dW_s \right)_{0 \leq t \leq T}$ est $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -- martingale.

Preuve. (a) La linéarité de l'intégrale est immédiate.

(b) La propriété d'isométrie donne la continuité dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ mais nous allons admettre la continuité p.s.

(c) La variable aléatoire $\int_0^t \theta_s dW_s$ est $\mathcal{F}_t$ -- mesurable comme somme de v.a. $\mathcal{F}_t$ -- mesurables, donc l'intégrale stochastique est un processus $\mathcal{F}$ -- adapté.

(d) on a

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left[\left(\int_0^t \theta_s dW_s \right)^2 \right] &= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} \theta_{t_i} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \right)^2 \right] \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E} \left[\theta_{t_i}^2 (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 \right] + 2 \sum_{i < j} [\theta_{t_i} \theta_{t_j} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) (W_{t_{j+1}} - W_{t_j})] \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} \theta_{t_i}^2 \mathbb{E} \left[(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 \middle| \mathcal{F}_{t_i} \right] \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} \theta_{t_i}^2 (t_{i+1} - t_i) := \int_0^t \theta_s^2 ds.
 \end{aligned}$$

(e) est obtenu par Doob-Meyer.

(f) la première est la propriété de martingale de l'intégrale stochastique et la deuxième la propriété de martingale du processus.

(g) On a vu que le processus $\left(\int_0^t \theta_s dW_s \right)_{t \leq T}$ est $\mathcal{F}$ -adapté. La propriété d'isométrie nous donne que $\int_0^t \theta_s dW_s$ est dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ et donc dans $\mathcal{L}^1(\Omega)$. La première partie de la propriété (g) nous donne la propriété de martingale de l'intégrale stochastique. En fait c'est simplement une transformée de martingale. ■

1.3.2 Formule d'Itô

Les formules d'Itô "aussi appelées lemme d'Itô" constituent l'outil central du calcul stochastique, permettant de différencier et d'intégrer des fonctions de processus aléatoires, tels que le mouvement brownien ou des solutions d'équations différentielles stochastiques (EDS). Développée par Kiyoshi Itô dans les années 1940, cette formule généralise la règle de la chaîne classique en y intégrant un terme additionnel dû à la variation quadratique des processus stochastiques.

Processus d'Itô : Ce sont des processus écrits sous la forme :

$$X_t = x + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s.$$

où b et σ sont deux processus $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -adapté tel que

$$\int_0^t |b_s| ds < +\infty, \text{ et } \int_0^t \|\sigma_s\|^2 ds < +\infty, \text{ p.s.}$$

pour tout $t \geq 0$. Nous utilisons également la notation différentielle formelle :

$$\begin{cases} dX_t = b_t dt + \sigma_t dW_s. \\ X_0 = x. \end{cases}$$

Le coefficient b est appelé la dérive (ou drift) du processus, tandis que σ est son coefficient de diffusion. On introduit aussi les notions suivantes :

- La partie à variation finie du processus X , donnée par $\int_0^t b_s ds$.
- La partie martingale du processus X , donnée par $\int_0^t \sigma_s dW_s$.

Remarque 1.7 *La décomposition d'un processus d'Itô est unique, ce qui signifie que :*

$$\begin{aligned} X_t &= x + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s. \\ &= x' + \int_0^t b'_s ds + \int_0^t \sigma'_s dW_s. \end{aligned}$$

Sous la probabilité, presque sûrement, on a :

$$\begin{cases} x = x' \\ b_s = b'_s, \quad ds \otimes d\mathbb{P} \\ \sigma_s = \sigma'_s, \quad ds \otimes d\mathbb{P} \end{cases}$$

Théorème 1.4 (*1^{ère} formule d'Itô*) *Soit f une fonction deux fois continuellement différentiable ($f \in \mathbb{C}^2$), alors :*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle X, X \rangle_s.$$

Théorème 1.5 (*2^{ème} formule d'Itô*) *Si $(t, x) \rightarrow f(t, x)$ est une fonction deux fois conti-*

nuement différentiable en t et x ces dérivées étant continus en (t, x) , alors

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f'_s(s, X_s) ds + \int_0^t f'_x(s, X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''_{xx}(s, X_s) d\langle X, X \rangle_s.$$

Théorème 1.6 (*3^{ème} formule d'Itô*) Soient $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ et $(Y_t)_{0 \leq t \leq T}$ deux processus d'Itô et soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathbb{C}^2$ à dérivées bornées. on a

$$\begin{aligned} f(X_t, Y_t) &= f(x_0, y_0) + \int_0^t f'_x(X_s, Y_s) dX_s + \int_0^t f'_y(X_s, Y_s) dY_s \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t f''_{xx}(X_s, Y_s) d\langle X, X \rangle_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''_{yy}(X_s, Y_s) d\langle Y, Y \rangle_s \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t f''_{xy}(X_s, Y_s) d\langle X, Y \rangle_s. \end{aligned}$$

Proposition 1.13 (*L'intégration par partie*) Soient $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ et $(Y_t)_{0 \leq t \leq T}$ deux processus d'Itô on a :

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \int_0^t d\langle X, Y \rangle_s.$$

Il s'agit de la notation infinitésimale

$$d(X, Y)_t = X_t dY_t + Y_t dX_t + d\langle X, Y \rangle_t.$$

Preuve. En appliquant la formule d'Itô à X_t^2 et à Y_t^2 , on obtient :

$$dX_t^2 = 2X_t dX_t + d\langle X \rangle_t \quad \text{et} \quad dY_t^2 = 2Y_t dY_t + d\langle Y \rangle_t.$$

Et en l'appliquant à $(X + Y)^2$, on obtient :

$$d(X + Y)_t^2 = 2(X_t + Y_t) d(X_t + Y_t) + d\langle X + Y \rangle_t.$$

Donc, on parvient à obtenir.

$$\begin{aligned}
 d(XY)_t &= \frac{1}{2} (d(X+Y)_t^2 - dX_t^2 - dY_t^2) \\
 &= X_t dY_t + Y_t dX_t + \frac{1}{2} (d\langle X+Y \rangle_t - d\langle X \rangle_t - d\langle Y \rangle_t) \\
 &= X_t dY_t + Y_t dX_t + d(X, Y)_t.
 \end{aligned}$$

■

Formule d'Itô pour une martingale

Théorème 1.7 *Soit $(M_t)_{t \in [0, T]}$ une martingale et f une fonction réelle de classe $\mathbb{C}^2$. Alors, $f(M)$ est également une semi-martingale et satisfait la formule suivante :*

$$f(M_t) = f(M_0) + \int_0^t f'(M_{s-}) dM_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(M_s) d[M]_s.$$

Formule d'Itô pour une martingale càdlàg

Théorème 1.8 *Soit $(W)_{t \in [0, T]}$ un semi martingale à trajectoires càdlàg avec une variation quadratique notée $[W] = \{[W]_t : t \in [0, T]\}$. Soit f une fonction réelle de classe $\mathbb{C}^2$. Alors, $f(W)$ est également une semi-martingale et satisfait la formule suivante :*

$$\begin{aligned}
 f(W_t) &= f(W_0) + \int_0^t f'(W_{s-}) dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(W_s) d[W]_s^c \\
 &\quad + \sum_{0 \leq s \leq t} \{f(W_s) - f(W_{s-}) - f'(W_{s-}) \Delta W_s\}.
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

où $[W]^c$ désigne la partie continue de la variation quadratique $[W]$.

Remarque 1.8 *Un cas particulier intéressant est lorsque $f(x) = x^2$, ce qui donne :*

$$X_t^2 = X_0^2 + \int_0^t 2X_{s-} dX_s + \int_0^t d[X]_s. \tag{1.4}$$

De plus, si X et Y sont deux semi-martingales càdlàg, nous avons :

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_{s-} dY_s + \int_0^t Y_{s-} dX_s + \int_0^t d[X, Y]_s.$$

1.4 Théorèmes de représentation des martingales

Les théorèmes de représentation des martingales sont des résultats fondamentaux en calcul stochastique, établissant un lien profond entre les martingales et les intégrales stochastiques. Ils jouent un rôle clé dans la théorie des équations différentielles stochastiques (EDS), la finance mathématique et l'analyse des processus.

1.4.1 Théorème de représentation de martingale Brownien

Nous intéressons à l'étude de l'espace de probabilité engendré par un mouvement brownien (possiblement multidimensionnel, prenant des valeurs dans $\mathbb{R}^d$). Dans ce texte, nous supposons que $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est l'espace de Wiener canonique "c'est-à-dire, $\Omega = C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$, $X_t(\omega) = \omega(t)$ est le processus canonique, $\mathbb{P}$ est la mesure du mouvement brownien, $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est la filtration engendrée par le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ et complétée par les ensembles $\mathbb{P}$ -négligeables".

Théorème 1.9 Soit $\Gamma \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, alors il existe un unique processus prévisible $Y \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega; \mathbb{R}^d)$ tel que :

$$\Gamma = \mathbb{E}[\Gamma] + \sum_{i=1}^d \int_0^\infty Y_s^{(i)} dX_s^{(i)}.$$

Ce théorème établit que toute variable aléatoire de moyenne nulle appartenant à $\mathbb{L}^2$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ peut être représentée comme une intégrale stochastique par rapport au mouvement brownien.

Il en résulte que toute martingale dans $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une intégrale stochastique par rapport au mouvement brownien donné et possède donc une modification continue.

1.4.2 Théoreme de représentation des martingales locales

Le théorème de représentation des martingales locales est un résultat fondamental en finance et en probabilités. Soit W un mouvement brownien et M une martingale locale continue adaptée à la filtration naturelle de W , il existe un processus localement intégrable Z tel que :

$$M_t = x + \int_0^t Z_s dW_s.$$

Ce théorème est crucial dans la modélisation des marchés financiers, car il garantit que toute martingale locale peut être exprimée comme une intégrale stochastique par rapport à un mouvement brownien. L'hypothèse clé est que M est une martingale relativement à la filtration générée par B .

Par ailleurs, dans certains cas spécifiques, la formule de Clark-Ocone permet d'obtenir une représentation explicite du processus Z . Si X^1 et X^2 sont deux processus d'Itô ayant la forme :

$$X_t^i = x + \int_0^t \alpha_s^i ds + \int_0^t Z_s^i dW_s, \quad i = 1, 2,$$

alors leur crochet est défini comme celui de leurs parties martingales :

$$\langle X^1, X^2 \rangle_t = \int_0^t Z_s^1 Z_s^2 ds.$$

Cependant, en raison de la présence d'une composante à variation finie, le processus $t \rightarrow X_t^1 X_t^2 - \langle X^1, X^2 \rangle_t$ n'est généralement pas une martingale locale. Toutefois, étant donné que $\int_0^t Z_s^1 Z_s^2 ds$ est un processus à variation finie, on obtient :

$$\langle X^1, X^2 \rangle_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2^n} \left(X_{t_i^n}^1 - X_{t_{i-1}^n}^1 \right) \left(X_{t_i^n}^2 - X_{t_{i-1}^n}^2 \right).$$

Proposition 1.14 *Soit $(M_t)_{t \geq 0}$ une martingale de carré intégrable adapté par rapport à la*

filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, alors il existe $U \in \mathcal{P}^2$ et $Z \in \mathcal{P}^2(l^2)$ tels que :

$$M_t = \mathbb{E}[M_0] + \int_0^t U_s dW_s + \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t Z_s^{(i)} dH_s^{(i)}.$$

Chapitre 2

Equations différentielles stochastiques rétrogrades dirigées par une famille des martingales

2.1 Formulation de problème et hypothèses

Les équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR) associées aux processus de Lévy constituent une généralisation puissante des EDSR classiques, en incorporant non seulement un mouvement brownien standard, mais aussi des sauts aléatoires modélisés par une mesure de Lévy. Une EDSR dirigée par processus de Lévy prend la forme suivante :

$$\begin{cases} -dY_t = f(t, Y_{t-}, U_t, Z_t)dt - U_t dW_t - \sum_{i=1}^{\infty} Z_t^{(i)} dH_t^{(i)}. \\ Y_T = \xi. \end{cases} \quad (2.1)$$

Dans ce travail, nous étudions l'existence, l'unicité et la stabilité des solutions des EDSR dirigées par un processus de Lévy sous des conditions de Lipschitz.

Maintenant nous désignons par ε l'ensemble des processus (Y, U, Z) à valeurs dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times l^2$

définis sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ qui sont adaptés à $\mathcal{F}_t$ et tels que :

$$\|(Y, U, Z)\|_\varepsilon^2 = \mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |Y_t|^2 + \int_0^T |U_s|^2 ds + \int_0^T \|Z_s\|^2 ds \right) < +\infty.$$

Remarque 2.1 Le couple $(\varepsilon, \|\cdot\|_\varepsilon)$ est alors un espace de Banach.

Hypothèses

(A.1) $\xi \in \mathbb{L}^2$ et $\mathcal{F}_T$ -mesurable.

(A.2) La fonction $f : [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times l^2 \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait les deux conditions suivante :

i) f est progressivement mesurable et $f(\cdot, 0, 0, 0) \in \mathcal{S}^2$

ii) Il existe un constant $L > 0$ telles que :

$$|f(t, \omega, y, u, z) - f(t, \omega, y', u, z)| \leq L(|y - y'| + |u - u'| + \|z - z'\|_{l^2}).$$

Définition 2.1 Une solution de l'équation (2.1) est une triplet (Y, U, Z) qui appartient à l'espace $(\varepsilon, \|\cdot\|_\varepsilon)$ et satisfait l'équation (2.1).

2.2 Existence et unicité des solutions

Théorème 2.1 Si les hypothèses (A.1), (A.2) sont valables. Supposons que ξ est une variable aléatoire carrée intégrable et $\mathcal{F}_T$ -mesurable. Alors l'équation (2.1) admet une solution unique.

Preuve. Existence : En utilisant le théorème de représentation des martingales (1.14), on peut prouver que l'EDSR suivante :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, 0, 0, 0) ds - \int_t^T U_s dW_s - \int_t^T \langle Z_s, dH_s \rangle.$$

admit une solution.

Définissons maintenant (Y^n, U^n, Z^n) comme suit : $Y^0 = U^0 = Z^0 = 0$ and $(Y^{n+1}, U^{n+1}, Z^{n+1})$

est l'unique solution de la EDSR

$$Y_t^{n+1} = \xi + \int_t^T f(s, Y_{s-}^n, U_s^n, Z_s^n) ds - \int_t^T U_s^{n+1} dW_s - \int_t^T \langle Z_s^{n+1}, dH_s \rangle.$$

Nous allons prouver que (Y^n, U^n, Z^n) est une suite de Cauchy dans l'espace de Banach ε .

Pour rendre les notations plus simples, utilisez :

$$\overline{Y}_s^{n,m} = Y_s^n - Y_s^m, \overline{U}_s^{n,m} = U_s^n - U_s^m, \overline{Z}_s^{n,m} = Z_s^n - Z_s^m.$$

et

$$\overline{f}_s^{n,m} = f(s, Y_{s-}^n, U_s^n, Z_s^n) - f(s, Y_{s-}^m, U_s^m, Z_s^m).$$

Maintenant en utilisant la formule d'Itô pour $e^{\alpha t} \left| \overline{Y}_t^{n+1,m+1} \right|^2$,

$$e^{\alpha t} \left| \overline{Y}_t^{n+1,m+1} \right|^2 = -2 \int_t^T e^{\alpha t} \overline{Y}_{s-}^{n+1,m+1} d \left(e^{\alpha t} \overline{Y}_s^{n+1,m+1} \right) - \int_t^T d \left[e^{\alpha t} \overline{Y}_{s-}^{n+1,m+1} \right]. \quad (2.2)$$

Par conséquence, on obtient :

$$d \left(e^{\alpha t} \overline{Y}_s^{n+1,m+1} \right) = e^{\alpha t} d \left(\overline{Y}_s^{n+1,m+1} \right) + \alpha e^{\alpha t} \left(\overline{Y}_s^{n+1,m+1} \right) ds.$$

nous remplaçons $d \left(e^{\alpha t} \overline{Y}_s^{n+1,m+1} \right)$ dans égalité (2.2) nous trouvons :

$$\begin{aligned} e^{\alpha t} \left| \overline{Y}_t^{n+1,m+1} \right|^2 &= -2 \int_t^T e^{\alpha t} \overline{Y}_{s-}^{n+1,m+1} \left[e^{\alpha t} d \left(\overline{Y}_s^{n+1,m+1} \right) + \alpha e^{\alpha t} \left(\overline{Y}_s^{n+1,m+1} \right) ds \right] \\ &\quad - \int_t^T d \left[e^{\alpha t} \overline{Y}_{s-}^{n+1,m+1} \right]. \end{aligned}$$

Comme $d \left(\overline{Y}_s^{n+1,m+1} \right) = \overline{f}_s^{n,m} ds + \overline{U}_s^{n,m} dW_s + \langle \overline{Z}_s^{n,m}, dH_s \rangle$ et $d \left[e^{\alpha t} \overline{Y}_{s-}^{n+1,m+1} \right] = -d \left[e^{\alpha t} \overline{Y}_{t-}^{n+1,m+1} \right]$,

alors :

$$\begin{aligned}
 & e^{\alpha t} \left| \overline{Y}_t^{n+1,m+1} \right|^2 \\
 &= -2 \int_t^T e^{\alpha s} \overline{Y}_{s-}^{n+1,m+1} \left[e^{\alpha s} \left(-\overline{f}_s^{n,m} ds + \overline{U}_s^{n,m} dW_s + \langle \overline{Z}_s^{n,m}, dH_s \rangle \right) + \alpha e^{\alpha s} \left(\overline{Y}_s^{n+1,m+1} \right) ds \right] \\
 &\quad - \int_t^T d \left[e^{\alpha s} \overline{Y}_{s-}^{n+1,m+1} \right]. \\
 &= 2 \int_t^T e^{\alpha s} \overline{Y}_{s-}^{n+1,m+1} \overline{f}_s^{n,m} ds - 2 \int_t^T e^{\alpha s} \overline{Y}_{s-}^{n+1,m+1} \overline{U}_s^{n,m} dW_s - 2 \int_t^T e^{\alpha s} \overline{Y}_{s-}^{n+1,m+1} \langle \overline{Z}_s^{n,m}, dH_s \rangle \\
 &\quad - \alpha \int_t^T e^{\alpha s} \left| \overline{Y}_{s-}^{n+1,m+1} \right|^2 ds - \int_t^T e^{\alpha s} \left| \overline{U}_s^{n+1,m+1} \right|^2 ds - \int_t^T e^{\alpha s} \left\| \overline{Z}_s^{n+1,m+1} \right\|_{l^2}^2 ds.
 \end{aligned}$$

ceci équivalent à écrire l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}
 & e^{\alpha t} \left| \overline{Y}_t^{n+1,m+1} \right|^2 + \int_t^T e^{\alpha s} \left| \overline{U}_s^{n+1,m+1} \right|^2 ds + \int_t^T e^{\alpha s} \left\| \overline{Z}_s^{n+1,m+1} \right\|_{l^2}^2 ds \\
 &\quad + \alpha \int_t^T e^{\alpha s} \left| \overline{Y}_{s-}^{n+1,m+1} \right|^2 ds. \\
 &= 2 \int_t^T e^{\alpha s} \overline{Y}_{s-}^{n+1,m+1} \overline{f}_s^{n,m} ds - 2 \int_t^T e^{\alpha s} \overline{Y}_{s-}^{n+1,m+1} \overline{U}_s^{n,m} dW_s - 2 \int_t^T e^{\alpha s} \overline{Y}_{s-}^{n+1,m+1} \langle \overline{Z}_s^{n,m}, dH_s \rangle \\
 &\quad - (M_T - M_t).
 \end{aligned}$$

où $\{M_t : t \in [0, T]\}$ est une martingale donnée par

$$M_t = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^t e^{\alpha s} \overline{Z}_s^{n+1,m+1,(i)} \overline{Z}_s^{n+1,m+1,(j)} \left(d[H^{(i)}, H^{(j)}]_s - d\langle H^{(i)}, H_s^{(j)} \rangle_s \right).$$

En prenant l'espérance et en utilisant le fait que $\langle H^{(i)}, H_s^{(j)} \rangle = \sigma_{i,j} t$, on obtient :

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} e^{\alpha t} \left| \overline{Y}_t^{n+1,m+1} \right|^2 + \mathbb{E} \int_t^T e^{\alpha s} \left| \overline{U}_s^{n+1,m+1} \right|^2 ds \\
 &\quad + \mathbb{E} \int_t^T e^{\alpha s} \left\| \overline{Z}_s^{n+1,m+1} \right\|_{l^2}^2 ds + \alpha \mathbb{E} \int_t^T e^{\alpha s} \left| \overline{Y}_{s-}^{n+1,m+1} \right|^2 ds. \\
 &= 2 \mathbb{E} \int_t^T e^{\alpha s} \overline{Y}_{s-}^{n+1,m+1} \overline{f}_s^{n,m} ds.
 \end{aligned}$$

car $\int_t^T e^{\alpha s} \overline{Y}_{s-}^{n+1,m+1} \overline{U}_s^{n,m} dW_s$ et $\int_t^T e^{\alpha s} \overline{Y}_{s-}^{n+1,m+1} \langle \overline{Z}_s^{n,m}, dH_s \rangle$ sont des martingales par rapport

a la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$.

Puisque f est C -Lipschitz, on obtient :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} e^{\alpha t} \left| \overline{Y}_t^{n+1, m+1} \right|^2 + \mathbb{E} \int_t^T e^{\alpha s} \left| \overline{U}_s^{n+1, m+1} \right|^2 ds \\ & + \mathbb{E} \int_t^T e^{\alpha s} \left\| \overline{Z}_s^{n+1, m+1} \right\|_{l^2}^2 ds + \alpha \mathbb{E} \int_t^T e^{\alpha s} \left| \overline{Y}_{s-}^{n+1, m+1} \right|^2 ds. \\ & \leq 2 \mathbb{E} \int_t^T e^{\alpha s} \left| \overline{Y}_{s-}^{n+1, m+1} \right| \left(\left| \overline{Y}_{s-}^{n, m} \right| + \left| \overline{U}_s^{n, m} \right| + \left| \overline{Z}_s^{n, m} \right| \right) ds. \end{aligned}$$

et ensuite :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} e^{\alpha t} \left| \overline{Y}_t^{n+1, m+1} \right|^2 + \mathbb{E} \int_t^T e^{\alpha s} \left| \overline{U}_s^{n+1, m+1} \right|^2 ds + \mathbb{E} \int_t^T e^{\alpha s} \left\| \overline{Z}_s^{n+1, m+1} \right\|^2 ds \\ & + (\alpha - C^2 \beta^2) \mathbb{E} \int_t^T e^{\alpha s} \left| \overline{Y}_{s-}^{n+1, m+1} \right|^2 ds. \\ & \leq \frac{3}{\beta^2} \mathbb{E} \int_t^T e^{\alpha s} \left| \overline{Y}_{s-}^{n+1, m+1} \right| \left[\left| \overline{Y}_{s-}^{n, m} \right|^2 + \left| \overline{U}_s^{n, m} \right|^2 + \left| \overline{Z}_s^{n, m} \right|^2 \right] ds. \end{aligned}$$

En choisissant β et α tels que : $\frac{3}{\beta^2} = \frac{1}{2}$ et $\alpha - \beta^2 C^2 = 0$ nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} e^{\alpha t} \left| \overline{Y}_t^{n+1, m+1} \right|^2 + \mathbb{E} \int_t^T e^{\alpha s} \left| \overline{U}_s^{n+1, m+1} \right|^2 ds + \mathbb{E} \int_t^T e^{\alpha s} \left\| \overline{Z}_s^{n+1, m+1} \right\|^2 ds \\ & \leq \frac{1}{2} \mathbb{E} \int_t^T e^{\alpha s} \left| \overline{Y}_{s-}^{n+1, m+1} \right| \left[\left| \overline{Y}_{s-}^{n, m} \right|^2 + \left| \overline{U}_s^{n, m} \right|^2 + \left| \overline{Z}_s^{n, m} \right|^2 \right] ds. \end{aligned}$$

Il suit immédiatement pour tous $m > n$ que :

$$\mathbb{E} \int_t^T e^{\alpha s} \left| \overline{Y}_{s-}^{n, m} \right|^2 ds + \mathbb{E} \int_t^T e^{\alpha s} \left| \overline{U}_s^{n, m} \right|^2 ds + \mathbb{E} \int_t^T e^{\alpha s} \left| \overline{Z}_s^{n, m} \right|^2 ds \leq \frac{K}{2^n}.$$

En utilisant encore la formule d'Itô et l'inégalité de Doob il suit qu'il existe une constante universelle K telle que :

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq s \leq T} \int_t^T e^{\alpha s} \left| \overline{Y}_{s-}^{n, m} \right|^2 ds + \mathbb{E} \int_t^T e^{\alpha s} \left| \overline{U}_s^{n, m} \right|^2 ds + \mathbb{E} \int_t^T e^{\alpha s} \left| \overline{Z}_s^{n, m} \right|^2 ds \leq \frac{K}{2^n}.$$

Par conséquent, (Y^n, U^n, Z^n) est une suite de Cauchy dans l'espace de Banach ε . Il est facile

de montrer que :

$$(Y, U, Z) = \lim_{n \rightarrow \infty} (Y^n, U^n, Z^n).$$

résout notre EDSR.

Unicité : Soit (Y, U, Z) et $(\tilde{Y}, \tilde{U}, \tilde{Z})$ deux solutions de l'équation (2.1) on a :

$$\begin{aligned} (Y_t - \tilde{Y}_t) &= \int_t^T \left[f(s, Y_{s-}, U_s, Z_s) - f(s, \tilde{Y}_{s-}, \tilde{U}_s, \tilde{Z}_s) \right] ds \\ &\quad - \int_t^T (U_s - \tilde{U}_s) dW_s - \sum_{i=1}^{\infty} \int_t^T (Z_s^{(i)} - \tilde{Z}_s^{(i)}) dH_s^{(i)}. \end{aligned}$$

D'après la formule d'Itô, on trouver :

$$X_t^2 = X_T^2 - 2 \int_t^T X_{s-} dX_s - \int_t^T d[X]_s.$$

on note $X_t = Y_t - \tilde{Y}_t$ et $X_T = \xi - \xi = 0$

$$\left| Y_t - \tilde{Y}_t \right|^2 = -2 \int_t^T (Y_{s-} - \tilde{Y}_{s-}) d(Y_{s-} - \tilde{Y}_{s-}) - \int_t^T d[Y_{s-} - \tilde{Y}_{s-}].$$

Donc :

$$\begin{aligned} &\left| Y_t - \tilde{Y}_t \right|^2 + \int_t^T \left| U_s - \tilde{U}_s \right|^2 ds + \int_t^T \left\| Z_s - \tilde{Z}_s \right\|_{l^2}^2 ds \\ &= 2 \int_t^T (Y_{s-} - \tilde{Y}_{s-}) \left[f(s, Y_{s-}, U_s, Z_s) - f(s, \tilde{Y}_{s-}, \tilde{U}_s, \tilde{Z}_s) \right] ds \\ &\quad - 2 \int_t^T (Y_{s-} - \tilde{Y}_{s-}) (U_s - \tilde{U}_s) dW_s - 2 \sum_{i=1}^{\infty} \int_t^T (Y_{s-} - \tilde{Y}_{s-}) (Z_s^{(i)} - \tilde{Z}_s^{(i)}) dH_s^{(i)}, \end{aligned}$$

par passage a espérance mathématique, on obtient :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left(\left| Y_t - \tilde{Y}_t \right|^2 + \int_t^T \left| U_s - \tilde{U}_s \right|^2 ds + \int_t^T \left\| Z_s - \tilde{Z}_s \right\|_{l^2}^2 ds \right) \\ &= 2 \mathbb{E} \int_t^T (Y_{s-} - \tilde{Y}_{s-}) \times \left[f(s, Y_{s-}, U_s, Z_s) - f(s, \tilde{Y}_{s-}, \tilde{U}_s, \tilde{Z}_s) \right] ds. \end{aligned}$$

car $\int_t^T (Y_{s-} - \tilde{Y}_{s-}) (U_s - \tilde{U}_s) dW_s$ et $\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \int_t^T (Y_{s-} - \tilde{Y}_{s-}) (Z_s^{(j)} - \tilde{Z}_s^{(i)}) \left(d[H_s^{(j)} - H_s^{(i)}] - d\langle H^{(i)}, H_s^{(j)} \rangle_s \right)$

sont des martingales par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(\left| Y_{t-} - \tilde{Y}_t \right|^2 + \int_t^T \left| U_s - \tilde{U}_s \right|^2 ds + \int_t^T \left\| Z_s - \tilde{Z}_s \right\|_{l^2}^2 ds \right) \\ & \leq 2\mathbb{E} \int_t^T \left| Y_{s-} - \tilde{Y}_{s-} \right| \times \left| f(s, Y_{s-}, U_s, Z_s) - f(s, \tilde{Y}_{s-}, \tilde{U}_s, \tilde{Z}_s) \right| ds. \end{aligned}$$

puis que f est C -Lipschitz, on a :

$$\begin{aligned} & 2\mathbb{E} \int_t^T \left| Y_{s-} - \tilde{Y}_{s-} \right| \left| f(s, Y_{s-}, U_s, Z_s) - f(s, \tilde{Y}_{s-}, \tilde{U}_s, \tilde{Z}_s) \right| ds \\ & \leq 2c\mathbb{E} \int_t^T \left| Y_{s-} - \tilde{Y}_{s-} \right| \left\{ \left| Y_{s-} - \tilde{Y}_{s-} \right| + \left| U_s - \tilde{U}_s \right| + \left| Z_s - \tilde{Z}_s \right| \right\} ds. \end{aligned}$$

nous avons utilisé l'inégalité $2xy \leq \beta^2 x^2 + \frac{y^2}{\beta^2}$ on trouve :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(\left| Y_{t-} - \tilde{Y}_{t-} \right|^2 + \left(1 - \frac{c}{\beta^2} \right) \left(\int_t^T \left| U_s - \tilde{U}_s \right|^2 ds + \int_t^T \left\| Z_s - \tilde{Z}_s \right\|_{l^2}^2 ds \right) \right) \\ & \leq (2c + 2c\beta^2) \mathbb{E} \int_t^T \left| Y_{s-} - \tilde{Y}_{s-} \right|^2 ds. \end{aligned}$$

on pose : $\frac{c}{\beta^2} = \frac{1}{4}$, on trouve

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(\left| Y_{t-} - \tilde{Y}_{t-} \right|^2 + \int_t^T \left| U_s - \tilde{U}_s \right|^2 ds + \int_t^T \left\| Z_s - \tilde{Z}_s \right\|_{l^2}^2 ds \right) \\ & \leq C_\beta \mathbb{E} \int_t^T \left| Y_{s-} - \tilde{Y}_{s-} \right|^2 ds, \end{aligned} \tag{2.3}$$

avec $C_\beta = 2c + 2c\beta^2$, donc :

$$\mathbb{E} \left(\left| Y_{t-} - \tilde{Y}_{t-} \right|^2 \right) \leq C_\beta \mathbb{E} \int_t^T \left| Y_{s-} - \tilde{Y}_{s-} \right|^2 ds.$$

d'après lemme de Gronwall's on obtient :

$$\mathbb{E} \left(\left| Y_{t-} - \tilde{Y}_{t-} \right|^2 \right) = 0 \Rightarrow Y_{t-} = \tilde{Y}_{t-} \text{ P.p.s.}$$

return on inégalité (2.3) on obtient :

$$\mathbb{E} \left(\int_t^T |U_s - \tilde{U}_s|^2 ds + \int_t^T \|Z_s - \tilde{Z}_s\|_{l^2}^2 ds \right) \leq 0 \implies U_t = \tilde{U}_t \text{ et } Z_t = \tilde{Z}_t, \mathbb{P} - p.s.$$

donc l'équation (2.1) admet une solution unique. ■

Le théorème suivant établit une borne supérieure pour l'écart entre deux solutions de l'équation (2.1). La démonstration repose sur une application combinée de la formule d'Itô, de la propriété de Lipschitz de la fonction f , ainsi que sur une généralisation du lemme de Gronwall.

Théorème 2.2 *Étant donné des données standard (f, ξ) et $(\tilde{f}, \tilde{\xi})$, soit (Y, U, Z) et $(\tilde{Y}, \tilde{U}, \tilde{Z})$ les solutions uniques de l'équation (2.1) associé à (f, ξ) et l'équation (2.1) associé à $(\tilde{f}, \tilde{\xi})$ respectivement. Alors on a estimation suivante*

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \int_0^T \left(|\tilde{Y}_{s-} - Y_{s-}|^2 + |\tilde{U}_s - U_s|^2 + \|\tilde{Z}_s - Z_s\|_{l^2}^2 \right) ds \\ & \leq C \mathbb{E} \left(|\tilde{\xi} - \xi|^2 + \int_0^T |\tilde{f}(s, Y_{s-}, U_s, Z_s) - f(s, Y_{s-}, U_s, Z_s)|^2 ds \right). \end{aligned}$$

Preuve. Pour prouver le théorème, nous suivons les mêmes étapes que pour la preuve du (2.1), alors on a la formule d'Itô pour les martingales càdlàg, on obtient

$$\begin{aligned} & |\tilde{Y}_{s-} - Y_{s-}|^2 \\ & = |\tilde{\xi} - \xi|^2 + 2 \int_t^T (\tilde{Y}_{s-} - Y_{s-}) \left[\tilde{f}(s, Y_{s-}, U_s, Z_s) - f(s, Y_{s-}, U_s, Z_s) \right] ds \\ & - 2 \int_t^T (\tilde{Y}_{s-} - Y_{s-})(\tilde{U}_s - U_s) dW_s - 2 \sum_{i=1}^{\infty} \int_t^T (\tilde{Y}_{s-} - Y_{s-})(\tilde{Z}_s^{(i)} - Z_s^{(i)}) dH_s^{(i)} \\ & - \int_t^T |\tilde{U}_s - U_s|^2 ds - \int_t^T \|\tilde{Z}_s - Z_s\|_{l^2}^2 ds, \end{aligned}$$

par passage à espérance mathématique, on trouve

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(\left| \tilde{Y}_{s-} - Y_{s-} \right|^2 + \int_t^T \left| \tilde{U}_s - U_s \right|^2 ds + \int_t^T \left\| \tilde{Z}_s - Z_s \right\|_{l^2}^2 ds \right) \\ & \leq \mathbb{E} \left(\left| \tilde{\xi} - \xi \right|^2 \right) + 2\mathbb{E} \left(\int_t^T (\tilde{Y}_{s-} - Y_{s-}) \left[\tilde{f}(s, Y_{s-}, U_s, Z_s) - f(s, Y_{s-}, U_s, Z_s) \right] ds \right). \end{aligned}$$

nous avons utilisé l'inégalité $2xy \leq \beta^2 x^2 + \frac{y^2}{\beta^2}$ on trouve :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(\left| \tilde{Y}_{s-} - Y_{s-} \right|^2 + \int_t^T \left| \tilde{U}_s - U_s \right|^2 ds + \int_t^T \left\| \tilde{Z}_s - Z_s \right\|_2^2 ds \right) \\ & \leq \mathbb{E} \left(\left| \tilde{\xi} - \xi \right|^2 \right) + \beta^2 \mathbb{E} \int_t^T \left| \tilde{Y}_{s-} - Y_{s-} \right|^2 ds \\ & \quad + \frac{1}{\beta^2} \mathbb{E} \int_t^T \left| \tilde{f}(s, Y_{s-}, U_s, Z_s) - f(s, Y_{s-}, U_s, Z_s) \right|^2 ds \end{aligned}$$

Finalement, on pose $\beta = 1$, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(\left| \tilde{Y}_{s-} - Y_{s-} \right|^2 + \int_t^T \left| \tilde{Y}_{s-} - Y_{s-} \right|^2 ds + \int_t^T \left| \tilde{U}_s - U_s \right|^2 ds + \int_t^T \left\| \tilde{Z}_s - Z_s \right\|_2^2 ds \right) \\ & \leq \mathbb{E} \left(\left| \tilde{\xi} - \xi \right|^2 \right) + \mathbb{E} \int_t^T \left| \tilde{f}(s, Y_{s-}, U_s, Z_s) - f(s, Y_{s-}, U_s, Z_s) \right|^2 ds. \end{aligned}$$

■

2.3 Théorème de comparaison

Dans cette section, nous établissons un théorème de comparaison pour les équations différentielles stochastiques rétrogrades dirigées par un processus de Lévy. Ce résultat fondamental joue un rôle central dans l'interprétation probabiliste des solutions d'équations aux dérivées partielles non linéaires, notamment dans le cadre des systèmes de type Hamilton-Jacobi-Bellman.

Théorème 2.3 *Étant donné un ensemble de données standard (f_1, ξ_1) et (f_2, ξ_2) , supposons que les conditions suivantes sont vérifiées : $\xi_1 \leq \xi_2$ et $f_1(t, y, u, z) \leq f_2(t, y, u, z)$ pour chaque $(y, u, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times l^2$, $d\mathbb{P} \times dt - a.s.$ Alors $Y_t^{f_1} \leq Y_t^{f_2}, t \in [0, T]$.*

Preuve. Soit

$$\begin{aligned}\bar{Y}_s &= Y_s^{f_2} - Y_s^{f_1}, & \bar{U}_s &= U_s^{f_2} - U_s^{f_1}, & \bar{Z}_s &= Z_s^{f_2} - Z_s^{f_1}, & \bar{\xi} &= \xi_2 - \xi_1 \\ \bar{f}_s &= f_2(s, Y_{s-}^{f_2}, U_s^{f_2}, Z_s^{f_2}) - f_1(s, Y_{s-}^{f_1}, U_s^{f_1}, Z_s^{f_1}).\end{aligned}$$

Premièrement, nous définissons trois processus stochastiques comme suit

$$\begin{aligned}\mu_s &= \begin{cases} \bar{Y}_{s-}^{-1} \left(f_1(s, Y_{s-}^{f_2}, U_s^{f_2}, Z_s^{f_2}) - f_1(s, Y_{s-}^{f_1}, U_s^{f_1}, Z_s^{f_1}) \right) & \text{si } \bar{Y}_{s-} \neq 0, \\ 0 & \text{si } \bar{Y}_{s-} = 0. \end{cases} \\ \lambda_s &= \begin{cases} \bar{U}_s^{-1} \left(f_1(s, Y_{s-}^{f_1}, U_s^{f_2}, Z_s^{f_2}) - f_1(s, Y_{s-}^{f_1}, U_s^{f_1}, Z_s^{f_1}) \right) & \text{si } \bar{U}_s \neq 0, \\ 0 & \text{si } \bar{U}_s = 0. \end{cases}\end{aligned}$$

Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $\tilde{Z}^{(i)}$ un processus stochastique à valeurs dans l^2 tel que i ses premières composantes sont égales à celles de Z^{f_2} et son $\mathbb{N}^* \setminus \{1, 2, \dots, i\}$ dernières composantes sont égales à celles de Z^{f_1} . Avec cette notation, nous définissons pour $i \in \mathbb{N}^*$

$$\delta_s^{(i)} = \begin{cases} \left(\bar{Z}_s^{(i)} \right)^{-1} \left(f_1(s, Y_{s-}^{f_1}, U_s^{f_1}, \tilde{Z}_s^{(i)}) - f_1(s, Y_{s-}^{f_1}, U_s^{f_1}, \tilde{Z}_s^{(i-1)}) \right) & \text{si } \bar{Z}_s^{(i)} \neq 0, \\ 0 & \text{si } \bar{Z}_s^{(i)} = 0, \end{cases}$$

il est clair que

$$\langle \delta_s, \bar{Z}_s \rangle = f_1(s, Y_{s-}^{f_1}, U_s^{f_1}, Z_s^{f_2}) - f_1(s, Y_{s-}^{f_1}, U_s^{f_1}, Z_s^{f_1}).$$

Les processus $\{\mu_t \in [0, T]\}$, $\{\lambda_t \in [0, T]\}$ et $\{\delta_t \in [0, T]\}$ sont mesurables, bornés et progressivement adaptés. Maintenant pour $0 \leq s \leq t \leq T$, nous définissons

$$M_t^{H,W} = \int_0^t \lambda_s dW_s + \int_0^t \langle \delta_s, dH_s \rangle,$$

$$\Lambda_{s,t} = \exp \left[\int_s^t (\mu_r dr - d[M^{H,W}]_r^c + dM_r^{H,W}) \right] \prod_{s \leq r \leq t} (1 + \Delta M_r^{H,W}) \exp(-\Delta M_r^{H,W}).$$

En utilisant la formule d'Itô, on peut voir que $\{\Lambda_{s,r} : r \in [s, T]\}$ satisfait l'équation linéaire stochastique suivante :

$$\Lambda_{s,t} = 1 + \int_s^t \Lambda_{s,r-} dM_r^{H,W} + \int_s^t \Lambda_{s,r} \mu_s dr, \quad (2.4)$$

On a

$$\begin{aligned} Y_s^{f_2} - Y_s^{f_1} &= \xi_2 - \xi_1 + \int_t^T \left(f_2 \left(s, Y_{s-}^{f_2}, U_s^{f_2}, Z_s^{f_2} \right) - f_1 \left(s, Y_{s-}^{f_1}, U_s^{f_1}, Z_s^{f_1} \right) \right) ds \\ &\quad - \int_t^T (U_s^{f_2} - U_s^{f_1}) dW_s - \sum_{i=1}^{\infty} \int_t^T \left(Z_s^{f_2(i)} - Z_s^{f_1(i)} \right) dH_s^{(i)}. \end{aligned}$$

on ajoute et on soustrait $f_1 s, Y_{s-}^{f_1}, U_s^{f_2}, Z_s^{f_2}$, on trouve

$$\begin{aligned} \bar{Y}_t &= \bar{\xi} + \int_t^T \bar{f}_s + \int_t^T \left[f_1 \left(s, Y_{s-}^{f_2}, U_s^{f_2}, Z_s^{f_2} \right) - f_1 \left(s, Y_{s-}^{f_1}, U_s^{f_1}, Z_s^{f_1} \right) \right] ds \\ &\quad - \int_t^T \bar{U}_s dW_s - \sum_{i=1}^{\infty} \int_t^T \bar{Z}_s dH_s \\ &= \bar{\xi} + \int_t^T \bar{f}_s + \int_t^T (\mu_s \bar{Y}_{s-} + \lambda_s \bar{U}_s + \delta_s \bar{Z}_s) ds - \int_t^T \bar{U}_s dW_s - \sum_{i=1}^{\infty} \int_t^T \bar{Z}_s dH_s. \end{aligned}$$

on applique la formule d'Itô pour $\Lambda_{s,t} \bar{Y}_t$ et équation (??), on obtient :

$$\begin{aligned} \Lambda_{s,t} \bar{Y}_t &= \Lambda_{s,s} \bar{Y}_s + \int_r^T \Lambda_{s,r} d\bar{Y}_r + \int_r^T d\Lambda_{s,r} \bar{Y}_r + \int_r^T d[\Lambda_{s,r}, \bar{Y}_r]. \\ \bar{Y}_s &= \Lambda_{s,t} \bar{Y}_t - \int_r^T \Lambda_{s,r} d\bar{Y}_r - \int_r^T d\Lambda_{s,r} \bar{Y}_r - \int_r^T d[\Lambda_{s,r}, \bar{Y}_r]. \end{aligned}$$

on remplace $d\bar{Y}_r$ et $d\Lambda_{s,r}$ dans la dernier égalité on trouver :

$$\begin{aligned}
 \bar{Y}_s &= \Lambda_{s,t}\bar{Y}_t - \int_r^T \Lambda_{s,r} (\mu_r \bar{Y}_{r-} + \lambda_r \bar{U}_r + \delta_r \bar{Z}_r) dr + \int_t^T \bar{f}_s \Lambda_{s,r} - \int_t^T \bar{U}_s \Lambda_{s,r} dW_s \\
 &\quad - \sum_{i=1}^{\infty} \int_t^T \bar{Z}_s \Lambda_{s,r} dH_s - \int_r^T \bar{Y}_r (\Lambda d_{s,r} M_r^{H,W} + \Lambda_{s,r} \mu_s dr) - \int_r^T d[\Lambda_{s,r}, \bar{Y}_r] . \\
 &= \Lambda_{s,t}\bar{Y}_t - \int_r^T \Lambda_{s,r} (\mu_r \bar{Y}_{r-} + \lambda_r \bar{U}_r + \delta_r \bar{Z}_r) dr + \int_t^T \bar{f}_s \Lambda_{s,r} dr - \int_t^T \bar{U}_s \Lambda_{s,r} dW_s \\
 &\quad - \sum_{i=1}^{\infty} \int_t^T \bar{Z}_s \Lambda_{s,r} dH_s - \int_t^T \bar{Y}_r (\Lambda_{s,r} (\lambda_s dW_s + \delta_s dH_s) + \Lambda_{s,r} \mu_r dr) - \int_t^T d[\Lambda_{s,r}, \bar{Y}_r] .
 \end{aligned}$$

Alors, on obtient

$$\begin{aligned}
 \bar{Y}_s &= \Lambda_{s,t}\bar{Y}_t - \int_t^T \Lambda_{s,r} (\bar{U}_s + \lambda_s \bar{Y}_r) dW_s - \int_t^T \Lambda_{s,r} (\bar{Z}_s + \delta_s \bar{Y}_r) dH_r + \int_t^T \bar{f}_s \Lambda_{s,r} dr \\
 &\quad + \int_t^T \Lambda_{s,r} (\lambda_r \bar{U}_r + \delta_r \bar{Z}_r) dr - \int_t^T d[\Lambda_{s,r}, \bar{Y}_r] . \\
 &= \Lambda_{s,t}\bar{Y}_t + \int_t^T \bar{f}_s \Lambda_{s,r} dr + \int_t^T \Lambda_{s,r} (\lambda_r \bar{U}_r + \delta_r \bar{Z}_r) dr \\
 &\quad - \int_t^T \Lambda_{s,r} (\bar{U}_s + \lambda_s \bar{Y}_r) dW_s - \int_t^T \Lambda_{s,r} (\bar{Z}_s + \delta_s \bar{Y}_r) dH_r \\
 &\quad - \sum_{i=1}^{\infty} \int_t^T \bar{Z}_s^{(i)} \Lambda_{s,r} \delta_r (d[H^{(i)}]_r - d\langle H^{(i)} \rangle_r) .
 \end{aligned}$$

Puisque les trois derniers termes du côté droit de l'équation ci-dessus sont des martingales, nous en déduisons que :

$$\bar{Y}_s = \mathbb{E} \left(\Lambda_{s,t}\bar{Y}_t + \int_t^T \bar{f}_s \Lambda_{s,r} dr \middle| \mathcal{F}_s \right) \geq 0.$$

Ainsi, le résultat suit, pour $t = T$, par la positivité de $\bar{\xi}$ et $\bar{f}$. ■

Chapitre 3

Etude d'EDSR dirigée par processus de Lévy sous hypothèses de Lipschitz local

Ce chapitre a pour objectif principal d'établir un théorème d'existence et d'unicité des solutions pour les équations Différentielles Stochastiques Rétrogrades (EDSR) dont le générateur vérifie une condition de Lipschitz locale. Plus précisément, nous travaillerons sous les hypothèses suivantes :

H.1) f est continue en (y, u, z) pour presque tout (t, ω) .

H.2) Il existe $C > 0$ et $0 \leq \alpha \leq 1$ tels que

$$|f(t, \omega, u, y, z)| \leq C(1 + |y|^\alpha + |u|^\alpha + |z|^\alpha).$$

H.3) Pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe une constante L_N telle que

$$|f(t, \omega, u, y, z) - f(t, \omega, u', y', z')| \leq L_N(|y - y'| + |u - u'| + \|z - z'\|), \quad \mathbb{P} - p, s..$$

pour tous y, y', u, u', z, z' tels que

$$|y| \leq N, \quad |y'| \leq N, \quad |u| \leq N, \quad |u'| \leq N, \quad \|z\| \leq N, \quad \|z'\| \leq N.$$

Remarque 3.1 Lorsque les hypothèses **H.1)** et **H.2)** sont vérifiées, nous pouvons définir une famille de semi-normes $(\varphi_n(f))_n$ par

$$(\varphi_n(f))_n = \left(\mathbb{E} \int_0^T \sup_{|y|, |u|, \|z\| \leq n} |f(s, u, y, z)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Remarque 3.2 Nous désignons par localement Lipschitz l'ensemble des processus f satisfaisant **H.1)–H.2)** et qui sont localement Lipschitz, c'est-à-dire satisfaisant également **H.3)** par rapport à (y, u, z) .

α –Localement Lipschitz désigne le sous-ensemble des processus qui sont localement Lipschitz et qui vérifient **H.2)**.

3.1 Existence, unicité et la stabilité des solutions d'EDSRs sous des hypothèses localement Lipschitziennes

Dans cette section, nous présentons les principaux résultats de ce chapitre, à savoir l'existence et l'unicité des solutions d'EDSR sous des hypothèses localement Lipschitziennes. Ces résultats s'articulent autour de trois théorèmes clés :

- Un théorème d'existence et d'unicité pour les EDSR à coefficients localement Lipschitziens.
- Une estimation a priori des solutions.
- Une propriété de stabilité sous perturbations des paramètres.

Théorème 3.1 (*Existence et unicité*) Soit ξ une variable aléatoire carré intégrable et sous les hypothèses **H.1)**, **H.2)** et **H.3)**, l'équation (2.1) admet une solution unique si $L_N \leq L + \sqrt{\log(N)}$ avec L est une constante positive.

Nous donnons maintenant un résultat de stabilité de la solution par rapport aux données (f, ξ) . Grossièrement, si f_n converge vers f dans la métrique définie par la famille de seminormes (φ_n) et si ξ_n converge vers ξ dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$, alors (Y^n, U^n, Z^n) converge vers (Y, U, Z) en espace ε .

Soit (f_n) une suite des fonctions qui sont $\mathcal{F}_t$ -progressivement mesurables pour chaque n . Soit $(\xi_n)_{n \geq 1}$ une suite des variables aléatoires qui sont $\mathcal{F}_T$ -mesurables pour chaque n et telle que $\mathbb{E}|\xi_n|^2 < \infty$. Nous supposons que pour chaque n , l'équation (2.1) associée aux données (f_n, ξ_n) a une solution (pas nécessairement unique). Toute solution de l'équation (2.1) associée aux données (f_n, ξ_n) sera notée (Y^{f_n}, Z^{f_n}) .

Nous supposons aussi les hypothèses suivantes :

H.4) Pour tout $N, \varphi_N(f_n, f) \rightarrow 0$, lorsque $n \rightarrow \infty$.

H.5) $\mathbb{E}|\xi_n - \xi|^2 \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

H.6) Il existe une constante $C > 0$ tels que :

$$\sup_n |f_n(t, \omega, y, u, z)| \leq C(1 + |y|^\alpha + |u|^\alpha + |z|^\alpha), \mathbb{P}-p.s..$$

Théorème 3.2 (Stabilité) Supposons que f et ξ soient vérifier les hypothèses de (3.1) et que la suite (f_n, ξ_n) vérifie les hypothèses **H.4)**, **H.5)** et **H.6)**. Alors, on a la convergence suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} |Y_t^{f_n} - Y_t|^2 + \mathbb{E} \int_0^T |U_s^{f_n} - U_s|^2 ds + \mathbb{E} \int_0^T \|Z_s^{f_n} - Z_s\|_{l^2}^2 ds \right) = 0.$$

Pour démontrer les deux theoremes (3.1) et (3.2), nous introduisons les deux lemmes suivants :

Lemme 3.1 Soient ξ^1, ξ^2 deux variables aléatoires de carré intégrable de dimension d et $\mathcal{F}_T$ -mesurables. Considérons deux fonctions f_1 et f_2 satisfaisant les conditions **H.1)** et **H.2)**. Soit $(Y^{f_1}, U^{f_1}, Z^{f_1})$ et $(Y^{f_2}, U^{f_2}, Z^{f_2})$ les solutions respectives des équations différentielles stochastiques rétrogrades associées à (f_1, ξ^1) et (f_2, ξ^2) .

Dans ce cadre, pour toute fonction f localement lipschitz et tout entier $N > 1$, les inégalités

suivantes sont vérifiées :

$$\mathbb{E} \int_0^T |U_s^{f_1} - U_s^{f_2}|^2 ds + \mathbb{E} \int_0^T \|Z_s^{f_1} - Z_s^{f_2}\|^2 ds \leq K \left\{ \mathbb{E} |\xi^1 - \xi^2|^2 + \left[\mathbb{E} \int_0^T |Y_s^{f_1} - Y_s^{f_2}|^2 ds \right]^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(|Y_s^{f_1} - Y_s^{f_2}|^2 \right) &\leq K_1 \left[\mathbb{E} \left(|\xi^1 - \xi^2|^2 \right) + \varphi_N^2(f_1 - f) + \varphi_N^2(f_2 - f) + \frac{K}{(2L_N + 2L_N^2) N^{2(1-\alpha)}} \right] \\ &\quad \times \exp \left((2L_N + 2L_N^2) (T - s) \right), \end{aligned}$$

où K est une constante qui dépend de C , $\mathbb{E} |\xi^1|^2$, $\mathbb{E} |\xi^2|^2$, et K_1 est une constante universelle.

Preuve. Nous allons prouver la première inégalité, en utilisant la formule d'Itô pour $|Y_t^{f_1} - Y_t^{f_2}|^2$, on obtient :

$$\begin{aligned} |Y_t^{f_1} - Y_t^{f_2}|^2 &= (\xi^1 - \xi^2)^2 + 2 \int_t^T \left(f_1 \left(s, Y_{s-}^{f_1}, U_s^{f_1}, Z_s^{f_1} \right) - f_2 \left(s, Y_{s-}^{f_2}, U_s^{f_2}, Z_s^{f_2} \right) \right) \\ &\quad \times \left(Y_t^{f_1} - Y_t^{f_2} \right) ds - 2 \int_t^T \left(U_s^{f_1} - U_s^{f_2} \right) \left(Y_t^{f_1} - Y_t^{f_2} \right) dW_s \\ &\quad - 2 \sum_{i=1}^{\infty} \int_t^T \left(Y_t^{f_1} - Y_t^{f_2} \right) \left(Z_s^{f_1(i)} - Z_s^{f_2(i)} \right) dH_s^{(i)} \\ &\quad - \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^t \left(Z_s^{f_1(i)} - Z_s^{f_2(i)} \right) \left(Z_s^{f_1(j)} - Z_s^{f_2(j)} \right) \left(d[H^{(i)}, H^{(j)}]_s - \langle H^{(i)}, H_s^{(j)} \rangle_s \right) \\ &\quad - \int_t^T |U_s^{f_1} - U_s^{f_2}|^2 ds - \sum_{i=1}^{\infty} \int_t^T \|Z_s^{f_1(i)} - Z_s^{f_2(i)}\|_{l^2}^2 ds. \end{aligned}$$

par passage à espérance mathématique on obtient :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \int_t^T |U_s^{f_1} - U_s^{f_2}|^2 ds - \sum_{i=1}^{\infty} \int_t^T \mathbb{E} \|Z_s^{f_1(i)} - Z_s^{f_2(i)}\|_{l^2}^2 ds \\ &\leq \|\xi^1 - \xi^2\|_{L^2(\mathcal{F}_T)}^2 + \int_t^T \left[\mathbb{E} \left| f_1 \left(s, Y_{s-}^{f_1}, U_s^{f_1}, Z_s^{f_1} \right) - f_2 \left(s, Y_{s-}^{f_2}, U_s^{f_2}, Z_s^{f_2} \right) \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \times \left[\mathbb{E} \int_t^T |Y_{s-}^{f_1} - Y_{s-}^{f_2}|^2 ds \right] \\ &\text{car } \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^t \left(Z_s^{f_1(i)} - Z_s^{f_2(i)} \right) \left(Z_s^{f_1(j)} - Z_s^{f_2(j)} \right) \left(d[H^{(i)}, H^{(j)}]_s - \langle H^{(i)}, H_s^{(j)} \rangle_s \right), \\ &\sum_{i=1}^{\infty} \int_t^T \left(Y_t^{f_1} - Y_t^{f_2} \right) \left(Z_s^{f_1(i)} - Z_s^{f_2(i)} \right) dH_s^{(i)} \text{ et } \int_t^T \left(U_s^{f_1} - U_s^{f_2} \right) \left(Y_t^{f_1} - Y_t^{f_2} \right) dW_s \text{ sont des mar-} \end{aligned}$$

tingales.

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on trouve estimation suivante

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \int_t^T |U_s^{f_1} - U_s^{f_2}|^2 ds - \sum_{i=1}^{\infty} \int_t^T \mathbb{E} \left\| Z_s^{f_1(i)} - Z_s^{f_2(i)} \right\|_{l^2}^2 ds \\ & \leq \|\xi^1 - \xi^2\|_{\mathbb{L}^2(\mathcal{F}_T)}^2 + K \left(\left\| Y_{s-}^{f_1} - Y_s^{f_2} \right\|_{S^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

cette dernière inégalité permet nous d'écrire

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \int_t^T |U_s^{f_1} - U_s^{f_2}|^2 ds - \sum_{i=1}^{\infty} \int_t^T \mathbb{E} \left\| Z_s^{f_1(i)} - Z_s^{f_2(i)} \right\|_{l^2}^2 ds \\ & \leq K_{(\xi_1, \xi_2)} \left\{ \|\xi^1 - \xi^2\|_{\mathbb{L}^2(\mathcal{F}_T)}^2 + \left(\left\| Y_{s-}^{f_1} - Y_s^{f_2} \right\|_{S^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \end{aligned}$$

Nous prouvons ensuite la deuxième inégalité. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire dans $\mathbb{R}^d$. On pose :

$$\begin{cases} \bar{Y}_s = Y_{s-}^{f_1} - Y_s^{f_2}, & \bar{U}_s = U_s^{f_1} - U_s^{f_2}, & \bar{Z}_s = Z_s^{f_1} - Z_s^{f_2} \\ \text{et } \bar{f}_s = f_1(s, Y_{s-}^{f_1}, U_s^{f_1}, Z_s^{f_1}) - f_2(s, Y_{s-}^{f_2}, U_s^{f_2}, Z_s^{f_2}). \end{cases}$$

D'après la formule d'Itô, on trouve

$$\begin{aligned} & |\bar{Y}_s|^2 + \int_t^T |\bar{U}_s|^2 ds + \int_t^T \|\bar{Z}_s\|_{l^2}^2 ds \\ & = (\xi^1 - \xi^2)^2 + 2 \int_t^T \bar{f}_s \bar{Y}_{s-} ds - 2 \int_t^T \bar{U}_s \bar{Y}_{s-} dW_s \\ & - 2 \sum_{i=1}^{\infty} \int_t^T \bar{Y}_{s-} \bar{Z}_s dH_s^{(i)} - \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \int_t^T \bar{Z}_s^{(i)} \bar{Z}_s^{(j)} (d[H^{(i)}, H^{(j)}]_s - \langle H^{(i)}, H_s^{(j)} \rangle_s). \end{aligned}$$

En exploitant le caractère martingale des trois intégrales stochastiques de côté à droite de l'égalité, et par propriété fondamentale des martingales (dont l'espérance est nulle), nous obtenons

$$\mathbb{E} |\bar{Y}_s|^2 + \mathbb{E} \int_t^T |\bar{U}_s|^2 ds + \mathbb{E} \int_t^T \|\bar{Z}_s\|_{l^2}^2 ds = \mathbb{E} |\xi^1 - \xi^2|^2 + 2\mathbb{E} \int_t^T \langle \bar{f}_s, \bar{Y}_{s-} \rangle ds.$$

Soient β et γ des nombres strictement positifs. Pour $N > 1$ donné, notons L_N le constant Lipschitz de la fonction f dans la boule $B(0, N)$, Soit

$$A^N = \left\{ (s, \omega) : \left| Y_{s-}^{f_1} \right|^2 + \left| U_s^{f_2} \right|^2 + \left\| Z_s^{f_1} \right\|^2 + \left| U_s^{f_1} \right|^2 + \left| Y_{s-}^{f_2} \right|^2 + \left\| Z_s^{f_2} \right\|^2 \geq N^2 \right\}.$$

et $A^{N,c} = \Omega \setminus A^N$ et dénote par $\mathbb{I}_A$ la fonction indicatrice de l'ensemble A . Nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{E} |\bar{Y}_s|^2 + \mathbb{E} \int_t^T |\bar{U}_s|^2 ds + \mathbb{E} \int_t^T \|\bar{Z}_s\|^2 ds &= \mathbb{E} |\xi^1 - \xi^2|^2 + 2\mathbb{E} \int_t^T \langle \bar{f}_s, \bar{Y}_{s-} \rangle (\mathbb{I}_{A^N} + \mathbb{I}_{A^{N,c}}) ds \\ &= \mathbb{E} |\xi^1 - \xi^2|^2 + I_1 + I_2 + I_3 + I_4, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} I_1 &= 2\mathbb{E} \int_t^T \langle \bar{f}_s, \bar{Y}_{s-} \rangle \mathbb{I}_{A^N} ds, \\ I_2 &= 2\mathbb{E} \int_t^T \left\langle \bar{Y}_{s-}, f_1 \left(s, Y_{s-}^{f_1}, U_s^{f_1}, Z_s^{f_1} \right) - f \left(s, Y_{s-}^{f_1}, U_s^{f_1}, Z_s^{f_1} \right) \right\rangle \mathbb{I}_{A^{N,c}} ds, \\ I_3 &= 2\mathbb{E} \int_t^T \left\langle \bar{Y}_{s-}, f_1 \left(s, Y_{s-}^{f_1}, U_s^{f_1}, Z_s^{f_1} \right) - f \left(s, Y_{s-}^{f_2}, U_s^{f_2}, Z_s^{f_2} \right) \right\rangle \mathbb{I}_{A^{N,c}} ds, \\ I_4 &= 2\mathbb{E} \int_t^T \left\langle \bar{Y}_{s-}, f \left(s, Y_{s-}^{f_2}, U_s^{f_2}, Z_s^{f_2} \right) - f_2 \left(s, Y_{s-}^{f_2}, U_s^{f_2}, Z_s^{f_2} \right) \right\rangle \mathbb{I}_{A^{N,c}} ds, \end{aligned}$$

Il n'est pas difficile de vérifier que

$$\begin{cases} I_2 \leq 2\mathbb{E} \int_t^T |\bar{Y}_{s-}|^2 \mathbb{I}_{A^{N,c}} ds + \varphi_N^2 (f_1 - f), \\ \text{et} \\ I_4 \leq 2\mathbb{E} \int_t^T |\bar{Y}_{s-}|^2 \mathbb{I}_{A^{N,c}} ds + \varphi_N^2 (f - f_2). \end{cases}$$

Puisque f est L_N -Lipschitz dans la boule $B(0, N)$, on obtient par inégalité $2abL_N \leq \frac{\gamma^2}{2}a^2 + 2\frac{b^2L_N^2}{\gamma^2}$ l'estimation suivante

$$I_3 \leq (2L_N + \gamma^2) \mathbb{E} \int_t^T |\bar{Y}_{s-}|^2 \mathbb{I}_{A^{N,c}} ds + \frac{2L_N^2}{\gamma^2} \mathbb{E} \int_t^T |\bar{U}_s|^2 ds + \frac{2L_N^2}{\gamma^2} \mathbb{E} \int_t^T \|\bar{Z}_s\|^2 ds.$$

Pour estimer I_1 , nous utilisons l'inégalité de Hölder $2ab \leq \beta^2 a^2 + \frac{b^2}{\beta^2}$ et le fait que

$$\mathbb{I}_{A^N} \leq \frac{|\overline{Y}_{s-}^{f_1}|^2 + |\overline{U}_s^{f_1}|^2 + \|\overline{Z}_s^{f_1}\|^2 + |\overline{Y}_{s-}^{f_2}|^2 + |\overline{U}_s^{f_2}|^2 + \|\overline{Z}_s^{f_2}\|^2}{N^2}. \quad (3.1)$$

nous obtenons

$$I_1 \leq \beta^2 \mathbb{E} \int_t^T |\overline{Y}_{s-}|^2 \mathbb{I}_{A^N} ds + \frac{1}{\beta^2} \mathbb{E} \int_t^T |\overline{f}_s|^2 \mathbb{I}_{A^N} ds.$$

alors par hypothèse **H.2**), l'inégalité $(a - b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ et l'inégalité $(a + b + s + d)^2 \leq 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$, on obtient

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \beta^2 \mathbb{E} \int_t^T |\overline{Y}_{s-}|^2 \mathbb{I}_{A^N} ds + \frac{8K^2}{\beta^2} \mathbb{E} \int_t^T \left(1 + |\overline{Y}_{s-}^{f_2}|^{2\alpha} + |\overline{U}_s^{f_2}|^{2\alpha} + \|\overline{Z}_s^{f_2}\|^{2\alpha}\right) \mathbb{I}_{A^N} ds \\ &\quad + \frac{8K^2}{\beta^2} \mathbb{E} \int_t^T \left(1 + |\overline{Y}_{s-}^{f_1}|^{2\alpha} + |\overline{U}_s^{f_1}|^{2\alpha} + \|\overline{Z}_s^{f_1}\|^{2\alpha}\right) \mathbb{I}_{A^N} ds. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de holder et (3.1), on trouve

$$I_1 \leq \beta^2 \mathbb{E} \int_t^T |\overline{Y}_{s-}|^2 \mathbb{I}_{A^N} ds + \frac{K}{\beta^2 N^{2(1-\alpha)}}.$$

Si nous choisissons $\beta^2 = 2L_N^2 + 2L_N$, $\gamma^2 = 2L_N^2$ et nous utilisons les estimations ci-dessus, nous obtenons

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} |\overline{Y}_s|^2 + \mathbb{E} \int_t^T |\overline{U}_s|^2 ds + \mathbb{E} \int_t^T \|\overline{Z}_s\|^2 ds \\ &\leq \mathbb{E} |\xi^1 - \xi^2|^2 + (2L_N^2 + 2L_N + 2) \mathbb{E} \int_t^T |\overline{Y}_{s-}|^2 \mathbb{I}_{A^{N,c}} ds \\ &\quad + (2L_N^2 + 2L_N) \mathbb{E} \int_t^T |\overline{Y}_{s-}|^2 \mathbb{I}_{A^N} ds + \varphi_N^2(f_1 - f) + \varphi_N^2(f - f_2) \\ &\quad + \frac{K}{\beta^2 N^{2(1-\alpha)}}. \end{aligned}$$

En utilisant le lemme de Grönwall, nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathbb{E} |\overline{Y}_s|^2 &\leq \left[\mathbb{E} |\xi^1 - \xi^2|^2 + \frac{K}{\beta^2 N^{2(1-\alpha)}} \right] \exp \left([2L_N^2 + 2L_N] (T - t) + 2 \right) \\ &\quad + [\varphi_N^2 (f_1 - f) + \varphi_N^2 (f - f_2)] \exp \left([2L_N^2 + 2L_N] (T - t) + 2 \right). \end{aligned}$$

La preuve de lemme (3.1) est terminer. ■

Lemme 3.2 Soit f une fonction qui satisfait **H.1)**, **H.2)** et **H.3)**. Alors, il existe une suite des fonctions f_n telle que,

(i) – **a)** Pour chaque n , f_n est Lipschitzienne et satisfait **H.2)**.

(i) – **b)** $\sup_n |f_n(t, \omega, u, y, z)| \leq |f(t, \omega, u, y, z)| \leq C(1 + |y|^\alpha + |u|^\alpha + |z|^\alpha)$, $\mathbb{P} - p, s., p.p.t \in [0; T]$.

(ii) Pour tout N , $\varphi_N(f_n - f) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Preuve. Soit ϕ_n une suite de fonctions lisses avec support dans la boule $B(0, n+1)$ et telle que $\phi_n = 1$ dans la boule $B(0, n)$. Il n'est pas difficile de voir que la suite f_n de fonctions tronquées, définie par $f_n = f_{\phi_n}$, satisfait toutes les propriétés citées dans lemme (3.2). ■

Lemme 3.3 Soient f et ξ satisfait les même hypothèse de Théoreme (3.1). Soit (f_n) la séquence de fonctions associée à f par le lemme (3.2) et note par $(Y^{f_n}, U^{f_n}, Z^{f_n})$ la solution de l'équation associe à (f_n, ξ) , alors

(i) **a)** $\sup_n \mathbb{E} \left| Y_t^{f_n} \right|^2 \leq [\mathbb{E} |\xi|^2 + K] \exp(K) = K_1$.

b) $\sup_n \mathbb{E} \left(\int_0^T |U_s^{f_n}|^2 ds + \int_0^T \|Z_s^{f_n}\|^2 ds \right) \leq (\mathbb{E} |\xi|^2 + K) (2 + K \exp(K)) = K_2$.

(ii) Il existe un processus $(Y, U, Z) \in \varepsilon$ tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(Y^{f_n}, U^{f_n}, Z^{f_n}) - (Y, U, Z)\|_\varepsilon = 0.$$

Preuve. Premièrement, nous prouvons la partie (i), par la formule d'Ito appliqué à $|Y_t^{f_n}|^2$ et par passage a espérance mathématique, on trouver

$$\mathbb{E} \left| Y_t^{f_n} \right|^2 \leq \mathbb{E} \left(|\xi|^2 + \int_t^T |f_n(s, Y_s^{f_n}, U_s^{f_n}, Z_s^{f_n})|^2 ds + \int_t^T |Y_s^{f_n}|^2 ds \right).$$

Par la condition **H.2**) pour f_n , nous obtenons

$$\mathbb{E} \left| \int_t^T f_n(s, Y_s^{f_n}, U_s^{f_n}, Z_s^{f_n}) ds \right|^2 \leq K \mathbb{E} \left(1 + |Y_{s-}^{f_n}|^2 + |U_s^{f_n}|^2 + \|Z_s^{f_n}\|^2 \right) ds,$$

donc

$$\mathbb{E} |Y_t^{f_n}|^2 \leq K \mathbb{E} (|\xi|^2 + \left(1 + |Y_{s-}^{f_n}|^2 + |U_s^{f_n}|^2 + \|Z_s^{f_n}\|^2 \right) ds + \int_t^T |Y_s^{f_n}|^2 ds).$$

en utilisant inégalité Gronwall's stochastique, on trouve :

$$\mathbb{E} |Y_t^{f_n}|^2 \leq (\mathbb{E} |\xi|^2 + K) \exp(K).$$

ceci implique que

$$\sup_n \mathbb{E} |Y_t^{f_n}|^2 \leq K_1.$$

La première partie (i) – a) est prouvé.

maintenant nous prouvons la deuxième partie (i) – b), reprenant l'égalité d'Itô et prenant l'espérance, en utilisant (i) – a) et en résolvant, on obtient la deuxième partie (i) – b).

Pour prouvons (ii), supposons que $L_N \leq \sqrt{\frac{(1-\alpha)}{2(T-t)} \log(N)}$. En appliquant le lemme (3.1) à $(Y^{f_1}, U^{f_1}, Z^{f_1}, f_1, \xi^1) = (Y^{f_n}, U^{f_n}, Z^{f_n}, f_n, \xi) = (Y^{f_2}, U^{f_2}, Z^{f_2}, f_2, \xi^2) = (Y^{f_m}, U^{f_m}, Z^{f_m}, f_m, \xi)$ et en passant ensuite aux limites successivement sur n, m, N , on obtient le lemme (3.3).

Supposons maintenant que $L_N \leq \sqrt{\log(N)}$. Soit δ un nombre strictement positif tel que $\delta < \frac{(1-\alpha)}{2}$. Soit $[t_i, t_{i+1}]$ une subdivision de $[0, T]$ telle que $|t_{i+1} - t_i| \leq \delta$. En appliquant le lemme (3.1) à tous les sous-intervalles $[t_i, t_{i+1}]$, on obtient le lemme (3.3).

■

Preuve. (Théorème (3.1) et Théorème (3.2)) : L'unicité découle du lemme (3.1) en laissant $f_1 = f_2 = f$ et $\xi^1 = \xi^2 = \xi$. Il rest à prouver l'existence de solutions. Par lemme (3.3), il existe $(Y, U, Z) \in \varepsilon$ tels que $\lim \| (Y^{f_n}, U^{f_n}, Z^{f_n}) - (Y, U, Z) \|_\varepsilon = 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

On a alors avec théoreme de convergence dominée le résultat suivante :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq s \leq T} |Y_s^{f_n} - Y_s|^2 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \int_0^T |U_s^{f_n} - U_s|^2 ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \int_0^T \|Z_s^{f_n} - Z_s\|_{l^2}^2 ds = 0.$$

Il reste à prouver que $\int_t^T f_n(s, Y_{s-}^{f_n}, U_s^{f_n}, Z_s^{f_n}) ds$ converge vers $\int_t^T f(s, Y, U_s, Z_s) ds$ en probabilité. Soit $N > 1$ et dénote par L_N la constane de Lipschitz de f dans la boule $B(0, N)$. Nous mettons $A^N = \left\{ (s, \omega) : |Y_{s-}^{f_n}| + |U_s^{f_n}| + \|Z_s^{f_n}\| + |U_s| + |Y_{s-}| + \|Z_s\| \geq N \right\}$ et $A_n^{N,c} = \Omega \setminus A_n^N$. Puisque f est L_N -localement Lipschitz, nous utilisons l'inégalité triangulaire et l'inégalité de jensen pour obtenir

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left| \int_t^T \bar{f}_s^n ds \right| &= \mathbb{E} \left| \int_t^T \left(f_n(s, Y_{s-}^{f_n}, U_s^{f_n}, Z_s^{f_n}) - f(s, Y_{s-}, U_s, Z_s) \right) ds \right| \\ &\leq \mathbb{E} \int_t^T \left| f_n(s, Y_{s-}^{f_n}, U_s^{f_n}, Z_s^{f_n}) - f(s, Y_{s-}^{f_n}, U_s^{f_n}, Z_s^{f_n}) \right| ds \\ &\quad + \mathbb{E} \int_0^T \left| f(s, Y_{s-}^{f_n}, U_s^{f_n}, Z_s^{f_n}) - f(s, Y_{s-}, U_s, Z_s) \right| ds. \\ &\leq \mathbb{E} \int_0^T \sup_{|y|, |u|, \|z\| \leq N} |f_n(s, y, u, z) - f(s, y, u, z)| ds \\ &\quad + 2K \sup_n \mathbb{E} \int_0^T \left(1 + |Y_{s-}^{f_n}|^\alpha + |U_s^{f_n}|^\alpha + \|Z_s^{f_n}\|^\alpha \mathbf{1}_{A_n^{N,c}} ds \right) \\ &\quad + L_N \left(\mathbb{E} \int_0^T |\bar{Y}_{s-}^{f_n}| ds + \mathbb{E} \int_0^T |\bar{U}_{s-}^{f_n}| ds + \mathbb{E} \int_0^T \|\bar{Z}_{s-}^{f_n}\| ds \right) \\ &\quad + K \sup_n \mathbb{E} \int_0^T \left(2 + |Y_{s-}^{f_n}|^\alpha + |U_s^{f_n}|^\alpha + \|Z_s^{f_n}\|^\alpha + |Y_{s-}|^\alpha + |U_s|^\alpha + \|Z_s\|^\alpha \right) \mathbf{1}_{A_n^{N,c}} ds. \end{aligned}$$

Puisque $|x|^\alpha \leq 1 + |x|$ pour chaque $\alpha \in [0, 1]$, nous utilisons successivement le lemme (3.3) (i) – (b), l'inégalité de Schwarz, l'inégalité de Tchebychev, le lemme (3.3) (i) et le lemme de Fatou pour obtenir

$$\mathbb{E} \left| \int_t^T \bar{f}_s^n ds \right| \leq I_1(n) + L_N I_2(n) + \frac{24K}{N} (1 + 2(K_1 + K_2)),$$

où K_1, K_2 désignent les deux constantes définies dans le lemme (3.3) (ii), où

$$I_1(n) = \mathbb{E} \int_0^T \sup_{|y|, |u|, \|z\| \leq N} |f_n(s, y, u, z) - f(s, y, u, z)| ds.$$

$$I_2(n) = \mathbb{E} \int_0^T |\bar{Y}_{s-}^{f_n}| ds + \mathbb{E} \int_0^T |\bar{U}_s^{f_n}| ds + \mathbb{E} \int_0^T \|\bar{Z}_{s-}^{f_n}\| ds.$$

le lemme (3.3) (ii) montre que $\lim_{n \rightarrow \infty} I_1(n) = 0$. Nous allons prouver que $\lim_{n \rightarrow \infty} I_2(n) = 0$.

D'après le lemme (3.3), nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \int_0^T (|\bar{U}_s^n| + \|\bar{Z}_s^n\|) ds = 0.$$

Nous utilisons le lemme (3.3), le lemme de Fatou et le théorème de convergence dominée pour montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \int_0^T |\bar{Y}_{s-}^{f_n}| ds = 0$ ce qui montre que l'équation (2.1) a au moins une solution. Le théorème (3.1) est prouvé. Finalement nous obtenons le théorème (3.2) par une application direct du lemme (3.1) à $(Y^{f_1}, U^{f_1}, Z^{f_1}, f_1, \xi^1) = (Y, U, Z, f, \xi)$, $(Y^{f_2}, U^{f_2}, Z^{f_2}, f_2, \xi^2) = (Y^{f_n}, U^{f_n}, Z^{f_n}, f_n, \xi^n)$ et en passant à la limites en n et N , nous obtenons le resultat demandé. ■

Conclusion

Dans ce travail, nous étudions les équations différentielles stochastiques rétrogrades à coefficient localement lipschitzien et donnée terminale ξ de carré intégrable. Notre analyse porte sur trois aspects fondamentaux :

- 1. Existence et unicité :** Nous démontrons que lorsque le coefficient f est localement lipschitzien en (y, u, z) avec une constante de Lipschitz L_N dans la boule $B(0, N)$ vérifiant $L_N \leq L + \sqrt{\log(N)}$, l'équation (2.1) admet une solution unique, et aussi comme une étape intermédiaire nous étudions l'existence, l'unicité et la comparaison des solutions de ces équations sous la condition de Lipschitz.
- 2. Stabilité des solutions :** La stabilité des solutions par rapport les donnée (f, ξ) est établie sous ces mêmes conditions.

Pour cela en utilisant des outils d'analyse stochastique tels que la formule d'Itô et l'isometrie pour les intégrales stochastiques.

Bibliographie

- [1] Bahlali, K. (2001). Backward stochastic differential equations with locally Lipschitz coefficient. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics*, 333(5), 481-486.
- [2] Bahlali, K. (2002). Existence and uniqueness of solutions for BSDEs with locally Lipschitz coefficient, 169-179.
- [3] Breton, J. C. (2014). Calcul stochastique. M2 mathématiques, Université de Rennes, 1.
- [4] El Karoui, N., Peng, S., & Quenez, M. C. (1997). Backward stochastic differential equations in finance. *Mathematical finance*, 7(1), 1-71.
- [5] Le Gall, J. F. (2013). Mouvement brownien, martingales et calcul stochastique (Vol. 71). Heidelberg, Germany : Springer.
- [6] Le Gall, J. F. (2022). Measure theory, probability, and stochastic processes (Vol. 295). Springer Nature.
- [7] Monique Jeanblanc, Cours de Calcul Stochastique, Master 2IF EVRY, Université d'Évry-Val-d'Essonne, Septembre 2010.
- [8] Nualart, D., & Schoutens, W. (2000). Chaotic and predictable representations for Lévy processes. *Stochastic processes and their applications*, 90(1), 109-122.
- [9] Nualart, D., & Schoutens, W. (2001). Backward stochastic differential equations and Feynman-Kac formula for Lévy processes, with applications in finance.
- [10] Pardoux, E., & Peng, S. (1990). Adapted solution of a backward stochastic differential equation. *Systems & control letters*, 14(1), 55-61.

- [11] Pardoux, E., Peng, S., Rozovskii, B. L., & Sowers, R. B. (1992). Stochastic Partial Differential Equations and Their Applications. Lecture Notes in Control and Inform. Sci, 176, 200-217.
- [12] Pardoux, E., Rascanu, A., Pardoux, E., & Răşcanu, A. (2014). Stochastic differential equations (pp. 135-227). Springer International Publishing.
- [13] Revuz, D., Yor, M. (2005). Continuous Martingales and Brownian Motion. Berlin : Springer.
- [14] Saouli, M. A. (2023). Fractional backward sdes with locally monotone coefficient and application to pdes. Random Operators and Stochastic Equations, 31(1), 25-45.
- [15] Shreve, S. E. (2004). Stochastic calculus for finance II : Continuous-time models (Vol. 11). New York : springer.
- [16] Sondermann, D. (2006). Introduction to Stochastic Calculus for Finance A New Didactic Approach. Springer.

Annex : Quelques outils mathématiques

Théorème 3.3 (L'inégalité de Hölder) L'inégalité de Hölder dit que si $p, q > 1$ tels que

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ alors,

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

Théorème 3.4 (l'inégalité de Cauchy-Schwartz) Soient f et $g \in \mathbb{L}^2([0, T], \mathbb{R})$, alors

$$\int_0^1 |fg| d\mu \leq \left(\int_0^1 |f|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |g|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Lemme 3.4 (L'inégalité de Yöung) Soient a, b deux nombres réels et $p, q > 1$ vérifiant

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors on a

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Lemme 3.5 (Lemme de Gronwall's) g une fonction positive mesurable bornée sur $[0, T]$.

On suppose qu'il existe des constantes $a > 0, b > 0$ telles que pour tout $t \in [0, T]$, on a :

$$g(t) \leq a + b \int_0^t g(s) ds.$$

Alors, $\forall t \in [0, T]$, $g(t) \leq a \exp(bt)$.

Lemme 3.6 (Lemme de Fatou) Soit $(X_t)_{t \geq 1}$ une suite des variable aléatoire réelles, alors

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} X_t dY \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int X_t dY.$$

Théorème 3.5 (Inégalité de Jensen's) Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Pour tout $n \geq 2$ pour tous $x_1, \dots, x_n \in I$, pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$ avec $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, on a

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

Théorème 3.6 (Théorème de convergence dominée) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables sur un espace mesuré $(E, \mathcal{A}, \mu)$, à valeurs réelles ou complexes. On suppose que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f et il existe une fonction intégrable g telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in E, |f_n(x)| \leq g(x)$. Alors f est intégrable et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f| d\mu = 0.$$

Théorème 3.7 (Inégalité de Chebychev) Soit X une variable aléatoire réelle intégrable et $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction croissante positive. Alors pour tout $a > 0$

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{\text{VAR}(X)}{a^2}.$$

الملخص

في هذه المذكرة قمنا بدراسة معادلات تفاضلية عشوائية تراجعية حيث يكون المعامل يحقق شرط ليبشيتز محلياً في كلٍّ من متغيرات الحالة، والشرط النهائي قابلاً للتكامل التربيعي. إذا متلنا L_N بثابت ليبشيتز في الكرة التي نصف قطرها N والذي يحقق

$L_N \leq L + \sqrt{\log(N)}$ فإن المعادلة التي نهدف لدراستها تملك حلاً وحيداً. بالإضافة إلى ذلك، نضمن استقرار الحل في ظل نفس هذه الشروط.

الكلمات المفتاحية: المعادلات التفاضلية العشوائية التراجعية، معامل ليبشيتز محلياً، الوجود والتفرد للحلول، الاستقرار، نظرية المقارنة.

Abstract

In this work we study backward stochastic differential equations where the coefficient is locally Lipschitz in both variables y , u and z , and the terminal condition is square integrable. Denoting L_N as the Lipschitz constant of the coefficient on the ball $B(0, N)$ satisfy $L_N \leq L + \sqrt{\log(N)}$ then our objectif BSDE admits a unique solution. Additionally, we establish the stability of the solution under these same conditions.

Keywords: BSDE; Locally Lipschitz; Existence and uniqueness solutions; Stability; Comparison theorem.

Résumé

Dans ce travail nous étudions les équations différentielles stochastiques rétrogrades où le coefficient est localement lipschitzien pour les deux variables y , u et z , et la condition terminale est de carré intégrable. En notant L_N comme la constante de Lipschitz du coefficient sur la boule $B(0, N)$ si $L_N \leq L + \sqrt{\log(N)}$ satisfait alors notre équation différentielle stochastique rétrograde objective admet une solution unique. De plus, nous établissons la stabilité de la solution dans ces mêmes conditions.

Mots-clés : EDSR; Localement Lipschitz; Existence et unicité; Stabilité; Théorème de comparaison.