



République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ KASDI MERBAH, OUARGLA

FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET DES SCIENCES DE LA

MATIÈRE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme :
MASTER en Mathématiques

Option : Probabilités et Statistiques

par : Azizi Samah

Titre :

Sur le problème de contrôle optimal pour les EDDSPRs linéaires
de type champ moyen

Membres du Comité d'Examen :

Dr. MESSAOUDI Djemaa	UKMO	Président
Dr. BENBRAHIM Radhia	UKMO	Encadreur
Dr. ARBIA Hanane	UKMO	Examineur

Mai 2025

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ KASDI MERBAH, OUARGLA

FACULTÉ des MATHÉMATIQUES et des SCIENCES de la MATIÈRE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilités et Statistiques**

Par :

Azizi Samah

Titre :

**Sur le problème de controle optimale pour les EDDSPRs Linéaires de type
champ moyen**

Membres du Comité d'Examen :

Dr. MESSAOUDI Djemaa	UKMO	Président
Dr. BENBRAHIM Radhia	UKMO	Encadreur
Dr. ARBIA Hanane	UKMO	Examineur

Mai 2025

DÉDICACE

Louange à Allah par Sa grâce les bonnes choses s'accomplissent

Après un parcours de plusieurs années, rempli de difficultés, de labeur et de fatigue, me voici aujourd'hui au seuil de la réussite, prête à récolter les fruits de mes efforts et à lever la tête avec fierté.

Je dédie ce succès à :

Ma chère mère, dont les prières ont été ma forteresse et la patience ma lumière dans chaque obscurité.

Mon cher père, qui a illuminé mon chemin par sa sagesse et a été mon soutien en tout temps.

À mes frères et sœurs : [Ahmed Farès, Ahmed Sami, Douaa, Hadil, Israa], qui ont toujours été un soutien constant et une joie permanente.

À mon fiancé [Ayoub], qui m'a accompagnée avec ses encouragements et dont la voix résonnait à chaque instant de fatigue.

À mes fidèles amis [Ikram, Hanan, Dounia, Rihab,], compagnons du beau parcours et des moments sincères.

À tous les membres de ma noble famille [Azizi, Nemli], qui m'ont encouragée, ont cru en moi et ont partagé ma joie pour cette réussite.

Accompli par la grâce et l'assistance d'Allah.

REMERCIEMENTS

Alhamdoulillah qui m'a accordé la réussite, a facilité pour moi les voies du savoir, et m'a aidée à accomplir ce travail académique.

Je présente mes vifs remerciements et ma profonde gratitude à l'enseignante encadrante [BENBRAHIM Radhia], pour le suivi minutieux, les conseils scientifiques précieux, et les orientations qui ont enrichi ce travail et contribué à sa réalisation.

Je tiens également à exprimer ma haute considération à tous mes enseignants qui ont eu le plus grand rôle dans la construction de mon parcours académique et l'élargissement de mes horizons de connaissance.

Je ne saurais omettre d'exprimer ma reconnaissance à l'administration de la Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matière, en particulier au Département de Mathématiques, pour l'environnement scientifique stimulant, ainsi que le soutien administratif et académique durant toutes les années d'étude.

Table des matières

Dédicace	i
Table des matières	iii
Introduction	1
1 Généralités de calcul stochastique	3
1.1 Généralités	3
1.1.1 Tribu	3
1.1.2 Tribu engendrée	4
1.1.3 Mesurabilité	4
1.1.4 Probabilité	5
1.1.5 Filtration	5
1.1.6 Variable aléatoire	5
1.2 Processus stochastique	6
1.3 Martingales	6
1.4 Mouvement Brownien	7
1.5 Intégrale stochastique	8
1.5.1 Processus d'Itô	9
1.6 Formule d'Itô	9
1.7 Equation différentielle stochastique	10

1.7.1	Théorème d'existence et d'unicité	10
2	Equation différentielle doublement stochastique rétrogrades	11
2.1	Équations Différentielles Stochastique Rétrograde	11
2.1.1	Notations et définitions	11
2.1.2	Existence et unicité des solutions	13
2.1.3	EDSR dans le cas Lipschitzien	16
2.2	Equation différentielles doublement stochastique rétrogrades	22
2.2.1	Notations et définitions	22
2.2.2	Existence et unicité	24
3	Contrôle optimale pour les EDDSPRs linéaires de type champ moyen	25
3.1	Formulation du problème et hypothèses	25
3.2	Existence d'un contrôle optimale fort	28
	Conclusion	39
	Bibliographie	40
	Annexe A : Abréviations et Notations	41
	Annexe B : Rappels d'analyse	43

Introduction

Le contrôle optimal stochastique de type champ moyen a fait l'objet d'études intensives ces dernières années, en raison de ses applications en économie et en finance mathématiques. En 2009, Buckdahn et al ont introduit un nouveau type d'équations doublement différentielles stochastiques rétrogrades appelées EDSR de type champ moyen, qui ont été dérivées comme limite d'un système de grande dimension d'EDSR correspondant à un grand nombre de particules. L'existence d'une solution pour les équations différentielles stochastiques rétrogrades des systèmes à champ moyen a été démontrée par Caramona et Dularue.

Dans ce mémoire, on s'intéresse au contrôle optimal des systèmes gouvernés par les équations différentielles doublement stochastiques progressives rétrogrades (EDDSPRs) linéaires de type champ moyen. Ce type d'équations se caractérise par la prise en compte de l'effet moyen (ou espérance) de l'état du système dans son évolution, qui est le contenu de l'article [2].

Ce mémoire est composé de trois chapitres :

Chapitre 1 : Rappel de calcul stochastique

Dans Le premier chapitre, on commence par donner quelques concepts généraux relatifs au calcul stochastique, à savoir certaines définitions de base (variables aléatoires, processus stochastiques, martingales, intégrales stochastiques...), on fait rappel aux équations différentielles stochastiques, on donne leurs propriétés ainsi que le théorème d'existence et d'unicité.

Chapitre 2 : Equation différentielle stochastique doublement rétrogrades

Au deuxième chapitre, nous allons montrer d'existence et d'unicité de la solution pour l'EDSR avec un générateur Lipschitzien, ce résultat a été obtenu par Pardoux et Peng en 1990. Puis nous allons présenter les équations différentielles doublement stochastiques dont les deux générateurs f et g sont Lipschitziens.

Chapitre 3 : Contrôle optimale pour les EDDSPRs Linéaires de type champ moyen

Dans le troisième chapitre nous considérons le problème d'existence de contrôle optimal pour les équations différentielles doublement stochastiques progressives rétrogrades (EDD-SPRs) linéaires de type champ moyen. dans le cas où l'ensemble des contrôles est convexe et compact et la fonction de coût est convexe.

Chapitre 1

Généralités de calcul stochastique

Dans ce chapitre, nous présentons quelques notions de base utilisées le long de ce mémoire. Nous commençons par définir : le processus stochastique, le mouvement Brownien, les martingales ...etc. Nous rappelons aussi la définition de les équation différentielles stochastiques et le théoreme d'existence et d'unicité de sa solution.

[\[3\]](#) [\[4\]](#) [\[6\]](#) [\[7\]](#) [\[10\]](#) [\[11\]](#)

1.1 Généralités

1.1.1 Tribu

Définition 1.1.1 *La tribu sur Ω est une famille de sous-ensembles de Ω qui contient l'ensemble vide et qui est stable sous les opérations suivantes : passage au complémentaire, union dénombrable et intersection dénombrable.*

Une tribu contient donc l'espace Ω

Un espace mesurable est un espace muni d'une tribu

Proposition 1.1.1 *L'intersection de tribus forme une tribu, mais cela ne s'applique pas à l'union, car l'union de tribus n'est pas nécessairement une tribu.*

1.1.2 Tribu engendrée

Définition 1.1.2 Soit $\mathcal{A}$ une famille d'ensembles. La tribu engendrée par $\mathcal{A}$ est la plus petite tribu contenant $\mathcal{A}$, c'est-à-dire l'intersection de toutes les tribus contenant $\mathcal{A}$. On la note $\sigma(\mathcal{A})$

$$\sigma(\mathcal{A}) = \bigcap \{ \mathcal{F} \mid \mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}, \mathcal{F} \text{ est une tribu} \}$$

si $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont deux tribus, alors la tribu engendrée par leur union, notée $\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2$, est la plus petite tribu contenant $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$:

$$\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2 = \sigma(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2)$$

1.1.3 Mesurabilité

Définition 1.1.3 soit $(\Omega, \mathcal{F})$ et $(E, \mathcal{E})$ deux espaces mesurables. Une application f de Ω dans E est dite $(\mathcal{F}, \mathcal{E})$ mesurable si $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}, \forall A \in \mathcal{E}$, où

$$f^{-1}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \omega \in \Omega \mid f(\omega) \in A \}$$

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur les tribus employées, on dit simplement que f est mesurable

Une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est borélienne si elle est $(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ mesurable, soit

$$f^{-1}(A) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$$

Il suffit que cette propriété soit vérifiée pour les intervalles A .

Les fonctions continues sont boréliennes.

1.1.4 Probabilité

Définition 1.1.4 Une probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{F})$ est une application de $\mathcal{F}$ dans $[0, 1]$ telle que

- $P(\Omega) = 1$
- pour des $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ appartenant à $\mathcal{F}$ deux à deux disjoints on a

$$P(\cup_{n=0}^{\infty} A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} P(A_n)$$

On appelle espace probabilisé ou espace de probabilité le triple $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

1.1.5 Filtration

Définition 1.1.5 Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On appelle filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une suite croissante de sous-tribus i.e. : pour tout $s \leq t$;

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$$

On dit alors que $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ est une espace probabilité filtré

1.1.6 Variable aléatoire

Définition 1.1.6 Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Une variable aléatoire (souvent abrégé v.a. par la suite) est une application $X: (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\{\omega \in \Omega: X(\omega) \in B\} = \{X \in B\} \in \mathcal{F}, \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Proposition 1.1.2 X est une v.a. ssi $\{\omega \in \Omega: X(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}, \forall t \in \mathbb{R}$.

Remarque 1.1.1 X est aussi dite une fonction (ou v.a.) $\mathcal{F}$ -mesurable.

-si $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, alors X est toujours $\mathcal{F}$ -mesurable

-si $\Omega = \mathbb{R}$ et $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, alors X est dite une fonction borélienne.

1.2 Processus stochastique

Définition 1.2.1 Un processus stochastique est une famille de variable aléatoire $(X_t; t \geq 0)$ définie sur le même espace de probabilité.

Définition 1.2.2 Un processus stochastique $X = (X_t, t \geq 0)$ est dit adaptée (par rapport à une filtration $\mathcal{F}_t$) si X_t est $\mathcal{F}_t$ -mesurable pour tout t .

On dit que le processus X est à trajectoires continues (ou est continu) si les applications $t \rightarrow X_t(\omega)$ sont continues pour presque tout ω .

Un processus X est dit càdlàg si ses trajectoires sont continues à droite, pourvues de limites à gauche.

1.3 Martingales

Définition 1.3.1 Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ un espace probabilité filtré. Une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est un processus stochastique $(X_t)_{t \geq 0}$ tel que pour tout t

- $\mathbb{E}(|X_t|) < \infty$,
- X_t est adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$
- $\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s$ pour tout $s < t$.

Remarque 1.3.1 Si la dernière condition est remplacée par $\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) \leq X_s$ on dit que $(X_t)_{t \geq 0}$ est une surmartingale, et si elle est remplacée par $\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) \geq X_s$ on dit que c'est une sousmartingale

Propriété 1.3.1 -Si X est une martingale $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X_0)$, $\forall t$

-Si $(X_t, t \leq T)$ est une martingale, le processus est complètement déterminé par sa valeur terminale : $X_t = \mathbb{E}(X_T | \mathcal{F}_t)$ cette dernière propriété est d'un usage très fréquent en finance.

Théorème 1.3.1 (*Inégalité de Burkholder Davis Gundy "BDG"*) Pour tout $p \geq 0$, il existe des constantes c_p, C_p telles que pour toute martingale locale X continue nulle en zéro,

$$c_p \mathbb{E} \left[\langle X, X \rangle_\infty^{p/2} \right] \leq \mathbb{E} [(X_\infty^*)^p] \leq C_p \mathbb{E} \left[\langle X, X \rangle_\infty^{p/2} \right]$$

où $X_t^* = \sup_{0 \leq s \leq t} |X_s|$.

1.4 Mouvement Brownien

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité, et soit $(W_t)_{t \geq 0}$ un processus défini sur cet espace

Définition 1.4.1 On appelle mouvement brownien un processus stochastique réelle $(W_t)_{t \geq 0}$ satisfaisant les propriétés suivantes :

- $W_0 = 0$ $\mathbb{P}$ -p.s.
- les trajectoires de W sont continues p.s.
- pour tout $0 \leq s < t$, la variable $W_t - W_s$ est indépendante de $\mathcal{F}_s = \sigma(W_u, u < s)$.
- pour tout $0 \leq s < t$, la variable $W_t - W_s$ est gaussienne de moyenne nulle et de variance $t - s$.

Remarque 1.4.1 On dit que W est un $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ –mouvement brownien si W est un processus continu, adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, vérifiant :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \forall 0 \leq s \leq t, \mathbb{E}(\exp iu(W_t - W_s) \mid \mathcal{F}_s) = \exp \left\{ \frac{-u^2(t-s)}{2} \right\}$$

Proposition 1.4.1 Soit W un MB standard

1. pour tout $s > 0$, $(W_{t+s} - W_s)_{t \geq 0}$ est un MB indépendant de $\sigma\{W_u, u \leq s\}$;
2. $-W$ est aussi un MB ;
3. pour tout $c > 0$; $(cW_{t/c^2})_{t \geq 0}$ est une MB ;
4. le processus défini par $X_0 = 0$ et $X_t = tW_{1/t}$ est un MB.

1.5 Intégrale stochastique

On se donne un espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et un mouvement Brownien W sur cet espace. On désigne par $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, s \leq t)$ la filtration naturelle du mouvement Brownien

Définition 1.5.1 *L'intégrale stochastique est définie comme suit :*

$$\int_0^t \phi_s dW_s$$

où ϕ un processus stochastique

Proposition 1.5.1 *On note Λ l'ensemble $L_{loc}^2(\Omega, \mathbb{R}^+)$ des processus ϕ adaptés càglàd vérifiant*

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t \phi_s^2(\omega) ds\right) < \infty, \forall t$$

– *Linéarité : Soit a et b des constantes et $(\phi^i; i = 1, 2)$ deux processus dans Λ , on a*

$$\int_0^t (a\phi_s^1 + b\phi_s^2) dW_s = a \int_0^t \phi_s^1 dW_s + b \int_0^t \phi_s^2 dW_s$$

$$- \mathbb{E} \left[\int_0^t \phi_s dW_s \right] = 0$$

– *Propriétés de martingale : on définit le processus stochastique $M_t = \int_0^t \phi_s dW_s$, où $\phi \in \Lambda$ est une martingale à trajectoires continues*

– *On définit le processus N_t comme suit : $N_t = \left(\int_0^t \phi_s dW_s\right)^2 - \int_0^t \phi_s^2 ds$, est également une martingale*

– L'isométrie : soit $\theta, \phi \in \Lambda$, alors

$$\mathbb{E} \left(\int_0^t \phi_s dW_s \int_0^t \theta_s dW_s \right) = \mathbb{E} \left(\int_0^t \phi_s \theta_s ds \right)$$

1.5.1 Processus d'Itô

Définition 1.5.2 Un processus X est un processus d'Itô si

$$X_t = x + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s$$

où b est un processus adapté tel que $\int_0^t |b_s| ds$ existe (au sens lebesgue) p.s. pour tout t , et σ un processus appartenant à A

1.6 Formule d'Itô

Théorème 1.6.1 (Première formule d'Itô) f est une fonction de classe C^2 . Alors

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle X, X \rangle_s$$

Théorème 1.6.2 (Deuxième formule d'Itô) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de classe C^1 par rapport à t , de classe C^2 par rapport à x . On a

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f'_t(s, X_s) ds + \int_0^t f'_x(s, X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''_{xx}(s, X_s) d\langle X, X \rangle_s$$

Théorème 1.6.3 (Intégration par parties) Soient X et Y deux processus d'Itô, alors

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y \rangle_t$$

1.7 Equation différentielle stochastique

Définition 1.7.1 Une équation différentielle stochastique est une équation de la forme

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \\ X_0 = x \end{cases} \quad (1.1)$$

Définition 1.7.2 Une solution de l'EDS (1.1) est un processus continu $(X_t)_{t \geq 0}$ tel que :

1. X est progressivement mesurable.

2. $\mathbb{P}$ -p.s. $\int_0^t \{ |b(r, X_r)| + \|\sigma(r, X_r)\|^2 \} dr < \infty$, où $\|\sigma\| = \text{trace}(\sigma\sigma^*)$;

3. $\mathbb{P}$ -p.s., on a $X_t = x + \int_0^t b(r, X_r) dr + \int_0^t \sigma(r, X_r) dW_r, 0 \leq t \leq T$.

1.7.1 Théorème d'existence et d'unicité

Théorème 1.7.1 Soient b et σ deux fonctions boréliennes. On suppose qu'il existe une constante K telle que, pour tout $t \in [0, T], x, y \in \mathbb{R}^n$,

1. condition de Lipschitz :

$$|b(t, x) - b(t, y)| + \|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)\| \leq K |x - y|;$$

2. croissance linéaire :

$$|b(t, x)| + \|\sigma(t, x)\| \leq K(1 + |x|);$$

3. La condition initiale X_0 est indépendante de $(W_t, t \geq 0)$ et est de carré intégrable.

Alors il existe une unique solution $(X_t)_{t \geq 0}$ de (1.1) à trajectoires continues pour $t \leq T$. De plus cette solution vérifie

$$\mathbb{E}[|X_t|^2] < \infty$$

Chapitre 2

Equation différentielle doublement stochastique rétrogrades

L'objectif de ce chapitre est d'introduire la notion d'équations différentielles stochastiques rétrogrades, (EDSRs en abrégé) et de présenter brièvement le résultat classique d'existence et de l'unicité de la solution. Ainsi, on représente les équations différentielles doublements stochastiques rétrogrades

[7] [10] [11]

2.1 Équations Différentielles Stochastique Rétrograde

2.1.1 Notations et définitions

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré, un mouvement Brownien W définit sur cet espace et variable aléatoire ξ mesurable par rapport à $\mathcal{F}_t$. On notera $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ la filtration naturelle du MB W .

On travaillera avec deux espaces de processus :

on notera tout d'abord $\mathcal{S}^2(\mathbb{R}^K)$ l'espace vectoriel formé des processus Y progressivement

mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}^K$, tels que :

$$\|Y\|_{\mathcal{S}^2}^2 : = \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |Y_t|^2 \right] < \infty,$$

et $\mathcal{S}^2(\mathbb{R}^K)$ le sous-espace formé par les processus continus.

Ensuite $\mathcal{M}^2(\mathbb{R}^{K \times d})$ celui formé par les processus Z progressivement mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}^{K \times d}$, tels que :

$$\|Z\|_{\mathcal{M}^2}^2 : = \mathbb{E} \left[\int_0^T \|Z_t\|^2 dt \right] < \infty,$$

où si $z \in \mathbb{R}^{K \times d}$, $\|z\|^2 = \text{trace}(zz^*)$.

$M^2(\mathbb{R}^{K \times d})$ désigne l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathcal{M}^2(\mathbb{R}^{K \times d})$

$\mathbb{R}^K$ et $\mathbb{R}^{K \times d}$ seront souvent omis ; les espace $\mathcal{S}^2, \mathcal{S}_c^2$, et M^2 sont des espace de banach pour les normes définies précédemment. Nous désignerons $\mathcal{B}^2$ l'espace de Banach $\mathcal{S}_c^2(\mathbb{R}^K) \times M^2(\mathbb{R}^{K \times d})$.

Définition 2.1.1 Une equation différentielle stochastique rétrogrades(EDSR en abrégé) est généralement exprimée sous la forme suivante :

$$\begin{cases} dY_t = -f(t, Y_t, Z_t) dt + Z_t dW_t, t \in [0, T] \\ Y_T = \xi \end{cases} \quad (2.1)$$

ou, de façon équivalente, sous forme intégrale,

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r, Y_r, Z_r) dr - \int_t^T Z_r dW_r, 0 \leq t \leq T.$$

La fonction f s'appelle le générateur de l'EDSR et ξ la condition terminale.

Définition 2.1.2 Une solution de l'EDSR (2.1) est un couple de processus $\{(Y_t, Z_t)\}_{0 \leq t \leq T}$ vérifiant :

1. Y et Z sont progressivement mesurables à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}^K$ et $\mathbb{R}^{K \times d}$;

2. $\mathbb{P}$ -p.s. $\int_0^T \{|f(r, Y_r, Z_r)| + \|Z_r\|^2\} dr < \infty$;

3. $\mathbb{P}$ -p.s. on a :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r, Y_r, Z_r) dr - \int_t^T Z_r dW_r, 0 \leq t \leq T$$

Remarque 2.1.1 Les intégrales de l'équation (2.1) étant bien définies, Y est une semimartingale continue, ensuite comme le processus Y est progressivement mesurable, il est adapté et donc en particulier Y_0 est une quantité déterministe.

2.1.2 Existence et unicité des solutions

Proposition 2.1.1 Supposons qu'il existe un processus $(f_t)_{0 \leq t \leq T}$, positif, appartenant à $M^2(\mathbb{R})$ et une constante positive λ tel que

$$\forall (t, y, z) \in [0, T] \times \mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^{K \times d}, |f(t, y, z)| \leq f_t + \lambda(|y| + \|z\|).$$

Si $\{(Y_t, Z_t)\}_{0 \leq t \leq T}$ est une solution de l'EDSR (2.1) telle que $Z \in M^2$ alors Y appartient à $\mathcal{S}_c^2$.

Preuve. Le résultat se déduit principalement du lemme de Gronwall et du fait que Y_0 est

déterministe. En effet, on a, pour tout $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned}
 Y_t &= \xi + \int_t^T f(r, Y_r, Z_r) dr - \int_t^T Z_r dW_r \\
 &= \xi + \left(\int_t^0 f(r, Y_r, Z_r) dr + \int_0^T f(r, Y_r, Z_r) dr \right) - \left(\int_t^0 Z_r dW_r + \int_0^T Z_r dW_r \right) \\
 &= \xi + \left(- \int_0^t f(r, Y_r, Z_r) dr - \left(- \int_0^t Z_r dW_r \right) \right) + \left(\int_0^T f(r, Y_r, Z_r) dr - \int_0^T Z_r dW_r \right) \\
 &= \left(\xi + \int_0^T f(r, Y_r, Z_r) dr - \int_0^T Z_r dW_r \right) - \int_0^t f(r, Y_r, Z_r) dr + \int_0^t Z_r dW_r \\
 &= Y_0 - \int_0^t f(r, Y_r, Z_r) dr + \int_0^t Z_r dW_r,
 \end{aligned}$$

et par suite, on a : $Z \in M^2$ alors :

$$|Y_t| \leq |Y_0| + \int_0^t |f(r, Y_r, Z_r)| dr + \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t Z_r dW_r \right|$$

utilisant l'hypothèse sur f ,

$$\begin{aligned}
 |Y_t| &\leq |Y_0| + \int_0^T (f_r + \lambda \|Z_r\|) dr + \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t Z_r dW_r \right| + \lambda \int_0^t |Y_r| dr \\
 &\leq \varsigma + \lambda \int_0^t |Y_r| dr
 \end{aligned}$$

où

$$\varsigma = |Y_0| + \int_0^T (f_r + \lambda \|Z_r\|) dr + \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t Z_r dW_r \right|.$$

par l'hypothèse, $Z \in M^2$ et donc, via l'inégalité de Doob,

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t Z_r dW_r \right|^2 \right] = \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^T \|Z_r\|^2 dr \right] \leq 4 \sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E} \left[\int_0^T \|Z_r\|^2 dr \right]$$

alors le troisième terme est de carré intégrable ; il en est de même pour $\{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}$, et Y_0 est déterministe donc de carré intégrable ; il s'en suit que ς est une variable aléatoire de carré

intégrable. Comme Y est un processus continu le lemme de Gronwall fournit l'inégalité

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |Y_t| \leq \varsigma \exp(\lambda T)$$

qui montre que Y appartient à $\mathcal{S}^2$. ■

Lemme 2.1.1 *Soient $Y \in \mathcal{S}^2(\mathbb{R}^K)$ et $Z \in \mathcal{M}^2(\mathbb{R}^{K \times d})$ Alors $\left\{ \int_0^t Y_s \cdot Z_s dW_s, t \in [0, T] \right\}$ est une martingale uniformément intégrable.*

Preuve. Les inégalités BDG donnent

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t Y_r \cdot Z_r dW_r \right| \right] &\leq C \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T |Y_r|^2 \|Z_r\|^2 dr \right)^{1/2} \right] \\ &\leq C \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |Y_t| \left(\int_0^T \|Z_r\|^2 dr \right)^{1/2} \right], \end{aligned}$$

et par suit, comme $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t Y_r \cdot Z_r dW_r \right| \right] &\leq C \left(\frac{1}{2} \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |Y_t|^2 \right] + \mathbb{E} \left[\int_0^T \frac{\|Z_r\|^2}{2} dr \right] \right) \\ &\leq C' \left(\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |Y_t|^2 \right] + \mathbb{E} \left[\int_0^T \|Z_r\|^2 dr \right] \right). \end{aligned}$$

Or cette dernière quantité est finie ; d'où

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t Y_r \cdot Z_r dW_r \right| \right] < \infty$$

D'où le résultat. ■

2.1.3 EDSR dans le cas Lipschitzien

Nous avons la fonction f est définie sur $[0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^{K \times d}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^K$, telle que, pour tout $(y, z) \in \mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^{K \times d}$, le processus $\{f(t, y, z)\}_{0 \leq t \leq T}$ soit progressivement mesurable. On considère également ξ une variable aléatoire, $\mathcal{F}_t$ -mesurable, à valeurs dans $\mathbb{R}^K$.

Voici les hypothèses sous lesquelles nous allons travailler.

(H) Il existe une constante λ telle que $\mathbb{P}$ -p.s.,

1. condition de Lipschitz en (y, z) : pour tout t, y, y', z, z' ,

$$|f(t, y, z) - f(t, y', z')| \leq \lambda (|y - y'| + \|z - z'\|);$$

2. condition d'intégrabilité :

$$\mathbb{E} \left[|\xi|^2 + \int_0^T |f(r, 0, 0)|^2 dr \right] < \infty.$$

Nous commençons par un cas très simple, celui où f ne dépend ni de y ni de z i.e. on se donne ξ de carré intégrable et un processus $\{F_t\}_{0 \leq t \leq T}$ dans $M^2(\mathbb{R}^K)$ et on veut trouver une solution de l'EDSR.

$$Y_t = \xi + \int_t^T F_r dr - \int_t^T Z_r dW_r, 0 \leq t \leq T \quad (2.2)$$

Lemme 2.1.2 Soient $\xi \in L^2(\mathcal{F}_T)$ et $\{F_t\}_{0 \leq t \leq T} \in \mathcal{M}^2(\mathbb{R}^K)$. L'EDSR (2.2) possède une unique solution (Y, Z) telle que $Z \in M^2$

Preuve. Supposons dans un premier temps que (Y, Z) soit une solution vérifiant $Z \in M^2$

Si on prend l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_t$ on a nécessairement,

$$Y_t = \mathbb{E} \left(\xi + \int_t^T F_r dr \mid \mathcal{F}_t \right).$$

On définit donc Y à l'aide de la formule précédente et il reste à trouver Z . Remarquons que, d'après le théorème de Fubini, comme F est progressivement mesurable $\int_0^t F_r dr$ est un processus adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$; en fait dans $\mathcal{S}_c^2$ puisque F est de carré intégrable. On a alors, pour tout $t \in [0, T]$,

$$Y_t = \mathbb{E} \left(\xi + \int_0^T F_r dr \mid \mathcal{F}_t \right) - \int_0^t F_r dr =: M_t - \int_0^t F_r dr.$$

M est une martingale brownienne; via le théorème de représentation des martingales browniennes on construit un processus $Z \in M^2$ tel que

$$\begin{aligned} Y_t &= M_t - \int_0^t F_r dr \\ &= M_0 + \int_0^t Z_r dW_r - \int_0^t F_r dr. \end{aligned}$$

On vérifie facilement que (Y, Z) ainsi construit est une solution de l'EDSR étudiée puisque comme $Y_t = \xi$,

$$\begin{aligned} Y_t - \xi &= M_0 + \int_0^t Z_r dW_r - \int_0^t F_r dr - \left(M_0 + \int_0^T Z_r dW_r - \int_0^T F_r dr \right) \\ &= \int_t^T F_r dr - \int_t^T Z_r dW_r. \end{aligned}$$

L'unicité est évidente pour les solutions vérifiant $Z \in M^2$.

■

Théorème 2.1.1 (Pardoux et Peng 1990). *Sous l'hypothèse présédantes, l'EDSR (2.1) possède une unique solution (Y, Z) telle que $Z \in M^2$.*

Preuve. *On utilise l'argument de point fixe dans l'espace de Banach $\mathcal{B}^2$ en construisant une application Ψ de $\mathcal{B}^2$ dans lui-même de sorte que $(Y, Z) \in \mathcal{B}^2$ est solution de l'EDSR (2.1) si et seulement si c'est un point fixe de Ψ .*

Pour (U, V) élément de $\mathcal{B}^2$ on définit $(Y, Z) = \Psi(U, V)$ comme étant la solution de l'EDSR :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r, U_r, V_r) dr - \int_t^T Z_r dW_r, 0 \leq t \leq T.$$

Remarquons que cette dernière EDSR possède une unique solution qui est dans $\mathcal{B}^2$. En effet, posons

$$F_r = f(r, U_r, V_r) \in M^2$$

puisque, f étant Lipschitz,

$$|F_r| \leq |f(r, 0, 0)| + \lambda |U_r| + \lambda \|V_r\|,$$

et ces trois derniers processus sont de carré intégrable. Par suite, il a pouve appliquer le Lemma (2.1.2) pour obtenir une unique solution (Y, Z) telle que $Z \in M^2$. appartient à $\mathcal{B}^2$ l'intégralité de Z est obtenue par construction et d'après la proposition (2.1.1), Y appartient à $\mathcal{S}_c^2$ L'application Ψ de $\mathcal{B}^2$ dans lui-même est donc bien défnie.

*Soient (U, V) et (U', V') deux éléments de $\mathcal{B}^2$ et $(Y, Z) = \Psi(U, V)$ et $(Y', Z') = \Psi(U', V')$.**

Notons $y = Y - Y'$ et $z = Z - Z'$. on a

$$\begin{aligned} dy_t &= dY_t - dY'_t \\ &= \{-f(t, U_t, V_t) dt + Z_t dW_t\} - \{-f(t, U'_t, V'_t) dt + Z'_t dW_t\} \\ &= -\{f(t, U_t, V_t) - f(t, U'_t, V'_t) dt\} + \{Z_t - Z'_t\} dW_t \end{aligned}$$

alors

$$dy_t = -\{f(t, U_t, V_t) - f(t, U'_t, V'_t) dt\} + z_t dW_t.$$

On applique la formule de Itô à $e^{\alpha t} |y_t|^2$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} d(e^{\alpha t} |y_t|^2) &= \alpha e^{\alpha t} |y_t|^2 dt - 2e^{\alpha t} y_t \cdot \{f(t, U_t, V_t) - f(t, U'_t, V'_t) dt\} \\ &\quad + 2e^{\alpha t} y_t \cdot z_t dW_t + e^{\alpha t} \|z_t\|^2 dt. \end{aligned}$$

Par conséquent, intégrant entre t et T , on obtient

$$\begin{aligned} e^{\alpha t} |y_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha r} \|z_r\|^2 dr &= \int_t^T e^{\alpha r} (-\alpha |y_r|^2 + 2y_r \cdot \{f(r, U_r, V_r) - f(r, U'_r, V'_r)\}) dr \\ &\quad - \int_t^T 2e^{\alpha r} y_r \cdot z_r dW_r, \end{aligned}$$

et, comme f est Lipschitz, il vient, notant $u = U - U'$ et $v = V - V'$

$$e^{\alpha t} |y_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha r} \|z_r\|^2 dr \leq \int_t^T e^{\alpha r} (-\alpha |y_r|^2 + 2\lambda |y_r| |u_r| + 2\lambda |y_r| \|v_r\|) dr - \int_t^T 2e^{\alpha r} y_r \cdot z_r dW_r.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a $2ab \leq a^2/\varepsilon + \varepsilon b^2$ et donc, l'inégalité précédente donne

$$\begin{aligned} e^{\alpha t} |y_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha r} \|z_r\|^2 dr &\leq \int_t^T e^{\alpha r} (-a + 2\lambda^2/\varepsilon) |y_r|^2 dr - \int_t^T 2e^{\alpha r} y_r \cdot z_r dW_r \\ &\quad + \varepsilon \int_t^T e^{\alpha r} (|u_r|^2 + \|v_r\|^2) dr, \end{aligned}$$

et prenant $\alpha = 2\lambda^2/\varepsilon$, on a notant $R_\varepsilon = \varepsilon \int_t^T e^{\alpha r} (|u_r|^2 + \|v_r\|^2) dr$,

$$\forall t \in [0, T], e^{\alpha t} |y_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha r} \|z_r\|^2 dr \leq R_\varepsilon - \int_t^T 2e^{\alpha r} y_r \cdot z_r dW_r. \quad (2.3)$$

D'après le Lemma (2.1.1), la martingale locale $\left\{ \int_0^t e^{\alpha r} y_r \cdot z_r dW_r \right\}_{t \in [0, T]}$ est en réalité une martingale nulle en 0 puisque $Y, Y' \in \mathcal{S}^2$ et $Z, Z' \in M^2$.

En prenant l'espérance on obtient facilement, pour $t = 0$,

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T e^{\alpha r} \|z_r\|^2 dr \right] \leq \mathbb{E} [R_\varepsilon] \quad (2.4)$$

Revenant à l'inégalité (2.3), les inégalités BDG fournissent,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} e^{\alpha t} |y_t|^2 \right] &\leq \mathbb{E} [R_\varepsilon] + C \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T e^{2\alpha r} |y_r| \|z_r\|^2 dr \right)^{1/2} \right] \\ &\leq \mathbb{E} [R_\varepsilon] + C \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} e^{\alpha t/2} |y_t| \left(\int_0^T e^{\alpha r} \|z_r\|^2 dr \right)^{1/2} \right], \end{aligned}$$

puis, comme $ab \leq a^2/2 + b^2/2$,

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} e^{\alpha t} |y_t|^2 \right] \leq \mathbb{E} [R_\varepsilon] + \frac{1}{2} \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} e^{\alpha t} |y_t|^2 \right] + \frac{C^2}{2} \mathbb{E} \left[\int_0^T e^{\alpha r} \|z_r\|^2 dr \right].$$

Prenant en considération l'inégalité [2.4](#), on obtient finalement

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} e^{\alpha t} |y_t|^2 + \int_0^T e^{\alpha r} \|zr\|^2 dr \right] \leq (3 + C^2) \mathbb{E} [R_\varepsilon],$$

et par suite, revenant à la définition de R_ε ,

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} e^{\alpha t} |y_t|^2 + \int_0^T e^{\alpha r} \|zr\|^2 dr \right] \leq \varepsilon (3 + C^2) (1 \vee T) \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} e^{\alpha t} |u_t|^2 + \int_0^T e^{\alpha r} \|vr\|^2 dr \right].$$

Prenons ε tel que $\varepsilon (3 + C^2) (1 \vee T) = 1/2$, de sorte que l'application Ψ est alors une contraction stricte de $\mathcal{B}^2$ dans lui-même si on le munit de la norme

$$\|(U, V)\|_\alpha = \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} e^{\alpha t} |u_t|^2 + \int_0^T e^{\alpha r} \|vr\|^2 dr \right]^{1/2},$$

qui en fait un espace de Banach –cette dernière norme étant équivalente à la norme usuelle correspondant au cas $\alpha = 0$.

Ψ possède donc un unique point fixe, ce qui assure l'existence et l'unicité d'une solution de l'EDSR [2.1](#) dans $\mathcal{B}^2$. ■

2.2 Equation différentielles doublement stochastique rétrogrades

2.2.1 Notations et définitions

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, et $(T > 0)$ soient $\{W_t, t \leq 0 \leq T\}$ et $\{B_t, t \leq 0 \leq T\}$ deux processus de mouvement brownien standard mutuellement indépendants à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}^l$ définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Soit $\mathcal{N}$ la classe des ensembles P -null de $\mathcal{F}$. Pour chaque $t \in [0, T]$ on définit

$$\mathcal{F}_t \triangleq \mathcal{F}_t^W \vee \mathcal{F}_{t,T}^B,$$

où pour chaque processus $\{\eta_t\}$,

$$\mathcal{F}_{s,t}^\eta = \sigma \{ \eta_r - \eta_s; s \leq r \leq t \} \vee \mathcal{N}, \mathcal{F}_t^\eta \mathcal{F}_{0,t}^\eta.$$

Notons que la collection $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$ n'est ni croissante, ni décroissante, et ne constitue pas une filtration.

Pour tout $n \in \mathcal{N}$, soit $\mathcal{M}^2(0, T, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des (classes de $dP \times dt$ a.e. égal) processus $(\varphi_t; t \in [0, T])$ mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, tels que :

(i) $\mathbb{E} \int_0^T |\varphi_t|^2 dt < \infty$.

(ii). φ_t est $\mathcal{F}_t$ mesurable, pour presque tout $t \in [0, T]$

$\mathcal{S}^2([0, T]; \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des processus aléatoires n dimensionnels continus qui satisfait :

(i)

$$\mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |\varphi_t|^2 \right) < \infty.$$

(ii) φ est $\mathcal{F}_t$ mesurable, pour tout $t \in [0, T]$.

Soient les deux fonctions

$$f: \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^{K \times d} \rightarrow \mathbb{R}^K$$

$$g: \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^{K \times d} \rightarrow \mathbb{R}^{K \times l}$$

qui sont mesurables et telles que pour tout $(y, z) \in \mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^{K \times d}$; telles que

$$f(\cdot, y, z) \in \mathcal{M}^2(0, T; \mathbb{R}^K)$$

$$g(\cdot, y, z) \in \mathcal{M}^2(0, T; \mathbb{R}^{K \times l}).$$

Définition 2.2.1 *Etant donné $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P, \mathbb{R}^K)$, on considère l'équation différentielle doublement stochastique rétrograde suivante :*

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds + \int_t^T g(s, Y_s, Z_s) dB_s - \int_t^T Z_s dW_s, 0 \leq t \leq T \quad (2.5)$$

notons que l'intégrale par rapport à $\{B_t\}$ est " l'intergrale d'Itô retrograde " et l'intégrale par rapport à $\{W_t\}$ est " l'intergrale d'Itô progressive ".

Hypothèse

(H₁) : On suppose de plus qu'il existe des constantes $c > 0$ et $0 < \alpha < 1$ telles que pour tout $(\omega, t) \in \Omega \times [0, T], (y_1, z_1), (y_2, z_2) \in \mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^{K \times l}$.

$$|f(t, y_1, z_1) - f(t, y_2, z_2)|^2 \leq c(|y_1 - y_2|^2 + \|z_1 - z_2\|^2)$$

$$\|g(t, y_1, z_1) - g(t, y_2, z_2)\|^2 \leq c |y_1 - y_2|^2 + \alpha \|z_1 - z_2\|^2.$$

2.2.2 Existence et unicité

Théorème 2.2.1 *Sous l'hypothèse $(\mathbf{H}_1)$, l'EDDSR (2.5) admet une solution unique*

$$(Y, Z) \in \mathcal{S}^2([0, T]; \mathbb{R}^K) \times \mathcal{M}^2(0, T; \mathbb{R}^{K \times d}).$$

Preuve. Voir [11] ■

Chapitre 3

Contrôle optimale pour les EDDSPRs linéaires de type champ moyen

Dans ce chapitre, nous nous démontrons l'existence d'un contrôle optimal strict fort pour des systèmes gouvernés par les équations différentielles doublement stochastiques progressives rétrogrades (EDDSPRs) de type champ moyen. [\[2\]](#)

3.1 Formulation du problème et hypothèses

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité complet. Soient $(W_t)_{t \in [0, T]}$ et $(B_t)_{t \in [0, T]}$ deux mouvements browniens à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}^l$ respectivement, définis sur cet espace

Soit $\mathcal{N}$ la classe des ensembles $\mathbb{P}$ -nuls de $\mathcal{F}$. Pour chaque $t \in [0, T]$, nous définissons $\mathcal{F}_t \triangleq \mathcal{F}_t^W \vee \mathcal{F}_{t, T}^B$, où pour tout processus $\{\delta_t\}$, nous posons

$$\mathcal{F}_{s, t}^\delta = \sigma(\delta_r - \delta_s; s \leq r \leq t) \vee \mathcal{N}, \mathcal{F}_t^\delta = \mathcal{F}_{0, t}^\delta.$$

Notons que la collection $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$ n'est ni croissante ni décroissante, donc elle ne

constitue pas une filtration classique.

Etant donné ζ un processus de carré intégrable et $\mathcal{F}_T$ -mesurable et $\mathcal{F}_0$ -mesurable et pour tout contrôle admissible u nous considérons un problème de contrôle gouverné par la EDDSPRs linéaires de type champ moyen contrôlée suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} dy_t^u = b(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], u_t) dt + \sigma(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], u_t) dW_t \\ dY_t^u = -f(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], Y_t^u, \mathbb{E}[Y_t^u], Z_t^u, \mathbb{E}[Z_t^u], u_t) dt \\ -g(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], Y_t^u, \mathbb{E}[Y_t^u], Z_t^u, \mathbb{E}[Z_t^u], u_t) \overleftarrow{dB}_t + Z_t^u dW_t, \\ y_0^u = x, Y_t = h(y_T^u, \mathbb{E}[y_T^u]), \end{array} \right. \quad (3.1)$$

avec

$$\begin{aligned} b(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], u_t) &= a_t y_t^u + \widehat{a}_t \mathbb{E}[y_t^u] + b_t u_t, \\ \sigma(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], u_t) &= c_t y_t^u + \widehat{c}_t \mathbb{E}[y_t^u] + \widehat{b}_t u_t, \\ f(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], Y_t^u, \mathbb{E}[Y_t^u], Z_t^u, \mathbb{E}[Z_t^u], u_t) &= d_t y_t^u + \widehat{d}_t \mathbb{E}[y_t^u] + e_t Y_t^u + \widehat{e}_t \mathbb{E}[Y_t^u] \\ &\quad + f_t Z_t^u + \widehat{f}_t \mathbb{E}[Z_t^u] + g_t u_t, \\ g(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], Y_t^u, \mathbb{E}[Y_t^u], Z_t^u, \mathbb{E}[Z_t^u], u_t) &= h_t y_t^u + \widehat{h}_t \mathbb{E}[y_t^u] + k_t Y_t^u + \widehat{k}_t \mathbb{E}[Y_t^u] \\ &\quad + m_t Z_t^u + \widehat{m}_t \mathbb{E}[Z_t^u] + \widehat{g}_t u_t, \\ h(y_T^u, \mathbb{E}[y_T^u]) &= \zeta \end{aligned}$$

où $a, \widehat{a}, b, \widehat{b}, c, \widehat{c}, d, \widehat{d}, e, \widehat{e}, f, \widehat{f}, g, \widehat{g}, h, \widehat{h}, k, \widehat{k}, m$ et $\widehat{m}$ sont des fonction matricielles de tailles appropriées. La solution (y, Y, Z) prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m+d}$ et u est la variable de contrôle à valeurs dans un sous-ensemble U de $\mathbb{R}^k$

et la fonction de coût est donnée sous la forme :

$$\mathbb{J}(u) := \mathbb{E} \left[\alpha(y_T^u, \mathbb{E}[y_T^u]) + \beta(y_0^u, \mathbb{E}[y_0^u]) + \int_0^T l(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], Y_t^u, \mathbb{E}[Y_t^u], Z_t^u, \mathbb{E}[Z_t^u], u_t) dt \right], \quad (3.2)$$

α, β, l sont des fonction données définies par

$$\begin{aligned} l &: [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times d} \times \mathbb{R}^{m \times d} \times U \longrightarrow \mathbb{R}, \\ \alpha &: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \\ \beta &: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}, \end{aligned}$$

Définition 3.1.1 *Un contrôle admissible u est un processus de carré intégrable, $\mathcal{F}_t$ -mesurable à valeurs dans un sous-ensemble $U \subseteq \mathbb{R}^k$. Nous notons par $\mathcal{U}_L$ l'ensemble de tous les contrôles admissibles.*

L'objectif de contrôleur est de minimiser cette fonction dans la classe U des contrôles admissibles qui sont des processus u mesurables et $\mathcal{F}_t$ -adaptés à valeurs dans un borélien A ; un contrôle admissible $u^* \in \mathcal{U}_L$ est dit contrôle optimal s'il

$$\mathbb{J}(u^*) = \inf_{v \in \mathcal{U}_L} \mathbb{J}(v) \quad (3.3)$$

Notations et hypothèses

les notation suivantes sont nécessaires :

$\mathcal{S}_{\mathcal{F}}^2(0, T; \mathbb{R}^m)$: l'ensemble des processus π , $\mathcal{F}_t$ -adaptés et continus à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ tels que

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T |\pi_t|^2 dt \right] < \infty,$$

$\mathcal{M}_{\mathcal{F}}^2(0, T; \mathbb{R}^n)$: l'ensemble des processus η , $\mathcal{F}_t$ -adaptés et continus à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ tels que

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |\eta_t|^2 \right] < \infty,$$

$$\mathcal{U}_L \triangleq \{v. \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}^2(0, T; \mathbb{R}^k) / v_t \in U, p.p, t \in [0, T], \mathbb{P}-p.s\}$$

Les hypothèses

(H_1) : L'ensemble $U \subseteq \mathbb{R}^k$ est convexe et compact, et les fonction l, α et β sont continues, bornées et convexes.

(H_2) : Les coefficients $a_t, \hat{a}_t, b_t, \hat{b}_t, c_t, \hat{c}_t, d_t, \hat{d}_t, e_t, \hat{e}_t, f_t, \hat{f}_t, g_t, \hat{g}_t, h_t, \hat{h}_t, k_t, \hat{k}_t$ sont bornés par $\lambda > 0$, tandis que m_t et $\hat{m}_t$ sont bornés par $\gamma \in]0, \frac{1}{2}[$. Autrement dit :

$$\lambda \triangleq \sup_{t, \omega} |\varphi_t(\omega)| \quad \text{et} \quad \gamma \triangleq \sup_{t, \omega} |\sigma_t(\omega)|,$$

où $\varphi_t(\omega) = a_t, \hat{a}_t, b_t, \hat{b}_t, c_t, \hat{c}_t, d_t, \hat{d}_t, e_t, \hat{e}_t, f_t, \hat{f}_t, g_t, \hat{g}_t, h_t, \hat{h}_t, k_t, \hat{k}_t$ et $\sigma_t(\omega) = m_t, \hat{m}_t$.

Proposition 3.1.1 *Sous l'hypothèse (H_2), le système de 'EDDSPRs linéaires de type champ moyen (3.1) possède une unique solution.*

3.2 Existence d'un contrôle optimale fort

Théorème 3.2.1 *Sous les hypothèses (H_1) et (H_2), si le problème de contrôle strict {(3.1), (3.2), (3.3)} est fini, alors il admet une solution optimale forte.*

Preuve. *Sopposons que (H_1) et (H_2), sont vérifiées. Soit $(u.^n)$ une suite minimisante, c'est-à-dire :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{J}(u.^n) = \inf_{v. \in \mathcal{U}_L} \mathbb{J}(v.)$$

Avec des trajectoire associées $(y.^n, Y.^n, Z.^n)$ satisfaisant l'EDDSPR linéaire de type champ moyen (3.1)

Puisque U est un ensemble compact, il existe une sous-suite $(u.^n)_{n \geq 0}$ telle que :

$$u.^n \rightarrow \bar{u}., \text{ converge faiblement dans } \mathcal{S}_{\mathcal{F}}^2([0, T]; \mathbb{R}^k)$$

Appliquant le théoreme de Mazur, il existe une suite de combinaisons convexe définie par :

$$\tilde{U}^{\cdot n} = \sum_{j \geq 0} \theta_{jn} u^{j+n}, (\text{avec } \theta_{jn} \geq 0 \text{ et } \sum_{j \geq 0} \theta_{jn} = 1)$$

telle que

$$\tilde{U}^{\cdot n} \rightarrow \bar{u}^{\cdot}, \text{ converge fortement dans } \mathcal{S}_{\mathcal{F}}^2([0, T]; \mathbb{R}^k). \quad (3.4)$$

Comme l'ensemble $U \subseteq \mathbb{R}^k$ est convexe et compact, il s'ensuit que $\bar{u}^{\cdot} \in \mathcal{U}_L$.

Soient $(y^{\tilde{U}^{\cdot n}}, Y^{\tilde{U}^{\cdot n}}, Z^{\tilde{U}^{\cdot n}})$ et $(y^{\bar{u}^{\cdot}}, Y^{\bar{u}^{\cdot}}, Z^{\bar{u}^{\cdot}})$ sont des solution de l'EDDSPR linéaire (3.1.) associées à $\tilde{U}^{\cdot n}$ et $\bar{u}^{\cdot}$ respectivement c'est-à-dire :

$$\left\{ \begin{array}{l} dy_t^{\tilde{U}^{\cdot n}} = \left(a_t y_t^{\tilde{U}^{\cdot n}} + \hat{a}_t \mathbb{E} [y_t^{\tilde{U}^{\cdot n}}] + b_t \tilde{U}_t^{\cdot n} \right) dt + \left(c_t y_t^{\tilde{U}^{\cdot n}} + \hat{c}_t \mathbb{E} [y_t^{\tilde{U}^{\cdot n}}] + \hat{b}_t \tilde{U}_t^{\cdot n} \right) dW_t \\ dY_t^{\tilde{U}^{\cdot n}} = - \left(d_t y_t^{\tilde{U}^{\cdot n}} + \hat{d}_t \mathbb{E} [y_t^{\tilde{U}^{\cdot n}}] + e_t Y_t^{\tilde{U}^{\cdot n}} + \hat{e}_t \mathbb{E} [Y_t^{\tilde{U}^{\cdot n}}] + f_t Z_t^{\tilde{U}^{\cdot n}} + \hat{f}_t \mathbb{E} [Z_t^{\tilde{U}^{\cdot n}}] + g_t \tilde{U}_t^{\cdot n} \right) dt \\ - \left(h_t y_t^{\tilde{U}^{\cdot n}} + \hat{h}_t \mathbb{E} [y_t^{\tilde{U}^{\cdot n}}] + k_t Y_t^{\tilde{U}^{\cdot n}} + \hat{k}_t \mathbb{E} [Y_t^{\tilde{U}^{\cdot n}}] + m_t Z_t^{\tilde{U}^{\cdot n}} + \hat{m}_t \mathbb{E} [Z_t^{\tilde{U}^{\cdot n}}] + \hat{g}_t \tilde{U}_t^{\cdot n} \right) \overleftarrow{dB}_t + Z_t^{\tilde{U}^{\cdot n}} dW_t, \\ y_0^{\tilde{U}^{\cdot n}} = x, Y_t^{\tilde{U}^{\cdot n}} = \zeta, \end{array} \right. \quad (3.5)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} dy_t^{\bar{u}^{\cdot}} = \left(a_t y_t^{\bar{u}^{\cdot}} + \hat{a}_t \mathbb{E} [y_t^{\bar{u}^{\cdot}}] + b_t \bar{u}_t \right) dt + \left(c_t y_t^{\bar{u}^{\cdot}} + \hat{c}_t \mathbb{E} [y_t^{\bar{u}^{\cdot}}] + \hat{b}_t \bar{u}_t \right) dW_t \\ dY_t^{\bar{u}^{\cdot}} = - \left(d_t y_t^{\bar{u}^{\cdot}} + \hat{d}_t \mathbb{E} [y_t^{\bar{u}^{\cdot}}] + e_t Y_t^{\bar{u}^{\cdot}} + \hat{e}_t \mathbb{E} [Y_t^{\bar{u}^{\cdot}}] + f_t Z_t^{\bar{u}^{\cdot}} + \hat{f}_t \mathbb{E} [Z_t^{\bar{u}^{\cdot}}] + g_t \bar{u}_t \right) dt \\ - \left(h_t y_t^{\bar{u}^{\cdot}} + \hat{h}_t \mathbb{E} [y_t^{\bar{u}^{\cdot}}] + k_t Y_t^{\bar{u}^{\cdot}} + \hat{k}_t \mathbb{E} [Y_t^{\bar{u}^{\cdot}}] + m_t Z_t^{\bar{u}^{\cdot}} + \hat{m}_t \mathbb{E} [Z_t^{\bar{u}^{\cdot}}] + \hat{g}_t \bar{u}_t \right) \overleftarrow{dB}_t + Z_t^{\bar{u}^{\cdot}} dW_t, \\ y_0^{\bar{u}^{\cdot}} = x, Y_t^{\bar{u}^{\cdot}} = \zeta, \end{array} \right. \quad (3.6)$$

Alors on prouve que :

$$\left(y_t^{\tilde{U}^{\cdot u}}, Y_t^{\tilde{U}^{\cdot u}}, \int_0^T Z_s^{\tilde{U}^{\cdot u}} dW_s \right) \text{ converge fortement vers } \left(y_t^{\bar{u}}, Y_t^{\bar{u}}, \int_0^T Z_t^{\bar{u}} \right) \quad (3.7)$$

dans $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}^2([0, T]; \mathbb{R}^{n+m}) \times \mathcal{S}_{\mathcal{F}}^2([0, T]; \mathbb{R}^{m+d})$

On a

$$\begin{aligned} \left| y_t^{\tilde{U}^{\cdot n}} - y_t^{\bar{u}} \right|^2 &= \left| \left[\int_0^t a_s \left(y_t^{\tilde{U}^{\cdot n}} - y_t^{\bar{u}} \right) + \hat{a}_s \mathbb{E} \left[y_t^{\tilde{U}^{\cdot n}} - y_t^{\bar{u}} \right] + b_s \left(\tilde{U}_s^n - \bar{u}_s \right) \right] ds \right. \\ &\quad \left. + \left[\int_0^t c_s \left(y_t^{\tilde{U}^{\cdot n}} - y_t^{\bar{u}} \right) + \hat{c}_s \mathbb{E} \left[y_t^{\tilde{U}^{\cdot n}} - y_t^{\bar{u}} \right] + \hat{b}_s \left(\tilde{U}_s^n - \bar{u}_s \right) \right] dW_s \right|^2 \end{aligned}$$

Comme $(a - b)^2 \leq a^2 + b^2$, alors

$$\begin{aligned} \left| y_t^{\tilde{U}^{\cdot n}} - y_t^{\bar{u}} \right|^2 &\leq \left| \int_0^t \left[a_s \left(y_t^{\tilde{U}^{\cdot n}} - y_t^{\bar{u}} \right) + \hat{a}_s \mathbb{E} \left[y_t^{\tilde{U}^{\cdot n}} - y_t^{\bar{u}} \right] + b_s \left(\tilde{U}_s^n - \bar{u}_s \right) \right] ds \right|^2 \\ &\quad + \left| \int_0^t \left[c_s \left(y_t^{\tilde{U}^{\cdot n}} - y_t^{\bar{u}} \right) + \hat{c}_s \mathbb{E} \left[y_t^{\tilde{U}^{\cdot n}} - y_t^{\bar{u}} \right] + \hat{b}_s \left(\tilde{U}_s^n - \bar{u}_s \right) \right] dW_s \right|^2 \end{aligned}$$

par l'intégrale de Cauchy -Shewartz :

$$\begin{aligned} \left| y_t^{\tilde{U}^{\cdot n}} - y_t^{\bar{u}} \right|^2 &\leq \int_0^t \left[|a_s|^2 \left| y_t^{\tilde{U}^{\cdot n}} - y_t^{\bar{u}} \right|^2 + |\hat{a}_s|^2 \mathbb{E} \left[\left| y_t^{\tilde{U}^{\cdot n}} - y_t^{\bar{u}} \right|^2 \right] + |b_s|^2 \left| \tilde{U}_s^n - \bar{u}_s \right|^2 \right] ds \\ &\quad + \left| \int_0^t \left[c_s \left(y_t^{\tilde{U}^{\cdot n}} - y_t^{\bar{u}} \right) + \hat{c}_s \mathbb{E} \left[y_t^{\tilde{U}^{\cdot n}} - y_t^{\bar{u}} \right] + \hat{b}_s \left(\tilde{U}_s^n - \bar{u}_s \right) \right] dW_s \right|^2, \end{aligned}$$

alors on a

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq s \leq t} \left| y_s^{\tilde{U} \cdot n} - y_s^{\bar{u}} \right|^2 &\leq \int_0^t \left[|a_s|^2 \sup_{0 \leq r \leq s} \left| y_r^{\tilde{U} \cdot n} - y_r^{\bar{u}} \right|^2 + |\hat{a}_s|^2 \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq r \leq s} \left| y_r^{\tilde{U} \cdot n} - y_r^{\bar{u}} \right|^2 \right] + |b_s|^2 \left| \tilde{U}_s^n - \bar{u}_s \right|^2 \right] ds \\ &\quad + \sup_{0 \leq s \leq t} \left(\left| \int_0^t \left[c_s \left(y_t^{\tilde{U} \cdot n} - y_t^{\bar{u}} \right) + \hat{c}_s \mathbb{E} \left[y_t^{\tilde{U} \cdot n} - y_t^{\bar{u}} \right] + \hat{b}_s \left(\tilde{U}_s^n - \bar{u}_s \right) \right] dW_s \right|^2 \right), \end{aligned}$$

On utilise l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq s \leq t} \left| y_t^{\tilde{U} \cdot n} - y_t^{\bar{u}} \right|^2 \right] &\leq \mathbb{E} \int_0^t \left[|a_s|^2 \sup_{0 \leq r \leq s} \left| y_r^{\tilde{U} \cdot n} - y_r^{\bar{u}} \right|^2 + |\hat{a}_s|^2 \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq r \leq s} \left| y_r^{\tilde{U} \cdot n} - y_r^{\bar{u}} \right|^2 \right] + |b_s|^2 \left| \tilde{U}_s^n - \bar{u}_s \right|^2 \right] ds \\ &\quad + \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq s \leq t} \left(\left| \int_0^t \left[c_s \left(y_t^{\tilde{U} \cdot n} - y_t^{\bar{u}} \right) + \hat{c}_s \mathbb{E} \left[y_t^{\tilde{U} \cdot n} - y_t^{\bar{u}} \right] + \hat{b}_s \left(\tilde{U}_s^n - \bar{u}_s \right) \right] dW_s \right|^2 \right) \right] \end{aligned}$$

Alors

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq s \leq T} \left| y_t^{\tilde{U} \cdot n} - y_t^{\bar{u}} \right|^2 \right] \leq K \int_0^t \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq r \leq s} \left| y_r^{\tilde{U} \cdot n} - y_r^{\bar{u}} \right|^2 \right] ds + K \mathbb{E} \left[\int_0^t \left| \tilde{U}_s^n - \bar{u}_s \right|^2 ds \right]$$

On pose

$$\varphi(t) = \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq s \leq T} \left| y_t^{\tilde{U} \cdot n} - y_t^{\bar{u}} \right|^2 \right]$$

Alors

$$\varphi(t) \leq K \int_0^t \varphi(s) ds + K \mathbb{E} \left[\int_0^t \left| \tilde{U}_s^n - \bar{u}_s \right|^2 ds \right]$$

En appliquant le lemme de Granwall, on obtient :

$$\varphi(t) \leq K \mathbb{E} \left[\int_0^t \left| \tilde{U}_s^n - \bar{u}_s \right|^2 ds \right] \exp(Kt)$$

et en utilisant (3.4), nous obtenons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq s \leq T} \left| y_t^{\tilde{U}^n} - y_t^{\bar{u}} \right|^2 \right] = 0 \quad (3.8)$$

Donc :

$$y_t^{\tilde{U}^n} \rightharpoonup y_t^{\bar{u}} \text{ fortement dans } \mathcal{M}_{\mathcal{F}}^2([0, T]; \mathbb{R}^k)$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned} \left(Y_t^{\tilde{U}^n} - Y_t^{\bar{u}} \right) &= - \int_0^T \left[d_s \left(y_s^{\tilde{U}^n} - y_s^{\bar{u}} \right) + \hat{d}_s \mathbb{E} \left[y_s^{\tilde{U}^n} - y_s^{\bar{u}} \right] + e_s \left(Y_s^{\tilde{U}^n} - Y_s^{\bar{u}} \right) + \hat{e}_s \mathbb{E} \left[Y_s^{\tilde{U}^n} - Y_s^{\bar{u}} \right] \right. \\ &\quad \left. + f_s \left(Z_s^{\tilde{U}^n} - Z_s^{\bar{u}} \right) + \hat{f}_s \mathbb{E} \left[Z_s^{\tilde{U}^n} - Z_s^{\bar{u}} \right] + g_s \left[\tilde{U}_s^n - \bar{u}_s \right] \right] dt \\ &\quad - \int_0^T \left[h_s \left(y_s^{\tilde{U}^n} - y_s^{\bar{u}} \right) + \hat{h}_s \mathbb{E} \left[y_s^{\tilde{U}^n} - y_s^{\bar{u}} \right] + k_s \left(Y_s^{\tilde{U}^n} - Y_s^{\bar{u}} \right) + \hat{k}_s \mathbb{E} \left[Y_s^{\tilde{U}^n} - Y_s^{\bar{u}} \right] \right. \\ &\quad \left. + m_s \left(Z_s^{\tilde{U}^n} - Z_s^{\bar{u}} \right) + \hat{m}_s \mathbb{E} \left[Z_s^{\tilde{U}^n} - Z_s^{\bar{u}} \right] + \hat{g}_s \left[\tilde{U}_s^n - \bar{u}_s \right] \right] dB_s \\ &\quad + \int_0^T \left[Z_s^{\tilde{U}^n} - Z_s^{\bar{u}} \right] dW_s. \end{aligned}$$

En appliquant la formule d'Ito à $d \left| Y_t^{\tilde{U}^n} - Y_t^{\bar{u}} \right|^2$, on obtient :

$$\begin{aligned}
 d \left| Y_t^{\tilde{U}^n} - Y_t^{\bar{u}} \right|^2 &= 2 \left| Y_t^{\tilde{U}^n} - Y_t^{\bar{u}} \right| d \left| Y_t^{\tilde{U}^n} - Y_t^{\bar{u}} \right| + d \left\langle Y_t^{\tilde{U}^n} - Y_t^{\bar{u}} \right\rangle \\
 &= 2 \left| Y_t^{\tilde{U}^n} - Y_t^{\bar{u}} \right| \left[- (d_t (y_t^{\tilde{U}^n} - y_t^{\bar{u}}) + \hat{d}_t \mathbb{E} [y_t^{\tilde{U}^n} - y_t^{\bar{u}}] + e_t (Y_t^{\tilde{U}^n} - Y_t^{\bar{u}}) \right. \\
 &\quad + \hat{e}_t \mathbb{E} [Y_t^{\tilde{U}^n} - Y_t^{\bar{u}}] + f_t (Z_t^{\tilde{U}^n} - Z_t^{\bar{u}}) + \hat{f}_t \mathbb{E} [Z_t^{\tilde{U}^n} - Z_t^{\bar{u}}] \\
 &\quad + g_t [\tilde{U}_t^n - \bar{u}_t]) dt - (h_t (y_t^{\tilde{U}^n} - y_t^{\bar{u}}) + \hat{h}_t \mathbb{E} [y_t^{\tilde{U}^n} - y_t^{\bar{u}}] \\
 &\quad + k_t (Y_t^{\tilde{U}^n} - Y_t^{\bar{u}}) + \hat{k}_t \mathbb{E} [Y_t^{\tilde{U}^n} - Y_t^{\bar{u}}] + m_t (Z_t^{\tilde{U}^n} - Z_t^{\bar{u}}) \\
 &\quad + \hat{m}_t \mathbb{E} [Z_t^{\tilde{U}^n} - Z_t^{\bar{u}}] + \hat{g}_t [\tilde{U}_t^n - \bar{u}_t]) dB_t + [Z_t^{\tilde{U}^n} - Z_t^{\bar{u}}] dW_t] \\
 &\quad + \left\| Z_t^{\tilde{U}^n} - Z_t^{\bar{u}} \right\|^2 dt
 \end{aligned}$$

passant à l'intégrale, on a

$$\begin{aligned}
 \left| Y_t^{\tilde{U}^n} - Y_t^{\bar{u}} \right|^2 &= 2 \int_0^T \langle Y_t^{\tilde{U}^n} - Y_t^{\bar{u}}, (d_s (y_s^{\tilde{U}^n} - y_s^{\bar{u}}) + \hat{d}_s \mathbb{E} [y_s^{\tilde{U}^n} - y_s^{\bar{u}}] + e_s (Y_s^{\tilde{U}^n} - Y_s^{\bar{u}}) \\
 &\quad + \hat{e}_s \mathbb{E} [Y_s^{\tilde{U}^n} - Y_s^{\bar{u}}] + f_s (Z_s^{\tilde{U}^n} - Z_s^{\bar{u}}) + \hat{f}_s \mathbb{E} [Z_s^{\tilde{U}^n} - Z_s^{\bar{u}}] + g_s [\tilde{U}_s^n - \bar{u}_s]) \rangle ds \\
 &\quad + \int_0^T | h_s (y_s^{\tilde{U}^n} - y_s^{\bar{u}}) + \hat{h}_s \mathbb{E} [y_s^{\tilde{U}^n} - y_s^{\bar{u}}] + k_s (Y_s^{\tilde{U}^n} - Y_s^{\bar{u}}) + \hat{k}_s \mathbb{E} [Y_s^{\tilde{U}^n} - Y_s^{\bar{u}}] \\
 &\quad + m_s (Z_s^{\tilde{U}^n} - Z_s^{\bar{u}}) + \hat{m}_s \mathbb{E} [Z_s^{\tilde{U}^n} - Z_s^{\bar{u}}] \\
 &\quad + \hat{g}_s [\tilde{U}_s^n - \bar{u}_s]) |^2 ds + 2 \int_0^T \langle Y_t^{\tilde{U}^n} - Y_t^{\bar{u}}, Z_s^{\tilde{U}^n} - Z_s^{\bar{u}} \rangle dW_s + \int_0^T \left\| Z_s^{\tilde{U}^n} - Z_s^{\bar{u}} \right\|^2 ds
 \end{aligned}$$

passant l'espérance

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq s \leq T} |Y_t^{\tilde{U}^{\cdot, n}} - Y_t^{\bar{u}}|^2 \right] + \mathbb{E} \left[\int_0^T \|Z_s^{\tilde{U}^{\cdot, n}} - Z_s^{\bar{u}}\|^2 ds \right] \\
 & \leq 2\mathbb{E} \left[\int_0^T \langle Y_t^{\tilde{U}^{\cdot, n}} - Y_t^{\bar{u}}, (d_s(y_s^{\tilde{U}^{\cdot, n}} - y_s^{\bar{u}}) + \hat{d}_s \mathbb{E} y_s^{\tilde{U}^{\cdot, n}} - y_s^{\bar{u}} \right. \\
 & \quad + e_s(Y_s^{\tilde{U}^{\cdot, n}} - Y_s^{\bar{u}}) + \hat{e}_s \mathbb{E} [Y_s^{\tilde{U}^{\cdot, n}} - Y_s^{\bar{u}}] + f_s(Z_s^{\tilde{U}^{\cdot, n}} - Z_s^{\bar{u}}) \\
 & \quad + \hat{f}_s \mathbb{E} [Z_s^{\tilde{U}^{\cdot, n}} - Z_s^{\bar{u}}] + g_s[\tilde{U}_s^n - \bar{u}_s]) \rangle ds \right] \\
 & + \mathbb{E} \left[\int_0^T |h_s(y_s^{\tilde{U}^{\cdot, n}} - y_s^{\bar{u}}) + \hat{h}_s \mathbb{E} [y_s^{\tilde{U}^{\cdot, n}} - y_s^{\bar{u}}] \right. \\
 & \quad + k_s(Y_s^{\tilde{U}^{\cdot, n}} - Y_s^{\bar{u}}) + \hat{k}_s \mathbb{E} [Y_s^{\tilde{U}^{\cdot, n}} - Y_s^{\bar{u}}] \\
 & \quad + m_s(Z_s^{\tilde{U}^{\cdot, n}} - Z_s^{\bar{u}}) + \hat{m}_s \mathbb{E} [Z_s^{\tilde{U}^{\cdot, n}} - Z_s^{\bar{u}}] \\
 & \quad \left. + \hat{g}_s[\tilde{U}_s^n - \bar{u}_s])|^2 ds \right]
 \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse (H_2) et en utilisant la formule de Young, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq s \leq T} |Y_t^{\tilde{U}^{\cdot, n}} - Y_t^{\bar{u}}|^2 \right] + \mathbb{E} \left[\int_0^T \|Z_s^{\tilde{U}^{\cdot, n}} - Z_s^{\bar{u}}\|^2 ds \right] \\
 & \leq \frac{1}{\rho_1} \mathbb{E} \left[\int_0^T |Y_t^{\tilde{U}^{\cdot, n}} - Y_t^{\bar{u}}|^2 ds \right] + 14\rho_1\lambda^2 \mathbb{E} \left[\int_0^T (|y_s^{\tilde{U}^{\cdot, n}} - y_s^{\bar{u}}|^2 + |Y_t^{\tilde{U}^{\cdot, n}} - Y_t^{\bar{u}}|^2 \right. \\
 & \quad + \|Z_s^{\tilde{U}^{\cdot, n}} - Z_s^{\bar{u}}\|^2 + \frac{1}{2} |\tilde{U}_s^n - \bar{u}_s|^2 ds) \right] + 10\lambda^2 \mathbb{E} \left[\int_0^T (|y_s^{\tilde{U}^{\cdot, n}} - y_s^{\bar{u}}|^2 \right. \\
 & \quad + |Y_t^{\tilde{U}^{\cdot, n}} - Y_t^{\bar{u}}|^2 + \frac{1}{2} |\tilde{U}_s^n - \bar{u}_s|^2 ds) \right] + 4\gamma^2 \mathbb{E} \left[\int_0^T \|Z_s^{\tilde{U}^{\cdot, n}} - Z_s^{\bar{u}}\|^2 ds \right] \\
 & + \frac{5\lambda\gamma}{\rho_2} \mathbb{E} \left[\int_0^T (|y_s^{\tilde{U}^{\cdot, n}} - y_s^{\bar{u}}|^2 + \mathbb{E} [y_s^{\tilde{U}^{\cdot, n}} - y_s^{\bar{u}}]^2 + |Y_t^{\tilde{U}^{\cdot, n}} - Y_t^{\bar{u}}|^2 \right. \\
 & \quad + \mathbb{E} [Y_t^{\tilde{U}^{\cdot, n}} - Y_t^{\bar{u}}]^2 + |\tilde{U}_s^n - \bar{u}_s|^2) ds \right] \\
 & + 2\rho_2\lambda\gamma \mathbb{E} \left[\int_0^T (\|Z_s^{\tilde{U}^{\cdot, n}} - Z_s^{\bar{u}}\|^2 + \mathbb{E} [\|Z_s^{\tilde{U}^{\cdot, n}} - Z_s^{\bar{u}}\|^2]) ds \right]
 \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq s \leq T} \left| Y_t^{\tilde{U}^n} - Y_t^{\bar{u}} \right|^2 \right] + \mathbb{E} \left[\int_0^T \left\| Z_s^{\tilde{U}^n} - Z_s^{\bar{u}} \right\|^2 ds \right] \\
 & \leq \left(\frac{1}{\rho_1} + 14\rho_1\lambda^2 + 10\lambda^2 + \frac{10\lambda\gamma}{\rho_2} \right) \mathbb{E} \left[\int_0^T \left| Y_t^{\tilde{U}^n} - Y_t^{\bar{u}} \right|^2 ds \right] \\
 & + (14\rho_1\lambda^2 + 4\gamma^2 + 4\rho_2\lambda\gamma) \mathbb{E} \left[\int_0^T \left\| Z_s^{\tilde{U}^n} - Z_s^{\bar{u}} \right\|^2 ds \right] \\
 & + (14\rho_1\lambda^2 + 10\lambda^2 + \frac{10\lambda\gamma}{\rho_2}) \mathbb{E} \left[\int_0^T \left| y_s^{\tilde{U}^n} - y_s^{\bar{u}} \right|^2 ds \right] \\
 & + (7\rho_1\lambda^2 + 5\lambda^2 + \frac{5\lambda\gamma}{\rho_2}) \mathbb{E} \left[\int_0^T \left| \tilde{U}_s^n - \bar{u}_s \right|^2 ds \right]
 \end{aligned}$$

Choisit

$$\rho_1 = \frac{1 - 4\gamma^2}{28\lambda^2} > 0 \text{ et } \rho_2 = \frac{1 - 4\gamma^2}{12\lambda\gamma} > 0 \text{ car } 0 < \gamma < \frac{1}{2}$$

L'inégalité précédente devient

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq s \leq T} \left| Y_t^{\tilde{U}^n} - Y_t^{\bar{u}} \right|^2 \right] + \mu_1 \mathbb{E} \left[\int_0^T \left\| Z_s^{\tilde{U}^n} - Z_s^{\bar{u}} \right\|^2 ds \right] \\
 & \leq \mu_2 \mathbb{E} \left[\int_0^T \left| Y_t^{\tilde{U}^n} - Y_t^{\bar{u}} \right|^2 ds \right] + \mu_3 \mathbb{E} \left[\int_0^T \left| y_s^{\tilde{U}^n} - y_s^{\bar{u}} \right|^2 ds \right] + \mu_4 \mathbb{E} \left[\int_0^T \left| \tilde{U}_s^n - \bar{u}_s \right|^2 ds \right]
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

où

$$\begin{aligned}
 \mu_1 &= \frac{1 - 4\gamma^2}{6} > 0, \\
 \mu_2 &= \frac{28\lambda^2}{1 - 4\gamma^2} + \frac{1 - 4\gamma^2}{2} + 10\lambda^2 + \frac{120(\lambda\gamma)^2}{1 - 4\gamma^2} > 0, \\
 \mu_3 &= \frac{1 - 4\gamma^2}{4} + 10\lambda^2 + \frac{120(\lambda\gamma)^2}{1 - 4\gamma^2} > 0, \\
 \mu_4 &= \frac{1 - 4\gamma^2}{4} + 5\lambda^2 + \frac{60(\lambda\gamma)^2}{1 - 4\gamma^2} > 0.
 \end{aligned}$$

De l'inégalité [3.9](#) nous déduisons deux inégalités

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq s \leq T} \left| Y_t^{\tilde{U}^{\cdot, n}} - Y_t^{\bar{u}} \right|^2 \right] &\leq \mu_2 \mathbb{E} \left[\left| Y_t^{\tilde{U}^{\cdot, n}} - Y_t^{\bar{u}} \right|^2 ds \right] + \mu_3 \mathbb{E} \left[\int_0^T \left| y_s^{\tilde{U}^{\cdot, n}} - y_s^{\bar{u}} \right|^2 ds \right] \\ &\quad + \mu_4 \mathbb{E} \left[\int_0^T \left| \tilde{U}_s^n - \bar{u}_s \right|^2 ds \right], \end{aligned} \quad (3.10)$$

et

$$\begin{aligned} \mu_1 \mathbb{E} \left[\int_0^T \left\| Z_s^{\tilde{U}^{\cdot, n}} - Z_s^{\bar{u}} \right\|^2 ds \right] &\leq \mu_2 \mathbb{E} \left[\left| Y_t^{\tilde{U}^{\cdot, n}} - Y_t^{\bar{u}} \right|^2 ds \right] + \mu_3 \mathbb{E} \left[\int_0^T \left| y_s^{\tilde{U}^{\cdot, n}} - y_s^{\bar{u}} \right|^2 ds \right] \\ &\quad + \mu_4 \mathbb{E} \left[\int_0^T \left| \tilde{U}_s^n - \bar{u}_s \right|^2 ds \right]. \end{aligned} \quad (3.11)$$

En utilisant l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy, en appliquant le lemme de Gronwall à [3.10](#) et en passant à la limite lorsque $n \rightarrow \infty$ et en utilisant les convergences [3.4](#) et [3.7](#) nous obtenons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq s \leq T} \left| Y_t^{\tilde{U}^{\cdot, n}} - Y_t^{\bar{u}} \right|^2 \right] = 0. \quad (3.12)$$

Alors

$$Y_t^{\tilde{U}^{\cdot, n}} \rightarrow Y_t^{\bar{u}} \text{ fortement dans } \mathcal{M}_{\mathcal{F}}^2([0, T]; \mathbb{R}^k)$$

En suit, on peut montrer directement à partir de [3.4](#), [3.8](#) et [3.11](#)

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T \left\| Z_s^{\tilde{U}^{\cdot, n}} - Z_s^{\bar{u}} \right\|^2 ds \right] \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty,$$

ce qui implique que

$$\int_0^T Z_s^{\tilde{U}^{\cdot,n}} dW_s \rightarrow \int_0^T Z_s^{\bar{u}} dW_s \text{ fortement dans } \mathcal{M}_{\mathcal{F}}^2([0, T]; \mathbb{R}^k)$$

Enfin, prouvons que $\bar{u}$ est un contrôle optimal

$$\begin{aligned} \mathbb{J}(\bar{u}) &= \mathbb{E} \left[\alpha(y_T^{\bar{u}}, \mathbb{E}[y_T^{\bar{u}}]) + \beta(y_0^{\bar{u}}, \mathbb{E}[y_0^{\bar{u}}]) + \int_0^T l(t, y_t^{\bar{u}}, \mathbb{E}[y_t^{\bar{u}}], Y_t^{\bar{u}}, \mathbb{E}[Y_t^{\bar{u}}], Z_t^{\bar{u}}, \mathbb{E}[Z_t^{\bar{u}}], \bar{u}_t) dt \right] \\ &= \mathbb{E}[\alpha(\lim_{n \rightarrow \infty} y_T^{\tilde{U}^{\cdot,n}}, \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[y_T^{\tilde{U}^{\cdot,n}}]) + \beta(\lim_{n \rightarrow \infty} y_0^{\tilde{U}^{\cdot,n}}, \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[y_0^{\tilde{U}^{\cdot,n}}])] \\ &\quad + \int_0^T l\left(t, \lim_{n \rightarrow \infty} y_t^{\tilde{U}^{\cdot,n}}, \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[y_t^{\tilde{U}^{\cdot,n}}], \lim_{n \rightarrow \infty} Y_t^{\tilde{U}^{\cdot,n}}, \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[Y_t^{\tilde{U}^{\cdot,n}}], \lim_{n \rightarrow \infty} Z_t^{\tilde{U}^{\cdot,n}}, \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[Z_t^{\tilde{U}^{\cdot,n}}], \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{U}_t^n\right) dt] \end{aligned}$$

Par la continuité des fonctions α, β et l on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{J}(\bar{u}) &= \mathbb{J}(\tilde{U}_t^n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\alpha(y_T^{\tilde{U}^{\cdot,n}}, \mathbb{E}[y_T^{\tilde{U}^{\cdot,n}}]) + \beta(y_0^{\tilde{U}^{\cdot,n}}, \mathbb{E}[y_0^{\tilde{U}^{\cdot,n}}])] \\ &\quad + \int_0^T l(t, y_t^{\tilde{U}^{\cdot,n}}, \mathbb{E}[y_t^{\tilde{U}^{\cdot,n}}], Y_t^{\tilde{U}^{\cdot,n}}, \mathbb{E}[Y_t^{\tilde{U}^{\cdot,n}}], Z_t^{\tilde{U}^{\cdot,n}}, \mathbb{E}[Z_t^{\tilde{U}^{\cdot,n}}], \tilde{U}_t^n) dt] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\alpha(\sum_{j \geq \theta} \theta_{jn} y_T^{j+n}, \sum_{j \geq \theta} \theta_{jn} \mathbb{E}[y_T^{j+n}]) + \beta(\sum_{j \geq \theta} \theta_{jn} y_0^{j+n}, \sum_{j \geq \theta} \theta_{jn} \mathbb{E}[y_0^{j+n}])] \\ &\quad + \int_0^T l(t, \sum_{j \geq \theta} \theta_{jn} y_t^{j+n}, \sum_{j \geq \theta} \theta_{jn} \mathbb{E}[y_t^{j+n}], \sum_{j \geq \theta} \theta_{jn} Y_t^{j+n}, \sum_{j \geq \theta} \theta_{jn} \mathbb{E}[Y_t^{j+n}], \\ &\quad \sum_{j \geq \theta} \theta_{jn} Z_t^{j+n}, \sum_{j \geq \theta} \theta_{jn} \mathbb{E}[Z_t^{j+n}], \sum_{j \geq \theta} \theta_{jn} U_t^{j+n}) dt] \end{aligned}$$

Comme α, β et l sont convexe, on obtient

$$\begin{aligned}
 \mathbb{J}(\bar{u}.) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j \geq \theta} \theta_{jn} \mathbb{E}[\alpha(y_T^{j+n}, \mathbb{E}[y_T^{j+n}]) + \beta(y_0^{j+n}, \mathbb{E}[y_0^{j+n}])] \\
 &\quad + \int_0^T l(t, y_t^{j+n}, \mathbb{E}[y_t^{j+n}], Y_t^{j+n}, \mathbb{E}[Y_t^{j+n}], Z_t^{j+n}, \mathbb{E}[Z_t^{j+n}], U_t^{j+n}) dt \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \geq \theta} \theta_{jn} \mathbb{J}(u^{j+n}.)
 \end{aligned}$$

Ce que implique

$$\begin{aligned}
 \mathbb{J}(\bar{u}.) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \geq \theta} \theta_{jn} \max \mathbb{J}(u^{j+n}.) \\
 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \max \mathbb{J}(u^{j+n}.) \sum_{k \geq 1} \theta_{jn} \\
 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{J}(u^{j+n}.) \\
 &= \inf \mathbb{J}(v.)_{v \in \mathcal{U}_L}
 \end{aligned}$$

■

Conclusion

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés au problème de contrôle optimal stochastique pour les systèmes régis par des équations différentielles doublement stochastiques progressives-rétrogrades linéaires de type champ moyen,

Nous avons démontré l'existence d'une solution stricte pour ce problème de contrôle, dans le cas où l'ensemble des contrôles admissibles est convexe et compact, et où la fonction de coût est convexe. La démonstration s'est appuyée sur des outils analytiques importants tels que le théorème de Mazur et des techniques de convergence forte des trajectoires des solutions.

Il serait intéressant, dans des travaux futurs, d'étendre ces résultats au cas où l'ensemble des contrôles admissibles n'est pas convexe, ce qui représente un cadre plus général et plus proche de la réalité, notamment dans des domaines tels que la finance mathématique ou l'économie.

Bibliographie

- [1] Berglund N. (Janvier 2014). Martingales et calcul stochastique. M2 Mathématiques, Université d'Orléans.
- [2] Berrouis A., Gherbal N. & Ninouh A. (2023). Stochastic optimal control for dynamics of forward backward doubly SDEs of mean-field type. Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática, 41(3s), 1–11.
- [3] Briand P. (Mars 2001). Équations différentielles stochastiques rétrogrades.
- [4] Breton J.-C. (Septembre/Octobre 2021). Processus stochastiques. M2 Mathématiques, Université de Rennes 1.
- [5] Elie R. & Kharroubi I. (s.d.). Calcul stochastique appliqué à la finance.
- [6] Jeanblanc M. (Septembre 2002). Cours de calcul stochastique. DESS IM EVRY, Option Finance.
- [7] Jeanblanc M. (Septembre 2006). Cours de calcul stochastique. Master 2IF, Université d'Évry
- [8] Jeanblanc M. & Simon T. (Septembre 2005). Éléments de calcul stochastique. IRBID
- [9] Lamberton D. & Lapeyre B. (s.d.). Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance.
- [10] Lévêque O. (2004–2005). Cours de probabilités et calcul stochastique. EPFL, Semestre d'hiver
- [11] Pardoux E. & Peng S. (1994). Backward doubly stochastic differential equations and systems of quasilinear SPDEs. Probability Theory and Related Fields.

Annexe A : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	Espace de probabilité
$(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$	Filtration
Ω	Un ensemble
$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}, \mathbb{P})$	Espace de probabilité filtré
W_t	Mouvement Brownien.
$\mathbb{E}[X]$	L'espérance mathématique ou moyenne du <i>v.a.</i> X
$\mathbb{E}[\cdot \cdot]$	L'espérance conditionnelle
$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels
L^2	l'espace des fonctions de carré intégrable
$\mathbb{R}^d$	Espace réel euclidien de dimension d
$\mathcal{B}(\mathbb{R})$	Tribu borélienne de $\mathbb{R}$
$\mathbb{P} - \text{p.s}$	presque sûrement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$
$s \wedge t$	$\min(s, t)$
$\ \cdot\ $	la norme

EDS	Equation différentielle stochastique	
$EDSR$	Equation différentielle stochastique retrograde	
$EDDSR$	Equation différentielle doublement stochastique retrograde	
va	variable aléatoire	a
MB	Mouvement Brownien.	
$J(.)$	La fonction de coût minimiser.	
$\mathcal{U}$	Ensemble des contrôles admissibles	
$\bar{u}$	Contrôle optimal	

Annexe B : Rappels d'analyse

Définition 3.2.1 (*suite minimisante*) Soit K un sous-ensemble non vide d'un espace de Banach H , et soit $H \subset K$ un sous-ensemble non-vide. Soit un fonctionnel $J : H \rightarrow \mathbb{R}$. On dit qu'une suite $(u^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite minimisante pour la fonction J sur l'ensemble K telle que

$$u^n \in K \forall n \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} J(u^n) = \inf_{u \in K} J(u).$$

Définition 3.2.2 (*L'ensemble compact*) Un ensemble A est dit compact, si et seulement si toute suite d'éléments de A admet une suite extraite convergente dont la limite est un élément de A .

Définition 3.2.3 (*L'ensemble convexe*) On dit que l'ensemble A est dit convexe si pour tous x et y de A le segment $[x, y]$ est inclus dans A , c'est-à-dire

$$\forall x, y \in A \forall \lambda \in [0; 1]; \lambda x + (1 - \lambda) y \in A$$

Définition 3.2.4 (*Fonction convexe*) Supposons que A un ensemble convexe non vide et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est convexe sur A si

$$\forall x, y \in A \forall \lambda \in [0; 1]; f(\lambda x + (1 - \lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y).$$

De plus, la fonction f est strictement convexe sur A si l'inégalité précédente est stricte

lorsque $x \neq y$ et $\lambda \in]0; 1[$.

Théorème 3.2.2 (Théoreme de Mazur) Si x_n converge faiblement vers x alors il existe une suite de combinaisons convexes s_n telle que :

$$s_n = \sum_{i \geq 0} s_i x_i, \text{ ou } s_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i \geq 0} s_i = 1$$

qui converge fortement vers x :

$$\|s_n - x\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Lemme 3.2.1 (Lemme de Gronwall) Soit g une fonction positive localement intégrable définie sur $\mathbb{R}_+$ telle que pour $a, b \geq 0$

$$g(t) \leq a + b \int_0^t g(s) ds.$$

Alors $g(t) \leq a \exp(bt)$ pour tout $t \geq 0$.

Résumé :

A travers ce travail, nous étudions le problème de contrôle optimal stochastique pour des systèmes gouvernés par les équations différentielles doublement stochastiques progressives rétrogrades linéaires de type champ moyen, dans lequel les coefficients dépendent des processus d'état, ainsi que de leur distribution via l'espérance d'une fonction de l'état. De plus la fonction de cout est aussi de type champ moyen.

Nous démontrons, sous certaines conditions (telles que la convexité de l'ensemble de contrôle et celle de la fonction de coût), qu'il existe une solution optimale pour cette classe de problèmes de contrôle stochastique.

Mots-clés :

Mouvement brownien, contrôle optimal, équations différentielles stochastiques rétrogrades, champ moyen, fonction de cout,...

Abstract

In this work, we study the stochastic optimal control problems of systems governed by linear forward backward doubly stochastic differential equations of mean-field type, where the coefficients depend on the state process as well as on their distribution via the expectation of some function of the state. Moreover the cost functional is also of mean field type.

We demonstrate, under certain conditions (such as the convexity of the control set and the cost function), there exists an optimal solution for this class of stochastic control problems.

Key words:

Brownian motion, optimal control, backward stochastic differential equations, mean-field, cost function...

الملخص

في هذا العمل، ندرس مسائل التحكم الأمثل العشوائي للأنظمة تحكمها معادلات تفاضلية مزدوجة عشوائية امامية خلفية خطية من نوع الحقل المتوسط، حيث تعتمد المعاملات على الحالة العلمية وكذلك على توزيعها عبر التوقع الرياضي لدالة معينة للحالة. بالإضافة الى ذلك فان دالة الكلفة هي أيضا من نوع الحقل المتوسط.

تحت شروط معينة (مثل تقعر مجموعة التحكم ودالة الكلفة)، نثبت أنه يوجد حل مثالي لهذه الفئة من المسائل.

الكلمات المفتاحية :

تحكم أمثل، معادلات تفاضلية مزدوجة العشوائية رجعية، حقل متوسط، دالة الكلفة.