

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ KASDI MERBAH OUARGLA

FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET SCIENCES DES MATÉRIAUX

DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté en exécution partielle des exigences du : **Master**

Option : **Probabilités et Statistiques**

Présentée par : **ROUAINE AFRA**

Titre :

Problème du Contrôle Stochastique Relaxé

avec Performance Sensible au Risque

Devant le jury composé de :

BELLATRACH Nadjat	MAA	U.Ouargla	Président
MANSOUL Brahim	MCB	U.Ouargla	Encadreur
SAOULI Mostapha Abdelouahab	MCA	U.Ouargla	Examineur

Juin 2026

Dédicace

Je dédie le fruit de mon parcours universitaire et de mes années d'efforts, en premier lieu, à **moi-même**, en reconnaissance de la patience et de la persévérance dont j'ai fait preuve pour atteindre cette étape.

À celui dont je porte le nom avec fierté et honneur, à mon cher père :

"Djamel"

Que Dieu te préserve et te garde comme soutien et protection pour nous.

À celle qui est le paradis sur terre, la lumière dans mon obscurité, ma chère mère :

"Mebarka"

Que Dieu te protège et veille sur toi.

À mes frères : **Tabet, Yahia et Abderrahmane.**

Et à ma sœur : **Zahret El-Aridj.**

À toute ma famille et à mes chers amis.

Je n'oublie pas mes amies de toujours :

Amani Ghanem, Ouafa Lembarki et Nour El Houda Ouaggad.

Je n'oublie pas de dédier ce travail à :

Mes professeurs **Ben Hmida Kamel** et **Bougrine Larbi**, qui ont contribué à éveiller en moi l'amour des mathématiques et à m'orienter tout au long de mon parcours scolaire.

À vous tous, je dédie le fruit de ce modeste travail.

Remerciements

Je remercie avant tout **Allah**, le Tout-Puissant, de m'avoir accordé la force et la réussite nécessaires pour mener à bien ce travail.

J'adresse mes sincères remerciements à mon encadreur, Monsieur **Mansoul Brahimi**, pour avoir accepté d'encadrer ce travail ainsi que pour ses orientations et remarques qui ont contribué à son élaboration.

Je remercie également les membres du jury, Madame **Belltrache Nadjat** et Monsieur **Saouli Mostapha Abdelouahab**, pour avoir accepté d'évaluer et de discuter ce mémoire. J'exprime ma profonde gratitude à ma famille, particulièrement à **mes parents**, pour leur soutien, leurs encouragements et leurs sacrifices tout au long de mon parcours universitaire.

Je remercie aussi mes amies **Chaima, Wafa, Rania** et **Hala** pour leur soutien et les moments partagés durant nos études.

Enfin, je remercie tous les enseignants de la spécialité **Statistique et Probabilités (2024–2026)**, notamment Madame **Ben Brahimi**, Madame **Bellatrach**, Madame **Arbia**, Monsieur **Mansoul** et Monsieur **Saouli**, pour la qualité de leur enseignement et les connaissances transmises durant ma formation.

À toutes les personnes ayant contribué, de près ou de loin, à ce travail, j'adresse mes sincères remerciements.

Table des matières

Remerciements	ii
Table des matières	iii
Introduction	1
1 Généralités sur le calcul Stochastique	4
1.1 Espérance Conditionnelle	4
1.1.1 Propriétés de l'espérance conditionnelle	5
1.2 Filtration	6
1.3 Processus Stochastique	6
1.4 Martingale	8
1.5 Intégrale Stochastique	8
1.5.1 Propriétés de l'intégrale stochastique	9
1.6 Processus d'Itô	9
1.7 Formule d'Itô	10
1.8 Les Équations Différentielles Stochastiques	11
1.8.1 L'équation différentielle stochastique	11
1.8.2 L'équation différentielle stochastique rétrograde	12
1.8.3 Les équations différentielles doublement stochastiques rétrogrades . .	13

1.8.4	Les équations différentielles doublement stochastiques progressivement rétrogrades	14
2	Principe du Maximum Stochastique Pour un Problème de Contrôle Relaxé	
	Neutre au Risque	16
2.1	Formulation du problème et hypothèses	17
2.2	Estimation des trajectoires	21
2.3	Les conditions nécessaires d'optimalités	35
3	Principe du Maximum Stochastique Pour un Problème de Contrôle Relaxé	
	Sensible au Risque	38
3.1	Formulation du problème	39
3.1.1	Modèle relaxé	39
3.2	Processus auxiliaire	40
3.2.1	Propriétés des équations adjointes transformées	45
3.3	Conditions nécessaires d'optimalité	52
	Conclusion	57
	Bibliographie	58
	Annexe	59

Introduction

Les racines historiques de la théorie du contrôle stochastique plongent au cœur du XVII^e siècle, précisément en 1654, lors des échanges épistolaires célèbres entre Blaise Pascal et Pierre de Fermat. Ces travaux ont marqué la transition d'une vision fataliste du hasard vers une formalisation rigoureuse à travers le concept d'espérance mathématique. Durant des décennies, la théorie du contrôle a été dominée par l'approche dite neutre au risque (Risk-Neutral), qui se limite à l'optimisation des performances moyennes, supposant que les fluctuations s'annulent sur le long terme. Or, face à la complexité des systèmes réels, ce modèle a montré ses limites, ne tenant pas compte de la volatilité et des événements extrêmes. C'est ainsi qu'est né le critère de performance sensible au risque (Risk-Sensitive), qui utilise des fonctions exponentielles pour pénaliser les variances élevées et protéger le système contre les risques rares mais dévastateurs. Pour pallier les difficultés topologiques liées à l'existence de solutions optimales dans ces cadres rigides, le contrôle relaxé (Relaxed Control) est apparu comme une extension mathématique fondamentale. En transformant les décisions ponctuelles en mesures de probabilité, il offre la flexibilité nécessaire pour garantir l'optimalité même sous des conditions d'incertitude sévère, réconciliant ainsi l'héritage probabiliste classique avec les exigences de la commande moderne.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré satisfaisant aux conditions habituelles. Soit T un nombre réel fixe et strictement positif. Supposons que $B = (B_t, 0 \leq t \leq T)$ et $W = (W_t, 0 \leq t \leq T)$ soient deux processus de mouvements browniens standards et mutuellement indépendants, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Nous supposons que : $(\mathcal{F}_t^B) = \sigma(B_s - B_0 : 0 \leq s \leq t) \vee$

$\mathcal{N}, (\mathcal{F}_{t,T}^W) = \sigma(W_s - W_t : t \leq s \leq T) \vee \mathcal{N}$ où $\mathcal{N}$ désigne l'ensemble de tous les ensembles de mesure nulle (ensembles négligeables) par rapport à $\mathbb{P}$, et $U \subset \mathbb{R}$. Pour chaque $t \in [0, T]$, nous définissons $\forall t \geq 0 : \mathcal{F}_t^{(W,B)} := \mathcal{F}_t^B \vee \mathcal{F}_{t,T}^W$. On remarque que la famille $\{\mathcal{F}_t^{(W,B)} : t \in [0, T]\}$ n'est ni croissante ni décroissante, et par conséquent, elle ne constitue pas une filtration. C'est pourquoi, pour chaque $t \in [0, T]$, nous définissons la filtration $\mathcal{G}_t := \mathcal{F}_t^B \vee \mathcal{F}_{0,T}^W$.

Le but de ce mémoire est d'établir les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité, où le système est gouverné par des équations différentielles doublement stochastiques progressive rétrogrades découplées relaxées de la forme :

$$\begin{cases} dx_t^q = \int_U b(t, x_t^q, a) q_t(da) dt + \int_U \sigma(t, x_t^q, a) q_t(da) dB_t, \\ -dy_t^q = \int_U f(t, x_t^q, y_t^q, z_t^q, a) q_t(da) dt + \int_U g(t, x_t^q, y_t^q, z_t^q, a) q_t(da) \overleftarrow{dW}_t - z_t^q dB_t, \\ x_0^q = \zeta, \\ y_T^q = \eta. \end{cases} \quad (1)$$

La fonctionnelle du coût sensible au risque (Risk-sensitive cost functional) associée à (1) est donnée par :

$$\mathcal{J}(q) = \mathbb{E} \left[\exp \theta \left(\varphi(x_T^q) + \psi(y_0^q) + \int_0^T \int_U h(t, x_t^q, y_t^q, z_t^q, a) q_t(da) dt \right) \right]. \quad (2)$$

Nous notons que θ est l'indice de sensibilité au risque. Notre problème de contrôle optimal consiste à minimiser la dernière fonctionnelle du coût sur la classe $\mathcal{R}$ des contrôles admissibles relaxés. Le contrôle μ est le contrôle relaxé optimal s'il satisfait :

$$\mathcal{J}(\mu) = \inf_{q \in \mathcal{R}} \mathcal{J}(q). \quad (3)$$

Ce mémoire se structure de la manière suivante :

- Le premier chapitre constitue essentiellement une introduction ; nous y rappelons quelques notions et théorèmes préliminaires du calcul stochastique dont nous aurons

besoin par la suite, tels que : les processus stochastiques, l'espérance conditionnelle, le mouvement brownien ... etc.

- Dans le deuxième chapitre, nous étudions les conditions nécessaires ainsi que suffisantes d'optimalité, où le système est donné par une équation différentielle doublement stochastiques progressive rétrogrades découplées relaxées avec une fonctionnelle de performance neutre au risque.
- Le troisième chapitre porte sur le cœur de notre travail à savoir le problème de contrôle stochastique relaxé avec une performance sensible au risque. Dans cette partie, nous modifions le critère de performance en utilisant une fonction exponentielle pour intégrer le paramètre de sensibilité au risque. Cela nous conduit à l'étude d'un système d'équations différentielles doublement stochastiques progressive rétrogrades découplées relaxées. L'objectif majeur de ce chapitre est d'établir une version étendue du Principe du Maximum Stochastique (SMP) adaptée à ce critère.

Chapitre 1

Généralités sur le calcul Stochastique

Dans ce chapitre, nous rappelons les outils fondamentaux du calcul stochastique nécessaires à la compréhension de ce travail. Ces concepts constituent le socle mathématique indispensable pour aborder les problèmes de contrôle développés dans les chapitres suivants.

1.1 Espérance Conditionnelle

Espérance Conditionnelle par une variable aléatoire

Définition(Cas discret)1.1: Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes, telles que l'espérance de X sachant $\{Y = y_j\}$ est donnée par :

$$\mathbb{E}(X \mid Y = y_j) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i \mid Y = y_j).$$

telle que :

- $P(X = x_i \mid Y = y_j) = \frac{P(\{Y=y_j\} \cap \{X=x_i\})}{P(Y=y_j)}.$
- $P(Y = y_j) > 0.$

Définition(Cas continu)1.2: Soient X et Y deux variables aléatoires continues, telles que

l'espérance de X sachant Y est donné par :

$$\mathbb{E}(X | Y) = \int_{\mathbb{R}} x f_{X|Y}(x, y) dx.$$

telle que :

- $f_{X|Y}(x, y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}$.
- $f_Y(y) > 0$.

Remarque 1.1: Si X et Y deux variables aléatoires indépendantes, alors :

- $P(X = x_i | Y = y_j) = P(X = x_i)$.
- $f_{X|Y}(x, y) = f_X(x)$.

Espérance conditionnelle par rapport à une tribu

Définition 1.3: Soit $\mathcal{B}$ un sous-tribu de $\mathcal{A}$, et soit $X \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ il existe un unique élément de $\mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$, noté $\mathbb{E}[X | \mathcal{B}]$, tel que :

$$\forall B \in \mathcal{B}, \mathbb{E}[X \mathbb{I}_B] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X | \mathcal{B}] \mathbb{I}_B],$$

On a plus généralement, pour tout variable aléatoire réelle bornée $\mathcal{B}$ -mesurable Y

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X | \mathcal{B}]Y].$$

Si $X \geq 0$, on a $\mathbb{E}[X | \mathcal{B}] \geq 0$ p.s.

Remarque 1.2: Le point crucial est le fait que $\mathbb{E}[X | \mathcal{B}]$ est $\mathcal{B}$ -mesurable.

1.1.1 Propriétés de l'espérance conditionnelle

1. Si $X \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et X est $\mathcal{B}$ -mesurable, alors $\mathbb{E}[X | \mathcal{B}] = X$.
2. L'application $X \rightarrow \mathbb{E}[X | \mathcal{B}]$ est linéaire sur $\mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$.

3. Si $X \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X | \mathcal{B}]] = \mathbb{E}[X]$.
4. Si $X \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, alors $|\mathbb{E}[X | \mathcal{B}]| \leq \mathbb{E}[|X| | \mathcal{B}]$ p.s. et, en conséquence $\mathbb{E}[|\mathbb{E}[X | \mathcal{B}]|] \leq \mathbb{E}[|X|]$. Par conséquent, l'application $X \rightarrow \mathbb{E}[X | \mathcal{B}]$ est une contraction de $\mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
5. Si $X, X' \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $(X \geq X')$, alors $\mathbb{E}[X | \mathcal{B}] \geq \mathbb{E}[X' | \mathcal{B}]$ p.s.

1.2 Filtration

Définition(Filtration)1.4: On appelle $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{I}}$ une filtration d'un espace $(\Omega, \mathcal{F})$ une famille croissante de sous-tribu de $\mathcal{F}$ c'est à dire : $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$, $\forall s \leq t$.

Remarque 1.3:

- **Filtration** $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{I}}$ est continue à droite si : $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s$.
- **Filtration** $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{I}}$ est dite complet si $\mathcal{F}_0$ continue tout les ensembles $\mathbb{P}$ -négligable .
- **Filtration** $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{I}}$ vérifie les conditions habituelles si elle est : $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{I}}$ est complet et $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$ (continue à droite).

1.3 Processus Stochastique

Définition(Processus Stochastique)1.5: On appelle processus stochastique une famille de variables aléatoires $X = \{X_t\}_{t \in I}$, définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Où l'ensemble I est appelé ensemble des indices par le temps $t \geq 0$.

- Si $I \subseteq \mathbb{R}_+$, on dit que l'étude se fait en **temps continu**.
- Si $I \subseteq \mathbb{N}$, on dit que l'étude se fait en **temps discret**.

Remarque 1.4:

1. **Le processus stochastique** permet de représenter l'évolution des phénomènes aléa-

toires dépendant de temps, les modèle mathématique est donner par :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1. (\Omega, \mathcal{F}, P) \implies \text{espace de probabilité.} \\ 2. X : (I \times \Omega, \mathcal{B}(I) \otimes \mathcal{F}) \rightarrow (E, \mathcal{E}). \\ 3. (t, \omega) \rightarrow X(t, \omega) =: X_t(\omega). \\ 4. X \text{ est } \mathcal{B}(I) \otimes \mathcal{F}\text{-mesurable si : } \forall B \in \mathcal{E}, \{X^{-1}(B) \in \mathcal{B}(I) \otimes \mathcal{F}\}. \end{array} \right.$$

2. **Le processus stochastique** $X_t(\omega)$:

- Pour tout $t \in I$: $\omega \rightarrow X_t(\omega)$ est une variable aléatoire.
- Pour tout $\omega \in \Omega$, l'application : $t \rightarrow X_t(\omega)$ est appelée une **trajectoire** du processus.

Définition(Processus Gaussien)1.6: Il est dit un processus gaussien si seulement si : Pour tout $n \geq 1$ est tout $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}_+^n$, $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ est un vecteur gaussien.

Définition(Mouvement brownien)1.7: Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un processus gaussien vérifié les conditions suivantes :

1. $B_0 = 0$ "le M.B issue d'origine".
2. B_t à trajectoires continues.
3. $\forall 0 \leq s \leq t$: $B_t - B_s$ est indépendant de $\mathcal{F}_s$.
4. $\forall 0 \leq s \leq t$: $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$.

Définition(Processus Mesurable)1.8: Soit $X : (\Omega \times \mathbb{R}_+, \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)) \rightarrow (E, \mathcal{E})$.

Un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est dit mesurable si l'application $(t, w) \rightarrow X_t(w)$ est $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ -mesurable. C'est-à-dire :

$$\forall A \in \mathcal{E} : X^{-1}(A) \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+).$$

Définition(Processus Adapté)1.9: Soit $X_t : (\Omega, \mathcal{F}_t) \rightarrow (E, \mathcal{E})$.

Un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)$ si $\forall t \geq 0$, X_t est $\mathcal{F}_t$ -mesurable .

Définition(Processus Progressivement Mesurable)1.10: Un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est progressivement mesurable si :

$$X : (\Omega \times [a, b], F \otimes \mathcal{B}([a, b])) \rightarrow (E, \mathcal{E}) \text{ est mesurable.}$$

Définition(Processus Prévisible)1.11: On dit qu'un processus $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est prévisible pour $\mathcal{A}_t$, si X_0 est $\mathcal{F}_0$ -mesurable et X_t est $\mathcal{F}_{t-1}$ -mesurable pour chaque $t > 0$.

1.4 Martingale

Définition(Martingale)1.12: Un processus stochastique réel adapté $(M_t)_{t \geq 0}$ défini sur l'espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ est dit une ***martingale*** si :

1. $\forall t \geq 0 : \mathbb{E}[|M_t|] < +\infty$.
2. $\forall t \geq 0 : \mathbb{E}[M_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] = M_t$.

Remarque 1.5: Pour les sous martingale et les sur martingale elles vérifient les mêmes conditions que la à l'exception de la deuxième condition qui diffère :

- .Sous Martingale** : $\forall t \geq 0 : \mathbb{E}[M_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] \geq M_t$.
- .Sur Martingale** : $\forall t \geq 0 : \mathbb{E}[M_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] \leq M_t$.

1.5 Intégrale Stochastique

Définition(Intégrale Stochastique)1.13: Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus intégrable, on définit l'intégrale stochastique de $(X_t)_{t \geq 0}$ comme :

$$\int_0^t X_s dB_s, \quad \forall t \geq 0.$$

On va construire l'intégrale stochastique sur l'ensemble de processus X_t adapté càglàd (continus à gauche et limite à droite) vérifiant :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t X_s^2 ds\right] \leq \infty, \quad \forall t \geq 0.$$

1.5.1 Propriétés de l'intégrale stochastique

Propriétés 1.1: $\forall t \geq 0$ et X, Y deux processus $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathbb{R}_+)$

1. *Linéarité :*

$$\int_0^t (aX_s + bY_s)dB_s = a \int_0^t X_s dB_s + b \int_0^t Y_s dB_s, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

2. Si $\int_0^T \mathbb{E}[X_s^2]dt < \infty$, alors $\forall t \leq T$.

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t X_s dB_s\right] = 0.$$

3. *Isométrie de Itô :*

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t X_s dB_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t X_s^2 ds\right].$$

1.6 Processus d'Itô

Définition(Processus d'Itô)1.14: On appelle un processus stochastique X est un processus d'Itô s'écrit sous la forme :

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s,$$

Où X_0 est $\mathcal{F}_0$ -mesurable, K et H sont deux processus progressivement mesurables vérifiant les conditions $\mathbb{P}_{p.s}$:

$$\int_0^t |K_s| ds < \infty \text{ et } \int_0^t |H_s|^2 ds < \infty.$$

1.7 Formule d'Itô

Théorème (1^{ème} Formule d'Itô) 1.1: Soit X_t un processus d'Itô et f une fonction de classe C^2 à dérivées bornées alors :

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle X, X \rangle_s.$$

Théorème (2^{ème} Formule d'Itô) 1.2: Soit X_t un processus d'Itô et f une fonction de classe C^1 par rapport t , de classe C^2 par rapport x à dérivées bornées et $x \in \mathbb{R}$ alors :

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f'_t(s, X_s) ds + \int_0^t f'_x(s, X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''_{x,x}(s, X_s) d\langle X, X \rangle_s.$$

Théorème (3^{ème} Formule d'Itô) 1.3: Soit $(X_i, i = 1, 2)$ deux processus d'Itô et f une fonction de classe C^2 :

$$\begin{aligned} f(X_1(t), X_2(t)) &= f(X_1(0), X_2(0)) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_1}(X_1(s), X_2(s)) dX_1(s) \\ &\quad + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_2}(X_1(s), X_2(s)) dX_2(s) + \frac{1}{2} \int_0^t \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(X_1(s), X_2(s)) d\langle X_1 \rangle_s \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(X_1(s), X_2(s)) d\langle X_2 \rangle_s + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(X_1(s), X_2(s)) d\langle X_1, X_2 \rangle_s \right) \end{aligned}$$

Théorème (Formule d'Itô généralisée) 1.4: Soient $\alpha \in S^2([0, T], \mathbb{R})$, $\beta \in M^2([0, T], \mathbb{R})$, $\gamma \in M^2([0, T], \mathbb{R})$ et $\sigma \in M^2([0, T], \mathbb{R})$. Supposons que :

$$\alpha_t = \alpha(0) + \int_0^t \beta_s ds + \int_0^t \gamma_s d\overleftarrow{W}_s + \int_0^t \sigma_s dB_s, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Alors :

$$|\alpha_t|^2 = |\alpha(0)|^2 + 2 \int_0^t \alpha_s \beta_s ds + 2 \int_0^t \alpha_s \gamma_s d\overleftarrow{W}_s + 2 \int_0^t \alpha_s \sigma_s dB_s - \int_0^t |\gamma_s|^2 ds + \int_0^t |\sigma_s|^2 ds.$$

Et :

$$\mathbb{E}|\alpha_t|^2 = \mathbb{E}|\alpha(0)|^2 + 2\mathbb{E} \int_0^t \alpha_s \beta_s ds - \mathbb{E} \int_0^t |\gamma_s|^2 + \mathbb{E} \int_0^t |\sigma_s|^2 ds.$$

1.8 Les Équations Différentielles Stochastiques

Soit $(x_t)_{t \geq 0}$ et $(y_t)_{t \geq 0}$ et $(z_t)_{t \geq 0}$ sont des processus stochastiques, $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ est un espace de probabilité filtré et $(B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien

1.8.1 L'équation différentielle stochastique

Définition 1.15: Une équation différentielle stochastique (EDS) est donnée sous la forme suivante :

$$\begin{cases} dx_t = b(t, x_t)dt + \sigma(t, x_t)dB_t, \\ x_0 = \zeta. \end{cases} \quad (1.1)$$

telles que :

- b et σ deux fonctions mesurables.
- b est appelée le coefficient dérivé et σ le coefficient diffusion.
- x_0 est une condition initiale de la (EDS).

Remarque 1.6: On dit que l'**EDS** (1.1) admet une solution unique $(x_t)_{t \geq 0}$ si x_t est un processus adapté.

Théorème (Théorème d'existence et d'unicité) 1.5: Le théorème suivant donne des conditions suffisantes sur b et σ pour avoir un résultat d'existence et d'unicité pour (1.1) :

1. b et σ deux fonctions continues.
2. Condition de Lipschitz : $\exists K > 0 : \forall t \in [0, T] \text{ et } \forall x, y \in \mathbb{R} :$

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K|x - y|.$$

3. Condition de croissance linéaire : $\exists C > 0 : \forall t \in [0, T] \forall x \in \mathbb{R} :$

$$|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq C(1 + |x|).$$

4. x_0 indépendant $(B_t)_{t \geq 0}$ et $\mathbb{E}[|x_0|^2] < \infty$.

Alors sous les hypothèses précédentes il existe une solution unique adaptée $(x_t)_{t \geq 0}$ vérifiant l'EDS (1.1).

Preuve. : Pour la preuve de l'existence et de l'unicité de la solution de cette EDS, on peut se référer à [3]. ■

1.8.2 L'équation différentielle stochastique rétrograde

Définition 1.16: Une équation différentielle stochastique rétrograde est donnée sous la forme (voir [4]) :

$$\begin{cases} dy_t = -f(t, y_t, z_t)dt + z_t dB_t, \\ y_T = \epsilon. \end{cases} \quad (1.2)$$

Ou sous la forme suivante :

$$-dy_t = f(t, y_t, z_t)dt - z_t dB_t,$$

telles que :

- La fonction f le générateur de l'EDSR.
- y_T s'appelle une variable aléatoire terminale de l'EDSR.

Remarque 1.7: Une solution de l'**EDSR** (1.2) est un couple de processus $(y_t, z_t)_{t \geq 0}$, telle que y_t est une processus continue adapté z_t est une processus prévisible .

Théorème (Théorème d'existence et d'unicité) 1.6: Soit f une fonction uniformément

Lipschitzienne, il existe une constante $L > 0$ telle que :

$$|f(t, y_1, z_1) - f(t, y_2, z_2)| \leq L(|y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|).$$

Preuve. : Pour la preuve de l'existence et de l'unicité de la solution de cette EDSR, on peut se référer à [4]. ■

1.8.3 Les équations différentielles doublement stochastiques rétrogrades

Définition 1.17: *Une équation différentielle doublement stochastique rétrograde est une équation de la forme suivante (voir [4]) :*

$$\begin{cases} -dy_t = f(t, y_t, z_t)dt + g(t, y_t, z_t)\overleftarrow{dW}_t - z_t dB_t, \\ y_T = \eta. \end{cases} \quad (1.3)$$

telle que :

- f est un générateur ou coefficient de dérive.
- g est un coefficient de diffusion rétrograd.
- $(B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien standard. dont la filtration est associée aux informations du passé.
- $(W_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien indépendant de B_t (mouvement Brownien rétrograde).
- y_T est une condition terminale.

Remarque 1.8: *Une solution de l'**EDSR doublé** (1.3) est un couple de processus $(y_t, z_t)_{t \geq 0}$, telle que y_t est une processus continue adapté z_t est un processus prévisible.*

Théorème (Théorème d'existence et d'unicité) 1.7: *Le théorème suivant donne des conditions suffisantes sur f et g pour avoir un résultat d'existence et d'unicité pour (1.3) :*

1. Les fonctions :

$$(a) f : \mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

$$(b) g : \mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Sont des fonctions mesurables

2. Il existe $L > 0$ et $0 < \alpha < 1$ telle que :

Pour tout t et $(y_1, y_2), (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^m$:

$$|f(t, y_1, z_1) - f(t, y_2, z_2)|^2 \leq L(|y_1 - y_2|^2 + |z_1 - z_2|^2)$$

$$|g(t, y_1, z_1) - g(t, y_2, z_2)|^2 \leq L(|y_1 - y_2|^2 + \alpha|z_1 - z_2|^2)$$

Preuve. Pour la preuve de l'existence et de l'unicité de la solution de cette EDSR doublé, on peut se référer à [7]. ■

1.8.4 Les équations différentielles doublement stochastiques progressivement rétrogrades

Définition 1.18: Ce système combine une **EDS** et une **EDDSR**. Il hérite des caractéristiques de chaque équation et s'écrit sous la forme suivante (voir [4]) :

$$\left\{ \begin{array}{l} dx_t = b(t, x_t, y_t, z_t)dt + \sigma(t, x_t, y_t, z_t)dB_t, \\ -dy_t = f(t, x_t, y_t, z_t)dt + g(t, x_t, y_t, z_t)\overleftarrow{dW}_t - z_t dB_t, \\ x_0 = \zeta, \\ y_T = \eta. \end{array} \right. \quad (1.4)$$

Remarque 1.9:

1. Système fortement couplé ou bien dit d'équations différentielles doublement stochas-

tiques progressivement rétrogrades découplées s'écrit ce la forme :

$$\begin{cases} dx_t = b(t, x_t)dt + \sigma(t, x_t)dB_t, \\ -dy_t = f(t, x_t, y_t, z_t)dt + g(t, x_t, y_t, z_t)d\overleftarrow{W}_t - z_tdB_t, \\ x_0 = \zeta, \\ y_T = \eta. \end{cases}$$

2. **Sur les solutions** : Les solutions de ce système sont traitées de manière distincte.

La composante EDS est résolue indépendamment, suivie par la résolution de la partie EDDSR qui lui est associée.

Chapitre 2

Principe du Maximum Stochastique Pour un Problème de Contrôle Relaxé Neutre au Risque

Ce chapitre vise à établir les conditions nécessaires d'optimalité selon le Principe du Maximum Stochastique (SMP). Nous démontrerons que tout contrôle relaxé optimal est associé à un système équations différentielles doublement stochastiques progressivement rétrogrades découplées. Ce résultat permet de caractériser les contrôles optimaux à l'aide de la fonction de Hamilton et des équations adjointes, tout en prenant en compte la dynamique du système et l'évolution de l'état au cours du temps.

2.1 Formulation du problème et hypothèses

Formulation du problème

Modèle Strict

Soit $(\Omega, \mathcal{F}; (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré satisfaisant aux conditions habituelles. Soit T un nombre réel strictement positif fixé.

Soient $B = (B_t, 0 \leq t \leq T)$ et $W = (W_t, 0 \leq t \leq T)$ deux processus de mouvement standard mutuellement indépendants à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Nous supposons que $(\mathcal{F}_t^B) = \sigma(B_s - B_0 : 0 \leq s \leq t) \vee \mathcal{N}$ et $(\mathcal{F}_{t,T}^W) = \sigma(W_s - W_t : t \leq s \leq T) \vee \mathcal{N}$ où $\mathcal{N}$ désigne la totalité des ensembles $\mathbb{P}$ -négligeables et $U \subset \mathbb{R}$. Pour chaque $t \in [0, T]$, nous définissons $\mathcal{F}_t^{(W,B)} := \mathcal{F}_t^B \vee \mathcal{F}_{t,T}^W$. Notez que la collection $\{\mathcal{F}_t^{(W,B)} : t \in [0, T]\}$ ni croissante ni décroissante, elle ne constitue donc pas une filtration. Pour cette raison pour chaque $t \in [0, T]$ nous définissons la filtration $\mathcal{G}_t := \mathcal{F}_t^B \vee \mathcal{F}_{0,T}^W$.

Dans la suite, nous définirons les espaces utilisés tout au long de cet chapitre.

Soit $\mathcal{M}^2([0, T], \mathbb{R})$ l'ensemble des processus aléatoires $(\Phi_t)_{t \geq 0}$ mesurables unidimensionnels qui satisfont :

- (i) : $\mathbb{E} \left[\int_0^T |\Phi_t|^2 dt \right] < \infty$,
- (ii) : Φ_t et $\mathcal{F}_t^{(W,B)}$ -mesurable, pour tout $t \in [0, T]$.

Soit $S^2([0, T], \mathbb{R})$ l'ensemble des processus aléatoires $(v_t)_{t \geq 0}$ continus unidimensionnels qui satisfont :

- (i) : $\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |v_t|^2 \right] < \infty$,
- (ii) : v_t et $\mathcal{F}_t^{(W,B)}$ -mesurable, pour tout $t \in [0, T]$.

Soit $C^1([0, T], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continûment dérivables définies sur $\mathbb{R}$

Définition 2.1: *Un contrôle admissible est tout processus v à valeurs dans U tel que*

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |v_t|^2 \right] < \infty.$$

Nous désignons par $\mathcal{U}$ l'ensemble de tous les contrôles admissibles, et nous supposons que

l'ensemble $\mathcal{U}$ n'est pas nécessairement convexe.

Pour tout $v \in \mathcal{U}$, nous considérons le système EDDSPR découplées suivant :

$$\begin{cases} dx_t = b(t, x_t^v, v_t)dt + \sigma(t, x_t^v, v_t)dB_t, \\ -dy_t = f(t, x_t^v, y_t^v, z_t^v, v_t)dt + g(t, x_t^v, y_t^v, z_t^v, v_t)d\overleftarrow{W}_t - z_t^v dB_t, \\ x_0^v = \zeta, \\ y_T^v = \eta. \end{cases} \quad (2.1)$$

Où

$$b : [0, T] \times \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}.$$

$$\sigma : [0, T] \times \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}.$$

$$f : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}.$$

$$g : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}.$$

ζ et η sont des variables aléatoires $\mathcal{F}_0^{(W,B)}$ -mesurables et η est une variable aléatoire $\mathcal{F}_T^{(W,B)}$ -mesurable, telles que $\mathbb{E}[|\zeta|^2 + |\eta|^2] < \infty$.

Nous définissons maintenant le type de fonctionnelle de performance neutre au risque suivant avec coût initial et terminal :

$$\mathcal{J}(v) = \mathbb{E} \left[\varphi(x_T^v) + \psi(y_0^v) + \int_0^T h(t, x_t^v, y_t^v, z_t^v, v_t) dt \right]. \quad (2.2)$$

avec $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $h : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}$.

Un contrôle strict $u \in \mathcal{U}$ est dit être un contrôle optimal s'il satisfait :

$$\mathcal{J}(u) = \inf_{v \in \mathcal{U}} \mathcal{J}(v). \quad (2.3)$$

Modèle relaxé

Afin d'être pleinement convaincu que des contrôles optimaux stricts peuvent ne pas exister, même dans les cas les plus simples, il suffit d'examiner l'exemple qui sera présenté ultérieurement. Cela suggère que l'ensemble des contrôles stricts est trop restreint et qu'il devrait être inclus dans une classe plus large, dotée d'une structure topologique plus riche, pour laquelle le problème de contrôle devient résoluble. L'idée du modèle relaxé consiste à remplacer l'ensemble $\mathcal{U}$ des contrôles stricts v par un processus q à valeurs dans $\mathbb{P}(U)$, où $\mathbb{P}(U)$ désigne l'ensemble des mesures de probabilité sur $\mathcal{U}$. Cet espace possède une structure topologique particulièrement riche ; pour plus de détails, voir Bahlali [8] et El Karoui et al. [5].

Dans les problèmes de contrôle stochastique relaxé, l'objectif est d'optimiser le comportement d'un système gouverné par des EDDSPRs en utilisant une forme plus flexible de contrôle, appelée contrôle relaxé. Celui-ci étend les méthodes classiques de contrôle en considérant des mesures de probabilité sur les contrôles stricts plutôt que des contrôles déterministes classiques.

Définition 2.2: *Un contrôle relaxé est une variable aléatoire $q : \Omega \longrightarrow \mathcal{K}$,*

telle que

$$q(\omega, dt, da) = q(dt, da),$$

et vérifiant que, pour tout $t \in [0, T]$, le processus q_t est $\mathcal{F}_t$ -mesurable.

On note par $\mathcal{R}$ l'ensemble de tous ces contrôles relaxés.

Le système d'état dans le cas des contrôles relaxés est donné par :

$$\begin{cases} dx_t^q = \int_U b(t, x_t^q, a) q_t(da) dt + \int_U \sigma(t, x_t^q, a) q_t(da) dB_t, \\ -dy_t^q = \int_U f(t, x_t^q, y_t^q, z_t^q, a) q_t(da) dt + \int_U g(t, x_t^q, y_t^q, z_t^q, a) q_t(da) \overleftarrow{dW}_t - z_t^q dB_t, \\ x_0^q = \xi, \\ y_T^q = \eta. \end{cases} \quad (2.4)$$

La fonction de coût à minimiser, sur l'ensemble $\mathcal{R}$ des contrôles relaxés, est donnée par l'expression suivante :

$$\mathcal{J}(q) = \mathbb{E} \left[\Phi(x_T^q) + \Psi(y_0^q) + \int_0^T \int_{\mathcal{U}} h(t, x_t^q, y_t^q, z_t^q, a) q_t(da) dt \right].$$

Un contrôle relaxé μ est dit optimal s'il satisfait la condition suivante :

$$\mathcal{J}(\mu) = \inf_{q \in \mathcal{R}} \mathcal{J}(q).$$

Hypothèses :

Pour garantir l'existence et l'unicité de la solution de notre système, s'assurer que nos résultats ne divergent pas vers l'infini, et afin de pouvoir établir les conditions d'optimalité, nous formulons les hypothèses suivantes :

1. Condition de Lipschitz :

(H1) : Il existe des constantes $K \geq 0, 0 < \gamma < 1$ telle que pour tout $(w, t) \in \Omega \times [0, T], x_i \in \mathbb{R} \times \mathcal{U}$ et $(x_i, y_i, z_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathcal{U}, i = 1, 2$; on a :

$$\begin{cases} |b(t, x_1, q_t) - b(t, x_2, q_t)|^2 \leq K|x_1 - x_2|^2 \\ |\sigma(t, x_1, q_t) - \sigma(t, x_2, q_t)|^2 \leq K(|x_1 - x_2|^2 \\ |f(t, x_1, y_1, z_1, q_t) - f(t, x_2, y_2, z_2, q_t)|^2 \leq K(|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2 + |z_1 - z_2|^2) \\ |g(t, x_1, y_1, z_1, q_t) - g(t, x_2, y_2, z_2, q_t)|^2 \leq K(|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2) + \gamma|z_1 - z_2|^2 \end{cases}$$

2. Condition de dérivabilité :

(H2) : Les fonctions b et σ sont continûment dérivables par rapport à (x) .

(H3) : Les fonctions f , h et g sont continûment dérivables par rapport à (x, z, y) et ψ par rapport à (y) .

3. Condition de bornitude des dérivées :

(H4) : Toutes les dérivées des fonctions f , g et h sont bornées par $:K(1+|x|+|y|+|z|)$.

Toutes les dérivées des fonctions b , σ et φ sont bornées par $:K(1+|x|)$, et la dérivée de ψ est bornée par $:K(1+|y|)$.

4. Condition de continuité et de bornitude de la fonction de coût :

(H5 :) $h(t, x_t, y_t, z_t, q_t) \leq S(t) + Kz_t^2$ où S est une fonction déterministe.

On note que les fonctions f et g sont conjointement mesurables telles que, pour tout (x_t, y_t, z_t, q_t) , elles appartiennent à $M^2([0, T], \mathbb{R})$.

2.2 Estimation des trajectoires

L'ensemble des contrôles relaxés $\mathcal{R}$ est convexe, par conséquent, la méthode classique pour dériver les conditions nécessaires d'optimalité pour les contrôles relaxés consiste à utiliser la méthode de perturbation convexe.

Pour cela, soit $\mu \in \mathcal{R}$ un contrôle relaxé optimal et notons par $\{(x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu), 0 \leq t \leq T\}$ sa solution correspondante de (2.4). Ensuite, pour chaque $t \in [0, T]$, nous définissons un contrôle relaxé perturbé comme suit :

$$\mu_t^\epsilon = \mu_t + \epsilon(q_t - \mu_t),$$

pour un $\epsilon > 0$ suffisamment petit, $t \in [0, T]$ et un élément arbitraire q de $\mathcal{R}$. Alors $\mu_t^\epsilon \in \mathcal{R}$. Notons par $(x_t^\epsilon, y_t^\epsilon, z_t^\epsilon)$ la solution de (2.4) associée à μ_t^ϵ . Nos inégalités variationnelles peuvent alors être dérivées de l'inégalité :

$$\mathcal{J}(\mu^\epsilon) - \mathcal{J}(\mu) \geq 0.$$

Lemme 2.1: *Supposons que les hypothèses (H1) et (H2) soient vérifiées, alors nous avons :*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} |x_t^\epsilon - x_t^\mu|^2 \right] = 0, \quad (2.5)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} |y_t^\epsilon - y_t^\mu|^2 \right] = 0, \quad (2.6)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[\int_0^T |z_t^\epsilon - z_t^\mu|^2 dt \right] = 0. \quad (2.7)$$

Preuve. : Prouvons maintenant(2.5) nous avons :

$$x_t^\mu = \int_0^t \int_U b(s, x_s^\mu, a) \mu_s(da) ds + \int_0^t \int_U \sigma(s, x_s^\mu, a) \mu_s(da) dB_s,$$

et

$$x_t^\epsilon = \int_0^t \int_U b(s, x_s^\epsilon, a) \mu_s^\epsilon(da) ds + \int_0^t \int_U \sigma(s, x_s^\epsilon, a) \mu_s^\epsilon(da) dB_s,$$

Alors

$$\begin{aligned} x_t^\epsilon - x_t^\mu &= \int_0^t \int_U b(s, x_s^\epsilon, a) \mu_s^\epsilon(da) ds + \int_0^t \int_U \sigma(s, x_s^\epsilon, a) \mu_s^\epsilon(da) dB_s \\ &\quad - \int_0^t \int_U b(s, x_s^\mu, a) \mu_s(da) ds - \int_0^t \int_U \sigma(s, x_s^\mu, a) \mu_s(da) dB_s \\ &= \int_0^t \left[\int_U b(s, x_s^\epsilon, a) \mu_s^\epsilon(da) - \int_U b(s, x_s^\mu, a) \mu_s(da) \right] ds \\ &\quad + \int_0^t \left[\int_U \sigma(s, x_s^\epsilon, a) \mu_s^\epsilon(da) - \int_U \sigma(s, x_s^\mu, a) \mu_s(da) \right] dB_s. \end{aligned}$$

D'après la définition de μ_t^ϵ , on obtient :

$$\begin{aligned} x_t^\epsilon - x_t^\mu &= \int_0^t \left[\int_U b(s, x_s^\epsilon, a) (\mu_s + \epsilon(q_s - \mu_s))(da) - \int_U b(s, x_s^\mu, a) \mu_s(da) \right] ds \\ &\quad + \int_0^t \left[\int_U \sigma(s, x_s^\epsilon, a) (\mu_s + \epsilon(q_s - \mu_s))(da) - \int_U \sigma(s, x_s^\mu, a) \mu_s(da) \right] dB_s \\ &= \int_0^t \left[\int_U b(s, x_s^\epsilon, a) \mu_s(da) - \int_U b(s, x_s^\mu, a) \mu_s(da) \right] ds \\ &\quad + \epsilon \int_0^t \left[\int_U b(s, x_s^\epsilon, a) (q_s - \mu_s)(da) \right] ds \\ &\quad + \int_0^t \left[\int_U \sigma(s, x_s^\epsilon, a) \mu_s(da) - \int_U \sigma(s, x_s^\mu, a) \mu_s(da) \right] dB_s \\ &\quad + \epsilon \int_0^t \left[\int_U \sigma(s, x_s^\epsilon, a) (q_s - \mu_s)(da) \right] dB_s. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Young, on obtient :

$$\begin{aligned}
 |x_t^\epsilon - x_t^\mu|^2 &\leq 4 \left| \int_0^t \left[\int_U b(s, x_s^\epsilon, a) \mu_s(da) - \int_U b(s, x_s^\mu, a) \mu_s(da) \right] ds \right|^2 \\
 &\quad + 4\epsilon^2 \left| \int_0^t \left[\int_U b(s, x_s^\epsilon, a) (q_s - \mu_s)(da) \right] ds \right|^2 \\
 &\quad + 4 \left| \int_0^t \left[\int_U \sigma(s, x_s^\epsilon, a) \mu_s(da) - \int_U \sigma(s, x_s^\mu, a) \mu_s(da) \right] dB_s \right|^2 \\
 &\quad + 4\epsilon^2 \left| \int_0^t \left[\int_U \sigma(s, x_s^\epsilon, a) (q_s - \mu_s)(da) \right] dB_s \right|^2.
 \end{aligned}$$

En utilisant l'isométrie et en considérant l'espérance, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}|x_t^\epsilon - x_t^\mu|^2 &\leq 4\mathbb{E} \left[\int_0^t \left| \int_U b(s, x_s^\epsilon, a) \mu_s(da) - \int_U b(s, x_s^\mu, a) \mu_s(da) \right|^2 ds \right] \\
 &\quad + 4\epsilon^2 \mathbb{E} \left[\int_0^t \left| \int_U b(s, x_s^\epsilon, a) (q_s - \mu_s)(da) \right|^2 ds \right] \\
 &\quad + 4\mathbb{E} \left[\int_0^t \left| \int_U \sigma(s, x_s^\epsilon, a) \mu_s(da) - \int_U \sigma(s, x_s^\mu, a) \mu_s(da) \right|^2 ds \right] \\
 &\quad + 4\epsilon^2 \mathbb{E} \left[\int_0^t \left| \int_U \sigma(s, x_s^\epsilon, a) (q_s - \mu_s)(da) \right|^2 ds \right] \\
 &\leq 4\mathbb{E} \left[\int_0^t \left| \int_U [b(s, x_s^\epsilon, a) - b(s, x_s^\mu, a)] \mu_s(da) \right|^2 ds \right] \\
 &\quad + 4\epsilon^2 \mathbb{E} \left[\int_0^t \left[\int_U |b(s, x_s^\epsilon, a) (q_s - \mu_s)|^2 (da) \right] ds \right] \\
 &\quad + 4\mathbb{E} \left[\int_0^t \left| \int_U [\sigma(s, x_s^\epsilon, a) - \sigma(s, x_s^\mu, a)] \mu_s(da) \right|^2 ds \right] \\
 &\quad + 4\epsilon^2 \mathbb{E} \left[\int_0^t \left[\int_U |\sigma(s, x_s^\epsilon, a) (q_s - \mu_s)|^2 (da) \right] ds \right].
 \end{aligned}$$

Sous les hypothèses (H1)et(H2), en particulier b et σ étant uniformément lipschitziennes par

rapport à x , on :

$$\mathbb{E}|x_t^\epsilon - x_t^\mu|^2 \leq C\mathbb{E}\left[\int_0^t |x_s^\epsilon - x_s^\mu|^2 ds\right] + M\epsilon^2.$$

D'après le lemme de Gronwall, on obtient :

$$\mathbb{E}|x_t^\epsilon - x_t^\mu|^2 \leq M\epsilon^2 \int_0^t e^{Cs} ds,$$

Alors

$$\mathbb{E}|x_t^\epsilon - x_t^\mu|^2 \leq M\epsilon^2(e^{Ct} - 1),$$

si $\epsilon \rightarrow 0$, on obtient :

$$\mathbb{E}|x_t^\epsilon - x_t^\mu|^2 \rightarrow 0.$$

Enfin, en appliquant l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy, on obtient :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{E}\left[\sup_{t \in [0, T]} |x_t^\epsilon - x_t^\mu|^2\right] = 0.$$

Prouvons maintenant (2.6) et (2.7) :

En appliquant la formule d'Itô à $(y_t^\epsilon - y_t^\mu)^2$, et en introduisant l'intégrale de t à T , nous obtenons :

$$\begin{aligned} |y_t^\epsilon - y_t^\mu|^2 &= 2 \int_t^T |y_s^\epsilon - y_s^\mu| \left(\int_U f(s, x_s^\epsilon, y_s^\epsilon, z_s^\epsilon, a) \mu_s^\epsilon(da) - \int_U f(s, x_s^\mu, y_s^\mu, z_s^\mu, a) \mu_s(da) \right) ds \\ &\quad + 2 \int_t^T |y_s^\epsilon - y_s^\mu| \left(\int_U g(s, x_s^\epsilon, y_s^\epsilon, z_s^\epsilon, a) \mu_s^\epsilon(da) - \int_U g(s, x_s^\mu, y_s^\mu, z_s^\mu, a) \mu_s(da) \right) d\overleftarrow{W}_s \\ &\quad + 2 \int_t^T |y_s^\epsilon - y_s^\mu| (z_s^\epsilon - z_s^\mu) dB_s \\ &\quad - \int_t^T \left(\int_U g(s, x_s^\epsilon, y_s^\epsilon, z_s^\epsilon, a) \mu_s^\epsilon(da) - \int_U g(s, x_s^\mu, y_s^\mu, z_s^\mu, a) \mu_s(da) \right)^2 ds \\ &\quad + \int_t^T |z_s^\epsilon - z_s^\mu|^2 ds. \end{aligned}$$

D'après la définition de μ_t^ϵ , et à partir de l'intégralité $|a + b|^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 |y_t^\epsilon - y_t^\mu|^2 &\leq 2 \int_t^T |y_s^\epsilon - y_s^\mu| \left[\int_U \left(f(s, x_s^\epsilon, y_s^\epsilon, z_s^\epsilon, a) - f(s, x_s^\mu, y_s^\mu, z_s^\mu, a) \right) \mu_s(da) \right] ds \\
 &\quad + 2\epsilon \int_t^T |y_s^\epsilon - y_s^\mu| \left(\int_U f(s, x_s^\epsilon, y_s^\epsilon, z_s^\epsilon, a) (q_s(da) - \mu_s(da)) \right) ds \\
 &\quad + 2 \int_t^T |y_s^\epsilon - y_s^\mu| \left[\int_U \left(g(s, x_s^\epsilon, y_s^\epsilon, z_s^\epsilon, a) - g(s, x_s^\mu, y_s^\mu, z_s^\mu, a) \right) \mu_s(da) \right] \overleftarrow{dW}_s \\
 &\quad + 2\epsilon \int_t^T |y_s^\epsilon - y_s^\mu| \left(\int_U g(s, x_s^\epsilon, y_s^\epsilon, z_s^\epsilon, a) (q_s(da) - \mu_s(da)) \right) \overleftarrow{dW}_s \\
 &\quad - 2 \int_t^T |y_s^\epsilon - y_s^\mu| (z_s^\epsilon - z_s^\mu) dB_s \\
 &\quad - \int_t^T \left| \int_U \left(g(s, x_s^\epsilon, y_s^\epsilon, z_s^\epsilon, a) - g(s, x_s^\mu, y_s^\mu, z_s^\mu, a) \right) \mu_s(da) \right|^2 ds \\
 &\quad - 2\epsilon^2 \int_t^T \left| \int_U g(s, x_s^\epsilon, y_s^\epsilon, z_s^\epsilon, a) (q_s(da) - \mu_s(da)) \right|^2 ds \\
 &\quad + \int_t^T |z_s^\epsilon - z_s^\mu|^2 ds.
 \end{aligned}$$

D'après les hypothèses, en particulier f et g sont uniformément Lipschitziennes par rapport

à x, y, z , et d'après la formule de Young, pour tout $\theta > 0$, $2ab \leq \frac{1}{(1+\theta)}a^2 + (1+\theta)b^2$.

Où $0 \leq \alpha \leq 1$. En prenant l'espérance, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}|y_t^\epsilon - y_t^\mu|^2 + \mathbb{E} \left[\int_t^T |z_s^\epsilon - z_s^\mu|^2 ds \right] &\leq (1+\theta) \mathbb{E} \left[\int_t^T |y_s^\epsilon - y_s^\mu|^2 ds \right] \\
 &\quad + \epsilon^2 \frac{C}{(1+\theta)} \mathbb{E} \left[\int_t^T \left| \int_U f(s, x_s^\epsilon, y_s^\epsilon, z_s^\epsilon, a) (\mu_s(da) - q_s(da)) \right|^2 ds \right] \\
 &\quad + C\epsilon^2 \mathbb{E} \left[\int_t^T \left| \int_U g(s, x_s^\epsilon, y_s^\epsilon, z_s^\epsilon, a) (\mu_s(da) - q_s(da)) \right|^2 ds \right] \\
 &\quad + \frac{C}{(1+\theta)} \mathbb{E} \left[\int_t^T (|x_s^\epsilon - x_s^\mu|^2 + |y_s^\epsilon - y_s^\mu|^2) ds \right] \\
 &\quad + \frac{C}{(1+\theta)} \mathbb{E} \left[\int_t^T |z_s^\epsilon - z_s^\mu|^2 ds \right]
 \end{aligned}$$

$$+ C\mathbb{E}\left[\int_t^T (|x_s^\epsilon - x_s^\mu|^2 + |y_s^\epsilon - y_s^\mu|^2)ds\right] \\ + \alpha\mathbb{E}\left[\int_s^T |z_s^\epsilon - z_s^\mu|^2 ds\right].$$

Par conséquent :

$$\mathbb{E}|y_t^\epsilon - y_t^\mu|^2 + \left(1 - \alpha - \frac{C}{(1+\theta)}\right)\mathbb{E}\left[\int_t^T |z_s^\epsilon - z_s^\mu|^2 ds\right] \leq \left((1+\theta) + \frac{C}{(1+\theta)} + C\right)\mathbb{E}\left[\int_t^T |y_s^\epsilon - y_s^\mu|^2 ds\right] + \alpha_t^\epsilon,$$

Où

$$\alpha_t^\epsilon = \mathbb{E}(\eta^\epsilon - \eta^\mu)^2 + c_\theta\mathbb{E}\left[\int_t^T |x_s^\epsilon - x_s^\mu|^2 ds + \epsilon^2 k_\theta\right].$$

D'après (2.5), c_θ et k_θ sont des réels non négatifs, nous avons :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \alpha_t^\epsilon = 0. \quad (2.8)$$

Soit :

$$\theta = \begin{cases} 0, & C \leq \frac{1-\alpha}{2} \\ \frac{2\theta+\alpha-1}{1-\alpha}, & C \leq \frac{1-\alpha}{2} \end{cases}$$

Alors $1 - \alpha - \frac{C}{(1+\theta)} \leq \frac{1-\alpha}{2} > 0$. On peut choisir $c_1 = 1 - \alpha - \frac{C}{(1+\theta)}$ et $c_2 = (1 + \theta) + \frac{C}{(1+\theta)} + C$

Nous en déduisons que :

$$\mathbb{E}|y_t^\epsilon - y_t^\mu|^2 + c_1\mathbb{E}\left[\int_t^T |z_s^\epsilon - z_s^\mu|^2 ds\right] \leq c_2\mathbb{E}\left[\int_t^T |y_s^\epsilon - y_s^\mu|^2 ds\right] + \alpha_t^\epsilon,$$

D'après l'inégalité ci-dessus, il en résulte que :

$$\mathbb{E}|y_t^\epsilon - y_t^\mu|^2 \leq c_2\mathbb{E}\left[\int_t^T |y_s^\epsilon - y_s^\mu|^2 ds\right] + \alpha_t^\epsilon, \quad (2.9)$$

et

$$\mathbb{E} \left[\int_t^T |z_s^\epsilon - z_s^\mu|^2 ds \right] \leq \frac{c_2}{c_1} \mathbb{E} \left[\int_t^T |y_s^\epsilon - y_s^\mu|^2 ds \right] + \frac{1}{c_1} \alpha_t^\epsilon, \quad (2.10)$$

En utilisant (2.8) et (2.9), le lemme de Gronwall et l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy, nous pouvons déduire (2.6). Par la suite, (2.7) est obtenue à partir de (2.5) et (2.6). ■

Lemme 2.2: *Considérons $(\tilde{x}_t, \tilde{y}_t, \tilde{z}_t)$ comme solution des équations variationnelles associées au **EDDSRP**(2.4) :*

$$\begin{cases} d\tilde{x}_t = [\int_U b_x(t, x_t^\mu, a) \mu_t(da) \tilde{x}_t + \int_U b(t, x_t^\mu, a) (q_t(da) - \mu_t(da))] dt \\ \quad + [\int_U \sigma(t, x_t^\mu, a) \mu_t(da) \tilde{x}_t + \int_U \sigma(t, x_t^\mu, a) (q_t(da) - \mu_t(da))] dB_t, \\ \tilde{x}_0 = 0. \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} d\tilde{y}_t = [\int_U (f_x(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, a) \tilde{x}_t + f_y(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, a) \tilde{y}_t \\ \quad + f_z(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, a) \tilde{z}_t) \mu_t(da)] dt + \int_U f(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, a) (q_t(da) - \mu_t(da)) dt \\ \quad + [\int_U (g_x(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, a) \tilde{x}_t + g_y(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, a) \tilde{y}_t \\ \quad + g_z(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, a) \tilde{z}_t) \overleftarrow{dW}_t \\ \quad + \int_U g(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, a) (q_t(da) - \mu_t(da)) \overleftarrow{dW}_t + \tilde{z} dB_t, \\ \tilde{y}_T = 0. \end{cases}$$

On a alors les identités suivantes :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E} \left[\left| \frac{x_t^\epsilon - x_t^\mu}{\epsilon} - \tilde{x}_t \right|^2 \right] \right] = 0, \quad (2.11)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E} \left[\left| \frac{y_t^\epsilon - y_t^\mu}{\epsilon} - \tilde{y}_t \right|^2 \right] \right] = 0, \quad (2.12)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_0^T \mathbb{E} \left[\left| \frac{z_t^\epsilon - z_t^\mu}{\epsilon} - \tilde{z}_t \right|^2 \right] \right] = 0. \quad (2.13)$$

Preuve. : Montrons maintenant que nous avons le résultat suivant. La démonstration repose principalement sur la formule d'Itô, le développement de Taylor et le théorème de convergence dominée.

Notons, pour simplifier :

$$X_t^\epsilon = \frac{x_t^\epsilon - x_t^\mu}{\epsilon} - \tilde{x}_t, \quad (2.14)$$

$$Y_t^\epsilon = \frac{y_t^\epsilon - y_t^\mu}{\epsilon} - \tilde{y}_t, \quad (2.15)$$

$$Z_t^\epsilon = \frac{z_t^\epsilon - z_t^\mu}{\epsilon} - \tilde{z}_t. \quad (2.16)$$

(i) On va maintenant démontrer (2.11), on montre que :

$$\begin{aligned} X_t^\epsilon &= \frac{1}{\epsilon} \int_0^t \left[\int_U b(s, x_s^\epsilon, a) \mu_s^\epsilon(da) - \int_U b(s, x_s^\mu, a) \mu_s(da) \right] ds \\ &\quad + \frac{1}{\epsilon} \int_0^t \left[\int_U \sigma(s, x_s^\epsilon, a) \mu_s^\epsilon(da) - \int_U \sigma(s, x_s^\mu, a) \mu_s(da) \right] dB_s \\ &\quad - \int_0^t \int_U b_x(s, x_s^\mu, a) \tilde{x}_s ds - \int_0^t \int_U \sigma_x(s, x_s^\mu, a) \mu_s(da) \tilde{x}_s dB_s \\ &\quad - \int_0^t \int_U b(s, x_s^\mu, a) (q_s(da) - \mu_s(da)) ds - \int_0^t \int_U \sigma(s, x_s^\mu, a) (q_s(da) - \mu_s(da)) dB_s. \end{aligned}$$

D'après la définition de μ_t^ϵ , on obtient :

$$\begin{aligned} X_t^\epsilon &= \frac{1}{\epsilon} \int_0^t \left[\int_U \left(b(s, x_s^\epsilon, a) - b(s, x_s^\mu, a) \right) \mu_s^\epsilon(da) \right] ds \\ &\quad + \frac{1}{\epsilon} \left[\int_U \left(\sigma(s, x_s^\epsilon, a) - \sigma(s, x_s^\mu, a) \right) \mu_s^\epsilon(da) \right] dB_s \\ &\quad - \int_0^t \left[\int_U b_x(s, x_s^\mu, a) \mu_s(da) \tilde{x}_s \right] ds \\ &\quad - \int_0^t \left[\int_U \sigma_x(s, x_s^\mu, a) \mu_s(da) \tilde{x}_s \right] dB_s, \end{aligned}$$

On utilise la formule de Taylor avec un reste intégral, on obtient :

$$\int_U b(s, x_s^\epsilon, a) \mu_s(da) - \int_U b(s, x_s^\mu, a) \mu_s(da) = \int_0^1 \int_U b_x(s, x_s^\mu + \lambda(x_s^\epsilon - x_s^\mu), a) (x_s^\epsilon - x_s^\mu) \mu_s(da) d\lambda ds,$$

et

$$\int_U \sigma(s, x_s^\epsilon, a) \mu_s(da) - \int_U \sigma(s, x_s^\mu, a) \mu_s(da) = \int_0^1 \int_U \sigma_x(s, x_s^\mu + \lambda(x_s^\epsilon - x_s^\mu), a) (x_s^\epsilon - x_s^\mu) \mu_s(da) d\lambda ds,$$

et

$$\begin{aligned} X_t^\epsilon &= \frac{1}{\epsilon} \int_0^t \int_0^1 \int_U b_x(s, x_s^\mu + \lambda(x_s^\epsilon - x_s^\mu), a) (x_s^\epsilon - x_s^\mu) \mu_s^\epsilon(da) d\lambda ds \\ &\quad + \frac{1}{\epsilon} \int_0^t \int_0^1 \int_U \sigma_x(s, x_s^\mu + \lambda(x_s^\epsilon - x_s^\mu), a) (x_s^\epsilon - x_s^\mu) \mu_s^\epsilon(da) d\lambda dB_s \\ &\quad - \int_0^t \int_0^1 \int_U b_x(s, x_s^\mu, a) \mu_s(da) \tilde{x}_s d\lambda ds - \int_0^t \int_0^1 \int_U \sigma_x(s, x_s^\mu, a) \mu_s(da) \tilde{x}_s d\lambda dB_s \\ &\quad + \int_0^t \int_0^1 \int_U b_x(s, x_s^\mu + \lambda(x_s^\epsilon - x_s^\mu), a) \tilde{x}_s \mu_s(da) d\lambda ds \\ &\quad + \int_0^t \int_0^1 \int_U \sigma_x(s, x_s^\mu + \lambda(x_s^\epsilon - x_s^\mu), a) \tilde{x}_s \mu_s(da) d\lambda dB_s. \end{aligned}$$

En remplaçant (2.14) par sa valeur, on obtient :

$$\begin{aligned} X_t^\epsilon &= \int_0^t \int_0^1 \int_U b_x(s, x_s^\mu + \lambda(x_s^\epsilon - x_s^\mu), a) X_s^\epsilon \mu_s(da) d\lambda ds \\ &\quad + \int_0^t \int_0^1 \int_U \sigma_x(s, x_s^\mu + \lambda(x_s^\epsilon - x_s^\mu), a) X_s^\epsilon \mu_s(da) d\lambda dB_s + \alpha_t^\lambda, \end{aligned}$$

Où

$$\begin{aligned} \alpha_t^\lambda &= - \int_0^t \int_0^1 \int_U b_x(s, x_s^\mu, a) \mu_s(da) \tilde{x}_s d\lambda ds - \int_0^t \int_0^1 \int_U \sigma_x(s, x_s^\mu, a) \mu_s(da) \tilde{x}_s d\lambda dB_s \\ &\quad + \int_0^t \int_0^1 \int_U b_x(s, x_s^\mu + \lambda(x_s^\epsilon - x_s^\mu), a) \tilde{x}_s \mu_s(da) d\lambda ds \\ &\quad + \int_0^t \int_0^1 \int_U \sigma_x(s, x_s^\mu + \lambda(x_s^\epsilon - x_s^\mu), a) \tilde{x}_s \mu_s(da) d\lambda dB_s. \end{aligned}$$

et

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \alpha_t^\lambda = 0.$$

En prenant l'espérance et en utilisant l'inégalité de Young, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|X_t^\epsilon|^2 &\leq 3\mathbb{E}\left[\int_0^t \int_0^1 \int_U \left|b_x(s, x_s^\mu + \lambda(x_s^\epsilon - x_s^\mu), a)X_t^\epsilon\right|^2 \mu_s(da) d\lambda ds\right] \\ &\quad + 3\mathbb{E}\left[\int_0^t \int_0^1 \int_U \left|\sigma_x(s, x_s^\mu + \lambda(x_s^\epsilon - x_s^\mu), a)X_t^\epsilon\right|^2 \mu_s(da) d\lambda ds\right] + 3\mathbb{E}|\alpha_t^\lambda|^2, \end{aligned}$$

D'après les hypothèses (H2) et (H4), b_x et σ_x sont continues et uniformément bornées, on obtient :

$$\mathbb{E}|X_t^\epsilon|^2 \leq C\mathbb{E}\left[\int_0^t |X_s^\epsilon|^2 ds\right] + C\mathbb{E}|\alpha_t^\lambda|^2.$$

En utilisant le lemme de Gronwall, on a :

$$\mathbb{E}|X_t^\epsilon|^2 \leq C\mathbb{E}|\alpha_t^\lambda|^2 \int_0^t e^{Cs} ds \rightarrow 0,$$

En appliquant l'inégalité de B-D-G, on obtient le résultat souhaité.

(ii) Prouvons les équation (2.12) et (2.13) :

Si nous désignons, pour tout $t \in [0, T]$

$$(t, x_s^\epsilon, y_s^\epsilon, z_s^\epsilon, a) = (t, \rho^\epsilon, a),$$

$$(t, x_s^\mu, y_s^\mu, z_s^\mu, a) = (t, \rho^\mu, a), \tag{2.17}$$

En appliquant la formule d'Itô à $(y_s^\epsilon - y_s^\mu)^2$, en prenant l'espérance et en utilisant la formule de Young, pour tout $\theta > 0$ nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|Y_t^\epsilon|^2 + \mathbb{E}\left[\int_t^T |Z_s^\epsilon|^2 ds\right] &\leq \frac{1}{\theta}\mathbb{E}\left[\int_t^T |Y_s^\epsilon|^2 ds\right] \\
&\quad + \theta\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|\left(\int_U f(s, \rho^\epsilon, a)\mu_s^\epsilon(da) - \int_U f(s, \rho^\mu, a)\mu_s(da)\right)\right.\right. \\
&\quad \left.\left.+ \int_U \left(f_x(s, \rho^\mu, a)\tilde{x}_s + f_y(s, \rho^\mu, a)\tilde{y}_s + f_z(s, \rho^\mu, a)\tilde{z}_s\right)\mu_s(da)\right.\right. \\
&\quad \left.\left.+ \int_U \left(f(s, \rho^\epsilon, a) - f(s, \rho^\mu, a)\right)\left(q_s(da) - \mu_s(da)\right)\right|^2 ds\right] \\
&\quad + \theta\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|\left(\int_U g(s, \rho^\epsilon, a)\mu_s^\epsilon(da) - \int_U g(s, \rho^\mu, a)\mu_s(da)\right)\right.\right. \\
&\quad \left.\left.+ \int_U \left(g_x(s, \rho^\mu, a)\tilde{x}_s + g_y(s, \rho^\mu, a)\tilde{y}_s + g_z(s, \rho^\mu, a)\tilde{z}_s\right)\mu_s(da)\right.\right. \\
&\quad \left.\left.+ \int_U \left(g(s, \rho^\epsilon, a) - g(s, \rho^\mu, a)\right)\left(q_s(da) - \mu_s(da)\right)\right|^2 ds\right].
\end{aligned}$$

Pour simplifier, nous posons :

$$\Lambda_t^{\epsilon, \lambda}(a) = (t, x_t^\mu + \lambda\epsilon(X_t^\epsilon + \tilde{x}_s), y_t^\mu + \lambda\epsilon(Y_t^\epsilon + \tilde{y}_s), z_t^\mu + \lambda\epsilon(Z_t^\epsilon + \tilde{z}_s), a). \quad (2.18)$$

À partir de la dernière inégalité, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|Y_t^\epsilon|^2 + \mathbb{E}\left[\int_t^T |Z_s^\epsilon|^2 ds\right] &\leq \frac{1}{\theta}\mathbb{E}\left[\int_t^T |Y_s^\epsilon|^2 ds\right] + \theta\mathbb{E}\left[\left|F_s^y Y_s^\epsilon + F_s^z Z_s^\epsilon + \zeta_s^\epsilon\right|^2 ds\right] \\
&\quad + \theta\mathbb{E}\left[\left|G_s^y Y_s^\epsilon + G_s^z Z_s^\epsilon + \zeta'^\epsilon\right|^2 ds\right],
\end{aligned} \quad (2.19)$$

Où

$$\begin{aligned}
F_t^y &= \int_0^1 \int_U f_y\left(\Lambda_t^{\epsilon, \lambda}(a)\right)\mu_t(da)d\lambda, \\
F_t^z &= \int_0^1 \int_U f_z\left(\Lambda_t^{\epsilon, \lambda}(a)\right)\mu_t(da)d\lambda, \\
G_t^y &= \int_0^1 \int_U g_y\left(\Lambda_t^{\epsilon, \lambda}(a)\right)\mu_t(da)d\lambda, \\
G_t^z &= \int_0^1 \int_U g_z\left(\Lambda_t^{\epsilon, \lambda}(a)\right)\mu_t(da)d\lambda,
\end{aligned}$$

avec ζ_s^ϵ et $\zeta_s^{\prime\epsilon}$ donnés comme suit :

$$\begin{aligned}\zeta_s^\epsilon &= \int_t^T \int_U f_x \left(\Lambda_s^{\epsilon, \lambda}(a) \right) X_s^\epsilon \mu_s(da) ds + \int_t^T \int_U \left[f_x \left(\Lambda_s^{\epsilon, \lambda}(a) \right) (x_s^\epsilon - x_s^\mu) \right. \\ &\quad \left. + f_y \left(\Lambda_s^{\epsilon, \lambda}(a) \right) (y_s^\epsilon - y_s^\mu) + f_z \left(\Lambda_s^{\epsilon, \lambda}(a) \right) (z_s^\epsilon - z_s^\mu) \right] (q_s(da) - \mu_s(da)) ds, \\ \zeta_s^{\prime\epsilon} &= \int_t^T \int_U g_x \left(\Lambda_s^{\epsilon, \lambda}(a) \right) X_s^\epsilon \mu_s(da) ds + \int_t^T \int_U \left[g_x \left(\Lambda_s^{\epsilon, \lambda}(a) \right) (x_s^\epsilon - x_s^\mu) \right. \\ &\quad \left. + g_y \left(\Lambda_s^{\epsilon, \lambda}(a) \right) (y_s^\epsilon - y_s^\mu) + g_z \left(\Lambda_s^{\epsilon, \lambda}(a) \right) (z_s^\epsilon - z_s^\mu) \right] (q_s(da) - \mu_s(da)) ds.\end{aligned}$$

D'après le hypothèse (H4), $F_y^t, F_z^t, G_y^t, G_z^t$ sont bornées, par conséquent :

$$\mathbb{E} |Y_t^\epsilon|^2 + \mathbb{E} \left[\int_t^T |Z_s^\epsilon|^2 ds \right] \leq \frac{1}{\theta} \mathbb{E} \left[\int_t^T |Y_s^\epsilon|^2 ds \right] + \theta C \mathbb{E} \left[\int_t^T |Y_s^\epsilon|^2 ds \right] + \theta C \mathbb{E} \left[\int_t^T |Z_s^\epsilon|^2 ds \right] + \Pi_t^\epsilon.$$

Où

$$\Pi_t^\epsilon = \theta C \mathbb{E} \left[\int_t^T |\zeta_s^\epsilon|^2 ds \right] + \theta C \mathbb{E} \left[\int_t^T |\zeta_s^{\prime\epsilon}|^2 ds \right].$$

Si nous choisissons

$$\theta = \frac{1}{2C} \quad ,$$

Nous déduisons

$$\mathbb{E} |Y_t^\epsilon|^2 + \frac{1}{2} \mathbb{E} \left[\int_t^T |Z_s^\epsilon|^2 ds \right] \leq \left(2C + \frac{1}{2} \right) \mathbb{E} \left[\int_t^T |Y_s^\epsilon|^2 ds \right] + \Pi_t^\epsilon.$$

À partir de l'inégalité ci dessus, nous avons :

$$\mathbb{E} |Y_t^\epsilon|^2 \leq \left(2C + \frac{1}{2} \right) \mathbb{E} \left[\int_t^T |Y_s^\epsilon|^2 ds \right] + \Pi_t^\epsilon,$$

et

$$\mathbb{E} \left[\int_t^T |Z_s^\epsilon|^2 ds \right] \leq 2 \left(2C + \frac{1}{2} \right) \mathbb{E} \left[\int_t^T |Y_s^\epsilon|^2 ds \right] + 2\Pi_t^\epsilon. \quad (2.20)$$

Selon l'hypothèse (H4) et puisque f_x, f_y, f_z, g_x, g_y et g_z sont continues et bornées, d'après

(2.5)-(2.7) et (2.11) nous obtenons :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Pi_t^\epsilon = 0 \quad (2.21)$$

En utilisant (2.19) et (2.21), le lemme de Gronwall et l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy, nous obtenons (2.12). Enfin (2.13) et déduit de (2.12), (2.20) et (2.21). ■

Lemme 2.3: Soit μ un contrôle relaxé optimal avec les trajectoires associées $(x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu)$. Alors, pour tout élément $q \in \mathcal{R}$, et en utilisant la notation abrégée (2.17), nous avons :

$$\begin{aligned} 0 \leq & \mathbb{E}[\Phi_x(x_T^\mu) \tilde{x}_s + \Psi_y(y_0^\mu) \tilde{y}_t] + \mathbb{E} \left[\int_0^T \int_U \left(h_x(t, \rho^\mu, a) \tilde{x}_t \right. \right. \\ & \left. \left. + h_y(t, \rho^\mu, a) \tilde{y}_t + h_z(t, \rho^\mu, a) \tilde{z} \right) \mu_t(da) dt \right] \\ & + \mathbb{E} \left[\int_0^T \int_U h(t, \rho^\mu, a) (q_t - \mu_t)(da) dt \right]. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Preuve. : D'après l'optimalité de μ_t , nous obtenons :

$$0 \leq \mathcal{J}(\mu_t^\epsilon) - \mathcal{J}(\mu_t), \quad (2.23)$$

Ainsi, en utilisant la définition de μ_t^ϵ :

$$\mu_t^\epsilon = \mu_t + \epsilon(q_t - \mu_t), \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} 0 \leq & \mathbb{E}[\Phi(x_T^\epsilon) - \Phi(x_T^\mu)] + \mathbb{E}[\Psi(y_0^\epsilon) - \Psi(y_0^\mu)] \\ & + \epsilon \mathbb{E} \left[\int_0^T \int_U h(t, \rho^\epsilon, a) (q_t - \mu_t)(da) dt \right] \\ & + \mathbb{E} \left[\int_0^T \int_U \left(h(t, \rho^\epsilon, a) - h(t, \rho^\mu, a) \right) \mu_t(da) dt \right], \end{aligned}$$

Pour simplifier, si nous utilisons la notation abrégée (2.18), nous en déduisons :

$$\begin{aligned}
0 \leq & \mathbb{E} \left[\int_0^1 \left[\Phi_x(x_T^\mu + \lambda \epsilon (X_T^\epsilon + \tilde{x}_T)) \tilde{x}_T \right] d\lambda \right] \\
& + \mathbb{E} \left[\int_0^1 \left[\Psi_y(y_0^\mu + \lambda \epsilon (Y_0^\epsilon + \tilde{y}_0)) \tilde{y}_0 \right] d\lambda \right] \\
& + \mathbb{E} \left[\int_0^T \int_0^1 \int_U \left(h_x \left(\Lambda_t^{\epsilon, \lambda}(a) \right) \tilde{x}_t \right. \right. \\
& \left. \left. + h_y \left(\Lambda_t^{\epsilon, \lambda}(a) \right) \tilde{y}_t + h_z \left(\Lambda_t^{\epsilon, \lambda}(a) \right) \tilde{z}_t \right) \mu_t(da) d\lambda dt \right] \\
& + \mathbb{E} \left[\int_0^T \int_U h(t, \rho^\epsilon, a) (q_t - \mu_t)(da) dt \right] + \gamma_t^\epsilon.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Où γ_t^ϵ est défini comme h_x :

$$\begin{aligned}
\gamma_t^\epsilon = & \mathbb{E} \left[\int_0^1 \left[\Phi_x(x_T^\mu + \lambda \epsilon (X_T^\epsilon + \tilde{x}_T)) X_T^\epsilon \right] d\lambda \right] \\
& + \mathbb{E} \left[\int_0^1 \left[\Psi_y(y_0^\mu + \lambda \epsilon (Y_0^\epsilon + \tilde{y}_0)) Y_0^\epsilon \right] d\lambda \right] \\
& + \mathbb{E} \left[\int_0^T \int_0^1 \int_U \left(h_x \left(\Lambda_t^{\epsilon, \lambda}(a) \right) X_t^\epsilon + h_y \left(\Lambda_t^{\epsilon, \lambda}(a) \right) Y_t^\epsilon + h_z \left(\Lambda_t^{\epsilon, \lambda}(a) \right) Z_t^\epsilon \right) \mu_t(da) d\lambda dt \right] \\
& + \int_0^T \int_0^1 \int_U \left[h_x \left(\Lambda_t^{\epsilon, \lambda}(a) \right) (x_t^\epsilon - x_t^\mu) + h_y \left(\Lambda_t^{\epsilon, \lambda}(a) \right) (y_t^\epsilon - y_t^\mu) + h_z \left(\Lambda_t^{\epsilon, \lambda}(a) \right) (z_t^\epsilon - z_t^\mu) \right. \\
& \left. (q_t - \mu_t)(da) d\lambda dt \right].
\end{aligned}$$

Puisque les dérivées Φ_x, Ψ_y, h_x, h_y et h_z sont continues et bornées, en appliquant ici (2.5)-(2.7) et (2.11)-(2.13), l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le théorème de convergence dominée donnent :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \gamma_t^\epsilon = 0. \tag{2.26}$$

Par conséquent, en laissant ϵ tendre vers 0 dans (2.25) et en utilisant ce fait, nous obtenons (2.22), ce qui complète la démonstration. ■

2.3 Les conditions nécessaires d'optimalités

Dans cette section, nous présentons notre résultat principal concernant le principe du maximum.

Fonction Hamiltonien :

La **fonction de Hamilton** $\mathcal{H}$ est définie de $[0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathcal{P}(U) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par la formule suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(t, x, y, z, q, p_1, Q_1, p_2, Q_2) = & \int_U h(s, \rho^q, a) q(da) \\ & + p_1 \cdot \int_U b(s, \rho^q, a) q(da) + Q_1 \cdot \int_U \sigma(s, x, a) q(da) \\ & + p_2 \cdot \int_U f(s, \rho^q, a) q(da) + Q_2 \cdot \int_U g(s, \rho^q, a) q(da), \end{aligned}$$

Où l'on note : $(s, \rho^q, a) = (s, x^q, y^q, z^q, a)$.

L'équation adjointe

Théorème (Conditions nécessaires d'optimalité) 2.1: *Soit μ un contrôle relaxé optimal minimisant la fonctionnelle J sur l'espace $\mathbb{R}$, et soient (x^μ, y^μ, z^μ) les solutions correspondantes de l'équation (2.4). Alors, il existe une solution unique (p_1, Q_1, p_2, Q_2) au système d'équations adjointes suivant, qui est un système d'équations différentielles stochastiques progressives-rétrogrades.*

En utilisant la notation (2.17), l'équation adjointe est constituée de deux équations, à savoir :

$$\begin{cases} dp_1^\mu = - \left[\int_U h_x(s, \rho^\mu, a) \mu(da) + \int_U b_x(s, \rho^\mu, a) p_1(t) \mu(da) + Q_1(t) \cdot \int_U \sigma_x(s, \rho^\mu, a) \mu(da) \right] dt \\ \quad - \left[p_2(t) \int_U f_x(s, \rho^\mu, a) \mu(da) + Q_2(t) \cdot \int_U g_x(s, \rho^\mu, a) \mu(da) \right] dt + Q_1(t) dB_t, \\ p_1^\mu(T) = \Phi_x(x_T^\mu), \end{cases} \quad (2.27)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} dp_2^\mu = \left[\int_U h_y(s, \rho^\mu, a) \mu(da) + \int_U f_y(s, \rho^\mu, a) p_2(t) \mu(da) + \int_U g_y(s, \rho^\mu, a) Q_2(t) \mu(da) \right] dt \\ \quad + \left[\int_U h_z(s, \rho^\mu, a) \mu(da) + \int_U f_z(s, \rho^\mu, a) p_2(t) \mu(da) + \int_U g_z(s, \rho^\mu, a) Q_2(t) \mu(da) \right] dB_t \\ \quad + Q_2(t) \overleftarrow{dW}_t, \\ p_2^\mu(0) = \Psi_y(y_0^\mu). \end{array} \right. \quad (2.28)$$

et $(p_1, Q_1, p_2, Q_2) \in L^2([0, T], \mathbb{R}) \times L^2([0, T], \mathbb{R}) \times L^2([0, T], \mathbb{R}) \times L^2([0, T], \mathbb{R})$.

Tel que $\forall q_t \in \mathcal{P}(U)$,

$$\begin{aligned} & \mathcal{H}(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, q_t, p_1^\mu(t), Q_1^\mu(t), p_2^\mu(t), Q_2^\mu(t)) \\ & \geq \mathcal{H}(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, \mu_t, p_1^\mu(t), Q_1^\mu(t), p_2^\mu(t), Q_2^\mu(t)). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Preuve. : À partir de l'inégalité variationnelle (2.22) et des valeurs de $p_1^\mu(0)$ et $p_2^\mu(T)$ dans les EDDSPRs (2.28) et (2.29), il s'ensuit que

$$\begin{aligned} 0 \leq & \mathbb{E}[p_1^\mu(T) \tilde{x}_T] + \mathbb{E}[p_2^\mu(0) \tilde{y}_0] + \mathbb{E} \left[\int_0^T \left[\int_U h_x(t, \rho^\mu, a) \tilde{x}_t \right. \right. \\ & \left. \left. + h_y(t, \rho^\mu, a) \tilde{y}_t + h_z(t, \rho^\mu, a) \tilde{z}_t \right] \mu_t(da) dt \right] \\ & + \mathbb{E} \left[\int_0^T \int_U h(t, \rho^\mu, a) (q_t - \mu_t)(da) dt \right], \end{aligned}$$

Pour tout $t \in \mathcal{R}$.

En appliquant maintenant la formule d'Itô, pour calculer $(p_1^\mu(t) \tilde{x}_t)$ et $(p_2^\mu(t) \tilde{y}_t)$, pour tout $q \in \mathbb{R}$, la dernière inégalité devient

$$\begin{aligned} 0 \leq & \mathbb{E} \left[\int_0^t \left[\mathcal{H}(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, q_t, p_1^\mu(t), Q_1^\mu(t), p_2^\mu(t), Q_2^\mu(t)) \right. \right. \\ & \left. \left. - \mathcal{H}(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, \mu_t, p_1^\mu(t), Q_1^\mu(t), p_2^\mu(t), Q_2^\mu(t)) \right] dt \right]. \end{aligned}$$

Soit maintenant μ un contrôle relaxé optimal et soit F un élément arbitraire de la σ -algèbre $\mathcal{F}_t$, et posons $\Sigma = q_t \mathbf{1}_F + \mu_t \mathbf{1}_{\Omega-F}$. Il est évident que Σ est un contrôle relaxé admissible. En appliquant l'inégalité ci-dessus avec Σ , nous obtenons :

$$0 \leq \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_F \{ \mathcal{H}(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, q_t, p_1^\mu(t), Q_1^\mu(t), p_2^\mu(t), Q_2^\mu(t)) \right. \\ \left. - \mathcal{H}(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, \mu_t, p_1^\mu(t), Q_1^\mu(t), p_2^\mu(t), Q_2^\mu(t)) \} \right],$$

$$\forall F \in \mathcal{F}_t.$$

Ce qui implique que :

$$0 \leq \mathbb{E} \left[\{ \mathcal{H}(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu; q_t, p_1^\mu(t), Q_1^\mu(t), p_2^\mu(t), Q_2^\mu(t)) \right. \\ \left. - \mathcal{H}(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, \mu_t, p_1^\mu(t), Q_1^\mu(t), p_2^\mu(t), Q_2^\mu(t)) / \mathcal{F}_t \} \right].$$

La quantité à l'intérieur de l'espérance conditionnelle est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_t$ et ainsi l'inégalité (2.29) se déduit immédiatement. ■

Chapitre 3

Principe du Maximum Stochastique Pour un Problème de Contrôle Relaxé Sensible au Risque

Dans ce chapitre, nous développons le problème de contrôle optimal où le système est gouverné par une équation différentielle doublement stochastique progressive-rétrograde avec une fonctionnelle de performance sensible au risque. Pour commencer, nous introduisons le cadre du cas neutre au risque comme une extension du système de contrôle initial, où une solution optimale existe.

Nos études établissent d'abord les conditions d'optimalité nécessaires sous la forme d'un principe du maximum stochastique sensible au risque, dérivé par des techniques variationnelles et des arguments de dualité.

Nous complétons suffisantes, qui garantissent qu'un contrôle relaxé admissible atteignant le maximum de l'Hamiltonien constitue effectivement une stratégie optimale.

3.1 Formulation du problème

Le cadre mathématique développé dans le Chapitre 2 demeure inchangé. Puisque seule la fonctionnelle de coût diffère du cas neutre au risque, nous n'en rappelons pas les éléments déjà introduits et nous présentons directement la formulation du problème de contrôle relaxé sensible au risque.

3.1.1 Modèle relaxé

Définition 3.1: Un contrôle relaxé q est une variable aléatoire de processus $q(w, dt, da)$ définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{P}(U)$, processus progressivement mesurable par rapport à $(\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$, tel que pour tout t , $I_{[0, T]} q_t$ et $\mathcal{G}_t$ -mesurable et $\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \int_U |a|^2 q_t(da) \right] < \infty$.

Remarque 3.1: Considérons l'ensemble des contrôles relaxés. Pour chaque $q \in \mathcal{R}$, le système contrôlé est donné par :

$$\begin{cases} dx_t^q = \int_U b(t, x_t^q, a) q_t(da) dt + \int_U \sigma(t, x_t^q, a) q_t(da) dB_t, \\ -dy_t^q = \int_U f(t, x_t^q, y_t^q, z_t^q, a) q_t(da) dt + \int_U g(t, x_t^q, y_t^q, z_t^q, a) q_t(da) d\overleftarrow{W}_t - z_t^q dB_t, \\ x_0^q = \zeta, \\ y_T^q = \eta. \end{cases} \quad (3.1)$$

Le coût espéré associé à un contrôle relaxé q et défini sous forme de performance sensible au risque :

$$\mathcal{J}(q) = \mathbb{E} \left[\exp \theta \left(\varphi(x_T^q) + \psi(y_0^q) + \int_0^T \int_U h(t, x_t^q, y_t^q, z_t^q, a) q_t(da) dt \right) \right]. \quad (3.2)$$

Le contrôle μ est le contrôle relaxé optimal s'il satisfait :

$$\mathcal{J}(\mu) = \inf_{q \in \mathcal{R}} \mathcal{J}(q). \quad (3.3)$$

Notre objectif est d'établir les conditions d'optimalité nécessaires ainsi que suffisantes pour

le principe du maximum stochastique relaxé.

Remarque 3.2: Dans le modèle relaxé, l'avantage de $\mathcal{P}(U)$ est la convexité, et les coefficients du système (3.1) sont linéaires par rapport à la variable de contrôle relaxé.

3.2 Processus auxiliaire

Comme nous le savons, il n'existe pas de solution à un tel problème de contrôle avec utilité exponentielle ; pour cette raison, nous pouvons introduire le processus auxiliaire ξ , qui est la solution de l'EDS .

$$d\xi_t^q = \int_U h(t, x_t^q, y_t^q, z_t^q, a) q_t(da) dt, \quad \xi_0^q = 0. \quad (3.4)$$

Alors notre problème de contrôle $\{(3.1), (3.2), (3.3)\}$ est équivalent à :

$$\left\{ \begin{array}{l} d\xi_t^q = \int_U h(t, x_t^q, y_t^q, z_t^q, a) q_t(da) dt, \\ dx_t^q = \int_U b(t, x_t^q, a) q_t(da) dt + \int_U \sigma(t, x_t^q, a) q_t(da) dB_t, \\ -dy_t^q = \int_U f(t, x_t^q, y_t^q, z_t^q, a) q_t(da) dt + \int_U g(t, x_t^q, y_t^q, z_t^q, a) q_t(da) d\overleftarrow{W}_t - z_t^q dB_t, \\ \xi_0^q = 0, \quad x_0^q = \zeta, \quad y_T^q = \eta, \\ \mathcal{J}(q) = \mathbb{E}[\exp \theta(\varphi(x_T^q) + \psi(y_0^q) + \xi_T^q)] \\ \quad =: \mathbb{E}[\Gamma(\xi_T, x_T, y_0)], \\ \mathcal{J}(\mu) = \inf_{q \in \mathcal{R}} \mathcal{J}(q). \end{array} \right. \quad (3.5)$$

Nous définissons A_T^θ comme suit :

$$A_T^\theta = \exp \theta \Phi_T,$$

Où

$$\Phi_T = \varphi(x_T^q) + \psi(y_0^q) + \int_0^T \int_U h(t, x_t^q, y_t^q, z_t^q, a) q_t(da) dt.$$

Lemme 3.1: Supposons que les hypothèses (2.1) soient vérifiées, alors la fonction de perte

sensible au risque est donnée par :

$$\begin{aligned}\Xi_\theta &= \frac{1}{\theta} \ln \mathbb{E}[\exp \theta \Phi_T] \\ &= \mathbb{E}[\Phi_T] + \frac{\theta}{2} \text{var}[\Phi_T] + o(\theta^2).\end{aligned}$$

Preuve. : Nous avons $\Xi_\theta = \frac{1}{\theta} \ln \mathbb{E}[\exp \theta \Phi_T]$, en utilisant le développement de Taylor des fonction exp et ln respectivement, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\Xi_\theta &= \frac{1}{\theta} \ln \mathbb{E}[\exp \theta \Phi_T] \\ &= \frac{1}{\theta} \ln \mathbb{E} \left[1 + \theta \Phi_T + \frac{(\theta \Phi_T)^2}{2!} + o([\theta \Phi_T]^2) \right] \\ &= \frac{1}{\theta} \ln \left[1 + \mathbb{E}(\theta \Phi_T) + \mathbb{E} \left(\frac{(\theta \Phi_T)^2}{2!} \right) + \mathbb{E}(o([\theta \Phi_T]^2)) \right] \\ &= \frac{1}{\theta} \left\{ \mathbb{E}(\theta \Phi_T) + \mathbb{E} \left(\frac{(\theta \Phi_T)^2}{2!} \right) + \mathbb{E}(o([\theta \Phi_T]^2)) \right\} \\ &\quad - \frac{1}{\theta} \frac{\left\{ \mathbb{E}(\theta \Phi_T) + \mathbb{E} \left(\frac{(\theta \Phi_T)^2}{2!} \right) + \mathbb{E}(o([\theta \Phi_T]^2)) \right\}^2}{2} \\ &= \mathbb{E}[\Phi_T] + \frac{\theta}{2} \text{var}[\Phi_T] + o(\theta^2),\end{aligned}$$

d'où les résultats. ■

Notation 3.1: Tout au long de cet chapitre, nous devons utiliser les notations suivantes pour chaque fonction $\phi \in \{f, b, \sigma, g, h, \psi\}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi(t) = \phi(t, x_t^q, y_t^q; z_t^q, a) \\ \phi^\mu(t) = \phi(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, a) \\ H^\theta(t) = H^\theta(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, \vec{p}(t), \vec{P}(t), q_t) \\ \tilde{H}^\theta(t) = \tilde{H}^\theta(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, \vec{p}(t), \vec{P}(t), \mathbb{V}^\theta(t), l(t), q_t) \\ \partial H^\theta(t) = H^\theta(t, x_t^q, y_t^q, z_t^q, \vec{p}(t), \vec{P}(t), q_t) - H^\theta(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, \vec{p}(t), \vec{P}(t), \mu_t) \\ \phi_\delta(t) = \frac{\partial \phi}{\partial \delta}(t, x_t^q, y_t^q, z_t^q, a), \quad \text{où } \delta =: x, y, z \end{array} \right.$$

Lemme 3.2: Nous supposons que les hypothèses (H2), (H3) et (H4) sont satisfaites. Alors, il existe trois paires uniques de processus adaptés à $\mathcal{G}_t$, notées (p_1, P_1) , (p_2, P_2) et (p_3, P_3) qui sont la solution du système suivant :

$$\left\{ \begin{aligned} d\vec{p}(t) = & - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \int_U h_x(t)q_t(da) & \int_U b_x(t)q_t(da) & \int_U f_x(t)q_t(da) \\ \int_U h_y(t)q_t(da) & 0 & \int_U f_y(t)q_t(da) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \end{pmatrix} dt \\ & - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \int_U \sigma_x(t)q_t(da) & \int_U g_x(t)q_t(da) \\ 0 & 0 & \int_U g_y(t)q_t(da) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \end{pmatrix} dt \\ & + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \end{pmatrix} \overleftarrow{dW}_t \\ & - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \int_U h_z(t)q_t(da) & 0 & \int_U f_z(t)q_t(da) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \end{pmatrix} dB_t \\ & - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \int_U g_x(t)q_t(da) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \end{pmatrix} dB_t, \end{aligned} \right. \\ \\ \left\{ \begin{pmatrix} p_1(T) \\ p_2(T) \\ p_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta A_T^\theta \\ \theta \varphi_x(x_T^\mu) A_T^\theta \\ \theta \psi_y(y_0^\mu) A_T^\theta \end{pmatrix} \right. , \tag{3.6}$$

où

$$\mathbb{E} \sum_{i=1}^3 \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |p_i(t)|^2 + \int_0^T |P_i(t)|^2 dt \right] < \infty.$$

Preuve. Considérons le système (3.5), Nous posons $p_1(t)$ comme le processus adjoint par

rapport à l'EDS (3.4), $p_2(t)$ le processus adjoint de l'EDS (3.5), et $p_3(t)$ sera le processus adjoint de la EDDSPR (3.5). Nous avons :

$$\begin{cases} dp_1(t) = -H_\xi^\theta(t)dt + P_1(t)dB_t, \\ p_1(T) = \Gamma_\xi(T) = \theta A_T^\theta, \\ dp_2(t) = -H_x^\theta(t)dt + P_2(t)dB_t, \\ p_2(T) = \Gamma_x(T) = \theta \varphi_x(x_T^\mu) A_T^\theta, \\ dp_3(t) = -H_y^\theta(t)dt - H_z^\theta(t)dB_t + P_3(t)\overleftarrow{dW}_t, \\ p_3(0) = -\Gamma_y(0) = -\theta \varphi_y(y_0^\mu) A_T^\theta, \end{cases} \quad (3.7)$$

avec

$$\mathcal{J}(q) = \mathbb{E}[\Gamma(\xi_T, x_T, y_0)],$$

et

$$\begin{aligned} H^\theta(t) &= H^\theta\left(t, \xi_t^q, x_t^q, y_t^q, z_t^q, q_t, \vec{p}(t), \vec{P}(t)\right) \\ &= \left(\int_U h(t)q_t(da)\right)p_1(t) + \left(\int_U b(t)q_t(da)\right)p_2(t) \\ &\quad + \left(\int_U \sigma(t)q_t(da)\right)P_2(t) + \left(\int_U f(t)q_t(da)\right)p_3(t) \\ &\quad + \left(\int_U g(t)q_t(da)\right)P_3(t). \end{aligned} \quad (3.8)$$

En remplaçant toutes les dérivées de la fonctionnelle Hamiltonienne H^θ par rapport à toutes leurs composantes ξ, x, y et z , dans les équations adjointes (3.7), nous obtenons :

$$\begin{aligned} dp_1(t) &= P_1(t)dB_t \\ dp_2(t) &= -\left[\left(\int_U h_x(t)q_t(da)\right)p_1(t) + \left(\int_U b_x(t)q_t(da)\right)p_2(t) \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_U \sigma_x(t)q_t(da)\right)P_2(t) + \left(\int_U f_x(t)q_t(da)\right)p_3(t)\right]dt \\ &\quad - \left(\int_U g_x(t)q_t(da)\right)P_3(t)dt + P_2(t)dB_t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 dp_3(t) = & - \left[\left(\int_U h_y(t) q_t(da) \right) p_1(t) + \left(\int_U f_y(t) q_t(da) \right) p_3(t) \right] dt \\
 & - \left(\int_U g_y(t) q_t(da) \right) P_3(t) dt - \left(\int_U h_z(t) q_t(da) \right) p_1(t) dB_t \\
 & - \left[\left(\int_U f_z(t) q_t(da) \right) p_3(t) + \left(\int_U g_z(t) q_t(da) P_3(t) \right) \right] dB_t \\
 & + P_3(t) \overleftarrow{dW}_t.
 \end{aligned}$$

Ensuite, nous obtenons la forme matricielle suivante :

$$\begin{aligned}
 d\vec{p}_t = & - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \int_U h_x(t) q_t(da) & \int_U b_x(t) q_t(da) & \int_U f_x q_t(da) \\ \int_U h_y(t) q_t(da) & 0 & \int_U f_y(t) q_t(da) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \end{pmatrix} dt \\
 & - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \int_U \sigma_x(t) q_t(da) & \int_U g_x(t) q_t(da) \\ 0 & 0 & \int_U g_y(t) q_t(da) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \end{pmatrix} dt \\
 & + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \end{pmatrix} \overleftarrow{dW}_t - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \int_U g_z(t) q_t(da) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \end{pmatrix} dB_t \\
 & - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \int_U h_z(t) q_t(da) & 0 & \int_U f_z(t) q_t(da) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \end{pmatrix} dB_t \\
 & \begin{pmatrix} p_1(T) \\ p_2(T) \\ p_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta A_T^\theta \\ \theta \varphi_x(x_T^\mu) A_T^\theta \\ -\theta \varphi_y(y_0^\mu) A_T^\theta \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

En utilisant la notation (2.1), nous avons le résultat désiré (3.2). ■

En utilisant la notation (2.1), le théorème suivant constitue le principe du maximum stochastique pour les équations différentielles doubles progressives-rétrogrades relaxées et neutres face au risque .

Théorème 3.1: *Nous supposons que les hypothèses (H1), (H2), (H3) et (H4) sont vérifiées, et que $(\xi^\mu, x^\mu, y^\mu, z^\mu)$ est une solution optimale de (3.5). Alors, les équations adjointes (3.2) admettent une solution unique de processus adaptés à $\mathcal{G}_t, (p_1, P_1), (p_2, P_2)$ et (p_3, P_3) telle que :*

$$\partial H^\theta(t) \geq 0, \quad (3.9)$$

pour tout $q \in \mathcal{R}$, presque partout $t \in [0, T]$, $\mathbb{P}$ -presque sûrement, avec $H^\theta(t)$ étant l'Hamiltonien défini par (3.8).

Preuve. Nous combinons les résultats de J.Yong et Chala en prenant dans [6, définition 2.2, page 259], $\gamma = 0, k = 0$ et $l = h$, nous obtenons (3.5). ■

3.2.1 Propriétés des équations adjointes transformées

Nous poursuivons en supposant une transformation des processus $(p_1, P_1), (p_2, P_2)$ et (p_3, P_3) , de telle sorte que nous voulions éliminer p_1 et P_1 dans (3.2), et obtenir le principe du maximum stochastique par rapport aux nouveaux processus adjoints notés $(\tilde{p}_1, \tilde{P}_1), (\tilde{p}_2, \tilde{P}_2)$ et $(\tilde{p}_3, \tilde{P}_3)$, qui sont les équations adjointes associées à notre problème de contrôle initial $\{(3.1), (3.2), (3.3)\}$. Pour cette raison et conformément au système (3.2), nous avons :

$$\begin{cases} dp_1(t) = P_1(t)dB_t, \\ p_1(T) = \theta A_T^\theta. \end{cases}$$

La solution explicite de cette EDS rétrograde est donnée par :

$$p_1(t) = \theta \mathbb{E}[A_T^\theta \mid \mathcal{G}_t] =: \theta \mathbb{V}^\theta(t)$$

où : $\mathbb{V}^\theta(t) = \mathbb{E}[A_T^\theta \mid \mathcal{G}_t]$, pour tout $t \in [0, T]$.

Nous choisissons la transformation de (p, P) vers $(\tilde{p}, \tilde{P})$ avec $(\tilde{p}, \tilde{P}) = \frac{1}{\theta \mathbb{V}^\theta}(p, P)$, alors $\tilde{p}_1(t) = \frac{1}{\theta \mathbb{V}^\theta} p_1(t) = 1$, par conséquent $(\tilde{p}_1(T), \tilde{p}_2(T), \tilde{p}_3(0)) = (1, \varphi_x(x_T^\mu), -\psi_y(y_0^\mu))$.

Les propriétés suivantes de $\mathbb{V}^\theta$ sont essentielles pour trouver les propriétés des processus adjoints transformés.

Lemme 3.3: *Supposons que l'hypothèse (H2), (H3) soit vérifiée. Alors le processus $\mathbb{V}^\theta(t)$ est uniformément borné*

D'après l'hypothèses (H2), (H3), nous savons que les fonctions h, φ et ψ sont bornées par $C > 0$, nous avons :

$$-(2+T)C\theta \leq \theta \left(\varphi(x_T^\theta) + \psi(y_0^\theta) + \int_0^T \int_U h(t)q_t(da)dt \right) \leq (2+T)C\theta.$$

En passant à l'exponentielle et à l'espérance conditionnelle par rapport à la filtration $(\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$, nous obtenons :

$$0 < \exp[-(2+T)C\theta] \leq \mathbb{V}^\theta(t) \leq \exp[(2+T)C\theta].$$

ce qui signifie que $\mathbb{V}^\theta$ est borné.

Lemme 3.4: *Le processus Λ_t^θ est la première composante de la paire de processus adaptés à $\mathcal{G}_t$ (Λ_t^θ, l_t) qui sont la solution de l'EDS rétrograde quadratique relaxée suivante :*

$$\begin{cases} d\Lambda_t^\theta = - \left[\int_U h(t)q_t(da) + \frac{\theta}{2}|l(t)|^2 \right] dt + l(t)dB_t, \\ \Lambda_T^\theta = \varphi(x_T^\mu) + \psi(y_0^\mu), \end{cases} \quad (3.10)$$

si et seulement si le processus Λ_t^θ vérifie l'expression suivante :

$$\exp(\theta\Lambda_t^\theta) = \mathbb{E} \left[\exp \theta \left(\varphi(x_0^\mu) + \psi(y_T^\mu) + \int_t^T \int_U h(s)q_s(da)ds \mid \mathcal{G}_t \right) \right], \quad (3.11)$$

Où $\mathbb{E} \left[\int_0^T |l(t)|^2 dt \right] < \infty$.

Preuve. Nous supposons que l'EDS rétrograde quadratique (3.10), est vraie, alors en appliquant la formule d'Itô à $\exp(\theta\Lambda_t^\theta)$, nous avons :

$$d(\exp(\theta\Lambda_t^\theta)) = \theta \exp(\theta\Lambda_t^\theta) d\Lambda_t^\theta + \frac{\theta^2}{2} |\exp(\theta\Lambda_t^\theta) l(t)|^2 dt.$$

Ensuite

$$d(\exp(\theta\Lambda_t^\theta)) + \theta \exp(\theta\Lambda_t^\theta) \int_U h(t)q_t(da)dt = \theta \exp(\theta\Lambda_t^\theta)l(t)dB_t.$$

En multipliant les deux côtés de l'expression ci-dessus par $\exp\left(\theta \int_0^t \int_U h(s)q_s(da)ds\right)$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \exp\left(\theta \int_0^t \int_U h(s)q_s(da)ds\right) \times \theta \exp(\theta\Lambda_t^\theta)l(t)dB_t \\ &= \exp\left(\theta \int_0^t \int_U h(s)q_s(da)ds\right)d(\exp(\theta\Lambda_t^\theta)) \\ &+ \exp\left(\theta \int_0^t \int_U h(s)q_s(da)ds\right)\theta \exp(\theta\Lambda_t^\theta) \int_U h(t)q_t(da)dt. \end{aligned}$$

Ensuite

$$d\left(\exp\left[\theta\Lambda_t^\theta + \theta \int_0^t \int_U h(s)q_s(da)ds\right]\right) = \theta \exp\left(\theta\Lambda_t^\theta + \theta \int_0^t \int_U h(s)q_s(da)ds\right)l(t)dB_t.$$

En passant à l'intégrale de t à T , nous trouvons :

$$\begin{aligned} & \exp\left(\theta\Lambda_T^\theta + \theta \int_0^T h(s)q_s(da)ds\right) - \exp\left(\theta\Lambda_t^\theta + \theta \int_0^t h(s)q_s(da)ds\right) \\ &= \int_t^T \exp\left(\theta\Lambda_r^\theta + \theta \int_0^r h(s)q_s(da)ds\right)l(r)dB_r. \end{aligned}$$

Ensuite, en utilisant la définition de l'espérance conditionnelle sur les deux côtés d'après la dernière égalité, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left[\theta \int_t^T \exp\left(\theta\Lambda_s^\theta + \theta \int_0^s h(r)q_r(da)dr\right)l(s)dB_s \mid \mathcal{G}_t\right] \\ &+ \mathbb{E}\left[\exp\left(\theta\Lambda_t^\theta + \theta \int_0^t h(s)q_s(da)ds\right) \mid \mathcal{G}_t\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\exp\left(\theta\Lambda_T^\theta + \theta \int_0^T h(s)q_s(da)ds\right) \mid \mathcal{G}_t\right]. \end{aligned}$$

En vertu de la propriété de martingale de l'intégrale d'Itô, et de la mesurabilité par rapport à la filtration $\mathcal{G}_t$, alors :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left[\exp\left(\theta\Lambda_T^\theta + \theta \int_0^T h(s)q_s(da)ds\right) \mid \mathcal{G}_t\right] \\ &= \exp\left(\theta\Lambda_t^\theta + \theta \int_0^t h(s)q_s(da)ds\right). \end{aligned}$$

D'après la définition de la condition terminale de l'EDS rétrograde quadratique (3.10), nous savons que $\Lambda_T^\theta = \varphi(x_T^\mu) + \psi(y_0^\theta)$, alors :

$$\exp(\theta\Lambda_t^\theta) = \mathbb{E} \left[\exp \theta \left(\varphi(x_T^\mu) + \psi(y_0^\theta) + \int_t^T \int_U h(s)q_s(da)ds \right) \mid \mathcal{G}_t \right].$$

D'où la preuve de (3.11).

D'autre part, nous supposons que (3.11) est vrai, cela signifie que :

$$\exp(\theta\Lambda_t^\theta) = \mathbb{E} \left[\exp \theta \left(\varphi(x_T^\mu) + \psi(y_0^\theta) + \int_t^T \int_U h(s)q_s(da)ds \right) \mid \mathcal{G}_t \right].$$

Ensuite

$$\begin{aligned} & \exp \left(\theta\Lambda_t^\theta + \theta \int_0^t h(s)q_s(da)ds \right) \\ &= \mathbb{E} \left[\exp \theta \left(\varphi(x_T^\mu) + \psi(y_0^\theta) + \int_0^T h(s)q_s(da)ds \right) \mid \mathcal{G}_t \right] \\ &= \mathbb{E}[A_T^\theta \mid \mathcal{G}_t], \end{aligned}$$

Si $t = 0$,

$$\mathbb{V}^\theta(0) = \mathbb{E}[A_T^\theta \mid \mathcal{G}_0] = \mathbb{E}[A_T^\theta] = \exp(\theta\Lambda_0^\theta).$$

$\mathbb{E}[A_T^\theta \mid \mathcal{G}_t]$ est une $\mathcal{G}_t$ -martingale de carré intégrable. D'après le théorème de représentation des martingales d'Itô, il existe un unique processus $k(t)$ progressivement mesurable par rapport à $\mathcal{G}_t$ tel que :

$$\mathbb{E}[A_T^\theta \mid \mathcal{G}_t] = \mathbb{E}[A_T^\theta] + \int_0^t k(s)dB_s = \exp(\theta\Lambda_0^\theta) + \int_0^t k(s)dB_s.$$

Par conséquent

$$\exp \left(\theta\Lambda_t^\theta + \theta \int_0^t \int_U h(s)q_s(da)ds \right) - \exp(\theta\Lambda_0^\theta) = \int_0^t k(s)dB_s.$$

Nous appliquons la formule d'Itô à $\exp\left(\theta\Lambda_t^\theta + \theta \int_0^t \int_U h(s)q_s(da)ds\right)$, nous trouvons :

$$\theta \exp\left(\theta\Lambda_t^\theta + \theta \int_0^t \int_U h(s)q_s(da)ds\right) \left[\int_U h(t)q_t(da)dt + d\Lambda_t^\theta + \frac{\theta}{2}d\langle \Lambda_t^\theta, \Lambda_t^\theta \rangle \right] = k(t)dB_t,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne la variation quadratique.

Ensuite

$$\begin{aligned} & \int_U h(t)q_t(da)dt + d\Lambda_t^\theta + \frac{\theta}{2}d\langle \Lambda_t^\theta, \Lambda_t^\theta \rangle \\ &= \frac{1}{\theta} \exp\left(-\theta\Lambda_t^\theta - \theta \int_0^t \int_U h(s)q_s(da)ds\right) k(t)dB_t, \end{aligned} \quad (3.12)$$

Nous supposons :

$$d\Lambda_t^\theta = \Lambda_1^\theta(t)dt + \Lambda_2^\theta dW_t + \Lambda_3^\theta(t)dB_t, \quad d\langle \Lambda_t^\theta, \Lambda_t^\theta \rangle = (-|\Lambda_2^\theta(t)|^2 + |\Lambda_3^\theta(t)|^2)dt, \quad (3.13)$$

En remplaçant (3.13) dans (3.12), nous obtenons l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} & \int_U h(t)q_t(da)dt + d\Lambda_1^\theta(t)dt + d\Lambda_2^\theta(t)dW_t + d\Lambda_3^\theta(t)dB_t + \frac{\theta}{2}|l(t)|^2dt \\ &= l(t)dB_t + (-|\Lambda_2^\theta(t)|^2 + |\Lambda_3^\theta(t)|^2)dt \\ &= l(t)dB_t. \end{aligned}$$

Quand

$$\begin{aligned} \cdot \quad l(t) &= \frac{1}{\theta} \exp(-\theta\Lambda_t^\theta - \theta \int_0^t \int_U h(s)q_s(da)ds) k(t), \\ \cdot \quad \Lambda_2^\theta(t) &= 0, \quad \Lambda_3^\theta(t) = l(t) \text{ et } \Lambda_1^\theta(t) = -(\int_U h(t)q_t(da) + \frac{\theta}{2}|l(t)|^2). \end{aligned}$$

Enfin :

$$\begin{cases} d\Lambda_t^\theta = -\left(\int_U h(t)q_t(da) + \frac{\theta}{2}|l(t)|^2\right)dt + l(t)dB_t, \\ \Lambda_T^\theta = \varphi(x_T^q) + \psi(y_0^q), \end{cases}$$

D'où la preuve. ■

Lemme 3.5: *Le processus $\mathbb{V}^\theta(t)$ est une martingale, qui peut être écrite sous la forme expo-*

nentielle suivante :

$$\mathbb{V}^\theta(t) = \exp \left(\theta \Lambda_t^\theta + \theta \int_0^t \int_U h(s) q_s(da) ds \right).$$

Preuve. Nous avons que :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}^\theta(t) &= \mathbb{E} \left[\exp \theta \left(\varphi(x_T^\mu) + \psi(y_0^\mu) + \int_0^T \int_U h(s) q_s(da) ds \right) \mid \mathcal{G}_t \right] \\ &= \exp \left(\theta \int_0^t \int_U h(s) q_s(da) ds \right) \\ &\quad \times \mathbb{E} \left[\exp \theta \left(\varphi(x_T^\mu) + \psi(y_0^\mu) + \int_0^T \int_U h(s) q_s(da) ds \right) \mid \mathcal{G}_t \right]. \end{aligned}$$

D'après le lemme précédent (voir Lemme 3.4), l'équation (3.11) peut-être transformée en :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}^\theta(t) &= \exp(\theta \Lambda_t^\theta) \exp \left(\theta \int_0^t \int_U h(s) q_s(da) ds \right) \\ &= \exp \left(\theta \Lambda_t^\theta + \theta \int_0^t \int_U h(s) q_s(da) ds \right), \quad 0 \leq t \leq T \end{aligned}$$

Alors le lemme est prouvé. ■

Nous pouvons facilement prouver à partir de (3.10) et de la bornitude de f que

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |\Lambda_t^\theta|^2 \right] < C_T, \text{ où } C_T \text{ est une constante positive dépendant uniquement de } T.$$

Le processus $(\Lambda_t^\theta, l(t))_{t \geq 0}$ est l'unique solution de l'EDS rétrograde quadratique relaxée suivante :

$$\begin{cases} d\Lambda_t^\theta = -(\int_U h(t) q_t(da) + \frac{\theta}{2} |l(t)|^2) dt + l(t) dB_t, \\ \Lambda_T^\theta = \varphi(x_T^\theta) + \psi(y_0^\theta). \end{cases}$$

Où

$$\begin{aligned} \cdot \quad l(t) &= \frac{1}{\theta} \exp \left(-\theta \Lambda_t^\theta - \theta \int_0^t \int_U h(s) q_s(da) ds \right) k(t) \\ \cdot \quad \text{et } \mathbb{E} \left[\int_0^T |l(t)|^2 dt \right] &< \infty. \end{aligned}$$

Lemme 3.6: La martingale $\mathbb{V}^\theta$ est l'unique solution de l'EDS rétrograde linéaire suivante :

$$\begin{cases} d\mathbb{V}^\theta(t) = \theta l(t) \mathbb{V}^\theta(t) dB_t, \\ \mathbb{V}^\theta(T) = A_T^\theta. \end{cases}$$

Par conséquent, pour tout $0 \leq t \leq T$, le processus L_t^θ défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ est donné par :

$$L_t^\theta := \frac{\mathbb{V}^\theta(t)}{\mathbb{V}^\theta(0)} = \exp \left(-\frac{\theta^2}{2} \int_0^t |l(s)|^2 ds + \theta \int_0^t l(s) dB_s \right), \quad (3.14)$$

est une $\mathcal{G}_t$ -martingale intégrable et uniformément bornée.

Preuve. Nous appliquons la formule d'Itô à $\mathbb{V}^\theta(t) = \exp \left(\theta \Lambda_t^\theta + \theta \int_0^t \int_U h(s) q_s(da) ds \right)$, nous trouvons :

$$\begin{aligned} d\mathbb{V}^\theta(t) &= d \left(\exp \left(\theta \Lambda_t^\theta + \int_0^t \int_U h(s) q_s(da) ds \right) \right) \\ &= \theta \int_U h(s) q_s(da) \exp \left(\theta \Lambda_t^\theta + \int_0^t \int_U h(s) q_s(da) ds \right) dt \\ &\quad + \theta \left[\left(- \int_U h(t) q_t(da) dt - \frac{\theta}{2} |l(t)|^2 dt + l(t) dB_t \right) \right. \\ &\quad \left. \times \exp \left(\theta \Lambda_t^\theta + \int_0^t \int_U h(s) q_s(da) ds \right) \right] \\ &\quad + \frac{\theta^2}{2} |l(t)|^2 \exp \left(\theta \Lambda_t^\theta + \int_0^t \int_U h(s) q_s(da) ds \right) dt \\ &= \theta l(t) \mathbb{V}^\theta(t) dB_t. \end{aligned}$$

Maintenant, nous voulons prouver (3.14), nous avons d'après $\Lambda_t^\theta = \Lambda_0^\theta - \int_0^t \int_U h(s) q_s(da) ds - \frac{\theta}{2} \int_0^t |l(s)|^2 ds + \int_0^t l(s) dB_s$

$$\begin{aligned} \mathbb{V}^\theta(t) &= \exp \left(\theta \Lambda_t^\theta + \theta \int_0^t \int_U h(s) q_s(da) ds \right) \\ &= \exp \left(\theta \Lambda_0^\theta - \frac{\theta^2}{2} \int_0^t |l(s)|^2 ds + \int_0^t l(s) dB_s \right). \end{aligned}$$

Nous divisons par $\mathbb{V}^\theta(0)$ tel que $\mathbb{V}^\theta(0) = \exp(\theta \Lambda_0^\theta)$, nous obtenons :

$$\frac{\mathbb{V}^\theta(t)}{\mathbb{V}^\theta(0)} = \exp \left(-\frac{\theta^2}{2} \int_0^t |l(s)|^2 ds + \theta \int_0^t l(s) dB_s \right) =: L_t^\theta, \quad 0 \leq t \leq T$$

L_t^θ est appelé mouvement Brownien géométrique, alors L_t^θ est une $\mathcal{G}_t$ -martingale uniformément bornée. ■

3.3 Conditions nécessaires d'optimalité

Dans cette section, nous allons énoncer et prouver les conditions d'optimalité nécessaires pour le système piloté par des EDDSPR découplées avec un contrôle relaxé et une performance sensible au risque $\{(3.1), (3.2), (3.3)\}$.

Lemme 3.7: *Les principales équations adjointes deuxième et troisième ordre sensibles au risque pour $(\tilde{p}_2, \tilde{P}_2)$, $(\tilde{p}_3, \tilde{P}_3)$ et $(\mathbb{V}^\theta, l)$ deviennent :*

$$\begin{cases} d\tilde{p}_2 = -\tilde{H}_x^\theta dt - \left(\tilde{P}_2(t) + \theta l(t)\tilde{p}_2 \right) dB_t^\theta, \\ d\tilde{p}_3 = -\tilde{H}_y^\theta(t)dt - \tilde{H}_z^\theta(t)dB_t^\theta - P_3(t)\overleftarrow{dW}_t, \\ \tilde{p}_2(T) = \varphi_x(x_T^\mu), \\ \tilde{p}_3(0) = -\psi_y(y_0^\mu), \end{cases} \quad (3.15)$$

avec

$$\tilde{H}^\theta(t) := \tilde{H}^\theta\left(t, x_t^q, y_t^q, z_t^q, \begin{pmatrix} \tilde{p}_2(t) \\ \tilde{P}_2(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{p}_3(t) \\ \tilde{P}_3(t) \end{pmatrix}, \mathbb{V}^\theta(t), l(t), q_t\right) \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} &= \left(\int_U h(t)q_t(da) \right) \tilde{p}_1(t) + \left(\int_U b(t)q_t(da) \right) \tilde{p}_2(t) \\ &+ \left(\int_U \sigma(t)q_t(da) \right) \tilde{P}_2(t) + \left(\int_U f(t)q_t(da) + \theta l(t)z_t \right) \tilde{p}_3(t) \\ &+ \int_U g(t)q_t(da) \tilde{P}_3(t), \end{aligned} \quad (3.17)$$

et

$$\mathbb{E} \left[\sum_{i=2}^3 \sup_{0 \leq t \leq T} |\tilde{p}_i(t)|^2 + \sup_{0 \leq t \leq T} |\mathbb{V}^\theta(t)|^2 + \sum_{i=2}^3 \int_0^T |\tilde{P}_i(t)|^2 dt + \int_0^T |l(t)|^2 dt \right] < \infty.$$

Preuve. Nous appliquons la formule d'Itô à $\vec{p}(t) = \theta \mathbb{V}^\theta(t) \tilde{p}(t)$, nous obtenons :

$$d\tilde{p}(t) = \frac{1}{\theta \mathbb{V}^\theta(t)} (d\vec{p}(t) - \theta (d\mathbb{V}^\theta(t)) \tilde{p}(t) - \theta \langle d\mathbb{V}^\theta(t), d\tilde{p}(t) \rangle).$$

Nous supposons que :

$$d\tilde{p}(t) = \alpha(t)dt + \beta(t)\overleftarrow{dW}_t + \gamma(t)dB_t$$

Nous savons que :

$$d\mathbb{V}^\theta(t) = \theta l(t) \mathbb{V}^\theta(t) dB_t,$$

d'où

$$\langle d\mathbb{V}^\theta(t), d\tilde{p}(t) \rangle = \theta l(t) \mathbb{V}^\theta(t) \gamma(t) dt,$$

Alors :

$$d\tilde{p}(t) = \frac{1}{\theta \mathbb{V}^\theta(t)} \vec{p}(t) - \theta l(t) \tilde{p}(t) dB_t - \theta l(t) \gamma(t) dt.$$

Notice que $\tilde{p}_i(t) = \frac{1}{\theta \mathbb{V}^\theta(t)} p_i(t)$ et $\tilde{P}_i(t) = \frac{1}{\theta \mathbb{V}^\theta(t)} P_i(t)$, pour chaque $i \in \{1, 2, 3\}$.

Nous voulons déterminer les coefficients $\alpha(t) \in \mathbb{R}^3$, $\beta(t) \in \mathbb{R}^3$ et $\gamma(t) \in \mathbb{R}^3$ tels que :

$$\begin{aligned} d\tilde{p}(t) = & - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \int_U h_x(t) q_t(da) & \int_U b_x(t) q_t(da) & \int_U f_x(t) q_t(da) \\ \int_U h_y(t) q_t(da) & 0 & \int_U f_y(t) q_t(da) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p}_1(t) \\ \tilde{p}_2(t) \\ \tilde{p}_3(t) \end{pmatrix} dt \\ & - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \int_U \sigma_x(t) q_t(da) & \int_U g_x(t) q_t(da) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{P}_1(t) \\ \tilde{P}_2(t) \\ \tilde{P}_3(t) \end{pmatrix} dt - \theta l(t) \gamma(t) dt \\ & - \begin{pmatrix} \tilde{P}_1(t) + \theta l(t) \tilde{p}_1(t) \\ \tilde{P}_2(t) + \theta l(t) \tilde{p}_2(t) \\ \tilde{H}_z^\theta(t) \end{pmatrix} dB_t - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{P}_3(t) \end{pmatrix} \overleftarrow{dW}_t \end{aligned} \quad (3.18)$$

Par identification, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \alpha(t) = & - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \int_U h_x(t) q_t(da) & \int_U b_x(t) q_t(da) & f_x(t) q_t(da) \\ \int_U h_y(t) q_t(da) & 0 & \int_U f_y(t) q_t(da) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p}_1(t) \\ \tilde{p}_2(t) \\ \tilde{p}_3(t) \end{pmatrix} dt \\ & - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \int_U \sigma_x(t) q_t(da) & - \int_U g_x(t) q_t(da) \\ 0 & 0 & \int_U g_y(t) q_t(da) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{P}_1(t) \\ \tilde{P}_2(t) \\ \tilde{P}_3(t) \end{pmatrix} dt - \theta l(t) \gamma(t) dt, \end{aligned}$$

et

$$\beta(t) = - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{P}_3(t) \end{pmatrix},$$

$$\gamma(t) = - \begin{pmatrix} \tilde{P}_1(t) + \theta l_1(t) \tilde{p}_1(t) \\ \tilde{P}_2(t) + \theta l_2(t) \tilde{p}_2(t) \\ \tilde{H}_z^\theta(t) \end{pmatrix}.$$

En remplaçant $\gamma(t)$ par son expression dans $d\tilde{p}(t)$, nous obtenons :

$$d\tilde{p}_1(t) = \gamma_1(t)[- \theta l(t)dt + dB_t],$$

Nous pouvons alors utiliser le théorème de Girsanov (voir Chala et al. [1]) pour affirmer que :

$$\begin{cases} d\tilde{p}_1(t) = \gamma_1(t)dB_t^\theta, \\ \tilde{p}_1(T) = 1, \end{cases}$$

avec $dB_t^\theta = -\theta l(t)dt + dB_t$ qui est un $\mathbb{P}^\theta$ -mouvement Brownien, où $\frac{d\mathbb{P}^\theta}{d\mathbb{P}} \Big|_{\mathcal{F}_t^B} = L_t^\theta$ pour $0 \leq t \leq T$

Nous remarquons que $\tilde{p}_1(t)$ est de carré intégrable et $\mathbb{E}^{\mathbb{P}^\theta}[\tilde{p}_1(t) \mid \mathcal{G}_t] = 1$. Étant donné que $\gamma_1(t)$ possède une variation quadratique, alors $\int_0^T |\gamma_1(t)|^2 dt = 0$.

Cela implique que pour presque tout $0 \leq t \leq T$, $\gamma_1(t) = 0$. Ainsi, $\mathbb{P}^\theta$ -p.s et $\mathbb{P}$ -p.s, nous avons :

$$\begin{aligned}
 d\tilde{p}(t) &= \begin{pmatrix} d\tilde{p}_1(t) \\ d\tilde{p}_2(t) \\ d\tilde{p}_3(t) \end{pmatrix} \\
 &= - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \int_U h_x(t)q_t(da) & \int_U b_x(t)q_t(da) & \int_U f_x(t)q_t(da) \\ \int_U h_yq_t(da) & 0 & \int_U f_y(t)q_t(da) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p}_1(t) \\ \tilde{p}_2(t) \\ \tilde{p}_3(t) \end{pmatrix} dt \\
 &\quad - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \int_U \sigma_x(t)q_t(da) & \int_U g_x(t)q_t(da) \\ 0 & 0 & \int_U g_y(t)q_t(da) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{P}_1(t) \\ \tilde{P}_2(t) \\ \tilde{P}_3(t) \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{P}_3(t) \end{pmatrix} \overleftarrow{dW}_t \\
 &\quad - \begin{pmatrix} \tilde{P}_1(t) + \theta l_1(t)\tilde{p}_1(t) \\ \tilde{P}_2 + \theta l_2(t)\tilde{p}_2(t) \\ \tilde{H}_z^\theta(t) \end{pmatrix} dB_t,
 \end{aligned}$$

En suite, nous trouvons :

$$\begin{aligned}
 d\tilde{p}_2(t) &= - \left(\int_U h_x(t)q_t(da)\tilde{p}_1(t) + \int_U b_x(t)q_t(da)\tilde{p}_2(t) + \int_U f_x(t)q_t(da)\tilde{p}_3(t) \right. \\
 &\quad \left. + \int_U \sigma_x(t)q_t(da)\tilde{P}_2(t) + \int_U g_x(t)q_t(da) \right) dt + \left(\tilde{P}_2(t) - \theta l_2(t)\tilde{p}_2(t) \right) dB_t^\theta, \\
 d\tilde{p}_3(t) &= - \left(\int_U h_y(t)q_t(da)\tilde{p}_1(t) + \int_y f_y(t)q_t(da)\tilde{p}_3(t) + \int_U g_y(t)q_t(da)\tilde{P}_3(t) \right) dt \\
 &\quad - \left(\int_U h_z(t)q_t(da)\tilde{p}_1(t) + \int_U f_z(t)q_t(da)\tilde{p}_3 + \int_U g_z(t)q_t(da)\tilde{P}_3(t) \right. \\
 &\quad \left. - \theta l_3(t)q_t(da)\tilde{p}_3(t) \right) dB_t^\theta - \tilde{P}_3(t)\overleftarrow{dW}_t,
 \end{aligned}$$

où $\tilde{H}^\theta$ est défini par (3.16).

Les équations adjointes principales de deuxième et troisième ordre sensibles au risque pour $(\tilde{p}_2, \tilde{P}_2)$, $(\tilde{p}_3, \tilde{P}_3)$ et $(\mathbb{V}^\theta, l)$ deviennent comme dans (3.15).

D'après les hypothèses (H1), (H2), (H3) et (H4), la solution du système (3.15) existe et est unique. ■

Théorème (Conditions nécessaires d'optimalité) 3.2: *Nous supposons que les hypothèses (H2), (H3) et (H4) sont satisfaites. Si $(x^\mu, y^\mu, z^\mu, \mu)$ est une solution optimale du problème de contrôle relaxé sensible au risque $\{(3.1), (3.2), (3.3)\}$, alors il existe deux paires uniques de processus $\mathcal{G}_t$ -adaptés $(\tilde{p}_2, \tilde{P}_2), (\tilde{p}_3, \tilde{P}_3)$ et $(\mathbb{V}^\theta, l)$ qui satisfont (3.15) tels que :*

$$\partial \tilde{H}^\theta(t) \geq 0. \quad (3.19)$$

Preuve. : Pour tout $q \in \mathcal{R}$, presque partout pour $0 \leq t \leq T$ et $\mathbb{P}$ -a.s, la relation entre l'Hamiltonien $\tilde{H}^\theta$ associé à (3.16) et H^θ associé à (3.8) est donnée par :

$$\begin{aligned} & \partial \tilde{H}^\theta \left(t, x_t^q, y_t^q, z_t^q, \begin{pmatrix} \tilde{p}_2(t) \\ \tilde{P}_2(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{p}_3(t) \\ \tilde{P}_3(t) \end{pmatrix}, \mathbb{V}^\theta(t), l(t), q_t \right) \\ &= \frac{1}{\theta \mathbb{V}^\theta(t)} \partial H^\theta(t, \xi_t^q; x_t^q, y_t^q, z_t^q, \vec{p}(t), \vec{P}(t), q_t). \end{aligned}$$

La preuve est achevée. ■

Conclusion

Ce mémoire a été consacré à l'étude du contrôle stochastique relaxé sous un critère de performance sensible au risque. Nous avons établi le cadre théorique nécessaire en utilisant les équations différentielles doublement stochastiques progressivement rétrogrades découplées pour dériver les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité via le Principe du Maximum Stochastique. Cette analyse a permis de mettre en évidence l'influence directe du paramètre de sensibilité au risque (θ) sur la caractérisation du contrôle optimal à travers le système adjoint et la fonction Hamiltonienne.

Bibliographie

- [1] A.Chala,D.Hafayed and R.Khallout,*The use of Girsanov's theorem to describe the risk-sensitive problem and application to optimal control, in :Stochastic Differential Equation -basics and Applications*, Nova Science Publishers, New-York (2018), 111-142B.
- [2] Billingsley,P. (1995). *Probability and Measure*. Wiley-Interscience.
- [3] K. Itô, *Differential Equations Determining a Markoff Process*, Journal of the Pan-Japan Mathematical Colloquium, No. 1077, pp. 42-75, 1942. (Reprinted in : *Kiyosi Itô : Selected Papers*, Springer-Verlag, 1987).
- [4] Nicolas Perkowski. *Backward Stochastic Differential Equations : an Introduction*. Lecture Notes, 2010.
- [5] N. El Karoui, D. H. Nguyen, and M. Jeanblanc-Picqué, Compactification methods in the control of degenerate diffusions : existence of an optimal control, *Stochastics*, 20 (1987), No. 3, 169-219.
- [6] Oksendal, B. (2003). *Stochastic differential equations. In Stochastic differential equations : an introduction with applications (pp. 38-50)*. Springer Berlin Heidelberg.
- [7] Pardoux, E. and Peng, S. *Backward doubly stochastic differential equations and systems of quasilinear SPDEs*, Probability Theory and Related Fields, vol. 98, no. 2, pp. 209-227, 1994.
- [8] S. Bahlali, *Necessary and sufficient conditions of optimality for relaxed and strict control problems*. SIAM J. Control Optim, 47(4), 2078-2095 (2008).

Annexe

Quelques outils mathématiques :

1. **Inégalité de Young** : On dit que deux nombres $(p, q) > 0$ sont conjugués au sens de Young, si :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

L'inégalité de Young stipule que si p et q sont conjugués et si $a, b > 0$, alors :

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

avec égalité si et seulement si $b^q = a^p$. Par exemple, si $p = q = 2$, on retrouve l'inégalité :

$$2ab \leq a^2 + b^2.$$

2. **Inégalité de Burkholder-Davis-Gundy(BDG)** : Il existe une constante C telle que, pour tout martingale locale continue :

$$\int_0^t \sigma(s, x_s) dB_s,$$

nulle en zéro, nous avons :

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \sigma(s, x_s) dB_s \right|^2 \right] \leq C \mathbb{E} \int_0^T |\sigma(s, x_s)|^2 ds,$$

Où C est une constante positive.

3. **Lemme de Gronwall** : Soient $T > 0$ et f une fonction positive bornée sur $[0, T]$. On suppose qu'il existe des constantes $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ telles que pour tout $t \in [0, T]$, on ait :

$$f(t) \leq \alpha + \beta \int_0^t f(s) ds,$$

Alors

$$\forall t \in [0, T] \quad f(t) \leq \alpha \exp(\beta t).$$

4. **Inégalité de Cauchy-Schwarz** : Soient f et $g \in ([0, 1], \mathbb{R})$. Alors :

$$\int_0^1 |fg| d\mu \leq \left(\int_0^1 |f|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |g|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}}.$$

5. **Développement de Taylor avec reste intégral** : Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{n+1} ($n \in \mathbb{N}$) et $a, x \in I$, alors :

$$\begin{aligned} f(x+a) &= f(x) + f'(x)(a) + \frac{f''(x)}{2!}(a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(a)^n \\ &\quad + o(|a|^n) + \int_0^t \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}(a)^{n+1} dt. \end{aligned}$$

6. **Théorème de Girsanov** : Soit L_t^θ un mouvement brownien géométrique défini par :

$$L_t^\theta = \exp \left(\int_0^t \theta(s) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta^2(s) ds \right),$$

Si L_t^θ est une martingale uniformément bornée, alors sous la probabilité Q définie par.

$$\frac{dQ}{d\mathbb{P}} = L_t^\theta,$$

le processus : $dB_t^\theta = -\theta(t)dt + dB_t$ est un mouvement brownien standard.

Résumé

Ce travail est consacré à l'étude de problème de contrôle optimal stochastique pour des systèmes régis par des équations différentielles doublement stochastiques progressivement rétrogrades découplées relaxées. Nous établissons le principe du maximum stochastique pour ce type de systèmes et dérivons les conditions d'optimalité à travers l'analyse de la fonction hamiltonienne stochastique ainsi que des équations adjointes associées. En outre, cette analyse nous a permis de caractériser la relation précise entre les cadres neutre au risque et sensible au risque.

Mots-clés : Contrôle Optimal Relaxé, Équations Différentielles Doublement Stochastiques Progressivement Rétrogrades Découplées, Conditions Nécessaires d'Optimalité, Sensibilité au Risque, Neutralité au Risque.

المُلخَص

هذا العمل يتناول مسألة التحكم العشوائي الأمثل ضمن إطار دالة أداء حساسة للمخاطر، حيث يُوصف النظام المدروس بواسطة معادلات تفاضلية عشوائية تقدمية-تراجعية مضاعفة مريحة وضعيفة الارتباط قمنا ببلورة مبدأ الأمثلية العشوائي للنظام الخاضع لهذه البنية المزدوجة، واستخلصنا الشروط للأمثلية من خلال تحليل الدالة الهاملتونية العشوائية واشتقاق المعادلات المرافقة المرتبطة بها. وقد مكن هذا التحليل من توصيف العلاقة الدقيقة بين الحالة المحايدة للمخاطر والحالة الحساسة للمخاطر.

الكلمات المفتاحية : التحكم الأمثل المريح، المعادلات التفاضلية العشوائية التقدمية-التراجعية المريحة ضعيفة الارتباط، التحكم العشوائي، الشروط الضرورية للأمثلية، الحساسية للمخاطر، الحياد عن المخاطر . .

Abstract

This work is based on the study of stochastic optimal control problems of systems governed by the types of relaxed uncoupled forward-backward doubly stochastic differential equations. We establish the stochastic maximum principle for the kind of systems and derived the optimality conditions through the analysis of the stochastic Hamiltonian function and the associated adjoint equations. Furthermore, this analysis enabled us to characterize the precise relationship between the risk-neutral and the risk-sensitive settings.

Key words: Relaxed Optimal Control, uncoupled Forward-Backward doubly Stochastic Differential Equation, Necessary Optimality Conditions, Risk-Sensitive, Risk Neutral.