

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ KASDI MERBAH OUARGLA

FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET SCIENCES DE LA
MATIÈRE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté En Vue De L'obtention Du

DIPLÔME DE MASTER

EN MATHÉMATIQUES

Option : Probabilité et Statistique

Par

BOUZID Chaima

Intitulé

Sur les modèles autorégressifs à coefficients aléatoires.

Membres du jury

BENBRAHIM Radhia	M. C. B	UKMO	Président
Bellatrach Nadjjet	M. A. A	UKMO	Examineur
ARBIA Hanane	M. C. B	UKMO	Rapporteur

2025-2026

Table des matières

Table des matières	i
Dédicace	iv
Remerciements	v
Table des figures	vi
Notations et abriviations	vii
Introduction	1
1 Introduction aux séries chronologiques	3
1.1 Définition d'une série chronologique	3
1.2 Structure et organisation d'une série chronologique	3
1.3 Représentation graphique des composantes d'une série chronologique	5
1.3.1 L'indexation d'une série chronologique	6
1.4 Modèles d'analyse des séries chronologique	7
1.4.1 Choix du modèle de décomposition	7
1.5 Fonctions d'autocovariance et d'autocorrélation	10
1.6 Modèle stationnaire et non stationnaire	11
1.6.1 La stationnarité	11
1.6.2 La non stationnaire	12
1.7 Outils d'analyse descriptive	12
1.7.1 L'opérateur de retard et la différentiations (Δ)	12
1.7.2 Moyenne mobile	13
1.7.3 Autres méthodes de stationnarisation	15
1.8 Bruit blanc ε_t	16
1.9 Un modèle linéaire (série linéaire)	16
1.9.1 Notation d'un modèle linéaire	17
1.10 Un modèle non linéaire (série non linéaire)	17

2	Les modèles autorégressifs et leurs extension	19
2.1	Définition du modèle autorégressif	19
2.1.1	Représentation avec l'opérateur de retard (L)	20
2.2	Condition de la stationnarité de modèle AR	20
2.2.1	Stationnarité du modèle $AR(1)$	20
2.2.2	Généralisation au modèle $AR(p)$	21
2.3	Fonction d'autocorrélation d'un modèle $AR(p)$ et la variance . . .	21
2.3.1	Fonction d'autocorrélation	21
2.3.2	Calcul de la variance	22
2.4	Fonction d'autocorrélation partielle (FACP)	23
2.4.1	Propriété d'un $AR(p)$	23
2.5	Estimation de paramètres d'un modèle AR	24
2.5.1	Méthode de Yule-Walker	24
2.5.2	Méthode des Moindres Carrés Ordinaires (MCO)	24
2.6	La Prévision avec le modèle $AR(p)$	25
2.7	Simulation d'un modèle AR	27
2.7.1	Algorithme de génération d'un modèle $AR(1)$	27
2.7.2	Analyse graphique (FAC et FAP)	29
2.8	Extension des modèles autorégressifs	30
2.9	Limites des modèles AR classiques	31
2.9.1	Les limites spécifiques face à la complexité des données . .	32
3	Les modèles autorégressifs à coefficients aléatoires	33
3.1	Produit de Kronecker (Préliminaire)	33
3.2	Définition et représentations du modèle $RCA(p)$	34
3.2.1	Modèle autorégressif à coefficients aléatoires d'ordre un . .	36
3.3	Justification du modèle RCA et comparaison avec le modèle AR classique	37
3.3.1	Pourquoi opter pour les coefficients aléatoires ?	37
3.3.2	Comparaison synthétique : Modèle AR vs Modèle $RCAR$.	37
3.4	Existence et Stationnarité du modèle $RCA(p)$	38
3.4.1	Existence d'une solution	38
3.4.2	Conditions de Stationnarité du second ordre	38
3.5	Méthodes d'estimation des paramètres	40
3.5.1	Méthode des moments (Méthode de Yule-Walker généralisée)	41
3.5.2	Méthode des Moindres Carrés (MC)	42
3.5.3	Méthode du Maximum de Vraisemblance (ML)	44
3.6	Prévision dans les modèles autorégressif à coefficients aléatoires .	45
3.7	Simulation du modèle RCA	46
3.7.1	Le Principe Fondamental et Algorithme du simulation . . .	46
3.7.2	Estimation et prévision du modèle à logiciel R	52

3.7.3 Discussion des résultats	57
Conclusion générale	58
Bibliographie	59

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à mes très chers parents,
mon père **Mouhei Eddine** et ma mère **Hamida**,
pour leur amour inconditionnel, leurs sacrifices, leurs encouragements et leurs
prières qui ont toujours illuminé mon chemin.

Une pensée particulière à mes grand-mères :
à ma grand-mère paternelle, qu'Allah lui accorde Sa miséricorde et l'accueille
dans Son vaste paradis,
et à ma grand-mère maternelle, qu'Allah lui prête une longue vie remplie de
santé et de bonheur.

Je dédie également ce travail à moi-même,
pour les efforts fournis, la patience, la persévérance et le courage face aux
difficultés rencontrées durant ce parcours universitaire.

À mes frères et sœurs :
Asma, Nour El Houda, M.Amine, Youssef et M .Loay,
pour leur soutien et leur présence précieuse ; Le résultat vous appartiendra, si
Dieu le veut.

Une tendre pensée à nos petits rayons de bonheur :
Firas et Amira,
qui apportent joie et douceur à notre quotidien.

À mon fiancé **Nour Eddine**,
pour son soutien moral, sa patience et ses encouragements constants.

Enfin, une pensée affectueuse à toute ma famille oncles et oncles maternels ainsi
qu'à mes chères amies
Afra, Rania, Wafa et Hala,
avec qui j'ai partagé les plus beaux souvenirs de mes années d'études.

Remerciements

Avant toute chose, je remercie **Allah** le Tout-Puissant pour Sa grâce infinie, Sa miséricorde et la force qu’Il m’a accordée tout au long de ce parcours. Sans Sa volonté, rien n’aurait été possible.

Mes sincères remerciements vont à tous mes enseignants qui ont contribué à ma formation et m’ont transmis leur savoir avec générosité.

Mes profonds remerciements à mon encadreuse **Madame Arbia Hanane**, pour son accompagnement, sa patience, ses orientations et son soutien tout au long de ce travail.

J’adresse également une gratitude particulière à :

Monsieur Mouldi Ben Abdelhafidh pour ses précieux conseils et son aide que je n’oublierai jamais.

Mes remerciements s’adressent aussi à : **Madame Ben Brahim, Monsieur Mansoul, Monsieur Saouli, Madame Bellatrach**, ainsi qu’à tous les enseignants qui ont enrichi mon parcours académique par leurs connaissances et leurs précieux conseils.

À tous ceux qui ont contribué, de près ou de loin, à la réalisation de ce travail : merci du fond du cœur.

Table des figures

1.1	Représentation graphique des composantes de séries chronologique.	6
1.2	Méthode des bandes : modèle multiplicatif et modèle additif. . . .	8
1.3	Méthode du profil : modèle multiplicatif et modèle additif. . . .	9
1.4	Approche analytique : modèle multiplicatif et modèle additif. . . .	10
2.1	$AR(1)$: $(\alpha = 0.7; \sigma_\varepsilon^2 = 1)$	28
2.2	FAC du modèle $AR(1)$	29
2.3	FAP du modèle $AR(1)$	30
3.1	$RCAR(1)$ ($\phi_1 = 0.5$, $\sigma_\eta^2 = 0.2$, $\sigma_\varepsilon^2 = 1$)	48
3.2	$RCAR(2)$ ($(\phi_1, \phi_2) = (-0.2, 0.4)$, $\sigma_\eta^2 = (0.1, 0.05)$, $\sigma_\varepsilon^2 = 1$) . . .	50
3.3	$RCAR(2)$ ($(\phi_1, \phi) = (-0.5, -0.1)$, $\sigma_\eta^2 = (0.1, 0.05)$, $\sigma_\varepsilon^2 = 1$, $n = 100$)	51
3.4	$RCAR(3)$; ($(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = (0.5, -0.2, 0.1)$, $\sigma_\eta^2 = (0.1, 0.1, 0.05)$, $\sigma_\varepsilon^2 = 1$)	52

Notations et abriviations

v.a	variable aléatoire.
i.i.d	indépendantes identiquement distribuées.
ssi	si seulement si.
i.e.	c'est-à-dire.
$E(X)$	Espérance de X.
$Cov(X, Y)$	Covariance de X et Y.
$Var(X), \gamma_X(0)$	variance de X.
$(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ ou $(X_t)_{t \in T}$	Une série temporelle ou un processus stochastique
$X_1, \dots, X_n$	Echantillon de taille n de la v.a X.
T_t	La tendance.
S_t	La saisonnalité.
C_t	La cycle.
ε_t	Le Résidu.

L ou B	L'opérateur de retard.
Δ	L'opérateur de différence.
Δ^d	La différence de degré d .
Δ_s	Différences saisonnières dans la tournoi s .
M	Facteur moyenne mobile.
k	Ordre à moyenne mobile.
$\gamma_X(h)$	Fonction d'autocovariance au retard h .
$\rho_X(h)$, FAC	Fonction d'autocorrélation.
Q_h , FACP	Fonction d'autocorrélation partielle.
σ^2	Variance.
$BB(0, \sigma^2)$	Bruit blanc.
$AR(p)$	Modèle autoregressif d'ordre p .
$RCAR(p)$	Modèle Auto-Régressif à Coefficients Aléatoires d'ordre p .
α_i, ϕ_i	Les paramètres (coefficients).

η_{it}	Coefficients Aléatoires
ρ	Rayon Spectral.
$\otimes$	Produit de Kronecker.
Vec	Opérateur de vectorisation.
$\hat{\alpha}_{YW}$ ou $\hat{\phi}_{YW}$	Estimateurs des paramètres par la methode de Yuel-Walker.
MCO ou OLS	Méthode de Moindres Carrés Ordinaires.
MCP	Méthode de Moindres Carrés Pondérés.
MV	Méthode de Maximum de Vraisemblance.
$L(\theta)$	Fonction de maxmum de vraisemblance

Introduction

Les séries chronologiques constituent un outil essentiel pour analyser l'évolution des phénomènes au cours du temps. Elles sont utilisées dans plusieurs domaines tels que l'économie, la finance et les sciences expérimentales. Une série chronologique peut être définie comme une suite d'observations ordonnées dans le temps, permettant de décrire et de prévoir le comportement d'un phénomène.

Parmi les modèles les plus couramment utilisés, les modèles autorégressifs (AR) occupent une place importante grâce à leur simplicité et à leur efficacité. Toutefois, ces modèles supposent que les coefficients sont constants, ce qui peut être insuffisant pour représenter des phénomènes réels dont la dynamique évolue dans le temps.

Dans ce contexte, les modèles autorégressifs à coefficients aléatoires ($RCAR$) ont été introduits afin de prendre en compte cette variabilité. L'introduction des coefficients aléatoires permet d'apporter une plus grande flexibilité dans la modélisation et d'obtenir une représentation plus réaliste des séries chronologiques, malgré la complexité de leur mise en œuvre.

Plusieurs travaux antérieurs se sont intéressés à l'étude des séries chronologiques et des modèles autorégressifs. Les modèles AR ont été largement développés dans la littérature, notamment dans les ouvrages de Goldfarb et Pardoux (2011) et Zhang (2018), qui présentent les bases théoriques de ces modèles. Par ailleurs, des contributions importantes ont été apportées dans le domaine des modèles à coefficients aléatoires, en particulier par Nicholls et Quinn (2012), qui ont étudié les propriétés des modèles RCA . D'autres travaux, tels que ceux de Aragon (2011), ont également mis en évidence l'importance des méthodes statistiques et de la simulation dans l'analyse des séries temporelles.

L'objectif de ce travail est de mettre en évidence l'apport des modèles $RCAR$ par rapport aux modèles AR classiques, notamment en termes de flexibilité et de capacité à représenter des dynamiques variables.

Notre travail est structuré en trois chapitres :

Le premier chapitre est consacré à l'introduction générale des séries chronologiques. Nous présentons leur définition, leurs composantes, ainsi que les principaux outils d'analyse, notamment l'autocovariance, l'autocorrélation et la notion de stationnarité.

Le deuxième chapitre est dédié à l'étude des modèles autorégressifs $AR(p)$. Nous abordons leur définition, leurs conditions de stationnarité, les fonctions d'autocorrélation et d'autocorrélation partielle, ainsi que les méthodes d'estimation des paramètres et la prévision.

Le troisième chapitre porte sur les modèles autorégressifs à coefficients aléatoires ($RCAR$). Nous présentons leur définition, leurs propriétés théoriques, les conditions de stationnarité, ainsi que les différentes méthodes d'estimation. Une étude par simulation à l'aide du logiciel R est également réalisée, suivie d'une comparaison des résultats obtenus.

Chapitre 1

Introduction aux séries chronologiques

L'intérêt pour les séries temporelles est apparu avec le développement de la statistique appliquée et la nécessité d'analyser les phénomènes évoluant dans le temps, notamment dans les domaines économique et financier. Avec les progrès de l'informatique, l'utilisation des séries temporelles s'est élargie et elles sont devenues un outil essentiel pour l'analyse et la prévision dans divers domaines d'application.

Ce chapitre à présenter les concepts de base des séries temporelles, à passer en revue leurs principaux composants et à expliquer leurs caractéristiques essentielles, en prélude à une étude plus approfondie de modèles sélectionnés. [1],[2],[3] et [6]

1.1 Définition d'une série chronologique

Définition 1.1.1 *Une série chronologique-une série temporelle- est une suite d'observations statistiques relatives à un phénomène donné, ordonnées dans le temps et relevées à intervalles réguliers. Elle est notée sous la forme $(X_t)_{t \in T}$ où X_t .*

1.2 Structure et organisation d'une série chronologique

Une série chronologique est généralement composée de plusieurs éléments de base, qui peuvent être comprises et analysées en leurs composants et en leurs éléments constitutifs. Ces composantes incluent :

- T_t : une composante tendancielle ;
- S_t : une composante saisonnière ;

- C_t : une composante cycle ;
- ε_t : une composante résiduelle ou irrégulière.

Les structures ou composants mentionnés précédemment (en détails) :

*** Tendance (T_t) :**

Elle représente le mouvement à long terme de la série chronologique, soit à la hausse, à la baisse ou stable. Par exemple : La croissance démographique progressive d'un pays sur plusieurs décennies. La tendance peut être représentée par différentes formules mathématiques telles que :

1. Linéaire : $T_t = \alpha + \beta t$.
2. Quadratique : $T_t = \alpha + \beta t + \gamma t^2$.
3. Exponentielle : $T_t = \alpha e^{\beta t}$ (α , β et γ sont constant).

*** La saisonnalité (S_t) :**

La saisonnalité fait référence aux variations régulières et périodiques qui se répètent au cours d'une période fixe n'excédant pas un an (une jour, hebdomadaire,...) et qui sont influencées par des facteurs saisonniers. Par exemples :

- Une augmentation significative des ventes de crèmes glacées pendant l'été.
- Une augmentation de la consommation d'électricité en hiver en raison du chauffage.

Remarque 1.2.1 Si p désigne la période de la saison alors $S_{t+p} = S_t$, et S_t écrire comme suit : $S_t = \alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \dots + \alpha_p S_p$.

*** La cyclicité (C_t) :**

La saisonnalité est similaire à la cyclicité, mais s'en distingue par le fait que ses périodes ne sont pas fixes et dépassent souvent un an. Elle est fréquemment associée aux cycles économiques ou industriels. Exemple : phases d'expansion et de récession économiques, cycles de croissance et de récession sur le marché boursier.

*** Aléatoire/Résidus (ε_t) :**

Cette composante représente les fluctuations inattendues et irrégulières qui surviennent dans la série chronologique et qui ne peuvent être expliquées par les autres composantes. Elles peuvent résulter d'événements exceptionnels ou de chocs soudains. Exemple : un choc économique soudain (comme une pandémie), une catastrophe naturelle ou des changements politiques inattendus.

Remarque 1.2.2 Une série chronologique peut également être considérée comme composée de deux types de variations :

- * *Variations régulières (systématiques) : englobent la tendance, la saisonnalité et le cycle, représentant des mouvements prévisibles et répétitifs.*
- * *Variations irrégulières (aléatoires) : correspondent aux fluctuations imprévisibles dues à des événements exceptionnels ou des aléas.*

1.3 Représentation graphique des composantes d'une série chronologique

Après la présentation théorique des composantes d'une série chronologique, il est nécessaire de les illustrer graphiquement afin de mettre en évidence la manière dont chaque composante apparaît sur le graphique temporel. La représentation graphique constitue un outil visuel efficace permettant de mieux comprendre le comportement de la série et d'en distinguer les principales caractéristiques dans les applications pratiques.

Lors ce que l'axe horizontal représente le temps, tandis que l'axe vertical correspond aux valeurs prises par la série. À travers ce type de représentation, il est possible d'observer les différentes formes traduisant les composantes de la série temporelle, comme suit :

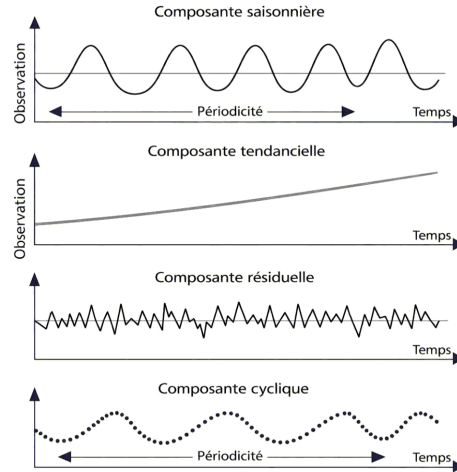


FIG. 1.1 – Représentation graphique des composantes de séries chronologique.

Cette représentation graphique permet d'établir un lien clair entre les notions théoriques et leur observation pratique, facilitant ainsi l'analyse des séries temporelles et le choix des modèles statistiques appropriés.

1.3.1 L'indexation d'une série chronologique

Lorsque les données sont organisées sous forme annuelle et infra-annuelle (mois ou trimestres), il est pratique d'utiliser une double indexation. On note alors y_{ij} l'observation correspondant à l'année i et à la période j .

Ainsi :

- y_{ij} : valeur observée de la série ;
- t_{ij} : composante tendancielle ;
- s_{ij} : composante saisonnière ;
- c_t : une composante cycle ;
- ε_{ij} : composante résiduelle.

Si l'on considère $i = 1, \dots, n$ (années) et $j = 1, \dots, p$ (mois ou trimestres), la série peut être représentée par un indice temporel unique t , défini par :

$$t = p(i - 1) + j.$$

Exemple 1.3.1 Dans le cas d'une série mensuelle $p = 12$:

$$t = 12(i - 1) + j.$$

Dans le cas d'une série trimestrielle $p = 4$:

$$t = 4(i - 1) + j.$$

Cette relation permet de passer d'une indexation bidimensionnelle (i, j) à une indexation unidimensionnelle t , facilitant ainsi la modélisation et l'analyse statistique ultérieure.

1.4 Modèles d'analyse des séries chronologique

Définition 1.4.1 *Les modèles d'analyse des séries temporelles dépendent de la nature des données et de l'interaction de leurs composantes. Ces modèles peuvent généralement être classés en analyses additives, multiplicatives ou mixtes.*

- **Modèle additif** : Le modèle additif suppose que les composantes de la série temporelle s'additionnent pour former la valeur observée à chaque instant :

$$X_t = T_t + S_t + \varepsilon_t.$$

- **Modèle multiplicatif** : Le modèle multiplicatif suppose que les composantes de la série se multiplient pour former la valeur observée :

$$X_t = T_t \cdot S_t \cdot \varepsilon_t.$$

- **Modèle mixte** : Il s'agit d'une combinaison des méthodes d'addition et de multiplication :

$$X_t = (T_t + S_t) \cdot \varepsilon_t,$$

ou

$$X_t = (T_t \cdot S_t) + \varepsilon_t.$$

1.4.1 Choix du modèle de décomposition

La détermination du modèle de décomposition approprié (additif ou multiplicatif) constitue une étape préalable essentielle dans l'analyse d'une série chronologique. Plusieurs approches peuvent être mobilisées à cette fin, certaines reposant sur une inspection graphique, d'autres sur des critères analytiques plus formels.

* Approche graphique (méthode des bandes) :

Cette méthode consiste à examiner l'évolution simultanée des valeurs maximales et minimales de la série au cours du temps. On trace alors deux courbes enveloppes : l'une reliant approximativement les maxima successifs et l'autre les minima.

Deux configurations peuvent être observées :

1. Si la distance entre les deux courbes reste sensiblement constante au fil du temps, l'amplitude des variations saisonnières est indépendante du niveau de la série (i.e la droite de maxima et minima sont parallèle). Dans ce cas, un modèle additif est approprié.
2. En revanche, si l'écart entre les maxima et les minima augmente ou diminue proportionnellement au niveau général de la série, les fluctuations saisonnières dépendent du niveau de la tendance (i.e la droite de maxima et minima sont pas parallèle). Le modèle multiplicatif devient alors plus pertinent.

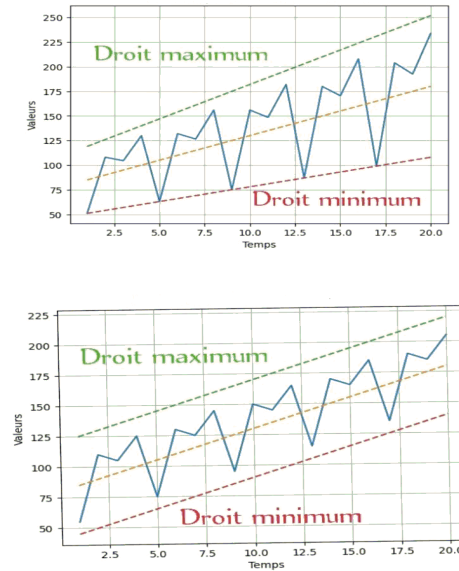


FIG. 1.2 – Méthode des bandes : modèle multiplicatif et modèle additif.

* Méthode du profil temporel

Une autre technique consiste à superposer les différentes périodes saisonnières (par exemple les trimestres ou les mois) afin d'analyser la stabilité des écarts entre elles.

1. Lorsque les profils saisonniers apparaissent approximativement parallèles, cela suggère que l'effet saisonnier est constant : le modèle additif est privilégié .
2. Si l'écart entre les profils varie avec le niveau moyen de la série, cela indique une proportionnalité des effets saisonniers, ce qui oriente vers un modèle multiplicatif.

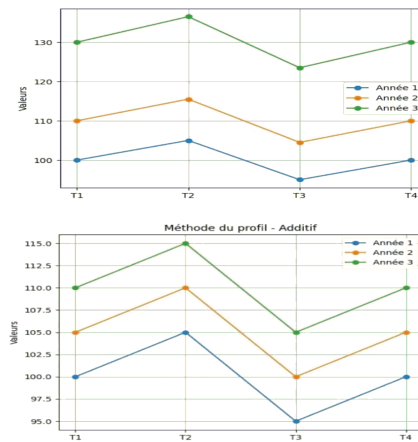


FIG. 1.3 – Méthode du profil : modèle multiplicatif et modèle additif.

Commentaire :

- Dans le modèle additif, les profils saisonniers sont parallèles, ce qui signifie que l'amplitude des variations reste constante au fil du temps.
- En revanche, dans le modèle multiplicatif, les courbes ne sont pas parallèles et l'écart entre elles augmente avec le niveau de la série, traduisant un effet saisonnier proportionnel à l'évolution générale du phénomène.

Approche analytique

Il est également possible d'étudier la relation entre la moyenne et la dispersion (écart-type) des observations.

1. Si la variance reste approximativement constante quel que soit le niveau moyen, la structure est compatible avec un modèle additif.
2. En revanche, si la variance augmente avec la moyenne, cela suggère une structure multiplicative.

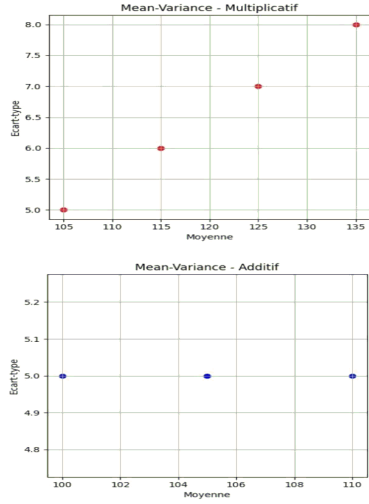


FIG. 1.4 – Approche analytique : modèle multiplicatif et modèle additif.

1.5 Fonctions d'autocovariance et d'autocorrélation

Définition 1.5.1 La fonction d'autocovariance est la covariance entre X_t et $X_{t\pm h}$, définie par :

$$\begin{aligned}\gamma(h) &= \text{cov}(X_t, X_{t\pm h}) \\ &= E(X_t \cdot X_{t\pm h}) - E(X_t) \cdot E(X_{t\pm h}).\end{aligned}$$

Définition 1.5.2 La matrice d'autocovariance est

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_X(0) & \gamma_X(1) & \gamma_X(2) & \cdots & \gamma_X(h-1) & \gamma_X(h) \\ \gamma_X(1) & \gamma_X(0) & \gamma_X(1) & \cdots & \gamma_X(h-2) & \gamma_X(h-1) \\ \gamma_X(2) & \gamma_X(1) & \gamma_X(0) & \cdots & \gamma_X(h-3) & \gamma_X(h-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \gamma_X(h-1) & \gamma_X(h-2) & \gamma_X(h-3) & \cdots & \gamma_X(0) & \gamma_X(1) \\ \gamma_X(h) & \gamma_X(h-1) & \gamma_X(h-2) & \cdots & \gamma_X(1) & \gamma_X(0) \end{bmatrix}$$

La fonction d'autocovariance est une fonction paire i.e $\gamma_X(h) = \gamma_X(-h)$.

Définition 1.5.3 La fonction d'autocorrélation mesure le degré de corrélation linéaire entre les valeurs d'une série et leurs retards. Elle est définie par :

$$\rho_X(h) = \frac{\gamma_X(h)}{\gamma_X(0)} \in [-1; 1],$$

ou $\rho_X(0) = 1$;

Définition 1.5.4 *La matrice d'autocorrélation est*

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \rho_X(1) & \rho_X(2) & \cdots & \rho_X(h-1) & \rho_X(h) \\ \rho_X(1) & 1 & \rho_X(1) & \cdots & \rho_X(h-2) & \rho_X(h-1) \\ \rho_X(2) & \rho_X(1) & 1 & \cdots & \rho_X(h-3) & \rho_X(h-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \rho_X(h-1) & \rho_X(h-2) & \rho_X(h-3) & \cdots & 1 & \rho_X(1) \\ \rho_X(h) & \rho_X(h-1) & \rho_X(h-2) & \cdots & \rho_X(1) & 1 \end{bmatrix}$$

La fonction d'autocorrélation, abrégée FAC (ou ACF en anglais, Autocorrelation Function), sa représentation graphique, appelée corrélogramme, permet de visualiser la structure de dépendance de la série, notamment la présence d'une saisonnalité ou la décroissance des corrélations en fonction du retard.

1.6 Modèle stationnaire et non stationnaire

On donne ici la stationnarité et la non stationnarité dans les séries chronologiques.

1.6.1 La stationnarité

La stationnarité dans les séries temporelles signifie que les propriétés statistiques de la série ne changent pas au fil du temps, ce qui rend son analyse et sa prévision plus fiables et stables.

Définition 1.6.1 *La série est dite stationnaire au sens fort si les distributions de probabilité conjointes d'un ensemble de valeurs de la série restent les mêmes quel que soit le moment i.e $X_t \stackrel{loi}{=} X_{t+h}$.*

Définition 1.6.2 *La série est dite stationnaire au sens faible si :*

- $E|X_t^2| < +\infty$
- La moyenne est constante dans le temps $E(X_t) = \mu$.
- La variance et la covariance sont indépend de temps i.e est constante.

1.6.2 La non stationnaire

Définition 1.6.3 *On dit que un modèle X_t est instable (ou non stationnaire), si son comportement statistique varie selon les intervalles de temps, c'est-à-dire que sa moyenne, sa fonction d'autocovariance évoluent au fil du temps. Ce qui rend son analyse et sa prédiction plus difficiles que pour les modèles stables (stationnaire).*

Remarque 1.6.1 *Pour effectuer des prédictions et des prévisions, la série temporelle doit être stable (stationnerité), il est donc nécessaire de vérifier la stationnarité de la série ou de convertir les données en données stationnaires.*

1.7 Outils d'analyse descriptive

Nous avons mentionné précédemment que la stationnarité constitue une condition essentielle dans l'analyse des séries temporelles.

Dans cette partie, nous présenterons les méthodes permettant de rendre une série temporelle stationnaire dans le cas où elle ne l'est pas, c'est-à-dire de transformer une série temporelle X_t non stationnaire en une série Y_t stationnaire.

1.7.1 L'opérateur de retard et la différentiations (Δ)

Avant d'aborder la différenciation, il est fondamental de définir l'Opérateur de retard.

Définition 1.7.1 *L'opérateur de retard, noté en général B (backwards) ou L (lag), est un outil fondamental en analyse des séries temporelles. Il permet de décaler une observation d'une période vers le passé et facilite ainsi le traitement théorique et pratique des séries temporelles. Il est défini par la relation :*

$$LX_t = X_{t-1}$$

plus généralement :

$$L^h X_t = X_{t-h}$$

Définition 1.7.2 *La différenciation simple Δ est une méthode utilisée pour corriger les séries chronologique présentant une tendance. Elle constitue le procédé*

principal pour éliminer une tendance linéaire. Elle s'exprime mathématiquement à l'aide de l'opérateur de retard :

$$\begin{aligned}\Delta X_t &= X_t - X_{t-1} \\ &= X_t - LX_t \\ &= (1 - L)X_t\end{aligned}$$

- Si après une première différence la série n'est toujours pas stationnaire (tendance parabolique par exemple), on applique une seconde différence :

$$\Delta^2 X_t = \Delta(\Delta X_t)$$

d'une façon générale

$$\begin{aligned}\Delta^d X_t &= \Delta(\Delta^{d-1} X_t) \\ &= (1 - L)^d X_t\end{aligned}$$

Propriété 1.7.1 soit $\lambda \in R$

- si $\lambda < 1$

$$(1 - \lambda L)^{-1} = \sum_{j=0}^{+\infty} (\lambda L)^j$$

- si non ($\lambda > 1$)

$$(1 - \lambda L)^{-1} = -(\lambda L)^{-1} \cdot \sum_{j=0}^{+\infty} (\lambda L)^{-j}$$

Définition 1.7.3 La différence saisonnière Δ_s indispensable lorsque la série présente un cycle répétitif (ex : ventes mensuelles). Pour une période s (ex : $s = 12$ pour des mois), on calcule :

$$\Delta_s X_t = X_t - X_{t-s}$$

- Cette opération permet de comparer chaque mois à son équivalent de l'année précédente, neutralisant ainsi l'effet de saison.

1.7.2 Moyenne mobile

Contrairement à l'opérateur de différenciation qui élimine la tendance, la moyenne mobile permet d'estimer et de lisser la série afin de mieux mettre en évidence sa composante principale. Elle est principalement utilisée pour réduire les fluctuations irrégulières et faciliter l'analyse de la structure sous-jacente de la série.

Définition 1.7.4 *L'opérateur moyenne mobile M est polynome en L :*

$$M = \frac{1}{k} \sum_{j=-k_1}^{k_2} \alpha_j L^{-j}$$

où k représente l'ordre de la moyenne mobile : $k = k_1 + k_2 + 1$ et α_j sont des coefficients constants.

Exemple 1.7.2 *Pour éliminer une composante saisonnière journalière de période $s = 5$ (par exemple dans le cas d'une activité observée sur 5 jours ouvrables), on utilise l'opérateur de moyenne mobile centré d'ordre 5 :*

$$M = \frac{1}{5}(L^2 + L + I + L^{-1} + L^{-2})$$

tel que $F = L^{-1}$ est l'opérateur d'avance.

Définition 1.7.5 *La moyenne mobile simple d'ordre k consiste à remplacer chaque observation X_t par la moyenne arithmétique de k observations consécutives de la série. Elle permet de réduire les fluctuations irrégulières et de lisser la série afin de mieux mettre en évidence son évolution générale. Elle s'écrit :*

$$M(X_t) = \frac{1}{k} \sum_{j=-k_1}^{k_2} X_{t-j}$$

En utilisant l'opérateur moyenne mobile d'ordre k , la moyenne mobile simple peut s'exprimer sous forme opératorielle comme suit :

$$M(X_t) = \frac{1}{k} \left(\sum_{j=-k_1}^{k_2} \alpha_j L^{-j} \right) X_t$$

Exemple 1.7.3 *Nous appliquons le même exemple précédent à une série*

$$Y_t = M(X_t) = \frac{1}{5}(L^2 + L + I + L^{-1} + L^{-2})X_t$$

Définition 1.7.6 *La moyenne mobile est dite centrée lorsque les observations utilisées dans le calcul sont réparties de manière symétrique autour de l'instant t . Autrement dit, elle est centrée lorsque le nombre de valeurs prises avant et après t est identique ($k_1 = k_2$).*

Cette forme permet une meilleure localisation temporelle de la moyenne et offre une estimation plus précise de la tendance.

Cas particuliers selon la valeur de k

Nous distinguons deux cas pour calculer les moyennes mobiles :

- * **Cas 1** : k "impair" ($k = 2p + 1$), la moyenne est automatiquement centrée et ne nécessite aucun ajustement :

$$M(X_t) = \frac{1}{k}(X_{t-p} + \cdots + X_{t-1} + X_t + \cdots + X_{t+p})$$

Exemple 1.7.4 pour $k = 3 \Leftrightarrow k = 2(1) + 1 \Leftrightarrow p = 1$;

$$Y_t = M(X_t) = \frac{1}{3}(X_{t-1} + X_t + X_{t+1})$$

- * **Cas 2** : k "pair" ($k = 2p$), la moyenne mobile ne possède pas de centre réel, car elle est calculée entre deux périodes successives. Autrement dit, la valeur obtenue se situe à mi-distance entre deux instants et ne correspond pas exactement à une date précise de la série.

Pour remédier à cela, on procède à un centrage supplémentaire en calculant la moyenne de deux moyennes mobiles consécutives. Cette opération permet d'obtenir une moyenne mobile centrée, associée à une période bien déterminée :

$$M(X_t) = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}X_{t-p} + \cdots + X_{t-1} + X_t + \cdots + \frac{1}{2}X_{t+p}\right)$$

Exemple 1.7.5 pour $k = 4 \Leftrightarrow k = 2(2) \Leftrightarrow p = 2$;

$$Y_t = M(X_t) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}X_{t-2} + X_{t-1} + X_t + X_{t+1} + \frac{1}{2}X_{t+2}\right)$$

Remarque 1.7.1 Lorsque l'ordre k de la moyenne mobile est impair, la moyenne mobile simple coïncide avec la moyenne mobile centrée, car les observations sont réparties de manière symétrique autour de l'instant t . En revanche, lorsque k est pair, il n'existe pas de centre exact ; il est alors nécessaire de calculer une moyenne mobile ajustée afin d'obtenir une valeur centrée.

1.7.3 Autres méthodes de stationnarisation

Outre la différenciation et la moyenne mobile, d'autres méthodes peuvent être utilisées dans l'étude des séries temporelles afin de traiter ou diagnostiquer la non-stationnarité.

1. **La méthode de Buys-Ballot** constitue une approche descriptive basée sur la réorganisation des données sous forme de tableau (par périodes et sous-périodes). Elle permet de détecter la présence d'une tendance, d'une

saisonnalité et d'identifier la nature du modèle (additif ou multiplicatif). Toutefois, il s'agit principalement d'un outil d'analyse et non d'une méthode de transformation.

2. **Les transformations de variance**, telles que la transformation logarithmique ou la transformation de Box-Cox, sont utilisées lorsque la variance de la série n'est pas constante. Elles visent à stabiliser la variance et à rapprocher la série des conditions de stationnarité.
3. **les tests de stationnarité**, notamment le test de Dickey-Fuller augmenté (ADF), permettent de vérifier statistiquement la présence d'une racine unitaire. Contrairement aux méthodes précédentes, ces tests ne transforment pas la série, mais évaluent son caractère stationnaire.

1.8 Bruit blanc ε_t

Définition 1.8.1 *Un bruit blanc (ε_t) est une suite de variable aléatoire appartenant à L^2 , centrées et de variance σ^2 et non outocorrélées (Les variables ne sont pas nécessairement indépendantes, mais simplement décorréllées). Il est noté par $BB(0, \delta^2)$ et il constitue une modèle faiblement stationnaire c'est-à-dire :*

1. $E|\varepsilon_t|^2| < +\infty$
2. $E(\varepsilon_t) = 0$
3. $Var(\varepsilon_t) = \sigma^2$
4. $Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$, $s \neq t$

Définition 1.8.2 *Un bruit blanc gaussien, $\varepsilon_t \sim BBN(0, \sigma^2)$ est une suite de v.a i.i.d. $N(0, \sigma^2)$.*

1.9 Un modèle linéaire (série linéaire)

Définition 1.9.1 *Un modèle linéaire pour une série chronologique est une relation mathématique où la variable dépendante X_t est exprimée comme une combinaison linéaire de ses valeurs passées, de variables explicatives et d'un terme d'erreur aléatoire ε_t . Ce modèle X_t peut être exprimé de manière générale comme suit :*

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} Q_j \varepsilon_{t-j}$$

où

- X_t est la valeur de la série à l'instant t ,

- Q_j sont les coefficients qui représentent l'influence de l'erreur passée sur la valeur actuelle,
- ε_{t-j} est le terme d'erreur (Bruit blanc) à l'instant $t - j$.

1.9.1 Notation d'un modèle linéaire

Nous connaissons deux classifications :

1) Un modèle linéaire causale :

Définition 1.9.2 *on dit que $\{X_t\}$ est un modèle linéaire causale si on peut l'écrire sous la forme*

$$X_t = \sum_{j=0}^{+\infty} Q_j \varepsilon_{t-j}$$

2) Un modèle linéaire inversible :

Définition 1.9.3 *on dit que $\{X_t\}$ est un modèle linéaire inversible si*

$$\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{+\infty} Q_j X_{t-j}$$

Remarque 1.9.1 – *Le modèle linéaire constitue la base de la plupart des modèles de séries temporelles.*

- *Il permet une représentation quantitative et transparente de la relation entre les valeurs actuelles et passées.*

1.10 Un modèle non linéaire (série non linéaire)

Les modèles non linéaires en séries chronologiques sont des modèles dans lesquels la relation entre la variable étudiée et ses valeurs passées n'est pas linéaire. Contrairement aux modèles linéaires, ils permettent de représenter des dynamiques plus complexes et évolutives dans le temps.

Définition 1.10.1 *De manière générale, un modèle non linéaire peut s'écrire sous la forme :*

$$X_t = f(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-p}) + \varepsilon_t$$

où :

- f est une fonction non linéaire,
- X_t représente la série temporelle à l'instant t ,
- ε_t est un terme d'erreur aléatoire.

Propriété 1.10.1 *Les modèles non linéaires se distinguent par leur capacité à représenter des phénomènes que les modèles linéaires ne peuvent pas capter efficacement, tels que :*

- l’asymétrie des fluctuations,*
- l’hétéroscédasticité (variation du niveau de variance dans le temps),*
- les effets de seuil ou de changement de régime.*

Cependant, cette flexibilité s’accompagne généralement d’une complexité accrue en termes d’estimation et d’interprétation des paramètres.

Chapitre 2

Les modèles autorégressifs et leurs extension

Ce chapitre est consacré à l'étude des modèles **AutoRegressifs** (AR), qui occupent une place centrale dans l'analyse des séries chronologiques. Contrairement aux approches descriptives, ces modèles visent à exploiter la dépendance temporelle entre les observations. L'objectif est de formaliser mathématiquement l'idée que le futur d'une variable est intimement lié à son passé, permettant ainsi de passer d'une simple observation à une stratégie de prévision rigoureuse. [1],[2],[9],[10] et [11]

2.1 Définition du modèle autorégressif

Définition 2.1.1 *Un processus X_t est dit autoregressif d'ordre p , noté $AR(p)$, si sa valeur à l'instant t est une fonction linéaire des p valeurs précédentes de la même série. Le terme "**Auto**" (soi-même) indique que la variable régresse sur ses propres réalisations passées.*

Définition 2.1.2 *Mathématiquement, on appelle un modèle $AR(p)$ tout modèle s'écrit sous la forme suivante :*

$$X_t = \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i} + \varepsilon_t,$$

i.e :

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \cdots + \alpha_p X_{t-p} + \varepsilon_t, \quad (2.1)$$

où

– X_t : représente la variable d'intérêt à l'instant t .

- $\{\alpha_i\}_{i=1,\dots,p}$: sont les paramètres (coefficients) du modèle à estimer.
- p : est l'ordre du modèle (le nombre de retards).
- ε_t : est un Bruit Blanc.

2.1.1 Représentation avec l'opérateur de retard (L)

Le modèle peut également être écrit de manière concise en utilisant l'opérateur de retard L , où $LX_t = X_{t-1}$ (nous travaillons sur l'équation 2.1) :

$$\begin{aligned} X_t - \alpha_1 X_{t-1} - \alpha_2 X_{t-2} - \dots - \alpha_p X_{t-p} &= \varepsilon_t \\ (1 - \alpha_1 L + \alpha_2 L^2 + \dots + \alpha_p L^p) X_t &= \varepsilon_t \end{aligned}$$

si on note par $Q(L) = 1 - \alpha_1 L + \alpha_2 L^2 + \dots + \alpha_p L^p$ le polynôme autorégressif. On obtient :

$$Q(L)X_t = \varepsilon_t.$$

2.2 Condition de la stationnarité de modèle AR

Avant d'utiliser un modèle AR pour la prévision, il est impératif de vérifier sa stationnarité. Un processus est dit stationnaire si ses propriétés statistiques (moyenne, variance, autocovariance) sont invariantes dans le temps. Si un modèle n'est pas stationnaire, l'influence des chocs passés ne s'estompe pas, ce qui conduit à une série divergente et difficile à modéliser.

2.2.1 Stationnarité du modèle $AR(1)$

Considérons le modèle simple :

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \varepsilon_t. \quad (2.2)$$

La condition de stationnarité dépend uniquement du paramètre α_1 . Le modèle est stationnaire si et seulement si :

$$|\alpha_1| < 1$$

- Si $|\alpha_1| < 1$: Le processus est stationnaire. L'effet d'un choc diminue de façon géométrique et finit par disparaître.
- Si $|\alpha_1| = 1$: On parle de Marche Aléatoire (Racine Unitaire), le processus n'est pas stationnaire.
- Si $|\alpha_1| > 1$: Le processus est explosif (non stationnaire).

2.2.2 Généralisation au modèle $AR(p)$

Pour un modèle d'ordre p , la condition devient plus complexe. Elle repose sur les racines de l'équation caractéristique associée au polynôme retard :

$$Q(z) = 0 \iff 1 - \alpha_1 z - \alpha_2 z^2 - \dots - \alpha_p z^p = 0.$$

Théorème 2.2.1 *Le processus $AR(p)$ est stationnaire si toutes les racines (z_i) de l'équation caractéristique se trouvent à l'extérieur du cercle unité dans le plan complexe. Cela revient à dire que le module de chaque racine doit être supérieur à 1 ($|z_i| > 1$).*

2.3 Fonction d'autocorrélation d'un modèle $AR(p)$ et la variance

2.3.1 Fonction d'autocorrélation

Pour un modèle $AR(p)$, la Fonction d'Autocorrélation (FAC) présente un comportement caractéristique qui permet de l'identifier parmi d'autres types de modèles. Elle est étroitement liée aux équations de Yule-Walker. Ecrire comme suit :

$$\rho_X(h) = \frac{\gamma_X(h)}{\gamma_X(0)}. \quad (2.3)$$

Par les équations de Yule-Walker :

$$\rho_X(h) = \sum_{i=1}^p \alpha_i \rho_X(h-i), \quad (2.4)$$

et nous définissons le système suivant "**système de Yule-Walker**" à partir de l'équation (2.4) :

$$\begin{cases} \rho_X(1) = \alpha_1 \rho(0) + \alpha_2 \rho(1) + \alpha_3 \rho(2) + \dots + \alpha_p \rho(1-p) \\ \rho_X(2) = \alpha_1 \rho(1) + \alpha_2 \rho(0) + \alpha_3 \rho(1) + \dots + \alpha_p \rho(2-p) \\ \rho_X(3) = \alpha_1 \rho(2) + \alpha_2 \rho(1) + \alpha_3 \rho(0) + \dots + \alpha_p \rho(3-p) \\ \vdots \end{cases}$$

On définit la forme matricielle de ce système, noté R_p :

$$R_p = \begin{bmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(2) & \dots & \rho(p-1) \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) & \dots & \rho(p-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \rho(p-2) & \rho(p-3) & \dots & 1 & \rho(1) \\ \rho(p-1) & \rho(p-2) & \rho(p-3) & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Preuve De l'équation (2.3) à (2.4)

1. Calcule $\gamma_X(h) = \text{cov}(X_t, X_{t-h}) = E(X_t X_{t-h})$ car $E(X_t) = 0$ alors nous calculons d'abord $E(X_t X_{t-h})$.
 - En partant du modèle (équation (2.1)) et en multipliant les deux cotés par X_{t-h} , nous obtenons l'équation suivante :

$$X_t X_{t-h} = \alpha_1 X_{t-1} X_{t-h} + \alpha_2 X_{t-2} X_{t-h} + \cdots + \alpha_p X_{t-p} X_{t-h} + \varepsilon_t X_{t-h},$$

où $E(\varepsilon_t) = 0$ et (X_t, ε_t) est indépendant.

- Par passage de l'esperance

$$\begin{aligned} E(X_t X_{t-h}) &= \alpha_1 E(X_{t-1} X_{t-h}) + \alpha_2 E(X_{t-2} X_{t-h}) + \cdots + \alpha_p E(X_{t-p} X_{t-h}) + E(\varepsilon_t X_{t-h}) \\ &= \alpha_1 E(X_{t-1} X_{t-h}) + \alpha_2 E(X_{t-2} X_{t-h}) + \cdots + \alpha_p E(X_{t-p} X_{t-h}) \\ &\text{car } (X_t \text{ et } \varepsilon_t \text{ sont indépendants}) \end{aligned}$$

- Donc, par définition on a :

$$\gamma_X(h) = \alpha_1 \gamma(h-1) + \alpha_2 \gamma(h-2) + \cdots + \alpha_p \gamma(h-p) \quad (2.5)$$

$$= \sum_{i=1}^p \alpha_i \gamma(h-i)$$

2. On divisant l'équation (2.5) par $\gamma_X(0)$:

$$\frac{\gamma_X(h)}{\gamma_X(0)} = \sum_{i=1}^p \alpha_i \frac{\gamma(h-i)}{\gamma_X(0)} \iff \rho_X(h) = \sum_{i=1}^p \alpha_i \rho_X(h-i)$$

■

2.3.2 Calcule de la variance

$$\text{Var}(X_t) = \gamma_X(0) = E(X_t X_t)$$

- En partant du modèle (équation (2.1)) et en multipliant les deux cotés par X_t , puis on passage de l'esperance, nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} E(X_t X_t) &= \alpha_1 E(X_{t-1} X_t) + \alpha_2 E(X_{t-2} X_t) + \cdots + \alpha_p E(X_{t-p} X_t) + E(\varepsilon_t X_t) \\ &= E(X_t X_t) = \alpha_1 E(X_{t-1} X_t) + \alpha_2 E(X_{t-2} X_t) + \cdots + \alpha_p E(X_{t-p} X_t) + \sigma_\varepsilon^2 \text{ car } E(\varepsilon_t X_t) = \end{aligned}$$

– Alors par définition on a :

$$\begin{aligned}\gamma_X(0) &= \alpha_1\gamma(1) + \alpha_2\gamma(2) + \cdots + \alpha_p\gamma(p) + \sigma_\varepsilon^2 \\ \gamma_X(0) &= \sum_{i=1}^p \alpha_i\gamma(i) + \sigma_\varepsilon^2.\end{aligned}\tag{2.6}$$

On divise (2.6) par $\gamma_X(0)$:

$$\begin{aligned}\frac{\gamma_X(0)}{\gamma_X(0)} &= \frac{\sum_{i=1}^p \alpha_i\gamma_X(i) + \sigma_\varepsilon^2}{\gamma_X(0)} \\ \iff 1 &= \sum_{i=1}^p \alpha_i\rho_X(i) + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\gamma_X(0)} \\ \iff 1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i\rho_X(i) &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\gamma_X(0)} \\ \iff \gamma_X(0) &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i\rho_X(i)}.\end{aligned}$$

2.4 Fonction d'autocorrélation partielle (FACP)

La FACP est l'outil qui permet d'identifier l'ordre p du modèle AR . Elle mesure le lien direct entre la valeur actuelle X_t et sa valeur passée X_{t-k} , en éliminant l'influence des valeurs intermédiaires.

Définition 2.4.1 *On défine le vecteur des autocorrélations partiels par $Q_h = (Q_1, Q_2, \dots, Q_h)$ tel que :*

$$Q_h = \frac{\det(R_h^*)}{\det(R_h)}.$$

où R_h^* est obtenu par remplaçant la dernière colonne de R_h par le vecteur $(\rho(1), \rho(2), \dots)$

2.4.1 Propriété d'un $AR(p)$

D'un point de vue statistique, la FACP d'un processus $AR(p)$ possède une propriété caractéristique, elle est significativement différente de zéro pour les retards inférieurs ou égaux à p , et s'annule pour tous les retards supérieurs à p . C'est-à-dire :

$$Q_h = \begin{cases} k, & k \neq 0 & \text{si } h \leq p, \\ 0 & & \text{si } h > p. \end{cases}$$

Cette propriété permet de fixer la dimension du modèle. Autrement dit, elle permet d'estimer l'ordre p de modèle $AR(p)$.

2.5 Estimation de paramètres d'un modèle AR

Une fois l'ordre p du modèle identifié et la stationnarité vérifiée, l'étape suivante consiste à estimer les paramètres inconnus (α_i) ainsi que la variance du bruit blanc (σ^2) . L'estimation a pour but de trouver les valeurs numériques qui ajustent au mieux le modèle aux données observées.

2.5.1 Méthode de Yule-Walker

La méthode de Yule-Walker est une approche d'estimation qui repose sur la relation directe entre les paramètres du modèle (α_i) et les coefficients d'autocorrélation $(\rho(h))$. Elle consiste à remplacer les autocorrélations théoriques par leurs estimations calculées à partir des données observées. Cette méthode est particulièrement efficace pour les modèles AR stationnaires.

Après avoir écrit le système Yule-Walker sous forme matricielle :

$$\rho = R_p \cdot \alpha$$

ce qui permet d'abtenir les paramètres α en fonction des ρ :

$$\alpha = R_p^{-1} \cdot \rho$$

Alors l'estimation des paramètres α_i sont :

$$\widehat{\alpha}_{YW} = \widehat{R}_p^{-1} \cdot \widehat{\rho}$$

où : $\widehat{\alpha}_{YW} = (\widehat{\alpha}_1, \widehat{\alpha}_2, \dots)^T$ et $\widehat{\rho} = (\widehat{\rho(1)}, \widehat{\rho(2)}, \dots)^T$.

2.5.2 Méthode des Moindres Carrés Ordinaires (MCO)

La méthode des moindres carrés consiste à estimer les paramètres du modèle en minimisant la somme des carrés des erreurs entre les valeurs observées et les valeurs ajustées par le modèle.

Autrement dit, on cherche les estimateurs qui rendent l'écart entre les observations réelles et les valeurs prédites aussi faible que possible.

* Pour le modèle $AR(1)$:

L'estimateur des moindres carrés de α_1 du modèle (2.2) est obtenu en minimisant :

$$\begin{aligned} S(\alpha) &= \sum_{t=2}^n \varepsilon_t^2 \\ &= \sum_{t=2}^n (X_t - \alpha_1 X_{t-1})^2 \end{aligned}$$

En dérivant par rapport à α_1 et en annulant la dérivée, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{dS(\alpha)}{d\alpha} &= 0. \\
&\Leftrightarrow 2 \sum_{t=2}^n (X_t - \alpha X_{t-1})(-X_{t-1}) = 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{t=2}^n (\alpha X_{t-1}^2 - X_t X_{t-1}) = 0 \\
&\Leftrightarrow \alpha \sum_{t=2}^n X_{t-1}^2 = \sum_{t=2}^n X_t X_{t-1} \\
&\Leftrightarrow \hat{\alpha} = \frac{\sum_{t=2}^n X_t X_{t-1}}{\sum_{t=2}^n X_{t-1}^2}.
\end{aligned}$$

* Généralisation au modèle $AR(p)$:

Pour estimer les paramètres $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$ d'un modèle $AR(p)$, nous écrivons l'équation (2.1) sous la forme suivante :

$$X_t = Y_t' \alpha + \varepsilon_t.$$

où

- ε_t est un bruit blanc.
- $Y_t' = (X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-p})$ est le vecteur des observations passées (retards).
- α est le vecteur des paramètres à estimer.

L'estimation des paramètres $\hat{\alpha}$ par la méthode des moindres carrés est donnée par la formule suivante :

$$\hat{\alpha}_{MCO} = \left(\sum_{t=p+1}^n Y_t Y_t' \right)^{-1} \sum_{t=p+1}^n Y_t X_t.$$

Et l'estimation de la variance du bruit blanc :

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{n-p} \sum_{t=p+1}^n (X_t - Y_t' \hat{\alpha})^2.$$

2.6 La Prédiction avec le modèle $AR(p)$

L'objectif de la modélisation $AR(p)$ est de réaliser des prévisions sur les valeurs futures de la série chronologique. Une fois les paramètres estimés et la validité du

modèle confirmée, nous utilisons l'équation du modèle pour calculer les valeurs attendues pour les périodes à venir ($T + 1, T + 2, \dots$). La prévision s'appuie sur l'information disponible jusqu'à l'instant présent.

*** Principe de la prévision :**

Pour la prévision un modèle $AR(p)$ à l'horizon h (pour la période suivante) est donnée par l'espérance conditionnelle :

$$\hat{X}_{T+h} = E(X_{T+h} | \underline{X_T}) \quad (2.7)$$

et $\underline{X_T}$ désigne l'ensemble d'information sur la série X_t :

*** Mécanisme de prévision à un horizon h**

Soit $\hat{X}_{T+h}$ la prévision de X_{t+h} faite à l'instant t .

- Pour un horizon $h = 1$: La prévision est obtenue directement en remplaçant les valeurs de la série par leurs observations réelles :

$$\hat{X}_{T+1} = \alpha_1 X_T + \alpha_2 X_{T-1} + \alpha_3 X_{T-2} + \dots + \alpha_p X_{T+1-p}.$$

Preuve Nous partons de (2.7) :

$$\begin{aligned} \hat{X}_{T+1} &= E(X_{T+1} | \underline{X_T}) \\ &= E(\alpha_1 X_T + \alpha_2 X_{T-1} + \alpha_3 X_{T-2} + \dots + \alpha_p X_{T+1-p} + \varepsilon_{T+1} | \underline{X_T}) \\ &= \alpha_1 E(X_T | \underline{X_T}) + \alpha_2 E(X_{T-1} | \underline{X_T}) + \alpha_3 E(X_{T-2} | \underline{X_T}) + \dots + \alpha_p E(X_{T+1-p} | \underline{X_T}) \\ &\quad + E(\varepsilon_{T+1} | \underline{X_T}) \end{aligned}$$

■

par passage de l'esperance conditionnel :

$$\begin{aligned} \hat{X}_{T+1} &= \alpha_1 X_T + \alpha_2 X_{T-1} + \alpha_3 X_{T-2} + \dots + \alpha_p X_{T+1-p} + E(\varepsilon_{T+1}) \\ &= \alpha_1 X_T + \alpha_2 X_{T-1} + \alpha_3 X_{T-2} + \dots + \alpha_p X_{T+1-p}. \end{aligned}$$

- Pour un horizon $h > 1$: On utilise une méthode itérative (récursive). Si une valeur passée n'est pas observée, on la remplace par sa valeur précédemment prédite :

$$\hat{X}_{T+h} = \hat{X}_T(h) = \alpha_1 \hat{X}_T(h-1) + \alpha_2 \hat{X}_T(h-2) + \alpha_3 \hat{X}_T(h-3) + \dots + \alpha_p \hat{X}_T(h-p).$$

Exemple 2.6.1 pour $h = 2$, nous avons :

$$\begin{aligned} \hat{X}_{T+2} &= E(X_{T+2} | \underline{X_T}) \\ &= E(\alpha_1 X_{T+1} + \alpha_2 X_T + \alpha_3 X_{T-1} + \dots + \alpha_p X_{T+2-p} + \varepsilon_{T+2} | \underline{X_T}) \\ &= \alpha_1 E(X_{T+1} | \underline{X_T}) + \alpha_2 E(X_T | \underline{X_T}) + \alpha_3 E(X_{T-1} | \underline{X_T}) + \dots + \alpha_p E(X_{T+2-p} | \underline{X_T}) \\ &\quad + E(\varepsilon_{T+2} | \underline{X_T}) \end{aligned}$$

par passage de l'esperance conditionnel :

$$\begin{aligned}\hat{X}_{T+2} &= \alpha_1 \hat{X}_{T+1} + \alpha_2 X_T + \alpha_3 X_{T-1} + \cdots + \alpha_p X_{T+2-p} + E(\varepsilon_{T+2}) \\ &= \alpha_1 \hat{X}_{T+1} + \alpha_2 X_T + \alpha_3 X_{T-1} + \cdots + \alpha_p X_{T+2-p}.\end{aligned}$$

Et ainsi pour tous $h \in \mathbb{N}$.

2.7 Simulation d'un modèle AR

La simulation constitue une étape essentielle dans l'étude des modèles de séries temporelles. Elle permet de reproduire artificiellement un processus stochastique afin d'analyser son comportement et de vérifier ses propriétés théoriques. Dans ce travail, nous utilisons le logiciel R pour la simulation des modèles autorégressifs, en raison de sa richesse en fonctions dédiées à l'analyse des séries chronologiques.

2.7.1 Algorithme de génération d'un modèle $AR(1)$

1. Fixer la taille de l'échantillon n .
2. Choisir la valeur du paramètre α .
3. Générer un bruit blanc $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$.
4. Initialiser la série avec une valeur de départ.
5. Générer récursivement les valeurs de la série selon la relation du modèle.

* Code avec R

Avant d'utiliser les fonctions prédéfinies, une simulation explicite peut être réalisée à l'aide d'une boucle :

Nous appliquons à : $X_t = 0.7X_{t-1} + \varepsilon_t \sim AR(1)$ tel que $\alpha_1 = 0.7$.

```
n <- 100
alpha <- 0.7
epsilon <- rnorm(n)
x <- numeric(n)
x[1] <- epsilon[1]
for (t in 2:n) {
  x[t] <- alpha * x[t-1] + epsilon[t]
}
```

* Utilisation d'une fonction intégrée de R

Dans ce travail, nous nous appuyons sur une fonction déjà implémentée dans R permettant de générer directement une série $AR(1)$, ce qui simplifie la simulation et réduit les erreurs de programmation.

Cette fonction est : `arima.sim(model = list(ar = 0.7), n = 100)`

où

- model : spécifie la structure du modèle AR .
- n : taille de la série simulée.
- ar : valeur du coefficient α .

Appliquons

```
# Génération d'une série AR(1)
n <- 100
phi <- 0.7
x <- arima.sim(model = list(ar = phi), n = n)
# Représentation graphique
plot.ts(x, col="blue", main="Simulation d'une série AR(1)",
ylab="Xt", xlab="Temps")
```

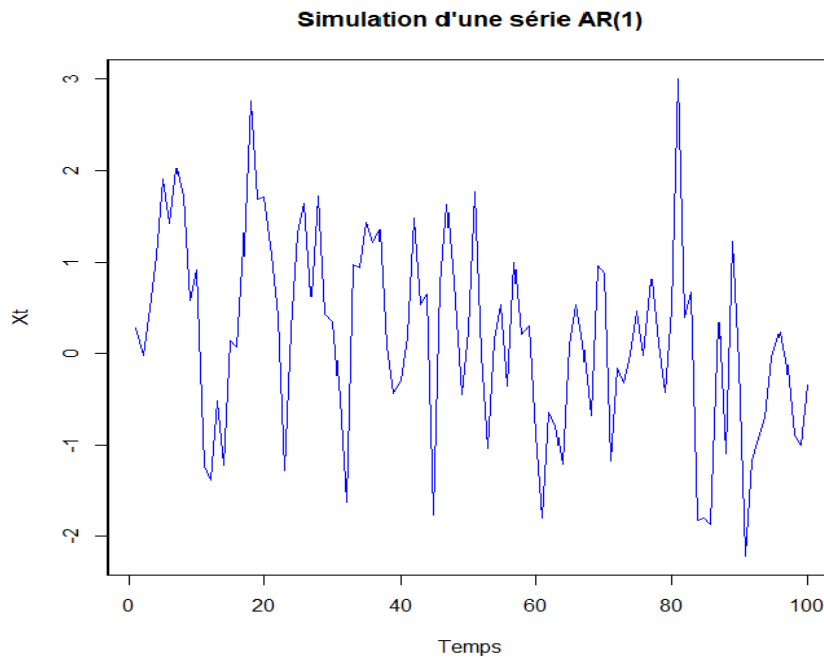


FIG. 2.1 – $AR(1)$: $(\alpha = 0.7; \sigma_\varepsilon^2 = 1)$

Remarque 2.7.1 Contrairement au cas du modèle $AR(1)$, où le coefficient autorégressif est une valeur scalaire, la simulation d'un modèle $AR(p)$ repose sur un vecteur de coefficients $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$.

Ainsi, dans le logiciel R, ces coefficients sont introduits sous forme d'un vecteur dans l'argument `ar` de la fonction de simulation.

Exemple 2.7.1 Génération d'une série $AR(2)$: $X_t = 0.11X_{t-1} - 0.5X_{t-2} + \varepsilon_t$

la simulation :

```
x<- arima.sim(model = list(ar = c(0.11,-0.5)), n = 100)
```

2.7.2 Analyse graphique (FAC et FAP)

Afin d'analyser la structure de dépendance de la série simulée, nous représentons la fonction d'autocorrélation (FAC) ainsi que la fonction d'autocorrélation partielle (FAP) :

```
acf(x)
pacf(x)
```

* Nous appliquons à graphique précédent :

1. Fonction d'Autocorrélation (FAC)

```
>acf(x, main="FAC de la série simulée")
```

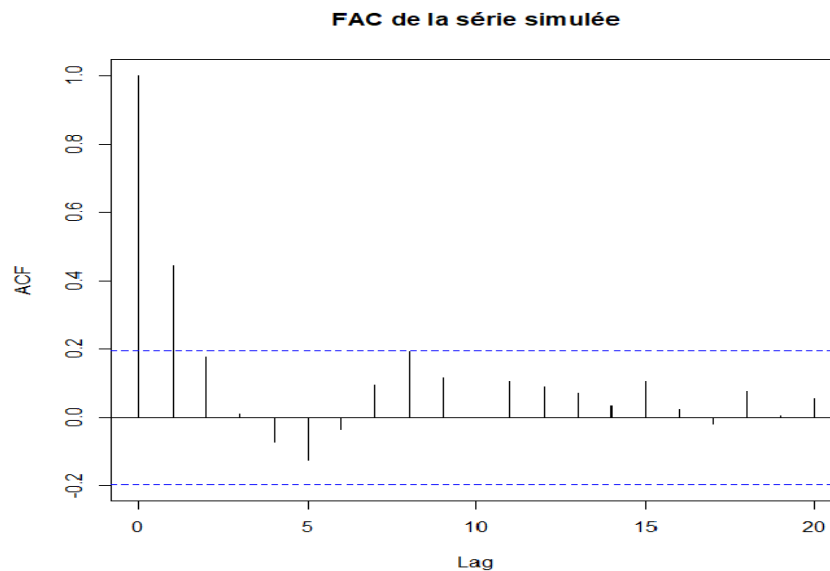


FIG. 2.2 – FAC du modèle $AR(1)$.

2. Fonction d'Autocorrélation Partielle (FAP)

```
>pacf(x, main="FAP de la série simulée")
```

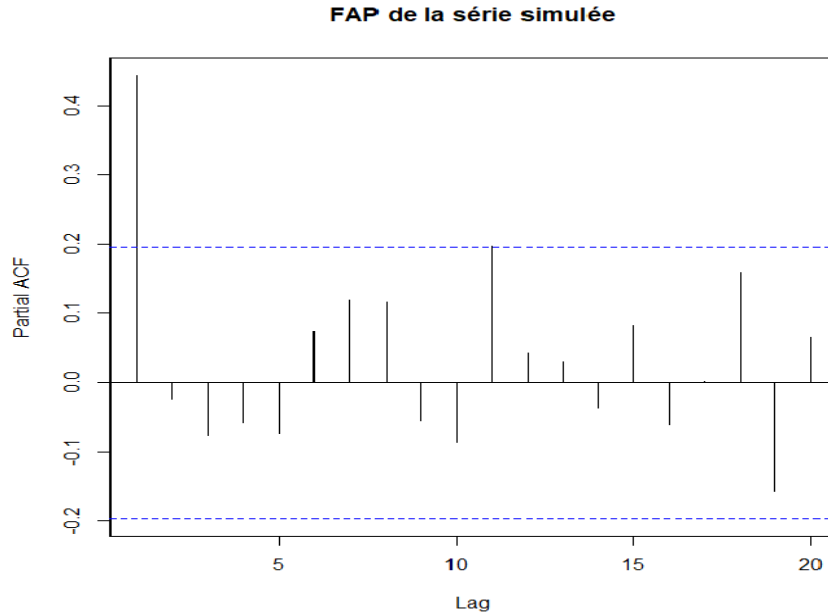


FIG. 2.3 – FAP du modèle $AR(1)$.

* Interprétation de la FAC et de la FAP

L'analyse de la fonction d'autocorrélation (FAC) et de la fonction d'autocorrélation partielle (FAP) permet de vérifier la cohérence du modèle simulé avec la structure théorique d'un processus $AR(p)$.

Pour un modèle $AR(p)$, la FAC présente généralement une décroissance progressive et exponentielle, traduisant une dépendance temporelle qui diminue graduellement avec le décalage. Cette forme est caractéristique des processus autorégressifs.

En revanche, la FAP présente une coupure nette après le premier retard (lag 1), ce qui signifie que seule la première valeur retardée influence directement la série, tandis que les autres effets sont indirects.

Ainsi, la combinaison d'une FAC décroissante et d'une FAP tronquée après le premier retard confirme la validité de la simulation du modèle $AR(p)$.

2.8 Extension des modèles autorégressifs

1. Les modèles $ARMA(p, q)$:

Les modèles autorégressifs moyenne mobile " *ARMA* " combinent une composante autorégressive $AR(p)$ et une composante moyenne mobile $MA(q)$. Ils sont particulièrement adaptés aux séries stationnaires présentant une dépendance temporelle complexe :

$$X_t = \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i} + \sum_{j=1}^q \beta_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t,$$

où $\varepsilon_t \sim BB(0, \sigma^2)$.

Ces modèles offrent une flexibilité accrue par rapport aux modèles *AR* simples.

2. Les modèles *ARIMA*(p, d, q) :

Lorsque la série n'est pas stationnaire, une différenciation d'ordre d peut être appliquée afin de la rendre stationnaire. Les modèles *ARIMA* permettent ainsi de modéliser des séries non stationnaires en combinant autorégression, différenciation et moyenne mobile.

Remarque 2.8.1 * *Le modèle $MA(q)$ est un modèle toujours stationnaire, écrire l'équation :*

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{j=1}^q \beta_j \varepsilon_{t-j},$$

où $\varepsilon_t \sim BB(0, \sigma^2)$.

* *Le modèle *ARMA* peut être considéré comme un cas particulier est nul ($d = 0$).*

En effet, la partie intégrée est représentée par l'opérateur de différenciation :

$$I = (1 - L)^d.$$

2.9 Limites des modèles *AR* classiques

Bien que les modèles *AR* classiques soient largement utilisés, leur efficacité repose sur des hypothèses restrictives, notamment la linéarité et la constance des paramètres dans le temps. Dans de nombreuses séries réelles (économiques ou financières), la relation entre le passé et le présent n'est pas figée; elle peut varier de manière aléatoire en fonction de chocs structurels ou de changements d'environnement.

2.9.1 Les limites spécifiques face à la complexité des données

1. **Paramètres déterministes vs réalité aléatoire :** Les modèles *AR* classiques considèrent les coefficients (α_i) comme des constantes fixes. Or, dans certains processus, ces coefficients peuvent eux-mêmes suivre une loi de probabilité.
2. **Incapacité à capturer l'hétéroscédasticité :** Les modèles *AR* simples échouent souvent à modéliser des séries présentant une forte volatilité ou des changements brusques de régime.
3. **Rigidité structurelle :** La forme linéaire stricte ne permet pas d'expliquer les comportements dynamiques où l'influence du passé change d'une période à l'autre.

Pour dépasser ces limitations, il est nécessaire d'introduire plus de souplesse dans la modélisation en supposant que les coefficients ne sont plus constants, mais aléatoires. Cette approche conduit naturellement à l'étude des modèles *RCAR* (Random Coefficient AutoRegressive), qui feront l'objet de notre prochain chapitre.

Chapitre 3

Les modèles autorégressifs à coefficients aléatoires

Après avoir étudié, dans le chapitre précédent, le modèle autorégressif classique qui suppose la constance des coefficients, il devient pertinent d'examiner des modèles plus flexibles permettant de mieux représenter certaines séries temporelles dont la structure évolue avec le temps. Le modèle *RCA* (**R**andom **C**oefficient **A**utoregressive) constitue une extension naturelle du modèle *AR* classique. Contrairement à ce dernier, les coefficients ne sont plus constants mais varient aléatoirement, offrant ainsi une grande flexibilité pour modéliser des comportements dynamiques complexes. L'objectif de ce chapitre est d'étudier la formulation mathématique générale du modèle *RCA* d'ordre p et ses propriétés fondamentales. Afin d'illustrer ces concepts théoriques, nous traiterons le cas particulier du modèle de premier ordre *RCA*(1) comme exemple d'application.

3.1 Produit de Kronecker (Preliminaire)

L'étude de la stationnarité du second ordre et de la structure de variance du modèle *RCAR*(p) nécessite l'utilisation d'opérateurs matriciels spécifiques. Le produit de Kronecker est l'outil fondamental permettant de linéariser les moments d'ordre deux et de manipuler les produits de matrices aléatoires dans un cadre vectoriel.

Définition 3.1.1 Soit $A = [a_{ij}]$ une matrice de dimension $(m \times n)$ et $B = [b_{ij}]$ une matrice de dimension $(p \times q)$. Le produit de Kronecker de A et B , noté $A \otimes B$,

est une matrice de dimension $(mp \times nq)$ définie par blocs comme suit :

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1p}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2p}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \cdots & a_{np}B \end{pmatrix}$$

* **L'opérateur " Vec " :**

Une propriété clé utilisée dans la démonstration de la stationnarité est la relation avec la vectorisation d'un produit de matrices ;

Définition 3.1.2 *L'opérateur Ver permet de transformer les équations de variance matricielles en systèmes linéaires solubles .*

Théorème 3.1.1 *Soient A , B , C et D des matrices on a alors :*

1. $Vec(ABC) = (C' \otimes A)Vec(B)$;
2. $Tr(AB) = (Ver(B'))'Ver(A) = (Ver(B))'Ver(A')$;
3. $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$;
4. $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$; $(A \otimes B)' = A' \otimes B'$.

3.2 Définition et représentations du modèle $RCA(p)$

Après avoir exposé le cadre théorique et l'intérêt des modèles à coefficients aléatoires, nous détaillons ici leur structure mathématique. Le modèle $RCAR$ se distingue par l'intégration d'une dynamique stochastique directement dans ses paramètres. Il peut être formulé sous trois représentations complémentaires :

a) Représentation analytique (Scalaire)

Définition 3.2.1 *Un modèle autorégressif à coefficients aléatoires d'ordre p ,noté $RCA(p)$ est défini par :*

$$X_t = \sum_{i=1}^p (\phi_i + \eta_{it})X_{t-i} + \varepsilon_t \quad , \quad t \in \mathbb{Z} \quad (3.1)$$

i.e :

$$X_t = (\phi_1 + \eta_t)X_{t-1} + (\phi_2 + \eta_{2t})X_{t-2} + \cdots + (\phi_p + \eta_{pt})X_{t-p} + \varepsilon_t$$

Si $\{\phi_i\} = \{0\}$ l'équation (3.1) s'écrit comme suit :

$$X_t = \sum_{i=1}^p \eta_{it}X_{t-i} + \varepsilon_t \quad , \quad t \in \mathbb{Z} \quad (3.2)$$

où :

- ϕ_i : sont les paramètres constants (la partie déterministe) ;
- $(\eta_t)_{t \in \mathbb{Z}} = \{\eta_{it}\}$ sont des variables aléatoires centrés indépendants ;
- $\{\varepsilon_t\}$ représente le bruit blanc de moyenne null et de variance σ_ε^2 ; de plus η_t , ε_t et X_{t-i} sont indépendant.

C'est la forme standard du modèle $RCAR(p)$ qui exprime la variable X_t comme une extension du modèle $AR(p)$ classique, où chaque coefficient est affecté par une composante aléatoire.

b) Représentation vectorielle du modèle (forme matricielle)

Définition 3.2.2 On introduit le vecteur d'état défini par : $\underline{X}_t = (X_t, X_{t-1}, \dots, X_{t-p+1})'$. Le modèle $RCAR(p)$ s'écrit alors sous la forme suivante :

$$\underline{X}_t = A_t \underline{X}_{t-1} + \underline{\varepsilon}_t,$$

où :

$$A_t = \begin{pmatrix} \phi_1 + \eta_{1,t} & \phi_2 + \eta_{2,t} & \cdots & \phi_{p-1} + \eta_{p-1,t} & \phi_p + \eta_{p,t} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} : \text{est la matrice comp-}$$

pagnon aléatoire de dimension $(p \times p)$.

$\underline{\varepsilon}_t = (\varepsilon_t, 0, \dots, 0)'$: est le vecteur des innovations ;

Remarque 3.2.1 La matrice A_t est appelée matrice compagnon aléatoire, car elle contient les coefficients autorégressifs aléatoires du modèle et permet d'écrire le processus sous forme d'un système vectoriel du premier ordre.

Propriété 3.2.1 on suppose que :

$E(\eta_{i,t}) = 0$, $i = 1, \dots, p$, alors :

$$E(A_t) = \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \cdots & \phi_{p-1} & \phi_p \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

qui représente la matrice compagnon associée à la partie déterministe du modèle.

De plus, si : $E(\varepsilon_t) = 0$, alors :

$$E(\underline{\varepsilon}_t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3.2.1 Modèle autorégressif à coefficients aléatoires d'ordre un

À titre d'illustration, nous considérons le cas du modèle de premier ordre $RCAR(1)$. Ce modèle simplifié permet de réduire la complexité mathématique tout en conservant les caractéristiques essentielles du processus.

Définition 3.2.3 *On dit qu'un modèle autorégressif à coefficients aléatoires d'ordre 1, noté $RCAR(1)$ tout modèle de la forme :*

$$X_t = (\phi + \eta_t)X_{t-1} + \varepsilon_t \quad , \quad t \in \mathbb{Z},$$

si $\phi = 0$ on a écrit :

$$X_t = \eta_t X_{t-1} + \varepsilon_t \quad , \quad t \in \mathbb{Z},$$

où η_t et ε_t est une suite de variable aléatoire indépendantes identiquement distribuée (i.i.d) non nécessairement Gaussiennes tel que :

$$\begin{cases} E(\eta_t) = 0 \\ E(\varepsilon_t) = 0 \end{cases}$$

et la matrice de covariance :

$$\begin{pmatrix} \Sigma_\eta & \sigma_{\eta\varepsilon} \\ \sigma_{\eta\varepsilon}^T & \sigma_\varepsilon^2 \end{pmatrix}$$

tel que Σ_η covariance $(p \times p)$ de vecteur η_t , σ_ε^2 est la variance de ε_t et $\sigma_{\eta\varepsilon}^T = (cov(\eta_t, \varepsilon_t), \dots, cov(\eta_{pt}, \varepsilon_t))^T$.

C'est particulièrement utile pour analyser les séries dont la dépendance immédiate vis-à-vis du passé immédiat est sujette à des fluctuations aléatoires.

Remarque 3.2.2 *Le modèle autorégressif à coefficients aléatoires est un modèle non léniaire.*

3.3 Justification du modèle *RCA* et comparaison avec le modèle *AR* classique

3.3.1 Pourquoi opter pour les coefficients aléatoires ?

Dans de nombreuses applications, notamment en économie et en finance, l'hypothèse de constance des coefficients du modèle autorégressif classique s'avère restrictive. En effet, certaines séries présentent des comportements évolutifs sous l'effet de chocs externes ou de changements structurels.

Le recours au modèle *RCAR* permet de capter cette variabilité en introduisant une composante stochastique dans la structure du modèle. Cette flexibilité offre une représentation plus fidèle des dynamiques complexes qui échappent aux modèles à coefficients fixes, justifiant ainsi l'intérêt croissant pour cette approche dans la littérature statistique et économétrique.

3.3.2 Comparaison synthétique : Modèle *AR* vs Modèle *RCAR*

Afin de mettre en évidence les particularités du modèle à coefficients aléatoires par rapport au modèle autorégressif classique, le tableau suivant résume leurs principales différences :

Caractéristique	Modèle AR Classique	Modèle RCAR
Coefficients (ϕ_t)	Constants dans le temps ($\phi_t = \phi$)	Aléatoires ($\phi_t = \phi + \eta_t$)
Nature de la dynamique	Rigide et déterministe	Souple et stochastique
Réponse aux chocs	Uniforme sur toute la période	Varie selon l'état de la série à l'instant t
Capacité d'adaptation	Faible face aux changements structurels	Élevée (modélise l'instabilité)
Complexité mathématique	Simple (Moindres Carrés Ordinaires)	Plus complexe (Estimation par Maximum de Vraisemblance ou Kalman)

TAB. 3.1 – Comparaison entre modèle AR et modèle RCAR.

3.4 Existence et Stationnarité du modèle $RCAR(p)$

L'étude statistique du modèle $RCAR(p)$ nécessite de s'assurer, en premier lieu, de l'existence d'une solution mathématique, puis de définir les conditions de sa stabilité temporelle.

3.4.1 Existence d'une solution

Avant d'aborder la stationnarité, il faut garantir que l'équation du modèle possède une solution unique. Nous distinguons deux formes d'existence selon la rigueur mathématique :

- * **Existence d'une solution strictement stationnaire** : C'est la condition la plus large ; Elle garantit que la loi de probabilité du processus ne change pas par translation dans le temps. Selon Quinn (1982), elle repose sur la convergence presque sûre de la série des coefficients (souvent liée à une condition sur l'espérance du logarithme des paramètres).
- * **Existence d'une solution faiblement stationnaire (du second ordre)** : Elle est plus restrictive car elle impose l'existence et la finitude des moments d'ordre 2 (moyenne et variance). C'est cette forme qui est la plus utilisée pour les applications statistiques et l'inférence.

3.4.2 Conditions de Stationnarité du second ordre

Une fois l'existence assurée, nous précisons les conditions de stabilité :

a. Cas Général : Modèle $RCAR(p)$

Ce critère est issu de la **représentation matricielle**. Il est considéré comme "complexe" car il nécessite l'utilisation du produit de Kronecker ($\otimes$) et du calcul des valeurs propres.

Théorème 3.4.1 *Le processus est stationnaire si le rayon spectral ρ de la matrice d'espérance des coefficients au carré est inférieur à 1 :*

$$\rho(E[A_t \otimes A_t]) < 1$$

Ce critère est indispensable pour les modèles d'ordre élevé ($p > 1$) car il prend en compte toutes les interactions croisées entre les coefficients aléatoires.

Preuve La démonstration de la relation étudiée repose sur une série d'étapes fondamentales, faisant appel à des propriétés bien connues de l'algèbre matricielle et au théorème des valeurs propres. Cette démonstration peut être résumée en plusieurs étapes :

Les étapes de la démonstration :

1. **Représentation d'état (Matrice compagnon A_t)** : Le modèle $RCAR(p)$ est transformé en un système vectoriel de dimension p . La matrice A_t capture la dynamique temporelle des coefficients aléatoires.
2. **Extension à l'espace de Kronecker** : L'utilisation du produit de Kronecker $A \otimes A$ permet d'analyser la structure de variance-covariance du processus. Nous exploitons ici les propriétés de linéarité de l'opérateur d'espérance.
3. **Estimation Numérique (Loi des Grands Nombres)** : En pratique, l'espérance théorique est inaccessible analytiquement. Nous utilisons une approximation de Monte-Carlo basée sur la convergence des moyennes vers l'espérance.
4. **Analyse du Rayon Spectral** : Le comportement asymptotique du processus est déterminé par les valeurs propres de la matrice résultante. La stationnarité est garantie si le rayon spectral ρ est strictement confiné à l'intérieur du disque unité ($\rho < 1$).

■

b. Cas Particulier : Modèle $RCAR(1)$

À titre d'exemple d'application, pour le premier ordre, ce critère matriciel se simplifie considérablement pour devenir une condition scalaire :

$$\phi^2 + \sigma_\eta^2 < 1.$$

** Preuve de la simplification du critère pour le modèle $RCA(1)$

Afin de justifier le passage du critère matriciel général au critère scalaire simple, nous présentons ici une brève démonstration basée sur les propriétés de l'algèbre linéaire et du produit de Kronecker.

Preuve Considérons le modèle $RCA(1)$ défini par l'équation :

$$X_t = (\phi + \eta_t)X_{t-1} + \varepsilon_t.$$

■

1. **Réduction matricielle** : Dans ce cas ($p = 1$), la matrice des coefficients A_t se réduit à un scalaire :

$$A_t = \phi + \eta_t.$$

2. **Application du produit de Kronecker :** Le terme $E[\Phi_t \otimes \Phi_t]$ devient l'espérance du carré de ce scalaire :

$$E[A_t \otimes A_t] = E[(\phi + \eta_t)^2].$$

3. **Développement de l'espérance :**

$$E[(\phi + \eta_t)^2] = E[\phi^2 + 2\phi\eta_t + \eta_t^2].$$

En utilisant la linéarité de l'espérance et le fait que $E(\eta_t) = 0$, le terme central s'annule :

$$E[\phi^2 + 2\phi\eta_t + \eta_t^2] = \phi^2 + 0 + E(\eta_t^2).$$

4. **Identification du rayon spectral :** Puisque $E(\eta_t^2) = \sigma_\eta^2$, la matrice se réduit à la valeur unique $(\phi^2 + \sigma_\eta^2)$. Le rayon spectral d'un scalaire est sa valeur absolue.
5. **Conclusion :** La condition générale $\rho(E[A_t \otimes A_t]) < 1$ devient alors :

$$\phi^2 + \sigma_\eta^2 < 1.$$

Ce résultat confirme le critère scalaire.

3.5 Méthodes d'estimation des paramètres

Dans cette section, nous allons appliquer certaines méthodes d'estimation courantes. Nous commençons par la méthode des moments basé sur les autocovariances empiriques, en raison de sa simplicité par rapport aux autres approches, puis nous passons à la méthode des moindres carrés ordinaires et pondérés, et enfin à la méthode du maximum de vraisemblance. Les différents aspects théoriques et pratiques de ces méthodes seront présentés ci-après.

* Hypothèses fondamentales :

Avant d'aborder les différentes techniques d'estimation, il est primordial de définir le cadre théorique de notre étude. Les hypothèses suivantes sont supposées vérifiées dans tout ce qui suit, afin de garantir la convergence et la validité des estimateurs :

- H1 :** Le processus $\{X_t\}$ est stationnaire au second ordre.
- H2 :** Le bruit blanc $\{\varepsilon_t\}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d) avec $E[\varepsilon_t] = 0$ et $Var(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$.
- H3 :** Les coefficients aléatoires $\{\eta_t\}$ sont i.i.d, de moyenne nulle $E[\eta_t] = 0$ et de variance $Var(\eta_t) = \sigma_\eta^2$.
- H4 :** L'indépendance mutuelle entre les erreurs du modèle $\{\varepsilon_t\}$ et les perturbations des coefficients $\{\eta_t\}$.

3.5.1 Méthode des moments (Méthode de Yule-Walker généralisée)

Le principe de cette méthode consiste à égaliser les moments théoriques du modèle (moyenne, variance, autocovariance) avec les moments empiriques calculés à partir de l'échantillon. Pour un modèle $RCA(p)$, nous suivons une démarche analogue à celle du modèle autorégressif classique $AR(p)$, en utilisant notamment les équations de Yule-Walker pour identifier les paramètres de la moyenne. Cependant, la spécificité du RCA réside dans l'utilisation des moments d'ordre deux des résidus pour identifier la variance des coefficients.

Application au cas $RCA(1)$:

Considérons le modèle simple d'ordre 1 :

$$X_t = (\phi + \eta_t)X_{t-1} + \varepsilon_t.$$

Dans ce cas, nous avons trois paramètres à estimer : $\theta = (\phi, \sigma_\eta^2, \sigma_\varepsilon^2)$.

1. **Estimation de ϕ** : En multipliant l'équation du modèle par X_{t-1} et en prenant l'espérance, on obtient la relation :

$$\rho(1) = \phi\rho(0) \tag{3.3}$$

où $\rho(1)$ est la fonction d'autocorrélation : $\rho(1) = \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} = \frac{cov(X_t, X_{t-1})}{E(X_t^2)}$.

Alors l'estimateur est :

$$\hat{\phi} = \frac{\hat{\rho}(1)}{\hat{\rho}(0)}.$$

Généralisation de la relation (3.3) :

$$\rho(h) = \sum_{i=1}^p \phi_i \rho(h-i), \quad h = 1, \dots, p$$

Alors le système de Yule-Walker prend la forme matricielle : $\rho = R_p \cdot \phi$

Ainsi, l'estimation des paramètres ϕ_i sont données par :

$$\hat{\phi} = \widehat{R_p}^{-1} \cdot \hat{\rho}$$

(C'est exactement la même forme que pour un $AR(1)$ classique).

2. **Estimation des variances (σ_η^2 et σ_ε^2)** : On définit le résidu estimé par :

$$\hat{u}_t = X_t - \hat{\phi}X_{t-1}.$$

D'après les propriétés du modèle, on montre que :

$$E[u_t^2 | X_{t-1}] = \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 X_{t-1}^2$$

En posant $Y_t = \hat{u}_t^2$ et $Z_t = X_{t-1}^2$, nous obtenons un modèle de régression linéaire simple :

$$Y_t = \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 Z_t + v_t.$$

L'application de la méthode des moments (ou des moindres carrés) sur cette relation permet de tirer les estimations de $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ (l'ordonnée à l'origine) et $\hat{\sigma}_\eta^2$ (la pente).

Commentaires :

La méthode des moments se caractérise par sa simplicité et sa facilité d'application, et elle ne nécessite pas la connaissance de la distribution complète des coefficients aléatoires, ce qui en fait un outil approprié pour obtenir des estimations préliminaires.

3.5.2 Méthode des Moindres Carrés (MC)

Cette méthode repose sur la minimisation de la somme des carrés des erreurs. Sous les hypothèses précitées (**H1** à **H4**), nous distinguons deux étapes cruciales pour l'estimation des paramètres du modèle $RCA(1)$.

Moindres Carrés Ordinaires "Ordinary Least Squares (OLS)"

Dans un premier temps, nous appliquons les OLS pour estimer le paramètre de la moyenne ϕ .

*** Principe pour le cas $RCA(1)$:**

On suppose $v_t = \eta_t X_{t-1} + \varepsilon_t$ donc

$$\begin{aligned} X_t &= (\phi + \eta_t) X_{t-1} + \varepsilon_t \\ &= \phi X_{t-1} + \eta_t X_{t-1} + \varepsilon_t \\ &= \phi X_{t-1} + v_t \end{aligned}$$

D'abord on cherche à minimiser la fonction objective :

$$\begin{aligned} S(\phi) &= \sum_{t=2}^n [X_t - E(X_t | \mathcal{F}_{t-1})]^2 \\ &= \sum_{i=2}^n (X_t - \phi X_{t-1})^2 \\ &= \sum_{i=2}^n v_t^2 \end{aligned}$$

En dérivant par rapport à ϕ et en annulant la dérivée, nous obtenons l'estimateur des MCO :

$$\hat{\phi}_{MCO} = \frac{\sum_{t=2}^n X_t X_{t-1}}{\sum_{t=2}^n X_{t-1}^2}.$$

Estimation des variances : Après estimation de ϕ , nous calculons les résidues

$$\varepsilon_t = X_t - \hat{\phi} X_{t-1}.$$

Ensuite, nous extrayons la variance des résidues $Var(\varepsilon_t)$, $Var(\eta_t)$, selon les hypothèses du modèle.

*** Généralisation pour le cas RCAR(p) :**

Pour le modèle $RCAR(p)$, nous utilisons une représentation vectorielle afin de simplifier les calculs des moindres carrés.

1. **Représentation du modèle :** L'équation (3.1) peut s'écrire sous forme matricielle :

$$Z_t = \Phi^T Z_{t-1} + v_t.$$

Où : $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p)^T$ est le vecteur des paramètres fixes.

$Z_{t-1} = (X_1, X_2, \dots, X_{t-p})^T$ est le vecteur des retards.

$v_t = \sum_{i=1}^p \eta_{it} X_{t-i} + \varepsilon_t$ est l'erreur globale du modèle.

2. **Fonction objective :** L'objectif est de minimiser la somme des carrés des résidus par rapport au vecteur Φ :

$$S(\Phi) = \sum_{t=p+1}^n (Z_t - \Phi^T Z_{t-1})^2.$$

3. **Estimateur des MCO (Forme matricielle) :** En annulant le gradient de $S(\Phi)$ par rapport à Φ , nous obtenons l'estimateur des moindres carrés ordinaires :

$$\hat{\Phi}_{MCO} = \left(\sum_{t=p+1}^n Z_{t-1} Z_{t-1}^T \right)^{-1} \sum_{t=p+1}^n Z_{t-1} Z_t.$$

4. **Estimation des variances :** Après avoir estimé le vecteur $\hat{\Phi}_{MCO}$, nous calculons les résidus $\hat{v}_t = Z_t - \hat{\Phi}^T Z_{t-1}$. Les variances σ_ε^2 et $\sigma_{\eta_i}^2$ sont ensuite extraites en résolvant un système d'équations basé sur l'espérance des résidus au carré $E[v_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}]$.

Moindres Carrés Pondérés (MCP)

Pour remédier au problème d'hétéroscédasticité et obtenir des estimations plus efficaces pour les variances σ_η^2 et σ_ε^2 , nous utilisons les MCP.

*** Démarche :**

1. On définit le carré du résidu obtenu par les MCO :

$$\hat{u}_t^2 = (X_t - \hat{\phi}_{MCO} X_{t-1})^2$$

2. Comme établi précédemment, nous avons la relation :

$$\hat{u}_t^2 = \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 X_{t-1}^2 + v_t$$

3. Au lieu d'une régression simple, nous appliquons une pondération par l'inverse de la variance conditionnelle pour stabiliser les résidus.

L'estimateur des MCP pour le vecteur des variances $\theta_\sigma = (\sigma_\varepsilon^2, \sigma_\eta^2)^T$ est donné par la minimisation de la somme pondérée :

$$S_{w(\sigma_\varepsilon^2, \sigma_\eta^2)} = \sum_{t=2}^n w_t [\hat{u}_t^2 - (\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 X_{t-1}^2)]^2.$$

Où w_t est un poids judicieusement choisi (souvent lié à l'inverse de l'espérance du carré de l'observation).

3.5.3 Méthode du Maximum de Vraisemblance (ML)

La méthode du Maximum de Vraisemblance est largement privilégiée pour les modèles *RCA* en raison de ses propriétés asymptotiques (efficacité et normalité). Contrairement aux méthodes précédentes, elle nécessite la spécification de la loi de probabilité des erreurs.

Hypothèse de Normalité

En plus des hypothèses (**H1** à **H4**), nous supposons généralement que :

H5 : Les perturbations η_t et les bruits blancs ε_t suivent des lois normales indépendantes : $\eta_t \sim N(0, \sigma_\eta^2)$ et $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$.

Construction de la fonction de vraisemblance (Cas $RCA(1)$)

Dans le modèle $RCA(1)$, l'observation X_t conditionnellement au passé $\mathcal{F}_{t-1}$ suit une loi normale. Sa moyenne conditionnelle et sa variance conditionnelle sont données par :

1. $E[X_t|\mathcal{F}_{t-1}] = \phi X_{t-1}$.
2. $Var(X_t|\mathcal{F}_{t-1}) = \sigma_t^2 = \sigma_\eta^2 X_{t-1}^2 + \sigma_\varepsilon^2$.

La fonction de densité conditionnelle de X_t est alors :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left(-\frac{(X_t - \phi X_{t-1})^2}{2\sigma_t^2}\right).$$

La fonction de Log-vraisemblance pour un échantillon de taille n est la somme des logarithmes des densités conditionnelles :

$$\ln L(\phi, \sigma_\eta^2, \sigma_\varepsilon^2) = -\frac{n-1}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=2}^n \ln(\sigma_t^2) - \sum_{t=2}^n \frac{(X_t - \phi X_{t-1})^2}{2\sigma_t^2}.$$

Les estimateurs du maximum de vraisemblance $(\hat{\phi}_{ML}, \hat{\sigma}_{\eta, ML}^2, \hat{\sigma}_{\varepsilon, ML}^2)$ sont les valeurs qui maximisent cette fonction. Étant donné que les équations obtenues par dérivation sont non-linéaires, il n'existe pas de solution analytique directe (formule simple).

3.6 Prévision dans les modèles autorégressif à coefficients aléatoires

La prévision dans les modèles à coefficients aléatoires repose sur l'utilisation de l'espérance conditionnelle. L'objectif est de prédire la valeur future X_{T+h} (où h est l'horizon de prévision) sachant toute l'information disponible jusqu'à l'instant T , notée $\mathcal{F}_T$.

Pour un modèle $RCAR(p)$, le meilleur préducteur au sens de l'erreur quadratique moyenne (EQM) est donné par :

$$\hat{X}_{T+h} = E[X_{T+h}|\mathcal{F}_T]$$

La prévision à l'horizon $h = 1$ est donné par :

$$\begin{aligned} \hat{X}_{T+1} &= E[X_{T+1}|\mathcal{F}_T] \\ &= \sum_{i=1}^p \phi_i X_{T+1-i} \quad \text{où} \quad \phi_i = E(\eta_{it}) \end{aligned}$$

Remarque 3.6.1 *On remarque que le préducteur ponctuel du modèle $RCAR(p)$ est identique à celui d'un modèle $AR(p)$ classique. La différence réside dans l'incertitude de la prévision (la variance de l'erreur), qui est plus élevée dans le cas $RCAR$ à cause de la nature aléatoire des coefficients η_{it} .*

3.7 Similalion du modèle $RCAR$

Dans cette partie, nous nous intéressons à la simulation des modèles autorégressifs à coefficients aléatoires $RCAR(p)$. L'objectif est d'illustrer le comportement de ce type de processus à travers des expériences numériques.

Pour ce faire, nous utilisons le logiciel **R**, qui constitue un outil performant et largement utilisé dans le domaine de l'analyse statistique et des séries temporelles. Il permet notamment de générer des données simulées et de visualiser les résultats obtenus.

Les détails relatifs à la procédure de simulation ainsi que les différentes étapes suivies seront présentés dans ce qui suit :

3.7.1 Le Principe Fondamental et Algorithme du simulation

* Le Principe de Simulation :

La simulation d'un modèle $RCAR$ sous le **logiciel R** consiste à générer une série temporelle de manière récursive, où chaque observation dépend des valeurs passées de la série ainsi que d'un terme aléatoire. Cette procédure permet d'obtenir des trajectoires artificielles reproduisant le comportement dynamique du processus étudié. Avant toute simulation, il est nécessaire de vérifier les conditions de stabilité afin de garantir la validité statistique de la série générée.

* Algorithme de génération d'un modèle $RCAR(1)$:

Pour simuler un processus $RCAR(1)$ de taille n sous le logiciel **R**, nous suivons les étapes structurées suivantes :

1. Fixer la taille de l'échantillon n et les paramètres $(\phi, \sigma_\eta, \sigma_\varepsilon)$.
2. Vérifier la condition de stabilité : $(\phi^2 + \sigma_\eta^2 < 1)$.
3. Initialisation : Poser $X_1 = 0$.
4. Boucle de génération : Pour $t = 2$ jusqu'à n :
 - Générer $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ et $\eta_t \sim N(0, \sigma_\eta^2)$.
 - Calculer $X_t = (\phi + \eta_{it})X_{t-1} + \varepsilon_t$.
5. Retourner la série simulée $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$.

***Code avec logiciel R**

```
sim_rcar1 <- function(n, phi, sigma_eta, sigma_eps){  
  stability_value <- phi^2 + sigma_eta^2  
  if(stability_value >= 1){  
    cat("Warning : Modèle non stationnaire \n")  
  } else {  
    cat("Modèle stationnaire \n")  
  }  
  x <- numeric(n)  
  x[1] <- 0  
  for(t in 2:n){  
    eta_t <- rnorm(1, mean = 0, sd = sigma_eta)  
    eps_t <- rnorm(1, mean = 0, sd = sigma_eps)  
    a_t <- phi + eta_t  
    x[t] <- a_t * x[t-1] + eps_t  
  }  
  return(x)  
}
```

Applique le code pour ($n = 500$, $\phi_1 = 0.5$, $\sigma_\eta^2 = 0.2$, $\sigma_\varepsilon^2 = 1$)

```
> Z <- sim_rcar1(n = 500,  
+ phi = 0.5,  
+ sigma_eta = 0.2,  
+ sigma_eps = 1)  
Modèle stationnaire  
> plot.ts(Z)
```

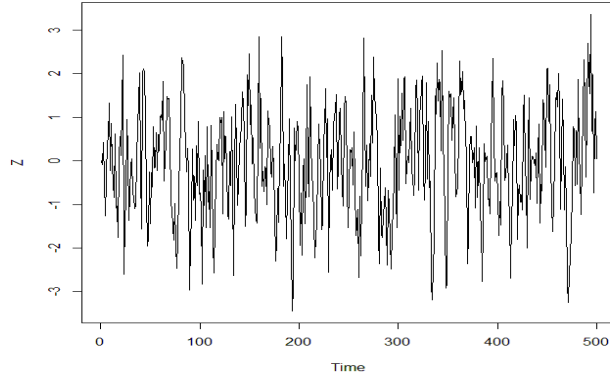


FIG. 3.1 – $RCAR(1)$ ($\phi_1 = 0.5$, $\sigma_\eta^2 = 0.2$, $\sigma_\varepsilon^2 = 1$)

*** Algorithme de génération d'un modèle $RCAR(p)$:**

L'algorithme du modèle $RCAR(p)$ suit une logique similaire à celle du premier ordre, avec quelques ajustements structurels :

1. Entrées : Taille n , vecteur des coefficients fixes $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$, et les variances des erreurs.
2. Condition de stabilité : Contrairement au cas scalaire, la stabilité repose ici sur le rayon spectral de la matrice d'espérance du produit de Kronecker de la matrice compagnon $\rho(E[A_t \otimes A_t]) < 1$.
3. Initialisation : Au lieu d'une seule valeur, nous initialisons les p premières observations (généralement à zéro) pour amorcer la récursion.
4. Génération : À chaque instant t , le coefficient est un vecteur aléatoire, et la valeur actuelle X_t est calculée en fonction des p valeurs précédentes.

*** Simulation d'un modèle $RCAR(p)$**

```
simu_rcarp <- function(n, p, phi, sigma_eta, sigma_eps, M = 1000){
  K_sum <- matrix(0, p^2, p^2)
  for(j in 1:M){
    first_row <- numeric(p)
    for(i in 1:p){
      first_row[i] <- phi[i] + rnorm(1,0,sigma_eta[i])
    }
    A <- matrix(0, p, p)
    A[1,] <- first_row
```

```

if(p > 1){
for(i in 2 :p){
A[i,i-1] <- 1
}
}
K_sum <- K_sum + kronecker(A,A)
}
K_mean <- K_sum / M
rho <- max(Mod(eigen(K_mean)$values))
if(rho < 1){
cat("Modèle stationnaire \n")
} else {
cat("Warning : Modèle non stationnaire \n")
}
x <- rep(0, n+p)
for(t in (p+1) :(n+p)){
value <- 0
for(i in 1 :p){
eta_it <- rnorm(1,0,sigma_eta[i])
a_it <- phi[i] + eta_it
value <- value + a_it*x[t-i]
}
eps_t <- rnorm(1,0,sigma_eps)
x[t] <- value + eps_t
}
return(list(series = x[(p+1) :(n+p)],
rho = rho))
}

```

Applique le code pour :

```

- X ~ RCAR(2); (( $\phi_1, \phi_2$ ) = (-0.2, 0.4) ,  $\sigma_\eta^2 = (0.1, 0.05)$  ,  $\sigma_\varepsilon^2 = 1$  ) >
X<-simu_rcarp(n=500, p=2, phi= c(-0.2,0.4), sigma_eta = c(0.1,0.05),
+ sigma_eps =1)
Modèle stationnaire
> X$rho
[1] 0.5543334
> plot.ts(X$series)

```

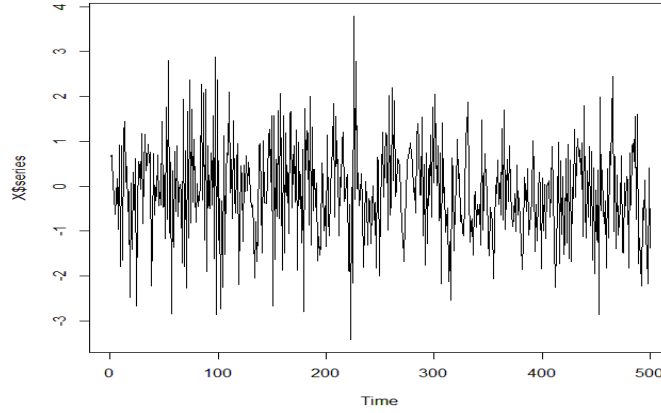


FIG. 3.2 – $RCAR(2)$ ($(\phi_1, \phi_2) = (-0.2, 0.4)$, $\sigma_\eta^2 = (0.1, 0.05)$, $\sigma_\varepsilon^2 = 1$)

```

-  $A \sim RCAR(2)$ ;  $((\phi_1, \phi) = (-0.5, -0.1)$  ,  $\sigma_\eta^2 = (0.1, 0.05)$  ,  $\sigma_\varepsilon^2 = 1$  ,
   $n = 100$ )
> A<-simu_rcarp(n=100, p=2, phi=c(-0.5,-0.1), sigma_eta=c(0.1,0.05),
+ sigma_eps=1)
Modèle stationnaire
> A$rho
[1] 0.1391691
> plot.ts(A$series)
```

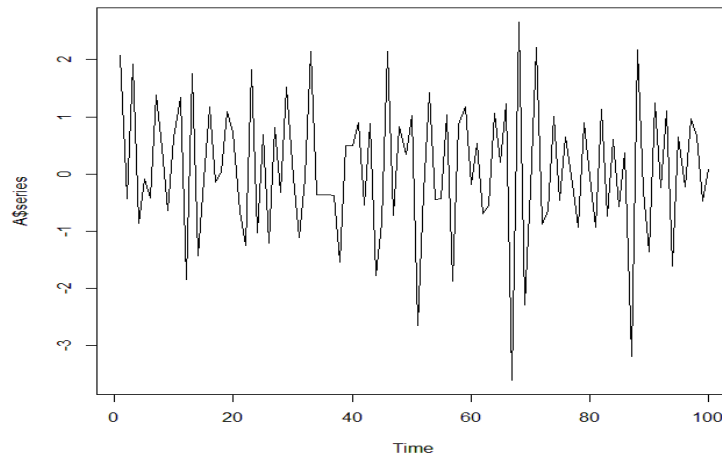


FIG. 3.3 – $RCAR(2)$ $((\phi_1, \phi) = (-0.5, -0.1), \sigma\eta^2 = (0.1, 0.05), \sigma_\varepsilon^2 = 1, n = 100)$

```

-  $Y \sim RCAR(3); ( (\phi_1, \phi_2, \phi_3) = (0.5, -0.2, 0.1), \sigma_\eta^2 = (0.1, 0.1, 0.05),$ 
 $\sigma_\varepsilon^2 = 1) > Y <- \text{simu\_rcarp}(n=500, p=3, \text{phi} = c(0.5, -0.2, 0.1), \text{sigma\_eta}$ 
 $= c(0.1, 0.1, 0.05),$ 
 $+ \text{sigma\_eps} = 1)$ 
Modèle stationnaire
> Y$rho
[1] 0.286256
> plot.ts(Y$series)

```

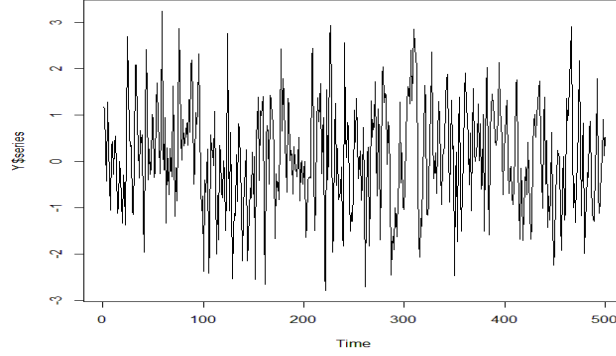


FIG. 3.4 – $RCAR(3)$; $(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = (0.5, -0.2, 0.1)$, $\sigma_\eta^2 = (0.1, 0.1, 0.05)$, $\sigma_\varepsilon^2 = 1$)

3.7.2 Estimation et prévision du modèle à logiciel R

Dans cette partie, nous nous intéressons à l'estimation et à la prévision du modèle $RCAR$ à l'aide du **logiciel R**. Après la simulation du processus, il est nécessaire d'estimer les paramètres inconnus afin de décrire correctement la dynamique de la série et d'obtenir des prévisions futures fiables. Pour cela, nous retenons deux approches d'estimation couramment utilisées : la méthode des moments basée sur les équations de **Yule-Walker**, ainsi que la méthode des moindres carrés ordinaires (OLS). Les résultats obtenus permettront ensuite d'évaluer la qualité des estimations et la performance prédictive du modèle.

Estimation par la méthode des moments :

1. Code sur R :

```
estimate_rcar_MM <- function(X, p){
  n <- length(X)
  # 1) calcul de l'autocovariance
  gamma <- numeric(p+1)
  for(k in 0 :p){gamma[k+1] <- sum(X[(k+1) :n] * X[1 :(n-k)]) / n}
  # 2)Matrice du Yule-Walker
  Gamma_mat <- matrix(0, p, p)
  for(i in 1 :p){
```

```

for(j in 1 :p){
  Gamma_mat[i,j] <- gamma[abs(i-j)+1]
}
gamma_vec <- gamma[2 :(p+1)]
# 3) Estimation de phi
phi_MM <- solve(Gamma_mat, gamma_vec)
# 4) Estimation de sigma^2
sigma2_eps_MM <- gamma[1] - sum(phi_MM * gamma_vec)
# 5) Estimation de variance des coefficients (approximativement)
sigma2_eta_MM <- numeric(p)
total_var <- var(X)
for(i in 1 :p){
  sigma2_eta_MM[i] <- abs((total_var - sigma2_hat) / gamma[1]) / p}
return(list(
  phi_MM = phi_MM,
  sigma2_eps_MM = sigma2_eps_MM,
  sigma2_eta_MM = sigma2_eta_MM))
}

```

2. **Application aux séries temporelles générées par simulation** (Z, X, A, Y respectivement)

```

> res1<-estimate_rcar_MM(Z,p=1)
>
$phi_MM
[1] 0.5000261
$sigma2_eps_MM
[1] 1.241869
$sigma2_eta_MM
[1] 0.2422721
_____
> res2<-estimate_rcar_MM(X$series,p=2)
> res2
$phi_MM
[1] -0.2258658 0.4086312
$sigma2_eps_MM
[1] 1.014274
$sigma2_eta_MM

```

```

[1] 0.1452477 0.1452477

-----
> res3<-estimate_rcar_MM(A$series,2)
> res3
$phi_MM
[1] -0.40918312 -0.09510484
$sigma2_eps_MM
[1] 0.8445276
$sigma2_eta_MM
[1] 0.07660564 0.07660564

-----
> res4<-estimate_rcar_MM(Y$series,p=3)
> res4
$phi_MM
[1] 0.5085502 -0.2516354 0.1262846
$sigma2_eps_MM
[1] 1.130983
$sigma2_eta_MM
[1] 0.06845231 0.06845231 0.06845231

```

3. **Commentaire :** Les estimations obtenues sont très proches des valeurs réelles, avec des écarts faibles, ce qui traduit une bonne précision de la méthode utilisée.

Dans l'estimation de la variance des coefficients aléatoires (σ_η^2), nous avons utilisé une approximation basée sur la variance de la série et celle des résidus. Ce choix s'appuie sur la relation théorique de décomposition de la variance dans les modèles *RCAR* stationnaires, telle qu'établie par Nicholls et Quinn (1982). Bien que cette approche fournisse un ordre de grandeur, elle ne permet pas de distinguer avec précision l'effet individuel de chaque coefficient, particulièrement dans les modèles d'ordre supérieur, ce qui explique l'écart observé par rapport aux valeurs réelles.

Estimation par la méthode des moindres carrés

1. Code sur R :

```

estimate_rcar_MMCO <- function(X, p){
  n <- length(X)
  Y <- X[(p+1) :n]
  Z <- matrix(0, nrow = n-p, ncol = p)

```

```

for(i in 1:p){
Z[, i] <- X[(p+1-i):(n-i)]
}
# Estimation du OLS
model <- lm(Y ~Z - 1)
phi_MCO <- coef(model)
eps <- residuals(model)
sigma2_eps_MCO <- var(eps)
sigma2_eta_MCO <- rep(var(eps)/var(X), p)
return(list(
phi_MCO = phi_MCO,
sigma2_eps_MCO = sigma2_eps_MCO,
sigma2_eta_MCO = sigma2_eta_MCO))
}

```

2. **Appliqation :**

```

> res_ols <- estimate_rcar_MMCO(Z, p =1 )
> res_ols
$phi_MCO
Z
0.5338166
$sigma2_eps_MCO
[1] 1.008588
$sigma2_eta_MCO
[1] 0.7214064

```

```

> r_ols4 <- estimate_rcar_MMCO(X$series, p =2 )
> r_ols4
$phi_MCO
Z1 Z2
-0.1815896 0.4683689
$sigma2_eps_MCO
[1] 0.9058471
$sigma2_eta_MCO
[1] 0.6934704 0.6934704

```

```

> r_ols3 <- estimate_rcar_MMCO(A$series, p =2 )

```

```

> r_ols3
$phi_MCO
Z1 Z2
-0.4697494 -0.1083091
$sigma2_eps_MCO
[1] 1.245999
$sigma2_eta_MCO
[1] 0.8188452 0.8188452

```

```

> r_ols2 <- estimate_rcar_MMCO(Y$series, p = 3 )
> r_ols2
$phi_MCO
Z1 Z2 Z3
0.4411162 -0.1682206 0.1071187
$sigma2_eps_MCO
[1] 0.925677
$sigma2_eta_MCO
[1] 0.8356926 0.8356926 0.8356926

```

3. **Commentaire :** Les résultats obtenus par la méthode OLS montrent que les estimations des coefficients moyens et de la variance du bruit (σ_ε^2) sont globalement satisfaisantes. Cependant, l'estimation de σ_η^2 reste problématique. En effet, l'utilisation d'une approximation simplifiée issue de la formulation de Nicholls et Quinn (1982) sur la variance totale de la série montre ses limites ici. Ce décalage, particulièrement visible quand l'ordre du modèle augmente, reflète une limite intrinsèque de la méthode OLS qui n'est pas conçue pour capturer la variabilité stochastique des paramètres.

La prévision sur R :

1. Code de prévision :

```

prévision_RCAR1 <- function(X, phi, h){
  p <- length(phi)
  n <- length(X)
  X_forecast <- numeric(h)
  X_ext <- c(X)
  for(k in 1:h){
    X_new <- sum(phi * rev(X_ext[(n+k-1):(n+k-p)]))
    X_ext <- c(X_ext, X_new)
  }
}

```

```

X_forecast[k] <- X_new
}
return(X_forecast)
}

```

2. **Application sur** les séries (Z, X, A, Y) avec $h = 5$:

```

> Pv1 <-prévision_RCAR1(Z, phi=0.5, h=5)
> Pv1
[1] 0.55172698 0.27586349 0.13793175 0.06896587 0.03448294

```

```

> Pv2 <-prévision_RCAR1(X$series, phi=c(-0.2,0.4), h=5)
> Pv2
[1] 0.69233361 -0.06082162 -0.16279537 -0.05295382 0.01137754

```

```

> Pv3 <-prévision_RCAR1(A$series, phi=c(-0.5,-0.1), h=5)
> Pv3
[1] -0.6358443 -0.8374112 0.4016633 0.3785393 -0.2386856

```

```

> Pv4 <-prévision_RCAR1(Y$series, phi=c(0.5,-0.2,0.1), h=5)
> Pv4
[1] -0.6742496 -0.9284431 -1.0755434 -0.2589905 -0.2750119

```

3.7.3 Discussion des résultats

Les résultats obtenus montrent une différence relative entre les estimations fournies par la méthode des moments et celles issues de la méthode des moindres carrés ordinaires (OLS). Dans plusieurs simulations, la méthode des moments, fondée sur les équations de Yule-Walker, a donné des valeurs plus proches des paramètres réels utilisés lors de la génération des séries.

Cette situation peut s'expliquer par la nature particulière du modèle RCAR, caractérisé par la présence de coefficients aléatoires. En effet, cette structure peut entraîner une variabilité supplémentaire dans le terme d'erreur, ce qui réduit parfois la performance de la méthode OLS, initialement adaptée aux modèles linéaires classiques.

Ainsi, la méthode des moments semble mieux tenir compte des propriétés dynamiques de la série simulée, tandis que la méthode des moindres carrés reste sensible aux fluctuations introduites par les coefficients aléatoires. Globalement, les deux approches demeurent utiles, mais la première apparaît plus adaptée dans le cadre des simulations réalisées.

Conclusion

Dans ce travail, nous avons étudié les modèles autorégressifs à coefficients aléatoires (*RCAR*) à travers une approche combinant étude théorique et application pratique.

L'analyse a permis de mettre en évidence le comportement dynamique de ces modèles en présence de coefficients aléatoires, notamment à travers la simulation des séries temporelles sous le logiciel R.

Plusieurs méthodes d'estimation ont été appliquées, en particulier la méthode des moments fondée sur les équations de Yule-Walker et la méthode des moindres carrés ordinaires (OLS). Les résultats obtenus ont montré que la qualité des estimations dépend de la structure du modèle ainsi que des conditions retenues.

La prévision permis de souligner l'intérêt pratique des modèles *RCAR* pour l'analyse et l'anticipation des valeurs futures d'une série chronologique.

Globalement, cette étude confirme que, malgré leur complexité, les modèles *RCAR* offrent une meilleure capacité de modélisation des phénomènes réels caractérisés par une variabilité des paramètres, ce qui constitue un avantage important par rapport aux modèles autorégressifs classiques.

Bibliographie

- [1] Abdelhalim, B. (2015). Inference statistique pour les modeles autoregressifs a coefficients aleatoires. Doctoral dissertation, Université Badji Mokhtar.
- [2] Aragon, Y. (2011). Séries temporelles avec R : Méthodes et cas. Collection Pratique R : Springer.
- [3] Goldfarb, B., & Pardoux, C. (2011). Introduction à la méthode statistique-6e édition. Dunod.
- [4] Goryainov, A. V., & Goryainov, V. B. (2018). M-estimates of autoregression with random coefficients. Automation and Remote Control.
- [5] Mohammedi, Y. S. (2022). Estimation des paramètres des modèles autorégressifs à coefficients aléatoires. Doctoral dissertation, UMMTO.
- [6] Monino, J. L., Kosianski, J. M., & Le Cornu, F. (2010). Statistique descriptive. Dunod.
- [7] Nicholls, D. F., & Quinn, B. G. (1982). An Application. In Random coefficient autoregressive models : An introduction (pp. 139-149). New York.
- [8] Nicholls, D. F., & Quinn, B. G. (2012). Random Coefficient Autoregressive Models : An Introduction : An Introduction. Springer Science & Business Media.
- [9] Ounouh, R. (2011). Stabilité des modèles autorégressifs à coefficients aléatoires. Doctoral dissertation, UMMTO.
- [10] Razika, B., (2018). Sur un processus autorégressif à coefficient aléatoire (Master Académique, Université de Saida).
- [11] Zhang, M. (2018). Time series : Autoregressive models ar, ma, arma, arima. University of Pittsburgh.

Résumé

Ce mémoire porte sur l'étude des modèles autorégressifs à coefficients aléatoires (RCAR), considérés comme une extension des modèles autorégressifs classiques (AR).

L'introduction de coefficients aléatoires permet d'accroître la flexibilité de la modélisation des séries chronologiques, notamment lorsque le phénomène étudié présente une dynamique évolutive dans le temps, offrant ainsi une représentation plus fidèle et plus réaliste de son comportement.

Ce travail s'achève par une étude basée sur la simulation de ces modèles à l'aide du logiciel R, accompagnée d'une analyse et d'une discussion des résultats obtenus.

Mots-clés : Séries chronologiques, modèle AR, modèle RCAR, coefficients aléatoires, stationnarité, estimation, simulation.

Abstract

This thesis focuses on the study of random coefficient autoregressive (RCAR) models, which are considered an extension of classical autoregressive (AR) models.

Introducing random coefficients increases the flexibility of time series modeling, especially when the studied phenomenon exhibits time-varying dynamics, thereby providing a more accurate and realistic representation of its behavior.

This work concludes with an study based on the simulation of these models using the R software, along with an analysis and discussion of the obtained results.

Keywords: Time series, AR model, RCAR model, random coefficients, stationarity, estimation, simulation.

الملخص

تتناول هذه المذكرة دراسة نماذج الانحدار الذاتي ذات المعاملات العشوائية (RCAR)، والتي تُعد امتداداً لنماذج الانحدار الذاتي الكلاسيكية (AR).

يسمح إدخال معاملات عشوائية بزيادة مرونة نمذجة السلاسل الزمنية، خاصة عندما تكون الظاهرة المدروسة متغيرة مع الزمن، مما يتيح تمثيلاً أكثر دقة وواقعية لسلوكها.

واختتم هذا العمل بدراسة اعتمدت على محاكاة هذه النماذج باستخدام لغة R، مع تحليل ومناقشة النتائج المتحصل عليها.

الكلمات المفتاحية: السلاسل الزمنية، نموذج AR، نموذج RCAR، المعاملات العشوائية، الاستقرار، التقدير، المحاكاة.