UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des sciences et technologie et sciences de la matière

DEPARTEMENT DE :
MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

N° d'ordre :
N° de série :

MAGISTER

Spécialité : Mathématiques
Option : Analyse numérique et E. D. P

Par : BEDIDA Nabila

Thème

ETUDE DE QUELQUES ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION QUI SURVIENNENT COMME DES ÉQUATIONS DES GÉODÉSIQUES SUR LES GROUPES DES DIFFÉOMORPHISMES

Soutenu publiquement le 11 juin 2009

Devant le jury composé de :

A. D. CHACHA	M. C "A" à l'université de KASDI MERBAH - Ouargla :	**Président**
S. DJEBALI	prof. à l'ENS - Kouba - Alger :	**Examinateur**
A. AYADI	prof. à l'université LARBI BEN M'HIDI - Oum El-bouaghi :	**Examinateur**
M. S. SAID	M. C "A" à l'université de KASDI MERBAH - Ouargla :	**Rapporteur**

AVANT – PROPOS

Je remercie tout d'abord le docteur **M. S. SAID** qui m'a proposé un sujet de recherche que j'ai trouvé fort intéressant et pour l'aide constante qui n'a cessé de m'apporter tout le long de mon travail ; je lui en exprime ici ma profonde gratitude.

Je tiens à remercier Monsieur le docteur **A. D. CHACHA** et je lui sais gré d'avoir accepté la Présidence du Jury de ce mémoire.

Je remercie Monsieur le Professeur **S. DJEBALI** de l'honneur qu'il me fait en acceptant d'être examinateur de ce mémoire et de participer au Jury.

Je remercie Monsieur le Professeur **A. AYADI** de l'honneur qu'il me fait en acceptant d'être examinateur de ce mémoire et de participer au Jury.

Mes remerciements seraient très incomplets si j'oublie de remercier

- d'une part : tout le personnel (enseignant, administratif) du

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES ET D'AFORMATIQUES DE L'UNIVERSITE KASDI MERBAH – OUARGLA

- et d'autre part : les très chers membres de ma grande famille qui m'ont soutenu de prés ou de loin pour mener à bien ce travail.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION ……1

NOTATIONS ……4

CHAPITRE I
Espaces convenables et variétés de dimension infinie ……6
1.1 Espaces convenables ……6
1.1.1 Espaces localement convexes ……6
1.1.2 C^{∞}-Topologie, Espaces convenables ……8
1.2 Variétés de dimension infinie ……..29
1.2.1 Définitions ……....29
1.2.2 Fibrés tangents ……..31
1.2.3 Champs des vecteurs ……35
1.2.4 Dérivée de Lie ……..38
1.2.5 Variétés des applications lisses ……40

CHAPITRE II
Groupes de Lie de dimension infinie, Groupe des difféomorphismes à décroissance rapide ……42
2.1 Groupes de Lie de dimension infinie ……..42
2.1.1 Définition ……42
2.1.2 Algèbre de Lie …….. ……..43
2.1.3 Sous-groupes paramétriques ……..……...44
2.1.4 Application exponentielle……..46
2.1.5 Représentations adjointes ……47
2.1.6 Dérivées logarithmiques ……..……48
2.1.7 Groupes de Lie réguliers ……..48
2.2 Groupe des difféomorphismes à décroissance rapide ……52
2.3 Métriques riemanniennes sur les groupes de Lie ……56

CHAPITRE III
Etude de quelques équations aux dérivées partielles ……...61
3.1 Propriété géodésique de l'équation (3.1) ……61
3.2 Propriété géodésique de l'équation (3.2) ……64
3.3 Existence des géodésiques ……..66

CONCLUSION 72

RÉFÉRENCES ……73

ملخص

ندرس في هذه المذكرة معادلتي Hopf و"Korteweg-de Vries" على الدائرة والمستقيم.

في الفصل الأول من هذه المذكرة ندرس باختصار الحساب التفاضلي الشامل على الفضاءات المحدبة محليا والتامة بمفهوم Mackey، وفي الفصل الثاني نقدم المعلومات الأساسية الأولية لنظرية زمر Lie غير منتهية البعد. نناقش مفهوم زمر Lie المنتظمة والحقيقة القائلة إن كل زمر Lie المعروفة في الهندسة التفاضلية منتظمة. بعد ذلك نبرهن أن زمرة التفاتشاكلات المتناقصة بسرعة إلى التطبيق المطابق منتظمة.

في الفصل الثالث ندرس وجود ووحدانية الحل لمعادلتينا حيث نستخدم المقاربة الهندسية لـArnold والمتمثلة أساسا في اعتبار التابع المجهول كسرعة خط جيوديزي على إحدى زمر التفاتشاكلات. نبرهن نتيجتين أساسيتين متعلقتين بوجود الخطوط الجيوديزية باستخدام منوعات بناخية مناسبة والنظرية الكلاسيكية لـCauchy-Lipschitz .

الكلمات الفاتحة: معادلات التطور، معادلات الخطوط الجيوديزية، معادلة Hopf، معادلة "Korteweg-de Vries".

ABSTRACT

In this memory, we treat the two partial differential equations of Hopf and of "Korteweg-de Vries", on the circle and the line.

In the first chapter of this memory, we study briefly the global differential calculus on the convenient vector spaces (which are complete locally convex vector spaces in the sense of Mackey), and in the second, we present the properties of basis of the theory of infinite dimensional Lie groups. We discuss the notion of regular Lie groups and the fundamental affirmation that says that "all known Lie groups are regular", next we demonstrate that the group of all diffeomorphisms which decrease rapidly to the identity, is regular.

In the third chapter, we study the existence and the uniqueness of solution of our equations by using Arnold's geometric approach, which consists to consider the unknown as the velocity field of a geodesic on "groups of diffeomorphisms" modeled on convenient vector spaces. We prove our fundamental results, which concern the existence of the geodesics, by using suitable Banach manifolds and the classic theorem of Cauchy-Lipschitz.

KEY WORDS: Equations of evolution, Equations of geodesics, Equation of Hopf, Equation of "Korteweg-de Vries".

RÉSUMÉ

Dans ce mémoire, nous traitons les équations aux dérivées partielles de Hopf et de "Korteweg-de Vries" (KdV equation), sur le cercle et sur la droite.

Dans le premier chapitre de ce mémoire, nous étudions brièvement le calcul différentiel global sur les espaces convenables (qui sont par définition des espaces localement convexes complets au sens de Mackey) et dans le deuxième, nous présentons les propriétés de base de la théorie des groupes de Lie de dimension infinie. Nous discutons la notion d'un "groupe de Lie régulier", et l'affirmation fondamentale qui dit que "tous les groupes de Lie connus sont réguliers", ensuite nous démontrons que le groupe des difféomorphismes à décroissance rapide est régulier.

Dans le troisième chapitre, nous étudions l'existence et l'unicité de solution de nos équations en utilisant l'approche géométrique d'Arnold, qui consiste à considérer l'inconnu comme la vélocité d'une géodésique sur des groupes des difféomorphismes modelés sur des espaces convenables. Nous démontrons nos résultats fondamentaux, qui concernent l'existence des géodésiques, en utilisant des variétés de Banach convenables et le théorème classique de Cauchy-Lipschitz.

MOTS-CLÉS: Equations d'évolution, Equations des géodésiques, Equation de Hopf, Equation de "Korteweg-de Vries".

Introduction

Dans ce travail nous étudions l'existence et l'unicité de solution d'équations:

$$\partial_t u - \partial_t \partial_x^2 u = -3u\partial_x u + 2\partial_x u \partial_x^2 u + u\partial_x^3 u \tag{0.1}$$

et

$$\partial_t u - \partial_t \partial_x^2 u = -3u\partial_x u + 2\partial_x u \partial_x^2 u + (u - a\ )\,\partial_x^3 u \tag{0.2}$$

sur le cercle S^1 et sur la droite réelle $\mathbb{R}$, avec $a \in \mathbb{R}$.

Ces équations s'appellent, selon les terminologies de la physique, "équations de l'eau peu profonde" "shallow water equations" (pour une discussion détaillée sur leur rôle physique, le lecteur intéressé peut consulter les références [6], [12] et [16]).

Notre méthode pour résoudre les équations (0.1) et (0.2) est géométrique et est basée sur l'approche d'Arnold (voir [1], [2], et [3]), qui consiste à considérer l'inconnu u comme la vélocité d'une géodésique sur une variété riemannienne convenable de dimension infinie (voir le chapitre III).

La difficulté de cette approche vient de la définition des structures différentielles raisonnables sur les groupes des difféomorphismes. Pour le contourner, nous utiliserons le calcul différentiel de "Frölicher-Kriegl" exposé dans la référence fondamentale [10].

Pendant le vingtième siècle, plusieurs mathématiciens ont essayé de prolonger le calcul différentiel de Fréchet sur les espaces et les variétés de Banach aux espaces fonctionnelles plus généraux comme les espaces localement convexes. L'une des causes de cette généralisation est que les variétés de Banach ne sont pas convenables pour beaucoup de questions d'analyse globale comme le montre le résultat suivant cité dans [10]: "*tout groupe de Lie de Banach agissant effectivement sur une variété différentielle compacte est de dimension finie*". Ceci entraîne, en particulier, qu'il n'existe pas une structure (différentielle) de Banach raisonnable sur le groupe des difféomorphismes $\mathit{Diff}(S^1)$.

La difficulté principale rencontrée par les mathématiciens était la relation entre une telle définition de la dérivabilité et la continuité. Dans le cas des espaces normés, nous savons que la dérivabilité au sens de Fréchet implique évidement la continuité, mais pour construire des définitions raisonnables de la dérivabilité dans les espaces localement convexes, il faut rejeter cette implication de notre esprit. L'exemple simple suivant nous donne une explication directe de ce fait.

Considérons un espace localement convexe E. Pour qu'une définition de la différentiabilité sur E et son dual topologique E^* soit convenable aux applications sérieuses, il faut que l'application

$$(x, \ell) \in E \times E^* \longmapsto \ell\,(x) \in \mathbb{K} = (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$$

soit de classe C^∞ suivant cette définition. D'autre part, un résultat simple cité dans [10] montre que l'application précédente peut être continue sauf dans le cas où l'espace E est normé, et ceci quelle que soit la topologie localement convexe définie sur E^*.

Ce petit phénomène était la motivation originale pour les deux mathématiciens A. Frölicher et A. Kriegl à développer un nouveau calcul différentiel basé sur la définition d'Hadamard dans leur monographie [10].

Dans le premier chapitre de ce mémoire, nous étudions brièvement ce calcul sur les espaces localement convexes. Nous présentons trois notions fondamentales: la C^∞-topologie, les espaces convenables, et les applications de classe C^∞ au sens d'Hadamard.

Nous allons voir que la C^∞-topologie d'un espace localement convexe est plus importante, pour les opérations de dérivabilité, de sa propre topologie. Par exemple, toutes les applications lisses sont continues pour cette topologie, une affirmation qui n'est pas vraie pour les topologies originales.

Les espaces convenables qui constituent le cadre naturel du calcul différentiel de Frölicher-Kriegl, sont par définition des espaces localement convexes complets au sens de Mackey (M-complets).

La dérivabilité au sens d'Hadamard, qui a été adoptée dans [10], est simple à formuler, et est équivalente, pour le cas des espaces de Banach, à la dérivabilité usuelle de Fréchet.

Dans le deuxième chapitre, nous donnons les propriétés de base de la théorie des groupes de Lie de dimension infinie modelés sur des espaces convenables. Nous discutons la notion d'un "groupe de Lie régulier", et l'affirmation fondamentale qui dit que "*tous les groupes de Lie connus sont réguliers*".

Nous démontrons que le groupe des difféomorphismes à décroissance rapide $\mathit{Diff}_{\mathcal{S}}(\mathbb{R})$, qui nous intéresse dans ce travail, est régulier.

Dans le troisième chapitre, nous traitons les deux équations (0.1) et (0.2).

Nous considérons pour la première équation, l'inconnu u comme la vélocité d'une géodésique sur l'un des groupes riemanniens: $\mathit{Diff}(\mathbb{R})$, $\mathit{Diff}(S^1)$, $\mathit{Diff}_c(\mathbb{R})$ (groupe des difféomorphismes à support compact), $\mathit{Diff}_{\mathcal{S}}(\mathbb{R})$, et pour la deuxième, comme la vélocité d'une géodésique sur l'un des groupes riemanniens de Virasoro-Bott: $S^1 \times_{VB} \mathit{Diff}(S^1)$, $\mathbb{R} \times_{VB} \mathit{Diff}_c(\mathbb{R})$, $S^1 \times_{VB} \mathit{Diff}_{\mathcal{S}}(\mathbb{R})$. Suivant cette approche qui est due essentiellement à Arnold, nous ramenons l'étude de l'existence et l'unicité de solution d'équations (0.1) et (0.2) à un problème d'existence de géodésiques sur des variétés riemannienne de dimension infinie modelés sur des espaces convenables.

Par des techniques très largement inspirées des références [7] et [8], nous démontrons nos résultats fondamentaux "Théorème 3.1" et "Théorème 3.2" qui concernent l'existence des géodésiques, en utilisant des variétés de Banach

convenables et le théorème classique de Cauchy-Lipschitz.

Notations

E_B, espace vectoriel engendré par l'ensemble B

E^*, espace des formes linéaires continues sur E

q_B, fonction de Minkowski de l'ensemble B:

$$q_B(x) = \inf\{t > 0 : x \in tB\}, \ x \in E$$

$\mathrm{Lip}^k(\mathbb{R}; E)$, espace des courbes localement lipschitziennes ainsi que leurs dérivées jusqu'a l'ordre $\leq k$

$C^{k,1}(I; E)$, espace des courbes lipschitziennes ainsi que leurs dérivées jusqu'a l'ordre $\leq k$

$C^\infty E$, espace topologique constitué de E et de sa C^∞-topologie

$\ell^\infty_H(X; E)$, espace des fonctions $f : X \to E$ bornées sur les ensembles de $H \subset \mathcal{P}(X)$

$C^\infty(\Omega; F) = \{f : \Omega \to F : f \circ \gamma \in C^\infty(\mathbb{R}; F), \forall \gamma \in C^\infty(\mathbb{R}; \Omega)\}$

$L(E, F)$, espace des applications linéaires bornées de E dans F

$C^\infty(\{x\} \subset M; \mathbb{K})$, espace des germes au voisinage de x

T_xM, espace des vecteurs tangents à M au point x

D_xM, espace des vecteurs opérationnels tangents à M en x

$TM = \bigcup_{x\in\Omega} \{x\} \times T_xM$, fibré tangent de M

$D\Omega = \bigcup_{x\in\Omega} \{x\} \times D_xE$, fibré tangent opérationnel de M

π_M, surjection canonique de DM dans M

$\mathfrak{X}(M) = C^\infty(M \to TM)$, espace des champs de vecteurs sur M

$C^\infty(M \to DM)$, espace des champs de vecteurs opérationnels

sur M

$[X, Y]$, crochet de Lie des champs de vecteurs X et Y

F_X, flot locale du champ de vecteurs X

$\Phi^* X$, image inverse du champ de vecteurs X par Φ

$\mathcal{L}_X$, dérivée de Lie suivant le champ de vecteurs X

μ_a, translation droite:

$$\mu_a(x) = xa, x \in G$$

${}_a\mu$, translation gauche:

$${}_a\mu(x) = ax, x \in G$$

$\mathfrak{g} = T_e G$, algèbre de Lie du groupe G

δ_r, dérivée logarithmique droite:

$$(\delta_r f)(x)(\xi) = D\left(\mu_{f(x)^{-1}}\right)(f(x))(Df(x)(\xi))$$

δ_l, dérivée logarithmique gauche:

$$(\delta_l f)(x)(\xi) = D\left({}_{f(x)^{-1}}\mu\right)(f(x))(Df(x)(\xi))$$

$\kappa_r(x) = D(\mu_{x^{-1}})(x)$, forme droite de Maurer-Cartan

$\kappa_l(x) = D({}_{x^{-1}}\mu)(x)$, forme gauche de Maurer-Cartan

Ad, représentation adjointe de G dans $L(\mathfrak{g};\mathfrak{g})$:

$$Ad(x) = D({}_x\mu \circ \mu_{x^{-1}})(e), x \in G$$

$ad = D(Ad)(e)$, représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ dans $L(\mathfrak{g};\mathfrak{g})$

$\mathcal{S}(\mathbb{R})$, espace de Schwartz

$\mathit{Diff}\, C^n(\mathbb{R})$, groupe des difféomorphismes de classe C^n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

$\mathit{Diff}\,(\mathbb{R})$, groupe des difféomorphismes de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

$\mathit{Diff}_S(\mathbb{R}) = \mathit{Diff}\,(\mathbb{R}) \bigcap (Id + S(\mathbb{R}))$, groupe des difféomorphismes à décroissance rapide à l'identité

$\mathit{Diff}\,(S^1)$, groupe des difféomorphismes de classe C^∞ de S^1 dans S^1

$H^n(\mathbb{R})$, espace de Sobolev d'exposant n

$HC^n(\mathbb{R}) = H^n(\mathbb{R}) \cap C^n(\mathbb{R})$

$\mathit{Diff}\, HC^n(\mathbb{R}) = \mathit{Diff}\, C^n(\mathbb{R}) \bigcap (Id + HC^n(\mathbb{R}))$

$C_b^n(\mathbb{R})$, espace des fonctions continues et bornées ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre n

CHAPITRE I:
Espaces convenables et variétés de dimension infinie

Dans ce chapitre qui est basé essentiellement sur la référence [10], nous allons étudier brièvement le calcul différentiel global sur les espaces convenables. Par la suite, nous allons donner quelques notions fondamentales de la théorie des variétés lisses de dimension infinie.

1.1. Espaces convenables

1.1.1. Espaces localement convexes

Rappelons d'abord quelques propriétés élémentaires des ensembles d'un espace vectoriel et la définition d'un espace vectoriel topologique (EVT).

Définitions. *Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).*

1. *L'ensemble $A \subset E$ est dit:*
2. (a) *convexe si*

$$\forall x, y \in A, \forall t \in [0,1] : tx + (1-t)\, y \in A$$

   (b) *absolument convexe si*

$$\forall x, y \in A, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} : |\lambda| + |\mu| \leq 1 \Longrightarrow \lambda x + \mu y \in A$$

   (c) *balancé si*

$$\forall x \in A, \forall \lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \leq 1 \Longrightarrow \lambda x \in A$$

   (d) *absorbant en $x \in A$ si pour tout $y \in E$, il existe $\varepsilon > 0$ telle que*

$$x + ty \in A, 0 \leq t < \varepsilon.$$

3. *La fonction de Minkowski q_A de A est définie par la relation*

$$q_A(x) = \inf \{t > 0 : x \in tA\}, x \in E.$$

4. *Une fonction $p : E \longrightarrow [0, \infty[$ est une seminorme sur E si elle vérifie:*
   (i) $p(x+y) \leq p(x) + p(y), x, y \in E$.
   (ii) $p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x), x \in E, \lambda \in \mathbb{K}$.

5. *Etant donné une topologie* $\mathcal{T}$ sur E*, on dit que* E *est un espace vectoriel topologique si les deux applications*

$$\begin{array}{rcl} (x,y) & \in & E \times E \longmapsto x+y \in E \\ (\lambda,x) & \in & \mathbb{K} \times E \longmapsto \lambda x \in E \end{array}$$

sont continues par rapport à $\mathcal{T}$*.*

6. *Un ensemble* A *de l'espace vectoriel topologique* E *est dit borné si pour tout voisinage ouvert* Ω *de* 0 *dans* E*, il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que* $\varepsilon A \subset \Omega$*.*

On signale que tout ensemble balancé non vide de E contient nécessairement 0, tout ensemble absolument convexe est convexe et balancé, et si E est un EVT, tout ouvert est absorbant en tout point.

Proposition 1.1.1. *Soient* E *un EVT et* p *une seminorme sur* E*, alors les affirmations suivantes sont équivalentes:*

1. p *est continue.*
2. $\{x \in E : p(x) < 1\}$ *est un ensemble ouvert de* E*.*
3. $0 \in int\{x \in E : p(x) < 1\}$*.*
4. $0 \in int\{x \in E : p(x) \leq 1\}$*.*
5. p *est continue en* 0*.*
6. *Il existe une seminorme continue* q *telle que* $p \leq q$*.*

Proposition 1.1.2.

1. *Soit* A *un ensemble convexe et balencé de* E *tel que* $E = \bigcup_{r>0} rA$*, alors* q_A *est une seminorme sur* E*.*
2. *Soit* B *un ensemble absolument convexe. Alors* q_A *est une seminorme sur* $E_B =$Vect(B) *(espace engendré par* B*).*

Proposition 1.1.3. *Soient E un espace vectoriel et P une famille de seminormes sur E. On définit la famille $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(E)$ comme suit:*

$\Omega \in \mathcal{T}$ si, et seulement s'il existe pour tout $x \in \Omega$ des seminormes $p_1, \ldots, p_n \in P$ et des nombres $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n > 0$ tels que

$$\bigcap_{k=1}^{n} \{y \in E : p_k(y - x) < \varepsilon_k\} \subset \Omega.$$

Alors $(E, \mathcal{T})$ *est un EVT.*

Donnons maintenant la définition d'un espace localement convexe (ELC).

Définition. *Un espace vectoriel topologique E est dit localement convexe si sa topologie est définie par une famille des seminormes $\mathcal{P}$ vérifiant la condition*

$$\bigcap_{p \in \mathcal{P}} \{x \in E : p(x) = 0\} = \{0\}$$

(*cette condition est supposée vraie pour que E soit séparé*).

Proposition 1.1.4. *Etant donné un espace localement convexe E, les affirmations suivantes sont équivalente:*

1. *A est borné dans E.*
2. *Toute seminorme continue sur E est borné sur A.*
3. *Toute seminorme de la famille $\mathcal{P}$ est borné sur A.*
4. *Quelle que soit ℓ de E^*, l'ensemble $\ell(A)$ est borné dans $\mathbb{K}$.*

La proposition suivante jouera un rôle essentiel dans la suite.

Proposition 1.1.5. *Soit E un espace localement convexe et A un ensemble absolument convexe et borné de E. Alors q_A est une norme sur $E_A =$Vect(A).*

1.1.2. C^∞-Topologie, Espaces convenables

La notion d'une courbe différentiable à valeurs dans un espace vectoriel topologique est facile et ne pose aucun problème.

Définition. *Soit E un espace localement convexe et $\gamma : \mathbb{R} \to E$ une courbe sur E. Alors γ est dite:*

1. *différentiable sur $\mathbb{R}$ si sa dérivée $\gamma'(t) = \lim_{s\to 0} \frac{\gamma(t+s)-\gamma(t)}{s}$ existe pour tout $t \in \mathbb{R}$.*

2. *de classe C^n sur $\mathbb{R}$ si toutes les dérivées de γ d'ordre $\leq n$ existent et sont continues.*

3. *localement lipschitzienne (de Lip^0) s'il existe pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ un nombre $\delta > 0$ tel que l'ensemble $\left\{ \frac{\gamma(t)-\gamma(s)}{t-s} : t, s \in]t_0 - \delta, t_0 + \delta[\,, t \neq s \right\}$ soit borné dans E.*

4. *de Lip^k si toutes ses dérivées d'ordre $\leq k$ existent et sont localement lipschitziennes.*

Les implications suivantes sont évidentes:

$$\gamma \in C^{n+1} \implies \gamma \in \mathrm{Lip}^n \implies \gamma \in C^n,$$
$$\gamma \text{ est différentiable} \implies \gamma \in C = C^0.$$

Lemme 1.1.6. *Soit E et F deux espace localement convexes et ℓ une application linéaire et continue de E dans F. Alors ℓ envoie tout ensemble borné dans E dans un ensemble borné dans F.*

Démonstration. Soit A un ensemble borné dans E. Si Ω est un voisinage ouvert de 0 dans F, l'ensemble $\ell^{-1}(\Omega)$ est un voisinage ouvert de 0 dans E, et comme A est borné dans E, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon A \subset \ell^{-1}(\Omega)$. D'où $\varepsilon\ell(A) \subset \Omega$, ce qui montre que $\ell(A)$ est borné dans F.

Lemme 1.1.7. *Soit ℓ une application linéaire et continue de E dans F. Si $\gamma : \mathbb{R} \to E$ est une courbe localement lipschitzienne, alors la courbe $\ell \circ \gamma : \mathbb{R} \to F$ l'est aussi.*

Démonstration. Soit I un intervalle borné dans $\mathbb{R}$. Comme l'ensemble

$$\left\{ \frac{\gamma(t) - \gamma(s)}{t - s} : t, s \in I, t \neq s \right\}$$

est borné dans E et ℓ est continue, il découle du lemme 1.1.6 que l'ensemble

$$\left\{ \frac{\ell \circ \gamma(t) - \ell \circ \gamma(s)}{t - s} : t, s \in I.t \neq s \right\}$$

est borné dans F. D'où la courbe $\ell \circ \gamma$ est localement lischitzienne.

Du lemme précédent, on en déduit immédiatement l'implication:

$$\gamma \in \mathrm{Lip}^n \implies \ell \circ \gamma \in \mathrm{Lip}^n$$

où ℓ est linéaire et continue.

D'autre part, la proposition 1.1.4 donne l'implication inverse suivante:

$$(\forall \ell \in E^* : \ell \circ \gamma \in \mathrm{Lip}) \implies \gamma \in \mathrm{Lip}.$$

Lemme 1.1.8. *Soient E un espace localement convexe et $\gamma : \mathbb{R} \to E$ une courbe. Les deux affirmations suivantes sont équivalentes:*

1. $\gamma \in$Lip=Lip^0
2. *Pour tout intervalle borné $I \subset \mathbb{R}$, il existe un ensemble borné et absolument convexe $B \subset E$ tel que $\gamma : I \to E_B$ soit une courbe lipschitzienne dans E_B.*

Démonstraton. (1) $\implies$ (2) Supposons que $\gamma \in$Lip et soit I un intervalle borné de $\mathbb{R}$. Choisissons un ensemble borné et absolument convexe $B \subset E$ tel que

$$\gamma(I) \cup \left\{ \frac{\gamma(t) - \gamma(s)}{t - s} : t, s \in I, t \neq s \right\} \subset B.$$

On a

$$q_B(\frac{\gamma(t) - \gamma(s)}{t - s}) \leq 1, t, s \in I, t \neq s,$$

ou encore

$$q_B(\gamma(t) - \gamma(s)) \leq |t - s|, t, s \in I.$$

Ceci prouve que la courbe $\gamma : I \to E_B$ est lipschitzienne .

(2) $\implies$ (1) Soit I un intervalle borné dans $\mathbb{R}$, il existe d'après l'hypothèse un ensemble borné et absolument convexe $B \subset E$ tel que la courbe $\gamma : I \to E_B$ soit lipschitzienne, i.e:

$$q_B \left(\frac{\gamma(t) - \gamma(s)}{t - s} \right) \leq \mathrm{const} < \infty, \forall t, s \in I, t \neq s.$$

Donc on a

$$\frac{\gamma(t) - \gamma(s)}{t - s} \in \tau B, \forall t, s \in I, t \neq s$$

pour un $\tau > 0$, ce qui prouve que l'ensemble

$$\left\{ \frac{\gamma(t) - \gamma(s)}{t - s} : t, s \in I, t \neq s \right\}$$

est borné dans E.

Lemme 1.1.9. *Soit E un espace localement convexe et $\gamma : \mathbb{R} \to E$ une courbe dans* Lip^1*, alors la courbe $\tilde{\gamma}$ définie par la relation*

$$\tilde{\gamma}(t) = \frac{1}{t}\left(\frac{\gamma(t) - \gamma(0)}{t} - \gamma'(0)\right), t \in \mathbb{R}^*$$

est localement bornée dans $\mathbb{R}^*$.

Démonstraton. Pour $\ell \in E^*$, la courbe $\ell \circ \gamma$ est dans Lip^1 et l'on a

$$\ell \circ \tilde{\gamma}(t) = \frac{1}{t}\left(\frac{\ell \circ \gamma(t) - \ell \circ \gamma(0)}{t} - (\ell \circ \gamma)'(0)\right)$$

$$= \frac{1}{t}\int_0^1 \left((\ell \circ \gamma)'(t\xi) - (\ell \circ \gamma)'(0)\right) d\xi, t \neq 0.$$

Maintenent soit $\delta > 0$, comme la courbe $(l \circ \gamma)'$ est localement lipschitzienne, il existe $M_\delta \geq 0$ tel que

$$|(\ell \circ \gamma)'(t) - (\ell \circ \gamma)'(s)| \leq M_\delta |t - s|, t, s \in]-\delta, \delta[.$$

Par suite il vient

$$|\ell \circ \tilde{\gamma}(t)| \leq M_\delta \int_0^1 \xi d\xi = \frac{M_\delta}{2}, t \in]-\delta, 0[\cup]0, \delta[.$$

Donc pour tout $\ell \in E^*$, la courbe $\ell \circ \tilde{\gamma} :]-\delta, 0[\cup]0, \delta[\to \mathbb{K}$ est bornée, ce qui entraîne que $\tilde{\gamma} :]-\delta, 0[\cup]0, \delta[\to E$ est bornée. Ceci finit la démonstration puisque δ est arbitraire.

Proposition 1.1.10. *Soit E un espace localement convexe et $\gamma : \mathbb{R} \to E$ une courbe. Les deux énoncés suivants sont équivalents:*

1. $\gamma \in \mathrm{Lip}^k(\mathbb{R}; E)$ $(0 \leq k < \infty)$.
2. *Pour tout intervalle borné I de $\mathbb{R}$, il existe un ensemble borné et absolument convexe $B \subset E$ tel que $\gamma \in C^{k,1}(I; E_B)$.*

Démonstraton. Nous avons démontré le cas $k = 0$ dans le lemme 1.1.8. Traitons donc le cas $k = 1$.

(2) $\Longrightarrow$ (1) Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle borné. Il existe un ensemble borné et absolument convexe $B \subset E$ tel que $\gamma, \gamma' : I \to E_B$ soient lipschitziennes

où γ' désigne la dérivée de γ par rapport à q_B. Cela signifie que les deux ensembles $\left\{\frac{\gamma(t)-\gamma(s)}{t-s} : t,s \in I, t \neq s\right\}$ et $\left\{\frac{\gamma'(t)-\gamma'(s)}{t-s} : t,s \in I, t \neq s\right\}$ sont bornés dans E_B, donc ils sont bornés dans E puisque l'injection $E_B \hookrightarrow E$ est continue. Comme I est arbitraire, on déduit que $\gamma : \mathbb{R} \to E \in \mathrm{Lip}^1$.

(1) $\Longrightarrow$ (2) Supposons que $\gamma \in \mathrm{Lip}^1$ et soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle borné. Choisissons un ensemble borné et absolument convexe $B \subset E$ contenant l'ensemble

$$\begin{aligned}
&\gamma(I) \cup \gamma'(I) \cup \left\{\frac{\gamma(t)-\gamma(s)}{t-s} : t,s \in I, t \neq s\right\} \\
&\cup \left\{\frac{\gamma'(t)-\gamma'(s)}{t-s} : t,s \in I, t \neq s\right\} \\
&\cup \left\{\frac{1}{t-s}\left(\frac{\gamma(t)-\gamma(s)}{t-s} - \gamma'(s)\right) : t,s \in I, t \neq s\right\}
\end{aligned}$$

On a alors l'inégalité

$$q_B\left(\frac{\gamma(t)-\gamma(s)}{t-s} - \gamma'(t)\right) \leq |t-s|, t,s \in I, t \neq s$$

qui prouve que γ est dérivable dans (E_B, q_B) et que sa dérivée coïncide avec γ' dans I. D'où $(\gamma : I \to E_B) \in C^{1,1}(I; E_B)$.

De même, on démontre le cas $k \geq 2$.

Une nette dans un espace localement convexe E est par définition une famille $(x_\zeta)_{\zeta \in \Lambda} \subset E$ telle que son ensemble des indices Λ est muni d'une relation d'ordre $\leq$ vérifiant la condition:

$$\forall (i,j) \in \Lambda^2, \exists k \in \Lambda, i,j \leq k.$$

Lemme 1.1.11. *Soit B un ensemble borné et absolument convexe dans un espace localement convexe E et (x_ζ) une nette de E_B. Les deux affirmations suivantes sont équivalentes:*

(1) *(x_ζ) converge vers 0 dans E_B.*

(2) *Il existe une nette $(\mu_\zeta) \subset \mathbb{R}$ tel que $\mu_\zeta \to 0$ dans $\mathbb{R}$ et*

$$x_\zeta \in \mu_\zeta B, \forall \zeta.$$

(*cette convergence est appelée la convergence de Mackey ou semplement la M-convergence*).

Démonstraton. (1) $\Longrightarrow$ (2) On définit d'abord une nette (y_ζ) par la relation

$$y_\gamma = \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{x_\zeta}{q_B(x_\zeta)}, q_B(x_\zeta) \neq 0 \\ 0, q_B(x_\zeta) = 0. \end{cases}$$

Comme

$$q_B(y_\zeta) \leq \frac{1}{2} < 1, \forall \zeta,$$

il existe pour tout ζ un $t_\zeta > 0$ tel que $q_B(y_\zeta) \leq t_\zeta < 1$ et $y_\zeta \in t_\zeta B$. D'où $x_\zeta \in \mu_\zeta B$ avec $\mu_\zeta = 2t_\zeta q_B(x_\zeta) \longrightarrow 0$.

(2) $\Longrightarrow$ (1) On a

$$q_B(x_\zeta) = \left|\mu_\zeta\right| q_B(y_\zeta) \leq \left|\mu_\zeta\right| \longrightarrow 0.$$

D'où $x_\zeta \longrightarrow 0$ dans E_B.

Une nette (x_ζ) dans un espace localement convexe E est dite de M-Cauchy s'il existe un ensemble borné $B \subset E$ et une nette $(\mu_{\zeta,\zeta'}) \subset \mathbb{R}$ convergeant vers 0 tels que

$$x_\zeta - x_{\zeta'} \in \mu_{\zeta,\zeta'} B, \forall \zeta, \zeta'.$$

On démontre comme dans le lemme précédent que cette condition est équivalente la condition suivante: il existe un ensemble borné et absolument convexe $B \subset E$ tel que (x_ζ) soit de Cauchy dans E_B.

Proposition 1.1.12. *Soit E un espace localement convexe. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

(1) *Toute nette de M-Cauchy dans E est convergente.*

(2) *Toute suite de M-Cauchy dans E est convergente.*

(3) *Pour tout ensemble borné, fermé et absolument convexe $B \subset E$, l'espace E_B est de Banach.*

(4) *Pour tout ensemble borné B, il existe un ensemble borné et absolument convexe $\tilde{B}$ contenant B tel que $E_{\tilde{B}}$ soit complet.*

Démonstration. Les implications (1) $\Longrightarrow$ (2) et (3) $\Longrightarrow$ (4) sont triviales.

(2) $\Longrightarrow$ (3) Soit B un ensemble borné, fermé et absolument convexe dans E et soit (x_n) une suite de Cauchy dans E_B. Puisque (x_n) est une suite de M-Cauchy dans E, elle converge dans E vers un élément $x \in E$. Fixons maintenant $\varepsilon > 0$ et soit $N > 0$ tel que

$$\forall n, m \geq N : q_B(x_n - x_m) < \varepsilon.$$

D'apès la définition de q_B, il vient

$$x_n - x_m \in \varepsilon B, n, m \geq N.$$

Donc, en faisant tendre m vers $+\infty$ et en utilisant le fait que B est fermé dans E, on obtient la relation

$$x_n - x \in \varepsilon B, n \geq N$$

qui montre bien que $x \in E_B$ et que

$$q_B(x_n - x) \leq \varepsilon, n \geq N.$$

D'où $x_n \longrightarrow x$ dans E_B.

(4) $\Longrightarrow$ (1) Soit (x_ζ) une nette de M-Cauchy dans E. Il existe donc une nette $(\mu_{\zeta,\zeta'}) \subset \mathbb{R}$ convergeant vers 0 telle que

$$x_\zeta - x_{\zeta'} \in \mu_{\zeta,\zeta'} B, \forall \zeta, \zeta'$$

où B est un ensemble borné dans E.

Choisissons arbitrairement un ζ_0, d'après (4), on peut supposer que B est absolument convexe et contient x_{ζ_0} et que l'espace E_B est complet. On a

$$x_\zeta = x_{\zeta_0} + x_\zeta - x_{\zeta_0} \in B + \mu_{\zeta,\zeta_0} B \subset E_B$$

et

$$q_B(x_\zeta - x_{\zeta'}) \leq \mu_{\zeta,\zeta'} \longrightarrow 0.$$

Il résulte de cette inégalité que (x_ζ) est une nette de Cauchy dans E_B, donc elle converge dans E_B vers un élément $x \in E_B$. Grâce à la continuité de l'injection $E_B \hookrightarrow E$, il vient

$$x_\zeta \longrightarrow x \text{ dans } E.$$

Définition. *Tout espace localement convexe vérifiant l'une des quatre conditions précédentes est dit "complet au sens de Mackey" ou encore "M-complet".*

Lemme 1.1.13. *On se donne un espace localement convexe E et une suite $(x_n) \subset E$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ la suite $(n^k(x_n - x))$ soit borné dans E. Alors il existe une courbe $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}; E)$ telle que*

$$\gamma(0) = x, \gamma\left(\frac{1}{n}\right) = x_n, n \geq 1.$$

Démonstraton. Soit $\theta \in C^\infty(\mathbb{R}; [0,1])$ une fonction telle que

$$\theta(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \leq 0, \\ 1, & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

La courbe γ définie par la formule

$$\gamma(t) = \begin{cases} x & \text{pour } t \leq 0, \\ x_{n+1} + (x_n - x_{n+1})\theta\left(n(n+1)\left(t - \frac{1}{n+1}\right)\right) & \text{pour } \frac{1}{n+1} \leq t \leq \frac{1}{n}, \\ x_1 & \text{pour } t \geq 1, \end{cases}$$

possède les propriétés désirées.

La proposition suivante montre que toute application linéaire et bornée de E dans F est lisse (de classe C^∞) selon un sens que nous préciserons dans la suite.

Proposition 1.1.14. *Soit ℓ une application linéaire entre deux espaces localement convexes E et F. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes:*

(1) *ℓ est borné.*

(2) *L'image de toute courbe lisse dans E par ℓ est une courbe lisse dans F.*

Démonstraton. (1) $\Longrightarrow$ (2) Il suffit de montrer que ℓ transfère toute courbe $\mathrm{Lip}^k (0 \leq k < \infty)$ dans E á une courbe Lip^k dans F.

Le cas $k = 0$ est trivial. Montrons le cas $k = 1$. Pour $t_0 \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$, l'ensemble

$$\left\{\frac{1}{t - t_0}\left(\frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} - \gamma'(t_0)\right) : t \in]t_0 - \delta, t_0[\cup]t_0, t_0 + \delta[\right\}$$

est borné dans E, et ceci grâce au lemme 1.1.9. Par conséquent, l'ensemble

$$\left\{\frac{1}{t - t_0}\left(\frac{\ell \circ \gamma(t) - \ell \circ \gamma(t_0)}{t - t_0} - \ell \circ \gamma'(t_0)\right) : t \in]t_0 - \delta, t_0[\cup]t_0, t_0 + \delta[\right\}$$

est borné dans F. Donc la courbe $\ell \circ \gamma$ est dérivable en t_0 et on a

$$(\ell \circ \gamma)'(t_0) = \ell \circ \gamma'(t_0).$$

De ceci on en déduit que $\ell \circ \gamma \in$Lip^1.

Maintenant on utilise la récurrence sur k pour démontrer les cas $k \geq 2$.

(2) $\Longrightarrow$ (1) Supposons que ℓ n'est pas borné, donc il existe au moins un ensemble borné $B \subset E$ tel que $\ell(B)$ ne soit pas borné. Ceci signifie que nous pouvons trouver une suite $(x_n) \subset B$ et un élément $\lambda \in F^*$ tels que

$$|\lambda \circ \ell(x_n)| \geq n^{n+1}, \forall n.$$

D'autre part, nous pouvons construire selon le lemme 1.1.13 une courbe $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}; E)$ vérifiant:

$$\gamma\left(\frac{1}{n}\right) = n^{-n} x_n, n \geq 1.$$

Comme $\ell \circ \gamma \in C^\infty(\mathbb{R}; F) \subset$Lip$(\mathbb{R}; F)$, l'ensemble $\left\{\ell \circ \gamma\left(\frac{1}{n}\right) : n \geq 1\right\}$ est borné dans F. Par conséquent l'ensemble $\left\{\lambda \circ \ell \circ \gamma\left(\frac{1}{n}\right) : n \geq 1\right\}$ est borné dans $\mathbb{K}$, ce qui contredit le fait que $\left|\lambda \circ \ell \circ \gamma(\frac{1}{n})\right| \geq n$ pour $n \geq 1$.

Nous donnons maintenant la définition de la C^∞-topologie.

Définition. *La C^∞-Topologie d'un espace vectoriel topologique localement convexe E est la topologie finale pour la famille $C^\infty(\mathbb{R}, E)$, c'est-à-dire la topologie la plus fine rendant continues les courbes lisses de E.*

Notons $C^\infty E$ l'espace topologique constitué de l'ensemble E et la C^∞-topologie correspondant à la topologie localement convexe de E. Les deux propositions suivantes donnent des caractérisations concernant les ouverts et les fermés de $C^\infty E$.

On se donne une suite des nombres réels $\mu = (\mu_n)$ telle que $\mu_n \longrightarrow +\infty$, on dit que $(x_n) \subset E$ est une suite μ-convergente vers $x \in E$, si $(\mu_n(x_n - x))$ est bornée dans E.

Proposition 1.1.15. *Soient E un espace localement convexe et Ω un ensemble de E. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(1) *Pour toute courbe $\gamma \in$Lip, l'ensemble $\gamma^{-1}(\Omega)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.*

(2) *Ω est un ouvert de $C^\infty E$ ou encore un C^∞-ouvert de E.*

(3) *Pour tout $x \in \Omega$ et toute suite (x_n) μ-convergente vers x, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in \Omega$ pour $n \geq N$.*

(4) *Pour tout ensemble borné et absolument convexe $B \subset E$, $\Omega \cap E_B$ est un ouvert de E_B.*

Démonstration. L'implication (1) $\Longrightarrow$ (2) est triviale.

(2) $\Longrightarrow$ (3) Supposons au contraire qu'il existe un $x \in \Omega$ et une suite $(x_n) \subset E$ tels que $(\mu_n(x_n - x))$ soit bornée dans E et l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} : x_n \notin \Omega\}$ soit infini. Dans ce cas, on peut construire deux sous-suites $(x_{n_k}) \subset (x_n)$ et $(\mu_{n_k}) \subset (\mu_n)$ vérifiant

$$x_{n_k} \notin \Omega, \mu_{n_k} \geq 2^k, \forall k.$$

Pour toute semi-norme continue p sur E et tout $m \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} p(k^m(x_{n_k} - x)) &= \frac{k^m}{\mu_{n_k}} p(\mu_{n_k}(x_{n_k} - x)) \\ &\leq Ck^m 2^{-k}, k \geq 0. \end{aligned}$$

Donc la suite $(k^m(x_{n_k} - x))_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée dans E quel que soit m. D'après le lemme 1.1.13, il existe une courbe $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}, E)$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(\frac{1}{k}) = x_{n_k}$ pour $k \geq 1$. Mais ceci contredit le fait que $\gamma^{-1}(\Omega)$ est un ensemble ouvert dans $\mathbb{R}$ puisque

$$\begin{cases} 0 \in \gamma^{-1}(\Omega), \\ \frac{1}{k} \notin \gamma^{-1}(\Omega), k \geq 1. \end{cases}$$

(3) $\Longrightarrow$ (1) Soit $\gamma \in$Lip$(\mathbb{R}; E)$. Si $\gamma^{-1}(\Omega)$ n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}$, on peut trouver un $t \in \gamma^{-1}(\Omega)$ et une suite $(t_n) \subset \mathbb{R}$ tels que $t_n \notin \gamma^{-1}(\Omega)$ et $|t_n - t| \leq \frac{1}{1+|\mu_n|}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Posons $x = \gamma(t)$ et $x_n = \gamma(t_n)$. Puisque la courbe γ est localement lipschitzienne et la suite (t_n) est bornée, on a pour tout semi-norme continue p sur E

$$p(x_n - x) \leq C\,|t_n - t| \leq \frac{C}{1 + |\mu_n|}, n \in \mathbb{N}.$$

D'où

$$p(\mu_n(x_n - x)) \leq C \frac{|\mu_n|}{1 + |\mu_n|} \leq C, n \in \mathbb{N},$$

ce qui montre que (x_n) est μ-convergente vers x. Alors il existe, d'après l'hypothèse, un $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in \Omega$ si $n \geq N$. Ceci contredit le fait que $x_n \notin \Omega$ quel que soit n.

(3) $\Longrightarrow$ (4) Soit B un ensemble borné et absolument convexe de E et supposons que $\Omega \cap E_B$ n'est pas ouvert dans E_B. Il existe alors un $x \in \Omega \cap E_B$ et une suite $(x_n) \subset E_B - \Omega$ telles que $\lim_{n\to\infty} q_B(x_n - x) = 0$. Selon le lemme

1.1.11, on a $x_n - x \in \varepsilon_n B$ avec $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Soit $(\varepsilon_{n_k}) \subset (\varepsilon_n)$ une sous-suite vérifiant la condition

$$|\varepsilon_{n_k}| \leq \frac{1}{1+|\mu_n|}, k \in \mathbb{N}.$$

On a, pour toute semi-norme p continue sur E

$$p(\mu_k(x_{n_k} - x)) \leq C\,|\mu_k|\,|\varepsilon_{n_k}| \leq C, k \in \mathbb{N}.$$

Donc la suite $(\mu_k(x_{n_k} - x))_k$ est borné dans E, par suite il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_{n_k} \in \Omega$ pour $k \geq N$, ce qui constitue une contradiction avec le fait que $(x_{n_k}) \subset E_B - \Omega$.

(4) $\Longrightarrow$ (3) Soit $x \in \Omega$ et soit (x_n) une suite de E telle que $(\mu_n(x_n - x))$ soit borné dans E. Si B est un ensemble borné et absolument convexe contenant $\{x\} \cup \{\mu_n(x_n - x) : n \in \mathbb{N}\}$, on a

$$q_B(x_n - x) \leq \frac{1}{|\mu_n|} \longrightarrow 0.$$

Donc $x_n \longrightarrow x$ dans E_B. Par conséquent, puisque $x \in \Omega \cap E_B$ et l'ensemble $\Omega \cap E_B$ est ouvert dans E_B, il existe $N \geq 0$ tel que $x_n \in \Omega \cap E_B$ pour $n \geq N$.

La démonstration est terminée.

De la proposition précédente, on déduit la

Proposition 1.1.16. *Etant donné un espace localement convexe E, les conditions suivantes sont équivalentes:*

(1) *L'ensemble A est C^∞-fermé dans E.*

(2) *Pour toute suite $(x_n) \subset A$ μ-convergente vers x, on a $x \in A$.*

(3) *Pour toute suite $(x_n) \subset A$ M-convergente vers x, on a $x \in A$.*

(4) *Pour toute suite $(x_n) \subset A$ telle que $(n^k(x_n - x))$ soit bornée dans E pour $k \in \mathbb{N}$, on a $x \in A$.*

Le théorème suivant concerne la relation entre $C^\infty E$ et E, dont sa démonstration que nous ne donnons pas ici, existe par exemple dans [10] et [13].

Signalons que nous ne étudierons pas ici l'espace topologique $C^\infty E$ en détail. Le lecteur intéressé trouvera une étude détaillée de cet espace dans l'ouvrage [10].

Nous rappelons qu'un espace localement convexe E est dit bornologique si quel que soit l'espace de Banach F, toute application linéaire et bornée de E dans F est continue.

Théorème 1.1.17. *Pour tout espace localement convexe E, l'injection canonique $C^\infty E \hookrightarrow E$ est continue, et si E est bornologique, on a*

(i) *$C^\infty E = E$ si la fermeture de tout ensemble $A \subset E$ est constituée des limites des suites de A, en particulier si E est métrisable.*

(ii) *$C^\infty E = E$ si E est le dual fort d'un espace de Fréchet-Schwartz.*

Théorème 1.1.18. *Etant donné un espace localement convexe E*, les énoncés suivants sont équivalents*:*

(a) *Toute courbe lipschitzienne dans E est localement intégrable au sens de Riemann.*

(b) *Pour toute courbe $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}, E)$, il existe une courbe $\tilde{\gamma} \in C^\infty(\mathbb{R}, E)$ telle que $\tilde{\gamma}' = \gamma$.*

(c) *Pour tout espace localement convexe F contenant E comme un sous-espace vectoriel, E est fermé dans $C^\infty F$.*

(d) *Pour toute courbe $\gamma : \mathbb{R} \to E$ telle que*

$$\ell \circ \gamma \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{K}), \forall \ell \in E^*,$$

on a $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}; E)$.

(e) *E est M-complet.*

(f) *Toute application linéaire et continue d'un espace normé F dans E admet une extension continue au complété de F.*

Démonstration. $(a) \implies (b)$ Soit $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}; E)$. Il existe une courbe unique $\tilde{\gamma} \in C^\infty(\mathbb{R}; \hat{E})$ telle que $\tilde{\gamma}' = \gamma$ et $\tilde{\gamma}(0) = 0$ où $\hat{E}$ dénote la complétion de E. D'autre part, comme $\gamma \in$Lip$(\mathbb{R}, E)$, la courbe γ est localement intégrable au sens de Riemann dans E, donc nous pouvons poser

$$\hat{\gamma}(t) = \int_0^t \gamma(s)ds \in E, t \in \mathbb{R}.$$

Si $\ell \in E^*$, on écrit, pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\ell \circ \hat{\gamma}(t) = \int_0^t \ell \circ \gamma(s)ds = \int_0^t \ell \circ \tilde{\gamma}'(s)ds = \int_0^t (\ell \circ \tilde{\gamma})'(s)ds = \ell \circ \tilde{\gamma}(t).$$

D'où il vient

$$\tilde{\gamma}(t) = \hat{\gamma}(t) \in E, t \in \mathbb{R}.$$

$(b) \Longrightarrow (c)$ Supposons que E est un sous-espace vectoriel d'un espace localement convexe F. Soient $x \in F$ et $(x_n) \subset E$ une suite telle que $(n^k(x_n - x))$ soit borné dans F pour tout $k \geq 0$. Selon le lemme 1.1.13, nous pouvons construire une courbe $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}, F)$ vérifiant

$$\gamma' \in C^\infty(\mathbb{R}, E), \gamma(0) = x, \gamma\left(\frac{1}{n}\right) = x_n, n \geq 0.$$

Soit $\tilde{\gamma} \in C^\infty(\mathbb{R}; E)$ telle que $\tilde{\gamma}' = \gamma'$. On a alors $\gamma = \tilde{\gamma} + C$ avec C est une constante de F. Par conséquent

$$x = x - x_1 + x_1 = \gamma(0) - \gamma(1) + x_1 = \tilde{\gamma}(0) - \tilde{\gamma}(1) + x_1 \in E.$$

Ceci prouve que E est C^∞-fermé dans F.

$(c) \Longrightarrow (e)$ Soit (x_n) une suite de M-Cauchy dans E. Comme (x_n) est de Cauchy dans E, elle est de Cauchy dans l'espace complet $\hat{E}$ (complétion de E), donc elle converge au sens de Mackey dans $\hat{E}$ vers un $x \in \hat{E}$. D'où $x \in E$ puisque E est C^∞-fermé dans $\hat{E}$.

$(e) \Longrightarrow (f)$ Soit F un espace normé et $f : F \to E$ une application linéaire et continue. Puisque l'ensemble $f(\{\|x\|_F \leq 1\})$ est borné dans E, il existe un ensemble borné, fermé et absolument convexe $B \subset E$ tel que $f(\{\|x\|_F \leq 1\}) \subset B$. Soit $x \in F$, comme $f\left(\frac{x}{\|x\|_F}\right) \in B$, on a $f(x) \in \|x\|_F B \subset E_B$ et $q_B(f(x)) \leq \|x\|_F$. Ceci prouve que f est continue de F dans E_B, donc elle admet une extension continue á $\hat{F}$ dans E_B car E_B est complet.

$(f) \Longrightarrow (a)$ Soient $\gamma \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R}; E)$ et $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Choisissons un ensemble borné et absolument convexe $B \subset E$ tel que $\gamma \in \mathrm{Lip}([a, b]; E_B)$ et notons $\hat{\imath} : \widehat{E_B} \to E$ l'extension continue de l'injection $i : E_B \to E$. Comme $\gamma : [a, b] \to \widehat{E_B}$ est intégrable au sens de Riemann, la courbe $\gamma = \hat{\imath} \circ \gamma : [a, b] \to E$ est aussi intégrable au sens de Riemann.

$(d) \Longrightarrow (c)$ Supposons que E est un sous-espace vectoriel d'un espace localement convexe F. Soit $x \in F$ et soit $(x_n) \subset E$ une suite telle que pour tout $k \geq 0$, la suite $(n^k(x_n - x))_{n \geq 0}$ soit bornée dans F. D'après le lemme 1.1.13, il existe au moins une courbe $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}, F)$ telle que

$$\gamma(0) = x, \gamma\left(\frac{1}{n}\right) = x_n, \gamma(t) \in E, n \geq 1, t \neq 0.$$

Soit $\tilde{\gamma}$ la courbe définie par $\tilde{\gamma}(t) = t\gamma(t), t \in \mathbb{R}$. On a $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \to E$ et $\tilde{\gamma} \in C^\infty(\mathbb{R}; F)$, alors $\ell \circ \tilde{\gamma} \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{K})$ pour toute $\ell \in F^*$. Si $\ell \in E^*$, il

existe $\tilde{\ell} \in F^*$ avec $\tilde{\ell}_{/E} = \ell$, d'où $\ell \circ \tilde{\gamma} = \tilde{\ell} \circ \tilde{\gamma} \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{K})$. Cela prouve que $\tilde{\gamma} \in C^\infty(\mathbb{R}; E)$ d'après l'hypothèse. Par conséquent $x = \tilde{\gamma}'(0) \in E$, ce qui montre que E est C^∞-fermé dans F.

$(e) \Longrightarrow (d)$ Il suffit de prouver que si $\gamma : \mathbb{R} \to E$ est une courbe telle que $\ell \circ \gamma \in \mathrm{Lip}^k(\mathbb{R}; \mathbb{K})(k \in \mathbb{N})$ pour toute $\ell \in E^*$, alors $\gamma \in \mathrm{Lip}^k(\mathbb{R}; E)$.

Le cas $k = 0$ est clair grâce à la proposition 1.1.4.

Montrons le cas $k = 1$. Soit $t \in \mathbb{R}$, vérifions que la nette

$$\zeta \in \,]-1, 0[\, \cup \,]0, 1[\, \longmapsto \frac{\gamma(t+\zeta) - \gamma(t)}{\zeta}$$

est de M-Cauchy dans E, en effet, si $\ell \in E^*$, on a pour tout $(|\zeta|, |\xi|) \in \,]0, 1[^2$

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\zeta - \xi} \left\{ \frac{\ell \circ \gamma(t+\zeta) - \ell \circ \gamma(t)}{\zeta} - \frac{\ell \circ \gamma(t+\xi) - \ell \circ \gamma(t)}{\xi} \right\} \right| \\ = & \left| \int_0^1 \frac{(\ell \circ \gamma)'(t+\zeta s) - (\ell \circ \gamma)'(t+\xi s)}{\zeta - \xi} ds \right| \\ \leq & \frac{1}{2} \sup_{0<|\alpha|,|\beta|<1} \left| \frac{(\ell \circ \gamma)'(t+\alpha) - (\ell \circ \gamma)'(t+\beta)}{\alpha - \beta} \right|, \end{aligned}$$

ce qui prouve que $\frac{1}{\zeta-\xi} \left\{ \frac{\gamma(t+\zeta)-\gamma(t)}{\zeta} - \frac{\gamma(t+\zeta)-\gamma(t)}{\zeta} \right\}$ est borné dans E selon la proposition 1.1.4. Donc la limite $\gamma'(t) = \lim_{\zeta \to 0} \frac{\gamma(t+\zeta)-\gamma(t)}{\zeta}$ existe dans E puisque E est supposé M-complet.

Finalement, une simple récurrence sur k donne les cas $k \geq 2$.

La démonstration du théorème est terminée.

Définition. *On dit que E est convenable ou encore C^∞-complet si l'une des conditions équivalentes dans le théorème 1.1.18 est vraie.*

La proposition suivante est facile à vérifier.

Proposition 1.1.19.

(i) *Le produit $\prod_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$ et la somme directe $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$ des espaces convenables E_λ, $\lambda \in \Lambda$, sont des espaces convenables.*

(ii) *La limite inductive stricte des espaces convenables, est un espace convenable.*

(iii) *Soient E un espace localement convexe, X un ensemble quelconque et H une famille des sous-ensembles de X contenant les parties finis de X. On munit l'espace*

$$\ell_H^\infty(X;E) = \{f : X \to E : \forall B \in H, f(B) \text{ est borné dans } E\}$$

de la topologie définie par les semi-normes

$$|f|_{B,p} = \sup_{x\in B} p(f(x)), p \in \mathcal{P}, B \in H,$$

où $\mathcal{P}$ désigne la famille des semi-normes continues sur E. Alors si E est convenable, $\ell_H^\infty(X;E)$ est l'aussi.

La topologie naturelle de l'espace des courbes de classe C^∞ d'un espace localement convexe est importante et voici sa définition.

Définition. *Etant donné un espace localement convexe E, la topologie naturelle de $C^\infty(\mathbb{R};E)$ est définie par les semi-normes*

$$|\gamma|_{k,K,p} = \sup_{t\in K} p(\gamma^{(k)}(t)), \gamma \in C^\infty(\mathbb{R};E)$$

où K est un compact de $\mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ et p est une semi-norme continue sur E, en d'autre terme c'est la topologie initiale pour les applications linéaires $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R};E) \longmapsto \gamma^{(k)}\big|_K \in C(K;E)$, avec $k \in \mathbb{N}$ et K un compact de $\mathbb{R}$.

Proposition 1.1.20. *E est convenable si et seulement si $C^\infty(\mathbb{R},E)$ est convenable.*

Démonstration. ($\Longrightarrow$) Supposons que E est C^∞-complet et soit $\ell^\infty(\mathbb{R},E)$ l'espace des courbes localement bornées de E. Il est clair que l'application

$$\gamma \in C^\infty(\mathbb{R},E) \longmapsto f(\gamma) = (\gamma^{(k)})_{k\in\mathbb{N}} \in \prod_{k\in\mathbb{N}} \ell^\infty(\mathbb{R},E)$$

est linéaire, continue et injective. Prouvons que son application inverse f^{-1} : $f(C^\infty(\mathbb{R};E)) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R};E)$ est continue.

Soit $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R};E)$ et soit $(\gamma_\zeta) \subset C^\infty(\mathbb{R};E)$ une nette telle que $f(\gamma_\zeta) \longrightarrow f(\gamma)$ dans $\prod_{k\in\mathbb{N}} \ell^\infty(\mathbb{R};E)$. D'après la définition de la topologie de $\ell^\infty(\mathbb{R};E)$, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$, tout compact $K \subset \mathbb{R}$ et toute semi-norme continue p sur E,

$$\sup_{t\in K} p\left\{(\gamma_\zeta - \gamma)^{(k)}(t)\right\} \longrightarrow 0.$$

Cela nous dit exactement que $\gamma_\zeta \longrightarrow \gamma$ dans $C^\infty(\mathbb{R}, E)$.

Prouvons maintenant que $f(C^\infty(\mathbb{R}; E))$ est convenable. Il suffit alors de prouver que $f(C^\infty(\mathbb{R}; E))$ fermé dans l'espace convenable $\prod_{k\in\mathbb{N}} \ell^\infty(\mathbb{R}; E)$.

Soit $(\gamma_k) \subset \prod_{k\in\mathbb{N}} \ell^\infty(\mathbb{R}; E)$ et soit $(\gamma_\zeta) \subset C^\infty(\mathbb{R}; E)$ une nette telle que $f(\gamma_\zeta) \longrightarrow (\gamma_k)$ dans $\prod_{k\in\mathbb{N}} \ell^\infty(\mathbb{R}; E)$. On a

$$\forall k \in \mathbb{N}, \gamma_\zeta^{(k)} \longrightarrow \gamma_k \text{ dans } \ell^\infty(\mathbb{R}; E).$$

Par suite il vient

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall \ell \in E^*, (\ell \circ \gamma_\zeta)^{(k)} \longrightarrow \ell \circ \gamma_k \text{ dans } \ell^\infty(\mathbb{R}; K).$$

Alors $\ell \circ \gamma_0 \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{K})$ et $(\ell \circ \gamma_0)^{(k)} = \ell \circ \gamma_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et toute $\ell \in E^*$. On utilise maintenant le fait que E est convenable pour conclure que $\gamma_0 \in C^\infty(\mathbb{R}; E)$ et $(\gamma_k) = f(\gamma_0) \in f(C^\infty(\mathbb{R}; E))$.

L'espace $C^\infty(\mathbb{R}; E)$ est donc convenable puisque il est isomorphe à $f(C^\infty(\mathbb{R}; E))$.

($\Longleftarrow$) Supposons que $C^\infty(\mathbb{R}; E)$ est convenable. Il est facile de voir que l'application g définie par

$$g(x)(t) = x, t \in \mathbb{R}, x \in E.$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques de E dans $g(E) \subset C^\infty(\mathbb{R}; E)$. Vérifions que $g(E)$ est fermé dans $C^\infty(\mathbb{R}, E)$.

Soient $(x_\zeta) \subset E$ et $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}; E)$ telles que $g(x_\zeta) \longrightarrow \gamma$ dans $C^\infty(\mathbb{R}; E)$. On a donc $x_\zeta = g(x_\zeta)(t) \longrightarrow \gamma(t)$ dans E quel que soit $t \in \mathbb{R}$, ce qui prouve que (x_ζ) converge dans E vers un $x \in E$ et que $\gamma = g(x) \in g(E)$.

On en conclut que $g(E)$ est convenable. Donc E est convenable.

La définition suivante est importante et concerne la notion d'une "fonction lisse (de classe C^∞)" que nous adopterons dans ce travail.

Définition (∞). *Etant donné deux espaces localement convexes E et F, et un C^∞-ouvert Ω de E, on dit que la fonction $f : \Omega \longrightarrow F$ est de classe C^∞ (au sens d'Hadamard) si pour toute courbe $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}; \Omega)$, on a $f \circ \gamma \in C^\infty(\mathbb{R}; F)$.*

Dans la suite, nous munirons l'espace $C^\infty(\Omega; F)$ de la topologie initiale pour les applications $\gamma^* : C^\infty(\Omega; F) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}; F)$ avec $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}; \Omega)$.

Lemme 1.1.21. *Soit E et F deux espaces localement convexes et Ω un C^∞-ouvert de E. L'aplication L définie par*

$$L : f \in C^\infty(\Omega; F) \longmapsto L(f) = (\gamma^* f)_{\gamma \in C^\infty(\mathbb{R};\Omega)} \in \prod_{\gamma \in C^\infty(\mathbb{R};\Omega)} C^\infty(\mathbb{R}; F)$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques de $C^\infty(\Omega; F)$ dans le sous-espace fermé $L(C^\infty(\Omega; F))$ de $\prod_{\gamma \in C^\infty(\mathbb{R};\Omega)} C^\infty(\mathbb{R}; F)$.

Démonstration. Il est clair que L est injective; prouvons qu'elle est continue. Soit $(f_\zeta) \subset C^\infty(\Omega; F)$ une nette telle que $f_\zeta \longrightarrow 0$ dans $C^\infty(\Omega; F)$. Pour toute $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}; \Omega)$, puisque l'application γ^* est continue de $C^\infty(\Omega; F)$ dans $C^\infty(\mathbb{R}; F)$, on a $f_\zeta \circ \gamma \longrightarrow 0$ dans $C^\infty(\mathbb{R}; F)$, donc $L(f_\zeta) \longrightarrow 0$ dans $\prod_{\gamma \in C^\infty(\mathbb{R};\Omega)} C^\infty(\mathbb{R}; F)$. Cela montre que L est continue.

Prouvons que L^{-1} est continue. Soit $(f_\zeta \circ \gamma)_{\gamma \in C^\infty(\mathbb{R};\Omega)} \longrightarrow 0$ dans $L(C^\infty(\Omega; F))$. Si U un voisinage de 0 dans $C^\infty(\Omega; F)$, il existe des ouverts V_1, V_2, ..., $V_N \in \mathcal{T}_{C^\infty(\mathbb{R};F)}$ contenant 0 tels que $\bigcap_{k=1}^{N} (\gamma_k^*)^{-1}(V_k) \subset U$, et comme $\gamma^*\, f_\zeta \longrightarrow 0$ dans $C^\infty(\mathbb{R}; F)$ pour toute $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}; \Omega)$, on a

$$f_\zeta \in (\gamma_k^*)^{-1}(V_k), \forall \zeta \geq \zeta_k$$

pour un certain ζ_k $(1 \leq k \leq N)$. Par suite il vient

$$f_\zeta \in \bigcap_{k=1}^{N} (\gamma_k^*)^{-1}(V_k) \subset U, \forall \zeta \geq \max \zeta_k,$$

ce qui entraîne que $f_\zeta \longrightarrow 0$ dans $C^\infty(\Omega; F)$.

Prouvons que $L(C^\infty(\Omega; F))$ est un sous-espace fermé de $\prod_{\gamma \in C^\infty(\mathbb{R};\Omega)} C^\infty(\mathbb{R}; F)$. Il suffit de montrer que:

$$\begin{aligned}
(f_\gamma) &\in \prod_{\gamma \in C^\infty(\mathbb{R};\Omega)} C^\infty(\mathbb{R}; F) : \\
(f_\gamma) &\in L(C^\infty(\Omega; F)) \Longleftrightarrow f_\gamma \circ g = f_{\gamma \circ g}, \forall \gamma \in C^\infty(\mathbb{R}; \Omega), \forall g \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

L'implication $(\Longrightarrow)$ est évidente.

$(\Longleftarrow)$ Soit $(f_\gamma) \in \prod_{\gamma \in C^\infty(\mathbb{R};\Omega)} C^\infty(\mathbb{R}; F)$ tel que $f_\gamma \circ g = f_{\gamma \circ g}$ pour tout $(\gamma, g) \in C^\infty(\mathbb{R}; \Omega) \times C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. Montrons que $L(f) = (f_\gamma)$ où f est la fonction définie par la relation

$$f(x) = f_{\gamma_x}(0), x \in \Omega,$$

avec $\gamma_x(t) = x$, $t \in \mathbb{R}$.

En effet, si $t \in \mathbb{R}$ et $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R};\Omega)$, on pose $x = \gamma(t)$ et $g_x(s) = t$ pour $s \in \mathbb{R}$. On a alors

$$f \circ \gamma(t) = f(x) = f_{\gamma_x}(0) = f_{\gamma \circ g_x}(0) = f_\gamma \circ g_x(0) = f_\gamma(t).$$

D'où $f \in C^\infty(\Omega; F)$ et $L(f) = (f_\gamma)$.

Corollaire 1.1.22.

(i) *La topologie de $C^\infty(\Omega; F)$ est engendrée par la famille des semi-normes*

$$|f|_{k,K,p,\gamma} = \sup_{t \in K} p((f \circ \gamma)^{(k)}(t)), f \in C^\infty(\Omega; F)$$

où $k \in \mathbb{N}$, K est un compact de $\mathbb{R}$, $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R};\Omega)$ et p est une semi-norme continue sur F.

(ii) *Si F est convenable, alors $C^\infty(\Omega; F)$ est l'aussi.*

Le théorème suivant de Boman montre qu'une fonction définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans un espace localement convexe est de classe C^∞ au sens usuel si, et seulement si elle est de classe C^∞ au sens de la définition $(\boldsymbol{\infty})$. Une démonstration simple de ce théorème existe dans [10].

Lemme 1.1.23. [**Théorème de Boman, 1967**] *Etant donné un espace localement convexe E et une application f définie sur un ouvert $\Omega \times U$ de $\mathbb{R}^2$ dans E, les affirmations suivantes sont équivalentes:*

(1) *f est de classe C^∞ au sens de la définition (∞).*

(2) *Toutes les dérivées partialles $\partial^\alpha f$ existent et sont continues.*

(3) *Toutes les dérivées partialles $\partial^\alpha f$ existent et sont localement bornées.*

(4) *Toutes les dérivées directionnelles*

$$d^k_{(u,v)} f(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^k \Bigg|_{t=0} \left(f((x+tu, y+tv)\right), (x,y) \in \Omega \times U$$

existent et sont localement bornées.

(5) *La courbe $f^\vee$ définie par la relation*

$$f^\vee(x)(y) = f(x,y), (x,y) \in \Omega \times U,$$

est de classe C^∞ de Ω dans $C^\infty(U; E)$.

Théorème 1.1.24. *Etant donné trois espaces localement convexes E_1, E_2 et F et deux C^∞-ouverts $\Omega_1 \subset E_1$ et $\Omega_2 \subset E_2$, les deux affirmations suivantes sont équivalentes:*

(i) $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow F$ *est de classe* C^∞

(ii) *L'application* $f^\vee$ *définie par*

$$f^\vee(x_1)(x_2) = f(x_1, x_2), (x_1, x_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2$$

est de classe C^∞ *de* Ω_1 *dans* $C^\infty(\Omega_2; F)$.

Démonstration. (i)$\Longrightarrow$(ii) Supposons que f est de classe C^∞. Pour $x_1 \in \Omega_1$ et $\gamma_2 \in C^\infty(\mathbb{R}; \Omega_2)$, la courbe

$$\gamma(t) = (x_1, \gamma_2(t)), t \in \mathbb{R}$$

est dans $(\mathbb{R}; \Omega_1 \times \Omega_2)$. Donc la fonction

$$f \circ \gamma(t) = f(x_1, \gamma_2(t)) = f^\vee(x_1) \circ \gamma_2(t), t \in \mathbb{R}$$

est de classe C^∞, ce qui est prouve que $f^\vee$ est définie de Ω_1 dans $C^\infty(\Omega_2; F)$.

Soit $\gamma_1 \in C^\infty(\mathbb{R}; \Omega_1)$, pour prouver que $f^\vee \circ \gamma_1 \in C^\infty(\mathbb{R}; C^\infty(\Omega_2; F))$, il faut et il suffit de prouver que $\gamma_2^* \circ f^\vee \circ \gamma_1 \in C^\infty(\mathbb{R}; C^\infty(\mathbb{R}; F))$ quelle que soit $\gamma_2 \in C^\infty(\mathbb{R}; \Omega_2)$. Mais d'aprés le lemme 1.1.23, $\gamma_2^* \circ f^\vee \circ \gamma_1$ est dans $C^\infty(\mathbb{R}; C^\infty(\mathbb{R}; F))$, si et seulement si, la fonction

$$(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto f(\gamma_1(t_1), \gamma_2(t_2)) \in F$$

est de classe C^∞.

Cette dernière affirmation est vraie puisque pour toute $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$, on a $(\gamma_1, \gamma_2) \circ \gamma \in C^\infty(\mathbb{R}, \Omega_1 \times \Omega_2)$ et $\{t \longmapsto (f \circ (\gamma_1, \gamma_2) \circ \gamma)(t)\} \in C^\infty(\mathbb{R}; F)$, et cela grâce au fait que $f \in C^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2; F)$.

(ii)$\Longrightarrow$(i) Supposons que $f^\vee \in C^\infty(\Omega_1; C^\infty(\Omega_2; F))$ et soient $\gamma_1 \in C^\infty(\mathbb{R}; \Omega_1)$ et $\gamma_2 \in C^\infty(\mathbb{R}; \Omega_2)$ deux courbes. On a $f^\vee \circ \gamma_1 \in C^\infty(\mathbb{R}; C^\infty(\Omega_2; F))$, alors $\gamma_2^* \circ f^\vee \circ \gamma_1 \in C^\infty(\mathbb{R}; C^\infty(\mathbb{R}; F))$. Maintenant, on applique encore le lemme 1.1.23 pour conclure que la fonction $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto f(\gamma_1(t_1), \gamma_2(t_2)) \in F$ est de classe C^∞. Donc la courbe $t \in \mathbb{R} \longmapsto f(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \in F$ est de classe C^∞. Ceci prouve que $f \in C^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2; F)$.

Corollaire 1.1.25. *Soit E, F et G trois espaces localement convexes et soit $\Omega \subset E$ et $U \subset F$ deux C^∞-ouverts. Alors les applications suivantes sont de classe C^∞:*

(1) $(f, x) \in C^\infty(\Omega; F) \times \Omega \longmapsto f(x) \in F$,

(2) $x \in E \longmapsto (y \longmapsto (x, y)) \in C^\infty(F; E \times F)$,

(3) $\wedge : f \in C^\infty(\Omega; C^\infty(U; G)) \longmapsto f^\wedge \in C^\infty(\Omega \times U; G))$ *avec* $f^\wedge(x, y) = f(x)(y))$,

(4) $\vee : f \in C^\infty(\Omega \times U; G) \longmapsto f^\vee \in C^\infty(\Omega; C^\infty(U; G))$ *avec* $f^\vee(x)(y) = f(x, y)$,

(5) $(f, g) \in C^\infty(F; G) \times C^\infty(\Omega, F) \longmapsto f \circ g \in C^\infty(\Omega; G)$,

(6) $(f, g) \in C^\infty(E_2; E_1) \times C^\infty(F_1; F_2) \longmapsto L_{g,f} \in C^\infty(C^\infty(E_1; F_1); C^\infty(E_2; F_2))$ *avec* $L_{g,f}(h) = g \circ h \circ f$,

(8) $\prod : (f_\lambda) \in \prod\limits_{\lambda \in \Lambda} C^\infty(E_\lambda; F_\lambda) \longmapsto \prod((f_\lambda)) \in C^\infty\left(\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda; \prod\limits_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda\right)$ *avec* $\left(\prod((f_\lambda))\right)((x_\lambda)) = (f_\lambda(x_\lambda))$ *pour* $(x_\lambda) \in \prod\limits_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$.

Proposition 1.1.26. *Soit $\Omega \in C^\infty(E \times \mathbb{R})$ et $f \in C^\infty(\Omega; F)$. Alors l'ensemble $U = \{x \in E : \{x\} \times [0, 1] \subset \Omega\}$ est un ouvert de $C^\infty E$ et la fonction*

$$x \in U \longmapsto \int_0^1 f(x, t)dt \in \hat{F}$$

est de classe C^∞.

Corollaire 1.1.27. *Etant donné un espace localement convexe E et une courbe lisse γ sur E, la fonction*

$$(t, s) \longmapsto \begin{cases} \frac{\gamma(t)-\gamma(s)}{t-s}, t \neq s \\ \gamma'(t), t = s \end{cases}$$

est de classe C^∞ de $\mathbb{R}^2$ dans E.

Démonstration. Il suffit de remarquer que la fonction

$$(t,s) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \int_0^1 \gamma'(s+\xi(t-s))d\xi \in \hat{E}$$

est de classe C^∞ selon la proposition précédente et que

$$\frac{\gamma(t)-\gamma(s)}{t-s} = \int_0^1 \gamma'\left(s+\xi(t-s)\right)d\xi, t \neq s.$$

Si E et F sont deux espaces localement convexes, on note $L(E;F)$ l'espace des applications linéaires bornées de E dans F. Selon la proposition 1.1.14, $L(E;F)$ est un sous-espace vectoriel de $C^\infty(E;F)$. Donc

$$L(E,F) = \bigcap_{(\lambda,x,y)\in\Bbbk\times E\times E} \{f \in C^\infty(E;F) : \{ev_x + \lambda ev_y - ev_{x+\lambda y}\}(f) = 0\}$$

et comme les applications $ev_x : f \in C^\infty(E;F) \longmapsto f(x) \in F$, $x \in E$, sont continues, on conclut que $L(E;F)$ est fermé dans $C^\infty(E;F)$.

La démonstration du théorème suivant est directe et se base sur les résultats 1.1.23, 1.1.24 et 1.1.27.

Théorème 1.1.28. *Soit E et F deux espaces localement convexes et Ω un ouvert de $C^\infty E$. On définit un opérateur D par*

$$Df(x)(h) = \frac{d}{dt}\{f(x+th)\}\Big|_{t=0}, x \in \Omega, f \in C^\infty(\Omega;F), h \in E.$$

On a:

(a) *Pour tout $x \in \Omega$ et toute $f \in C^\infty(\Omega;F)$, $Df(x) \in L(E;F)$.*

(b) *Pour toute $f \in C^\infty(\Omega;F)$, $Df \in C^\infty(\Omega;L(E;F))$.*

(c) *$D \in L\left(C^\infty(\Omega;F);C^\infty(\Omega;L(E;F)\right)$.*

(d) *Pour tous deux ouverts $\Omega \subset C^\infty E$ et $U \subset C^\infty F$, si $f \in C^\infty(\Omega;F)$ et $g \in C^\infty(U;G)$, on a $g \circ f \in C^\infty(\Omega;G)$ et*

$$D(g\circ f)(x)(h) = Dg(f(x)) \circ Df(x)(h), x \in \Omega, h \in E.$$

On finira ce paragraphe par le résultat suivant (pour la démonstration voir [10]).

Théorème 1.1.29. *Soient E un espace convenable, γ une courbe de E, et $\mathcal{L} \subset E'$. Supposons que la bornologie de E admette une base constituée des ensembles $\sigma(E;\mathcal{L})$-fermés. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R};E)$.

(ii) *Il existe des courbe localement bornée $\gamma_k : \mathbb{R} \longrightarrow E$ telles que pour toute $\ell \in \mathcal{L}$, $\ell \circ \gamma \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ et $(\ell \circ \gamma)^{(k)} = \ell \circ \gamma_k$.*

Si E est réflexif, pour toute famille $\mathcal{L} \subset E'$ séparant les points de E, la bornologie de E admet une base constituée des ensembles $\sigma(E;\mathcal{L})$-fermés.

Nous rappelons que la bornologie d'un espace localement convexe E est la topologie (localement convexe) la plus fine ayant la même famille d'ensembles bornés de E.

1.2. Variétés de dimension infinie

1.2.1. Définitions

1) Etant donné un ensemble M, une carte locale de M est par définition un couple (U,φ) où φ est une bijection de $U \subset M$ dans un C^∞-ouvert $\varphi(U)$ d'un espace convenable E_Ω.

Si (U,φ) et (V,ψ) sont deux cartes locales de M, l'application $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$ est appelée changement des cartes.

Une famille des cartes locales $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ de M est appelée un C^∞-atlas sur M si:

(i) $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$,

(ii) Pour tous α et β, $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ est un C^∞-ouvert de $E_\alpha = E_{U_\alpha}$ et le changement des cartes $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ est de classe C^∞ de $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ dans $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$.

Une variété de classe C^∞ est par définition un ensemble M muni d'un atlas de classe C^∞.

2) Soit M et N deux variétés de classe C^∞ et soit $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ et (V_β, ψ_β) deux atlas de M et N. La famille $(U_\alpha \times V_\beta, (\varphi_\alpha, \psi_\beta))$ définit un C^∞-atlas sur $M \times N$.

$M \times N$ muni de cet atlas est appelé la variété produit de M et N.

3) Etant donné M une variété différentielle, on dit que $N \subset M$ est une sous-variété de M si, pour tout $x \in N$, il existe une carte (U, φ) de M telle que $x \in U$ et $\varphi(U \cap N) = \varphi(U) \cap F_U$ avec F_U est un sous-espace C^∞-fermé de E_U.

4) Soit M et N deux variétés de classe C^∞, une application $f : M \to N$ est dite de classe C^∞ si pour tout $x \in M$ et tout carte locale (V, ψ) de N avec $f(x) \in V$, il existe une carte locale (U, φ) de M telle que $f(U) \subset V$ et telle que l'application $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow \psi(V)$ soit de classe C^∞.

5) La topologie naturelle d'une variété différentielle M est définie comme suit: $\Omega \in \mathcal{T}_M$ si, et seulement si, pour toute carte locale (U, φ) de M, on a $\varphi(U \cap \Omega) \in C^\infty E_U$. On peut aussi définir cette topologie comme étant la topologie finale pour $C^\infty(\mathbb{R}; M)$.

6) Etant donné une variété différentielle M et un espace localement convexe E, la topologie naturelle de $C^\infty(M; E)$ est par définition la topologie initiale pour la famille $(\gamma^*)_{\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}; M)}$.

On vérifie (voir la démonstration du lemme 1.1.21) que:

a) $\mathcal{T}_{C^\infty(M;E)}$ est engendrée par la famille des semi-normes:

$$|f|_{K,k,p,\gamma} = \sup_{t \in K} p((f \circ \gamma)^{(k)}(t))$$

où K est un compact de $\mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}; M)$ et p est une semi-norme continue sur E.

b) $\mathcal{T}_{C^\infty(M;E)}$ est la topologie initiale pour les applications

$$(\varphi^{-1})^* : C^\infty(M; E) \longrightarrow C^\infty(\varphi(\Omega); E)$$

où (Ω, φ) est une carte locale de M. En particulier, $\mathcal{T}_{C^\infty(M;E)}$ est engendrée par la famille des semi-normes:

$$P_{\varphi,p}(f) = p\left((\varphi^{-1})^* f\right), f \in C^\infty(M; E)$$

avec (Ω, φ) est une carte locale de M et p est une semi-norme continue sur $C^\infty(\varphi(\Omega); E)$.

c) L'application

$$f \in C^\infty(M; E) \longmapsto (\gamma^* f)_{\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}; M)} \in \prod_{\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}; M)} C^\infty(\mathbb{R}; E)$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques de $C^\infty(M;E)$ dans son image qui est un sous-espace vectoriel fermé de $\prod_{\gamma\in C^\infty(\mathbb{R};M)} C^\infty(\mathbb{R};E)$. Donc si E est convenable, $C^\infty(M;E)$ est aussi convenable.

d) Si N est une autre variété différentielle, l'application $f : M\times N \longrightarrow E$ est de classe C^∞ si, et seulement si, l'application $f^\vee$ définie par

$$f^\vee(x)(y) = f(x,y), (x,y)\in M\times N$$

est de classe C^∞ de M dans $C^\infty(N;E)$.

Le théorème suivant est important. Pour la démonstration voir par exemple [10].

Théorème 1.2.1. *Soit E et F deux espaces convenables et M une variété différentielle. Les deux énoncés suivants sont équivalents pour une application linéaire $L : E \longrightarrow C^\infty(M;F)$:*

(i) *L est bornée.*

(ii) *Pour tout $x\in M$, l'application $v\in E \longmapsto L(v)(x)\in F$ est bornée.*

7) Soient M une variété différentielle et $x\in M$. On définit sur l'ensemble des fonctions $f\in C^\infty(\Omega_f;\mathbb{K})$, Ω_f étant un ouvert contenant x, une relation d'équivalence comme suit: $f\sim g$ si, et seulement si, il existe un ouvert $\Omega\subset\Omega_f\cap\Omega_g$ contenant x tel que $f|_\Omega = g|_\Omega$.

La classe de $f\in C^\infty(\Omega_f;\mathbb{K})$ suivant cette relation s'appelle germe de f au voisinage de x et on le note germ(f).

Dans la suite, on notera $C^\infty(\{x\}\subset M;\mathbb{K})$ l'espace des germes au voisinage de x et on le munira de la topologie finale (localement convexe) pour les applications

$$f\in C^\infty(\Omega;\mathbb{K}) \longmapsto \overline{f} = \mathrm{germ}(f)\in C^\infty(\{x\}\subset M;\mathbb{K})$$

où Ω est un ouvert contenant x.

1.2.2. Fibrés tangents

Soit E un espace convenable.

On appelle vecteur tangent à E au point $x\in E$ tout couple (x,X) avec $X\in E$.

L'espace des vecteurs tangents à E au point x sera noté T_xE. On a évidement

$$T_xE = \{(x, \gamma'(0)) : \gamma \in C^\infty(\mathbb{R}; E), \gamma(0) = x\}.$$

Tout vecteur tangent $(x, X) \in T_xE$ définit une application linéaire et continue

$$X_x : \overline{f} \in C^\infty(\{x\} \subset E; \mathbb{R}) \longmapsto X_x\left(\overline{f}\right) = Df(x)(X) \in \mathbb{R}$$

vérifiant la propriété importante

$$X_x\left(\overline{f}\overline{g}\right) = X_x\left(\overline{f}\right) g(x) + f(x) X_x\left(\overline{g}\right).$$

On appelle vecteur opérationnel tangent à E au point x toute dérivation bornée sur $C^\infty(\{x\} \subset E; \mathbb{R})$ ou, de façon équivalente, toute application linéaire bornée

$$\partial : C^\infty(\{x\} \subset E; \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

vérifiant

$$\partial(\overline{f}\overline{g}) = \partial(\overline{f})g(x) + f(x)\partial(\overline{g}).$$

Notons D_xE l'espace des vecteurs opérationnels tangents á E au point x. On a toujours l'inclusion $T_xE \subset D_xE$ qui devient une égalité si E est de dimension finie.

Pour un C^∞-ouvert Ω contenant x, tout vecteur opérationnel tangent $\partial \in D_xE$ définit une dérivation bornée ∂_Ω sur $C^\infty(\Omega; \mathbb{R})$ par la relation $\partial_\Omega(f) = \partial(\overline{f})$ avec $f \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R})$.

L'application canonique $\partial \in D_xE \longmapsto (\partial_\Omega) \in \prod_{x\in\Omega} L\left(C^\infty(\Omega; \mathbb{R}); \mathbb{R}\right)$ est linéaire et injective de D_xE dans son image qui est un sous-espace vectoriel férmé de $\prod_{x\in\Omega} L(C^\infty(\Omega; \mathbb{R}); \mathbb{R})$. On définit alors la topologie naturelle de D_xE, qui est M-complète, comme étant la topologie initiale pour cette application.

Tous les espaces D_xE sont isomorphes puisque l'application définie de D_xE dans D_yE comme suit

$$(\partial_y)(\overline{f}) = \partial_x\left(\overline{f(\cdot + y - x)}\right), \partial_x \in D_xE, \overline{f} \in C^\infty(\{y\} \subset E; \mathbb{R})$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques.

Notons que, pour tout $x \in E$, T_xE est un sous-espace vectoriel fermé de D_xE.

Si Ω est un ouvert de $C^\infty E$, on pose $T\Omega = \bigcup_{x\in\Omega} \{x\} \times E = \Omega \times E$ et $D\Omega = \bigcup_{x\in\Omega} \Omega \times D_xE$. $T\Omega$ et $D\Omega$ sont appelés, respectivement, "fibré tangent" et "fibré tangent opérationnel" de Ω.

On munit DE d'une structure d'un espace convenable de la façon suivante:

Pour $x \in E$ et $\partial \in D_xE$, on définit une dérivation $\partial_x \in D_0E$ par la formule

$$\partial_x\left(\overline{f}\right) = \partial\left(\overline{f(\cdot - x)}\right), \overline{f} \in C^\infty\left(\{0\} \subset E; \mathbb{R}\right).$$

L'application bijective $(x, \partial) \in DE \longmapsto (x, \partial_x) \in E \times D_0E$ nous permet de transférer la structure convenable de $E \times D_0E$ à DE.

Pour tout C^∞-ouvert Ω de E, $D\Omega$ est un C^∞-ouvert de DE, et ceci puisque l'application $(x, \partial) \longmapsto (x, \partial_x)$ est bijective de $D\Omega$ dans l'ouvert $\Omega \times D_0E$ de $C^\infty\left(E \times D_0E\right)$.

Considérons un autre espace convenable F et soit Ω un ouvert de $C^\infty E$. On définit l'application tangente opératinnelle $Df(x) : D_xE \longrightarrow D_{f(x)}F$ de $f \in C^\infty(\Omega; F)$ au point $x \in \Omega$ par:

$$Df(x)(\partial)(\overline{g}) = \partial\left(\overline{g \circ f}\right), \overline{g} \in C^\infty(\{f(x)\} \subset F; \mathbb{R}), \partial \in D_xE.$$

La proposition suivante est facile à vérifier.

Proposition 1.2.2.

a) *Pour tout $x \in \Omega$, $Df(x)|_{T_xE}$ est l'application tangente usuelle de f.*

b) *L'application $Df : (x, \partial) \longmapsto Df(x, \partial) = (f(x), Df(x)(\partial))$ est de classe C^∞* de $D\Omega$ dans DF et de $T\Omega$ dans TF.

c) *Quel que soit $f \in C^\infty(\Omega; U)$ et $g \in C^\infty(U, G)$, on a*

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \circ Df(x), x \in \Omega,$$

(*règle de la chaîne*).

Considérons maintenant une variété différentielle M.

Soit $(\varphi_\alpha : \Omega_\alpha \longrightarrow \varphi_\alpha(\Omega_\alpha) \subset E_\alpha)$ l'atlas maximal de M. On définit sur l'ensemble

$$\bigcup_\alpha \left\{(x, \partial, \alpha) : x \in \Omega_\alpha, \partial \in D_{\varphi_\alpha(x)}E_\alpha\right\}$$

une relation d'équivalence $\sim$ de la façon suivante:

$$(x, \partial, \alpha) \sim (y, \partial', \beta) \Longleftrightarrow x = y \text{ et } D\varphi_{\beta\alpha}\left(\varphi_\alpha(x)\right)(\partial) = \partial'.$$

L'ensemble quotient suivant cette relation est appelé "fibré tangent opérationnel" de M et on le note DM.

L'application

$$\pi_M : \overline{(x, \partial, \alpha)} \in DM \longmapsto \pi_M \left(\overline{(x, \partial, \alpha)}\right) = x \in M$$

est la surjection canonique de DM dans M. Il est évident que, pour tout ouvert $\Omega \subset M$, $\pi_M^{-1}(\Omega) = D\Omega \subset DM$.

Pour α, on pose

$$D\varphi_\alpha(x)\,(\xi) = \partial, D\varphi_\alpha\,(\xi) = (\varphi_\alpha(x), D\varphi_\alpha(x)\,(\xi))\,, \xi = \overline{(x, \partial, \alpha)} \in D\Omega_\alpha.$$

La famille $(D\varphi_\alpha : D\Omega_\alpha \longrightarrow D(\varphi_\alpha(\Omega_\alpha)))$ définit un C^∞-atlas sur DM car pour tout (α, β), $D\varphi_\alpha$ est une bijection de $D\Omega_\alpha$ dans $D(\varphi_\alpha(\Omega_\alpha)) \subset DE_\alpha$ et $D\varphi_\beta \circ (D\varphi_\alpha)^{-1} = D\varphi_{\beta\alpha}$ est de classe C^∞ de $D\,(\varphi_\alpha(\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta))$ dans $D\left(\varphi_\beta(\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta)\right)$ selon la proposition 1.2.2.

La variété différentielle DM ainsi construite est séparée; de plus, $\pi_M \in C^\infty(DM; M)$.

Soit $x \in M$. l'ensemble $D_xM = \pi_M^{-1}\,(\{x\})$ est appelé "espace tangent opérationnel" de M au point x. Pour une carte locale (U, φ) de M telle que $x \in U$, la bijection $D\varphi(x) : D_xM \longrightarrow D_{\varphi(x)}E_U$ nous permet de munir D_xM d'une structure d'un espace convenable indépendante de la carte considérée.

En réalité, nous avons muni DM d'une structure d'un fibré vectoriel lisse sur la variété M.

De même, on construit le fibré tangent TM en considérant la restriction de la relation d'équivalence précédente sur le sous-ensemble $\bigcup_\alpha \Omega_\alpha \times E_\alpha \times \{\alpha\}$. L'ensemble quotient obtenu de cette façon est, par définition, le fibré tangent de M qu'on notera TM.

On signale que TM est un "sous-fibré" vectoriel de DM. Dans le cas où M est de dimension finie, on a $TM = DM$.

Pour $x \in M$, l'ensemble $T_xM = (\pi_M|_{TM})^{-1}\,(\{x\})$, qui est un sous-espace fermé de D_xM, s'appelle espace tangent de M en x.

Supposons que N est une autre variété différentielle et soit $f \in C^\infty(M; N)$. On définit l'application tangente opératinnelle de f au point $x \in M$ par la formule:

$$Df(x) = \{D\psi\,(f(x))\}^{-1} \circ D\left(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\right)(\varphi(x)) \circ D\varphi(x),$$

où (U, φ) et (V, ψ) sont deux cartes locales autour de x et $f(x)$ avec $f(U) \subset V$.

$Df(x)$ est linéaire et bornée de D_xM dans $D_{f(x)}N$ et de T_xM dans $T_{f(x)}N$. De plus, il n'est pas difficile de vérifier que l'application

$$Df : (x, \xi) \longmapsto (f(x), Df(x)(\xi))$$

est de classe C^∞ de DM dans DN et de TM dans TN.

Dans le cas important où $N = \mathbb{K}$, l'application

$$(x, \xi) \in DM \longmapsto df(x)(\xi) = Df(x)(\xi) \in \mathbb{K}$$

est appelée "différentielle" de f. Il découle du théorème 1.2.1 que l'application linéaire

$$f \in C^\infty(M; \mathbb{K}) \longmapsto df(\cdot)(\cdot) \in C^\infty(DM; \mathbb{K})$$

est bornée.

Généralement, si E est un espace convenable, on a

$$(f \longmapsto Df(\cdot)(\cdot)) \in L\left(C^\infty(M; E); C^\infty(TM; E)\right).$$

1.2.3. Champs des vecteurs

Soit M une variété différentielle.

On appelle champ de vecteurs sur M toute application $X : M \longrightarrow TM$ vérifiant $\pi_M \circ X = Id_M$.

De même, on appelle champ de vecteurs opérationnel sur M toute application $X : M \longrightarrow DM$ telle que $\pi_M \circ X = Id_M$.

L'espace des champs de vecteurs et l'espace des champs de vecteurs opérationnels sur M seront notés, respectivement, $\mathfrak{X}(M) = C^\infty(M \to TM)$ et $C^\infty(M \to DM)$. Ces deux espaces sont, en réalité, des modules sur l'algèbre $C^\infty(M; \mathbb{R})$ et la multiplication $(f, X) \mapsto fX$ est borné (de classe C^∞).

Si $(\varphi_\alpha : \Omega_\alpha \longrightarrow \varphi_\alpha(\Omega_\alpha) \subset E_\alpha)$ désigne l'atlas maximal de M, l'application linéaire

$$s \in C^\infty(M \to DM) \longmapsto (x \in \Omega_\alpha \longmapsto D\varphi_\alpha(x)(s(x)) \in \prod_\alpha C^\infty(\Omega_\alpha; E_\alpha)$$

est injective et fermée, ce qui nous donne une façon naturelle de munir $C^\infty(M \to DM)$ d'une structure d'un espace convenable. Selon cette démarche, $\mathfrak{X}(M)$ devient un sous-espace fermé de $C^\infty(M \to DM)$.

Proposition 1.2.3.

a) *Soit* Der $(C^\infty(\cdot, \mathbb{R}))$ *l'espace des familles des dérivations bornées* $\partial_\Omega : C^\infty(\Omega; \mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(\Omega; \mathbb{R})$ *telles que*

$$\begin{aligned} \forall \Omega, \forall U, \forall (f, g) &\in C^\infty(\Omega; \mathbb{R}) \times C^\infty(U; \mathbb{R}) : \\ f &= g \text{ sur } \Omega \cap U \Longrightarrow \partial_\Omega(f) = \partial_\Omega(g) \text{ sur } \Omega \cap U. \end{aligned}$$

$\mathrm{Der}(C^\infty(\cdot,\mathbb{R}))$ *est un sous-espace fermé de* $\prod_\Omega L\left(C^\infty(\Omega;\mathbb{R});C^\infty(\Omega;\mathbb{R})\right)$ *et l'application* $X \longmapsto \partial_X = (\partial_{X,\Omega})_\Omega$ *avec*

$$\partial_{X,\Omega}(f)(x) = Df(x)(X(x)), f \in C^\infty(\Omega;\mathbb{R}), x \in \Omega$$

est un isomorphisme des espaces convenables de $C^\infty(M \to DM)$ *dans* $Der(C^\infty(\cdot,\mathbb{R}))$.

b) *Si* M *est* C^∞*-réguliére, il existe un isomorphisme canonique des espaces convenables de* $C^\infty(M \to DM)$ *dans l'espace des dérivations bornées sur* $C^\infty(M;\mathbb{R})$.

Si X et Y sont deux champs de vecteurs opérationnels sur M, leur crochet de Lie est défini par la formule $[X,Y] = X \circ Y - Y \circ X$. Dans la proposition suivante nous citons les propriétés remarquables de ce crochet, qui sont facile à vérifier.

Proposition 1.2.4. *L'application*

$$[\cdot,\cdot] : C^\infty(M \to DM) \times C^\infty(M \to DM) \longrightarrow C^\infty(M \to DM)$$

est bilinéaire et vérifie:

a) $[X,Y] = -[Y,X]$.

b) $[X,[Y,Z]] = [[X,Y],Z] + [Y,[X,Z]]$ (*identité de Jacobi*).

c) $[fX,Y] = f[X,Y] - (Y(f))X$.

d) $[X,fY] = f[X,Y] + (X(f))Y$.

e) $X,Y \in \mathfrak{X}(M) \Longrightarrow [X,Y] \in \mathfrak{X}(M)$.

Suivant les terminologies adaptées en géométrie différentielle, nous disons que $(C^\infty(M \to DM),[\cdot,\cdot])$ est un "algèbre de Lie" et que $\mathfrak{X}(M)$ est un "sous-algèbre de Lie" de $(C^\infty(M \to DM),[\cdot,\cdot])$.

Si $F : M \longrightarrow N$ est un difféomorphisme locale de M dans N, on définit l'image inverse de $Y \in C^\infty(N \to DN)$ par F comme suit

$$F^*Y(x) = (DF(x))^{-1}(Y(F(x))), x \in M.$$

L'application F^* ainsi obtenue est linéaire de $C^\infty(N \to DN)$ dans $C^\infty(M \to DM)$ et de $C^\infty(N \to TN)$ dans $C^\infty(M \to TM)$. De plus, elle vérifie

$$F^*[X,Y] = [F^*X, F^*Y], X, Y \in C^\infty(N \to DN).$$

Nous disons dans ce cas que F^* est un homomorphisme d'algèbres de Lie.

Soit $X \in \mathfrak{X}(M)$. On appelle flot local de X toute application lisse

$$F_X : \Omega \subset \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$$

définit sur un C^∞-ouvert Ω contenant $\{0\} \times M$ telle que:

1) Pour tout $x \in M$, $\{t \in \mathbb{R} : (t,x) \in \Omega\}$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

2) Pour tout $(t,s,x) \in \mathbb{R} \times \Omega$, $(t+s,x)$ est dans Ω si, et seulement si, $(t, F_X(s,x))$ est dans Ω, et on a l'égalité

$$F_X(t+s,x) = F_X(t, F_X(s,x)).$$

3) $F_X(0,x) = x, \forall x \in M$.

4) Pour tout $(t,x) \in \Omega$, $\frac{d}{dt}\{F_X(t,x)\} = X(F_X(t,x))$, c'est-à-dire que

$$t \longmapsto F_X(t,x)$$

est une courbe intégrale de X.

Il est bien connu dans la géométrie différentielle que, si M est de dimension finie, tout champ de vecteurs admet un flot local.

Proposition 1.2.5. *Soit $X \in \mathfrak{X}(M)$ un champ de vecteurs ayant un flot local F_X. Alors toute courbe intégrable de X est de la forme $\gamma(t) = F_X(t, \gamma(0))$ (ce qui montre que X admet un flot maximal unique) et on a l'égalité*

$$X(F_X(t,x)) = D\{F_X(t,\cdot)\}(x)(X(x)).$$

Démonstration. Soit γ une courbe intégrale de X définie sur un intervalle J contenant 0. Comme la courbe $t \in J \longmapsto (-t, \gamma(t)) \in \mathbb{R} \times M$ est de classe C^∞, l'ensemble $\{t \in J : (-t, \gamma(t)) \in \Omega\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0. Soit I la composante connexe de $\{t \in J : (-t, \gamma(t)) \in \Omega\}$ telle que $0 \in I$.

Pour tout $t \in I$, on peut écrire les égalités

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left\{F_X(-t,\gamma(t))\right\} &= -\frac{d}{ds}\left\{F_X(s,\gamma(t))\right\}\Big|_{s=-t} + \frac{d}{ds}\left\{F_X(-t,\gamma(s))\right\}\Big|_{s=t} \\
&= -\frac{d}{ds}\left\{F_X(s-t,\gamma(t))\right\}\Big|_{s=0} + D\left\{F_X(-t,\cdot)\right\}(\gamma(t))\left(\gamma'(t)\right) \\
&= -\frac{d}{ds}\left\{F_X\left(-t,F_X(s,\gamma(t))\right)\right\}\Big|_{s=0} \\
&\quad +D\left\{F_X(-t,\cdot)\right\}(\gamma(t))\left(X(\gamma(t))\right) \\
&= -D\left\{F_X(-t,\cdot)\right\}(\gamma(t))\left(\frac{d}{ds}\left(F_X(s,\gamma(t))\right)\Big|_{s=0}\right) \\
&\quad +D\left\{F_X(-t,\cdot)\right\}(\gamma(t))\left(X(\gamma(t))\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ainsi donc, la courbe $t \in I \longmapsto F_X(-t,\gamma(t))$ est constante, ce qui nous permet de tire la première égalité:

$$\gamma(t) = F_X(0,\gamma(t)) = F_X\left(t,F_X(-t,\gamma(t))\right) = F_X\left(t,\gamma(0)\right), t \in I.$$

La deuxième égalité se tire directement comme suit:

$$\begin{aligned}
X\left(F_X(t,x)\right) &= \frac{d}{dt}\left\{F_X(t,x)\right\} = \frac{d}{ds}\left\{F_X(t+s,x)\right\}\Big|_{s=0} \\
&= \frac{d}{ds}\left\{F_X\left(t,F_X(s,x)\right)\right\}\Big|_{s=0} \\
&= D\left\{F_X(t,\cdot)\right\}(x)\left(\frac{d}{ds}\left\{F_X(s,x)\right\}\Big|_{s=0}\right) \\
&= D\left\{F_X(t,\cdot)\right\}(x)\left(X\left(x\right)\right).
\end{aligned}$$

1.2.4. Dérivée de Lie

Considérons un champ de vecteurs $X \in \mathfrak{X}(M)$ ayant un flot local F_X.

On définit la dérivée de Lie de la fonction $f \in C^\infty(M;\mathbb{R})$ suivant X par la formule $\mathcal{L}_X f = \frac{d}{dt}\big|_{t=0}\left(F_X(t,\cdot)^* f\right)$. Pour tout $(t,x) \in \Omega$, on écrit

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(f\left(F_X(t,x)\right)\right) &= Df\left(F_X(t,x)\right)\left(\frac{d}{dt}\left(F_X(t,x)\right)\right) \\
&= Df\left(F_X(t,x)\right)\left(X\left(F_X(t,x)\right)\right) = X(f)\left(F_X(t,x)\right).
\end{aligned}$$

Ainsi donc, $\frac{d}{dt}\left(F_X(t,\cdot)^* f\right) = F_X(t,\cdot)^* X(f)$ et $\mathcal{L}_X f = X(f)$.

De même, on définit la dérivée de Lie du champ de vecteurs opérationnel Y suivant X par $\mathcal{L}_X Y = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} (F_X(t,\cdot)^* Y)$.

On va montrer que $\mathcal{L}_X Y = [X,Y]$. Pour $(t,x) \in \Omega$ on pose $y = F_X(t,x)$. On a alors

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt}\left\{\left(F_X(t,\cdot)^* Y\right)(x)\right\} = \frac{d}{dt}\left\{D\left(F_X(-t,\cdot)\right)(y)\left(Y(y)\right)\right\} \\
= & \left.\frac{d}{d\xi}\right|_{\xi=0} \left\{D\left(F_X(-t,\cdot)\right)(y) \circ D\left(F_X(-\xi,\cdot)\right)\left(F_X(\xi,y)\right)\left(Y\left(F_X(\xi,y)\right)\right)\right\} \\
= & D\left(F_X(-t,\cdot)\right)(y)\left(\left.\frac{d}{d\xi}\right|_{\xi=0} \left\{D\left(F_X(-\xi,\cdot)\right)\left(F_X(\xi,y)\right)\left(Y\left(F_X(\xi,y)\right)\right)\right\}\right).
\end{aligned}$$

Pour déterminer le champ de vecteurs

$$Z = \left.\frac{d}{d\xi}\right|_{\xi=0} \left\{D\left(F_X(-\xi,\cdot)\right)\left(F_X(\xi,y)\right)\left(Y\left(F_X(\xi,y)\right)\right)\right\},$$

on procède comme suit: on choisit une fonction $f \in C^\infty(M;\mathbb{R})$, puis on écrit

$$\begin{aligned}
Z(f)(y) &= \left.\frac{d}{d\xi}\right|_{\xi=0} \left\{D\left(f \circ F_X(-\xi,\cdot)\right)\left(F(\xi,y)\right)\left(Y\left(F(\xi,y)\right)\right)\right\} \\
&= \left.\frac{d}{d\xi}\right|_{\xi=0} \left\{D\left(f \circ F_X(-\xi,\cdot)\right)(y)\left(Y(y)\right)\right\} \\
&\quad + \left.\frac{d}{d\eta}\right|_{\eta=0} \left\{Df\left(F(\eta,y)\right)\left(Y\left(F(\eta,y)\right)\right)\right\} \\
&= -D\left(X(f)\right)(y)\left(Y(y)\right) + \left.\frac{d}{d\eta}\right|_{\eta=0} \left\{Y(f)\left(F(\eta,y)\right)\right\} \\
&= -Y\left(X(f)\right)(y) + D\left(Y(f)\right)(y)\left(\left.\frac{d}{d\eta}\right|_{\eta=0} \left(F(\eta,y)\right)\right) \\
&= -Y\left(X(f)\right)(y) + D(Y(f))(y)\left(X(y)\right) \\
&= -Y\left(X(f)\right)(y) + X(Y(f))(y) = [X,Y](f)(y).
\end{aligned}$$

Donc $Z = [X,Y]$. Par suite, il vient

$$\frac{d}{dt}\left\{\left(F_X(t,\cdot)^* Y\right)(x)\right\} = D\left(F_X(-t,\cdot)\right)(y)\left([X,Y](y)\right) = \left(F_X(t,\cdot)^*[X,Y]\right)(x)$$

et

$$\mathcal{L}_X Y(x) = \left.\frac{d}{dt}\left\{\left(F_X(t,\cdot)^* Y\right)(x)\right\}\right|_{t=0} = [X,Y](x).$$

1.2.5. Variétés des applications lisses

Les variétés des applications lisses constituent les modèles pratiques des variétés de dimension infinie.

Nous allons donner quelques résultats concernant ce type des variétés. Pour les démonstrations éliminées ici, le lecteur est invité de consulter les références [10] et [13].

Nous donnons d'abord la définition suivante:

Soit M une variété différentielle. On dit que l'application

$$\epsilon : U \subset TM \longrightarrow M$$

est une addition locale sur M si:

i) *(π_M, ϵ) est un difféomorphisme de U dans un ouvert de la variété $M \times M$ contenant la diagonale $\Delta_M = \{(x, x) : x \in M\}$.*

ii) *Pour tout $x \in M$, $\epsilon(0_x) = x$.*

Rappelons que toute variété paracompacte de dimension finie admet une addition locale.

Théorème 1.2.6. *Soit M une variété de dimension finie et N une variété admettant une addition locale. Alors $C^\infty(M; N)$ est une variété différentielle modelée sur les espaces convenables $C_c^\infty(M \to f^*(TN))$ avec $f \in C^\infty(M; N)$.*

Théorème 1.2.7. *Soit M_1 et M_2 deux variétés de dimension finie et N_1 et N_2 deux variétés admettant des additions locales. Alors:*

i) *Si $\varphi : N_1 \longrightarrow N_2$ est initiale, l'application*

$$f \in C^\infty(M_1; N_1) \longmapsto \varphi \circ f \in C^\infty(M_1; N_2)$$

est aussi initiale.

ii) *Si $\varphi : M_1 \longrightarrow M_2$ est finale et propre, l'application*

$$f \in C^\infty(M_2; N_1) \longmapsto f \circ \varphi \in C^\infty(M_1; N_1)$$

est initiale.

Rappelons qu'une application $\varphi : M \longrightarrow N$ est dite initiale si

$$\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}; M) \Longleftrightarrow \varphi \circ \gamma \in C^\infty(\mathbb{R}; N),$$

et elle est dite finale si pour toute variété P, on a:

$$f \in C^\infty(N; P) \Longleftrightarrow f \circ \varphi \in C^\infty(M; P).$$

Théorème 1.2.8. *Soit M une variété de dimension finie. Alors:*

i) *Pour toute variété N admettant une addition locale, l'application*

$$(f, x) \in C^\infty(M; N) \times M \longmapsto f(x) \in N$$

est de classe C^∞.

ii) *Pour toutes deux variété P et Q avec P est de dimension finie, l'ensemble $C^\infty_{\text{prop}}(P; M)$ des applications propres est un ouvert de $C^\infty(P; M)$ et l'applications*

$$(f, g) \in C^\infty(M; Q) \times C^\infty_{\text{prop}}(P; M) \longmapsto f \circ g \in C^\infty(P; Q)$$

est de classe C^∞.

Théorème 1.2.9. *Soient P, M et N troix variétés différentielles avec M est de dimension finie et N admet une addition locale. Alors pour toute $f^\vee \in C^\infty(P; C^\infty(M; N))$, la fonction*

$$f : (x, y) \in P \times M \longmapsto f(x, y) = f^\vee(x)(y) \in N$$

est de classe C^∞.

Supposons que $C^\infty(N; \mathbb{R})$ sépare les points de N et que l'une des conditions suivantes soit vraie:

i) *M est compacte.*

ii) *N est discrète.*

iii) *Pour toute $f \in C^\infty(P; \mathbb{R})$ et toute $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}; P)$, la courbe $f \circ \gamma$ est constante.*

Alors pour toute $f \in C^\infty(P \times M; N)$, l'application $f^\vee$ définie par

$$f^\vee(x)(y) = f(x, y), (x, y) \in P \times M$$

est de classe C^∞ de P dans $C^\infty(M; N)$.

CHAPITRE II:

Groupes de Lie de dimension infinie, Groupe des difféomorphismes à décroissance rapide

Dans ce chapitre, nous donnons les propriétés de base de la théorie des groupes de Lie de dimension infinie, et nous développons quelques propriétés des groupes de Lie réguliers. L'exemple significatif pour notre travail est le groupe régulier des difféomophismes à décroissance rapide sur $\mathbb{R}$.

Ce chapitre se base essentiellement sur [1], [3], [10], et [13].

2.1. Groupes de Lie de dimension infinie

2.1.1. Définition

Un groupe de Lie est, par définition, une variété différentielle G munie d'une structure d'un groupe telle que les applications $\mu : (x, y) \in G \times G \longmapsto xy \in G$ et $\nu : x \in G \longmapsto x^{-1} \in G$ soient de classe C^∞.

Nous utiliserons dans la suite les notations:

${}_a\mu : x \in G \longmapsto ax \in G$, translation gauche.

$\mu_a : x \in G \longmapsto xa \in G$, translation droite.

Proposition 2.1.1. *Soit G un groupe de Lie. Alors*

$$D\mu(a,b)\,(X,Y) = D\mu_b(a)\,(X) + D\,({}_a\mu)\,(b)\,(Y)\,,\ \ X \in T_aG, Y \in T_bG$$

et

$$D\nu(a) = -D\,(\mu_{a^{-1}})\,(e) \circ D\,({}_{a^{-1}}\mu)\,(a) = -D\,({}_{a^{-1}}\mu)\,(e) \circ D\,(\mu_{a^{-1}})\,(a),$$

où e désigne l'élément neutre de G.

Démonstration. On a

$$\mu_b(x) = \mu(x,b),\ {}_a\,\mu(x) = \mu(a,x), x \in G,$$

Donc

$$D(\mu_b)(a)(X) = D\mu(a,b)(X, 0_b), X \in T_aG$$

et

$$D({}_a\mu)(b)(Y) = D\mu(a,b)(0_a, Y), Y \in T_bG.$$

D'où la première égalité:

$$D\mu(a,b)(X,Y) = D(\mu_b)(a)(X) + D({}_a\mu)(b)(Y), X \in T_aG, Y \in T_bG.$$

D'autre part, comme

$$\mu(x,\nu(x)) = \mu(\nu(x),x) = e, \forall x \in G,$$

on a pour $X \in T_aG$

$$\begin{aligned} 0_e &= D\mu(a,\nu(a))(X, D\nu(a)(X)) \\ &= D(\mu_{a^{-1}})(a)(X) + D({}_a\mu)(a^{-1})(D\nu(a)(X)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} 0_e &= D\mu(\nu(a),a)(D\nu(a)(X), X) \\ &= D(\mu_a)(a^{-1})(D\nu(a)(X)) + D({}_{a^{-1}}\mu)(a)(X), \end{aligned}$$

D'où il vient

$$\begin{aligned} D\nu(a)(X) &= -\left[D({}_a\mu)(a^{-1})\right]^{-1}(D(\mu_{a^{-1}})(a)(X)) \\ &= -\left[D(\mu_a)(a^{-1})\right]^{-1}(D({}_{a^{-1}}\mu)(a)(X)) \\ &= -D({}_{a^{-1}}\mu)(e) \circ D(\mu_{a^{-1}})(a)(X) \\ &= -D(\mu_{a^{-1}})(e) \circ D({}_{a^{-1}}\mu)(a)(X). \end{aligned}$$

2.1.2. Algèbre de Lie

Soit G un groupe de Lie. L'espace des champs des vecteurs invariants à gauche

$$\mathfrak{X}_L(G) = \{X \in \mathfrak{X}(G) : ({}_a\mu)^* X = X, \forall a \in G\}$$

est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{X}(G)$, puisque

$$({}_a\mu)^*[X,Y] = [({}_a\mu)^* X, ({}_a\mu)^* Y] = [X,Y], \forall a \in G$$

pour tout $(X,Y) \in \mathfrak{X}_L(G) \times \mathfrak{X}_L(G)$.

Tout champ de vecteurs $X \in \mathfrak{X}_L(G)$ est écrit sous la forme

$$X(x) = D({}_x\mu)(e)(X(e)), x \in G,$$

et l'application $L : \xi \in T_eG \longmapsto L(\xi) \in \mathfrak{X}_L(G)$ avec

$$L(\xi)(x) = D({}_x\mu)(e)(\xi), x \in G$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels de T_eG dans $\mathfrak{X}_L(G)$. Donc nous pouvons définir sur T_eG un crochet de Lie, noté aussi $[\cdot,\cdot]$, tel que l'isomorphisme précédent devient un isomorphisme d'algèbres de Lie. Donc

$$[\xi,\eta] = [L(\xi), L(\eta)]\,(e), \xi,\eta \in T_eG.$$

L'algèbre de Lie ainsi construite est nommée algèbre de Lie du groupe G et sera notée $\mathfrak{g}$.

De même, l'espace des champs des vecteurs invariants à droite

$$\mathfrak{X}_R(G) = \{X \in \mathfrak{X}(G) : (\mu_a)^* X = X, \forall a \in G\}$$

est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{X}(G)$ et l'application $R : \xi \in T_eG \longmapsto R(\xi) \in \mathfrak{X}_R(G)$ avec

$$R(\xi)(x) = D\,(\mu_x)\,(e)\,(\xi)\,, x \in G$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels de T_eG dans $\mathfrak{X}_R(G)$. Ainsi, nous pouvons donc munir T_eG d'une deuxième structure d'algèbre de Lie. La relation entre la structure de $\mathfrak{g}$ et cette structure est déterminée par l'application $-Id_{T_eG} : T_eG \longrightarrow T_eG$, qui est un isomorphisme d'algèbres de Lie entre ces deux structures.

Proposition 2.1.2. *Soit $\varphi : G \longrightarrow H$ un homomorphisme de classe C^∞. Alors $D\varphi(e)$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie de $\mathfrak{g} = T_eG$ dans $\mathfrak{h} = T_eH$.*

Démonstration. Soit $(\xi,\eta) \in \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$. On a pour tout $x \in G$,

$$\begin{aligned} D\varphi(x)\,(L(\xi)(x)) &= D\varphi(x)\,(D\,({}_x\mu)\,(e)\,(\xi)) = D\,(\varphi \circ {}_x\,\mu)\,(e)\,(\xi) \\ &= D\left({}_{\varphi(x)}\mu \circ \varphi\right)(e)\,(\xi) = D\left({}_{\varphi(x)}\mu\right)(e)\,(D\varphi(e)\,(\xi)) \\ &= L\,(D\varphi(e)\,(\xi))\,(\varphi(x))\,. \end{aligned}$$

Donc,

$$D\varphi(x)\,([L(\xi), L(\eta)]\,(x)) = [L\,(D\varphi(e)\,(\xi))\,, L\,(D\varphi(e)\,(\eta))]\,(\varphi(x))\,.$$

Par suite, si on prend $x = e$, on obtient le résultat désiré:

$$D\varphi(e)\,([\xi,\eta]) = [D\varphi(e)\,(\xi)\,, D\varphi(e)\,(\eta)]\,.$$

2.1.3. Sous-groupes paramétriques

Soit G un groupe de Lie. On appelle sous-groupe paramétrique de G tout homomorphisme $\gamma : (\mathbb{R},+) \longrightarrow G$ de classe C^∞, c'est-à-dire toute courbe lisse $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}; G)$ vérifiant:

$$\gamma(t+s) = \gamma(t)\gamma(s), t,s \in \mathbb{R}.$$

Lemme 2.1.3. *Soit γ_1 et γ_2 deux courbes lisses de G et $\xi \in \mathfrak{g}$ telles que*

$$\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = e, \gamma_1'(t) = L(\xi)(\gamma_1(t)), \gamma_2'(t) = R(\xi)(\gamma_2(t)), t \in \mathbb{R}.$$

Alors $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2$ et γ est un sous-groupe paramétrique de G.

Démonstration. On a $\gamma_1(t)\gamma_2(-t) = e$ quel que soit $t \in \mathbb{R}$ puisque

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\gamma_1(t)\gamma_2(-t)\right) &= D\mu_{\gamma_2(-t)}\left(\gamma_1(t)\right)\left(\gamma_1'(t)\right) - D\left({}_{\gamma_1(t)}\mu\right)\left(\gamma_2(-t)\right)\left(\gamma_2'(-t)\right) \\
&= D\mu_{\gamma_2(-t)}\left(\gamma_1(t)\right)\left(L(\xi)\left(\gamma_1(t)\right)\right) \\
&\quad -D\left({}_{\gamma_1(t)}\mu\right)\left(\gamma_2(-t)\right)\left(R(\xi)\left(\gamma_2(-t)\right)\right) \\
&= D\mu_{\gamma_2(-t)}\left(\gamma_1(t)\right)\left(D\left({}_{\gamma_1(t)}\mu\right)(e)(\xi)\right) \\
&\quad -D\left({}_{\gamma_1(t)}\mu\right)\left(\gamma_2(-t)\right)\left(D\mu_{\gamma_2(-t)}(e)(\xi)\right) \\
&= D\left(\mu_{\gamma_2(-t)} \circ \left({}_{\gamma_1(t)}\mu\right)\right)(e)(\xi) \\
&\quad -D\left({}_{\gamma_1(t)}\mu \circ \mu_{\gamma_2(-t)}\right)(e)(\xi) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Soit $s \in \mathbb{R}$. Posons $\gamma(t) = \left(\gamma_1(s)\right)^{-1}\gamma_1(t+s)$. On a

$$\begin{aligned}
\gamma'(t) &= D\left({}_{(\gamma_1(s))^{-1}}\mu\right)(\gamma_1(t+s))(\gamma_1'(t+s)) \\
&= D\left({}_{(\gamma_1(s))^{-1}}\mu\right)(\gamma_1(t+s))\left(D\left({}_{\gamma_1(t+s)}\mu\right)(e)(\xi)\right) \\
&= D\left({}_{\gamma(t)}\mu\right)(e)(\xi) = L(\xi)(\gamma(t)).
\end{aligned}$$

Puisque $\gamma(0) = e$, il découle du résultat précédent que

$$\gamma_1(t)\gamma_2(-t) = e = \gamma(t)\gamma_2(-t) = \left(\gamma_1(s)\right)^{-1}\gamma_1(t+s)\gamma_2(-t), t \in \mathbb{R}.$$

D'où $\gamma_1(t+s) = \gamma_1(s)\gamma_1(t)$ et $\gamma_1(t) = \gamma_2(t)$.

La démonstration est ainsi terminée.

Proposition 2.1.4. *Soit $\xi \in \mathfrak{g}$ et $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}; G)$ avec $\gamma(0) = e$. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

(1) *γ est un sous-groupe paramétrique de G avec $\gamma'(0) = \xi$.*

(2) *$(t, x) \in \mathbb{R} \times G \longmapsto x\gamma(t) \in G$ est le flot global (unique) de $L(\xi)$.*

(3) *$(t, x) \in \mathbb{R} \times G \longmapsto \gamma(t)x \in G$ est le flot global (unique) de $R(\xi)$.*

(4) *γ est une courbe intégrale pour chacun des champs des vecteurs $L(\xi)$ et $R(\xi)$.*

De plus, il existe une courbe unique passant par le point e et vérifiant l'une des conditions précédentes.

Démonstration.

(1) $\Longrightarrow$ (2) Il suffit de prouver que $\frac{d}{dt}(x\gamma(t)) = L(\xi)(x\gamma(t))$ quel que soit $(t,x) \in \mathbb{R} \times G$.

En effet, on a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(x\gamma(t)) &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}(x\gamma(t+s)) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}(x\gamma(t)\gamma(s)) \\ &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\left({}_{x\gamma(t)}\mu\gamma(s)\right) = D\left({}_{x\gamma(t)}\mu\right)(e)(\xi) = L(\xi)(x\gamma(t)).\end{aligned}$$

(2) $\Longrightarrow$ (3) On utilise l'affirmation suivante: Etant donné un champ de vecteurs X sur G. $F_{\nu^*X}(t,x)$ existe si, et seulement si, $F_X(t,x^{-1})$ existe, et on a $F_{\nu^*X}(t,x) = (F_X(t,x^{-1}))^{-1}$.

Pour $X = R(\xi)$, on a:

$$\begin{aligned}(\nu^*R(\xi))(x) &= D\nu\left(x^{-1}\right)\left(R(\xi)(x^{-1})\right) = D\nu\left(x^{-1}\right)\left(D\mu_{x^{-1}}(e)(\xi)\right) \\ &= D(\nu\circ\mu_{x^{-1}})(e)(\xi) = D({}_x\mu\circ\nu)(e)(\xi) \\ &= D({}_x\mu)(e)\circ D(\nu)(e)(\xi) = -D({}_x\mu)(e)(\xi) = -L(\xi)(x).\end{aligned}$$

Donc,

$$\left(F_{R(\xi)}(t,x^{-1})\right)^{-1} = F_{-L(\xi)}(t,x) = F_{L(\xi)}(-t,x) = x\gamma(-t) = x(\gamma(t))^{-1}.$$

Par suite $F_{R(\xi)}(t,x) = \gamma(t)x$.

De la même façon on prouve l'implication (3) $\Longrightarrow$ (2).

(2) et (3) impliquent évidement (4).

L'implication (4) $\Longrightarrow$ (1) et l'unicité sont des conséquences directes du lemme 2.1.3.

2.1.4. Application exponentielle

On dit que le groupe de Lie G admet une application exponentielle s'il existe une application lisse $\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$ telle que, pour tout $\xi \in \mathfrak{g}$, l'application

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto \exp(t\xi)$$

soit un sous-groupe paramétrique de G vérifiant $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(\exp(t\xi)) = \xi$. D'après la proposition 2.1.4, ce sous-groupe paramétrique est unique s'il existe.

De la proposition 2.1.4, il vient immédiatement que

$$F_{L(\xi)}(t,x) = x\exp(t\xi), F_{R(\xi)}(t,x) = \exp(t\xi)x, (t,x,\xi) \in \mathbb{R}\times G\times\mathfrak{g}.$$

$\exp(0) = e$ et $D(\exp)(0) = Id$ puisque pour tout $\xi \in \mathfrak{g}$,

$$D(\exp)(0)(\xi) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\exp(t\xi)) = \xi.$$

Soit H un autre groupe de Lie admettant une application exponentielle et soit $\varphi : G \longrightarrow H$ un homomorphisme. Pour tout $\xi \in \mathfrak{g}$, La courbe

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto \varphi(\exp_G(t\xi)) \in H$$

est un sous-groupe paramétrique de H et on a $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\varphi(\exp_G(t\xi))) = D\varphi(e)(\xi)$. Ainsi donc, $\varphi(\exp_G(t\xi)) = \exp_H(tD\varphi(e)(\xi))$ quel que soit $t \in \mathbb{R}$. En particulier, $\varphi \circ \exp_G = \exp_H \circ (D\varphi(e))$.

2.1.5. Représentations adjointes

Soit G un groupe de Lie. La représentation adjointe Ad de G dans $GL(\mathfrak{g}) \subset L(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ est donnée par $Ad(x) = D({}_x\mu \circ \mu_{x^{-1}})(e)$.

L'application tangente $ad = D(Ad)(e) : \mathfrak{g} \longrightarrow L(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ s'appelle représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ dans $L(\mathfrak{g}; \mathfrak{g})$. Remarquons que cette définition a un sens puisque $Ad \in C^\infty(G; L(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}))$.

Les formes différentielles

$$\kappa_r(x) = D(\mu_{x^{-1}})(x) : T_xG \longrightarrow \mathfrak{g}$$

et

$$\kappa_l(x) = D({}_{x^{-1}}\mu)(x) : T_xG \longrightarrow \mathfrak{g}$$

sont appelées respectivement "forme droite" et "forme gauche" de Maurer-Cartan.

Les deux résultats suivants sont classiques (voir [13]).

Proposition 2.1.5. *Soit G un groupe de Lie ayant une application exponentielle* $\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$. *Alors pour tout* $(X, Y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$, *on a*

$$\begin{aligned} D(\exp)(X)(Y) &= D(\mu_{\exp X})(e) \left(\int_0^1 Ad(\exp(\tau X))(Y) d\tau \right) \\ &= D({}_{(\exp X)}\mu)(e) \left(\int_0^1 Ad(\exp(-\tau X))(Y) d\tau \right). \end{aligned}$$

Proposition 2.1.6. *On a:*

1) $L(\xi)(x) = R\left(Ad(x)(\xi)\right)(x), (\xi, x) \in g \times G.$

2) $ad(\xi)(\eta) = [\xi, \eta], \xi \in g, \eta \in g.$

3) *Pour tout* $x \in G$ *et tout* $(\xi, \eta) \in T_x G \times g$,

$$\begin{aligned} D(Ad)(x)(\xi)(\eta) &= ad \circ (\kappa_r(x))(\xi)(Ad(x)(\eta)) \\ &= Ad(x)\left((ad \circ \kappa_l(x)(\xi))(\eta)\right). \end{aligned}$$

2.1.6. Dérivées logarithmiques

Soit M une variété différentielle et G un groupe de Lie. Pour $f \in C^\infty(M; G)$, on définit les formes différentielles $\delta_r f$ et $\delta_l f$, qui sont appelées respectivement dérivées logarithmiques droite et gauche de f, par

$$\begin{aligned} (\delta_r f)(x)(\xi) &= D\left(\mu_{f(x)^{-1}}\right)(f(x))(Df(x)(\xi)), \\ (\delta_l f)(x)(\xi) &= D\left({}_{f(x)^{-1}}\mu\right)(f(x))(Df(x)(\xi)) \end{aligned}$$

où $(x, \xi) \in TM$.

Proposition 2.1.7. *Pour toutes fonctions* $f \in C^\infty(M; G)$ *et* $g \in C^\infty(M; G)$, *on a les formules de Leibniz*

$$\begin{aligned} \delta_r(fg)(x) &= \delta_r f(x) + Ad(f(x)) \circ \delta_r g(x), \\ \delta_l(fg)(x) &= \delta_l g(x) + Ad\left(g(x)^{-1}\right) \circ \delta_l f(x), x \in M. \end{aligned}$$

De plus, $\delta_r f$ *et* $\delta_l f$ *vérifient les équations gauche et droite de Maurer-Cartan:*

$$\begin{aligned} d(\delta_r f)(x)(\xi, \eta) - [\delta_r f(x)(\xi), \delta_r f(x)(\eta)] &= 0, \\ d(\delta_l f)(x)(\xi, \eta) + [\delta_l f(x)(\xi), \delta_l f(x)(\eta)] &= 0 \end{aligned}$$

où $(x, \xi, \eta) \in M \times T_x M \times T_x M$.

2.1.7. Groupes de Lie réguliers

Soit G un groupe de Lie. Pour $X \in C^\infty(I; \mathfrak{g})$ (I étant un intervalle fermé de $\mathbb{R}$), nous considérons le problème

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\gamma}{dt}(t) = D(\mu_{\gamma(t)})(e)(X(t)) = R(X(t))(\gamma(t)), \\ \gamma(t_0) = e \end{cases}$$

où $t_0 \in I$.

Proposition 2.1.8.

(a) *Pour $X \in C^\infty(I;\mathfrak{g})$ fixé, le problème* (1) *admet au plus une solution locale au voisinage de chaque $t_0 \in I$.*

(b) *Pour $X \in C^\infty(I;\mathfrak{g})$ fixé, si* (1) *admet une solution locale au voisinage de chaque t_0, elle admet aussi une solution globale* (*unique*) *pour chaque t_0.*

(c) *Pour $t_0 \in I$ fixé, si* (1) *a une solution locale au voisinage de t_0 pour tout $X \in C^\infty(I;\mathfrak{g})$, elle a aussi une solution globale* (*unique*) *pour tout $X \in C^\infty(I;\mathfrak{g})$. De plus, si l'application "$X \longmapsto$ solution locale" est lisse, l'application "$X \longmapsto$ solution globale" est aussi lisse.*

(d) *Si γ est une solution locale de* (1) *au voisinage de $t_0 \in I$, la courbe $t \longmapsto \delta(t) = \gamma(t)^{-1}$ est une solution locale du problème*

$$\begin{cases} \dfrac{d\delta}{dt}(t) = D({}_{\delta(t)}\mu)(e)\,(-X(t)) = L\,(-X(t))\,(\delta(t))\,, \\ \delta(t_0) = e. \end{cases}$$

Démonstration. Démonstration de (a). Soient $\gamma_1 : I_1 \subset I \longrightarrow G$ et $\gamma_2 : I_2 \subset I \longrightarrow G$ deux solutions de (1). Pour tout $t \in I_1 \cap I_2$, on écrit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\gamma_1(t)^{-1}\gamma_2(t)\right) &= D\left({}_{\gamma_1(t)^{-1}}\mu\right)(\gamma_2(t))\left(\frac{d\gamma_2}{dt}(t)\right) \\ &\quad + D\left(\mu_{\gamma_2(t)}\right)\left(\gamma_1(t)^{-1}\right)\left(\frac{d}{dt}\left(\gamma_1(t)^{-1}\right)\right) \\ &= D\left({}_{\gamma_1(t)^{-1}}\mu \circ \mu_{\gamma_2(t)}\right)(e)\,(X(t)) \\ &\quad + D\left(\mu_{\gamma_2(t)}\right)\left(\gamma_1(t)^{-1}\right) \circ D\nu\,(\gamma_1(t)) \circ D\left(\mu_{\gamma_1(t)}\right)(e)\,(X(t))\,. \end{aligned}$$

D'où, en utilisant la proposition 2.1.1, il vient:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\gamma_1(t)^{-1}\gamma_2(t)\right) &= D\left({}_{\gamma_1(t)^{-1}}\mu \circ \mu_{\gamma_2(t)}\right)(e)\,(X(t)) \\ &\quad - D\left(\mu_{\gamma_2(t)}\right)\left(\gamma_1(t)^{-1}\right) \circ D\left({}_{\gamma_1(t)^{-1}}\mu\right)(e) \\ &\quad \circ D\left(\mu_{\gamma_1(t)^{-1}}\right)(\gamma_1(t)) \circ D\left(\mu_{\gamma_1(t)}\right)(e)\,(X(t)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

ce qui prouve que $\gamma_1|_{I_1\cap I_2} = \gamma_2|_{I_1\cap I_2}$.

Démonstration de (b). Il suffit de prouver l'affirmation pour I compact. Remarquons que, d'après l'hypothèse, si $\gamma : I' \subset I \longrightarrow G$ est une solution

locale de (1), la courbe $t \in I' \longmapsto \gamma(t)x \in G$ est une solution locale du problème

$$\begin{cases} \dfrac{d\gamma}{dt}(t) = D(\mu_{\gamma(t)})(e)\,(X(t)) = R\,(X(t))\,(\gamma(t))\,, \\ \gamma(t_0) = x. \end{cases}$$

Comme I est compact, on peut trouver des nombres $s_0 < s_1 < \cdots < s_k$ tels que $I = [s_0, s_k]$ et $s_{j+1} \in I_j$ pour $0 \leq j < k$, où I_j désigne l'intervalle de définition de la solution locale $\gamma_j : I_j \longrightarrow G$ du problème (1) avec $t_0 = s_j$. La courbe $\gamma : I \longrightarrow G$ définie dans $[s_j, s_{j+1}]$ $(0 \leq j < k)$ par la relation

$$\gamma(t) = \gamma_j(t) \prod_{\ell=0}^{j-1} \gamma_{j-1-\ell}(s_{j-\ell}), s_j \leq t \leq s_{j+1}$$

est une solution globale de l'équation de (1).

Démonstration de (c). Soit $X \in C^\infty(I; \mathfrak{g})$. On prolonge d'abord X à une courbe lisse définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. Pour $t_1 \in I$, soit γ une solution locale du problème (1) où X est remplacé par $t \longmapsto X(t_1 - t_0 + t)$. Il est facile de voir que la courbe $t \longmapsto \gamma(t_0 - t_1 + t)$ est une solution locale de (1) avec $t_0 = t_1$. D'où, selon (b), le problème (1) a une solution globale.

Pour $X \in C^\infty(\mathbb{R}; C^\infty(I; \mathfrak{g}))$, on définit l'application $\gamma_X : \mathbb{R} \times I \longrightarrow G$ comme suit

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \gamma_X}{\partial t}(k,t) = D(\mu_{\gamma_X(k,t)})(e)\,(X(k)(t)) = R\,(X(k)(t))\,(\gamma_X(k,t))\,, \\ \gamma_X(k, t_0) = e. \end{cases}$$

D'après l'hypothèse, il existe pour tout compact $K \subset \mathbb{R}$, un voisinage $U_{X,K}$ de t_0 dans I tel que $\gamma_X \in C^\infty\,(K \times U_{X,K}, G)$. D'ici on procède exactement comme dans (c) pour prouver que $\gamma_X \in C^\infty\,(K \times I, G)$.

Démonstration de (d). On a

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{dt}(t) &= D\nu\,(\gamma(t))\left(\frac{d\gamma}{dt}(t)\right) \\ &= -D({}_{\delta(t)}\mu)(e) \circ D(\mu_{\gamma(t)^{-1}})(\gamma(t)) \circ D(\mu_{\gamma(t)})(e)\,(X(t)) \\ &= D({}_{\delta(t)}\mu)(e)\,(-X(t)) = L\,(-X(t))\,(\delta(t))\,. \end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration.

Définition. *Le groupe G est dit régulier s'il existe une application lisse*

$$\mathrm{evol}_r : C^\infty(\mathbb{R}; \mathfrak{g}) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}; G)$$

telle que

$$\delta_r \circ (\mathrm{evol}_r)(X) = X,\ \mathrm{evol}_r(X)(0) = e, \forall X \in C^\infty(\mathbb{R};\mathfrak{g}),$$

où δ_r est la dérivée logarithmique droite.

On vérifie facilement que s'il existe une application lisse

$$\mathrm{evol} : C^\infty(\mathbb{R};\mathfrak{g}) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R};G)$$

telle que

$$\delta_r \circ (\mathrm{evol})(X) = X,\ X \in C^\infty(\mathbb{R};\mathfrak{g}),$$

alors G est régulier.

D'après la proposition précédente 2.1.8, evol_r est une bijection de $C^\infty(\mathbb{R};\mathfrak{g})$ dans $\{\gamma \in C^\infty(\mathbb{R};G) : \gamma(0) = e\}$.

Si G est régulier, la proposition 2.1.8 montre encore que, quelle que soit $X \in C^\infty(\mathbb{R};\mathfrak{g})$, le problème

$$\begin{cases} \dfrac{d\gamma}{dt}(t) = L(X(t))(\gamma(t)), \\ \gamma(0) = e \end{cases}$$

a une solution unique globale $\mathrm{evol}_l(X)$ et que l'application

$$X \in C^\infty(\mathbb{R};\mathfrak{g}) \longmapsto \mathrm{evol}_l(X) \in C^\infty(\mathbb{R};G)$$

est lisse.

La proposition suivante est facile à vérifier.

Proposition 2.1.9. *Soit G un groupe régulier, alors:*

1) *G admet une application exponentielle donnée par la formule*

$$\exp(\xi) = \mathrm{evol}_r(\xi)(1), \xi \in \mathfrak{g}.$$

2) *Pour toute $(X, f) \in C^\infty(\mathbb{R};\mathfrak{g}) \times C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$,*

$$\mathrm{evol}_r(X) \circ f(t) = \mathrm{evol}_r(f'X \circ f)(t)\mathrm{evol}_r(X)(f(0)), t \in \mathbb{R}$$

et

$$\mathrm{evol}_l(X) \circ f(t) = \mathrm{evol}_l(X)(f(0))\,\mathrm{evol}_l(f'X \circ f)(t), t \in \mathbb{R}.$$

3) *Pour tout homomorphisme φ de G dans un autre groupe régulier H, on a*

$$\mathrm{evol}_r\left(D\varphi(e)\circ X\right)=\varphi\circ\mathrm{evol}_r(X),\mathrm{evol}_l\left(D\varphi(e)\circ X\right)=\varphi\circ\mathrm{evol}_l(X).$$

En utilisant la dernière propriété, on montre qu'un groupe commutatif G est régulier si, et seulement si, il possède une application exponentielle exp, et on a dans ce cas la formule

$$\mathrm{evol}(X)\left(t\right)=\mathrm{evol}_r(X)\left(t\right)=\mathrm{evol}_l(X)\left(t\right)=\exp\left(\int_0^t X(s)ds\right),\ t\in\mathbb{R}.$$

On finit ce paragraphe par l'affirmation importante suivante: **Tous les groupes de Lie connus sont réguliers.**

2.2. Groupe des difféomorphismes à décroissance rapide

Nous donnons d'abord le théorème fondamental suivant (pour la démonstration voir par exemple [10]):

Théorème 2.2.1. *Soit M une variété différentielle de dimension finie. Le groupe des difféomorphismes lisses* $\mathrm{Diff}(M)$ *est une sous-variété ouverte de $C^\infty(M;M)$, de plus, il est un groupe de Lie régulier. L'algèbre de Lie de* $\mathrm{Diff}(M)$ *est $\mathfrak{X}_c(M)$ muni du crochet $-[\cdot,\cdot]$.*

On note $\mathit{Diff}_{\mathcal{S}}(\mathbb{R})$ l'ensemble des difféomorphismes $Id+\varphi\in\mathit{Diff}(\mathbb{R})$ où $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Ici $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ désigne l'espace de Schwartz muni de sa topologie naturelle, qui est un espace de Fréchet nucléaire (voir [18]) et réflexif.

Pour montrer que $\mathit{Diff}_{\mathcal{S}}(\mathbb{R})$ est un groupe de Lie régulier, nous avons besoin des lemmes suivants.

Lemme 2.2.2. Pour toute $(f,g)\in C^\infty(\mathbb{R}^q;\mathbb{C})\times C^\infty(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^q)$ et tout $\gamma\in\mathbb{N}^p$,

$$\begin{aligned}&\partial^\gamma\left(f\circ g\right)\\ =&\sum_{\beta\in\mathbb{N}^q}\partial^\beta f\circ g\\ &\times\sum_{\substack{\lambda=(\lambda_{k\alpha})\in\mathbb{N}^{\{1,\dots,q\}\times(\mathbb{N}^p-0)}\\ \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^p-0}\lambda_{k\alpha}=\beta_k\\ \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^p-0,1\le k\le q}\lambda_{k\alpha}\alpha=\gamma}}\frac{\gamma!}{\lambda!}\prod_{\alpha\in(\mathbb{N}-0)^p}\left(\frac{1}{\alpha!}\right)^{\sum_{1\le k\le q}\lambda_{k\alpha}}\prod_{\substack{1\le k\le q\\ \alpha\in(\mathbb{N}-0)^p}}\left(\partial^\alpha g_k\right)^{\lambda_{k\alpha}}\end{aligned}$$

Lemme 2.2.3. *L'espace $C^\infty(\mathbb{R};\mathcal{S}(\mathbb{R}))$ des courbes lisses de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est constitué des fonctions $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ telles que*

$$(*) \qquad \left(1+|x|^2\right)^{k/2} |\partial_t^n \partial_x^m f(t,x)| \leq \mathrm{const}_{k,n,m,K}, t \in K, x \in \mathbb{R}$$

où $(k,n,m) \in \mathbb{N}^3$ et K est un compact de $\mathbb{R}$.

Démonstration. Notons E l'espace des fonctions $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ vérifiant la condition $(*)$.

On a évidement $C^\infty(\mathbb{R};\mathcal{S}(\mathbb{R})) \subset E$.

Montrons l'inclusion $E \subset C^\infty(\mathbb{R};\mathcal{S}(\mathbb{R}))$. Si $f \in E$, nous posons

$$\gamma(t) = \gamma_0(t) = f(t,\cdot), \gamma_k(t) = \partial_t^k f(t,\cdot), t \in \mathbb{R}.$$

Il est clair que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $ev_x \circ \gamma \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $(ev_x \circ \gamma)^{(k)} = ev_x \circ \gamma_k$, et γ_k est localement bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Ainsi donc, d'après le théorème 1.1.29, $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R};\mathcal{S}(\mathbb{R}))$.

Théorème 2.2.4. $\mathrm{Diff}_{\mathcal{S}}(\mathbb{R})$ *est un groupe de Lie régulier qui s'appelle "groupe des difféomophismes à décroissance rapide à l'identité".*

Démonstration. Montrons que $(Id+\varphi)\circ(Id+\psi)$ est dans $\mathrm{Diff}_{\mathcal{S}}(\mathbb{R})$ pour $(Id+\varphi, Id+\psi) \in \mathrm{Diff}_{\mathcal{S}}(\mathbb{R})\times\mathrm{Diff}_{\mathcal{S}}(\mathbb{R})$.

On a

$$(Id+\varphi)\circ(Id+\psi)(x) = (Id+\varphi)(x+\psi(x)) = x+\psi(x)+\varphi\left(x+\psi(x)\right), x \in \mathbb{R}.$$

Selon le lemme 2.2.2 et l'estimation

$$\frac{1+|x|^2}{1+|x+\psi(x)|^2} \leq \mathrm{const}_\psi < \infty, x \in \mathbb{R},$$

la fonction $x \longmapsto \varphi\left(x+\psi(x)\right)$ est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. D'où

$$(Id+\varphi)\circ(Id+\psi) \in \mathrm{Diff}_{\mathcal{S}}(\mathbb{R}).$$

Montrons que $(Id+\varphi)^{-1} \in \mathrm{Diff}_{\mathcal{S}}(\mathbb{R})$ pour $Id+\varphi \in \mathrm{Diff}_{\mathcal{S}}(\mathbb{R})$. Posons $(Id+\varphi)^{-1} = Id+\psi$. On a donc

$$-\varphi(x) = \psi\left(x+\varphi(x)\right), x \in \mathbb{R}$$

et

$$-\varphi^{(n)}(x) = \psi^{(n)}\left(x+\varphi(x)\right)\left(1+\varphi'(x)\right)^n + \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}(x)\psi^{(j)}\left(x+\varphi(x)\right)$$

avec $a_{nj} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. En utilisant cette relation et l'inégalité

$$1 + \varphi'(x) \geq \delta > 0, x \in \mathbb{R},$$

nous vérifions par une simple récurrence sur l'ordre de la dérivation que les fonctions $x \longmapsto \psi^{(n)}(x + \varphi(x))$ $(n \in \mathbb{N})$ sont bornées. D'où

$$\begin{aligned}
& \left(1 + |x + \varphi(x)|^2\right)^{k/2} \left|\psi^{(n)}(x + \varphi(x))\right| \\
\leq \; & \frac{1}{\delta^n} \left(1 + |x + \varphi(x)|^2\right)^{k/2} \left|\varphi^{(n)}(x)\right| \\
& + \frac{1}{\delta^n} \sum_{j=1}^{n-1} \left(1 + |x + \varphi(x)|^2\right)^{k/2} |a_{nj}(x)| \left|\psi^{(j)}(x + \varphi(x))\right| \\
\leq \; & \mathrm{const}_{k,n},
\end{aligned}$$

ce qui prouve que $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Donc, $\mathrm{Diff}_{\mathcal{S}}(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{Diff}(\mathbb{R})$.

Montrons que l'application $(f, g) \in \mathrm{Diff}_{\mathcal{S}}(\mathbb{R}) \times \mathrm{Diff}_{\mathcal{S}}(\mathbb{R}) \longmapsto f \circ g \in \mathrm{Diff}_{\mathcal{S}}(\mathbb{R})$ est lisse. Soient φ et ψ deux fonctions de $C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ vérifiant la condition $(*)$ du lemme 2.2.3. Si $\phi(t, x) = \varphi(t, x + \psi(t, x))$, on a

$$\partial_t^n \partial_x^m \phi(t, x) = \sum_{0 \leq j \leq n, 1 \leq \ell \leq n+m} a_{nmj\ell}(t, x) \partial_t^j \partial_x^\ell \varphi(t, x + \psi(t, x))$$

où les fonctions $a_{nmj\ell} \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ vérifient

$$|a_{nmj\ell}(t, x)| \leq \mathrm{const}_{n,m,K}, t \in K, x \in \mathbb{R}.$$

D'où

$$\begin{aligned}
& \left(1 + |x|^2\right)^{k/2} |\partial_t^n \partial_x^m \phi(t, x)| \\
\leq \; & \left(1 + |x|^2\right)^{k/2} \sum_{0 \leq j \leq n, 1 \leq \ell \leq n+m} |a_{nmj\ell}(t, x)| \left|\partial_t^j \partial_x^\ell \varphi(t, x + \psi(t, x))\right| \\
\leq \; & \frac{\left(1 + |x|^2\right)^{k/2}}{\left(1 + |x + \psi(t, x)|^2\right)^{k/2}} \sum_{0 \leq j \leq n, 1 \leq \ell \leq n+m} |a_{nmj\ell}(t, x)| \\
& \times \left(1 + |x + \psi(t, x)|^2\right)^{k/2} \left|\partial_t^j \partial_x^\ell \varphi(t, x + \psi(t, x))\right| \\
\leq \; & \mathrm{const}_{k,n,m,K}
\end{aligned}$$

pour $(t, x) \in K \times \mathbb{R}$. Cela prouve que la courbe $(Id + \varphi) \circ (Id + \psi)$ est dans $C^\infty(\mathbb{R}; \mathrm{Diff}_{\mathcal{S}}(\mathbb{R}))$.

Montrons que l'application $f \in \mathrm{Diff}_{\mathcal{S}}(\mathbb{R}) \longmapsto f^{-1} \in \mathrm{Diff}_{\mathcal{S}}(\mathbb{R})$ est lisse. Considérons une courbe $(t \longmapsto Id(\cdot) + \varphi(t,\cdot)) \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathrm{Diff}_{\mathcal{S}}(\mathbb{R}))$ et posons $(Id(\cdot) + \varphi(t,\cdot))^{-1} = Id(\cdot) + \psi(t,\cdot)$. De la relation

$$\varphi(t, x + \psi(t,x)) + \psi(t,x) = 0,$$

il découle que $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$. Ensuite, nous dérivons la relation

$$-\varphi(t,x) = \psi(t, x + \varphi(t,x)),$$

il vient alors

$$\begin{aligned} -\partial_t^n \partial_x^m \varphi(t,x) &= (1 + \partial_x \varphi(t,x))^m \, \partial_t^n \partial_x^m \psi(t, x + \varphi(t,x)) \\ &\quad + \sum_{0 \le j \le n-1, 1 \le \ell \le n+m} a_{nmj\ell}(t,x) \partial_t^j \partial_x^\ell \psi(t, x + \varphi(t,x)), \end{aligned}$$

avec $(t \longmapsto a_{nmj\ell}(t,\cdot)) \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{S}(\mathbb{R}))$. De cette formule et l'inégalité

$$1 + \partial_x \varphi(t,x) \ge \delta(K) > 0, t \in K, x \in \mathbb{R},$$

on tire par une simple récurrence sur l'ordre de dérivation les estimations suivantes

$$|\partial_t^n \partial_x^m \psi(t, x + \varphi(t,x))| \le \mathrm{const}_{n,m,K} < \infty, t \in K, x \in \mathbb{R}.$$

D'où

$$\begin{aligned} & \left(1 + |x + \varphi(t,x)|^2\right)^{k/2} |\partial_t^n \partial_x^m \psi(t, x + \varphi(t,x))| \\ \le\ & \frac{1}{\delta(K)^m} \left(\frac{1 + |x + \varphi(t,x)|^2}{1 + |x|^2} \right)^{k/2} \left(1 + |x|^2\right)^{k/2} |\partial_t^n \partial_x^m \varphi(t,x)| \\ & + \frac{1}{\delta(K)^m} \left(\frac{1 + |x + \varphi(t,x)|^2}{1 + |x|^2} \right)^{k/2} \\ & \times \sum_{j=1}^{n-1} \left(1 + |x|^2\right)^{k/2} |a_{nmj\ell}(t,x)| \left| \partial_t^j \partial_x^\ell \psi(t, x + \varphi(t,x)) \right| \\ \le\ & \mathrm{const}_{k,n,m,K} \end{aligned}$$

pour $(t,x) \in K \times \mathbb{R}$, ce qui prouve que $(t \longmapsto \psi(t,\cdot)) \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{S}(\mathbb{R}))$ et $\left(t \longmapsto Id(\cdot) + \psi(t,\cdot) = (Id(\cdot) + \varphi(t,\cdot))^{-1}\right) \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathrm{Diff}_{\mathcal{S}}(\mathbb{R}))$.

Montrons que $\mathrm{Diff}_{\mathcal{S}}(\mathbb{R})$ est régulier.

En connaissant la relation $D\left(\mu_g\right)(f)(h) = \mu_g(h) = h \circ g$, la proposition 2.1.8 montre que le groupe $\mathit{Diff}_{\mathcal{S}}(\mathbb{R})$ est régulier si, et seulement si, quelle que soit $X \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{S}(\mathbb{R}))$, le problème

$$(\mathcal{P}) \qquad \left\{ \begin{array}{c} \varphi(0,x) = 0, \\ \partial_t \varphi(t,x) = X(t, x + \varphi(t,x)) \end{array} \right.$$

possède une solution locale $\varphi \in C^\infty(I_X; Id + \mathcal{S}(\mathbb{R}))$.

Soit $X \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{S}(\mathbb{R}))$. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, le problème $(\mathcal{P})$ admet une solution locale $\varphi \in C^\infty(I_X \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned} |\varphi(t,x)| &\leq \left| \int_0^t \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s,x) \right| ds \right| = \left| \int_0^t |X(s, x + \varphi(s,x))| \, ds \right| \\ &\leq \mathrm{const}_K, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \left(1 + |x|^2\right)^{k/2} |\varphi(t,x)| \\ \leq & \left| \int_0^t \left(\frac{1 + |x|^2}{1 + |x + \varphi(s,x)|^2} \right)^{k/2} \left(1 + |x + \varphi(s,x)|^2\right)^{k/2} |X(s, x + \varphi(s,x))| \, ds \right| \\ \leq & \ \mathrm{const}_{k,K}, \end{aligned}$$

et ceci pour $(t,x) \in K \times \mathbb{R}$.

De même, en dérivant l'équation du système $(\mathcal{P})$ et en utilisant des arguments analogues, nous obtenons les estimations:

$$\left(1 + |x|^2\right)^{k/2} |\partial_t^n \partial_x^m \varphi(t,x)| \leq \mathrm{const}_{k,n,m,K}, (t,x) \in K \times \mathbb{R},$$

qui prouvent que $(t \longmapsto \varphi(t, \cdot)) \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{S}(\mathbb{R}))$.

2.3. Métriques riemanniennes sur les groupes de Lie

Soit G un groupe de Lie et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur $\mathfrak{g} = T_e G$. On définit une métrique riemannienne g sur G par:

$$g(x)(\xi, \eta) = \langle \kappa_r(x)(\xi), \kappa_r(x)(\eta) \rangle, x \in G, \xi, \eta \in T_x G. \tag{2.1}$$

La métrique g est invariante à droite, et toute métrique riemannienne invariante à droite s'écrit sous la forme précédente pour un produit scalaire convenable sur $\mathfrak{g}$.

Si $\gamma : [a,b] \longrightarrow G$ est une courbe de classe C^∞ (lisse), l'énergie de γ par rapport à la métrique g est donnée par la formule:

$$E(\gamma) = \frac{1}{2}\int_a^b g\left(\gamma(t)\right)\left(\frac{\partial\gamma}{\partial t}(t), \frac{\partial\gamma}{\partial t}(t)\right) dt = \frac{1}{2}\int_a^b \langle u(t), u(t)\rangle\, dt$$

où u désigne la vélocité de γ définie par

$$\begin{aligned} u(t) &= \delta_r(\gamma)(t)(\partial_t) = \gamma^*(\kappa_r)(t)(\partial_t) = \kappa_r(\gamma(t))\left(\gamma'(t)\right) \\ &= D\left(\mu_{\gamma(t)^{-1}}\right)(\gamma(t))\left(\gamma'(t)\right), t \in [a,b]. \end{aligned}$$

Supposons que pour tout $X \in \mathfrak{g}$, l'adjoint $\{\mathrm{ad}\,(X)\}^\top$ de $\mathrm{ad}(X)$ par rapport à $\langle\cdot,\cdot\rangle$ existe, et que l'application $X \longmapsto \{\mathrm{ad}\,(X)\}^\top$ est bornée, et soit γ une variation lisse. Posons

$$u(t,s) = \gamma(\cdot,s)^*(\kappa_r)(t)(\partial_t), v(t,s) = \gamma(t,\cdot)^*(\kappa_r)(s)(\partial_s).$$

En utilisant l'équation droite de Maurer-Cartan (voir proposition 2.1.7) et l'intégration par parties, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial s}E\left(\gamma(\cdot,s)\right) = -\int_a^b \left\langle v(t,s), \frac{\partial u}{\partial t}(t,s) + \{\mathrm{ad}\,(u(t,s))\}^\top\left(u(t,s)\right)\right\rangle dt$$

D'où l'équation des géodésiques dans G

$$\frac{du}{dt}(t) + \mathrm{ad}\,(u(t))^\top(u(t)) = 0,$$

qui s'écrit sous la forme simple suivante

$$\partial_t u + \mathrm{ad}\,(u)^\top(u) = 0, \tag{2.2}$$

où $u(t) = \gamma^*(\kappa_r)(t)(\partial_t)$.

On suppose maintenant que pour tout $x \in G$, l'adjoint $\{\mathrm{Ad}\,(x)\}^\top$ de $\mathrm{Ad}(x)$ par rapport à $\langle\cdot,\cdot\rangle$ existe, et que l'application $x \longmapsto \{\mathrm{Ad}\,(x)\}^\top$ est lisse. Si γ est une courbe lisse dans G, on pose

$$J(t) = \mathrm{Ad}\,(\gamma(t))^\top(u(t)),\ u(t) = \gamma^*(\kappa_r)(t)(\partial_t).$$

On a alors

$$\begin{aligned} J'(t) &= \left\{\mathrm{Ad}\,(\gamma(t))'\right\}^\top(u(t)) + \mathrm{Ad}\,(\gamma(t))^\top(u'(t)) \\ &= \{D\,(\mathrm{Ad})\,(\gamma(t))\,(\gamma'(t))\}^\top(u(t)) + \mathrm{Ad}\,(\gamma(t))^\top(u'(t)) \\ &= \mathrm{Ad}\,(\gamma(t))^\top \circ \{\mathrm{ad}\,(\kappa_r(\gamma(t))\,(\gamma'(t)))\}^\intercal(u(t)) + \mathrm{Ad}\,(\gamma(t))^\top(u'(t)) \\ &= \mathrm{Ad}\,(\gamma(t))^\top\left[\mathrm{ad}\,(u(t))^\intercal(u(t)) + u'(t)\right]. \end{aligned}$$

Donc pour que la courbe γ soit une géodésique dans G, il faut et il suffit que la fonction J soit constante le long de γ. Autrement dit, l'équation des géodésiques (2.2) est équivalente à l'équation

$$J' = 0 \tag{2.3}$$

Définitions. *Soit M une variété différentielle.*

✓ *Une connexion linéaire sur M est une application $\nabla : \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ telle que , pour tous X, X', Y, $Y' \in \mathfrak{X}(M)$ et $f \in C^\infty(M;\mathbb{R})$:*

- $\nabla_{X+X'}Y = \nabla_X Y + \nabla_{X'}Y$;
- $\nabla_X(Y+Y') = \nabla_X Y + \nabla_X Y'$;
- $\nabla_{fX}Y = f\nabla_X Y$;
- $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$.

✓ *Pour un champ de vecteurs $X \in \mathfrak{X}(M)$ donné, l'application $\nabla_X : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ est appelée dérivée covariante suivant X associée à la connexion ∇.*

✓ *Etant donné une métrique pseudo-riemannienne g sur M, une connexion ∇ sur M est dite compatible avec la métrique g si*

$$X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

pour tous X, Y, et Z de $\mathfrak{X}(M)$. Nous disons aussi que ∇ est une connexion métrique sur M.

✓ *On suppose que M est de dimension finie et soit g une métrique pseudo-riemannienne sur M, alors il existe une unique connexion symétrique sur M compatible avec la métrique g* (c'est la *propriété fondamentale de la géométrie riemannienne*). *On appelle cette connexion la connexion riemannienne ou connexion de Levi-Civita de (M,g) .*

Pour déterminer la connexion de Levi-Civita de la métrique (2.1), on va utiliser l'isomorphisme $R : X \in C^\infty(G;\mathfrak{g}) \longrightarrow R(X) \in \mathfrak{X}(G)$ définie par:

$$R(X)(x) = D(\mu_x)(e)(X(x)), x \in G,$$

qui vérifie les deux égalités

$$\begin{aligned} [R(X), R(Y)] &= R\left(-[X,Y] + R(X)(Y) - R(Y)(X)\right), \\ g\left(R(X), R(Y)\right) &= \langle X, Y\rangle . \end{aligned}$$

Proposition 2.3.1. *Supposons que pour tout $X \in \mathfrak{g}$, l'adjoint $\{\mathrm{ad}\,(X)\}^\top$ de $\mathrm{ad}(X)$ par rapport à $\langle\cdot,\cdot\rangle$ existe, et que l'application $X \longmapsto \{\mathrm{ad}\,(X)\}^\top$ est bornée. Alors la connexion de Levi-Civita ∇ de la métrique* (2.1) *existe et est donnée par la relation:*

$$\nabla_X Y = R(X)(Y) + \frac{1}{2}\mathrm{ad}\,(Y)^\top(X) + \frac{1}{2}\mathrm{ad}\,(X)^\top(Y) - \frac{1}{2}\mathrm{ad}\,(X)(Y).$$

Démonstration. Il est évident que ∇ est une connexion linéaire. ∇ est sans torsion et compatible avec la métrique (2.1) puisque:

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = -\left[X, Y\right] + R(X)(Y) - R(Y)(X),$$

et

$$\langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle = \langle R(X)(Y), Z\rangle + \langle Y, R(X)(Z)\rangle = R(X)\left(\langle Y, Z\rangle\right),$$

quel que soit $(X, Y, Z) \in C^\infty(G; \mathfrak{g})^3$.

Pour $X \in \mathfrak{g}$, on note $\alpha(X)$ l'application linéaire et bornée

$$Y \in \mathfrak{g} \longmapsto \mathrm{ad}(Y)^\top(X) \in \mathfrak{g}.$$

D'où

$$\nabla_X = R(X) + \frac{1}{2}\mathrm{ad}(X)^\top + \frac{1}{2}\alpha(X) - \frac{1}{2}\mathrm{ad}(X), X \in C^\infty(G, \mathfrak{g}).$$

Dans la proposition suivante, nous trouverons quelques règles du calcul.

Proposition 2.3.2.

a) $[R(X), \mathrm{ad}(Y)] = \mathrm{ad}(R(X)(Y))$.

b) $[R(X), \alpha(Y)] = \alpha(R(X)(Y))$.

c) $\left[R(X), \mathrm{ad}(Y)^\top\right] = \mathrm{ad}(R(X)(Y))^\top$.

d) $\left[\mathrm{ad}(X)^\top, \mathrm{ad}(Y)^\top\right] = -\mathrm{ad}([X, Y])^\top$.

e) *Si* $\mathcal{R}(X, Y)$ *dénote la courbure riemannienne de la métrique* (2.1)*, on a*

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(X, Y) &= [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{-[X,Y]+R(X)(Y)-R(Y)(X)} \\
&= -\frac{1}{4}\left[\mathrm{ad}(X) + \mathrm{ad}(X)^\top, \mathrm{ad}(Y) + \mathrm{ad}(Y)^\top\right] \\
&\quad + \frac{1}{4}\left[\mathrm{ad}(X)^\top - \mathrm{ad}(X), \alpha(Y)\right] + \frac{1}{4}\left[\alpha(X), \mathrm{ad}(Y)^\top - \mathrm{ad}(Y)\right] \\
&\quad + \frac{1}{4}\left[\alpha(X), \alpha(Y)\right] + \frac{1}{2}\alpha\left([X, Y]\right).
\end{aligned}$$

Considérons une variation de géodésiques γ et posons

$$u(t,s) = \gamma(\cdot,s)^*(\kappa_r)(t)(\partial_t), v(t,s) = \gamma(t,\cdot)^*(\kappa_r)(s)(\partial_s).$$

D'après l'équation droite de Maurer-Cartan, on a:

$$\partial v/\partial t = \partial u/\partial s + [u,v]\,.$$

D'où

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial s} &= -\frac{\partial}{\partial s}\left\{\mathrm{ad}\,(u)^\top(u)\right\} = -\mathrm{ad}\,(\partial u/\partial s)^\top(u) - \mathrm{ad}\,(u)^\top(\partial u/\partial s) \\
&= -\mathrm{ad}\,(\partial v/\partial t + [v,u])^\top(u) - \mathrm{ad}\,(u)^\top(\partial v/\partial t + [v,u]) \\
&= -\mathrm{ad}\,(\partial v/\partial t)^\top(u) - \mathrm{ad}\,([v,u])^\top(u) - \mathrm{ad}\,(u)^\top(\partial v/\partial t) \\
&\quad -\mathrm{ad}\,(u)^\top([v,u]) \\
&= -\alpha(u)\,(\partial v/\partial t) + \left[\mathrm{ad}\,(v)^\top, \mathrm{ad}\,(u)^\top\right](u) - \mathrm{ad}\,(u)^\top(\partial v/\partial t) \\
&\quad -\mathrm{ad}\,(u)^\top(\mathrm{ad}\,(v)\,(u))\,.
\end{aligned}$$

Par suite, il vient

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial s} + [\partial u/\partial t, v] + [u, \partial v/\partial t] \\
&= \left[\mathrm{ad}\,(v) + \mathrm{ad}\,(v)^\top, \mathrm{ad}\,(u)^\top\right](u) - \alpha(u)\,(\partial v/\partial t) \\
&\quad -\mathrm{ad}\,(u)^\top(\partial v/\partial t) + \mathrm{ad}\,(u)\,(\partial v/\partial t)\,.
\end{aligned}$$

Si nous posons

$$\nabla_{\partial_t} v = \partial v/\partial t + \frac{1}{2}\mathrm{ad}\,(u)^\top(v) + \frac{1}{2}\alpha(u)\,(v) - \frac{1}{2}\mathrm{ad}\,(u)\,(v)\,,$$

la dernière équation, qui s'appelle "équation de Jacobi" de la variation γ, prend la forme simple suivante

$$\begin{aligned}
\nabla_{\partial_t}\nabla_{\partial_t} v + \mathcal{R}(v,u)u &= \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \left[\mathrm{ad}\,(v) + \mathrm{ad}\,(v)^\top, \mathrm{ad}\,(u)^\top\right](u) \\
&\quad +\alpha(u)\,(\partial v/\partial t) + \mathrm{ad}\,(u)^\top(\partial v/\partial t) - \mathrm{ad}\,(u)\,(\partial v/\partial t) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

CHAPITRE III:
Etude de quelques équations aux dérivées partielles

Dans ce chapitre, nous allons étudier les deux équations aux dérivées partielles suivantes:

$$\partial_t u - \partial_t \partial_x^2 u = -3u\partial_x u + 2\partial_x u \partial_x^2 u + u\partial_x^3 u \tag{3.1}$$

et

$$\partial_t u - \partial_t \partial_x^2 u = -3u\partial_x u + 2\partial_x u \partial_x^2 u + (u - a\ )\,\partial_x^3 u \ \ (a \in \mathbb{R}) \tag{3.2}$$

sur le cercle S^1 et sur la droite réelle $\mathbb{R}$ en utilisant une approche basée sur ses origines géométriques.

On signale que l'équation de Hopf (3.1) et l'équation de Korteweg-de Vries (3.2) sont appelées aussi équations de Camassa-Holm selon [6] et [12].

Les références fondamentales de ce chapitre sont: [1], [2], [3], [7], [8], [9], [14], [15], [16], [17].

3.1. Propriété géodésique de l'équation (3.1)

D'après le théorème 2.2.1, les algèbres de Lie des groupes $\mathrm{Diff}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Diff}(S^1)$ sont respectivement $C_c^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})\partial_x$ et $\mathfrak{X}(S^1) = C^\infty(S^1;\mathbb{R})\partial_x$ munis du crochet

$$[h,k] = h'k - hk'.$$

De plus, le théorème 1.2.6 montre que $T\,(\mathrm{Diff}(\mathbb{R})) = \mathrm{Diff}(\mathbb{R}) \times C_c^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ et $T\,(\mathrm{Diff}(S^1)) = \mathrm{Diff}(S^1) \times C^\infty(S^1;\mathbb{R})$.

D'autre part, suivant la structure différentielle définie sur le groupe $\mathrm{Diff}_{\mathcal{S}}(\mathbb{R})$, on a $T\,(\mathrm{Diff}_{\mathcal{S}}(\mathbb{R})) = \mathrm{Diff}_{\mathcal{S}}(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}(\mathbb{R})$, ce qui montre que l'algèbre de Lie de $\mathrm{Diff}_{\mathcal{S}}(\mathbb{R})$ est $\mathcal{S}(\mathbb{R})\partial_x$ muni du crochet précédent.

Dans la suite, G désignera l'un des groupes: $\mathrm{Diff}(\mathbb{R})$, $\mathrm{Diff}(S^1)$, $\mathrm{Diff}_{\mathcal{S}}(\mathbb{R})$, et on va munir l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G du produit scalaire

$$\langle h,k\rangle = \int h(x)k(x)dx + \int h'(x)k'(x)dx.$$

La métrique riemannienne g définie par la relation (2.1) à partir du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ possède une forme explicite, en effet, pour $f \in G$ et

$(h,k) \in T_fG \times T_fG$, on a

$$\begin{aligned}
g(f)\,(h,k) &= \langle \kappa_r(f)(h), \kappa_r(f)(k)\rangle = \left\langle h\circ f^{-1}, k\circ f^{-1}\right\rangle \\
&= \int h\left(f^{-1}(x)\right) k\left(f^{-1}(x)\right) dx + \int \left(h\circ f^{-1}\right)'(x)\left(k\circ f^{-1}\right)'(x)dx \\
&= \int h(x)k(x)\left|f'(x)\right| dx \\
&\quad + \int h'\left(f^{-1}(x)\right) k'\left(f^{-1}(x)\right) \frac{1}{\left(f'\left(f^{-1}(x)\right)\right)^2} dx \\
&= \int h(x)k(x)\left|f'(x)\right| dx + \int h'(x)\,k'(x)\left|f'(x)\right|^{-1} dx
\end{aligned}$$

Calculons l'application adjointe $\mathrm{ad}(h)^\top$. On a

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{ad}(h)(k), l\rangle &= \langle [h,k], l\rangle = \langle h'k - hk', l\rangle \\
&= \int \{h'(x)k(x) - h(x)k'(x)\}\, l(x)dx \\
&\quad + \int \{h''(x)k(x) - h(x)k''(x)\}\, l'(x)dx \\
&= \int h'(x)k(x)l(x)dx - \int h(x)k'(x)l(x)dx \\
&\quad + \int h''(x)k(x)l'(x)dx - \int h(x)k''(x)l'(x)dx \\
&= \int h'(x)k(x)l(x)dx + \int k(x)\,(hl)'(x)dx \\
&\quad + \int h''(x)k(x)l'(x)dx - \int k(x)\,(hl')''(x)dx \\
&= \int k(x)\left(h'l + (hl)' + h''l' - (hl')''\right)(x)dx \\
&= \int k(x)\left(2h'l + hl' - 2h'l'' - hl'''\right)(x)dx \\
&= \int k(x)\left(2l\partial_x h + h\partial_x l - 2\partial_x h\partial_x^2 l - h\partial_x^3 l\right)(x)dx
\end{aligned}$$

D'où $\mathrm{ad}(h)^\top(l) = \left(Id - \partial_x^2\right)^{-1}\left(2l\partial_x h + h\partial_x l - 2\partial_x h\partial_x^2 l - h\partial_x^3 l\right)$.

L'équation générale (2.2) des géodésiques dans G est exactement l'équation (3.1) puisque si $\gamma : I \longrightarrow G$ est une géodésique dans G et si u dénote la vélocité de γ définie par:

$$u(t) = \gamma'(t)\circ\gamma(t)^{-1},\ t\in I$$

on a

$$\begin{aligned}\partial_t u &= -\mathrm{ad}(u)^\top(u)\\ &= -\left(Id-\partial_x^2\right)^{-1}\left(3u\partial_x u-2\partial_x u\partial_x^2 u-u\partial_x^3 u\right),\end{aligned}$$

ou encore

$$\partial_t u-\partial_t\partial_x^2 u=-3u\partial_x u+2\partial_x u\partial_x^2 u+u\partial_x^3 u.$$

Calculons maintenant $\mathrm{Ad}(h)^\top$. Posons $A=Id-\partial_x^2$. On a

$$\begin{aligned}\left\langle \mathrm{Ad}(f)^\top(h),k\right\rangle &= \langle h,\mathrm{Ad}(f)(k)\rangle=\int A(h)(x)f'\circ f^{-1}(x)k\circ f^{-1}(x)dx\\ &= \int A(h)\circ f(x)f'(x)k(x)\left|f'(x)\right|dx\\ &= \mathrm{sgn}(f')\int A(h)\circ f(x)k(x)\left(f'(x)\right)^2dx\\ &= \left\langle \mathrm{sgn}(f')A^{-1}\left\{(f')^2A(h)\circ f\right\},k\right\rangle.\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Ad}(f)^\top(h)=\mathrm{sgn}(f')A^{-1}\left\{(f')^2A(h)\circ f\right\}$.

Soit $\gamma: I\longrightarrow G$ une géodésique dans G. D'après la relation (2.3), les courbes

$$J(t)=\mathrm{sgn}(\partial_x\gamma)A^{-1}\left\{(\partial_x\gamma(t))^2A\left(\gamma'(t)\circ\gamma(t)^{-1}\right)\circ\gamma(t)\right\},t\in I$$

et

$$\tilde{J}(t)=(\partial_x\gamma(t))^2A\left(\gamma'(t)\circ\gamma(t)^{-1}\right)\circ\gamma(t),t\in I$$

sont constantes.

On a

$$\begin{aligned}\tilde{J}(t) &= (\partial_x\gamma(t))^2\left\{\gamma'(t)\circ\gamma(t)^{-1}-\frac{\partial_x^2\gamma'(t)\circ\gamma(t)^{-1}}{(\partial_x\gamma(t)\circ\gamma(t)^{-1})^2}\right.\\ &\quad\left.+\frac{(\partial_x\gamma'(t)\circ\gamma(t)^{-1})(\partial_x^2\gamma(t)\circ\gamma(t)^{-1})}{(\partial_x\gamma(t)\circ\gamma(t)^{-1})^3}\right\}\circ\gamma(t)\\ &= (\partial_x\gamma(t))^2\left\{\gamma'(t)-\frac{\partial_x^2\gamma'(t)}{(\partial_x\gamma(t))^2}+\frac{\partial_x\gamma'(t)\partial_x^2\gamma(t)}{(\partial_x\gamma(t))^3}\right\}\\ &= (\partial_x\gamma(t))^2\gamma'(t)-\partial_x^2\gamma'(t)+\frac{\partial_x\gamma'(t)\partial_x^2\gamma(t)}{\partial_x\gamma(t)}.\end{aligned}$$

Par suite,

$$\left(\frac{\partial_x^2\gamma}{\partial_x\gamma}\right)'(t)=\frac{\partial_x\gamma(t)\partial_x^2\gamma'(t)-\partial_x\gamma'(t)\partial_x^2\gamma(t)}{(\partial_x\gamma(t))^2}=\partial_x\gamma(t)\gamma'(t)-\frac{\tilde{J}(t)}{\partial_x\gamma(t)}.$$

Ainsi, si $t_0 \in I$, on peut écrire

$$\begin{aligned}\partial_x^2\gamma(t) &= \frac{\partial_x^2\gamma(t_0)}{\partial_x\gamma(t_0)}\partial_x\gamma(t) + \partial_x\gamma(t)\int_{t_0}^{t}\partial_x\gamma(s)\gamma'(s)ds \\ &\quad -\tilde{J}(t_0)\partial_x\gamma(t)\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{\partial_x\gamma(s)}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

où $t \in I$.

3.2. Propriété géodésique de l'équation (3.2)

Sur le produit cartésien $\mathit{Diff}^+(S^1) \times \mathit{Diff}^+(S^1)$, où

$$\mathit{Diff}^+\left(S^1\right) = \left\{f \in \mathit{Diff}\left(S^1\right) : f' > 0\right\},$$

on définit une application lisse κ comme suit

$$\kappa(f,g) = \int_{S^1}\log\left\{(f\circ g)'(x)\right\}\frac{g''(x)}{g'(x)}dx = \int_{S^1}\log\left\{f'\circ g(x)\right\}\frac{g''(x)}{g'(x)}dx.$$

L'ensemble $S^1 \times \mathit{Diff}^+(S^1)$ muni de l'opération intérieure

$$(x,f)\cdot(y,g) = (xy\exp(2\pi i\kappa(f,g)), f\circ g)$$

est un groupe de Lie régulier et s'appelle groupe de Virasoro-Bott sur S^1 (voir [5]), et on le note $S^1 \times_{VB} \mathit{Diff}(S^1)$. L'algèbre de Lie de ce groupe est $\mathbb{R} \times \mathfrak{X}(S^1)$ munie du crochet de Lie suivant:

$$\begin{aligned}&[(a,h),(b,k)] = (\omega(h,k), h'k - hk'), \\ &\omega(h,k) = \int_{S^1} h'(x)k''(x)dx = \frac{1}{2}\int_{S^1}\det\begin{pmatrix} h'(x) & k'(x) \\ h''(x) & k''(x)\end{pmatrix}dx.\end{aligned}$$

De même, l'opération

$$(x,f)\cdot(y,g) = (x+y+\kappa(f,g), f\circ g)$$

définit sur $\mathbb{R}\times\mathit{Diff}_c(\mathbb{R})$ ($\mathit{Diff}_c(\mathbb{R})$ dénote le groupe des difféomorphismes à support compact sur $\mathbb{R}$) une structure d'un groupe de Lie régulier, c'est le groupe de Virasoro-Bott $\mathbb{R}\times_{VB}\mathit{Diff}_c(\mathbb{R})$. Son algèbre de Lie est $\mathbb{R}\times C_c^\infty(\mathbb{R})$ muni du crochet de Lie suivant:

$$\begin{aligned}&[(a,h),(b,k)] = (\omega(h,k), h'k - hk'), \\ &\omega(h,k) = \int_{\mathbb{R}} h'(x)k''(x)dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\det\begin{pmatrix} h'(x) & k'(x) \\ h''(x) & k''(x)\end{pmatrix}dx.\end{aligned}$$

De façon analogue, on définit le groupe de Virasoro-Bott $\mathbb{R}\times_{VB}\mathit{Diff}_{\mathcal{S}}(\mathbb{R})$.

Soit G l'un des groupes: $S^1\times_{VB}\mathit{Diff}(S^1)$, $\mathbb{R}\times_{VB}\mathit{Diff}_c(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}\times_{VB}\mathit{Diff}_{\mathcal{S}}(\mathbb{R})$. On définit sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G, un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ par la relation

$$\langle (a,h),(b,k)\rangle = ab + \int h(x)k(x)dx + \int h'(x)k'(x)dx.$$

On a

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{ad}\,(a,h)\,(b,k),(c,l)\rangle &= \langle [(a,h),(b,k)],(c,l)\rangle \\
&= \langle (\omega\,(h,k),h'k-hk'),(c,l)\rangle \\
&= \omega\,(h,k)\,c + \int k(x)\,(2h'l+hl'-2h'l''-hl''')\,(x)dx \\
&= c\int_{\mathbb{R}} h'(x)k''(x)dx \\
&\quad + \int k(x)\,(2h'l+hl'-2h'l''-hl''')\,(x)dx \\
&= \int k(x)\,\{2h'l+hl'-2h'l''-hl'''+ch'''\}\,(x)dx
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\langle (b,k),\mathrm{ad}\,(a,h)^{\intercal}\,(c,l)\rangle &= \\
&= \int k(x)\,\{2h'l+hl'-2h'l''-hl'''+ch'''\}\,(x)dx,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}\,(a,h)^{\intercal}\,(c,l) &= \left(0, A^{-1}\,\{2h'l+hl'-2h'l''-hl'''+ch'''\}\right) \\
&= \left(0, \left(Id-\partial_x^2\right)^{-1}\{2h'l+hl'-2h'l''-hl'''+ch'''\}\right).
\end{aligned}$$

Considérons maintenant une géodésique $\gamma : I \longrightarrow G$ sur le groupe G. Si

$$u : t\in I \longmapsto u(t) = (a(t),v(t)) \in \mathfrak{g}$$

est la vélocité de γ, on a d'après l'équation (2.2)

$$\begin{aligned}
\partial_t u &= (\partial_t a,\partial_t v) = -\mathrm{ad}\,(u)^{\intercal}\,(u) \\
&= -\mathrm{ad}\,\{(a,v)\}^{\intercal}\,(a,v) \\
&= \left(0, -\left(Id-\partial_x^2\right)^{-1}\left\{3v\partial_x v - 2\partial_x v\partial_x^2 v - v\partial_x^3 v + a\partial_x^3 v\right\}\right).
\end{aligned}$$

D'où

$$\left\{\begin{array}{c}
\partial_t a = 0, \\
\partial_t v = -\left(Id-\partial_x^2\right)^{-1}\{3v\partial_x v - 2\partial_x v\partial_x^2 v - v\partial_x^3 v + a\partial_x^3 v\}.
\end{array}\right.$$

Ainsi, la fonction a est constante et v vérifie l'équation différentielle aux dérivées partielles

$$\partial_t v - \partial_t \partial_x^2 v = -3v\partial_x v + 2\partial_x v \partial_x^2 v + v\partial_x^3 v - a\partial_x^3 v,$$

qui est exactement l'équation (3.2).

3.3. Existence des géodésiques

Dans ce paragraphe, nous allons étudier l'existence des géodésiques dans les groupes des difféomorphismes. Le premier résultat est le

Théorème 3.1. *Il existe un voisinage ouvert U de $(0, Id)$ dans l'espace $\mathfrak{X}(S^1) \times \mathit{Diff}(S^1)$ et un nombre réel $\delta > 0$ tels que, pour toute $(h, f) \in U$, il existe une géodésique unique $\gamma \in C^3\left(]-\delta, \delta[\,; \mathit{Diff}\,(S^1)\right)$ vérifiant $\gamma(0) = f$ et $\gamma'(0) = h$.*

Le résultat reste vrai si on remplace $\mathit{Diff}(S^1)$ par $\mathit{Diff}_{\mathcal{S}}(\mathbb{R})$ et $\mathfrak{X}(S^1)$ par $\mathcal{S}(\mathbb{R})\partial_x$.

Dans la démonstration de ce théorème, on suit essentiellement [7] et [8] en utilisant l'espace de Banach

$$HC^n(\mathbb{R}) = H^n(\mathbb{R}) \cap C^n(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{HC^n} = \|\cdot\|_{H^n} + \|\cdot\|_{C_b^n},$$

et l'ensemble $\mathit{Diff}\, HC^n(\mathbb{R})$ des C^n-difféomorphismes $Id + h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $h \in HC^n(\mathbb{R})$. Ici, $H^n(\mathbb{R})$ désigne l'espace de Sobolev classique d'indice n, et $C_b^n(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions $f \in C^n(\mathbb{R})$, bornées ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre n.

D'après l'inégalité de Sobolev, on a $H^n(\mathbb{R}) \subset HC^{n-1}(\mathbb{R})$ (injection continue) pour $n \geq 1$.

Lemme 3.2. *$\mathit{Diff}\, HC^n(\mathbb{R})$ $(n \geq 1)$ est un groupe topologique ouvert de la variété de Banach $Id + HC^n(\mathbb{R})$.*

Démonstration. Soit $(h, f) \in HC^0(\mathbb{R}) \times \mathit{Diff}\, HC^1(\mathbb{R})$. Il est évident que $h \circ f \in C_b^0(\mathbb{R})$, d'autre part, on a

$$\int (h \circ f(x))^2\, dx = \int (h(y))^2 \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)} dy \leq \|1/f'\|_\infty \int (h(y))^2\, dy < \infty,$$

ce qui montre que $h \circ f \in L^2(\mathbb{R})$. D'où $h \circ f \in HC^0(\mathbb{R})$.

Maintenant on utilise ce résultat et le lemme 2.2.2 pour prouver que, si $(f, g) \in \mathit{Diff}\, HC^n(\mathbb{R}) \times \mathit{Diff}\, HC^n(\mathbb{R})$, on a $f \circ g \in \mathit{Diff}\, HC^n(\mathbb{R})$.

Soit $f \in \mathit{Diff}\, HC^n(\mathbb{R})$. On a $f = Id + \varphi$ et $f^{-1} = Id + \psi$ avec $\varphi \in HC^n(\mathbb{R})$ et $\psi \in C^n(\mathbb{R};\mathbb{R})$. D'où

$$\|\psi\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\psi(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\varphi \circ f^{-1}(x)\right| = \sup_{y\in\mathbb{R}} |\varphi(y)| = \|\varphi\|_\infty < \infty$$

et

$$\begin{aligned} \int (\psi(x))^2\, dx &= \int \left(\varphi \circ f^{-1}(x)\right)^2 dx = \int (\varphi(y))^2 f'(y) dy \\ &\leq \|f'\|_\infty \int (\varphi(y))^2\, dx < \infty. \end{aligned}$$

ce qui entraîne que $\psi \in HC^0(\mathbb{R})$.

Aussi, de la relation $\psi = -\varphi \circ f^{-1}$ et le lemme 2.2.2, il découle que

$$\psi', \ldots, \psi^{(n)} \in HC^0(\mathbb{R}).$$

Donc $\psi \in HC^n(\mathbb{R})$ et $f^{-1} \in \mathit{Diff}\, HC^n(\mathbb{R})$.

On utilise les mêmes arguments de la démonstration du théorème 2.2.4 pour prouver la continuité des applications $f \longmapsto f^{-1}$ et $(f,g) \longmapsto f \circ g$.

Lemme 3.3. *Soit l'opérateur différentiel*

$$A_k = \sum_{j=0}^{k} a_j \partial_x^j,\ a_j \in \mathbb{R}, 0 \leq k \leq n \in \mathbb{N}^*,$$

alors l'application

$$(h,f) \longmapsto \Lambda_k(h,f) = A_k\left(h \circ f^{-1}\right) \circ f$$

est de classe C^1 de $HC^n(\mathbb{R}) \times \mathit{Diff}\, HC^n(\mathbb{R})$ dans $HC^{n-k}(\mathbb{R})$.

Démonstration. On a

$$\Lambda_0(h,f) = a_0 h$$

et

$$\Lambda_1(h,f) = a_0 h + a_1 \frac{h'}{f'}.$$

Il est facile à vérifier que ces deux applications sont de classe C^1 et que

$$D\Lambda_0(h,f)\,(\xi,\eta) = a_0 \xi,$$

et

$$D\Lambda_1(h,f)\,(\xi,\eta) = a_0 \xi + a_1 \frac{\xi'}{f'} - a_1 \frac{h'\eta'}{(f')^2}.$$

Le cas général résulte du lemme 2.2.2.

On définit les espaces fonctionnels $C^n(S^1) = C^n(S^1;\mathbb{R})$, $H^n(S^1;\mathbb{R})$, $C^n(S^1;S^1)$ et $\mathit{Diff}\, C^n(S^1)$ $(n \in \mathbb{N})$ par la méthode des cartes locales.

Démonstration du théorème 3.1. Considérons l'opérateur différentiel $A = Id - \partial_x^2$. Pour toute fonction $h \in C^n(S^1)$ $(n \geq 3)$, on a

$$\begin{aligned} A\left(h\partial_x h\right) &= h\partial_x h - \partial_x^2\left(h\partial_x h\right) = h\partial_x h - 3\partial_x h\partial_x^2 h - h\partial_x^3 h \\ &= hA\left(\partial_x h\right) - 3\partial_x h\partial_x^2 h. \end{aligned}$$

Donc si u est la vélocité d'une géodésique γ sur le groupe $\mathit{Diff}(S^1)$, on peut écrire les égalités suivantes

$$\begin{aligned} \partial_t u &= -A^{-1}\left(3u\partial_x u - 2\partial_x u\partial_x^2 u - u\partial_x^3 u\right) \\ &= -A^{-1}\left\{2u\partial_x u - 2\partial_x u\partial_x^2 u + u\left(\partial_x u - \partial_x^3 u\right)\right\} \\ &= -A^{-1}\left\{2u\partial_x u - 2\partial_x u\partial_x^2 u + uA\left(\partial_x u\right)\right\} \\ &= -A^{-1}\left\{2u\partial_x u - 2\partial_x u\partial_x^2 u + A\left(u\partial_x u\right) + 3\partial_x u\partial_x^2 u\right\} \\ &= -u\partial_x u - A^{-1}\left\{2\partial_x uAu + \partial_x u\partial_x^2 u\right\} = -u\partial_x u + A^{-1}B(u), \end{aligned}$$

où $B(u) = -2u\partial_x u - \partial_x u\partial_x^2 u$.

D'autre part, on a

$$v(t) = \gamma'(t) = u\left(t, \gamma(t)\right) = u(t) \circ \gamma(t).$$

D'où

$$\begin{aligned} v'(t) &= \partial_t u\left(t, \gamma(t)\right) + \gamma'(t)\partial_x u\left(t, \gamma(t)\right) \\ &= \partial_t u\left(t, \gamma(t)\right) + u\left(t, \gamma(t)\right)\partial_x u\left(t, \gamma(t)\right) \\ &= A^{-1}B(u)\left(t, \gamma(t)\right) = A^{-1}B\left\{v\left(t\right) \circ \gamma(t)^{-1}\right\}\left(t\right) \circ \gamma(t). \end{aligned}$$

Nous avons obtenu ainsi l'équation pseudo-différentielle

$$\left(v', \gamma'\right) = \left(A^{-1}B\left(v \circ \gamma^{-1}\right) \circ \gamma, v\right).$$

On vérifie directement que l'application

$$(h, f) \longmapsto B\left(h \circ f^{-1}\right) \circ f$$

est de classe C^1 de $C^n(S^1) \times \mathit{Diff}\, C^n(S^1)$ $(n \geq 2)$ dans $C^{n-2}(S^1)$. D'autre part, selon le lemme 3.3, l'application

$$(h, f) \longmapsto A^{-1}\left(h \circ f^{-1}\right) \circ f$$

est de classe C^1 de $C^{n-2}(S^1) \times \mathit{Diff}\, C^n(S^1)$ dans $C^n(S^1)$. Donc les applications

$$(h, f) \in C^n(S^1) \times \mathit{Diff}\, C^n(S^1) \longmapsto A^{-1}B\left(h \circ f^{-1}\right) \circ f \in C^n(S^1)$$

et

$$(h,f)\in C^n(S^1)\times \mathit{Diff}\,C^n(S^1)\longmapsto \left(A^{-1}B\left(h\circ f^{-1}\right)\circ f,h\right)\in C^n(S^1)\times C^n(S^1)$$

sont de classe C^1.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz affirme alors qu'il existe un voisinage ouvert V de $(0,Id)$ dans $C^3(S^1)\times \mathit{Diff}\,C^3(S^1)$ et un $\delta>0$ tels que le problème

$$(\mathcal{E})\quad \left\{\begin{array}{c} v'(t)=A^{-1}B\left\{v(t)\circ\gamma(t)^{-1}\right\}\circ\gamma(t),\\ \gamma'(t)=v(t),\\ v(0)=h,\gamma(0)=f,\end{array}\right.$$

possède une unique solution (v,γ) de classe C^2 définie sur $]-\delta,\delta[$ quel que soit $(h,f)\in V$, et que l'application

$$(t,h,f)\in\,]-\delta,\delta[\,\times V\longmapsto (v(t,h,f),\gamma(t,h,f))\in C^3(S^1)\times \mathit{Diff}\,C^3(S^1)$$

est de classe C^1.

De l'égalité $\gamma'=v$, il découle que $\gamma\in C^3\left(]-\delta,\delta[\,;\mathit{Diff}\,C^3(S^1)\right)$.

Pour $n\geq 1$, on pose $V_n=V\cap(C^{n+3}(S^1)\times \mathit{Diff}\,C^{n+3}(S^1))$. Notre but est de prouver que le problème $(\mathcal{E})$ admet une solution et une seule

$$(v_n,\gamma_n):\,]-\delta,\delta[\,\longrightarrow C^{n+3}(S^1)\times \mathit{Diff}\,C^{n+3}(S^1),$$

quel que soit $(h,f)\in V_n$.

Remarquons que l'unicité résulte immédiatement du théorème de Cauchy-Lipschitz.

Fixons maintenant $(h,f)\in V_1$. Selon toujours le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe $\alpha>0$ tel que le problème $(\mathcal{E})$ a une solution et une seule

$$(v_1,\gamma_1):\,]-\alpha,\alpha[\,\longrightarrow C^4(S^1)\times \mathit{Diff}\,C^4(S^1).$$

Supposons que l'intervalle $]-\alpha,\alpha[$ est maximal. Puisque $V_1\subset V_0=V$ et $C^4(S^1)\times \mathit{Diff}\,C^4(S^1)\subset C^3(S^1)\times \mathit{Diff}\,C^3(S^1)$, et à cause de l'unicité, on a

$$(v_1(t),\gamma_1(t))=(v_0(t),\gamma_0(t))=(v(t),\gamma(t))\,,\ t\in\,]-\alpha,\alpha[\,\cap\,]-\delta,\delta[\,. \tag{3.4}$$

D'où selon la formule (3.3), on a

$$\begin{aligned}\partial_x^2\gamma_1(t) &= \partial_x^2\gamma(t)=\frac{\partial_x^2\gamma(0)}{\partial_x\gamma(0)}\partial_x\gamma(t)+\partial_x\gamma(t)\int_0^t\partial_x\gamma(s)\gamma'(s)ds\\ &\quad -\tilde{J}(0)\partial_x\gamma(t)\int_0^t\frac{ds}{\partial_x\gamma(s)}\\ &= \frac{\partial_x^2 f}{\partial_x f}\partial_x\gamma(t)+\partial_x\gamma(t)\int_0^t\partial_x\gamma(s)v(s)ds\\ &\quad -\left((\partial_x f)^2A\left(h\circ f^{-1}\right)\circ f\right)\partial_x\gamma(t)\int_0^t\frac{ds}{\partial_x\gamma(s)}\end{aligned}\tag{3.5}$$

pour $t \in]-\alpha, \alpha[\cap]-\delta, \delta[$.

On suppose que $\alpha < \delta$. Dans ce cas, (3.4) et (3.5) affirment que

$$\lim_{t\to\alpha} \gamma_1(t) = \gamma(\alpha) \text{ dans } \mathit{Diff}C^3(S^1)$$

et

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\alpha} \partial_x^2\gamma_1(t) &= \frac{\partial_x^2 f}{\partial_x f}\partial_x\gamma(\alpha) + \partial_x\gamma(\alpha)\int_0^\alpha \partial_x\gamma(s)v(s)ds \\ &\quad - \left((\partial_x f)^2 A\left(h\circ f^{-1}\right)\circ f\right)\partial_x\gamma(\alpha)\int_0^\alpha \frac{ds}{\partial_x\gamma(s)}\end{aligned}$$

dans $C^2(S^1)$. Donc $\gamma(\alpha) \in \mathit{Diff}C^4(S^1)$ et

$$\lim_{t\to\alpha} \gamma_1(t) = \gamma(\alpha) \text{ dans } \mathit{Diff}C^4(S^1). \tag{3.6}$$

D'autre part, en dérivant la relation (3.5) par rapport à t, on obtient

$$\begin{aligned}\partial_x^2 v_1(t) &= \frac{\partial_x^2 f}{\partial_x f}\partial_x v(t) + \partial_x v(t)\int_0^t \partial_x\gamma(s)v(s)ds + \left(\partial_x\gamma(t)\right)^2 v(t) \\ &\quad - \left((\partial_x f)^2 A\left(h\circ f^{-1}\right)\circ f\right)\left(\partial_x v(t)\int_0^t \frac{ds}{\partial_x\gamma(s)} + 1\right).\end{aligned}$$

De cette relation et l'égalité (3.4), il vient:

$$\lim_{t\to\alpha} v_1(t) = v(\alpha) \text{ dans } C^3(S^1)$$

et

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\alpha} \partial_x^2 v_1(t) &= \frac{\partial_x^2 f}{\partial_x f}\partial_x v(\alpha) + \partial_x v(\alpha)\int_0^\alpha \partial_x\gamma(s)v(s)ds + \left(\partial_x\gamma(\alpha)\right)^2 v(\alpha) \\ &\quad - \left((\partial_x f)^2 A\left(h\circ f^{-1}\right)\circ f\right)\left(\partial_x v(\alpha)\int_0^\alpha \frac{ds}{\partial_x\gamma(s)} + 1\right)\end{aligned}$$

dans $C^2(S^1)$. D'où $v(\alpha) \in C^4(S^1)$ et

$$\lim_{t\to\alpha} v_1(t) = v(\alpha) \text{ dans } C^4(S^1). \tag{3.7}$$

Il est clair que, d'après (3.6), (3.7), et le théorème de Cauchy-Lipschitz, l'intervalle $]-\alpha, \alpha[$ n'est pas maximal, ce qui montre que l'hypothèse $\alpha < \delta$ est fausse, donc $\alpha \geq \delta$.

On fait la même chose pour prouver les cas $n \geq 2$.

On pose maintenant $U = V \cap (\mathfrak{X}(S^1) \times \mathit{Diff}\,(S^1))$. Comme l'injection canonique de $\mathfrak{X}(S^1) \times \mathit{Diff}\,(S^1)$ dans $C^3(S^1) \times \mathit{Diff}\,C^3(S^1)$ est continue, U est un ouvert de $\mathfrak{X}(S^1) \times \mathit{Diff}\,(S^1)$.

Soit $(h, f) \in U$. Puisque $U \subset V_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe d'après ce qui précéde, une géodésique et une seule

$$(t, x) \in \,]-\delta, \delta[\, \times S^1 \longmapsto \gamma\,(t, x) \in S^1$$

telle que

$$\gamma \in C^3\left(]-\delta, \delta[\,; \mathit{Diff}\,C^n\left(S^1\right)\right), \forall n \geq 1.$$

et

$$(\gamma'(0), \gamma(0)) = (h, f)\,.$$

D'où $\gamma \in C^3\,(]-\delta, \delta[\,; \mathit{Diff}\,(S^1))$.

La démonstration du théorème est ainsi terminée.

Le théorème suivant se démontre exactement comme le théorème 3.1.

Théorème 3.2. *Il existe un voisinage ouvert U de $((0,0)\,,(1, Id))$ dans l'espace $(\mathbb{R} \times \mathfrak{X}(S^1)) \times (S^1 \times_{VB} \mathit{Diff}\,(S^1))$ et un nombre réel $\delta > 0$ tels que, pour toute $(a, h, x, f) \in U$, il existe une géodésique unique*

$$\gamma \in C^3\left(]-\delta, \delta[\,; S^1 \times_{VB} \mathit{Diff}\,\left(S^1\right)\right)$$

vérifiant $\gamma(0) = (x, f)$ et $\gamma'(0) = (a, h)$.

Le résultat reste vrai si on remplace $S^1 \times_{VB} \mathit{Diff}\,(S^1)$ par $\mathbb{R} \times_{VB} \mathit{Diff}_{\mathcal{S}}\,(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R} \times \mathfrak{X}(S^1)$ par $\mathbb{R} \times \mathcal{S}(\mathbb{R})\partial_x$.

Conclusion

J'ai pu découvrir, au cours de la préparation de ce mémoire, la puissance de l'analyse globale. Je pense qu'il sera très intéressant, dans des travaux futurs, de considérer d'autres équations aux dérivées partielles et d'utiliser l'analyse globale pour régler quelques problèmes de la physique mathématique.

References

[1] V. Arnold, B. Khesin, *Topological methods in Hydrodynamics*, Applied Math. Sciences, Springer-Verlag, 1998.

[2] V. Arnold, *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations*, Springer-Verlag, New York, xi+334 pp, 1983. Fundamental principles of Mathematical Sciences, 250.

[3] V. Arnold, *Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits*, Ann. Inst. Fourier, 16 (1966), 319-361.

[4] V. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, 1978. Graduate Texts in Math. 60.

[5] R. Bott, *On the characteristic classes of groups of diffeomorphisms*, Enseign. Math., 23, 1977.

[6] R. Camassa, D. Holm, *An integrable shallow equation with peaked solutions*, Phys. Rev. Lett., 71 (1993), 1661-1664.

[7] A. Constantin, B. Kolev, *Geodesic flow on the diffeomorphism group of the circle*, Comm. Math. Helv., 78 (2003), 787-804.

[8] A. Constantin, T. Kappeler, B. Kolev, *On the geodesic exponential maps of the Virasoro group*, Preprint 13-2004, University of Zürich.

[9] K. Deimling, *Ordinary differential equations in Banach spaces*, Lecture notes in Mathematics, Vol. 596, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977.

[10] A. Frölicher, A. Kriegl, *Linear spaces and differentiation theory*, Pure and Applied Mathematics, J. Wiley, Chichester 1988.

[11] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, Vol. I, Vol. II, J. Wiley-Intersci-ence, 1963, 1969.

[12] S. Kouranbaeva, The Camassa-Holm equation on as a geodesic flow on the diffeomorphism group, J. Math. Phys., 40 (1999), 857-868.

[13] A. Kriegl, P. Michor, *The Convenient Setting for Global Analysis*, AMS, Providence, 1997, Surveys and Monographs 53.

[14] G. Misiolek, *Conjugate points in the Bott-Virasoro group and the KdV equation*, Proc. Amer. Math. Soc. 125 (1997), 935-940.

[15] G. Misiolek, *Classical solutions of the periodic Camassa-Holm equation*, GAFA, 12 (2002), 1080-1104.

[16] G. Misiolek, *A shallow water equation as a geodesic flow on the Bott-Virasoro group*, J. Geom. Phys., 24 (1998), 203-208.

[17] V. Ovsienko, B. Khesin, *Korteweg-de Vries superequation as an Euler equation*, Funct. Anal. Appl., 21 (1987), 329-331.

[18] F. Treves, *Topological vector spaces, distributions, and kernels*, Academic Press, New York, 1967.