



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté Des Sciences Appliquées

Département Génie mécanique

MEMOIRE

En vue de l'obtention du diplôme de

Magister

Spécialité : Génie pétrolier

Option : exploitation pétrolière

Présenté par :

CHERBI Mohamed Tahar

Thème

***Simulation par la méthode de Boltzmann sur réseau
de l'écoulement près des perforations
d'un puits d'huile soumis à une
opération de fracturation hydraulique***

Soutenu publiquement le : 29/05/2014

devant le jury composé de :

Mr. SETTOU Nouredine	Professeur	UKM, Ouargla	Président
Mr. BOUTOUTAOU Djamel	Maître de conférences	UKM, Ouargla	Examineur
Mr. ZEDDOURI Aziz	Maître de conférences	UKM, Ouargla	Examineur
Mr. BOUBEKRI Abdelghani	Maître de conférences	UKM, Ouargla	Promoteur
Mr. BENCHIKH Kamel	Maitre-assistant	UKM, Ouargla	Co-Promoteur

Année universitaire 2013/2014

Résumé

La méthode statistique de Boltzmann sur réseau est présentée pour simuler, par un modèle BR D2Q9, un écoulement monophasique dans un milieu poreux représenté par un échantillon de fissure résultante d'une fracturation hydraulique afin d'estimer certaines propriétés physiques du milieu étudié. Nous nous sommes intéressés à l'un des paramètres essentiels d'un milieu poreux qui est la perméabilité, par laquelle se base l'estimation de la productivité et fait l'objet de l'opération de fracturation hydraulique. Les exemples étudiés montrent l'aptitude de l'outil de simulations à produire des résultats d'estimation de la productivité très proches des évaluations expérimentales.

Mots-clés : simulation numérique, Boltzmann sur réseau, milieu poreux.

Abstract :

The statistical method of lattice Boltzmann is presented to simulate, by D2Q9 LBM model, a single-phase flow in porous media represented by a sample of crack resulting from hydraulic fracturing to estimate physical properties of the medium studied. We are interested in one of the essential parameters of a porous medium which is the permeability, by which the productivity estimation is based and been the subject of hydraulic fracturing operation. The examples studied show the ability of the simulation tool to produce productivity estimations results very close to the experimental evaluations.

Key words : numerical simulation, lattice Boltzmann, porous media.

ملخص :

يقدم الأسلوب الإحصائي لشبكة بولتزمان محاكاة ، من خلال نموذج BR D2Q9، تدفق سائل أحادي الطور في وسط مسامي ممثل في عينة من الكراكات الناتجة عن التكسير الهيدروليكي وهذا من أجل تقدير الخصائص الفيزيائية للوسط المدروس . وقد ركزنا في دراستنا على واحدة من أهم العوامل في الوسط المسامي والتي هي النفاذية، وبواسطتها يتم تقدير الإنتاجية وتمثل موضوع عملية التكسير الهيدروليكي. الأمثلة المدروسة تظهر قدرة أداة المحاكاة على تحقيق نتائج لتقدير الإنتاجية قريبة جدا من التقديرات التجريبية.

الكلمات المفتاحية : المحاكاة العددية، شبكة بولتزمان، وسط مسامي.

Remerciement

Je tiens tout d'abord à remercier en premier lieu ALLAH, le tout puissant, de m'avoir donné autant de courage, de patience et de volonté pour finaliser ce travail malgré que j'ai eu d'autres occupations durant cette période.

Je tiens à adresser mes plus vifs remerciements à mon promoteur, Monsieur, BOUBEKRI Abdelghani pour m'avoir encadré et pour la confiance qu'il m'a témoigné tout au long de ce travail. Je remercie aussi mon co-promoteur, Monsieur, BENCHÉIKH Kamel pour toute la documentation qui il m'a fournie et pour ses conseils et orientations.

Je remercie également notre enseignant, Monsieur, SETTOU Noureddine professeur à l'université de Ouargla d'avoir accepté d'examiner ce travail et d'avoir accepté de présider le jury de ce mémoire.

Je remercie vivement Messieurs BOUTOUTAOU Djamel et ZEDDOURI Aziz d'avoir accepté de faire parti du jury d'évaluation de ce mémoire.

Je remercie très vivement les membres de ma famille pour leurs soutiens et particulièrement ma petite famille pour sa compréhension et son aide.

Enfin, merci à tous qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce présent travail. Et que les personnes qui n'ont pas été citées puissent nous en excuser et trouver dans cette note l'expression de toute notre gratitude.

Merci à tous

CHERBI Mohamed Tahar

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à

Ma mère et mon père

Ma femme et mes enfants

Mes frères et sœurs ainsi que toutes leurs familles

Ma belle famille

Et à Tous mes amis

Sommaire

Introduction générale	1
------------------------------------	---

Chapitre 1 : Généralités sur la fracturation hydraulique

1.1	Concept de la fracturation hydraulique.....	3
1.2	Mécanismes de la fracturation hydraulique.....	4
1.3	Géométrie de la fracture.....	6
1.4	Conductivité adimensionnelle de la fracture.....	7
1.5	Modèles de fracturation hydraulique.....	8
1.6	Fluides de fracturation.....	10
1.7	Agents de soutènements.....	13
1.8	Réalisation d'une fracturation hydraulique.....	14
1.9	Estimation de l'extension des fractures.....	16
1.10	Les problèmes de fracturation hydraulique.....	17

Chapitre 2 : Généralités sur les milieux poreux

2.1	Caractéristiques des roches réservoirs.....	19
2.2	Modèles de perméabilité.....	22
2.3	Lois de transport des fluides interstitiels.....	27
2.4	Equations de transport des fluides interstitiels.....	29
2.5	Ecoulements dans les milieux poreux.....	31

Chapitre 3 : Méthode de Boltzmann sur réseau

3.1	Méthodes traditionnelles en dynamique des fluides.....	34
3.2	Méthode sans maillage.....	35
3.3	Origine de la méthode de Boltzmann sur réseau.....	36
3.4	Equation de Boltzmann.....	39
3.5	Méthode de Boltzmann sur réseau.....	42
3.6	Modèles de Boltzmann sur réseau isothermes.....	44
3.7	Les conditions aux limites dans la méthode LBM.....	48

Chapitre 4 : Simulation numérique & discussion des résultats

4.1	Algorithme de calcul.....	52
4.2	Conditions aux limites.....	54
4.3	Approximation BGK (Bhatnagar, Gross et Krook).....	55
4.4	Perméabilité.....	57
4.5	Validation du code de calcul.....	57
4.6	Simulation d'écoulement dans un milieu fracturé.....	60
4.7	Conversion des unités du réseau de Boltzmann en unités physiques.....	71
4.8	Conductivité de fracture.....	73
4.9	Influence du diamètre des perforations sur la productivité.....	73
4.10	Influence du diamètre des billes sur la productivité.....	75
	Conclusion générale et perspectives.....	79
	Références bibliographiques.....	81
	Annexe 1.....	85
	Annexe 2.....	87
	Annexe 3.....	92

Liste des figures

Fig. 1. 1	Schématisation de l'écoulement avant et après la fracturation.....	3
Fig. 1. 2	Evolution théorique de la pression du fond au cours de la fracturation hydraulique.....	5
Fig. 1. 3	Schéma de fracture verticale à une seule aile.....	7
Fig. 1. 4	Modèle GDK de fracture.....	8
Fig. 1. 5	Modèle PKN de fracture.....	9
Fig. 2. 1	Milieu poreux.....	20
Fig. 2. 2	Modèle de capillaires parallèles.....	22
Fig. 2. 3	Définition des axes et des angles pour le modèle de Saffman.....	23
Fig. 2. 4	Modèle de capillaire tortueux.....	23
Fig. 2. 5	Modèle de capillaire à section variable.....	25
Fig. 2. 6	Allure hypothétique des isovaleurs et des lignes de flux.....	27
Fig. 2. 7	Volumes de prise de moyenne.....	28
Fig. 2. 8	Filtration monophasique, lignes de flux et les isobares.....	29
Fig. 2. 9	Volume élémentaire représentatif VER pour un écoulement monophasique en milieu poreux.....	32
Fig. 3. 1	Classification des méthodes sans maillage.....	35
Fig. 3. 2	Dynamique d'une collision frontale dans le modèle HPP76.....	37
Fig. 3. 3	Collision frontale dans le modèle FHP86.....	38
Fig. 3. 4	Différents domaines d'applications de la méthode BR.....	44
Fig. 3. 5	Réseau du modèle D1Q3.....	45
Fig. 3. 6	Vecteurs de liaisons $(e_j)_{0 \leq j \leq 8}$ pour le réseau D2Q9.....	45
Fig. 3. 7	Réseau du modèle D3Q19.....	46
Fig. 3. 8	Représentation des faces correspondantes à un nœud réseau.....	48
Fig. 3. 9	Conditions aux limites de type Dirichlet «type On-grid».....	49
Fig. 3. 10	Conditions sans glissement, rebond mi-grille «Bounce Back Mid-grid».....	50
Fig. 4. 1	Schéma de l'algorithme du programme de calcul.....	53
Fig. 4. 2	Écoulement de poiseuille et conditions aux limites.....	58

Fig. 4. 3	Comparaison entre la solution analytique et celle de simulation du profil du rapport de vitesses $u_x(y)/u_{x_{max}}$	59
Fig. 4. 4	Modèle de simulation représentant une fissure résultante d'une fracturation hydraulique.....	62
Fig. 4. 5	Contours de vitesse horizontale pour différentes valeurs du gradient de pression (a) $\Delta p = 0.1$, (b) $\Delta p = 0.01$ et (c) $\Delta p = 0.001$	63
Fig. 4. 6	Courbes illustrant la convergence du résultat de simulation.....	65
Fig. 4. 7	Distribution de la vitesse horizontale moyenne calculée sur un plan perpendiculaire à la direction d'écoulement.....	65
Fig. 4. 8	Variation de la perméabilité adimensionnelle en fonction du gradient de pression....	66
Fig. 4. 9	Variation de la perméabilité adimensionnelle en fonction de la viscosité cinématique.....	67
Fig. 4. 10	Influence de la résolution sur la variation de la perméabilité en fonction de la viscosité cinématique.....	68
Fig. 4. 11	Deuxième variante du modèle de simulation représentant une fissure résultante d'une fracturation hydraulique.....	68
Fig. 4. 12	Comparaison entre la vitesse horizontale moyenne pour deux diamètres différents des billes.....	69
Fig. 4. 13	Comparaison entre la perméabilité adimensionnelle pour deux diamètres différents des billes.....	69
Fig. 4. 14	Vitesse horizontale adimensionnelle en fonction du gradient de pression.....	70
Fig. 4. 15	Variation de la conductivité en fonction du diamètre des perforations.....	74
Fig. 4. 16	Variation de la conductivité en fonction du diamètre des billes.....	75
Fig. 4. 17	Variation de la perméabilité en fonction du diamètre des billes (courbe tracée sur la base des données de la référence.....	76
Fig. 4. 18	Variation de la conductivité en fonction du diamètre des billes (courbe tracée sur la base des données de la référence.....	77

Liste des tableaux

Tab. 4. 1	Granulométrie des agents de soutènement.....	75
Tab. 4. 2	Perméabilité moyenne en fonction de la granulométrie.....	76

Nomenclature

Nomenclature latine :

a	diamètre des canaux microscopiques représentant un milieu poreux
C	conductivité de la fracture (<i>Darcys x mètre</i>)
c	vitesse de propagation nodale
c_s	célérité adimensionnelle du son en réseau
d	diamètre (m)
e	vecteur de vitesse nodale (unité)
F	force extérieure
f	fonction de distribution
f^{eq}	fonction de distribution à l'équilibre
f_M	fonction de distribution de Maxwell-Boltzmann
h	hauteur de la fracture
k	perméabilité (m ⁻²)
k_{tpl}	perméabilité adimensionnelle
m_0	masse d'une particule
N	nombre de particule
P	pression (Pa)
q	flux thermique (W)
Q	débit
R	constante du gaz parfait (J.mole ⁻¹ .K ⁻¹)
t	temps (s)
u, V	vitesse macroscopique (m.s ⁻¹)
w_i	facteurs de pondération (poids nodaux)

Nomenclature grecque :

α	représente la coordonnée de l'espace
β	coefficient d'expansion volumique (K^{-1})
ε	énergie interne ; porosité ; précision de calcul
λ	longueur de passage libre moyen (m)
μ	viscosité dynamique ($kg.m^{-1}.s^{-1}$)
ξ	vitesse microscopique
τ	temps de relaxation adimensionnel
ν	viscosité cinématique ($m^2.s^{-1}$)
ρ	masse volumique ($kg.m^{-3}$)
Ω	opérateur de collision
δ	Symbole de Kronecker
δ_t	pas de temps discret

Nombres adimensionnels :

Kn	nombre de Knudsen
Ma	nombre de Mach
Re	nombre de Reynolds

Indice :

i	direction selon x, indice de vecteur en réseau BR
j	direction selon y
eq	équilibre
lb	lattice Boltzmann (réseau de Boltzmann)
in	entrée
out	sortie

ne nord-est
nw nord-west
se sud-est
sw sud-west

Abréviations :

BGK Bhatnagar, Gross et Krook

FHP Frisch-Hasslacher-Pomeau

EF Éléments Finis

DF Différences Finie

VF Volumes Finis

BR Boltzmann sur Réseau

DdQq type de modèle BR (d : dimension de l'espace et q : nombre de vecteur de vitesse)

EDP Équation aux Dérivées Partielles

Termes en anglais :

LBM Lattice Boltzmann Method

LGA Lattice Gas Automata

MRT Multiple Relaxation Time

SBB Standard Bounce Back

CFD Computational Fluid Dynamics

PBC Periodic Boundary Conditions

BMP Bit Map Picture

INTRODUCTION GENERALE

Introduction générale

Les premières tentatives d'amélioration de la productivité des puits ont porté sur l'amélioration de la perméabilité de la formation au voisinage du puits, par une opération de fracturation. Le principe de la fracturation hydraulique consiste à fissurer la roche réservoir par accroissement d'une pression de fluide dans le puits, puis à maintenir la fracture ainsi créée par l'injection des agents de soutènement.

La perméabilité d'un milieu poreux, dans notre cas représentée par un échantillon de fissure résultant d'une fracturation hydraulique, est une caractéristique fondamentale et intrinsèque du milieu. Cette grandeur n'est pas facilement mesurable et les prédictions par des modèles analytiques représente un enjeu important pour différentes études sur les milieux poreux. Il existe de nombreux modèles analytiques qui permettent de prédire la perméabilité en fonction du taux de porosité. Ces modèles sont fondés sur des simplifications géométriques qui sont souvent éloignés de la microstructure réelle du milieu.

Bien que la mesure expérimentale directe de la perméabilité soit bien évidemment le moyen le plus efficace, cependant, elle est difficile lorsqu'il s'agit d'un domaine de faible épaisseur et lorsque l'écoulement à faible nombre de Reynolds, qui correspond à notre cas.

Pour ces raisons, le recours à des méthodes numériques pour évaluer la perméabilité devient le moyen le plus efficace, et surtout pour connaître l'influence de certaines configurations sur la valeur de la perméabilité.

Différentes méthodes numériques ont été conçues pour la simulation d'écoulement de fluide, cependant, l'application de ces méthodes dans les milieux poreux est très difficiles à cause de la complexité de l'implémentation des conditions aux limites. A cet effet une méthode dite de Boltzmann sur réseau est proposée pour la simulation à partir d'images binaires qui représentent des échantillons de fissures hydrauliquement fracturées, qui représente ainsi nos modèles d'étude.

La méthode de Boltzmann sur réseau `` Lattice Boltzmann method (LBM) `` est une approche simple et efficace pour les simulations numériques des écoulements de

fluide. Elle a été proposée pour la première fois dans les années 1980 et est basée sur les modèles de gaz sur réseau `` Lattice Gas Model ``.

Dans ce travail de mémoire, on se propose de modéliser numériquement, par la méthode de Boltzmann sur réseau, l'écoulement près des perforations d'un puits d'huile soumis à une opération de fracturation hydraulique. Pour ce faire, le premier chapitre décrit les mécanismes et modèles de fracturation hydraulique, le déroulement de l'application, le fluide de fracturation, les agents de soutènement et les diverses méthodes pour estimer ou contrôler l'extension des fractures.

Dans le deuxième chapitre on présente des généralités sur les milieux poreux à savoir : les caractéristiques des roches réservoirs, les modèles de perméabilité, les équations et lois de transport des fluides interstitiels et l'écoulement monophasique dans les milieux poreux.

Le troisième chapitre présente la méthode de Boltzmann sur réseau, principalement son origine, sa dérivation de la théorie cinétique des gaz, les différents modèles isothermes de la méthode et les différents types de conditions aux limites.

Dans le dernier chapitre nous avons mis en application la méthode pour la simulation de l'écoulement de fluide monophasique et isotherme, tout en présentant et discutant les résultats obtenus pour le calcul de la perméabilité, et d'établir des relations graphiques liants la perméabilité aux paramètres de fracturations hydraulique à savoir : le diamètre des agents de soutènement et le diamètre des perforations.

Nous avons terminés ce mémoire par une conclusion générale en mettant l'accent sur les principaux résultats ainsi que sur les perspectives de ce travail.

CHAPITRE 1

Généralités sur la fracturation hydraulique

Introduction :

La fracturation hydraulique consiste à l'injection d'un fluide de traitement à une pression supérieure à la pression de fracturation de la formation, grâce auquel on crée des cassures ou fissures dans la formation, ouvrant ainsi des canaux à très forte perméabilité, dans lesquels l'effluent peut s'écouler beaucoup plus facilement, ce qui augmente le débit du puits et la productivité.

L'idée d'une rupture de la formation est clairement exprimée en 1934. Le premier emploi de la fracturation hydraulique a été réalisée en 1947 sur le puits "Klepper No. 1" dans le gisement de gaz de Hugoton en USA [1].

Le recours à la fracturation hydraulique a largement précédé dans le temps de l'exploitation des gaz non conventionnels. Déjà, en 1990, bien avant les premières exploitations commerciales de gaz de schiste, plus d'un million de puits avaient été fracturés hydrauliquement aux États-Unis [2].

1.1 Concept de la fracturation hydraulique :

La fracturation hydraulique est une opération qui consiste à créer, après rupture de la roche, un drain perméable s'étendant le plus loin possible dans la formation de manière à faciliter l'écoulement vers le fond du puits.

Un puits de forage traditionnel non fracturé est schématisé dans la partie supérieure de la Fig.1.1, où les flèches rouges représentent le flux de fluide vers le puits. Cependant, après une opération de fracturation, des molécules individuelles très éloignés du puits peuvent trouver leur chemin à la fracture et puis se déplacer rapidement à travers la fracture. Cette situation est représentée dans la partie inférieure de la Fig.1.1.

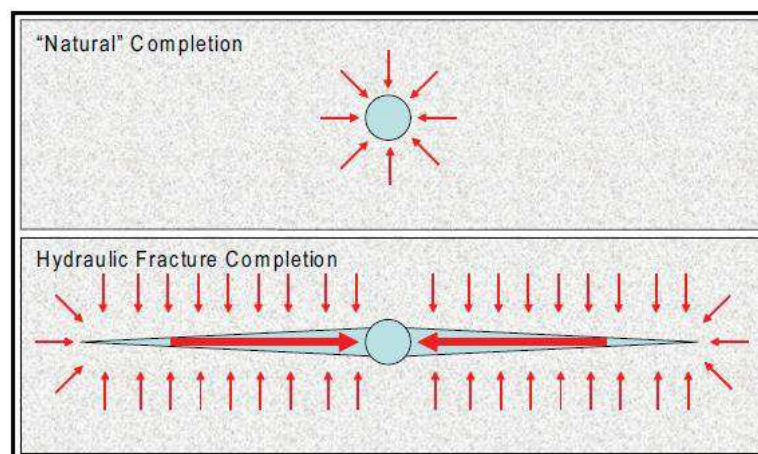


Fig.1.1 : Schématisation de l'écoulement avant et après la fracturation [3].

Ce procédé s'applique au cas où le débit d'un puits est insuffisant, non pas à cause d'un problème de colmatage, mais par ce que la perméabilité naturelle de la matrice est faible (quelques dizaines de milli darcys pour les gisements d'huile, encore moins pour les gisements de gaz).

Le principe de la fracturation hydraulique consiste à injecter un fluide plus ou moins visqueux avec une grande pression pour fracturer la roche réservoir et il est accompagné souvent de solide (agents de soutènement) pour maintenir la fracture ouverte et que le fluide puisse circuler plus facilement entre le réservoir et le puits (puits producteur) ou entre le puits et le réservoir (puits injecteur).

Dans le cas favorable on peut en atteindre des gains dans la production (injection) de 2 à 3 fois la productivité (l'injectivité) initiale [4].

La fracturation hydraulique a d'autres applications, parmi elles, on cite les plus importantes qui sont :

- Le développement des fractures horizontales dans les couches de sel, pour la circulation d'eau entre deux puits en vue de création des cavités de stockage des hydrocarbures.
- Stockage des polluants industriels, radioactifs ou chimique, dans les couches imperméables (argiles, marnes) du sous-sol.
- Exploitation minière de certains gisements.

Au cours de la fracturation hydraulique, le fluide est pompé dans le tubage de production, à travers les perforations.

1.2 Mécanismes de la fracturation hydraulique :

La fracturation hydraulique consiste à injecter, à un débit approprié, un fluide plus ou moins visqueux de manière à créer, au droit de la formation productrice, une pression croissante au fur et à mesure que l'injection se poursuit.

1.2.1 Initiation et extension de la fracture :

La fracturation de la roche à la paroi du puits intervient à une pression appelée pression d'initiation de la fracture P_{c1} . Le schéma ci-dessous (Fig. 1.2) représente le profil de pression en fonction du temps pour un traitement de fracture.

La pression instantanée quand les pompes sont arrêtées est égale à P_s , l'extension de la fracture s'effectue à une pression appelée la pression d'extension P_{c2} , inférieure ou égale à la pression d'initiation.

Dans la roche, la fracture propage dans un plan perpendiculaire à la plus petite contrainte s'exerçant sur le réservoir.

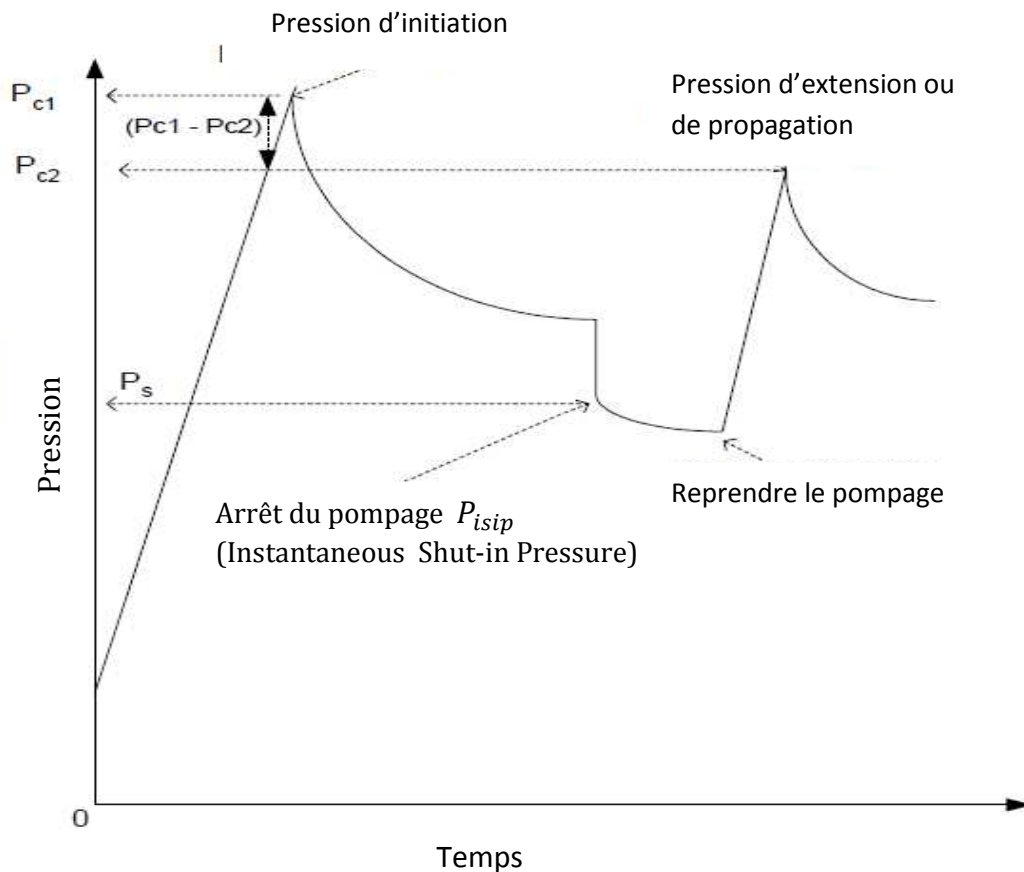


Fig.1.2 : Evolution théorique de la pression du fond au cours de la fracturation hydraulique [5].

On distingue aussi l'orientation de la fracture selon la profondeur :

A faible profondeur, moins de 600 m, la fracture se développe généralement dans un plan horizontal.

Aux profondeurs plus importantes, et en particulier au-delà de 1000 m, la fracture se développe généralement dans un plan vertical.

1. 2 . 2 *Maintien de l'ouverture de la fracture :*

Il faut distinguer deux cas :

- Dans les formations carbonatées on utilise un fluide de fracturation contenant de l'acide chlorhydrique (HCL) assez concentré. Cet acide rongé irrégulièrement les parois de la formation et l'empêche de se renfermer lorsqu'on arrête le pompage et permet, par conséquent, le passage du fluide, on l'appelle fracturation acide.
- Dans la formation gréseuses des agents de soutènement présentant une très bonne perméabilité (sable, billes de verre) sont mélangés au fluide de fracturation (généralement un fluide à haute viscosité) et sont entraînés dans la fracture par ce fluide. Les agents de soutènement empêchent la fracture de se renfermer quand on arrête le pompage en fin de traitement; les agents de soutènement ne doivent commence à être pompé que lorsque la fracture a atteint des dimensions géométriques (épaisseur de fracture particulièrement) suffisantes pour laisser passer ces derniers.

1. 3 **Géométrie de la fracture :**

Dans le cas d'une fracture verticale, on admet généralement :

- soit une fracture verticale symétrique par rapport au puits.
- soit une fracture totalement asymétrique par rapport au puits.
- soit partiellement asymétrique.

Dans le cas d'une fracture horizontale, la géométrie radiale circulaire ne représente évidemment qu'une grossière approximation, il existe toujours un développement préférentiel à l'échelle du champ.

Les dimensions d'une fracture, comme illustre le schéma (Fig. 1.3), sont définies par :

1. 3. 1 *La longueur X_f :*

C'est la distance entre le puits et le point situé au bout de la fracture, donc elle peut être la longueur ou la demi-longueur d'une fracture suivant que ce dernier est composé de un ou deux ailes symétriques.

1. 3. 2 L'épaisseur W :

C'est l'écartement entre les deux faces verticales de la fracture.

1. 3. 3 La hauteur H :

C'est la distance suivant la verticale entre les deux points associés à une épaisseur nulle

Tout cela concerne la fracture verticale, pour ce qui est de la fracture horizontale on aura la hauteur qui remplace l'épaisseur et le contraire.

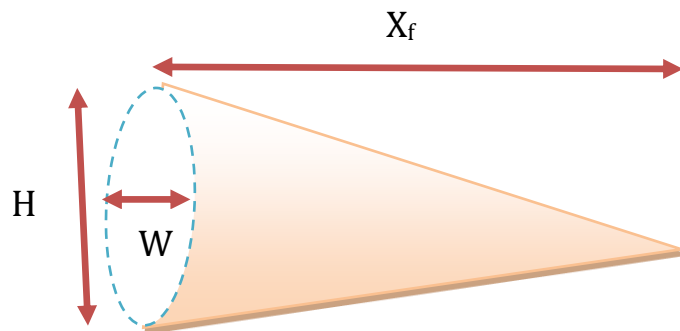


Fig.1.3 : Schéma de fracture verticale à une seule aile.

1. 4 Conductivité adimensionnelle de la fracture :

La conductivité d'une fracture soutenue est le produit de de la perméabilité K_f du matériau granulaire utilisé par la largeur W_f de la fracture. La conductivité adimensionnelle F_{CD} de la fracture est représentée par le rapport : [6]

$$F_{CD} = \frac{K_f \cdot W_f}{K \cdot X_f} \quad (1.1)$$

Ou :

X_f : Extension de la fracture.

W_f : Epaisseur de la fracture.

K : La perméabilité de la formation.

K_f : La perméabilité de la fracture.

$C_f = K_f * W_f$: Conductivité de la fracture

Nous verrons que cette variable est importante dans la conception d'un processus de traitement de fracture.

1.5 Modèles de fracturation hydraulique :

La modélisation de la géométrie de la fracture est basée sur certaines hypothèses à savoir : l'écoulement de fluide et la mécanique de la rupture. Les premiers travaux sur la modélisation de la fracturation hydraulique ont été réalisés par plusieurs chercheurs russes (résumés par Khristianovich et al . en 1959) [4].

Plusieurs études " modèles analytiques " ont été proposées pour approcher et décrire la propagation de la fracture. Parmi eux on distingue les modèles pseudo tridimensionnelle de GEERTSMA et DE KLERK (GDK) et celui de PERKINS et NORDGEN (PKN) [4].

1.5.1 Modèle GEERTSMA et DE KLERK (GDK) :

Ce modèle propose que la fracture se propage sous une forme rectangulaire suivant une direction perpendiculaire à la contrainte horizontale minimale, il est très utile lorsque la formation présente un décroissement de la pression durant le pompage. Ces auteurs supposent aussi que la fissure possède la même épaisseur en n'importe quelle distance du puits indépendamment de sa position verticale, et elle a une hauteur fixe (Fig 1.4).

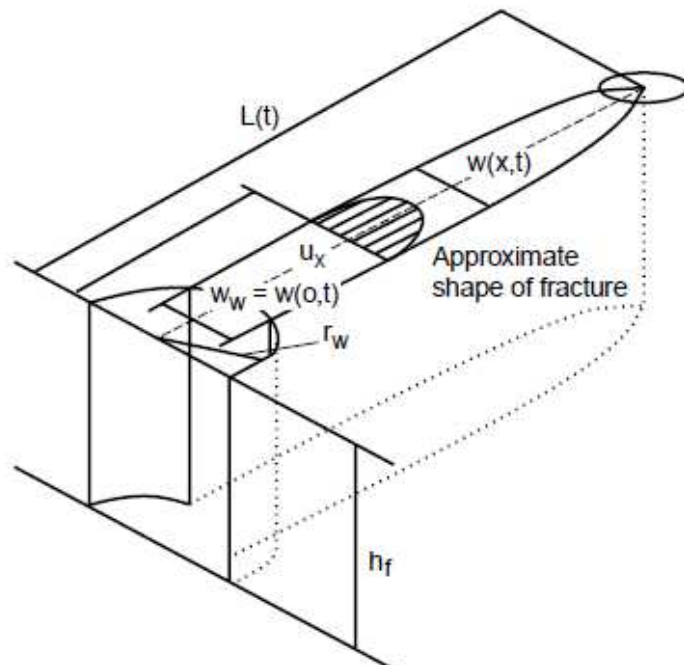


Fig.1.4 : Modèle GDK de fracture [7].

1. 5. 2 *Modèle PERKINS et NORDGEN (PKN) :*

Perkins et Kern suppose aussi que la fracture a une hauteur fixe et se propage dans la direction normale à la contrainte horizontale minimale, il est très utile lorsque la pression présente un accroissement pendant le pompage. Le plan de référence pour ce modèle est vertical et l'épaisseur de la fracture varie selon ce plan (suivant la hauteur de la fracture) qui est perpendiculaire à la direction de propagation. Dans ce cas la section est supposée elliptique (Fig 1.5).

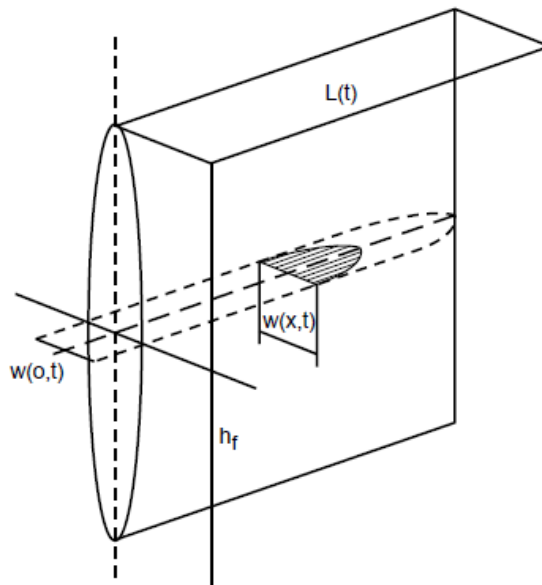


Fig.1.5 : Modèle PKN de fracture [7].

1. 5. 3 *Comparaison entre les modèles GDK et PKN :*

Contrairement au modèle PKN, la propagation de la fracture dans le modèle GDK diminue avec le temps, d'ailleurs si on compare, dans le cas d'une grande pénétration de fluide, les largeurs de la fracture, pour des faibles valeurs de longueurs, le modèle GDK est le plus valable que le PKN. Alors que pour des grandes valeurs de longueur, c'est le modèle PKN qui devient le plus adéquat.

Le contraste de PKN par rapport à GDK peut donc apparaître clairement pour des petites et grandes valeurs de L/h . Ce résultat n'est plus étonnant depuis que la géométrie de PKN (section plane et verticale des contraintes) est seulement validée pour des hauteurs beaucoup plus petites que les longueurs. D'ailleurs, le domaine de validité de la géométrie de GDK (section plane et horizontale de contrainte) est dans le cas où la longueur est inférieure à la hauteur.

1.6 Fluides de fracturation :

Les rôles de base d'un fluide de fracturation sont :

- Initiation et développement de la fracture.
- Transport des agents de soutènement.

Cela implique que le fluide doit avoir les qualités suivantes :

- Une filtration aussi basse que possible.
- Une viscosité suffisamment élevée, ce paramètre favorise une grande largeur « w » et une extension importante, et assure un bon transport et placement des agents de soutènements.
- Etre propre en tant que fluide de base (bonne compatibilité avec les fluides de formation, faible teneur en produits solides insolubles).
- Bonne compatibilité avec la roche et minimise la création de produits insolubles.
- Doit être facilement pompé (faible perte de charge).
- Doit faciliter le dégorgement.
- Ne doit pas être dangereux.
- N'est pas polluant.
- Etre économiquement que possible.

On indique que ce fluide n'existe pas d'emblée. Un compromis est toujours nécessaire à ce niveau. Selon les cas, tel ou tel facteur sera prépondérant, la compatibilité restant en tout état de cause un élément indispensable, On distingue :

Le fluide de base le plus classique est l'eau, ce type de fluide possède plusieurs avantages (faible filtration, bon transport du soutènement, puissance minimum requise pour le pompage, sécurité d'emploi, efficace avec un large champ d'application, pas de pollution, coût relativement faible).

Les fluides à base d'huile sont rarement utilisés à cause de certains inconvénients (problème de sécurité, mise en œuvre plus délicate, coût élevé, possibilité de pollution).

Les émulsions à base d'eau et d'huile sont aussi utilisées, celles à base d'acide existent également. Les émulsions du type eau dans l'huile ont laissé la place aux émulsions huile dans l'eau dont les caractéristiques s'avèrent bien meilleures. Ces fluides sont recommandés pour les traitements très importants à forte pénétration.

les mousses aussi utilisées en fracturation hydraulique en faisant appel à un mélange de liquide et d'azote ou de gaz carbonique, celles-ci sont généralement recommandées pour les réservoirs à faible ou moyenne profondeur et de préférence à gaz.

1. 6. 1 *Filtration et efficacité :*

a. Filtration de fluide :

Pendant le traitement, une certaine quantité de fluide de fracturation filtre dans la formation et ne contribue pas à l'extension de la fracture.

La filtration est influencée par la compressibilité de fluide de gisement, la viscosité du fluide de fracturation et les additifs.

b. Contrôle de filtration :

L'efficacité est diminuée quand la roche à une perméabilité élevée et par conséquent une filtration importante. Cependant le contrôle de filtration est nécessaire surtout dans le cas où la formation contient des fissures susceptibles d'augmenter la perte de fluide de fracturation, préjudiciable au développement de la fracture, donc à la réussite de l'opération de fracturation.

Le test de minifrac permet d'estimer le coefficient de filtration, pour cela, une quantité très importante de fluide sans agents de soutènement est injectée à une pression supérieure à celle de la fracturation.

c. L'efficacité :

L'efficacité est définie comme étant le volume de la fracture divisé par le volume totale pompé. Elle dépend du débit, de la viscosité du fluide de fracturation et des caractéristiques de la roche.

Plus que le débit est élevé, plus que le temps de pompage et la filtration totale sont diminués et la longueur augmente et par conséquent l'efficacité augmente. Et plus le fluide de fracturation est visqueux, plus les pertes de charge dans la fracture sont élevées alors la pression augmente, la filtration diminue et l'efficacité augmente.

1. 6. 2 *Les additifs pour les fluides de fracturation :*

De nombreux additifs sont souvent employés dans l'opération de la fracturation hydraulique. Le choix de leur concentration et de leur nature se fait avec soin en fonction des conditions de gisement et les conditions opératoires.

- a. Les agents gélifiants** : qui permettent d'augmenter la viscosité de fluide de base et de réduire sa filtration ainsi que son coefficient de friction. Ce sont généralement des solubles dans le fluide de base, mais dans le cas où le gélifiant utilisé présente une faible vitesse d'hydratation ou quand le puits est à faible profondeur le gel doit être préparé en avance pour permettre son hydratation avant qu'il arrive au niveau du réservoir.
- b. Réticulant** : développent de très fortes liaisons entre les molécules d'un gel linéaire (Ti, Zr, Al, H₃BO₃).
- c. Activateur** : permet d'accélérer la réticulation par modification du Ph.
- d. Briseurs de gel** : utilisés en vue de dégorgement des puits à la fin de l'opération. Ils sont incorporés au gel dès le départ et leur concentration dépend de la durée de vie souhaitée pour le gel et de la température de fond (K, Na, S₂O₈⁻²).
- e. Réducteurs de friction** : destinés à réduire les pertes de charge dues au pompage à débit élevé dans les tubulaires. On trouve les polymères à faible concentration pour les fluides de base d'eau et des additifs liquides pour les fluides à base d'huile.
- f. Réducteurs de filtrat** : destinés à diminuer la filtration du fluide à travers les faces de la fracture, et par conséquent, à augmenter les dimensions géométriques de celle-ci. Les réducteurs de filtrat ne garantissent pas une absence totale de filtration à travers les faces de la fracture. On estime que la moitié du fluide est susceptible de filtrer et que jusqu'à 80% du volume total peut être ainsi perdu dans la formation dans certains cas.
- g. Les agents de diversion** : en particulier quand on va réaliser une fracturation multiple.
- h. Les agents tensioactifs** : facilitent le reflux de fluide de fracturation hors la formation après traitement.
- i. Bactéricides** : destinés à traiter certaines eaux saumâtres que l'on peut rencontrer et qui ne doivent pas être utilisées telles quelles. Les bactéricides ont pour but de détruire tout composant organique qui pourrait par la suite modifier les propriétés du gel ou engendrer un développement bactérien dans la formation.

1.7 Agents de soutènements :

Il faut maintenir la fracture ouverte après l'opération de cassure de la roche. On notera d'abord que la perméabilité de fracture doit être considérée par rapport à celle de la couche. Ceci veut dire qu'une fracture très perméable n'est pas toujours nécessaire pour drainer une couche qui l'est très peu. Aussi, la conductivité de fracture doit rester suffisante de façon permanente en conditions d'exploitation des puits (température, contraintes, effluents).

Ce qui a été dit plus haut impose au soutènement :

- de posséder un certain nombre de qualités propres.
- de pouvoir être transporté convenablement car seules les parties soutenues participent à la conductivité de fracture.

Les propriétés qu'un soutènement idéal devrait posséder sont les suivantes :

- Granulométrie et forme :
 - susceptibles de générer une bonne conductivité.
 - compatible avec la largeur de fracture.
- Non incrustation dans les faces de fracture.
- Résistance mécanique aux contraintes in-situ en exploitation (déformation plastique, rupture).
- Résistance chimique en conditions de fond avec le temps (température, dissolution par les effluents, vieillissement).
- Densité compatible avec un transport optimum (sédimentation).
- Non détérioration des installations lors du pompage.

1.7.1 Principaux agents de soutènements :

De nombreux matériaux ont été essayés sur champs. Citons, la grenaille d'aluminium, les coquilles de noix, les billes de verre, des polymères type rilsan, des billes d'acier.

Pour des raisons diverses à savoir : densité, fluage, tenue médiocre en température, dissolution et colmatage après casse, ils ont été plus ou moins rapidement abandonnés.

Le compromis nécessaire entre les propriétés idéales et l'aspect pratique a conduit à retenir essentiellement les deux catégories suivantes :

a. Le sable :

Matériau de type élasto-fragile très populaire, aillant un bon rapport qualité/prix à une densité $2,65 \text{ g/cm}^3$. Il est très employé pour des contraintes de fond faible à moyenne n'excédant pas 400 à 500 bars.

b. Les agents intermédiaires:

Matériaux de type élasto-plastique, de meilleure résistance aux contraintes (500 à 1000 bar) mais de densité plus élevée que le sable ($d= 3.2$). Ce sont des bauxites frittées et certains oxydes de zirconium. Ils représentent une très bonne solution de compromis quand les conditions ne sont pas extrêmes. C'est entre autres le cas de la carbolite qui présente par ailleurs une réponse positive à la diagraphie Gamma Ray.

c. Soutènement de haute résistance (bauxites) :

Ils sont de même type que les précédents : bauxites et oxydes de zirconium, mais de caractéristique « haute de gamme » avec des contraintes admissibles de 1000 bar, d'une part à une densité importante ($d=3.7$) et d'autre part un cout très élevé.

1. 7. 2 *Mise en place des soutènements :*

Il existe deux techniques différentes pour la mise en place des agents de soutènement. L'une dite « méthode des piliers », Le soutènement est injecté en volumes partiels successifs séparés par des bouchons de fluide de frac. La fracture est prévue de rester ouverte entre les piliers de soutènement lors de l'exploitation. L'autre méthode, dite de « bourrage multicouche », qui consiste en une injection continue de soutènement avec augmentation progressive du diamètre du matériau injecté et de sa concentration.

1. 8 Réalisation d'une fracturation hydraulique [8] :

1. 8. 1 *Préparation du puits :*

- Essai sur puits pour estimer la conductivité actuel et l'état de déplétion.
- Nettoyage mécanique après détermination du top sédiment.
- Nettoyage à l'acide Chlorhydrique pour le nettoyage des tubages et puis dégorgeage du puits.

1. 8. 2 *Procédure de sécurité du pré-job :*

- Test de pression de toutes les lignes à 10 000 psi.

- Test des lignes des annulaires 7" à 5000 psi.
- Test des lignes des annulaires 9 5/8 à 5000 psi.

Ces pressions doivent être maintenues au moins 10 minutes.

- Placer une soupape de sécurité pour l'annulaire 7", mettre la pression à 3800 psi et une autre pour le 9 5/8.
- Ouvrir la vanne maîtresse de la tête de puits puis augmenter en pression sur le 9 5/8 de 500 psi et garder cette pression pendant le job.
- Augmenter la pression sur le 7" à 1000 psi et maintenir cette pression de 2500 à 3000 psi pendant le job.

1. 8. 3 Test d'injectivité :

Il consiste à injecter un fluide dans la formation et cela à faible débit et l'augmenter par segment à petit pas. Le débit est maintenu pendant un moment jusqu'à la stabilisation de la pression puis suivie d'une courte chute de pression ISIP (Instantaneous Shut In Pressure) pour chaque injection est tracé en opposition avec le débit d'injection pour obtenir la pression de l'extension de la fracture.

Les fluides de test d'injectivité :

- Eau traité.
- Saumure gélifié ou non.

Ce test d'injectivité permet de :

- Vérifier si la formation absorbe le fluide d'injection.
 - Déterminer le gradient de frac et en suite la pression en tête.
1. Injection du Reformat pour dissoudre les asphaltènes aux abords du puits et améliorer les caractéristiques de la roche (Pour les puits présentant un problème d'asphaltène).
 2. Eau traité (Spacer) c'est un bouchon d'eau séparant le reformat de l'acide.
 3. Injection de l'acide 15% HCl pour faciliter l'initiation de la fracture et essayer de dissoudre l'endommagement aux abords du puits (pouvant exister).
 4. Injection de gel linéaire pour permettre d'atteindre le débit de traitement maximal avant l'injection du cross Linked gel.

5. Injection du cross linked gel avec le débit de traitement maximal.
6. Déplacer le cross linked gel par du gel linéaire.
7. Enregistrement de la chute de pression.
8. Enregistrement du profil de température 4 heures à 6 heures après l'arrêt du pompage.
9. Déroulement de la fracturation hydraulique (main treatment), le traitement type se subdivise en trois étapes distinctes.
 - Développement de la fracture par le PAD.
 - Injection du PROPPANT (agent de soutènement).
 - Déplacement ou chasse de la totalité de l'agent de soutènement par le gel linéaire.

1.9 Estimation de l'extension des fractures :

L'estimation de l'extension des fractures se fait par plusieurs techniques [9] :

1.9.1 *Thermométries et diagaphies de production :*

a. Thermométries :

Les enregistrements thermométriques permettent en général d'obtenir des indications précises sur l'extension verticale de la fracture aux abords immédiats du puits, il peut être appliqué dans les puits tubés et perforés comme dans les puits en découvert. Les enregistrements doivent être effectués à différentes époques et commencés environ deux heures après la fin du pompage. Dans les puits tubés, il est parfois possible de repérer l'extension verticale de la fracture avec une grande précision à condition que la cimentation soit correcte (pas de cheminement du fluide "channeling" derrière le tubage). Mais dans les puits en découvert l'interprétation des résultats est souvent plus difficile et la hauteur de la fracture ne peut être estimée avec la même précision.

b. Débitmètres :

Le débitmètre n'est pas très couramment utilisé pour localiser les fractures induites par la fracturation hydraulique. Toutefois, son emploi après un test d'injectivité permet de compléter les informations données par les enregistrements thermométriques.

c. Diamètreur :

Le diamètreur est indispensable dans les puits en découvert pour interpréter le débitmètre continu. Ainsi de fournir des indications utiles dans les puits tubés, s'il y a rupture, obstruction ou éclatement du tubage.

1. 9. 2 Traceurs radioactifs :

L'utilisation d'un traceur avec soutènement permet de déterminer l'orientation verticale ou horizontale de la fracture et de contrôler son extension verticale par comparaison avec un enregistrement de référence.

1. 9. 3 L'enregistrement de logs soniques :

Le log sonique permet d'enregistrer l'amplitude de l'onde de cisaillement avant et après la stimulation, cela conduit à déceler par comparaison la présence d'une fracture induite et son extension lorsqu'elle est verticale.

1. 10 Les problèmes de fracturation hydraulique :

Malgré le progrès qu'a connu la technique de fracturation, sa réalisation sur chantier rencontre toujours des problèmes dont on cite [10] :

1. 10. 1 Phénomène de tortuosité :

L'existence de la tortuosité aux abords du puits est due essentiellement à la courbure du chemin initié des abords du puits jusqu'au bout de la fracture. Il peut être causé soit :

- Par une mauvaise cimentation.
- Par la distribution des contraintes par rapport aux perforations.

La création d'un tel chemin dans le puits provoque l'augmentation de la pression de fond pendant le pompage et dans certain cas des Screen-out prématurés.

1. 10. 2 Colmatage :

Un traitement par fracturation conçu pour améliorer la productivité d'un réservoir, mais il peut être une source de colmatage de la formation. Cela est dû :

- **Aux fluides de fracturation**

Le fluide de fracturation peut causer l'endommagement de la formation et/ou de la conductivité de la fracture, et cela par :

- La formation d'émulsion avec le fluide de formation.

- La haute viscosité qui cause un mauvais dégorgement.
- Les résidus laissés en place après la dégradation du fluide.
- **Aux agents de soutènement :**

Les facteurs qui peuvent influencer considérablement sur la perméabilité créée par les agents de soutènement (Proppant) sont :

- Les restes insolubles contenus à l'origine dans le fluide, ou formés pendant la dégradation du fluide dans la fracture et dans les pores de la formation.
- L'écrasement du Proppant dans la formation qui est dû au mauvais choix des agents de soutènement.

1. 10. 3 *Screen-Out :*

L'augmentation de la pression, à partir du moment où les billes arrivent au fond, est due au Screen-Out à l'entrée.

1. 10. 4 *Autres problèmes :*

- Percées du gaz et d'eau dues à l'extension de la fracture vers les zones affectées par les puits injecteurs voisins.
- Communication tubing-annulaire au cours de l'opération.

Conclusion :

La fracturation hydraulique a été, et demeurera, l'un des outils nécessaires pour bien améliorer la productivité des puits à faible ou à moyenne perméabilité.

La fracturation hydraulique est une solution pour les formations compactes, ou bien pour les puits sévèrement endommagés lors du forage, par ailleurs, elle est une opération très coûteuse.

Il est important de se donner le temps nécessaire pour l'établissement d'un design de fracturation hydraulique, afin d'envisager toutes les variantes possibles, et par la même de minimiser le pourcentage d'échec, sachant que mondialement le taux de réussite n'est pas élevé. De plus, un tel travail n'est pas celui d'un seul ingénieur, mais celui d'une équipe pluridisciplinaire (réservoir, géologie, production,...).

CHAPITRE 2

Généralités sur les milieux poreux

Introduction :

Un milieu poreux se compose d'une matrice solide et de son complément géométrique, l'espace poreux. La matrice solide peut être granulaire ou consolidée. L'espace poreux est occupé par un ou plusieurs fluides.

2.1 Caractéristiques des roches réservoirs :

Au cours du forage d'un puits, il est très important de connaître les caractéristiques des couches traversées susceptibles d'être productrices. Dans cette intention, on procède généralement à un carottage mécanique qui permet d'extraire des échantillons de roches qu'on analyse en laboratoire. Les mesures effectuées ont pour but de déterminer la porosité, la perméabilité et les saturations en fluides de la roche ainsi que les limites des zones intéressantes.

2.1.1 Porosité (ϵ) :

Une roche sédimentaire est constituée de particules solides agglomérées ou cimentées, entre lesquelles existent des espaces, appelés "pores" ou parfois "vides", constituant des canaux microscopiques (diamètre de l'ordre de quelques dixièmes de micron).

Soit un échantillon de roche de volume total V_T comprenant un volume solide V_S tel que, $(V_T - V_S)$ représente le volume occupé par les fluides, c'est-à-dire le volume de pore V_P . Sa porosité s'exprime par le rapport :

$$\epsilon = V_P / V_T = (V_T - V_S) / V_T \quad (2.1)$$

On s'intéresse particulièrement à la porosité utile (*Fig.2.1*), c'est-à-dire celle qui ne tient compte que des pores qui communiquent entre eux et avec l'extérieur.

Les roches réservoirs ont des porosités très variables, généralement comprises entre 10 et 30 %.

Les valeurs de porosité sont obtenues par des mesures sur carottes, et par les diagraphies.

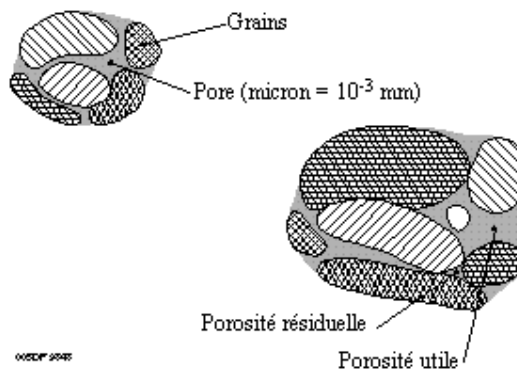


Fig.2.1 : Milieu poreux [11].

2.1.2 Perméabilité (k) :

C'est le paramètre clé pour le producteur. La perméabilité caractérise l'aptitude qu'une roche à laisser s'écouler des fluides à travers ses pores. La perméabilité (k) est le coefficient de proportionnalité qui relie le débit (Q) d'un fluide de viscosité (μ) qui passe à travers un échantillon de roche de section (S) et de longueur (dl), à une chute de pression (dP) nécessaire à son passage :

$$Q = k \cdot \frac{S \cdot dP}{\mu \cdot dl} \quad (2.2)$$

La dernière relation représente la loi de Darcy pour un liquide en écoulement linéaire et en régime permanent.

On utilise en pratique le milli Darcy (md) comme unité de mesure de la perméabilité, les gisements exploités ayant généralement une perméabilité de 20 à 300 mds.

Le Darcy est la perméabilité d'un milieu qui laisse passer 1cm^3 par seconde d'un fluide dont la viscosité est de 1 centpoise (viscosité de l'eau à 20 °C) sous l'effet d'un gradient de pression d'une atmosphère par centimètre à travers une surface de 1cm^2 .

$$1 \text{ Darcy} \approx 10^{-12}\text{m}^2, \quad 1 \text{ milli Darcy} = 10^{-3}\text{Darcy}$$

A noter que la perméabilité a les dimensions d'une surface.

La perméabilité d'une roche varie avec la direction considérée et l'on peut distinguer les perméabilités horizontales, verticale, parallèle au pendage et perpendiculaire à celui-ci.

Les valeurs des perméabilités sont obtenues par mesures sur carottes, et aussi à partir des essais de puits.

2.1.3 Saturations (S) :

Il est essentiel de connaître la nature des fluides qui occupent les pores de la roche. La saturation d'un échantillon de roche en un fluide est le rapport du volume de ce fluide dans l'échantillon au volume de pore V_P de l'échantillon.

On définit ainsi :

- la saturation en eau ($S_e = S_W(\text{water})$) :

$$S_e = \frac{V_e}{V_P} \quad (2.3)$$

- la saturation en huile ($S_h = S_O(\text{oil})$) :

$$S_h = \frac{V_h}{V_P} \quad (2.4)$$

- la saturation en gaz :

$$S_g = \frac{V_g}{V_P} \quad (2.5)$$

Avec :

$$S_e + S_h + S_g = 1 \quad (2.6)$$

Lors de la migration des hydrocarbures le déplacement de l'eau sus-jacente n'a jamais été complète. En effet, la perméabilité à un fluide devient nulle quand la saturation en ce fluide devient trop faible. Ce seuil est appelé la saturation irréductible (pour le fluide considéré). En conséquence, il y aura toujours de l'eau dans un gisement appelée eau interstitielle. Ceci est la conséquence des phénomènes capillaires au niveau des pores. L'eau est un fluide "mouillant" qui s'étale sur les surfaces solides et va rester piégée dans les pores les plus petits.

Les valeurs courantes de la saturation en eau interstitielle sont de : $10\% < S_{wi} < 35\%$

Les mesures des saturations proviennent essentiellement des diagraphies.

2.2 Modèles de perméabilité [12] :

Les modèles de perméabilité cherchent à établir une expression pour le paramètre (k) en fonction de la géométrie du réseau de pores. Une modélisation classique consiste à considérer le milieu poreux comme un assemblage de canaux connectés les uns aux autres.

2.2.1 Réseau de capillaires parallèles :

Dans ce modèle, le milieu poreux est constitué d'un assemblage de canaux cylindriques parallèles entre eux (Fig.2.2).

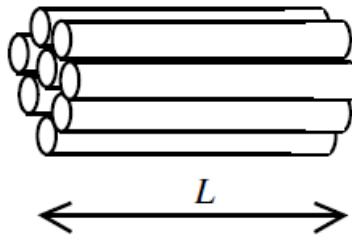


Fig.2.2 : Modèle de capillaires parallèles [12].

Si n est la densité de canaux par unité de surface, on peut écrire que la porosité est :

$$\epsilon = n\pi a^2 \quad (2.7)$$

a : diamètre des canaux microscopiques représentant un milieu poreux

la vitesse moyenne à travers ce réseau de canaux est :

$$V_f = nQ = \frac{n\pi a^4}{8\mu} \frac{dP}{dx} = \frac{k}{\mu} \frac{dP}{dx} \quad (2.8)$$

Et par identification, on trouve :

$$k = \frac{a^2 \epsilon}{8} \quad (2.9)$$

Ce premier modèle décrit la perméabilité comme une fonction linéaire de la porosité et une fonction quadratique de la taille des canaux, donc de la taille caractéristique des pores.

Ce modèle est insatisfaisant car il n'autorise qu'un écoulement unidimensionnel.

2.2.2 Modèle de Saffman :

Dans ce modèle, aucune restriction n'est faite quant à l'orientation des canaux (Fig.2.3).

Le milieu poreux est considéré homogène et isotrope, avec une vitesse moyenne d'écoulement alignée selon le gradient de pression macroscopique $G\vec{e}_x = (\Delta P/L)\vec{e}_x$.

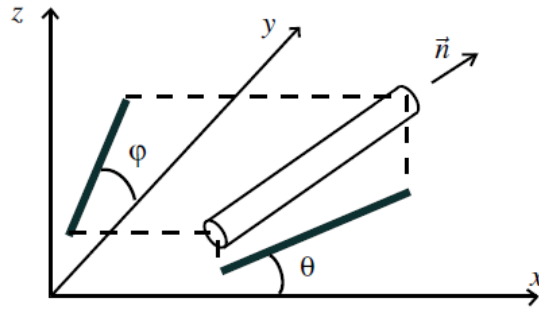


Fig.2.3 : Définition des axes et des angles pour le modèle de Saffman [12].

Au sein de chaque pore, la pression est :

$$P = Gx + \hat{P} \quad (2.10)$$

Où : \hat{P} est une fluctuation aléatoire d'une valeur moyenne nulle ($\langle \hat{P} \rangle = 0$).

Le gradient de pression local est donc $G\vec{e}_x + \vec{\Delta}\hat{P}$ et la vitesse interstitielle dans chaque pore est :

$$u_i = \frac{a^2}{8\eta} |G\vec{e}_x + \vec{\Delta}\langle \hat{P} \rangle| = \frac{a^2}{8\eta} G\vec{e}_x + \vec{\Delta}\langle \hat{P} \rangle \cdot \vec{n} \quad (2.11)$$

Où $\vec{n} = (\cos\theta, \sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi)$ est le vecteur directeur du pore. On écrit donc la vitesse sous la forme :

$$u_i = \frac{a^2}{8\eta} \left[\left(G + \frac{\partial \hat{P}}{\partial x} \right) \cos\theta + \frac{\partial \hat{P}}{\partial y} \sin\theta \cos\varphi + \frac{\partial \hat{P}}{\partial z} \sin\theta \sin\varphi \right] \quad (2.12)$$

2.2.3 Modèle des canaux tortueux :

Ce modèle permet de corriger l'approximation de canaux rectilignes. On peut en effet considérer que dans un échantillon de longueur L , un canal qui traverse l'échantillon de part et d'autre a une longueur effective $L_e > L$ du fait d'une certaine tortuosité (Fig.2.4).

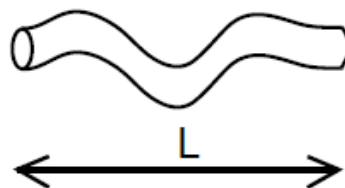


Fig.2.4 : Modèle de capillaire tortueux [12].

La tortuosité est définie comme le rapport entre ces deux longueurs :

$$\tau_r = \frac{L_e}{L} \quad (2.13)$$

Muni de ce nouveau paramètre, on peut modéliser le milieu poreux comme un assemblage de ce genre de canaux tortueux. Reprenant la même démarche que pour les capillaires parallèles, on écrit la porosité sous la forme :

$$\epsilon = n\pi a^2 \tau_r \quad (2.14)$$

et le débit dans chaque pore est (d'après la loi de Poiseuille) :

$$Q = \frac{\pi a^2 \Delta P}{8\eta L} \quad (2.15)$$

La vitesse de filtre est donc (en tenant compte d'une porosité active $\epsilon/3$) :

$$V_f = nq = \frac{\epsilon a^2 \Delta P}{24\eta \tau_r^2 L} \quad (2.16)$$

et la perméabilité associée à ce modèle est :

$$k_{tort} = \frac{\epsilon a^2}{24\tau_r^2} \quad (2.17)$$

On peut remarquer que la perméabilité d'un réseau de canaux tortueux est toujours inférieure à celle d'un réseau de canaux rectilignes, car $\tau_r > 1$ par définition.

On peut aisément critiquer le fait que les canaux décrivant la porosité sont tous de la même taille. Il est évident que ce n'est pas le cas pour les matériaux poreux réels. Si on a accès à la distribution de taille des canaux $\beta(a)$, il est facile de calculer la perméabilité avec :

$$k = \frac{\epsilon}{24\tau_r^2} \int a^2 \beta(a) da \quad (2.18)$$

Enfin, et c'est peut être la principale limite, la taille des pores n'est pas une quantité facilement mesurable. La surface spécifique est une quantité plus aisée à mesurer, et il est nécessaire d'établir un modèle incluant ce paramètre. Ce modèle est celui de Carman-Kozeny.

2.2.4 Canaux à section variable :

Dans ce modèle, le milieu poreux est constitué d'un assemblage de cellules élémentaires identiques contenant chacune deux canaux coaxiaux contigus de deux diamètres différents. On note par a le rayon du gros canal, et αa le rayon du petit (avec $\alpha < 1$). Les deux canaux ont une longueur égale $L/2$ (Fig.2.5).

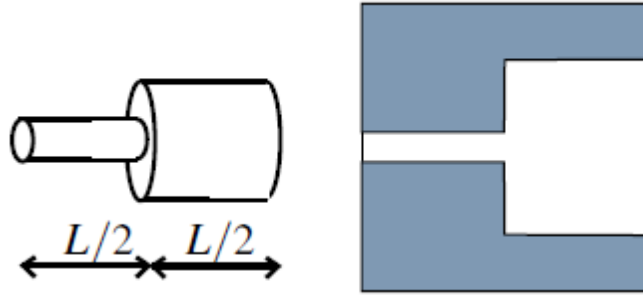


Fig.2.5 : Modèle de capillaire à section variable [12].

Le volume du pore est $V_p = \pi a^2 L(1 + \alpha^2)/2$ et la porosité est :

$$\epsilon = \frac{V_p}{L^3} = \frac{\pi a^2}{2L^2} (1 + \alpha^2) \quad (2.19)$$

Comme le débit est conservé dans chaque pore, on sépare le gradient de pression en deux parties $\Delta P = \Delta P_1 + \Delta P_2$, et le débit s'écrit :

$$Q = \frac{\pi \alpha^4 a^4}{8\eta} \frac{\Delta P_1}{L/2} = \frac{\pi a^4}{8\eta} \frac{\Delta P_2}{L/2} \quad (2.20)$$

Le gradient de pression global est donc :

$$\Delta P = \frac{4qL\eta}{\pi a^4} \left(\frac{1 + \alpha^4}{\alpha^4} \right) \quad (2.21)$$

et par identification avec la loi de Darcy et grâce à la relation (2.19), on obtient une perméabilité égale à :

$$k = \frac{a^2}{2} \epsilon \frac{\alpha^4}{(1 + \alpha^4)(1 + \alpha^2)} \quad (2.22)$$

On retrouve bien que $k = a^2 \epsilon / 8$ pour $\alpha = 1$, et que la perméabilité tend vers zéro quand $\alpha \rightarrow 0$ (canaux obstrués). La situation $\alpha \rightarrow 1$ correspond à des pores de grande taille

connectés par des passages étroits, ce qui est représentatif de milieux poreux formés d'assemblages de grains, naturels (grès) ou artificiels (frittés).

2. 2 . 5 *Modèle de Carman-Kozeny :*

La description géométrique du milieu poreux est identique à celle du modèle des tubes tortueux. Mais on va chercher à exprimer la perméabilité en fonction de l'aire spécifique A_S plutôt qu'en fonction de la taille des pores a .

Dans un échantillon de longueur L et de section A comprenant n pores tortueux par unité de surface (dans le plan perpendiculaire à l'écoulement), la surface de contact solide/fluide est :

$$S = (nA)(2\pi aL_e) \quad (2.23)$$

Et l'aire spécifique est :

$$A_S = 2\pi n a \tau_r \quad (2.24)$$

Avec ces notations, la porosité est :

$$\epsilon = n\pi a^2 \tau_r \quad (2.25)$$

Et on a donc :

$$A_S = \frac{2\epsilon}{a} \quad (2.26)$$

En reprenant l'expression de la perméabilité donnée par (2.17), on obtient

$$k_{CK} = \frac{\epsilon^3}{K A_S^2 \tau_r^2} \quad (2.27)$$

Avec $K = 6$. La constante 6 qui intervient dans cette formule provient des hypothèses sur la géométrie du réseau. Cette constante K peut être mesurée expérimentalement.

Pour des empilements de billes de verre (empilements aléatoires) de diamètre allant de 250 μm à 1mm, la porosité est $0,35 \leq \epsilon \leq 0,39$, et on trouve $4,85 \leq K \leq 5,2$. Il est d'usage de considérer $K \approx 5$ pour ces milieux.

2. 2 . 6 *Limites de ces modèles :*

Un poreux réel comprend en général des canaux obturés, zones sans écoulement qui ne peuvent participer à la perméabilité bien qu'elles contribuent à la porosité. De plus, la

condition d'homogénéité requise n'est pas toujours réalisée en pratique. En effet, des poreux naturels comme les roches sont parfois constitués de différentes échelles de réseaux de pores. A l'échelle microscopique peut venir se superposer un réseau de fractures par lequel un écoulement préférentiel va s'établir.

2.3 Lois de transport des fluides interstitiels [13]:

2.3.1 Transferts en milieux poreux :

Les phénomènes de transfert de chaleur et de masse sont gouvernés par des lois qui lient les densités de flux (de matière, de chaleur...) et les potentiels (pression, température...) et par des équations aux dérivées partielles spatiales et temporelles plus ou moins complexes. Ces mêmes processus, se produisant en milieu poreux, doivent être examinés en première analyse à une échelle qui permette d'observer l'effet du caractère composite du milieu et de la géométrie des phases qui le composent. Comme le suggère la (Fig.2.6), le milieu structure les lignes de flux et les équipotentielles. Certains types de transfert, la migration des fluides par exemple, ne se produisent que dans l'espace poreux, les surfaces solides jouant le rôle de frontières imperméables.

Les champs complexes générés par le milieu poreux ne sont évidemment pas opérationnels lorsqu'il s'agit d'étudier les processus à l'échelle de tout un massif. L'opération qui consiste à représenter le milieu poreux par un milieu homogène équivalent, et à définir des lois de transfert qui gouvernent le comportement de celui-ci, s'appelle la macroscopisation ou homogénéisation.

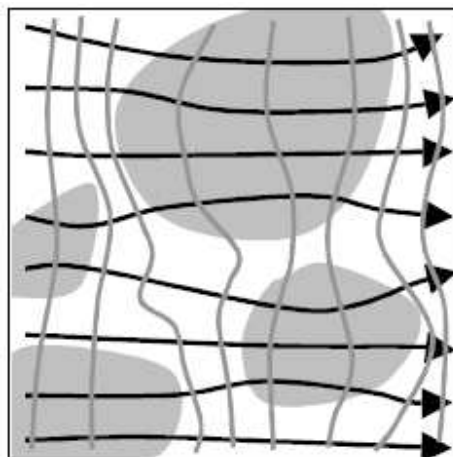


Fig.2.6 : Allure hypothétique des isovaleurs et des lignes de flux [13].

2.3.2 *Élément de volume représentatif (EVR) :*

Le domaine sur lequel on réalise la prise de moyenne est appelé élément de volume représentatif (EVR). Sa taille doit être suffisante pour éliminer les fluctuations locales, mais en même temps, elle doit rester assez petite par rapport à la taille du massif à décrire. La taille de l'EVR est donc le résultat d'un compromis entre plusieurs contraintes. Lorsque ce compromis est réalisable, il donne lieu à des champs moyennés bien représentatifs de la distribution spatiale des variables, fluctuations exclues, et on dit que la condition de séparation des échelles est satisfaite.

Dans l'étude des transferts, la prise de moyenne (*Fig.2.7*) sera effectuée d'une part pour les variables d'état que nous avons déjà introduites, telles que la pression, la température, l'humidité relative, d'autre part pour les densités de flux, quantités vectorielles qui sont soumises aux lois fondamentales de conservation de la masse et de l'énergie.

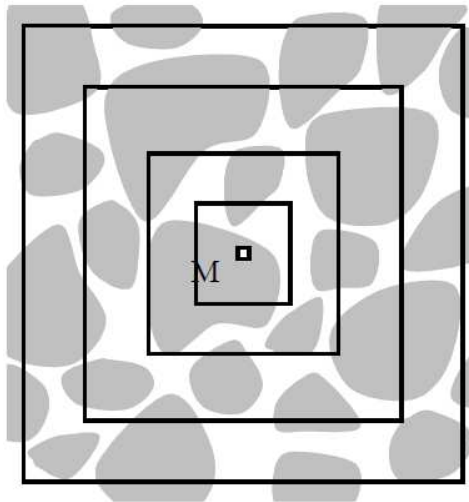


Fig.2.7 : Volumes de prise de moyenne [13].

2.3.3 *Filtration des liquides (La loi de Darcy) :*

La filtration d'un liquide à travers un milieu poreux peut être décrite, à l'échelle de l'EVR, comme l'écoulement d'un fluide visqueux, avec notamment la condition d'adhérence aux parois solide (*Fig.2.8*). Le nombre de Reynolds de cet écoulement est, sauf de rares exceptions, assez petit pour que les effets d'inertie soient négligeables, et qu'on puisse adopter la forme de Stokes pour l'équation dynamique, qui dans ces conditions devient linéaire et se réduit à exprimer l'équilibre entre le gradient de pression et les forces de viscosité. Lorsqu'on applique aux champs de vitesse et de pression locaux qui résultent de cette équation un processus de prise de moyenne, on fait apparaître d'une part une vitesse

moyennée dans l'EVR affranchie des fluctuations qui résultent du contournement et de l'adhérence aux parois, et d'autre part le gradient de la pression également moyennée.

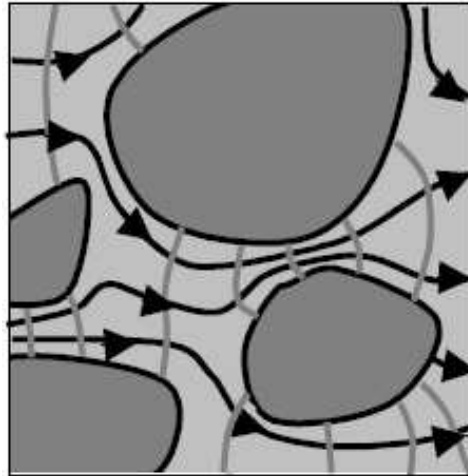


Fig.2.8 : Filtration monophasique, lignes de flux et les isobares [13].

Rappelons qu'en ce qui concerne la vitesse, qui est une densité de débit volumique de matière, la prise de moyenne porte sur la totalité du volume de référence, y compris le volume solide sur lequel elle est nulle. La vitesse ainsi obtenue est appelée vitesse de Darcy.

2.4 Equations de transport des fluides interstitiels :

Un problème de mécanique des fluides est résolu si l'on connaît en tout point du domaine occupé par le fluide et à tout instant la pression P dans le fluide, sa masse spécifique ρ et les composantes de sa vitesse V_x , V_y , V_z . Ces cinq fonctions des coordonnées x, y, z du point courant doivent satisfaire à des conditions générales, à savoir :

- Le principe de la proportionnalité des forces et des accélérations.
- Le principe de la conservation de la masse.

Ces principes se traduisent par la loi élémentaire de perte de charge, tenant compte de la nature du milieu poreux, et l'équation de continuité. A ces deux équations il faut ajouter l'équation d'état du fluide et la loi d'évolution thermodynamique du fluide au cours de son mouvement. Moyennant quelques hypothèses, ces quatre équations peuvent être combinées pour donner une équation aux dérivées partielles en ρ et en P .

2.4.1 Conservation de la masse :

Selon le choix de modélisation, la variable vectorielle utilisée pour résoudre l'écoulement peut être la vitesse V (approche non conservative) ou ρV (approche conservative).

L'équation de conservation de la masse dans une approche non-conservative réduite aux cas d'écoulements incompressibles est la suivante :

$$\nabla \cdot V = 0 \quad (2.28)$$

2.4.2 conservation de la quantité de mouvement monophasique :

La modélisation des écoulements laminaires incompressibles est basée sur une approche non-conservative et une formulation conservative de l'équation de conservation de la quantité de mouvement intervenant dans les équations de Navier-Stokes [14]:

$$\rho \left[\frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla)V \right] = F - \nabla p + \mu(\nabla^2 V) \quad (2.29)$$

F : forces de volume.

Lorsque les transferts de chaleur sont pris en compte et que les effets de variation de masse volumique sont associés à des forces d'Archimède, la masse volumique ρ est variable dans l'équation (2.29). On utilise une approximation de Boussinesq afin de déterminer ρ comme une fonction de la température T , soit [15] :

$$\rho(T) = \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)] \quad (2.30)$$

2.4.3 Equation de l'énergie :

La modélisation des transferts de chaleur est basée sur une formulation en température des échanges thermiques, dans laquelle le changement de phase ou la dissipation visqueuse sont pris en compte grâce à des termes sources ou polynomiaux formulés en terme de température.

La modélisation des transferts thermiques convectif et conductif en interaction avec un écoulement incompressible sont modélisés à partir d'une formulation conservative et d'une approche non-conservative [15].

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + (V \cdot \nabla)T \right) = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \Phi + S \quad (2.31)$$

Le terme S intervient dans le cas d'un transfert radiatif ou bien d'une réaction chimique entre les phases.

Le terme Φ est le terme de dissipation visqueuse donnée par la relation suivante :

$$\Phi = 2\mu D_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \quad (2.32)$$

Tel que :

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.32)$$

Les variations de la masse volumique en fonction de la température sont prises en compte, comme indiquée avant, par l'hypothèse de Boussinesq.

2.5 Ecoulements dans les milieux poreux :

On utilise un modèle continu d'un milieu poreux

x basé sur le concept du Volume Élémentaire Représentatif (VER) pour bien décrire le bilan de quantité de mouvement d'un fluide visqueux Newtonien en milieu poreux. Le modèle est de Darcy-Forchheimer-Brinkman

Ecoulements monophasiques :

On considère un écoulement monophasique en milieu poreux dans un Volume Élémentaire Représentatif(VER), comme décrit sur la (Fig.2.9).

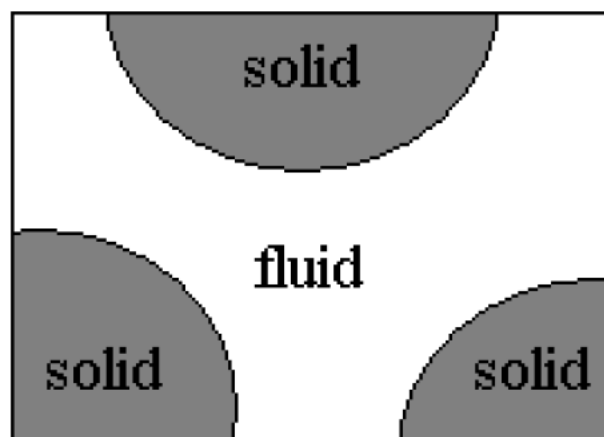


Fig.2.9 : Volume élémentaire représentatif VER pour un écoulement monophasique en milieu poreux [16].

Le VER contient un fluide (f) et un milieu poreux défini par sa porosité ϵ , qui est le volume de fluide sur le volume total du VER :

$$\epsilon = \frac{V_f}{V_{VER}} \quad (2.34)$$

où V_f est le volume fluide et V_{VER} est le volume du VER.

Les équations de conservations sont obtenues par prise de moyenne volumique sur le VER.

On obtient [16] :

$$\nabla \cdot V = 0 \quad (2.35)$$

$$\underbrace{\rho \left[\frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla) V \right]}_1 = \underbrace{-\epsilon \nabla p}_2 + \underbrace{\frac{\mu}{3} \nabla^2 V}_3 - \underbrace{\frac{\mu \epsilon}{K} V}_4 - \underbrace{\rho b \epsilon \|V\| V}_5 \quad (2.36)$$

Où :

$\|V\|$ est la norme de la vitesse générée par la composante perpendiculaire à la direction d'écoulement du gradient de pression.

V représente dans ce cas la vitesse superficielle de Darcy définie par :

$$V = \epsilon V_f.$$

La vitesse fluide est alors V_f .

Le terme N° 4 dans l'équation (2.36) représente l'extension de Brinkman de la loi de Darcy. La valeur de la perméabilité dépend des caractéristiques du milieu poreux comme la porosité. Elle peut être construite par exemple par la formule de Kozeny-Carman par [16] :

$$K(\epsilon) = \frac{K_0 \epsilon^3}{(1 - \epsilon)^2} \quad (2.37)$$

Le coefficient de perméabilité K_0 en m^2 peut être pris égal à :

$$K_0 = \frac{d_m^2}{180} \quad (2.38)$$

Dans ce cas, d_m est le diamètre moyen des particules qui constituent le milieu poreux.

Le terme N°5 de l'équation (2.36) est une extension de Forcheimer de la loi de Darcy. La valeur du coefficient d'inertie b est fonction de la microstructure du milieu poreux. Ce coefficient d'inertie peut être évalué par [16] :

$$b = \frac{G(\epsilon)}{K^{1/2}} \quad (2.39)$$

Tel que :

$$G(\epsilon) = \frac{1.8}{(180\epsilon^5)^{1/2}} \quad (2.40)$$

Conclusion :

L'étude des écoulements et du transfert en milieu poreux repose sur la détermination des propriétés du milieu : la porosité et la perméabilité. Ces grandeurs apparaissent dans les équations d'écoulement et du transport qui sont définies pour un milieu continu.

La porosité, est le paramètre principal décrivant un milieu poreux. En général, les vides (pores) ne sont pas uniformes dans leur distribution et leur forme à travers la matrice poreuse. Cette uniformité peut avoir un rôle significatif sur l'écoulement et le transfert de chaleur près des frontières (paroi solide ou surface libre).

La perméabilité est une propriété intrinsèque du milieu poreux, indépendamment des caractéristiques du fluide et dépend essentiellement de la porosité et du diamètre des particules.

CHAPITRE 3

*Méthode de Boltzmann sur
réseau*

Introduction :

De nombreuses méthodes numériques ont été développées pour étudier et simuler différents types d'écoulements de fluides. Ces différentes méthodes peuvent être classées principalement en deux catégories ; Les méthodes numériques classiques (avec maillage) et les méthodes numériques alternatives (sans maillage).

Des nouvelles méthodes numériques, alternatives aux méthodes classiques ont été développées. Celles-ci tendent toutes à contourner les difficultés liées au maillage en construisant une partie ou la totalité de l'approximation par d'autres approches que la discrétisation spatiale par éléments. Parmi ces méthodes, on trouve les méthodes appelées méthodes sans maillage. Ces techniques ont prouvé leur efficacité dans le traitement de problèmes délicats à aborder par les méthodes classiques. De plus, il est intéressant de noter que les concepts méthodologiques et/ou mathématiques mis en œuvre dans ces approches très ouvertes offrent de nouvelles perspectives pour la simulation numérique des phénomènes complexes rencontrés dans les écoulement dans les milieux poreux.

Parmi les méthodes numériques alternatives, on trouve la méthode de Boltzmann sur réseau qui présente un grand intérêt pour l'amélioration de l'étude des systèmes de géométries complexes et spécifiquement les milieux poreux, cette méthode est complètement différente des méthodes traditionnelles vu que le concept de continuité est abandonné.

3. 1. Méthodes traditionnelles en dynamique des fluides :

Classiquement, un problème fluide est résolu en utilisant les équations aux dérivées partielles (EDP) qui le gouvernent, comme les équations de Navier-Stokes. La plupart des méthodes de résolutions traditionnelles (méthode d'éléments finis: EF, méthode de différences finies: DF, méthode de volumes finis: VF, ...) en CFD sont basées sur la résolution ou bien de formes différentielles ou intégrales des équations aux dérivées partielles (EDP). Ces méthodes sont basées sur les techniques de discrétisation, elles partent des EDP et les discrétisent par éléments finis, par différences finies ou par volumes finis généralement en maillages réguliers. Les solutions approchées qui en découlent sont donc basées sur les échelles de discrétisation spatiale et temporelle. Les schémas de ces méthodes sont utilisés pour convertir les EDP en des systèmes algébriques moyennant les

conditions initiales et aux limites. Ces équations algébriques sont résolues itérativement jusqu'à ce que la condition de convergence soit vérifiée.

3. 2. Méthode sans maillage :

Les méthodes sans maillage (*Fig. 3.1*) ont été développées à partir des années 70 dans le but de se libérer des problèmes dus au maillage. Ces méthodes, dont le succès est croissant, étaient pour les premières fondées sur des méthodes d'interpolation purement nodales (c'est-à-dire sans recours à la notion d'élément). L'idée est de reconstruire une fonction définie sur un espace continu à partir de l'ensemble des valeurs discrètes prises par cette fonction sur un nuage de points du domaine.

3. 3. 1 Classification des méthodes sans maillage :

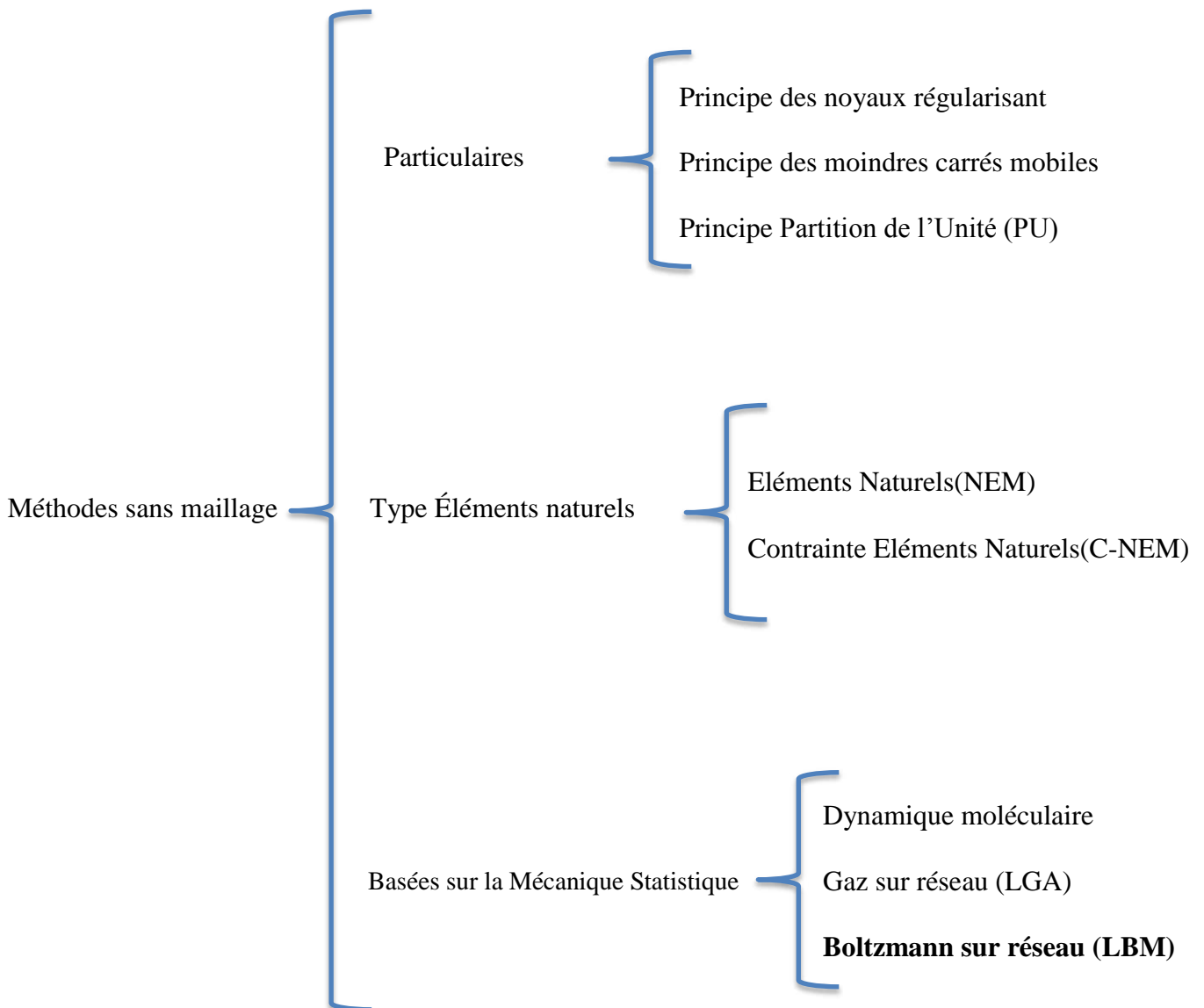


Fig. 3.1 : Classification des méthodes sans maillage.

3. 3. 2 Méthodes sans maillage basées sur la mécanique statistique :

Plusieurs configurations d'écoulement ont été étudiées expérimentalement, cependant il est avantageux de développer des modèles numériques capables de simuler ces écoulements. Les méthodes numériques classiques pour la simulation des fluides sont basées essentiellement sur la résolution des équations de Navier-Stokes. Pendant ces dix dernières années, la méthode de dynamique moléculaire (DM), la méthode de gaz sur réseau (LGA) et la méthode de Boltzmann sur réseau (BR) [en anglais Lattice Boltzmann Method (LBM)] sont apparues comme de nouvelles approches numériques alternatives basées sur la mécanique statistique [17].

La simulation par la méthode de DM demande un temps de calcul énorme. En conséquence, le nombre de molécules qui peuvent être simulées est très limité. Afin de réduire les demandes de la méthode de DM, deux manières sont proposées [18]. D'abord, au lieu de considérer chaque molécule individuelle à l'échelle microscopique, on remplace par des particules fluides à l'échelle mésoscopique, qui se composent d'un groupe de molécules considérées dans la simulation. En second lieu, le degré de liberté du système peut être réduit d'une façon que les particules se déplacent dans une direction indiquée. Il est basé sur ces concepts, la méthode de Boltzmann sur réseau et la méthode de gaz sur réseau, qui sont appliqués avec succès pour simuler l'écoulement du fluide et les phénomènes de transport.

3. 3. Origine de la méthode de Boltzmann sur réseau (BR) :

Le schéma de Boltzmann sur réseau est issu d'une part des modèles classiques de la cinétique des gaz (équation de Boltzmann) et d'autre part des approches informatiques pour les systèmes dynamiques discrets (automates cellulaires). Il a émergé dans les laboratoires de physique au cours des années 1980.

3. 4. 1 Automates cellulaires :

Au lieu de rechercher des modèles mathématiques, le développement des outils informatiques a conduit à l'idée de simulateurs discrets faciles à programmer. Dans une telle approche, l'espace, le temps, les vitesses, le nombre de molécules présentes à un instant donné en un point donné sont discrets. Le développement de ces automates cellulaires a connu trois temps forts.

La première idée consiste à utiliser un réseau carré à deux dimensions d'espace. L'état du réseau est défini par un champ de variables binaires 0 ou 1. La valeur 0 indique que le site (i, j) est libre et la valeur 1 qu'il est occupé. L'évolution du réseau est décrite par les vitesses discrètes liant un sommet (i, j) à ses quatre voisins $(i \pm 1, j \pm 1)$. Avec un pas d'espace unité et un pas de temps unité, les vitesses possibles prennent donc leurs valeurs dans l'ensemble $\{e_1, -e_1, e_2, -e_2\}$, avec $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$. Chaque particule (ou site occupé) a l'une des quatre vitesses proposées plus haut. Il reste à définir les règles de collision lorsqu'il y a conflit pour occuper un site à un instant ultérieur. Sans décrire en détail ici le modèle de Hardy, de Pazzis et Pomeau [19], il faut construire des règles de collision qui respectent la conservation de la masse, la quantité de mouvement et de l'énergie tout en prenant en compte un temps et un espace discrets. La Fig. 3.2 décrit la dynamique dans le cas d'une collision frontale. On note que durant le temps intermédiaire $t + 1$, deux molécules sont présentes en même temps sur un même nœud du réseau.

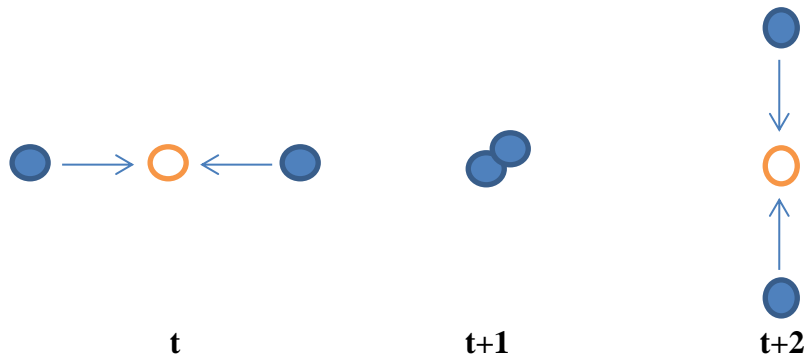


Fig. 3.2 : Dynamique d'une collision frontale dans le modèle HPP76.

Un point remarquable dans l'étude des automates cellulaires est qu'on peut (au moins formellement) passer à la limite. On constitue des blocs de plus en plus grands, ce qui permet de définir une densité macroscopique (rapport du nombre de sites occupés au nombre de sites de l'échantillon) et une quantité de mouvement macroscopique q . On introduit une échelle de temps "grande" devant le pas de temps élémentaire (égal à 1) ainsi qu'une échelle spatiale "grande" devant le pas du réseau (toujours égal à 1). A l'aide de ces variables continues, les équations limites prennent la forme :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } q = 0 \quad (3.01)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \text{div } P(\rho, q) = 0 \quad (3.02)$$

On a donc une conservation de la masse et de la quantité de mouvement. Par contre le tenseur des pressions P n'est pas isotrope.

Afin de remédier à ce défaut d'isotropie, Frisch, Haslacher et Pomeau [20] ont proposé d'utiliser un réseau hexagonal, i.e. les points de la forme $a + b j$, avec $a, b \in \mathbb{Z}$ et $1 + j + j^2 = 0$. L'espace contient plus de directions en vitesse et la dynamique des collisions est aussi plus complexe, donc un tirage au hasard est nécessaire pour décrire l'état aval d'une collision frontale. Cette fois, la limite hydrodynamique est isotrope, donc recevable physiquement. L'extension à trois dimensions d'espace a été réalisée par D'Humières, Lallemand et Frisch [21] à l'aide d'un modèle à 24 vitesses sur un réseau cubique à faces centrées.

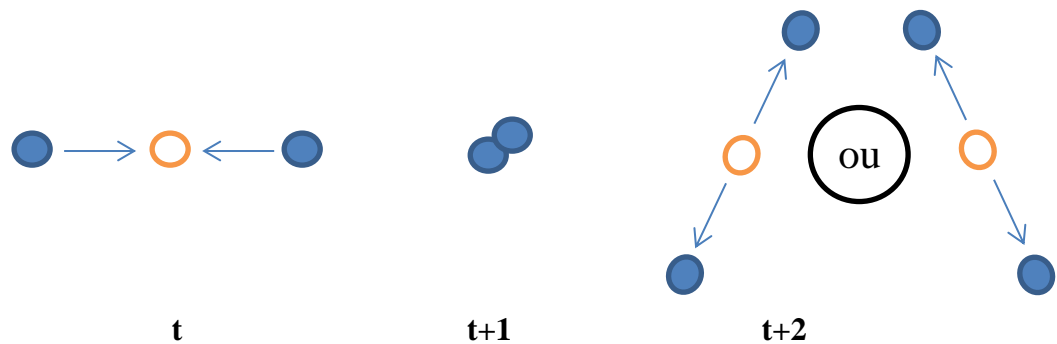


Fig. 3.3 : Collision frontale dans le modèle FHP86.

Les automates cellulaires souffrent cependant de plusieurs défauts qui ont limité leur développement (bruit intrinsèque, valeur imposée à la limite des coefficients de transport et non respect de l'invariance de Galilée).

3. 4. 2 Gaz de Boltzmann sur réseau:

L'idée nouvelle, proposée par Mac Namara et Zanetti [22], consiste à garder un réseau discret, mais à chercher une variable continue f qui décrit la population moyenne sur un site donné du réseau, ayant une vitesse discrète imposée par la géométrie. Si on note x l'espace, t le temps et ξ_i ($0 \leq i \leq b$) les vitesses discrètes associées au réseau, on peut écrire une forme discrète de l'équation de Boltzmann, en introduisant un opérateur de collision discret. Dans l'approche de Higuera, Succi et Benzi [23], on dispose d'une distribution d'équilibre $f_i^{eq}(x, t)$ et d'une matrice de collision S_{ij} qui permet d'écrire le $j^{\text{ième}}$ terme de l'opérateur de collision $Q_j(f)$ sous la forme :

$$Q_j(f) = \sum_{i=0}^b S_{ij} (f_i - f_i^{eq}) \quad (3.03)$$

L'évolution discrète entre les instants t et $t + 1$ (la communauté des physiciens a gardé des automates cellulaires l'emploi d'un pas de temps unité) prend alors la forme :

$$f_i(x + \xi_i, t + 1) = f_i(x, t) + Q_i(f)(x, t) \quad (3.04)$$

La difficulté de cette approche est la détermination de la distribution d'équilibre f_j^{eq} ($0 \leq j \leq b$) et de la matrice de collision S_{ij} ($0 \leq j \leq b$).

Dans le cas de plusieurs modèles discrets, Qian, D'Humières et Lallemand [24] proposent une loi de distribution polynomiale en vitesse pour la distribution d'équilibre f^{eq} et un opérateur de relaxation S_{ij} diagonal. Cette approche est enrichie par D'Humières [25] qui propose de construire des variables dites "moments" qui sont des combinaisons linéaires des f_j .

3.4. Equation de Boltzmann :

3.5.1 Théorie cinétique et équation de Boltzmann :

Par opposition à l'approche des champs continus, la théorie cinétique suppose qu'un fluide est constitué d'un grand nombre de particules dont les mouvements obéissent aux lois de la mécanique newtonienne. Résoudre directement le système avec un grand nombre de particules de degré de liberté de l'ordre du nombre d'Avogadro (10^{23}), est impossible. D'autant que, l'objectif n'est pas de connaître le mouvement de chaque particule, mais d'évaluer le comportement collectif du système.

Donc une statistique descriptive du système s'avère très importante. La théorie cinétique des fluides appartient à une branche de la physique, qui se propose d'expliquer les propriétés macroscopiques des fluides à partir d'une analyse statistique des mouvements des particules qui les constituent.

Une hypothèse fondamentale de la théorie cinétique est que l'information complète pour la statistique descriptive d'un fluide, à l'équilibre thermique ou à proximité, est contenue dans la fonction de distribution d'une particule singulière $f_1(\vec{x}, \vec{\xi}, t)$ pour les molécules constituant le système [26], où \vec{x} et $\vec{\xi}$ notent les coordonnées de l'espace de

phase (espace à six dimensions : 3 coordonnées de position \vec{x} et 3 coordonnées de mouvement $\vec{\xi}$) et t note le temps.

Le problème majeur de la théorie cinétique est de formuler et résoudre l'équation de transport, qui est une équation de la fonction de distribution pour différents processus de collisions selon la nature de collisions entre molécules. La solution de l'équation de transport fournit les équations de moments, qui sont des équations macroscopiques telles que celles de Navier Stokes.

3. 5. 2 *Fonction de distribution et moments hydrodynamiques :*

La fonction de distribution dans l'espace des phases dépend, outre le temps, de $6N$ variables coordonnées et vitesses. Il n'est pas nécessaire de connaître la fonction de distribution complète pour rendre compte de la plupart des propriétés macroscopiques. Beaucoup de ces propriétés sont décrites au moyen de la fonction de distribution d'une particule. Une molécule n'interagit jamais avec plus d'une autre molécule à la fois et se meut librement entre deux collisions successives. Chaque collision a une durée beaucoup plus courte que le temps moyen (temps typique ou temps de collision) qui sépare deux collisions successives. C'est l'une des raisons pour lesquelles les propriétés macroscopiques d'un tel gaz dépendent seulement de la fonction de distribution d'une particule.

En considérant N le nombre de particules et m_0 la masse d'une particule, il est possible de définir :

$$\text{La densité numérique : } n(x, \xi, t) = N f_1(x, \xi, t) \quad (3.05)$$

$$\text{La densité massique : } f(x, \xi, t) = m_0 N f_1(x, \xi, t) = m_0 n(x, \xi, t) \quad (3.06)$$

Les quantités macroscopiques suivantes sont les moments hydrodynamiques :

$$\text{La densité de masse : } \rho(x, t) = \int f(x, \xi, t) d\xi \quad (3.07)$$

$$\text{La vitesse macroscopique : } v(x, t) = \frac{1}{\rho} \int \xi f(x, \xi, t) d\xi \quad (3.08)$$

$$\text{La densité d'énergie interne : } \varepsilon(x, t) = \frac{1}{\rho} \int (\xi - v)^2 f(x, \xi, t) d\xi \quad (3.09)$$

Tel que ξ représente la vitesse microscopique.

3. 5. 3 Équation de Boltzmann :

L'équation de Boltzmann est due au physicien Autrichien Ludwig Eduard Boltzmann (1844-1906) qui était célèbre pour ses contributions fondamentales dans les domaines de la mécanique statistique et de la thermodynamique statistique. En mécanique statistique [27], la fonction de distribution $f(\vec{x}, \vec{\xi}, t)$ d'une particule simple donne la probabilité de trouver au temps t une particule à une position donnée \vec{x} et ayant une vitesse $\vec{\xi}$. Le nombre probable de particules se trouvant dans l'étendue $\vec{x} \pm d\vec{x}$ et d'une vitesse entre $\vec{\xi} \pm d\vec{\xi}$ est donné par $f(\vec{x}, \vec{\xi}, t)d\vec{x}d\vec{\xi}$. Soit \vec{F} une force externe (moyennement faible par rapport aux forces intermoléculaires). En incrémentant le temps de t à $t + dt$, il existe des particules qui partent de $(\vec{x}, \vec{\xi})$ et arrivent à $(\vec{x} + d\vec{x}, \vec{\xi} + d\vec{\xi})$. En raison du phénomène de collision durant le temps dt , il existe un nombre de particules qui partent de $(\vec{x}, \vec{\xi})$ et n'arrivent pas à $(\vec{x} + d\vec{x}, \vec{\xi} + d\vec{\xi})$, soit $\Gamma^{(-)}d\vec{x}d\vec{\xi}dt$, et un autre nombre de particules partant quelque part autre que $(\vec{x}, \vec{\xi})$ mais y arrivent, soit $\Gamma^{(+)}d\vec{x}d\vec{\xi}dt$. En conséquence, la variation de la fonction de distribution pendant le temps dt est régie par l'équation suivante:

$$f(\vec{x} + d\vec{x}, \vec{\xi} + d\vec{\xi}, t + dt)d\vec{x}d\vec{\xi} - f(\vec{x}, \vec{\xi}, t)d\vec{x}d\vec{\xi} = (\Gamma^{(+)} - \Gamma^{(-)})d\vec{x}d\vec{\xi}dt \quad (3.10)$$

Le développement en séries de Taylor au premier ordre du terme de gauche de cette équation autour de $f(\vec{x}, \vec{\xi}, t)$ donne:

$$\left[d\vec{x}\nabla_x f + d\vec{\xi}\nabla_\xi f + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) dt \right] d\vec{x}d\vec{\xi} = (\Gamma^{(+)} - \Gamma^{(-)})d\vec{x}d\vec{\xi}dt \quad (3.11)$$

Ce qui donne l'équation de Boltzmann :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{\xi}\nabla_x f + \frac{\vec{F}}{m}\nabla_\xi f = \Gamma^{(+)} - \Gamma^{(-)} \quad (3.12)$$

L'opérateur de collision $(\Gamma^{(+)} - \Gamma^{(-)})$, conventionnellement noté $\Omega(f, f)$, est entre autre un terme de gain-perte dû à la collision dans le volume défini autour de \vec{x} . Sa forme complète est terme intégrodifférentiel bilinéaire en f qui rend l'équation de Boltzmann particulièrement compliquée. Une simplification majeure et efficace a été apportée en 1954 par l'approximation de Bhatnagar, Gross et Krook (BGK) (voir § 4. 3).

3. 5. Méthode de Boltzmann sur réseau (BR) :

La dynamique de la méthode de Boltzmann sur réseau est dérivée de l'équation classique de Boltzmann. Cette équation considère le mouvement des molécules et décrit leur comportement statistiquement suivant une fonction continue dans le temps et l'espace.

3. 5. 1 De l'équation continue de Boltzmann à la méthode de Boltzmann sur réseau :

L'équation de Boltzmann décrit l'évolution d'une fonction de distribution de molécule dans l'espace de phase, qui est la superposition d'un espace Euclidien et d'un espace de vitesse, donnée par :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial f}{\partial \xi_\alpha} \frac{F_\alpha}{m} = \int_{\xi'_1} \int_S (f' f'_1 - f f_1) g dS d\xi \quad (3.13)$$

Dans cette équation intégrodifférentielle, la quantité f représente la fonction de distribution de la particule, ξ_α et F_α sont respectivement les composantes du vecteur vitesse de la particule et des forces externes macroscopiques appliquées, et m dénote la masse. Les variables f' et f'_1 sont les valeurs de pré-collision d'une distribution de molécules devenant des valeurs de post collision par la collision (f et f_1). Les variables f' , f'_1 , f et f_1 sont respectivement définies comme $f' \equiv f(x, \xi', t)$, $f'_1 \equiv f(x, \xi'_1, t)$, $f \equiv f(x, \xi, t)$ et $f_1 \equiv f(x, \xi_1, t)$. dS représente la section de collision et $g \equiv |\xi_1 - \xi|$.

Par la suite, les forces externes sont négligées, et Eq. (3.13) devient donc :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} = \int_{\xi'_1} \int_S (f' f'_1 - f f_1) g dS d\xi \quad (3.14)$$

Dans le modèle de Boltzmann BGK, le terme de collision de l'équation de Boltzmann est remplacé par $\Omega(f_M - f)$ ayant pour résultat :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} = \Omega(f_M - f) \quad (3.15)$$

où l'indice α représente la coordonnée de l'espace (i. e., $\alpha = 1, 2, 3$), Ω désigne la fréquence de collision et f_M est la fonction de distribution de Maxwell-Boltzmann :

$$f_M(x, \xi, t) \equiv \frac{\rho}{(2\pi RT)^{D/2}} \exp\left[-\frac{(\xi - u)^2}{2RT}\right] \quad (3.16)$$

avec D la dimension de l'espace, ρ la densité, ξ le vecteur vitesse d'une molécule et u est le vecteur vitesse macroscopique.

En intégrant Eq. (3.15) selon un développement en série de Taylor de premier ordre en t , on obtient :

$$\frac{f_{i+1}^{n+1} - f_{i+1}^n}{\delta_t} + \xi_i \frac{f_{i+1}^n - f_i^n}{\delta_x} = \Omega(f_M - f_i^n) \quad (3.17)$$

En choisissant $\xi_i = \frac{\delta_x}{\delta_t}$, l'équation 3.17 se réduit à :

$$f_{i+1}^{n+1} = f_i^n + \delta_t \cdot \Omega(f_M - f_i^n) \quad (3.18)$$

Soit à :

$$f(x + \xi\delta_t, \xi, t + \delta_t) = f(x, \xi, t) - \frac{1}{\tau} [f(x, \xi, t) - f_M(x, \xi, t)] \quad (3.19)$$

où $\tau = 1/(\Omega\delta_t)$ est le temps de relaxation moyen adimensionnel et δ_t est le pas de temps discret. En outre, une discrétisation dans l'espace de phase, suivie d'une approximation appropriée de la fonction de distribution d'équilibre local de Maxwell-Boltzmann f_M (Annexe 1), conduisent l'éq. (3.19) à l'équation de Boltzmann sur réseau à un seul temps de relaxation pour un écoulement incompressible et isotherme, soit :

$$f(x + e_i\delta_t, t + \delta_t) = f(x, \xi, t) - \frac{1}{\tau} [f_i(x, t) - f_i^{eq}(x, t)] \quad (3.20)$$

où f_k^{eq} est la fonction de distribution d'équilibre discrétisée et e_k est l'ensemble de vitesses discrètes, toutes deux basées sur des modèles de réseaux. Comme pour l'équation continue de Boltzmann, les propriétés macroscopiques de l'écoulement d'un fluide sont données par les moments de la fonction de distribution f_k , soit :

$$\rho = \sum_{i=0}^{q-1} f_i \quad (3.21)$$

$$\rho u = \sum_{i=0}^{q-1} f_i e_i \quad (3.22)$$

Les correspondances aux équations d'Euler et de Navier-Stokes peuvent être démontrées en dérivant Eq. (3.20) à l'aide de la méthode dite de Chapman-Enskog (Annexe 2), qui donne aussi la relation entre la fréquence de collision Ω et la viscosité cinématique.

3. 5. 2 Applications de la méthode de Boltzmann sur réseau:

La méthode BR a montré une grande capacité de simulation des systèmes hydrodynamiques [28], des écoulements multiphasiques et à plusieurs composants [29], et dans les milieux poreux [30]. La Fig. 3.4 montre quelques domaines d'application de la méthode BR.

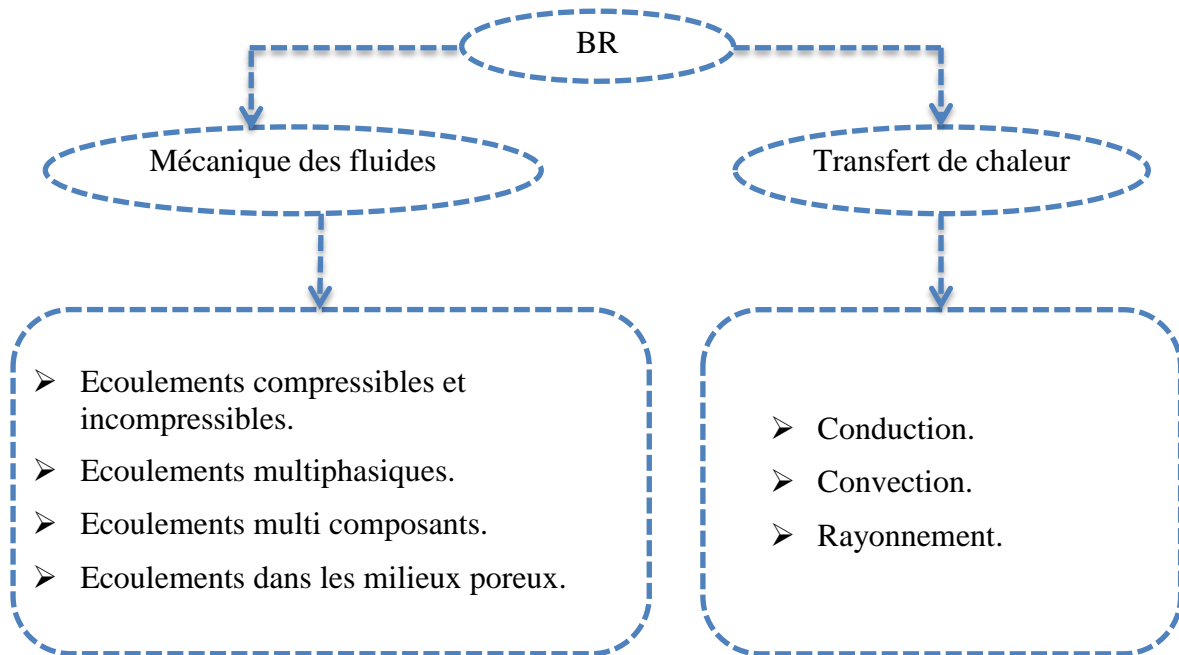


Fig. 3.4 : Différents domaines d'applications de la méthode BR.

3. 6. Modèles de Boltzmann sur réseau isothermes :

Les schémas DdQq, fondés sur l'approximation de BGK avec un seul temps de relaxation, sont les schémas les plus répandus. Il y a aussi le schéma avec des temps de relaxation multiples MRT [25].

3. 7. 1 Modèles à un seul temps de relaxation :

Les modèles DdQq sont fondés sur le schéma BGK. Ces modèles dépendent de la nature du domaine étudié (1D, 2D ou 3D) avec ou sans particule de repos au nœud.

a. Modèle monodimensionnel :

La Fig. 3.5 illustre le réseau utilisé pour la description du modèle D_1Q_3 avec un nœud rattaché à deux voisins. Les vecteurs de vitesse de ce modèle sont donnés par :

$$\{e_0 = (0,0)c, e_1 = (1,0)c, e_2 = (-1,0)c\} \quad (3.23)$$

Les poids nodaux sont :

$$w_i = \begin{cases} 2/3 & i = 0 \\ 1/6 & i = 1, 2 \end{cases} \quad (3.24)$$

On parle du modèle D_1Q_2 quand la particule (0) au repos n'est pas considérée.

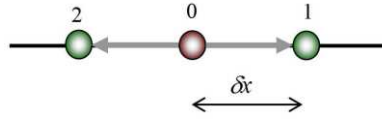


Fig. 3.5 : Réseau du modèle $D1Q3$.

b. Modèle bidimensionnel :

En deux dimensions, le modèle BGK-D2Q9, avec huit voisins (liens) par nœud, est le plus répandu. Un réseau orthogonal est considéré avec huit populations mobiles (en mouvement) $f_i: i = 1$ à 8 et une population en repos f_0 .

Dans un tel modèle, chaque particule, représentée par un nœud, a huit possibilités de propagation comme le montre la Fig. 3.6. Les vecteurs de vitesse n'ont pas le même poids (masse) et pour un modèle isotrope :

$$w_i = \begin{cases} 4/9 & i = 0 \\ 1/9 & i = 1 \text{ à } 4 \\ 1/36 & i = 5 \text{ à } 8 \end{cases} \quad (3.25)$$

Ces constantes sont choisies de manière à conserver l'isotropie du réseau [31] :

$$\sum w_i = 0 \quad (3.26)$$

Les poids nodaux remplissent cette relation pour n'importe quel type du réseau.

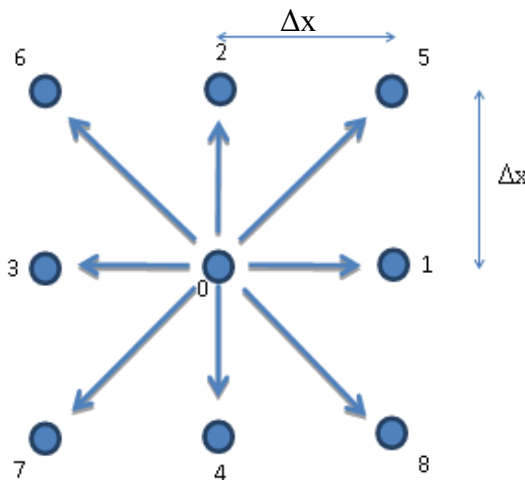


Fig. 3.6 : Vecteurs de liaisons $(e_i)_{0 \leq i \leq 8}$ pour le réseau $D2Q9$.

Les vecteurs de vitesse de ce modèle sont donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} e_0 = (0, 0)c, e_1 = (1, 0)c, e_2 = (0, 1)c, e_3 = (-1, 0)c, e_4 = (0, -1)c \\ e_5 = (1, 1)c, e_6 = (-1, 1)c, e_7 = (-1, -1)c, e_8 = (1, -1)c \end{array} \right\} \quad (3.27)$$

Le choix de la fonction f_{eq} dépend du modèle. Ici on présente cette fonction pour un modèle D2Q9 incompressible [32]. Elle est donnée pour chaque direction par la relation :

$$f_i^{eq} = w_i \left[\rho + \rho_0 \left(\frac{e_i u}{c_s^2} + \frac{(e_i u)^2}{2c_s^4} - \frac{uu}{2c_s^2} \right) \right] \quad (3.28)$$

Où, c_s est la célérité adimensionnelle du son en réseau. La viscosité du fluide simulé est donnée par l'expression :

$$\nu = c_s^2 \left(\tau - \frac{1}{2} \right) \frac{\Delta x^2}{\Delta t} \quad (3.29)$$

En fait la valeur de τ est limitée par la condition :

$$\tau \in]0.5 : 2[$$

c. Modèle BR tridimensionnel

Le modèle D3Q19 est utilisé pour les simulations BR en 3D. Dans ce modèle, chaque nœud est connecté à six voisins de premier ordre et douze voisins de deuxième ordre avec une particule en état de repos comme le montre Fig. 3.7.

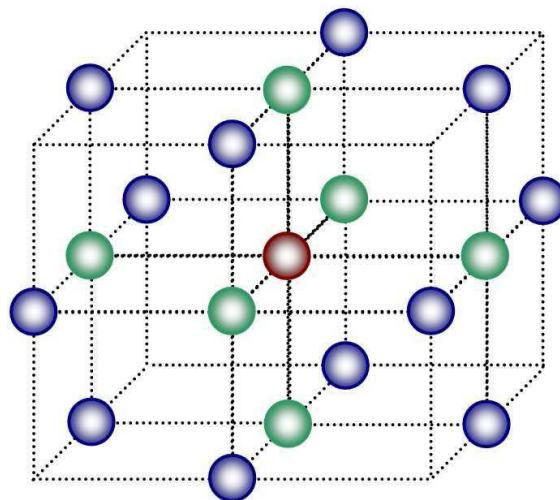


Fig. 3.7 : Réseau du modèle D3Q19.

Les poids nodaux pour ce modèle se sont donnés par :

$$w_i = \begin{cases} 1/3 & i = 0 \\ 1/18 & i = 1 \text{ à } 6 \\ 1/36 & i = 7 \text{ à } 18 \end{cases} \quad (3.30)$$

Et les vecteurs de vitesses :

$$e_i = \begin{cases} (0, 0, 0) & i = 0 \\ (\pm 1, 0, 0)c, (0, \pm 1, 0)c, (0, 0, \pm 1)c & i = 1 \text{ à } 6 \\ (\pm 1, \pm 1, 0)c, (\pm 1, \pm 1, 0)c, (0, \pm 1, \pm 1)c & i = 7 \text{ à } 18 \end{cases} \quad (3.31)$$

La fonction de distribution à l'équilibre est exprimée de la même relation en eq. (3.28).

3. 7. 2 Modèle à plusieurs temps de relaxation :

Les travaux de Qian, d'Humières et Lallemand [24] et Succi et al. [26] sont à l'origine de ce modèle (En anglais Multiple-Relaxation-Time (LB-MRT)), appelé aussi le modèle de d'Humières [25], basé sur une loi de distribution polynomiale en vitesse pour la fonction de distribution à l'équilibre f_{eq} et un opérateur de relaxation $S_{j,k}$ diagonal. Sans entrer dans le détail, consultable dans les références citées ci-dessus, l'équation générale d'un modèle DdQq s'écrit alors :

$$f_i(x + \delta x e_i, t + \delta t) - f_i(x, t) = \Omega_i(x, t) = -M^{-1} \cdot \hat{S} \cdot [m - m^{(eq)}] \quad (3.32)$$

où M est une matrice de taille qxq qui transforme en linéaire les fonctions de distribution f aux moments m :

$$m = M \cdot f, \quad \text{donc} \quad f = M^{-1} m \quad (3.33)$$

\hat{S} étant la matrice diagonale de relaxation.

Ainsi la relaxation n'est autre que la relaxation des différents moments. Grâce à l'interprétation physique des moments, leur paramètre de relaxation sera directement lié aux différents coefficients de transport hydrodynamique. Ce mécanisme permet alors de contrôler indépendamment chaque moment au moyen de son paramètre de relaxation. Si l'on prend le même paramètre de relaxation pour tous les moments on retrouve le modèle BGK.

3.7. Les conditions aux limites dans la méthode BR :

La dynamique des écoulements des fluides est très dépendante de l'environnement. Cette influence est décrite mathématiquement par la prescription des conditions aux limites appropriées. Ces conditions aux limites jouent un rôle crucial puisqu'elles permettent de choisir des solutions compatibles avec les contraintes extérieures.

La méthode BR est basée sur le calcul des fonctions de distribution des particules f dans l'espace des phases tandis que les variables hydrodynamiques sont exprimées dans l'espace physique. Par conséquent, les conditions aux limites dans la méthode BR sont exprimées en termes de fonction de distribution plutôt que de variables d'écoulement comme dans les méthodes de calcul classique utilisées en hydrodynamique (CFD). Pour cette raison, nous trouvons différents types de conditions aux limites pour la méthode de Boltzmann sur réseau à savoir les conditions périodiques et les conditions sans glissement.

3.7.1 Conditions aux limites périodiques :

Les conditions aux limites périodiques sont les conditions les plus simples à mettre en place avec la méthode de Boltzmann sur réseau. Elles sont adéquates pour des phénomènes physiques où l'effet de surface joue un rôle négligeable.

L'application de ces conditions se fonde sur le fait que la fonction de distribution sortante d'une frontière (après collision), rentre sur la frontière équivalente (sens opposé) sur la ligne réseau [33, 34]. Pour expliciter ce là, nous allons travailler sur le modèle D2Q9. Considérons la figure ci-dessous :

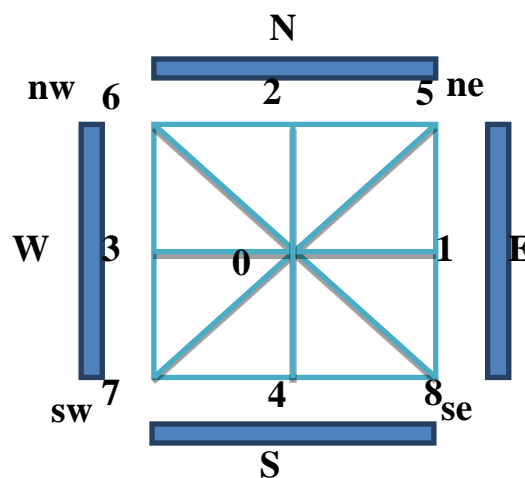


Fig.3.8 : Représentation des faces correspondantes à un nœud réseau.

Où N représente le Nord de la structure réseau, S le Sud, E l'Est et W l'Ouest.

Si nous notons par «in» la population entrante sur un site de la structure et par «out» celle sortante, nous avons :

$$\{in, W\} = \{1, 5, 8\} \text{ et } \{out, W\} = \{3, 6, 7\}$$

$$\{in, E\} = \{3, 6, 7\} \text{ et } \{out, E\} = \{1, 5, 8\}$$

En termes de fonctions de distribution, pour le modèle D2Q9 nous pouvons écrire :

$$f(in, nw) = f(out, se) \Rightarrow f_6 = f_8 \quad (3.34)$$

$$f(in, sw) = f(out, ne) \Rightarrow f_5 = f_7 \quad (3.35)$$

$$f(in, W) = f(out, E) \Rightarrow f_3 = f_1 \quad (3.36)$$

$$f(in, S) = f(out, N) \Rightarrow f_2 = f_4 \quad (3.37)$$

3. 7. 2 Les conditions aux limites sans glissements «no-slip» (solide) :

Un autre type simple de conditions aux limites est les conditions sans glissement correspondant à une vitesse du fluide nulle sur les frontières [33, 34]. Ces conditions sont physiquement appropriées quand la frontière solide possède une régularité suffisante pour empêcher le mouvement du fluide sur la surface de la frontière.

Pour la mise en place de ce type de conditions, nous distinguons deux types de traitement selon la position de la frontière par rapport à la grille réseau à savoir : On-grid et Mid-grid.

D'une part, la condition «On-grid» signifie que les lignes frontières du domaine coïncident avec les nœuds de la ligne réseau (Fig. 3.9). Ce type se met en place de la même façon que les conditions périodiques, on les appelle aussi conditions de rebond «Bounce-Back» , puisque après collision, il ya un rebond des particules.

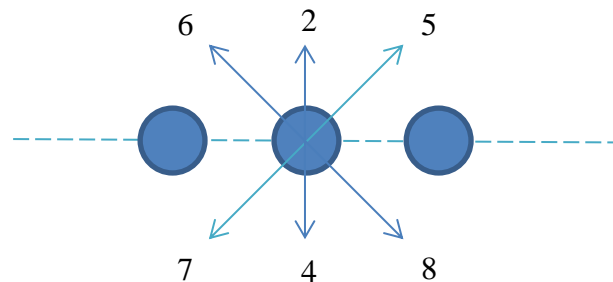


Fig. 3.9 : Conditions aux limites de type Dirichlet «type On-grid».

D'autre part, la condition «Mid-grid» sur la paroi Nord est montrée dans la figure (Fig. 3.10), les nœuds remplis sont des nœuds fluides, les nœuds vides sont des nœuds solides et la ligne en pointillés indique la limite paroi/fluide. Après l'opération d'advection, quelques populations se trouvent hors la zone fluide. Elles doivent être retournées vers la zone fluide. Ainsi, les populations 7, 4 et 8 adjacentes à la paroi recevront les populations 5, 2 et 6.

En termes d'écriture matricielle, nous pouvons écrire ceci comme suit :

$$\begin{bmatrix} f_6(x, y) \\ f_2(x, y) \\ f_5(x, y) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} f_8(x, y) \\ f_4(x, y) \\ f_7(x, y) \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

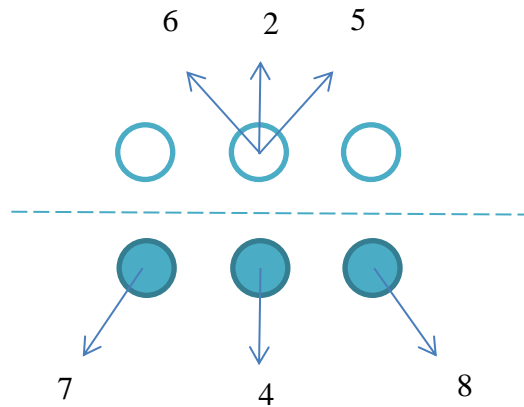


Fig. 3.10 : Conditions sans glissement, rebond mi-grille «Bounce Back Mid-grid» .

La réflexion complète des particules garantit que les deux vitesses du fluide, tangentiel et normal à la surface frontière s'annulent. Selon la technique proposée par Zou and He [35], les populations inconnues sur les nœuds de la face Nord sont définies comme suit :

$$f_4 = f_2 \quad (3.39)$$

$$f_7 = f_5 + \frac{1}{2}(f_1 - f_3) \quad (3.40)$$

$$f_8 = f_6 + \frac{1}{2}(f_1 - f_3) \quad (3.41)$$

Ces relations assurent une vitesse nulle sur la face Nord :

$$\rho u = (f_5 + f_1 + f_8) - (f_6 + f_3 + f_7) = 0 \quad (3.42)$$

$$\rho v = (f_6 + f_2 + f_5) - (f_7 + f_4 + f_8) = 0 \quad (3.43)$$

Les populations inconnues pour le nœud sur la face Sud sont définies de la même manière :

$$f_2 = f_4 \quad (3.44)$$

$$f_5 = f_7 + \frac{1}{2}(f_1 - f_3) \quad (3.45)$$

$$f_6 = f_8 + \frac{1}{2}(f_1 - f_3) \quad (3.46)$$

Pour les conditions «Mid-grid», elles signifient que les coordonnées des nœuds de la frontière se trouvent au milieu des nœuds de la ligne réseau.

Conclusion :

La simulation numérique par des méthodes alternatives fait l'objet de nombreux travaux de recherche dans le monde. Lors de la mise en œuvre de ces méthodes, les domaines fluide et structure ne sont plus représentés par un maillage, mais par un ensemble de points de contrôle représentant des volumes élémentaires de matière qui sont suivis dans leur mouvement.

Depuis de nombreuses années, la méthode de Boltzmann sur réseau a été appliquée avec succès pour simuler les écoulements de fluides et les phénomènes de transport. Différemment des méthodes conventionnelles à l'image de la CFD, la méthode BR est basée sur une approche mésoscopique dans laquelle le comportement collectif des particules dans un système est employé pour prédire les propriétés macroscopiques. Pour cette raison, la méthode BR s'est avérée particulièrement utile dans les applications relatives à la simulation de la dynamique des interfaces et aux géométries complexes, à l'exemple des écoulements dans les milieux poreux.

Un développement des conditions aux limites précis et efficace, est aussi important que le développement d'un modèle de calcul précis, puisqu'ils influenceront l'exactitude et la stabilité du calcul.

CHAPITRE 4

*Simulation numérique &
discussion des résultats*

Introduction :

La méthode de Boltzmann sur réseau est une méthode mésoscopique pour décrire la dynamique des fluides et modéliser la physique de fluide dont le principe est la résolution de l'équation de Boltzmann sous forme discrétisée à l'échelle microscopique afin d'obtenir une solution à l'échelle macroscopique.

Dans cette méthode, le fluide est traité comme un ensemble des particules se déplaçant selon des règles simplifiées dans un réseau composé de nœuds solides et fluides. Pendant un pas de temps, les particules se propagent vers les nœuds de voisinage et échangent leur quantité de mouvement pendant la collision. Chaque pas de temps l'application de forces externes au fluide, peut être pris en compte s'il y a lieu, ainsi que les différentes conditions aux limites.

4.1 Algorithme de calcul :

L'idée de base pour la mise en œuvre d'un algorithme de simulation par la méthode de Boltzmann sur réseau (BR) est inspirée de l'algorithme propagation et collision 'Stream and collide' [36], qui est constitué de deux parties de calcul ; advection et collision.

Avec la méthode de Boltzmann sur réseau, on imagine que les particules dans le réseau :

- se déplacent entre les nœuds d'un réseau uniforme.
- Sautent d'un nœud à un autre selon des vitesses fixées et discrétisées.
- Se heurtent quand ils se rencontrent dans le même nœud avec la conservation de la quantité de mouvement.

Il y a deux schémas généraux selon l'ordre de la séquence propagation/collision [37, 38] :

- le schéma « push » : dans lequel l'étape de collision précède l'étape de propagation.
- le schéma « pull » : dont l'étape de propagation précède l'étape de collision.

Le choix entre les schémas push et pull n'a aucune influence sur la performance de la méthode [38]. Le schéma « pull » est adopté ici dans cette étude puisque le programme source utilise ce schéma.

La Figure 4.1 présente un algorithme général pour un modèle BR classique à travers lequel le calcul est organisé comme suit :

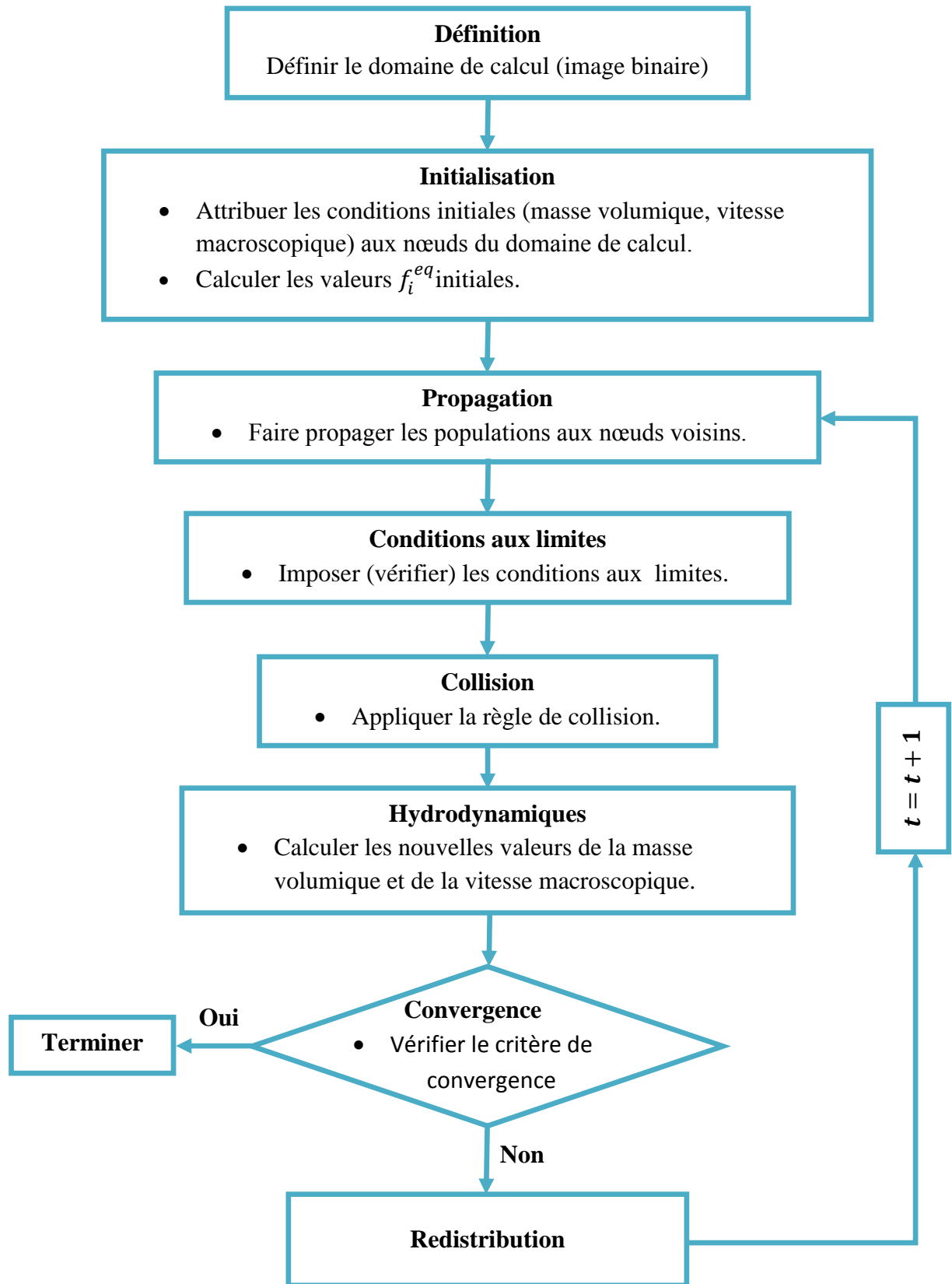


Fig. 4.1 : Schéma de l'algorithme du programme de calcul.

Au départ, les variables du fluide ρ, u_x et u_y sont connues et définies à chaque nœud au temps zéro par des valeurs initiales, ce qui permet d'initialiser les populations f_i . Le but est de calculer ces variables aux pas de temps suivants.

Ensuite, les populations du réseau f_i^{eq} sont utilisées pour calculer les valeurs macroscopiques de ρ, u_x et u_y . Les valeurs résultantes sont la solution numérique à un temps t , et elles sont utilisées pour calculer les valeurs de fonction de distribution à l'équilibre f_i^{eq} qui sont nécessaires pour l'étape de propagation. Les valeurs de f_i^{eq} sont ensuite utilisées pour relaxer les valeurs de f_i lors de l'étape de collision à travers le temps de relaxation. Ces f_i relaxées vont se propager selon l'équation (4.07), donnée par la suite, pour produire les populations du réseau au pas de temps suivant ($t + \Delta t$). Après, ce cycle se répète jusqu'à ce qu'une condition de convergence soit satisfaite, ce qui arrête le calcul.

Nous considérons le déploiement d'un code de calcul 2D basé sur la méthode de Boltzmann sur réseau pour simuler des écoulements monophasiques isothermes, il s'agit de l'écoulement de l'huile brute entre le réservoir et la colonne de production à travers des fissures artificielles résultantes de la fracturation hydraulique.

Ce code de calcul est basé principalement d'un programme connu sous le nom « anb », élaboré par le laboratoire scientifique C&C NEC Europe, Allemagne. C'est un programme gratuit pour la simulation, par la méthode de Boltzmann sur réseau, de l'écoulement visqueux incompressible gouverné par les équations de Navier-Stokes. Ce programme est composé de plusieurs sous-routines qui constituent le squelette de l'organigramme de calcul décrit au début de ce chapitre. Les principales sous-routines sont données par la suite :

- Subroutine Initialisation : dans laquelle la masses volumiques, accélération des particules, le temps de relaxation et le nombre des itérations maximales doivent être déclarés. Définir la dimension du domaine, la géométrie de l'obstacle, ainsi que l'initialisation de la fonction de distribution d'équilibre.
- Subroutine Propagation : pour décrire le processus de propagation dans lequel les particules de fluides peuvent se déplacer vers les huit nœuds voisins selon des vitesses discrétisées.

- Subroutine Conditions aux limites : la condition de type rebondissement en arrière est imposée sur les nœuds solides constituant le milieu poreux ainsi que pour les frontières solides.
- Subroutine Relaxation : pour décrire le processus de collision dans lequel des collisions peuvent se produire et laisser place à une nouvelle distribution de particules.
- Subroutine Résultats : calcul les quantités macroscopiques (vitesse et pression) à chaque nœud et la vitesse moyenne, cette dernière permet de vérifier la satisfaction du critère de convergence.
- Subroutine Redistribution : si le critère de convergence n'est pas satisfait, un calcul des nouvelles fonctions de distribution doit se faire afin de procéder à une nouvelle itération.

Des modifications ont été faites à ce programme principal afin de l'adapter à notre modèle d'étude, ainsi on a associé à ce programme un autre programme sous Matlab pour le traitement d'image des modèles étudiés. On a présenté également dans l'annexe 3 un exemple illustratif de numérisation d'une image d'un milieu poreux.

4.2 Conditions aux limites :

L'application de conditions aux limites est très importante. Avoir des conditions aux limites correctes et précises est important car elles modifient les résultats ainsi que la stabilité de la solution [39].

De nombreuses études ont porté sur les conditions aux limites dans la méthode Boltzmann sur réseau et leur influence sur le comportement du fluide [40, 41, 42]. Nous nous intéressons ici uniquement aux conditions aux limites mises en œuvre durant cette étude, à savoir les pressions constantes aux bords et l'interaction entre le domaine fluide et le domaine solide qui définit l'échantillon.

Dans notre cas qui représente un échantillon fracturé et discrétisé en nœuds distribués sur un réseau régulier. Le domaine est séparé en deux types de nœuds solides : ceux à l'interface avec le fluide et ceux qui sont isolés du fluide. Une fois les nœuds solides sont définis, et après la collision, la particule de la fonction de distribution, qui

vient d'un nœud défini comme fluide, rebondit dans la direction opposée, en gardant sa quantité de mouvement, vers son nœud de provenance.

C'est grâce à ce schéma que les méthodes de BR sont devenues populaires parmi les différents modèles proposés pour la simulation d'écoulements dans un domaine complexe y compris les milieux poreux.

L'avantage de cette condition est la simplicité, la facilité d'implémentation et la conservation automatique de masse dans le domaine de calcul. Elle peut traiter n'importe quelle géométrie.

La pression et la vitesse n'étant pas des variables explicites dans la méthode BR, les conditions aux limites ne peuvent pas être imposées directement dans le calcul. Des conditions équivalentes en termes de fonctions f_i sont alors utilisées. La pression P du fluide est donnée par l'équation d'état dans le cas d'un fluide incompressible et sans cohésion interne comme étant :

$$P = c_s^2 \rho \quad (4.01)$$

où c_s est la vitesse de propagation des ondes sur le réseau donnée en terme de vitesse du réseau c comme étant [43] :

$$c_s = c/\sqrt{3} \quad (4.02)$$

Les forces externes, y compris la force de pesanteur (gravité), peuvent être introduites dans un modèle BR soit pour modifier les valeurs de fonctions de distribution lors de l'étape de collision en ajoutant un terme source dans chaque direction [44], soit par modifier la valeur de vitesse macroscopique \vec{u} calculée à chaque nœud [45], qui correspond à notre cas :

$$\vec{u}_{mod} = \vec{u} + \tau \vec{F} \quad (4.03)$$

Où \vec{F} représente la force appliquée. Pour notre étude la source de cette force est le gradient de pression appliqué aux extrémités entrée/sortie de l'écoulement.

4.3 Approximation BGK (Bhatnagar, Gross et Krook) :

L'approximation BGK a été introduite comme un modèle simplifié de l'opérateur de collision de l'équation de Boltzmann. Le modèle qui en découle est couramment désigné par le modèle à simple temps de relaxation " SRT: Single Relaxation Time ". Une particule dans le fluide dont l'état est décrit par la fonction de distribution f relaxe vers son état d'équilibre dans un temps τ . L'opérateur de collision prend la nouvelle forme simplifiée :

$$\Omega(f, f) = -\frac{f - f^{eq}}{\lambda} \quad (4.04)$$

Où λ est une échelle de temps typique associée à la relaxation à l'équilibre local, il dépend évidemment de la nature du fluide, donc de sa viscosité. L'équation de Boltzmann tenant compte de l'approximation BGK (notée LBGK) devient :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{\xi} \nabla_x f + \frac{\vec{F}}{m} \nabla_{\xi} f = -\frac{f - f^{eq}}{\lambda} \quad (4.05)$$

Cette équation peut être discrétisée selon des directions \vec{e}_k spécifiées, on aura :

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} + e_k \nabla_x f_k + \frac{F}{m} \nabla_{\xi} f_k = -\frac{f_k - f_k^{eq}}{\lambda} \quad (4.06)$$

C'est une équation aux dérivées partielles linéaire en présence d'un terme force, les deux premiers termes de gauche désignent le terme d'advection et décrivent le processus de propagation, le troisième terme de gauche représente la contribution d'un terme force extérieur et le terme de droite décrit le processus de collision.

La forme discrétisée (en second ordre dans l'espace et le temps), la plus employée, pour l'équation (2.06) sans terme force est :

$$f_k(\vec{x} + \Delta\vec{x}, t + \Delta t) - f_k(\vec{x}, t) = -\frac{f_k - f_k^{eq}}{\tau} \quad (4.07)$$

Où $\Delta\vec{x} = \Delta t \vec{e}_k$, c.-à-d. $e_k = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ et $\tau = \lambda / \Delta t$.

Dans le modèle BGK, il est supposé que toutes les échelles relaxent de la même façon pendant le temps de relaxation τ , selon les conditions initiales et aux limites [33].

Historiquement, le succès de la méthode de Boltzmann est en grande partie fondé sur l'approximation BGK. Ce modèle est souvent employé pour résoudre les équations de Navier-Stokes incompressibles [46].

Le modèle BGK reste donc le modèle du choix dans beaucoup de situations, en raison de sa simplicité d'exécution aussi bien que de précision.

4.4 Perméabilité :

La perméabilité est une mesure de la facilité de passage du fluide à travers un domaine ou une structure. Dans le cas d'un écoulement décrit par un nombre de Reynolds très faible, la relation la plus importante pour décrire le transport de fluide dans un milieu poreux est la loi de Darcy.

La loi de Darcy est un modèle linéaire du transport convectif d'un fluide newtonien incompressible à travers un milieu poreux sous un gradient de pression ∇P , elle s'écrit :

$$u = -\frac{k}{\mu} \nabla P \quad (4.08)$$

où u est le vecteur vitesse de filtration du fluide, μ sa viscosité dynamique et k la perméabilité du milieu (en m^2). Dans le cas d'un écoulement uniforme en régime permanent à travers un milieu homogène isotrope de section moyenne $\langle S \rangle$ et de longueur L , on peut écrire :

$$Q = u \langle S \rangle = -\frac{k \langle S \rangle \Delta P}{\mu L} \quad (4.09)$$

où Q est le débit volumique du fluide, ΔP la différence de pression entre les extrémités du milieu. La méthode BR permet d'estimer la vitesse et la pression en chaque point du domaine fluide. Le débit est alors obtenu en calculant la vitesse d'écoulement à travers la surface normale à l'orientation de la fissure en chaque point du réseau poreux.

Il est généralement admis que la loi de Darcy est valable pour des écoulements laminaires de fluide. Dans notre étude, sera traité uniquement le cas d'un écoulement monophasique à faible nombre de Reynolds dans un milieu fissuré saturé.

4.5 Validation du code de calcul :

Le but de l'étude de l'écoulement laminaire entre deux plans est de valider le code de calcul basé sur la méthode de Boltzmann sur réseau. Le choix de l'utilisation de cet écoulement comme problème test découle que la solution analytique est bien définie. Ces écoulements ont fait l'objet de nombreuses recherches tant expérimentales que numériques et théoriques.

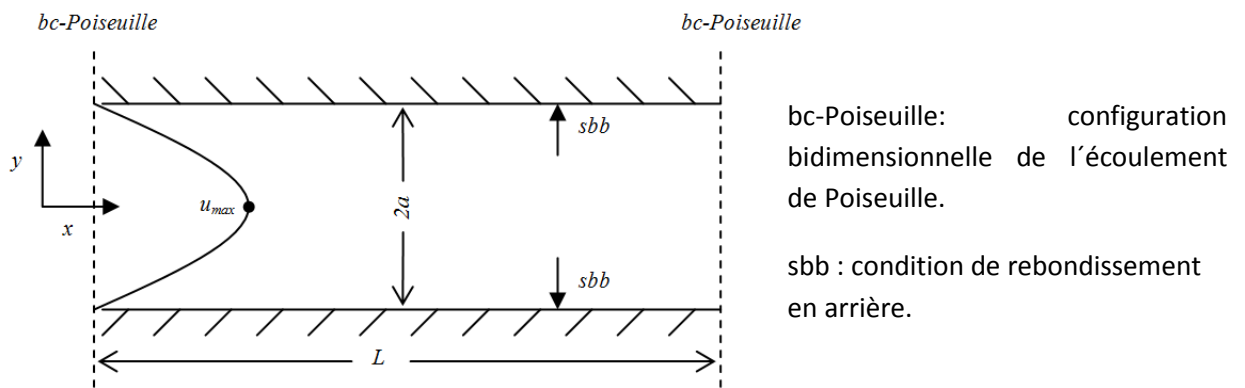


Fig. 4.2 : Ecoulement de poiseuille et conditions aux limites.

Écoulement de poiseuille :

La solution analytique exacte de l'écoulement de poiseuille est connue; ce qui permet de valider les résultats numériques de simulation. Prenons un écoulement, entre deux plans fixes et de longueur infinie, présenté en Figure 4.2. Le schéma D2Q9 classique (§ 3.6.1.b) est proposé pour simuler cet écoulement. L'écoulement de Poiseuille, en régime stationnaire, entre deux parois planes, admet une solution analytique de la forme :

$$u = \frac{\Delta p}{2\mu L} (a^2 - y^2) \quad (4.10)$$

Pour simuler l'écoulement d'un fluide visqueux (isotherme et incompressible), une différence de pression ($\Delta p = p_{in} - p_{out}$) est appliquée entre les faces des sections d'entrée et de sortie du fluide dans le canal. Une condition aux limites de non glissement de type "full way Bounce Back" est imposée sur les parois solides latérales. Le champ de pression initial est uniforme et égal à $p_0 = c_s^2 \rho_0$, avec $c_s = 1/\sqrt{3}$ la vitesse du son et ρ_0 la densité initiale (habituellement posée égal à l'unité).

La taille du réseau de la grille considérée est de 570×60 pixels où un pixel correspond à l'espacement du réseau $\Delta x = 1$. Cet espacement est fixe et, en général, égal au pas du temps en réseau, fixe aussi à $\Delta t = 1$.

Après avoir défini le réseau, le temps de relaxation, les valeurs adimensionnelles de la masse volumique et de la viscosité. Le calcul commence et les itérations propagation/collision se poursuivent avec la vérification des conditions aux limites à l'entrée et à la sortie du domaine. Le critère de convergence de ce problème est donné par la condition :

$$\frac{\sum_{i,j} |u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^n|}{\sum_{i,j} |u_{ij}^{n+1}|} \leq 10^{-6} \quad (4.11)$$

Les résultats présentés sur la figure 4.3 nécessitent 8407 itérations. Le nombre de Reynolds de l'écoulement simulé est égal à $Re = 21.46$ et la viscosité cinématique du fluide ν est déterminée à partir de l'équation ci-dessous :

$$\nu = c_s^2(\tau - 0.5) \quad (4.12)$$

Les résultats de simulation présentés ci-dessous ont été obtenus avec un gradient de pression (∇p) égale à 0.01 dans les unités du réseau de Boltzmann.

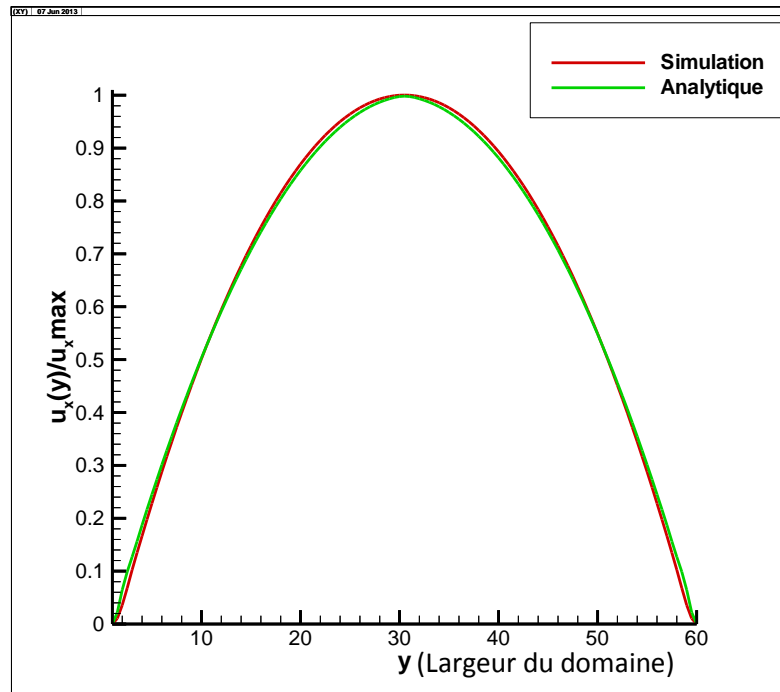


Fig. 4.3 : Comparaison entre la solution analytique et celle de simulation du profil du rapport de vitesses $u_x(y)/u_{x,max}$.

Dans la figure 4.3, on compare les profils de la vitesse adimensionnelle $u_x(y)/u_{x_{max}}$ de la solution analytique et celle simulée à la cote $x = l_x/2$. Les profils du rapport de vitesse $u_x(y)/u_{x_{max}}$ sont quasi identiques avec une légère différence observée.

La vitesse moyenne calculée sur une section située à la cote $x = l_x/2$ est égale à 0.667 de la vitesse maximale sur l'axe central, soit :

$$r_p^{sim} = u_{xmoy}/u_{xmax} = 0.667$$

Et la valeur théorique du ratio entre la vitesse moyenne et la vitesse maximale est égale à $r_p^{th} = 0.644$. On observe un accord entre la valeur théorique r_p^{th} et celle simulée r_p^{sim} avec une erreur relative de 3.2%.

La simulation du profil de la vitesse adimensionnelle $u_x(y)/u_{x_{max}}$ (Figure 4.3) permet également de rendre compte d'un résultat important dans le cas de l'étude d'un écoulement entre deux plaques fixes en régime laminaire établi (écoulement de Poiseuille).

La valeur moyenne du ratio $r_p(y) = u_x(y)/u_{x_{max}}$ calculée à partir de la courbe de simulation est égale à 0.645, soit $r_p(y) \approx 2/3$.

Finalement, et suite aux résultats de simulation et analytique qui donnent une concordance des profils de vitesse $u_x(y)$, ainsi des valeurs très rapprochées de leurs rapports de vitesses, montrent clairement la validité de notre code de calcul.

4.6 Simulation d'écoulement dans un milieu fracturé :

4.6.1 Construction des échantillons numériques :

Les milieux utilisés dans cette étude, pour représenter un milieu fracturé, sont des ouvertures dans la roche réservoir maintenue par des billes de dimensions déterminées. Puisque notre programme est en 2D, l'échantillon numérique proposé pour la simulation est une image limitée par deux lignes représentant l'extension de la fracture (hauteur si la fracturation est verticale ou bien une largeur si le cas d'une fracturation horizontale), de disques pleins représentant les agents de soutènement et sur l'un des côtés une ligne discontinue représentant les perforations.

Ces images sont ensuite numérisées à l'aide d'un programme en MATLAB, afin d'obtenir un fichier binaire exploitable par le programme principal en FORTRAN.

On propose dans cette étude plusieurs variantes du modèle simulé suivant les dimensions des billes (agents de soutènement) à l'intérieur du milieu fracturé.

4. 6. 2 Variante N°1 :

L'arrangement des billes dans ce modèle est d'une façon structurée. La taille de cette image est de 570x190 pixels avec une longueur de 150 mm, soit un espace entre les nœuds $\Delta x = 0.263 \text{ mm}$ qui correspond à un écart de $\Delta x = 1$ dans le réseau de Boltzmann.

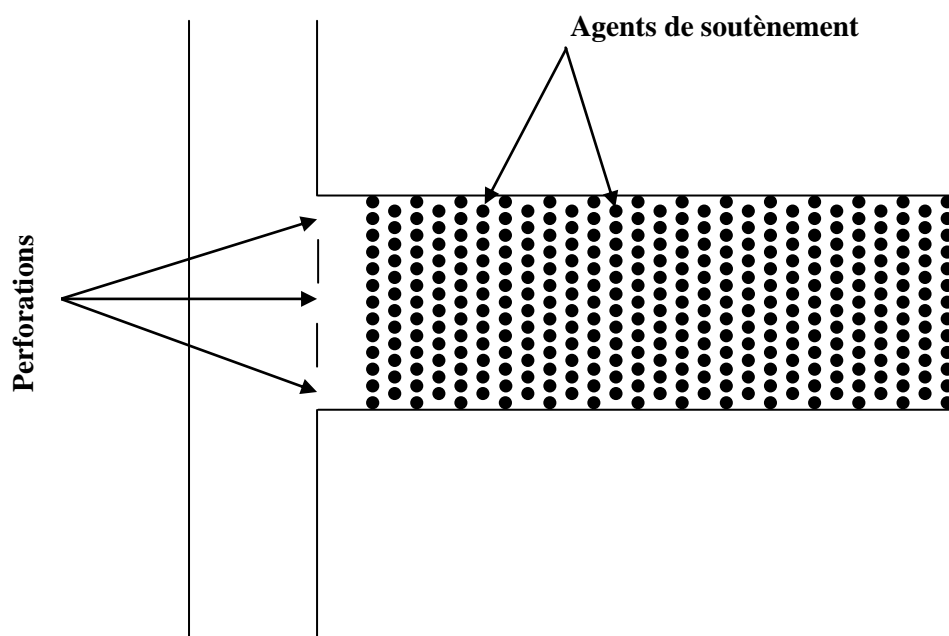


Fig. 4.4 : Modèle de simulation représentant une fissure résultante d'une fracturation hydraulique.

Dans le réseau, ρ_0 prend la valeur adimensionnelle de 1. Un gradient de pression est imposé aux limites avec $\rho_{in} > \rho_{out}$, avec une vitesse initiale nulle dans le domaine, ce qui permet au fluide de se propager vers la sortie.

La figure ci-après montre les contours d'iso-vitesses horizontales, pour des différentes valeurs de gradient de pression. Les figures (a) correspond à $\nabla p = 0.1$, (b) pour $\nabla p = 0.01$ et (c) pour $\nabla p = 0.001$.

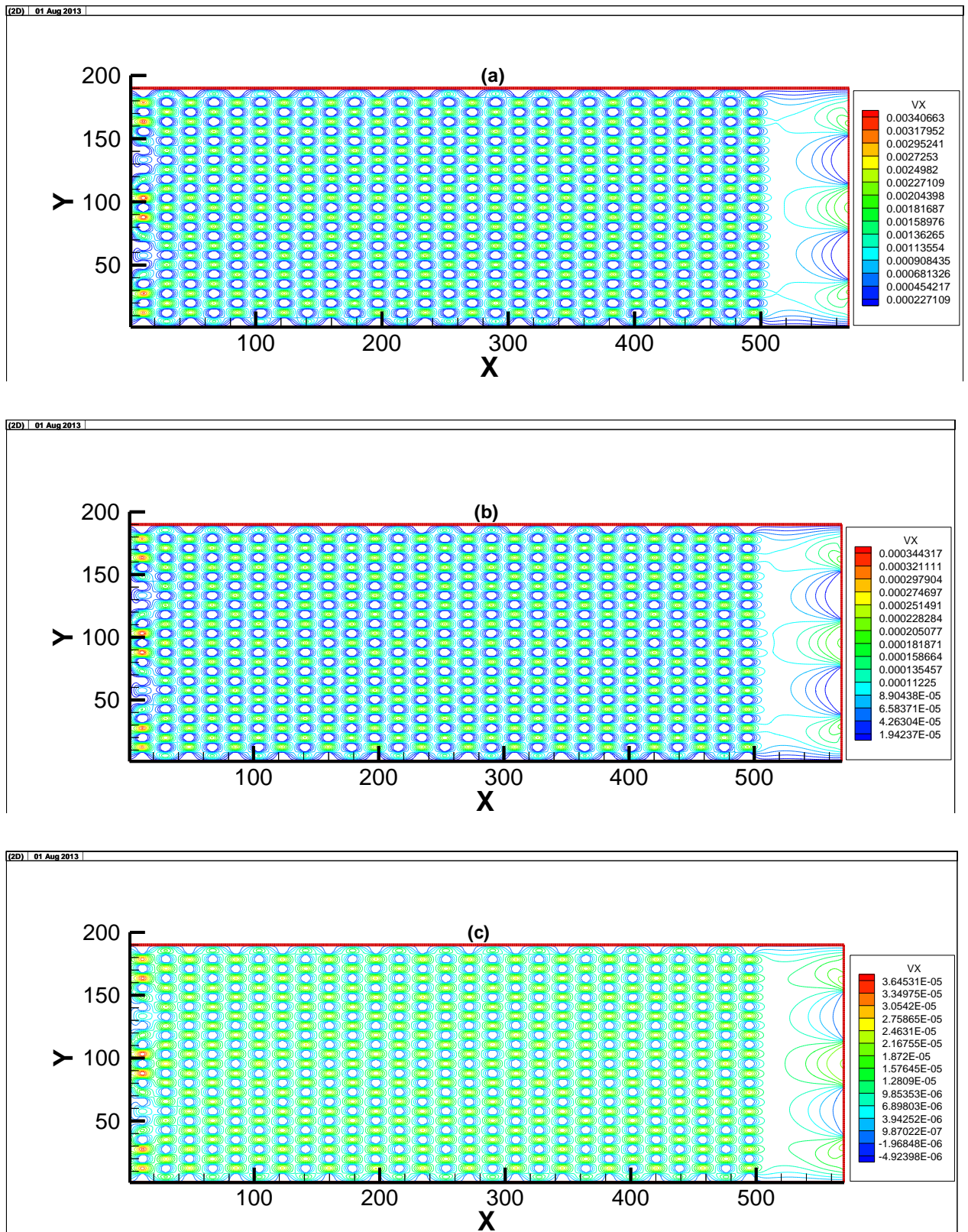
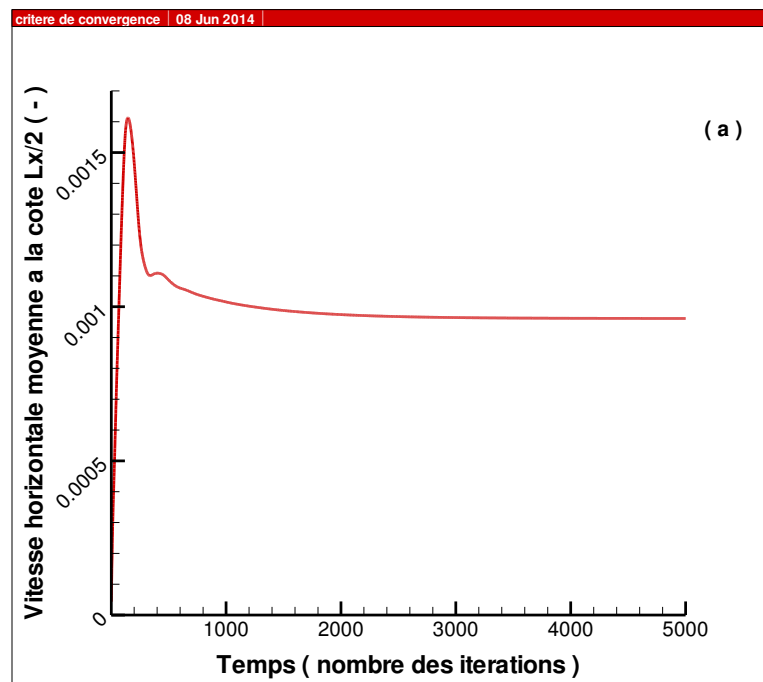


Fig. 4.5 : Contours de vitesse horizontale pour différentes valeurs du gradient de pression. (a) $\nabla p = 0.1$, (b) $\nabla p = 0.01$ et (c) $\nabla p = 0.001$

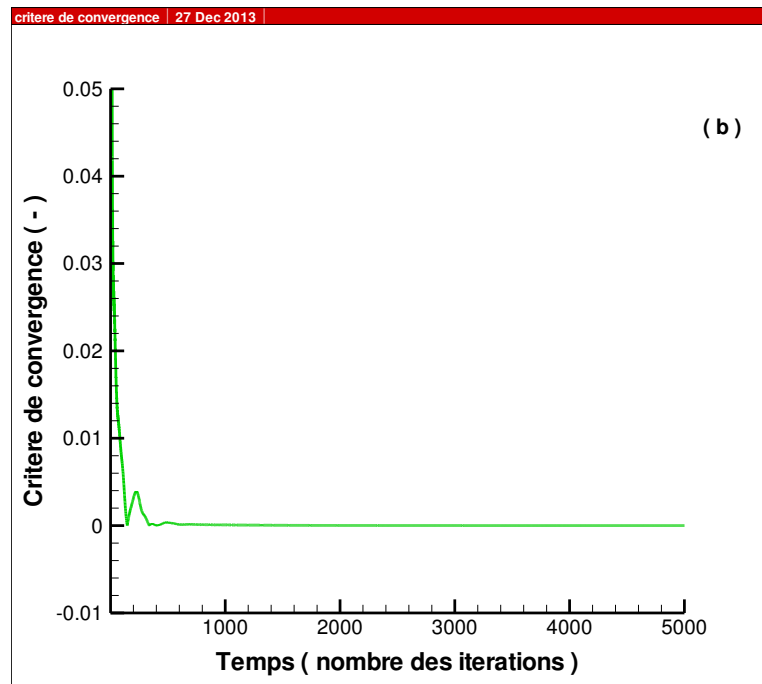
Les figures 4.5 (a), (b) et (c) montrent bien les endroits où les vitesses sont faibles et où elles sont importantes, le nombre de Reynolds calculé à partir de cette simulation égale à 5.48, 0.55 et 0.05 pour les différents cas (a), (b) et (c) respectivement. On remarque sur les figures que la vitesse maximale se trouve entre les billes à cause de la diminution de la section de passage de fluide et très faible en dehors de cette section. On remarque aussi que les trois figures sont très semblables malgré le gradient de pression très différent imposé, qui justifie l'établissement du régime d'écoulement. On observe l'apparition des zones de recirculation de fluide pour le cas du gradient de pression très faible, justifié par l'insuffisance de tel gradient de pression de faire déplacer tout le fluide sur toute la section.

La Figure 4.6 (a) représente la variation de la vitesse horizontale moyenne dans la section du milieu située à la position ($x=Lx/2$), on remarque qu'après un temps déterminé le régime d'écoulement est permanent ce qui se traduit par une vitesse moyenne constante à un instant t , cette courbe est un bon indicateur pour la convergence des résultats obtenus.



La courbe (a)

La figure 4.6 (b) représente la variation du critère de convergence, donné par l'équation 4.11, en fonction du nombre d'itérations. Cette courbe confirme la convergence du résultat de simulation.



La courbe (b)

Fig.4.6 : Courbes illustrant la convergence du résultat de simulation.

La figure 4.7 montre la distribution de la vitesse moyenne sur un plan perpendiculaire à la direction d'écoulement. Dans cette figure, les paramètres suivantes sont considérées : $\nu = 0.1$, $\nabla p = 0.1$.

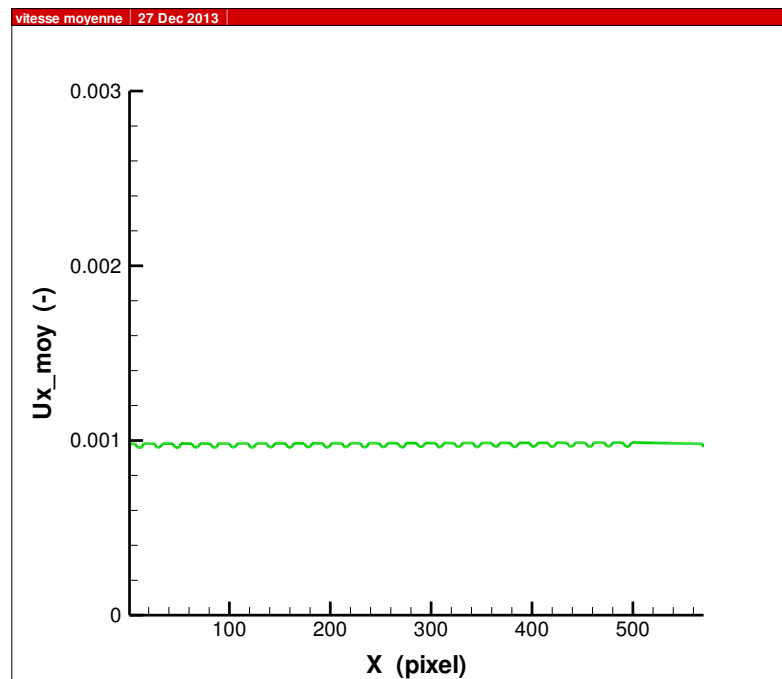


Fig.4.7 : Distribution de la vitesse horizontale moyenne calculée sur un plan perpendiculaire à la direction d'écoulement.

La figure 4.7 montre que la vitesse moyenne d'écoulement est constante sur toute la longueur de l'échantillon. La vitesse constante indique qu'il y a une conservation de la quantité de mouvement, et donc la méthode de Boltzmann sur réseau satisfait l'un des conditions d'un écoulement incompressible.

Le milieu fracturé est caractérisé par sa perméabilité évaluée à partir de la loi de Darcy (Eq. 4.08). Dans la simulation la valeur adimensionnelle de la perméabilité est donnée par [31] :

$$k_{tpl} = \frac{\rho(u_x)_a^2}{R_e \Delta p} \quad (4.13)$$

Avec la vitesse adimensionnelle $(u_x)_a$, le nombre de Reynolds et la différence de pression sont définis par :

$$(u_x)_a = \frac{\Delta t}{\Delta x} u_x, \quad R_e = \frac{(u_x)_a Lx}{\nu}, \quad \Delta p = \frac{(\rho_{in} - \rho_{out})}{3} \quad (4.14)$$

En utilisant la vitesse calculée précédemment, nous pouvons estimer la perméabilité à partir de l'équation (4.13). Sa variation est présentée sur la figure 4.8 en fonction du gradient de pression. Dans cette figure, la viscosité cinématique est fixée à $\nu = 0.1$.

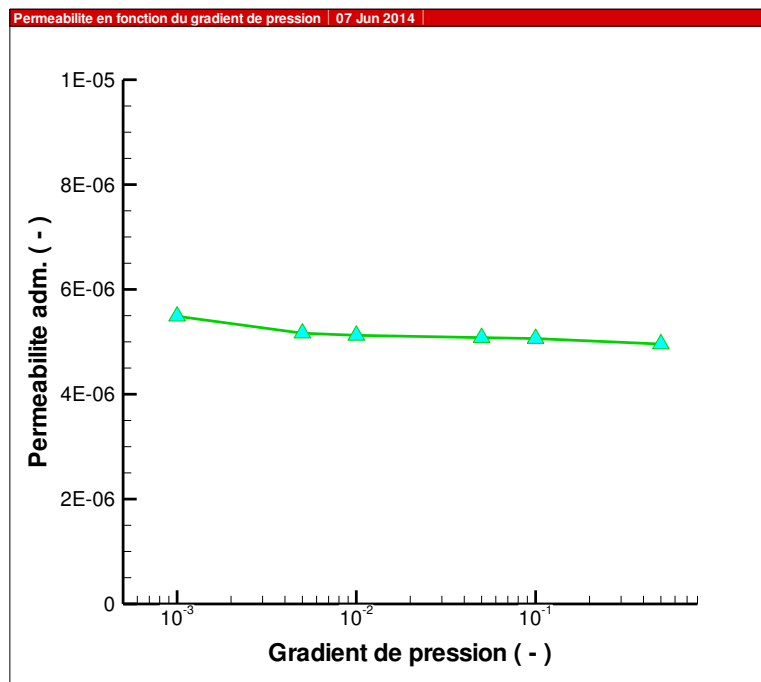


Fig.4.8 : Variation de la perméabilité adimensionnelle en fonction du gradient de pression.

La perméabilité doit être indépendante du gradient de pression utilisé dans le calcul de celle-ci, parce que, selon la loi de Darcy, la perméabilité est une grandeur intrinsèque du milieu poreux. La figure 4.8 confirme cette indépendance entre la perméabilité adimensionnelle k_{tpl} calculée par la méthode de Boltzmann et la variation du gradient de pression.

En modifiant par la suite la valeur de la viscosité cinématique, nous avons calculé la perméabilité adimensionnelle k_{tpl} pour différentes valeurs de la viscosité et le résultat est donné dans la Fig.4.9. L'écoulement est entraîné par un gradient de pression égal à $\nabla p = 0.01$. La Fig.4.9 montre que la perméabilité calculée dépend fortement de la viscosité cinématique du fluide, mais selon la loi de Darcy, la perméabilité est une qualité intrinsèque du milieu poreux et doit être indépendante de la viscosité cinématique du fluide.

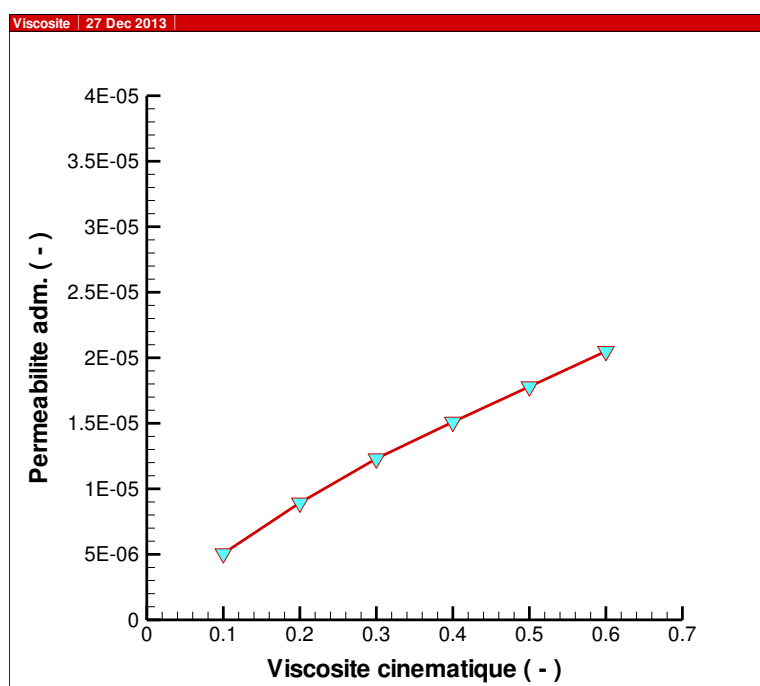


Fig.4.9 : Variation de la perméabilité adimensionnelle en fonction de la viscosité cinématique.

Ce problème dans lequel la perméabilité varie en fonction de la viscosité du liquide a été étudiée par Ferréol et al [31], et il a été interprété par l'insuffisance de la résolution du réseau de Boltzmann utilisé. Afin de confirmer cette interprétation, on a augmenté la résolution de l'image utilisée comme modèle de simulation. On garde la même image mais avec des résolutions de 1140x380 et 2280x760, donc on utilise des grilles plus fines.

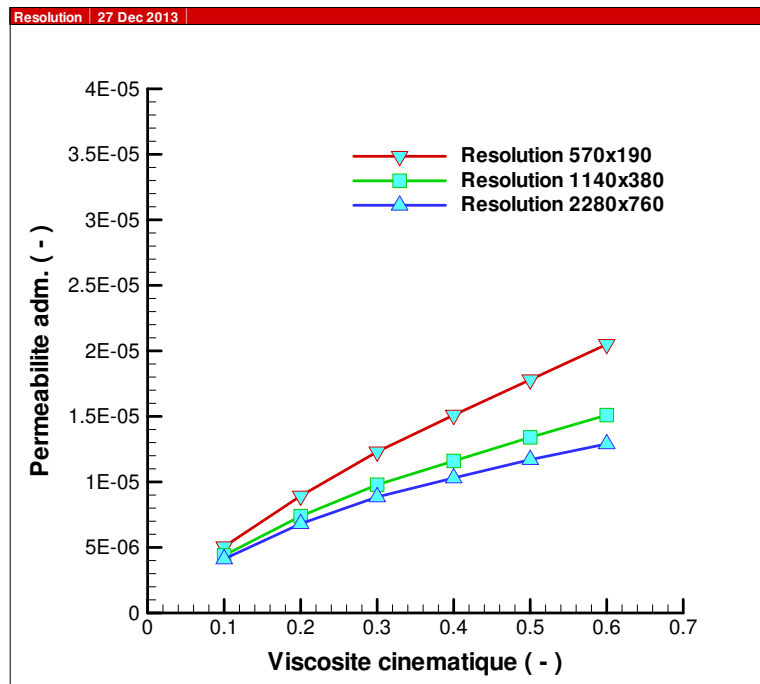


Fig.4.10 : Influence de la résolution sur la variation de la perméabilité en fonction de la viscosité cinématique.

Le résultat est montré dans la Fig.4.10. On comprend de cette figure que la dépendance de la viscosité diminue avec l'augmentation de la résolution de la grille, et l'interprétation susmentionnée est confirmée. En outre, la Fig.4.10 indique que la dépendance de la perméabilité à la résolution de grille diminue au fur et à mesure que la viscosité diminue.

4. 6. 3 Variante N°2 :

On propose dans cette variante un modèle dont les billes ont un diamètre plus grand ($\varnothing = 2.8 \text{ mm}$).

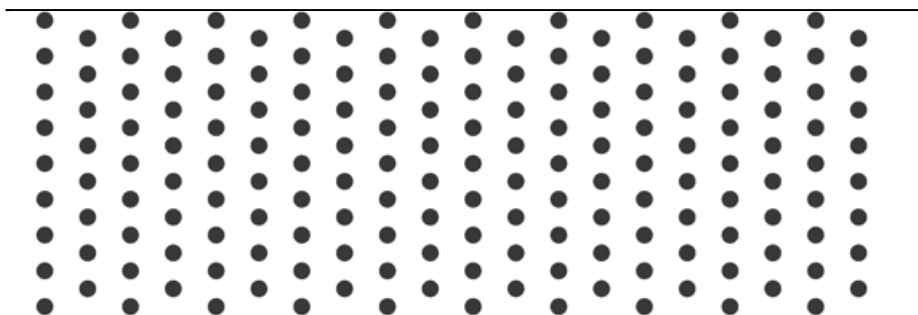


Fig.4.11 : Deuxième variante du modèle de simulation représentant une fissure résultante d'une fracturation hydraulique.

Les billes sont arrangées de la même façon que la première variante, mais avec un nombre moins élevé afin de garder la même porosité (Fig.4.11), et voir l'influence de dimensions de billes sur la perméabilité de l'échantillon étudié.

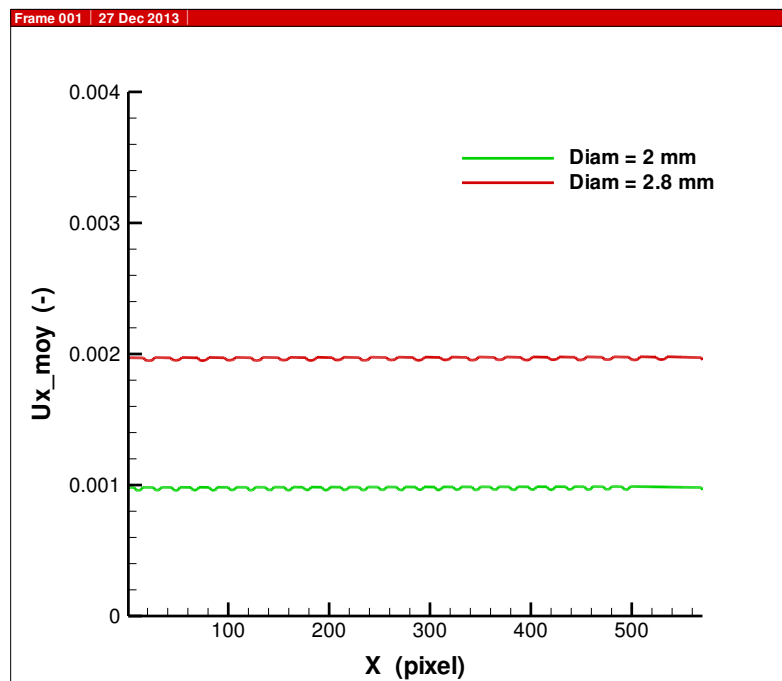


Fig.4.12 : Comparaison entre la vitesse horizontale moyenne pour deux diamètres différents des billes.

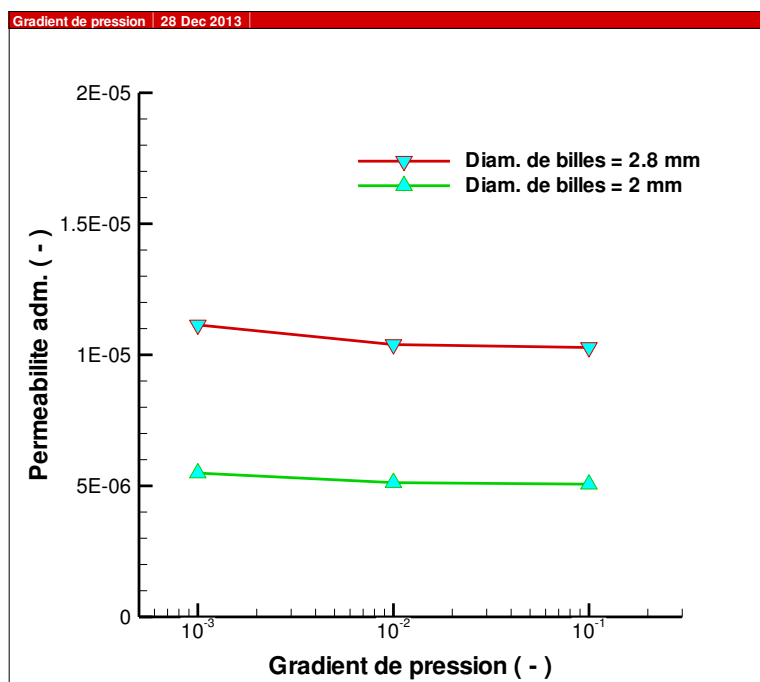


Fig.4.13 : Comparaison entre la perméabilité adimensionnelle pour deux diamètres différents des billes.

D'après les graphes de la figure 4.12, on remarque que la valeur de la vitesse horizontale pour des billes de dimensions ($\varnothing = 2.8 \text{ mm}$) est supérieure à celle de diamètre ($\varnothing = 2 \text{ mm}$), et par conséquent, la valeur de la perméabilité adimensionnelle (Fig 4.13). On constate que pour un diamètre élevé des billes on aura une augmentation dans la perméabilité et par conséquent favorise la productivité. Cette conclusion sera confirmée par la suite lorsqu'on étudie l'influence du diamètre des billes sur la productivité.

La recherche de la validation d'une loi d'écoulement dans le milieu poreux passe par l'établissement d'une relation entre la perte de pression sur une longueur L du milieu, et la vitesse u du fluide qui s'écoule. Les valeurs numériques des coefficients de loi d'écoulement sont obtenues par estimation de paramètres à partir des données de gradient de pression et des vitesses associées.

Les calculs de l'écoulement dans ce milieu ont été faits en fixant comme conditions aux limites à l'entrée et à la sortie un écart de pression et en laissant évoluer le modèle vers l'état stationnaire. La méthode de Boltzmann sur réseau est plus facile à appliquer à des nombres de Reynolds assez faibles, contrairement aux méthodes expérimentales. Pour faire des calculs à des nombres de Reynolds plus élevés, il faut utiliser des viscosités cinématiques encore plus faibles.

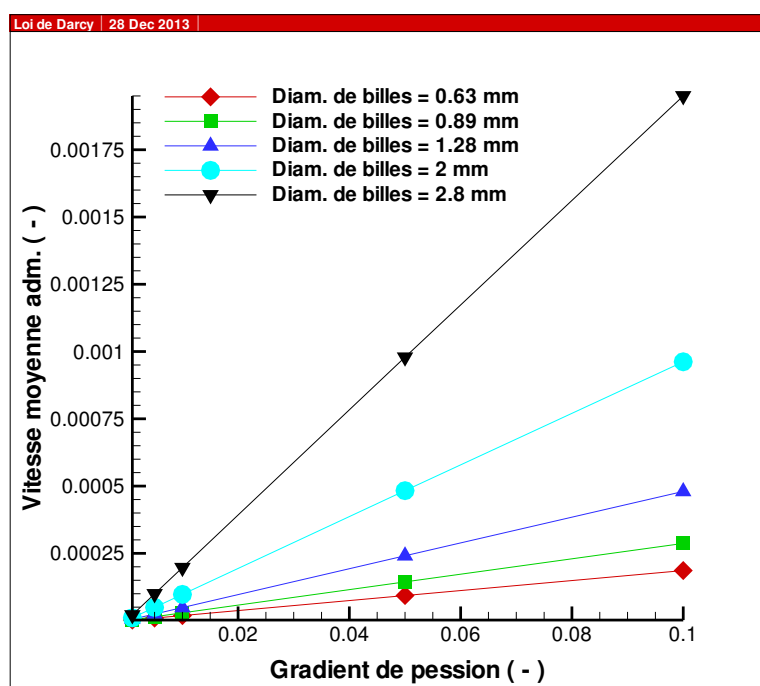


Fig.4.14 : Vitesse horizontale adimensionnelle en fonction du gradient de pression.

Les résultats obtenus pour différentes valeurs de dimensions de billes présentés par les graphes de la figure 4.14 suivent parfaitement une loi linéaire, et ils montrent clairement que le comportement de l'écoulement suit la loi de Darcy.

Les résultats de simulations permettent d'estimer les chutes de pression engendrées par l'écoulement monophasique de l'huile dans le milieu fracturé en fonction des vitesses macroscopiques pour différentes valeurs de dimensions de billes.

4.7 Conversion des unités du réseau de Boltzmann en unités physiques :

Dans la méthode mésoscopique de Boltzmann sur réseau, les valeurs utilisées pour la simulation sont adimensionnelles, et pour rétablir les valeurs physiques réelles quelques paramètres sont indispensables [32].

L'un des éléments clés pour l'application de la méthode de Boltzmann sur réseau aux problèmes de physique est la conversion correcte des unités du réseau de Boltzmann en unités physiques. Pour ce faire, trois facteurs de conversions Δx , Δt et Δm sont définis, par lesquels nous multiplions les quantités du réseau de Boltzmann pour obtenir les quantités physiques suivantes :

$$L_{lb}\Delta x = L, \quad t_{lb}\Delta t = t, \quad m_{lb}\Delta m = m \quad (4.15)$$

L_{lb} , représente le nombre de nœuds du réseau qui modélise la dimension physique L , ρ_{lb}^{ref} est la densité de référence dans le réseau de Boltzmann ($\rho_{lb}^{ref} = 1$) et ρ_{phys}^{ref} est la densité physique du fluide. Par conséquent, les facteurs de conversion peuvent être déterminés comme suit :

$$\Delta x = \frac{L}{L_{lb}} \quad (4.16)$$

$$\Delta t = \frac{L}{L_{lb}} \cdot \frac{c_s}{C_s} \quad (4.17)$$

$$\Delta m = \left(\frac{L}{L_{lb}}\right)^3 \cdot \frac{\rho_{phys}^{ref}}{\rho_{lb}^{ref}} \quad (4.18)$$

Où C_s est la vitesse du son physique et c_s est la vitesse du son du réseau de Boltzmann ($c_s = 1/\sqrt{3}$). Maintenant, nous pouvons obtenir toutes les autres quantités physiques en multipliant les quantités adimensionnelles du réseau de Boltzmann par les facteurs de conversions correspondants [47].

$$C_s = \frac{\Delta x}{\Delta t} c_s \quad (4.19)$$

$$\rho_{phys} = \frac{(\rho_{lb} \Delta m)}{\Delta x^3} \quad (4.20)$$

$$u_{phys} = u_{lb} (\Delta x / \Delta t) \quad (4.21)$$

$$v_{phys} = v_{lb} (\Delta x^2 / \Delta t) \quad (4.22)$$

$$\Delta p_{phys} = \Delta p_{lb} (\Delta m / \Delta x \Delta t^2) \quad (4.23)$$

Les variables ρ_{phys} , u_{phys} , v_{phys} et Δp_{phys} expriment les valeurs réelles de la masse volumique, la vitesse, la viscosité cinématique et la différence de pression, respectivement. Le choix d'un fluide spécifique va fixer les valeurs de la viscosité et de la masse volumique.

En utilisant les relations ci-dessus, on peut déduire la valeur réelle de la perméabilité à partir de celle obtenue par la méthode de Boltzmann par :

$$k_{phys} = (\Delta x)^2 k_{lb} \quad (4.24)$$

Sachant que k_{lb} est défini en fonction de la perméabilité adimensionnelle par :

$$k_{lb} = (L_{lb})^2 k_{tpl} \quad (4.25)$$

Calcul des paramètres physiques de simulation :

Le but de ce travail est d'estimer le débit d'huile passant à travers un échantillon représentant une fissure résultante d'une fracturation hydraulique. Pour ce faire, on va convertir les valeurs de simulation en valeurs physiques à l'aide des équations (4.19), (4.20), (4.21), (4.22), (4.23), (4.24) et (4.25). En sachant des valeurs physiques tels que la vitesse macroscopique et la masse volumique, on peut facilement déterminer la

conductivité de la fracture, donnée par la suite, et par conséquent la productivité du puits avant et après fracturation.

4.8 Conductivité de fracture :

Par définition, la conductivité d'une fracture soutenue est le produit de la perméabilité k_F du matériau granulaire utilisé par la largeur h de la fracture :

$$C = h k_f \quad (4.26)$$

La conductivité C est exprimée généralement en *Darcys x mètre* ou *milliDarcys x mètre*.

Le principe de calcul de la conductivité de fracture est de connaître le gradient de pression appliqué entre l'amont et l'aval de la fracture, ainsi que le débit Q et la viscosité dynamique η du fluide qui s'écoule dans la fracture soutenue par un matériau granulaire, et par l'application de la loi de Darcy :

$$\Delta p = \frac{Q \eta}{k} \cdot \frac{L}{S} \quad (4.27)$$

On trouve :

$$h k = \frac{Q \eta}{\Delta p} \cdot \frac{L}{W} \quad (4.28)$$

Avec :

$$S = h W$$

Où L et W désignent les dimensions de l'échantillon.

4.9 Influence du diamètre des perforations sur la productivité :

La perforation est la technique de créer une liaison entre le réservoir et le puits, dans le but de produire sur une longue période avec des meilleures performances. Les perforations sont effectuées à l'aide d'un outil spécial appelé "canon" descendu au câble, les charges creuses explosives (en moyenne 13 trous au mètre) peuvent pénétrer sur une dizaine de centimètres après avoir traversé le tube acier et le ciment.

Le diamètre de perforation représente l'un des principaux paramètres influençant la productivité de la zone produite par perforation, à cause de la perte de charge.

Pour étudier l'influence du diamètre des perforations sur l'écoulement, on reprend le modèle de simulation de diamètre de billes égale à ($\phi = 2 \text{ mm}$). En fixant le gradient de pression à une valeur de $\nabla p = 0.1$ et la viscosité cinématique à une valeur de $\nu = 0.1$, et on fait varier le diamètre des perforations suivant des valeurs normalisées, à savoir : 0.22'', 0.31'', 0.39'' et 0.52''.

Les résultats de simulation sont donnés par la figure 4.15, sur laquelle le graphe qui représente la variation de la conductivité en fonction du diamètre des perforations montre une bonne conductivité pour des dimensions élevées des perforations. Ces résultats sont justifiés, puisque les dimensions élevées des perforations minimisent les pertes de charge et par conséquent améliore la productivité.

En plus du gain dans la production obtenu par un diamètre élevé des perforations, la pénétration des perforations donne un gain supplémentaire, et à titre d'exemple, de passer de 15 à 30 cm permet d'augmenter l'indice de production de 20% environ [48].

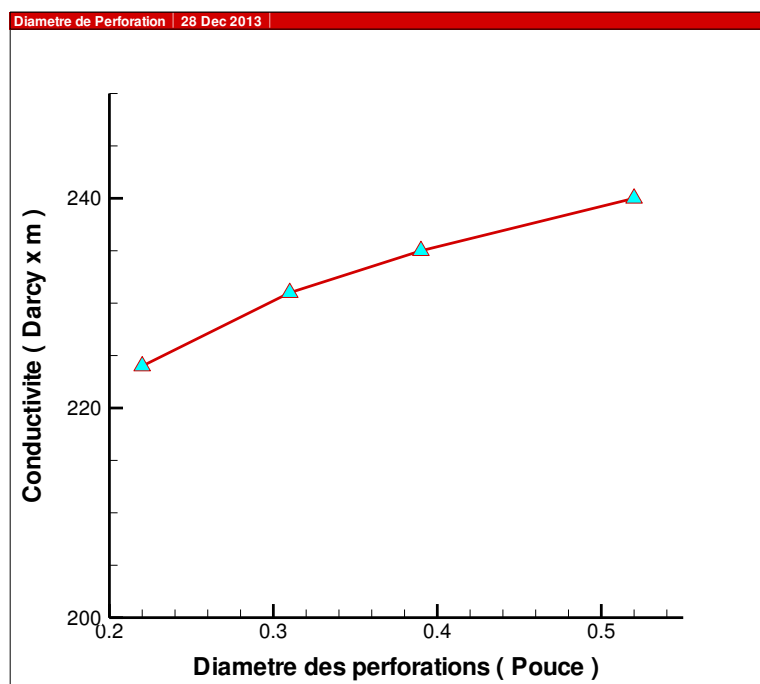


Fig.4.15 : Variation de la conductivité en fonction du diamètre des perforations.

4.10 Influence du diamètre des billes sur la productivité :

Pour étudier l'influence du diamètre des billes sur la conductivité et par conséquent sur la productivité, on reprend le même modèle de simulation mais avec différentes valeurs du diamètre des billes, tout en fixant le gradient de pression à une valeur de $\nabla p = 0.1$ et la viscosité cinématique à une valeur de $\nu = 0.1$. On fait varier le diamètre des billes suivant des valeurs choisies à partir d'une granulométrie normalisée des agents de soutènement [9], comme illustré sur le tableau 4.1 donné ci-dessous :

Tableau 4.1 : Granulométrie des agents de soutènement.

Granulométrie (Mesh)	Dimensions des grains (mm)	Diamètre choisi (mm)
20 – 40	0.42 à 0.84	0.63
16 – 30	0.6 à 1.18	0.89
12 – 20	0.84 à 1.68	1.26
8 – 12	1.68 à 2.38	2
6 – 9	2.2 à 3.36	2.8

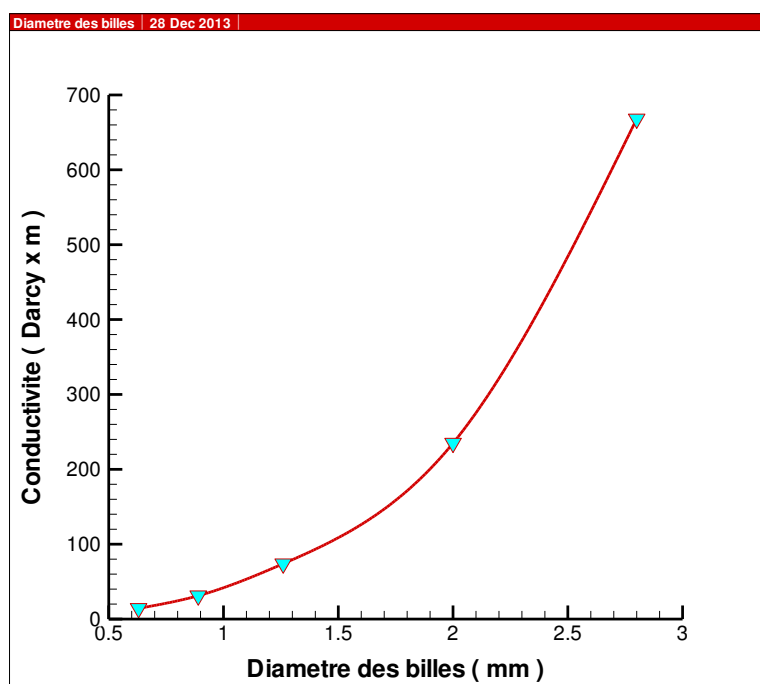


Fig.4.16 : Variation de la conductivité en fonction du diamètre des billes.

La figure 4.16 représente les résultats de simulation d'un échantillon de fracture avec différentes valeurs de dimensions de billes. La courbe de la figure 4.16 montre que la conductivité est fortement liée au diamètre des billes et varie suivant une loi exponentielle.

Le tableau 4.2 donne quelques valeurs moyennes de la perméabilité en fonction de la granulométrie [9]. A partir de ce tableau on trace la courbe qui donne la variation de la perméabilité en fonction du diamètre de billes (pour le diamètre on prend la valeur moyenne de chaque granulométrie).

Tableau 4.2 : Perméabilité moyenne en fonction de la granulométrie [9].

Granulométrie (Mesh)	Dimensions des grains (mm)	Perméabilité moyenne (Darcy)
40 – 60	0.25 à 0.42	50
20 – 40	0.42 à 0.84	100
12 – 20	0.84 à 1.68	500
8 – 12	1.68 à 2.38	1800

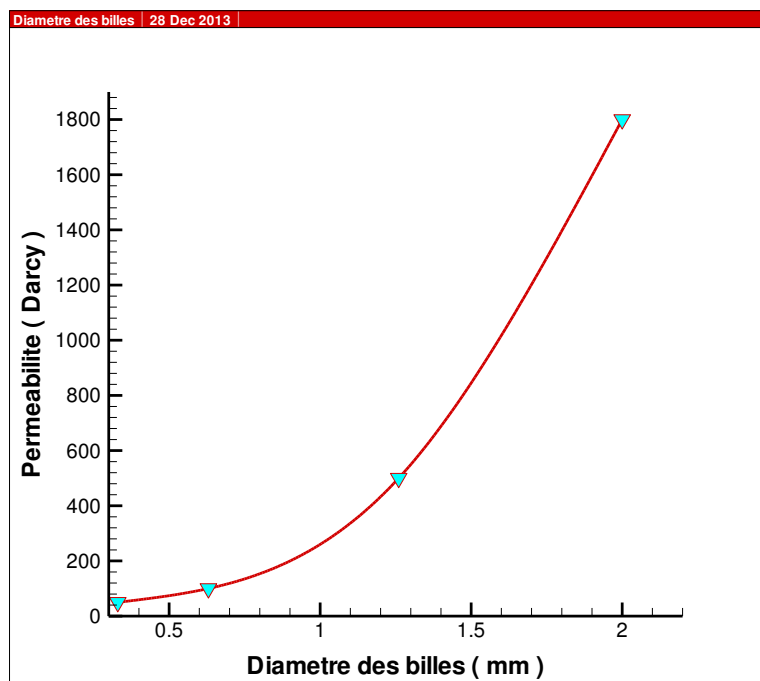


Fig.4.17 : Variation de la perméabilité en fonction du diamètre des billes (courbe tracée sur la base des données de la référence [9]).

Pour qu'on puisse faire la comparaison avec les résultats de simulation, on trace la variation de la conductivité en fonction du diamètre de billes tout en basant sur les données du tableau 4.2 et en sachant que la conductivité est égale au produit de la perméabilité et la largeur de la fracture (éq. 4.26). Cette dernière correspond au diamètre de bille dans notre modèle.

La comparaison entre la courbe de la figure 4.18 qui représente les données de la littérature et celle de la figure 4.16 qui représente les résultats de simulation montre qu'ils ont presque la même allure, et donc la variation de la conductivité se fait de la même façon dans les deux cas, ce qui permet ainsi de valider les résultats de notre simulation.

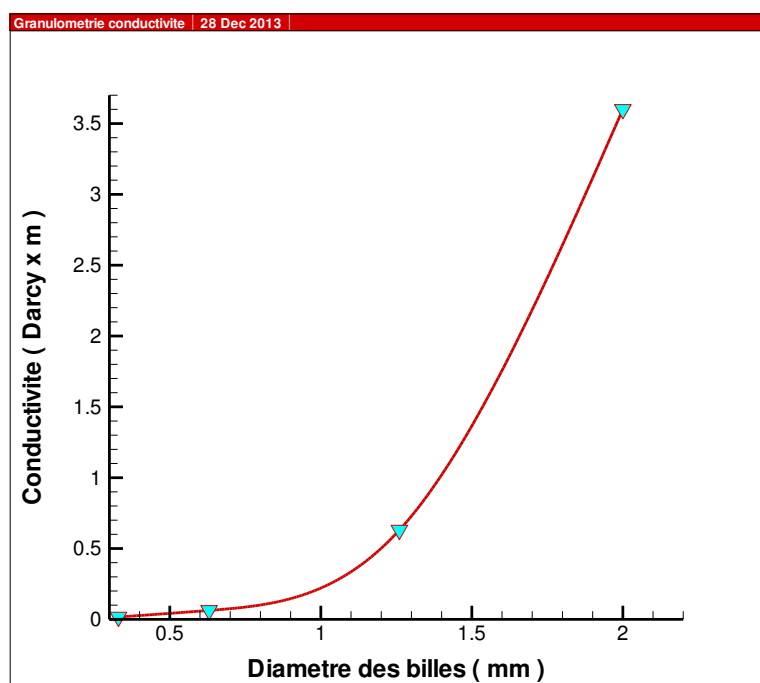


Fig.4.18 : Variation de la conductivité en fonction du diamètre des billes (courbe tracée sur la base des données de la référence [9]).

Cette comparaison qui a été faite ne représente qu'une concordance partielle entre les deux courbes, car ces derniers ont presque la même allure mais avec des valeurs très écartées. Ces écarts indiquent, par d'autre terme, la différence entre la perméabilité du modèle étudié et celle de la littérature. Ces écarts sont justifiés principalement par les deux raisons suivantes :

- La porosité du modèle d'étude est plus grande que celle de la littérature, ce qui produise des valeurs des perméabilités très divergés.

- Les données de la littérature exposent un cas réel qui pris en compte tous les phénomènes physiques peuvent influencés sur la perméabilité, par contre le modèle étudié expose une configuration simple d'un échantillon de fracture en 2D, de dimensions très limitées et représente, par conséquent, un modèle très éloigné à la réalité.

Conclusion :

L'utilisation de l'algorithme de la méthode de Boltzmann sur réseau pour la simulation de l'écoulement de poiseuille en régime laminaire établi a donnée des résultats très comparables aux solutions analytiques. La concordance des résultats de simulations avec les données de la littérature est tout à fait encourageante et permet de valider notre simulation basée sur la méthode de Boltzmann. L'utilisation de la méthode de Boltzmann sur réseau a également permis de simuler, sans trop de peine, l'écoulement dans un milieu fissuré hydrauliquement fracturé.

Nous avons montré que pour différents gradient de pression les données de la vitesse d'écoulement issues des simulations sont en accord avec la loi de Darcy permettant ainsi le calcul de la perméabilité en fonction de la viscosité du fluide pour l'ensemble des échantillons choisis.

Le choix d'un diamètre de billes (agents de soutènement) le plus grand possible, injectés dans la fracture, permet d'avoir une amélioration très remarquable dans la productivité.

CONCLUSION GENERALE

Conclusion générale et perspectives

Le travail présenté dans ce mémoire porte sur l'étude de l'écoulement monophasique d'un fluide visqueux (huile) dans un milieu poreux (gisement fracturé hydrauliquement) à proximité des perforations d'un puits.

Ce travail se rapporte à la mise en œuvre de la méthode de Boltzmann sur réseau qui offre des avantages intéressants comparés aux méthodes traditionnelles résidant essentiellement dans la simplicité de sa mise en œuvre et de l'intégration de géométrie complexe.

Un code numérique fondé sur la technique de Boltzmann sur réseau, pour l'estimation de certaines propriétés physiques des fissures résultantes d'une fracturation hydraulique, est présenté. Dans nos simulations nous nous sommes intéressés à l'un des paramètres essentiels d'un milieu poreux qui est la perméabilité, par laquelle se base l'estimation de la productivité et fait l'objet de l'opération de fracturation hydraulique.

Une comparaison entre la solution analytique et celle obtenue par la simulation numérique, pour un écoulement de poiseuille, a été faite. Cette comparaison montre une bonne concordance des profils de vitesses et permet, par conséquent, de valider notre programme de simulation.

Les résultats présentés montrent la capacité d'un outil de simulation, fondé sur la méthode de Boltzmann sur réseau, à fournir une évaluation de la perméabilité comparable avec ceux que l'on trouve dans la littérature. Par conséquent, Pour la conductivité, la comparaison des résultats obtenus par simulation numérique avec ceux des études expérimentales de la littérature montre la capacité de la procédure numérique proposée à produire des résultats d'estimation très proches des évaluations expérimentales.

L'application de la méthode de Boltzmann sur réseau pour la simulation de l'écoulement de fluide a permis de soumettre les modèles étudiés aux différents gradients de pression. Les résultats de ces simulations montrent que la valeur de la perméabilité reste constante. Cette valeur est légèrement influencée par le changement de la viscosité et surtout lorsqu'on augmente la résolution de l'image qui représente le milieu étudié. Cette indépendance de la perméabilité prouve que cette grandeur est une qualité intrinsèque du

milieu poreux. Les résultats de simulation pour différentes valeurs de dimensions de billes montrent aussi que la relation entre la vitesse d'écoulement et la perte de pression suit une loi linéaire. Ces résultats sont en accord avec la loi de Darcy.

L'étude de l'influence du diamètre des billes sur la productivité a permis de tracer une courbe de la variation de la conductivité en fonction de dimension des billes. Cette courbe montre que le diamètre des agents de soutènement influe considérablement et proportionnellement sur la conductivité. Les résultats de simulation qui donne la variation de la perméabilité en fonction du diamètre des perforations montre que ce dernier influe légèrement sur la conductivité et de donner un gain supplémentaire de la productivité pour des diamètres élevés des perforations.

Parmi les perspectives de ce travail est l'extension de cette étude à des domaines en 3D qui donne des résultats meilleurs que ceux obtenus à partir des domaines en 2D, car l'estimation de la perméabilité dans un milieu poreux en 2D ne rend que très partiellement compte de la complexité du domaine en 3D. Aussi, la méthode de Boltzmann sur réseau pourra traiter les écoulements de fluides multiphasiques et multi constituants qu'on les trouve souvent dans les gisements pétroliers. Ainsi que le programme de simulation de ce travail est extensible à un milieu poreux réel, et ce par l'utilisation des images réelles en coupe obtenues par la technique de Microscopie Electronique à Balayage (MEB).

Références bibliographiques

Références bibliographiques

- [1]. P. BOBBY, Cracking rock, progress in fracture treatment design, COMPLETION/STIMULATION, Houston, Texas, USA, Octobre 1992.
- [2]. K. BENNACEUR, Les hydrocarbures non conventionnels Nouvelles perspectives de l'industrie parapétrolière, RESPONSABILITÉ & ENVIRONNEMENT N° 64 OCTOBRE 2011.
- [3]. API GUIDANCE DOCUMENT, Hydraulic Fracturing Operations - Well Construction and Integrity Guidelines, Octobre 2009.
- [4]. Ahmed S. Abou-Sayed, Hydraulic Fracturing, A Technology For All Time, Reservoir Stimulation, Third Edition, Basics of Hydraulic Fracturing, WILEY.
- [5]. School of petroleum engineering, UNSW, open learning, Well stimulation fracturing, 2003.
- [6]. G. C. HOWARD, C. R. FAST, Hydraulic fracturing, Society of petroleum engineers of AIME, New York 1970.
- [7]. Mark G. Mack, Schlumberger Dowell, Norman R. Warpinski, Sandia National Laboratories, Mechanics of Hydraulic Fracturing, Reservoir Stimulation, Third Edition, Basics of Hydraulic Fracturing, WILEY.
- [8]. Rapport de fracturation hydraulique du puits RN-117, Injectivity test and minifrac suggested procedure, HALLIBERTON, 2012.
- [9]. P. LE TIRANT, L. GAY, P. KERBOURC'H, J. MOULINIER, D. VEILLON, Manuel de fracturation hydraulique, Collection pratique du pétrole, 1972.
- [10]. Y. LAGGOUN, A. ZIDI, K. BENGLEA, Amélioration d'indice de productivité par fracturation hydraulique, MASTER PROFESSIONNEL, 2013.
- [11]. IFP Training, INITIATION GISEMENT, ENSPM Formation Industrie, 2006.
- [12]. M. NICOLAS, Ecoulement dans les milieux poreux, DEA MECANIQUE ENERGETIQUE, Ecole Doctorale Mécanique, Physique et Modélisation Université de Provence, Marseille, 2003.
- [13]. J. F. Daïan, Transferts En Milieux Poreux, Ecole doctorale de Mécanique, Grenoble (INPG, UJF), janvier 2010.

- [14]. Richard Fitzpatrick, Professor of Physics The University of Texas at Austin, Fluid Mechanics.
- [15]. Thétis, Notice théorique, <http://thetis.enscpb.fr>; Janvier 2010.
- [16]. M. Kaviany, Principles of heat transfer in porous media, Mechanical engineering series, second edition.
- [17]. S. Alioui, Modélisation et Simulation à base de Méthodes Numériques Alternatives des Déplacements Diphasiques en milieu poreux, mémoire de magistère, université de Boumerdès, 2011.
- [18]. Peng Yuan, Thermal Lattice Boltzmann Two-Phase Flow Model For Fluid Dynamics, Thèse de doctorat, University of Pittsburgh, 2005
- [19]. J.O. Hardy, O. de Pazzis, Y. Pomeau, Molecular dynamics of a classical lattice gaz transport properties and time correlation functions, Physical Review A., vol. 13, p. 1949-1961, 1976.
- [20]. U. Frisch, B. Hasslacher, Y. Pomeau, Lattice gas automata for the Navier Stokes equation, Physical Review Letters, vol. 56, no 14, p. 1505-1508, 1986.
- [21]. D. D'Humières, P. Lallemand, U. Frisch, Lattice gas models for 3D-hydrodynamics, Europhysics Letters, vol. 2, no 4, p. 291-297, 1986.
- [22]. G. Mc Namara, G. Zanetti, Use of Boltzmann equation to simulate lattice gas automata, Physical Review Letters, vol. 61, no 20, p. 2332-2335, 1988.
- [23]. F. Higuera, S. Succi, R. Benzi, Lattice gas dynamics with enhanced collisions, Europhysics Letters, vol. 9, no 7, p. 663-668, 1989.
- [24]. Y.H. Qian, D. D'Humières, P. Lallemand, Lattice BGK for Navier-Stokes equation, Europhysics Letters, vol. 17, no 6, p. 479-484, 1992.
- [25]. D. D'Humières, Generalized Lattice-Boltzmann Equations - Theory and Applications - Progress in Astronautics and Aeornautics, vol. 159, p. 450-458, 1992.
- [26]. R. Benzi, S. Succi, and M. Vergassola. The lattice Boltzmann equation - Theory and applications. Physics Reports, Decembre 1992.
- [27]. M.C. Sukop, D.T. Thorne, Lattice Boltzmann modeling - an introduction for geoscientists and engineers, Springer, Heidelberg, Berlin, New York.

- [28]. R. Benzi, S. Succi, and M. Vergassola, Lattice-Gas Cellular Automata and Lattice Boltzmann Models, *Phys. Rep.* 222, 145 1992.
- [29]. X. Shan and H. Chen, Simulation of non ideal gases and liquid-gas phase transitions by the lattice Boltzmann equation, *Phys. Rev. E* 49, 2941 – 2948, 1994.
- [30]. S. Chen, K. Diemer, G. Doolean, K. Eggert, C.Fu, S. Gutman and B. Travis, Lattice gas models for non ideal fluids, *Physica D* 47, 97, 1991.
- [31]. Hidemitsu Hayashi, “Lattice Boltzmann Method and its Application to Flow Analysis in Porous Media”, Research Report, R&D Review of Toyota CRDL Vol. 38 No. 1, 2002.
- [32]. M. R. Arab, E. A. Semma, B. Pateyron et M. El Ganaoui, Caractérisation physique des matériaux poreux par une méthode de type Boltzmann sur réseau, 13èmes Journées Internationales de Thermique, publié dans "JITH 2007, Albi : France (2007).
- [33]. S. Succi, *The Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond* (Series Numerical Mathematics and Scientific Computation), Oxford University Press, 2001.
- [34]. T. Inamuro, M. Yoshino, F. Ogino, A nonslip boundary condition for lattice Boltzmann simulations, *Phys. Fluids* 7:2928–30, 1995.
- [35]. Q. ZOU and X. HE, On pressure and velocity boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model, *Phys. Fluids*, 9 (1997), 1591-1598.
- [36]. K. Mattila, J. Hyvaluoma, T. Rossi, M. Aspнас, J. Westerholm, An efficient swap algorithm for the lattice Boltzmann method, *Comput. Phys. Communications* 176 (2007) 200-210.
- [37]. R. R. Nourgaliev, T. N. Dinh, T. G. Theofanous, D. Joseph, The lattice Boltzmann equation method - theoretical interpretation - numeric and implications, *International journal of multiphase flow*, 117-169, 2003.
- [38]. G. Wellein, T. Zeiser, S. Donath, G. Hager, On the single processor performance of simple lattice Boltzmann kernels, *Comput. & Fluids* 35 (8-9) (2006) 910-919.
- [39]. P. A. Skordos, Initial and Boundary Conditions for the Lattice Boltzmann Method *phys. Rev. E* (1993) N. Pages: 42.

- [40]. D.P. Ziegler. Boundary condition for lattice boltzmann simulations. *Journal Stat Phys*, 71. 1171–1177, 1993.
- [41]. Shiyi Chen, Gary D. Doolen, Lattice Boltzmann Method For Fluid Flows, *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1998. 30:329–64.
- [42]. R. Verberg and A.J.C. Ladd. Lattice boltzmann model whith sub-gird-scale boundary conditions. *Phys Rev Letters*, 84 :2148–2151, 2000.
- [43]. Zhaoli Guo , T. S. Zhao, Lattice Boltzmann model for incompressible flows through porous media, *PHYSICAL REVIEW E* 66, 036304 ~2002.
- [44]. M. Bernaschi, S. Succi and H. Chen, Accelerated Lattice Boltzmann Schemes for steady-State Flow Simulations, *J. Sci. Computing*, Vol. 16 No. 2 (2001) 135-144.
- [45]. M. C. Sukop, Introduction to Lattice Boltzmann Methods: GLY-5835. Course for graduate (2006).
- [46]. Xiaoyi He, Li-Shi Luo, Lattice Boltzmann Model for the Incompressible Navier-Stokes Equation, *Journal of Statistical Physics*, Vol. 88, Nos. 3/4, 1997.
- [47]. D. BEUGRE, Étude de l'écoulement d'un fluide dans des géométries complexes rencontrées en Génie Chimique par la méthode de Boltzmann sur réseau, Thèse de doctorat en Sciences de l'Ingénieur, Juin 2010.
- [48]. D. Veillon, La liaison couche-trou. Edition Technip, Paris et institut français du pétrole, Rueil-Malmaison, 2001.

Annexes

Annexe 1

Dans L'équation 3.19, la fonction de distribution f_M est donnée par 3.16 :

$$f_M(x, \xi, t) = \frac{\rho}{(2\pi RT)^{D/2}} \exp \left[-\frac{(\xi - u)^2}{2RT} \right] \quad A1.1$$

Qu'on peut l'écrire sous la forme :

$$f_M(x, \xi, t) = \frac{\rho}{(2\pi RT)^{D/2}} \exp \left[-\frac{\xi^2}{2RT} \right] \cdot \Phi(\xi, u) \quad A1.2$$

Avec :

$$\Phi(\xi, u) = \exp \left[\frac{(\xi \cdot u)}{RT} - \frac{u^2}{2RT} \right]$$

R est la constante spécifique des gaz, D la dimension de l'espace, T la température statique, ρ la densité du gaz, ξ le vecteur vitesse d'une molécule et u est le vecteur de vitesse macroscopique.

En intégrant la fonction Φ selon un développement en série de Taylor approprié en u , la fonction de distribution de Maxwell-Boltzmann f_M peut s'écrire :

$$f_M(x, \xi, t) = \frac{\rho}{(2\pi RT)^{D/2}} \exp \left[-\frac{\xi^2}{2RT} \right] \cdot \left\{ 1 + \frac{(\xi \cdot u)}{RT} + \frac{(\xi \cdot u)^2}{2(RT)^2} - \frac{u^2}{2RT} \right\} + O(u^3) \quad A1.3$$

Ensuite, dans le but de dériver à la limite hydrodynamique les équations de Navier-Stokes incompressible, un développement d'ordre 2 est suffisant, d'où le second terme peut être négligé, et on pourra donc écrire que :

$$f^{(eq)}(x, \xi, t) = \frac{\rho}{(2\pi RT)^{D/2}} \exp \left[-\frac{\xi^2}{2RT} \right] \cdot \left\{ 1 + \frac{(\xi \cdot u)}{RT} + \frac{(\xi \cdot u)^2}{2(RT)^2} - \frac{u^2}{2RT} \right\} \quad A1.4$$

Où $f^{(eq)} = f_M$ représente la fonction de distribution d'équilibre local. Comme pour l'équation continue de Boltzmann les propriétés macroscopiques de l'écoulement sont données par les moments de la fonction distribution f_k , donc :

$$\rho = \sum_k f_k \quad \text{et} \quad \rho u = \sum_k \xi_k f_k \quad A1.5$$

Où

$$f_k \equiv f_k(x, t) \equiv w_k f_k(x, \xi_k, t) \quad \text{et} \quad f_k^{eq} \equiv f_k^{eq}(x, t) \equiv w_k f_k^{eq}(x, \xi_k, t) \quad A1.6$$

dans ces relations, w_k représentent les facteurs de pondérations. Ces facteurs sont définis, pour un fluide isotherme, comme [15] :

$$w_k = 2\pi RT \exp\left[\frac{\xi^2}{2RT}\right] \cdot t_k \quad A1.7$$

Dans le cas du modèle D2Q9. Où les t_k correspondent aux mêmes facteurs de pondérations que dans Eq. (2.24) et $RT = c_s^2 = \frac{1}{3}(\delta x/\delta t)^2 \equiv \frac{1}{3}c^2$ (c_s^2 est le carré de la vitesse du son du modèle). Avec $c = \sqrt{3RT}$ est la vitesse du réseau.

Donc la fonction de distribution d'équilibre local pour l'écoulement d'un fluide isotherme est donnée par :

$$f_k^{eq} = w_k f^{(eq)}(x, \xi, t) = t_k \rho \left\{ 1 + \frac{3(e_k \cdot u)}{c^2} + \frac{9(e_k \cdot u)^2}{2c^4} - \frac{3u^2}{2c^2} \right\} \quad A1.8$$

En substituant la densité totale ρ en une densité moyenne constante et une fluctuation de densité $\rho = \rho_0 + \delta\rho$, on a donc :

$$f_k^{eq} = t_k \delta\rho \left\{ 1 + \frac{3(e_k \cdot u)}{c^2} + \frac{9(e_k \cdot u)^2}{2c^4} - \frac{3u^2}{2c^2} \right\} + t_k \rho_0 \left\{ 1 + \frac{3(e_k \cdot u)}{c^2} + \frac{9(e_k \cdot u)^2}{2c^4} - \frac{3u^2}{2c^2} \right\}$$

Ou bien :

$$f_k^{eq} = t_k \delta\rho + t_k \rho_0 \left\{ 1 + \frac{3(e_k \cdot u)}{c^2} + \frac{9(e_k \cdot u)^2}{2c^4} - \frac{3u^2}{2c^2} \right\} + t_k \delta\rho \left\{ \frac{3(e_k \cdot u)}{c^2} + \frac{9(e_k \cdot u)^2}{2c^4} - \frac{3u^2}{2c^2} \right\} \quad A1.9$$

On peut négliger les termes $\delta\rho \cdot \left(\frac{u}{c}\right)$ et $\delta\rho \cdot \left(\frac{u}{c}\right)^2$ pour un faible nombre de Mach M_a ($M_a = \left(\frac{u}{c}\right) \ll 1$), d'où la dernière équation devient :

$$f_k^{eq} = t_k \left[\delta\rho + \rho_0 \left\{ 1 + \frac{3(e_k \cdot u)}{c^2} + \frac{9(e_k \cdot u)^2}{2c^4} - \frac{3u^2}{2c^2} \right\} \right] \quad A1.10$$

Annexe 2

On peut retrouver les équations de Navier-Stokes à partir de l'équation de Boltzmann munie de l'opérateur de collision BGK [46] :

On reprend l'équation (3.20) :

$$f(x + e_k \delta_t, t + \delta_t) = f(x, \xi, t) - \frac{1}{\tau} [f_k(x, t) - f_k^{eq}(x, t)] \quad A_2.1$$

Où bien sous la forme continue :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi \frac{\partial f}{\partial x_i} = -\frac{1}{\tau} (f - f^{eq}) \quad A_2.2$$

Chapman et Enskog dans les années 1920 ont donné un développement des fonctions de distribution en fonction du nombre de Knudsen. Ce nombre sans dimension, fondamental en physique statistique, traduit le rapport entre le libre parcours moyen \mathcal{L} des particules, c'est-à-dire la distance sur laquelle ces particules ne subissent aucune collision, et la longueur caractéristique L de l'écoulement :

$$\varepsilon = \frac{\mathcal{L}}{L} \quad A_2.3$$

En développant les fonctions de distribution de la façon suivante :

$$f = f^{(0)} + \varepsilon f^{(1)} + \varepsilon^2 f^{(2)} \quad A_2.4$$

En injectant ce développement dans l'équation (A₂.2), on peut alors identifier les différents termes en fonction de leur ordre en ε , on obtient :

$$O(\varepsilon^0) : f_\alpha^{(0)} = f_\alpha^{(eq)} \quad A_2.5a$$

$$O(\varepsilon^1) : D_{t_0} f_\alpha^{(0)} = -\frac{1}{\tau} f_\alpha^{(1)} \quad A_2.5b$$

$$O(\varepsilon^2) : \partial_{t_1} f_\alpha^{(0)} + \left(\frac{2\tau - 1}{2\tau} \right) D_{t_0} f_\alpha^{(1)} = -\frac{1}{\tau} f_\alpha^{(2)} \quad A_2.5c$$

Où : $D_{t_n} \equiv (\partial_{t_n} + e_\alpha \cdot \nabla)$

La fonction de distribution f_α est la solution normale tel que :

$$\sum_{\alpha} f_{\alpha}^{(0)} \begin{bmatrix} 1 \\ e_{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho_0 u \end{bmatrix} \quad A_2.6a$$

$$\sum_{\alpha} f_{\alpha}^{(n)} \begin{bmatrix} 1 \\ e_{\alpha} \end{bmatrix} = 0, \quad n > 0 \quad A_2.6b$$

Pour un modèle D2Q9, la fonction d'équilibre est définie par :

$$f_{\alpha}^{(eq)}(x, t) = w_{\alpha} \left\{ \rho + \rho_0 \left[3 \frac{(e_{\alpha} \cdot u)}{c^2} + \frac{9 (e_{\alpha} \cdot u)^2}{2 c^4} - \frac{3 u^2}{2 c^2} \right] \right\} \quad A_2.7$$

La dérivée de la fonction d'équilibre en fonction du temps peut être exprimée en fonction des variables hydrodynamiques ρ et u comme suite :

$$\partial_t f_{\alpha} = \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \rho} \partial_t \rho + \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial u} \partial_t u \quad A_2.8$$

Pour le modèle à 9 bits, on définit le tenseur :

$$E^{(n)} = \sum_{\alpha \neq 0} w_{\alpha} e_{\alpha,1} e_{\alpha,2} \cdots e_{\alpha,n} \quad A_2.9$$

Ce tenseur a les propriétés suivantes :

$$E^{(2)} = \sum_{\alpha \neq 0} w_{\alpha} e_{\alpha,i} e_{\alpha,j} = \frac{1}{3} c^2 \delta_{ij} \quad A_2.10a$$

$$E^{(4)} = \sum_{\alpha \neq 0} w_{\alpha} e_{\alpha,i} e_{\alpha,j} e_{\alpha,k} e_{\alpha,l} = \frac{1}{9} c^4 \Delta_{ijkl} \quad A_2.10b$$

Puisque :

$$\sum_{\alpha=1}^4 e_{\alpha,i} e_{\alpha,j} = 2c^2 \delta_{ij} \quad A_2.11a$$

$$\sum_{\alpha=5}^8 e_{\alpha,i} e_{\alpha,j} = 4c^2 \delta_{ij} \quad A_2.11b$$

$$\sum_{\alpha=1}^4 e_{\alpha,i} e_{\alpha,j} e_{\alpha,k} e_{\alpha,l} = 2c^2 \delta_{ijkl} \quad A_2.11c$$

$$\sum_{\alpha=5}^8 e_{\alpha,i} e_{\alpha,j} e_{\alpha,k} e_{\alpha,l} = 4c^4 \Delta_{ijkl} - 8c^2 \delta_{ijkl} \quad A_2.11d$$

Où δ_{ij} et δ_{ijkl} sont le symbole de Kronecker de deux et quatre indices respectivement, et :

$$\Delta_{ijkl} = \delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} \quad A_2.12$$

On a donc : $E^{(2n+1)} = 0$ for $n = 0, 1, \dots$

Avec les propriétés ci-dessus du tenseur $E^{(n)}$, on a :

$$\sum_{\alpha} f_{\alpha}^{(0)} = \rho \quad A_2.13a$$

$$\sum_{\alpha} e_{\alpha} f_{\alpha}^{(0)} = \rho_0 u \quad A_2.13b$$

$$\sum_{\alpha} e_{\alpha,i} e_{\alpha,j} f_{\alpha}^{(0)} = \frac{1}{3} c^2 \rho \delta_{ij} + \rho_0 u_i u_j \quad A_2.13c$$

$$\sum_{\alpha} e_{\alpha,i} e_{\alpha,j} e_{\alpha,k} f_{\alpha}^{(0)} = \frac{1}{3} c^2 \rho_0 (\delta_{ij} u_k + \delta_{ki} u_j + \delta_{jk} u_i) \quad A_2.13d$$

Les moments de l'équation (A₂.5b) conduisent aux équations d'Euler :

$$\partial_{t_0} \rho + \nabla \cdot (\rho_0 u) = 0 \quad A_2.14a$$

$$\partial_{t_0} (\rho_0 u) + \nabla \cdot \Pi^{(0)} = 0 \quad A_2.14b$$

Où $\Pi^{(0)} = \sum_{\alpha} e_{\alpha} e_{\alpha} f_{\alpha}^{(0)}$ est le tenseur impulsion d'ordre zéro. Avec $\Pi_{ij}^{(0)}$ donnée par l'équation (A₂.13c), les équations ci-dessus peut être réécrite comme :

$$\frac{1}{c_s^2} \partial_{t_0} P + \nabla \cdot u = 0 \quad A_2.15a$$

$$\partial_{t_0} u + u \cdot \nabla u = -\nabla P - u \nabla \cdot u \quad A_2.15b$$

Tel que : $P = c_s^2 \rho / \rho_0$, $c_s = c / \sqrt{3}$

Il convient de souligner que le terme divergent est annulé exactement comme dans les autres modèles LBE standards, alors que, dans ce modèle, le terme divergent $u \nabla \cdot u$ reste dans l'équation de quantité de mouvement. Néanmoins, avec l'équation (A₂.15a), le terme divergent dans l'équation (A₂.15b) est en effet de l'ordre de O (M3), qui est un terme d'ordre supérieur contrairement aux autres termes de l'équation (A₂.15b).

Les moments de l'équation (A₂.5c) conduisent aux équations suivantes :

$$\partial_{t_1} \rho = 0 \quad A_2.16a$$

$$\partial_{t_1} (\rho_0 u) + \frac{(2\tau - 1)}{2\tau} \nabla \cdot \Pi^{(1)} = 0 \quad A_2.16b$$

Où $\Pi^{(1)} = \sum_{\alpha} e_{\alpha} e_{\alpha} f_{\alpha}^{(1)}$ est le flux de la tenseur impulsion de premier ordre. A l'aide des équations (A₂.13) et (A₂.15), on a :

$$\begin{aligned} \Pi_{ij}^{(1)} &= \sum_{\alpha} e_{\alpha,i} e_{\alpha,j} f_{\alpha}^{(1)} = -\tau \sum_{\alpha} e_{\alpha,i} e_{\alpha,j} D_{t_0} f_{\alpha}^{(0)} \\ &= -\tau \left[\partial_{t_0} \Pi_{ij}^{(0)} + \frac{1}{3} c^2 \rho_0 (\nabla \cdot u \delta_{ij} + \nabla_i u_j + \nabla_j u_i) \right] \\ &= -\tau [\rho_0 \partial_{t_0} (u_i u_j) + c_s^2 \rho_0 (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i)] \\ &= \tau [c_s^2 (u_i \rho + u_j \nabla_i \rho) + \rho_0 (u_i (u \cdot \nabla) u_j + u_j (u \cdot \nabla) u_i) - c_s^2 \rho_0 (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i)] \end{aligned} \quad A_2.17$$

Où $\nabla_i = \partial / \partial x_i$

Dans le résultat ci-dessus, les termes de $O(u^3)$ doivent être négligés, afin d'être compatible avec l'expansion de vitesse faible de $f_{\alpha}^{(eq)}$ jusqu'à l'ordre de $O(u^2)$ (Notez que $O(u) = O(M)$, donc on prend la liberté d'échanger ces notations.) en outre, les termes de $u_j \nabla_i \rho$ devraient être négligés parce qu'ils sont de l'ordre $O(M^3)$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} \frac{(2\tau - 1)}{2\tau} \nabla_j \Pi_{ij} &= -\frac{\nu}{\delta_t} \rho_0 \nabla_j (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i) + O(M^3) \\ &= -\frac{\nu}{\delta_t} \rho_0 (\nabla_i \nabla \cdot u_j + \nabla^2 u_i) + O(M^3) \\ &= -\frac{\nu}{\delta_t} \rho_0 \nabla^2 u_i + O(M^3) \end{aligned} \quad A_2.18$$

Où le terme $\nabla \cdot u$ a été négligé car il est de $O(M^2)$ en raison de l'équation (A₂.15a), et la viscosité :

$$\nu = \frac{2\tau - 1}{6} \frac{\delta_x^2}{\delta_t}$$

En combinant les résultats de l'ordre zéro et du premier ordre avec $\delta_t = \delta_{t_0} + \varepsilon\delta_{t_1}$, et définissant éventuellement le paramètre $\varepsilon = 1$, on aura l'équation de Navier-Stokes incompressible tout en précisant l'équation de continuité à l'ordre de $O(M^2)$ et l'équation de quantité de mouvement à l'ordre (M^3) :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 + O(M^2) \quad A_2.19a$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + O(M^3) \quad A_2.19b$$

Il convient de souligner que pour dériver l'équation ($A_2.19b$), un rapprochement est fait de négliger les termes d'ordre plus élevé que le terme de convection de l'ordre de $O(M^2)$, en particulier, le terme divergent (de compressibilité).

