N° d'ordre :

N° de série :

Ministère de l 'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des Sciences et de la Technologie et Sciences de la Matière

DÉPARTEMENT DES MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Mémoire de MAGISTER

En Mathématiques

Option : Mathématiques Appliquées

Par :

GUEDDA LAMINE

THÈME

Degré topologique et applications
à des problèmes aux limites non linéaires associés à des équations différentielles ordinaires de second ordre

Soutenu publiquement le : , devant le jury composé de :

Mr.	D.A. CHACHA	M.C. à l'université de KASDI MERBAH – Ouargla	Président.
Mr.	S. DJEBALI	Pr. à l'E.N.S - KOUBA – Alger	Rapporteur
Mr.	M.S. SAID	M.C. à l'université de KASDI MERBAH – Ouargla	Examinateur
Mr.	A. GUERFI	M.C. à l'université de KASDI MERBAH – Ouargla	Examinateur

Remerciements

Je tiens en premier lieu à exprimer mes plus vifs remerciements à Monsieur S. DJEBALI, mon Directeur de mémoire pour l'intéressant sujet qu'il m'a proposé, pour son aide, sa patience, ses conseils, ses encouragement, sa grande disponibilité et son ouverture d'esprit qui m'ont aidé à mener à bien ce travail.

Je lui suis également reconnaissant pour la confiance qu'il ma accordée. Il m'est impossible de lui exprimer toute ma gratitude en seulement quelques lignes.

J'adresse mes plus vifs remerciements aux Monsieur A. GUERFI et Monsieur M.S. SAID pour avoir accepté d'examiner ce travail et Monsieur D.A. CHACHA qui me fait l'honneur d'être président de mon jury.

Je voudrais également remercier tous les membres du département de mathématique et surtout son directeur et mon professeur Monsieur Mostafa ASSILA et tous ceux qui m'ont aidé de près et de loin pour achever ce travail.

Je tiens à remercier tous mes amis et mes collègues et surtout ceux avec qui on a passé une période agréable à l'université de Kasdi Merbeh de Ouargla.

Je voudrais également remercier ma mère, toute ma famille, mes sœurs, et mes fils qui m'ont toujours soutenu et encouragé.

Table des matières

Notations et conventions

Nous utiliserons les notations suivantes tout au long de ce mémoire:

- X étant un espace vectoriel normé et Ω un ouvert de X, on notera par:

  ✓ $\|.\|$ sa norme.

  ✓ dist la distance associée à cette norme.

  ✓ $\overline{\Omega}$ la fermeture de Ω et $\partial\Omega$ sa frontière.

  ✓ $B(x_0, r)$ la boule ouverte de centre x_0 et de rayon r.

  ✓ $\mathrm{diam}(A)$ diamètre de l'ensemble A.

- F étant un sous-espace vectoriel de X on notera

  ✓ X/F l'espace quotient de X par F.

  ✓ $\dim(F)$ dimension de F.

  ✓ $co\dim(F)$ codimension de F.

  ✓ $X \setminus A$ complémentaire de A à X (A est un sous-ensemble quelconque de X).

- $L : X \to Z$ étant un opérateur linéaire on notera

  ✓ $D(L)$ domaine de définition de L.

  ✓ $\ker L$ noyau de L.

  ✓ $\mathrm{Im}\, L$ image de L.

✓ ind(L) indice de L (lorsque L est de Fredholm).

- I l'application identique et I_n est la matrice unité d'ordre n.

- $H_{|A}$ restriction de l'application H sur le sous-ensemble A de X (i.e $\left(H_{|A}\right)(x) = H(x)$ pour tout $x \in A$).

- H^{-1} l'application inverse (ou reciproque) de H.

- HS l'application composée de S et H respectivement $(= H \circ S)$.

- $(.)' = \frac{d\,(.)}{dt}$ la dérivée ordinaire par rapport à t.

- $\frac{\partial(.)}{\partial u} = (.)'_u$ la dérivée partielle relativement à u.

- $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels, $\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes, $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs et $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$;

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} +1 \text{ si } x > 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

- $C^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ espace de fonctions p fois continûment différentiables sur $\mathbb{R}$.

- $C^p([a,b])$ espace de fonctions p fois continûment différentiables sur $[a,b]$.

- $L^P([a,b])$ espace de fonctions u mesurables sur $[a,b]$ et vérifiant $\int_a^b |u(t)|^p\, dt < \infty$.

- $AC([a,b])$ espace de fonctions absolument continues sur $[a,b]$ $(= \{u \in C([a,b])\,;\, u' \in L^1([a,b])\})$.

- $C_0^1([a,b])$ espace de fonctions $\{u \in C^1([a,b])\,;\, u(a) = u(b) = 0\}$.

- $L^1(\mathbb{R}/T.\mathbb{Z})$ espace de fonctions $T-$périodiques et L^1-integrables.

- $\deg_B$ degré de Brouwer.

- ind_B indice de Brouwer.

- $\deg_{LS}$ degré de Leray-Schauder.

- D_L degré de coincidence relativement à l'opérateur de Fredholm L d'indice 0.
- $T-$périodique de période T.
- $\det(.)$ déterminant.
- $\oplus$ somme directe.
- $\langle ., . \rangle$ produit scalaire.
- $\times$ produit cartésien.
- $J_{H(x_0)} = \det(H'(x_0))$ le déterminant de la matrice Jacobienne en x_0 de l'application $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Mots clés Degré topologique; méthodes de continuation; solution périodique; indice de Fredholm; problèmes aux limites; équations différentielles ordinaires.

Résumé Le but de ce mémoire est d'étudier certaines propriétés essentielles du degré topologique pour les perturbations compactes des opérateurs de Fredholm d'indice zéro. Cette partie théorique qui occupera la première partie du mémoire débutera par des rappels sur le degré topologique de Leray et Schauder et ses propriétés fondamentales. La seconde partie sera entièrement consacrée aux applications à des problèmes aux limites associés à des équations différentielles ordinaires non linéaires, en particulier à des équations différentielles du second ordre, à des problèmes périodiques et à quelques systèmes hamiltoniens.

Introduction générale

Ces dernières années, le degré topologique s'est révélé un outil très puissant pour la résolution de certains problèmes aux limites non linéaires associés à des équations différentielles ordinaires et fonctionnelles. Un aperçu de la théorie du degré montre le lien étroit entre ce concept topologique fondamental et la théorie des équations différentielles. À partir de l'année 1883, POINCARE a utilisé l'indice de Kronecker [8] dans son étude qualitative des équations différentielles non linéaires, et a découvert à cette occasion quelques nouvelles conséquences importantes de la théorie de Kronecker, en particulier le théorème de Miranda. En effet quelques problèmes de mécanique ont conduit BOHL en 1904 à formuler et prouver, en utilisant les idées de Kronecker, des résultats équivalents aux théorèmes de Brouwer et de Poincaré-Bohl pour des applications, continûment différentiables. La théorie topologique dans un espace de dimension infinie a été entamée dans un document célèbre publié en 1922 par G.D. Birkhoff et O.D. Kellogg qui ont étendu à certains espaces de fonctions, le fameux théorème du point fixe de Brouwer. Ils ont prouvé l'existence d'un point fixe au moins pour les applications continues définies d'un sous-ensemble convexe compact de $C([a,b]$ dans lui-même. Le théorème du point fixe de Birkhoff-Kellogg a été étendu par J. SCHAUDER au cas d'un opérateur continu T appliquant un sous-ensemble convexe compact d'un espace de Banach sur lui-même.

La topologie algébrique d'espaces de Banach et ses applications aux équations non linéaires, a débuté par le travail de J. SCHAUDER durant la période 1927-1932 [33]. SCHAUDER a identifié une classe importante d'opérateurs non linéaires dans un espace de Banach, *les perturbations complètement continues de l'identité*, pour lesquelles il pourrait généraliser deux résultats importants de BROUWER dans un espace de dimension finie: un théorème du point fixe et un théorème d'invariance de domaine. Le théorème du point fixe de Schauder est devenu au cours du temps un outil puissant pour étudier l'existence de solutions d'équations différentielles. SCHAUDER a appliqué son théorème d'invariance de domaine pour considerer des problèmes elliptiques non linéaires dont l'unicité implique l'existence.

En 1933, J.SCHAUDER eu l'occasion de rencontrer J. LERAY à Paris, et une seconde période importante dans la topologie de dimension infinie a commencé à partir de leur collaboration. Leray et Schauder ont immédiatement convenu que la topologie des perturbations complètement continues de l'identité dans un espace de Banach était un cadre idéal pour développer la méthode de continuation de Leray pour les équations intégrale non linéaires (appelée méthode d'Arzela-Schmidt), et en particulier pour la libérer de l'unicité inutile et des hypothèses de régularité. Par conséquent, Leray et Schauder, dans leur article fondamental [25], ont étendu le degré de Brouwer à des perturbations compactes de l'identité dans un espace de Banach, (pour les détails consulter [26]).

J.LERAY et J.SHAUDER ont étendu le degré de Brouwer à des perturbations compactes de l'identité dans un espace de Banach X comme suit; si Ω est un ouvert borné de X, $K:\overline{\Omega}\to X$ opérateur compact et $y_0\notin(I-K)(\partial\Omega)$, d'après (la proposition 8.1) de [6], K est la limite uniforme d'une suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'opérateurs de rangs finis, ce qui revient à dire que pour tout $\alpha>0$, il existe $\epsilon>0$ et un opérateur compact K_ϵ tel que $\operatorname{Im}K_\epsilon\subset X_\epsilon$ (sous-espace de X de dimension finie contenant y_0) et

$$\sup_{x\in\Omega}\|K_\epsilon(x)-K(x)\|<\alpha.$$

Pour α suffisamment petit ($\alpha<\frac{1}{2}dist(y_0,(I-K)(\partial\Omega))$, le degré de Brouwer

$\deg_B((I-K_\epsilon)_{|X_\epsilon},\Omega\cap X_\epsilon,y_0)$ sera associée à une valeur commune définissant le degré de Leray-Shauder $\deg_{LS}(I-K,\Omega,y_0)$. Si on pose $y_0=0$, ce degré compte algebriquement le nombre de points fixes de K dans Ω. Le degré de Leray-Schauder conserve toutes les propriétés de base du degré de Brouwer, comme indiqué dans [26]. La non nullité du degré est la plus importante de ces propriétés, car à partir de laquelle on s'assure que l'équation

$$x-K(x)=y_0, \tag{0.1}$$

admet au moins une solution $x\in\overline{\Omega}$. Cependant, on souhaite quand même qu'il soit plus facile sur le plan pratique de prouver que $\deg_{L.S}(I-K,\ \Omega,y_0)\neq 0$ que de résoudre l'équation (0.1) ou prouver autrement que l'ensemble de ses solutions n'est pas vide. Afin d'illustrer l'intérêt et la diversité des champs d'application du degré de Leray-Schauder, citons comme exemple le théorème célèbre suivant:

Théorème 0.0.1 *(Théorème du point fixe de Schauder 1930) Soit C un sous-ensemble convexe, fermé, borné et non vide d'un espace de Banach X et $K : C \to C$ une application compacte. Alors K admet au moins un point fixe.*

Ce théorème a été démontré par des différentes autre méthodes avant d'introduire le degré de Leray-Schauder. Il intervient, certes, moins souvent que le théorème du point fixe de Banach (des applications contractantes) mais c'est un outil précieux pour la résolution des équations aux dérivées partielles non linéaires via la méthode de GALERKIN. En utilisant le théorème de Schauder, souvent nous sommes confrontés à la difficulté de prouver que $K(C) \subset C$; ce problème a été surmonté grâce au théorème de SHAEFER (1955) connu sous le nom d'alternative non linéaire de Leray-Schauder.

D'autre part, il apparaît déjà dans le document [26] de Leray et Schauder que l'étude de l'indice d'un point fixe isolé d'une application complètement continue est un outil principal pour calculer le degré. Leray et Schauder ont en particulier étudié cet indice pour une application A injective ou différentiable ou linéaire, et dans ce dernier cas, ils ont montré que l'indice du point 0 de l'application inversible $I - A$, avec A compacte, est égale à $(-1)^m$, où m est la somme des multiplicités des valeurs caractéristiques de A comprise strictement entre 0 et 1.

Par la suite, on s'intéressera par l'étude des équations opérationnelles de la forme

$$Lx = Nx, \tag{0.2}$$

où $L : D(L) \subset X \to Z$ est un opérateur *linéaire* et $N : \Omega \subset X \to Z$ est une application non nécessairement linéaire (ici X, Z sont des espaces vectorils normés). L'équation (0.2) représente une grande classe de problèmes, y compris des équations differentielles non linéaires aux dérivées partielles ou ordinaires. Il n'y a aucun problème si le noyau de la partie linéaire de cette équation ne contient que zéro, car dans ce cas L est surjective. L'équation peut être réduite à un problème de point fixe pour l'opérateur $L^{-1}N$; et pour le résoudre, on utilisera un théorème convenable (par exemple celui de Schauder si $L^{-1}N$ est compact ou de Banach si $L^{-1}N$ est contractant et $X = Z$ est un Banach).

Dans le cas où L^{-1} n'existe pas (i.e $\ker L \neq \{0\}$) et X, Z sont des espaces de Banach, les travaux de base sur l'étude de l'équation (0.2) sont dûs à CACCIOPOLI (1946), SHIMIZU (1948), CRONIN (1950), BARTLE (1953), VAINBERG et TRENOGIN (1962), VAINBERG et AIZENGENDER (1968) et NIRENBERG (1960-1961). Tout ces travaux supposent une certaine hypothèse sur l'opérateur N. La méthode pour trouver des solutions de cette équation, initiée par CESARI (1963) et (1964) et développée plutard par LOCKER (1967), BANCROFT et WILLIAMS (1968), porte sur une classe plus générale des applications. En 1972, MAWHIN a répondu à cette question dans son célèbre article "Topological degree and boundary value problems for nonlinear differential equations" [29] où il a supposé que L est un opérateur de Fredholm d'indice 0. En effet, dans ce cas on a

$$\dim \ker L = co \dim \operatorname{Im} L) = n < \infty.$$

Par conséquent, il existe deux projections continues $P : X \to X$, $Q : Z \to Z$ telles que

$$\operatorname{Im} P = \ker L, \quad \ker Q = \operatorname{Im} L$$

et un isomorphisme $J : \ker L \to Y_0$, où Y_0 est le supplémentaire topologique de $\operatorname{Im} L$. Mawhin a montré que l'application $L + JP$ est bijective et que

$$(L + JP)^{-1} = J^{-1}Q + L_P^{-1}(I - Q),$$

avec $L_P = L_{|D(L)\cap \ker P}$; alors l'équation (0.2) prend la forme

$$\begin{aligned} x &= (L + JP)^{-1}(N + JP)x \\ &= \left(J^{-1}Q + L_P^{-1}(I - Q)\right)(N + JP)x \\ &= (P + J^{-1}QN + L_P^{-1}(I - Q)N)x \end{aligned}$$

c'est à dire que l'équation donné, est équivalente à un problème de point fixe pour l'opérateur

$$M = P + J^{-1}QN + L_P^{-1}(I - Q)N,$$

qui est indépendant du choix des projections P et Q. Si M est compact, alors à partir du degré de Leray- Schauder, il a développé une nouvelle théorie de degré topologique connu sous le nom de degré de coincïdence pour les couples (L, N). L'objectif proposé dans ce mémoire consiste à identifier les étapes de construction de cette théorie du degré, et les différents théorèmes de continuation de types Leray-Schauder avec beaucoup d'applications.

Le mémoire se compose de quatre chapitres; il nous a semblé utile de l'entamer par un chapitre consacré aux rappels et notions fondamentales concernant les projections sur des sous espaces de dimension finie, les opérateurs compacts ainsi que les principaux outils dont nous faisons un usage fréquent dans les autres chapitres comme le théorème d'Ascoli-Arzela.

Dans le deuxième chapitre, nous nous intéressons aux opérateurs linéaires de Fredholm et leurs relations avec des problèmes aux limites associés à des équations différentielles ordinaires, en présentant le concept de $L-$compacité d'un opérateur N, qui remplace dans l'étude des applications de type $L+N$ (appelé perturbation $L-$compacte de L) la condition de compacité usuelle exigée par le théorème du point fixe de Schauder.

Le troisième chapitre porte sur la définition axiomatique puis la construction du degré de Mawhin à partir de celui de Leray-Schauder; un grand nombre de théorèmes de continuation et ses conséquences seront présentés à la fin de ce chapitre avec les démonstrations ainsi qu'une application sur le théorème de Mawhin.

Le quatrième chapitre est consacré entièrement à l'étude de divers problèmes aux limites associés à des équations différentielles ordinaires non linéaires et l'existence de solutions périodiques en appliquant les théorèmes de continuations mentionnés dans le chapitre précédent. Dans la section 4.3, nous avons étudié les problèmes aux limites associés aux équations différentielles de la forme

$$x'' + g(x) = r(t)$$

et ses systèmes hamiltoniens correspondants, où g est une fonction à croissance superlinéaire i.e $\lim_{|x|\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \infty$. La caractéristique importante de ces problèmes est que l'ensemble des solutions possibles de la déformation correspondant à l'équation autonome

$$x'' + g(x) = 0$$

n'est pas a priori borné. La section 4.4 porte sur l'étude du problème

$$\begin{cases} u''(t) + g(u(t)) = p(t, u(t), u'(t)) \\ u(0) = u(1) = 0; \end{cases}$$

nous prouvons que sous certaines conditions sur les fonctions g et p, il admet au moins une solution $x \in C_0^1([0,1])$ ayant un nombre donné de zéros. Les sections 4.5 et 4.6 montrent que l'approche de Leray-Schauder peut être appliquée à l'étude des solutions périodiques de certaines équations différentielles de second ordre de la forme

$$x'' + cx' + g(x) = h(t),$$

lorsque la force de rappel g possède une singularité. Les deux cas, attractif et répulsif de la force g sont pris en compte. En utilisant le concept de la bifurcation à l'infini donné par Krasnosel'skii, nous présentons quelques résultats concernants la multiplicité des solutions aux derniers théorèmes d'existence de Lazer-Solimini et Habets-Sanchez. La section 4.7 décrit certains résultats récents de Ortega [39] qui montrent comment des arguments de degré topologique peuvent être utilisés pour obtenir des informations sur la stabilité des solutions périodiques de certains systèmes différentiels en dimension deux et d'équations différentielles ordinaires du second ordre, en particulier sous des conditions de type Ambrosetti-Prodi [37]. Parmi les applications les plus récentes sur des problèmes aux limites en résonance, deux entre eux ont été examinées dans les deux dernières sections.

Chapitre 1

Rappels et Notions fondamentales

1.1 Sommes directes et projections

Comme nous le verrons par la suite, certains opérateurs de Fredholm peuvent être obtenus à partir des projections. C'est pourquoi nous y consacrons ce chapitre voir ([1]).

1.1.1 Supplémentaire topologique

Soit E et F deux sous-espaces fermés d'un $\mathbb{R}-$espace vectoriel normé X. On dit que E est un supplémentaire topologique de F si X est la somme directe de F et E (i.e. $X = F \oplus E$).

1.1.2 Projection

Soit X un espace vectoriel. On dit qu'un opérateur linéaire $P : X \to X$ est une projection, si pour tout $x \in X$ on a

$$P(P(x)) = P^2 x = P(x).$$

Proposition 1.1.1 *Soit X un espace vectoriel. Un opérateur linéaire $P : X \to X$ est une projection si et seulement si $(I - P)$ est une projection. De plus, si l'espace X est normé, alors P est continue si et seulement si $(I - P)$ est continue.*

Démonstration. Soit P une projection. Alors pour tout $x \in X$

$$\begin{aligned}(I-P)^2(x) &= x - 2P(x) + P^2(x)\\ &= x - 2P(x) + P(x)\\ &= x - P(x) = (I-P)(x).\end{aligned}$$

Réciproquement, si $(I-P)$ est une projection, $(I-(I-P)) = P$ l'est aussi. Pour le cadre topologique, comme l'identité est une application continue et la somme de deux applications continues est également continue, alors P est continue si et seulement si $(I-P)$ l'est. $\blacksquare$

Proposition 1.1.2 *Si P est une projection dans X, alors*

$$\ker P = \mathrm{Im}(I-P) \ \textit{et} \ \ \mathrm{Im}(P) = \ker(I-P).$$

Démonstration. Comme dans la preuve précédente, il suffit de démontrer que

$$\ker P = (I-P)(X).$$

L'autre résultat est un corollaire immédiat, en remplaçant P par $(I-P)$ dans la proposition précédente. Si $x \in \ker P$,

$$(I-P)(x) = x - 0 = x;$$

d'où $x \in \mathrm{Im}(I-P)$. Réciproquement, $P((I-P)(x)) = P(x) - P^2(X) = P(X) - P(X) = 0$; donc $x \in \ker P$ et $\ker P = \mathrm{Im}(I-P)$. $\blacksquare$

Corollaire 1.1.1 *Toute projection continue dans un espace de Hausdorff est à image fermée. En particulier, les projections continues des espces de Banach sont à images fermées.*

Théorème 1.1.1 *Si P est une projection continue dans un espace vectoriel topologique de Hausdorff X, alors X est la somme directe de* $\mathrm{Im}(P)$ *et* $\ker P$, *(i.e.* $X = \ker P \oplus \mathrm{Im}(P)$*).*

Démonstration. D'après le corollaire précédent, $\ker P$ et $\mathrm{Im}(P)$ sont fermés dans X; et comme

$$X = P(X) + (I-P)X = \mathrm{Im}(P) + \ker P$$

de plus, $\mathrm{Im}(P) \cap \ker P = \{0\}$, alors on a le resultat. $\blacksquare$

1.2 Projection sur un sous-espace de dimension finie

Lemme 1.2.1 *Si E est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel normé X, alors il existe un projecteur continu P sur X, tel que*

$$\mathrm{Im}\,(P) = E.$$

De manière générale, tout espace vectoriel normé peut être projeté continument sur un sous-espace de dimension finie.

Démonstration. On choisit une base $\{e_1; e_2; ...e_n\}$ de E et on désigne par $(\beta_k)_k$ où $k \in \{1, 2, ...n\}$ les formes linéaires coordonnées sur E associées respectivement à $e_1, e_2, ...e_n$; nous savons par définition que pour tout $i, j \in \{1, 2, ...n\}$

$$\beta_j(e_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ pour } i = j \\ 0, \text{ pour } i \neq j \end{cases};$$

en utilisant le théorème de Hahn-Banach pour prolonger $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ en formes linéaires $f_1, f_2, ..., f_n$ continues sur X; on obtient que l'appliction P définie par;

$$Px = \sum_{1 \leq i,j \leq n} f_j(x) .e_i$$

est une projection continue de X sur E qui répond au problème. ■

Corollaire 1.2.1 *Si E est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace normé X, alors il existe un sous-espace vectoriel fermé F de X tel que;*

$$X = E \oplus F.$$

Démonstration. Il suffit de prendre pour F le noyau de la projection P de X sur E donnée par le lemme précédent. ■

Proposition 1.2.1 *Si X est un espace vectoriel normé et F est un sous-espace fermé, alors l'espace quotient X/F a une structure d'espace vectoriel normé dont sa norme est définie par:*

$$\|\pi_F(x)\|_{X/F} = \inf_{h \in F} \|x + h\|_X = dist(x, F),$$

où $\pi_F : X \to X/F$ est la projection canonique

$$\pi_F(x) := x + F = \{x + h \;/\; h \in F\},$$

Démonstration. (i) $\|\pi_F(x)\|_{X/F} = \text{dist}(x, F) = 0$ si et seulement si $x \in F$, d'où $x + F = 0 + F$.

(ii) $\|\lambda(x+F)\|_{X/F} = \|\lambda x + F\|_{X/F} = dist(\lambda x, F) = dist(\lambda x, \lambda F)$ (car F est stable par opération extèrne), alors

$$dist(\lambda x, \lambda F) = |\lambda|\, dist(x, F) = |\lambda|\, \|(x+F)\|.$$

(iii) Pour tout x, y de X, nous avons

$$\begin{aligned}
\|(x+F)+(y+F)\|_{X/F} &= \|(x+y)+F\|_{X/F} \\
&= \inf_{h \in F} \|(x+y)+h\|_X \leq \|(x+h_1)+(y+h_2)\|_X,
\end{aligned}$$

pour tout $h_1 \in F$ et $h_2 \in F$; par l'inégalité triangulaire on trouve

$$\|(x+h_1)+(y+h_2)\|_X < \|(x+h_1)\|_X + \|(y+h_2)\|_X;$$

et ainsi en prenant la borne inferieur sur h_1, h_2 de F des deux dernières normes, on obtient

$$\begin{aligned}
\|x+h_1\|_X + \|y+h_2\|_X &\leq \inf_{h_1 \in F} \|x+h_1\|_X + \inf_{h_2 \in F} \|y+h_2\|_X \\
&= \|x+F\|_{X/F} + \|y+F\|_{X/F};
\end{aligned}$$

ce qui montre que $\|.\|_{X/F}$ est une norme. ■

Proposition 1.2.2 *Si X est un espace de Banach, alors l'espace quotient X/F est également un espace de Banach.*

1.2.1 Codimention d'un sous-espace vectoriel

Définition 1.2.1 *Si l'espace quotient X/F est de dimension finie, on dit que le sous-espace vectoriel fermé F de X est de codimension finie dans X et on écrit*

$$co\dim(F) = \dim(X/F).$$

Proposition 1.2.3 *$co\dim(F) = n < \infty$ si, et seulement s'il existe un sous-espace vectoriel fermé E de X, tel que*

$$X = F \oplus E \quad et \quad \dim(E) = n.$$

1.3 Applications compactes

Soit X et Y deux espaces vectoriels normés; Ω un ouvert de X.

1.3.1 Application compacte complètement continue

Définition 1.3.1 *([7] et [35]) Une application continue $T : \Omega \subset X \to Y$ est dite compacte si $T(\overline{\Omega})$ est relativement compacte. Elle est dite complètement continue, si l'image de tout sous ensemble borné B de Ω est relativement compacte.*

1.3.2 Opérateur de rang fini

Définition 1.3.2 *On dit que l'opérateur $T : \Omega \subset X \to Y$ est de Rang fini, si* $\mathrm{Im}(T) \subseteq F \subseteq Y$ *avec* $\dim(F) < +\infty$.

Proposition 1.3.1 *Tout application $T : \Omega \subset X \to Y$ bornée et de rang fini est complètement continue.*

Démonstration. En effet pour toute partie bornée $B \subset \Omega$, $\overline{T(B)}$ est un fermé borné d'un espace de dimension finie. ■

1.3.3 Remarques

(i) Toute application compacte est complètement continue (car pour tout borné $B \subset \Omega$ on a $T(B) \subset T(\overline{\Omega})$). La réciproque est vraie si Ω est borné.

(ii) Si $T : X \to Y$ est une application linéaire, avec X et Y des espaces de Banach; pour que T soit compact il suffit que $T(B(0;1))$ est précompact. Si l'un au moins des espaces X ou Y est de dimension finie, alors T est compact si et seulement si T est continue.

Théorème 1.3.1 (Ascoli-Arzela) *Soit E un espace métrique compact, F un espace métrique complet. On désigne par $C(E; F)$ l'espace des fonctions continues de E dans F. Un sous ensemble $M \subset C(E; F)$ est relativement compact, si et seulement s'il vérifie les deux conditions suivantes:*

1. *M est équicontinue (i.e pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $\delta(\varepsilon) > 0$ *tels que*

$$d_F(x(t_1), x(t_2)) < \varepsilon,$$

pour tout $x(.) \in M$ *et tout* $(t_1, t_2) \in E \times E$ *vérifiant* $d_E(t_1, t_2) < \delta(\varepsilon)$*).*

2. *Pour tout* $t \in E$*, l'ensemble*

$$M(t) = \{x(t); x(.) \in M\}$$

est relativement compact dans F*.*

Chapitre 2

Opérateurs de Fredholm

2.1 Introduction

Les théorèmes de continuations utilisés dans l'étude des problèmes aux limites associés aux équations différentielles ordinaires, sont souvent basés sur une formulation équivalente à une équation dans un espace abstrait, et une théorie de degré topologique [29]. Cette formulation conduit généralement à un opérateur abstrait de la forme $L+N$, où L est un opérateur de Fredholm d'indice nul et N est un opérateur généralement non linéaire ayant certaines propriétés de compacité par rapport à l'application L. Ces problèmes associés à un opérateur L, comme nous les verons; peuvent toujours être ramenés à des équations équivalentes du type Leray-Schauder. Pour éviter cette réduction, nous allons développer une fois pour toutes, une théorie du degré pour cette classe d'applications. Pour en savoir plus, consulter par exemple [31].

2.2 Opérateurs de Fredholm et caractérisations

2.2.1 Opérateur de Fredholm

Soit X et Z deux $\mathbb{R}$- espaces vectoriels normés; on dit qu'une application linéaire $L : D(L) \subset X \to Z$, est de Fredholm [35] si elle vérifie les conditions suivantes

1. $\ker(L) = L^{-1}(0)$ est de dimension finie.

2. $\mathrm{Im}(L) = L(D(L))$ est fermé et de codimension finie.

2.2.2 Indice d'un opérateur de Fredholm

L'indice d'un opérateur de Fredholm L est l'entier

$$ind(L) = \dim(\ker(L)) - co\dim(\mathrm{Im}(L)).$$

Exemples

1. Si X et Z sont de dimensions finies, alors toute application linéaire $L : X \to Z$ est de Fredholm avec

$$ind(L) = \dim(X) - \dim(Z).$$

2. Si X et Z sont des espaces de Banach et $L : X \to Z$ est une application linéaire bijective, alors L est un opérateur de Fredholm d'indice 0 car

$$\dim(\ker(L)) = co\dim(\mathrm{Im}(L) = 0.$$

3. Soit $X = \ell^2 = \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} ; \sum_{i=0}^{+\infty} |x_i|^2 < +\infty\right\}$ l'application $T : \ell^2 \to \ell^2$ definie par

$$T((x_n)) = (y_n) = (0; x_0; x_1; x_2; ...)$$

est un opérateur de Fredholm d'indice 0 en effet;

$$\ker(T) = \{(0; 0; 0; ......)\} = \{0\}, \quad \mathrm{Im}(T) = \{(0; x_0; x_1; x_2; .....)\},$$

ce qui nous permet d'écrire, $\ell^2 = \mathrm{Im}(T) \oplus M$ tel que $M = \{(x; 0; 0; 0; .....)\}$ (M est isomorphe à $\mathbb{R}$); d'où

$$\dim\ker(T) = \dim(M) = 1.$$

4. L'identité $I : X \to X$ est un opérateur de Fredholm d'indice 0.

5. Soient $X = C([0;T])$ l'espace des fonctions continues définies de $[0;T]$ dans $\mathbb{R}$; $Z = L^1([0;T])$ l'espace des classes des fonctions Lebesgue intégrables définies de $[0;T]$ dans $\mathbb{R}$; soit l'opérateur $L : X \to Z \times\mathbb{R}$ définie par:

$$\begin{cases} (Lx)(.) = x'(.) \\ x(T) - x(0)) = 0; \end{cases}$$

où $f \in L^1([0;T])$ donnée et

$$x \in D(L) = \left\{x \in C\left([0;T]\right); x' \in L^1([0;T])\right\} = AC\left([0;T]\right)$$

$\ker(L) =$ l'ensemble des fonctions constantes définies sur l'intervalle $[0;T]$, cet ensemble est isomorphe à $\mathbb{R}$.

L'image de L est l'ensemble

$$\mathrm{Im}(L) = \left\{\left(y\,(.)\,, \int_0^T y\,(s)\,ds\right); y \in L^1([0;T])\right\};$$

on peut démontrer que $\mathrm{Im}(L)$ est fermé, $\dim Ker\,(L) = \dim \mathrm{Im}(L) = 1$; alors L est un opérateur de Fredholm d'indice 0.

Remarque 2.2.1 *Pour $f \in L^1([0;T])$ donnée, le problème aux limites*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t) \\ x(T) = x(0); \end{cases}$$

est équivalent à l'équation abstraite $Lx(.) = (f(.), 0)$; avec $x \in C([0;T])$.

Théorème 2.2.1 *Si L est un opérateur de Fredholm, u est une application linéaire compacte; alors $L+u$ est de Fredholm et*

$$ind(L+u) = ind(L).$$

En particulier, toute perturbation compacte de l'identité est un opérateur de Fredholm d'indice 0.

Proposition 2.2.1 *Si L est un opérateur de Fredholm d'indice nul; alors L est surjectif si et seulement si L est injectif.*

Démonstration. Si L est surjective, alors $\mathrm{Im}\,(L) = Z = Z \oplus \{0\}$ et par suite $\dim\{0\} = \dim\ker(L) = 0$, donc $\ker(L) = \{0\}$. ■

Dans tout ce que suit (sauf mention de contraire) $L : D(L) \subset X \to Z$ désigne un opérateur de Fredholm d'indice 0.

2.2.3 Inverse généralisée de L

D'après ce qui précède (voir aussi [6] et [50]), il existe deux projecteurs continues; $P : X \to X$ et $Q : Z \to Z$ tels que

$$\mathrm{Im}(P) = \ker L \text{ et } \ker Q = \mathrm{Im}(L).$$

Posons

$$X_1 = \mathrm{Im}(I - P) = \ker P \ \text{ et } Y_1 = \mathrm{Im}(Q),$$

alors on peut écrire

$$X = \ker L \oplus X_1; Z = \mathrm{Im}(L) \oplus Y_1.$$

Considérons un isomorphisme,

$$J : \ker L \to Y_1$$

dont l'existence est assurée par le fait que $\dim \ker L = \dim Y_1 = n$. Remarquons que

$$D(L) = \ker L \oplus (D(L) \cap X_1)$$

et que la restriction de L à $D(L) \cap X_1$ est un isomorphisme sur $\mathrm{Im}(L)$; notons par L_p cette restriction et par $L_p^{-1} : \mathrm{Im}(L) \to D(L) \cap X_1$ l'inverse de L_p. Alors l'opérateur

$$J^{-1} \oplus L_p^{-1} : Z = Y_1 \oplus R(L) \to X = \ker L \oplus D(L) \cap X_1,$$

est un isomorphisme dont l'inverse est l'opérateur,

$$L + JP : D(L) \cap Im(I - P) \oplus \ker L \to R(L) \oplus Y_1;$$

en effet, pour tout $x \in D(L) \cap \mathrm{Im}(I - P) \oplus \ker L$ on l'écrire sous la forme $x = (I - P)x + Px$, donc

$$(L + JP)((I - P)x + Px) = L(I - P)x + JP(Px) = L(I - P)x + JPx;$$

par suite

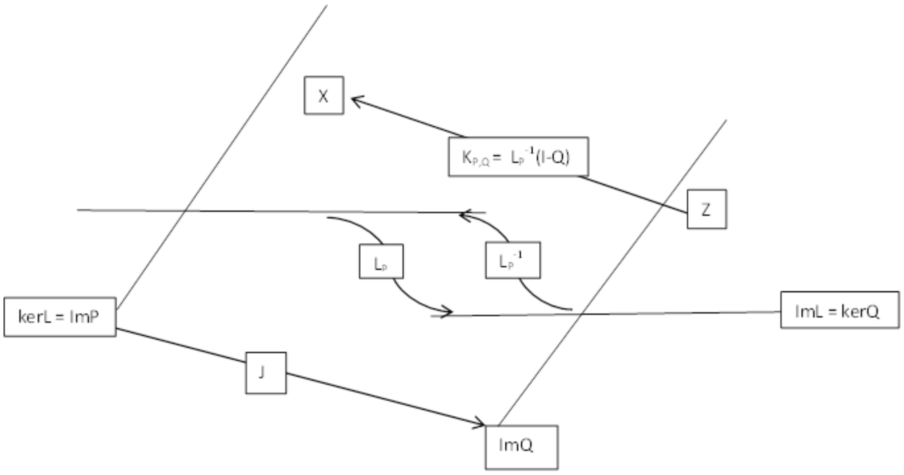
$$\left(J^{-1} \oplus L_p^{-1}\right)(L(I - P)x + JPx) = (I - P)x + Px = x.$$

D'une autre part, pour tout $z \in Z$ on a

$$\left(J^{-1} \oplus L_p^{-1}\right) z = \left(J^{-1} \oplus L_p^{-1}\right)(Qz + (I - Q)z) = J^{-1}Qz + L_p^{-1}(I - Q)z;$$

en posant $K_{P;Q} = L_p^{-1}(I - Q)$, ($K_{P;Q}$ est l'inverse à droite de L associé à P et Q respectivement), alors on obtient (voir le diagramme)

$$(L + JP)^{-1} = J^{-1}Q + K_{P;Q}.$$



Conclusion. JP est une application linéaire continue de rang fini telle que $L + JP$ soit bijective.

2.2.4 Opérateur correcteur de L

Définition 2.2.1 *Toute application $A : X \to Z$ linéaire, continue et de rang fini telle que $L + A : D(L) \to Z$ soit bijective s'appelle* ***correcteur*** *de L. On note par $\mathcal{F}(L)$ l'ensemble des correcteurs de L, d'après ce qui précède $\mathcal{F}(L) \neq \varnothing$.*

2.3 Perturbations $L-$compactes d'un opérateur de Fredholm d'indice nul

Soit $z \in Z$, pour résoudre l'équation $Lx = z$; $x \in X$ on peut écrire $x = Px + (I - P)x$ et $z = Qz + (I - Q)z$ et par substitution de x et z, l'équation précédente devient

$$L(Px + (I - P)x) = Qz + (I - Q)z;$$

et comme $Qz = 0$ et $LPx = 0$ (car $z \in \mathrm{Im}(L)$ et $Px \in \ker L$), alors

$$L(I-P)x=(I-Q)z;$$

ce qui entraine

$$x-Px=L_p^{-1}(I-Q)z$$

et par suite on trouve

$$x=Px+J^{-1}Qz+L_p^{-1}(I-Q)z.$$

Conclusion. $Lx=z; x\in X \Longleftrightarrow x=Px+J^{-1}Qz+L_p^{-1}(I-Q)z.$

Considérons maintenant l'équation $Lx=Nx$, où $N:G\subset X\to Z$ est un opérateur (généralement non linéaire); d'après la conclusion précédente; cette dernière équation avec $x\in D(L)\cap G$ est équivalente à

$$x=Px+J^{-1}QNx+K_{P;Q}Nx=Mx;$$

qui est un problème de point fixe.

De façon générale; pour toute $A\in\mathcal{F}(L)$ l'équation $Lx=Nx$ où $x\in D(L)\cap G$ est équivalente à

$$(L+A)x=(N+A)x;\quad x\in G;$$

et comme $(L+A)$ est bijective, on obtient

$$x=(L+A)^{-1}(N+A)x;\ x\in G.$$

On suppose dans ce qui suit que G est un espace métrique et $N:G\to Z$ une application.

Lemme 2.3.1 *S'il existe $A\in\mathcal{F}(L)$ tel que $(L+A)^{-1}N$ est compact sur G alors pour tout $B\in\mathcal{F}(L)$, $(L+B)^{-1}N$ est compact sur G également.*

Démonstration. Soit $B\in\mathcal{F}(L)$ alors

$$\begin{aligned}(L+B)^{-1}N &= (L+B)^{-1}(L+A)(L+A)^{-1}N\\ &= (L+B)^{-1}(L+B+A-B)(L+A)^{-1}N\\ &= (I+(L+B)^{-1}(A-B))(L+A)^{-1}N\\ &= (L+A)^{-1}N+(L+B)^{-1}(A-B)(L+A)^{-1}N.\end{aligned}$$

L'application $(L+B)^{-1}(A-B)$ est linéaire continue de rang fini; et par suite compact (car $A-B$ est continue et de rang fini et $(L+B)^{-1}$est bijective); et comme $(L+A)^{-1}N$ est compact (par hypothèse) alors

$$(L+B)^{-1}(A- \ B)(L+A)^{-1}N$$

est compact. ■

2.3.1 Opérateur $L-$compact

Définition 2.3.1 *On dit que $N : G \to Z$ est $L-$compact sur G, s'il existe un opérateur $A \in \mathcal{F}(L)$ tel que $(L+A)^{-1}N$ est compact sur G.*

2.3.2 Définition équivalente

On dit que $N : G \to Z$ est $L-$compact sur G si est seulement si l'opérateur

$$M = P + J^{-1}QN + K_{P;Q}N$$

est compact sur G où P; Q; J sont les opérateurs définis au début de ce chapitre (voir [29], [31]).

2.3.3 Remarque

La définition de la $L-$compacité ne dépend ni du choix des projecteurs P et Q, ni de l'isomorphisme J et comme P, $J^{-1}Q$ sont des opérateurs linéaires continus de rang fini; alors pour que N soit $L-$compact sur G, il faut et il suffit que $QN : G \to Z$ soit continue, $QN(G)$ soit borné et $K_{P;Q}N : G \to X$ soit compact.

2.3.4 Cas particuliers

1. Dans le cas où $G \subset X = Z$ et $L = I$; $N : G \to Z$, la compacité et la I-compacité de N sur G sont équivalentes.

2. Si L est inversible, il suffit de prendre $0 = A \in \mathcal{F}(L)$ et par conséquent, la L-compacité de N sur G, est réduite à la compacité de $L^{-1}N$ sur G.

Exemples

1. Si $\dim X = \dim Z = n < \infty$ et $L = 0$ on peut prendre

$$P = I : X \to X, Q = I : Z \to Z \text{ et } K_{P;Q} = K_{I,I} = 0 : Z \to X.$$

2. Si $L = I : X \to X$, alors

$$P = 0 : X \to X; Q = 0 : Z \to Z \text{ et } K_{P;Q} = K_{0,0} = I : Z \to X.$$

3. Dans le cas où $L : D(L) \subset X \to Z$ est un opérateur de Fredholm d'indice nul et bijectif:

$$P = 0 : X \to X, Q = 0 : Z \to Z \text{ et } K_{P;Q} = K_{0,0} = L^{-1}.$$

4. Soit $C_T = \{x \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n); x(t+T) = x(t), t \in \mathbb{R}\}$ muni de la norme

$$\|x\| = \max_{t \in [0;T]} |x(t)| \text{ avec } |x(t)| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i(t))^2}$$

et la fonction $h \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, on définit les opérateurs L et N comme suit;

$$L : D(L) \subset C_T \to C_T \text{ avec } D(L) = C_T \cap C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \text{ et } (Lx)(t) = x'(t);$$

et

$$N : C_T \to C_T \text{ avec } (Nx)(t) = h(x(t)).$$

On obtient $\ker L = \{x \in D(L); x'(t) = 0\} = \{x \in D(L); x(t) = c\} \simeq \mathbb{R}^n$ (ensemble des fonctions constantes); donc $\dim(\ker L) = n$. Pour tout $y \in \mathrm{Im}(L)$, il existe $x \in D(L)$ tel que $x\prime(t) = y(t)$ ce qui implique que;

$$Py = Y = \frac{1}{T}\int_0^T y(s)ds = 0$$

d'où $y \in \ker P$ alors

$$\mathrm{Im}(L) \subset \ker P,$$

(P est une projection continue de rang fini dans C_T); d'une autre part si $y = c \in \ker L$, alors

$$Py = \frac{1}{T}\int_0^T cds = c = y.$$

On obtient

$$C_T = \ker L \oplus \ker P = \mathrm{Im}(P) \oplus \mathrm{Im}(L) \text{ et } P = Q,\ J = I.$$

Alors L est un opérateur de Fredholm d'indice

$$\dim(\ker L) - \dim(\ker P) = 0.$$

N est $L-$compact sur C_T si et seulement si, l'opérateur $P + PN + K_{P,P}N$ est compact sur C_T . Il est clair que ce dernier opérateur est continue; et pour démontrer sa compacité sur C_T , il suffit d'utiliser le théorème d'Ascoli-Arzela. Pour cela, on peut écrire l'inverse à droite de L associé à P et $Q = P$, $K_{P,P} : C_T \to \ker P \cap D(L)$ et défini par

$$K_{P,P} = L_P^{-1}(I - P) \text{ où } L_P = L_{|\ker P \cap D(L)};$$

en utilisant la définition de L, on déduit que

$$\left(L_P^{-1}y\right)(t) = \int_0^t y(s)\,ds.$$

Pour montrer que N est $L-$compact il suffit de démontrer que;

a) $PN : C_T \to C_T$ est continue et envoie les bornés sur des bornés et

b) $K_{P,P}N : C_T \to C_T$ est compact.

Comme P et N sont continus, alors les opérateurs PN et $(I - P)N$ sont aussi continus et envoient les bornés sur des bornés. Il nous reste à prouver que l'opérateur L_P^{-1} est compact. Soit $B \subset \mathrm{Im}\, L$ (borné), pour tout $y \in B$ on a

$$\left|\left(L_P^{-1}y\right)(t)\right| = \left|\int_0^t y(s)\,ds\right| \leq T.\max_{t\in[0;T]}|y(t)|.$$

D'autre part on a pour tout $(t_1, t_2) \in [0, T]^2$;

$$\left|\left(L_P^{-1}y\right)(t_2) - \left(L_P^{-1}y\right)(t_1)\right| = \left|\int_{t_1}^{t_2} y(s)\,ds\right| \leq |t_2 - t_1|.\max_{t\in[0;T]}|y(t)|.$$

2.3.5 Propriétés des opérateurs $L-$compact

1. Tout opérateur $N : G \to Z$ $L-$compact sur G, est $L-$compact sur tout sous ensemble C de G.
2. La somme de deux opérateurs L-compacts sur le même ensemble G est $L-$compact sur G.

2.3.6 Opérateur $L-$complètement continu

Un opérateur $N : X \to Z$ est dit $L-$complètement continu sur X, si et seulement si N est $L-$compact sur tout sous-ensemble borné C de X.

Proposition 2.3.1 *Si $A : X \to Z$ est un opérateur linéaire $L-$complètement continu sur X avec $\ker(L + A) = \{0\}$ alors*

1. *L'opérateur $L + A$ est bijectif.*
2. *Pour tout opérateur $N : G \to Z$ $L-$compact sur G, l'opérateur $(L+A)^{-1}N : G \to X$ est compact sur G.*

Démonstration. pour tout $x \in G$, $B \in \mathcal{F}(L)$ on a

$$\begin{aligned} (L + A)\,x &= (L + B + A - B)\,x \\ &= (L + B)\left(I + (L + B)^{-1}(A - B)\right)x, \end{aligned}$$

et comme $(L + B)$ est bijective; alors

$$\ker\left(I + (L + B)^{-1}(A - B)\right) = \ker(L + A) = \{0\}.$$

D'une autre part, l'opérateur $(L + B)^{-1}(A - B)$ est complètement continu car $A - B$ est $L-$comlètement continu. Alors $I + (L + B)^{-1}(A - B)$ est une perturbation complètement continue de l'identité et injective, d'où $I + (L + B)^{-1}(A - B)$ est bijectif de X dans X, par suite $(L + A)$ est bijectif de $D(L)$ dans Z. Supposons maintenant que $N : G \to Z$ est

$L-$compact sur G, alors

$$\begin{aligned}(L+B)^{-1}N &= (L+B)^{-1}(L+A)(L+A)^{-1}N \\ &= (L+B)^{-1}(L+B+A-B)(L+A)^{-1}N \\ &= \left(I+(L+B)^{-1}(A-B)\right)(L+A)^{-1}N;\end{aligned}$$

et comme $I+(L+B)^{-1}(A-B)$ est une bijection; alors

$$(L+A)^{-1}N = \left(I+(L+B)^{-1}(A-B)\right)^{-1}(L+B)^{-1}N$$

est compact sur G car $(L+B)^{-1}N$ est compact sur G. ■

Chapitre 3

Théorie du degré pour les perturbations L-compactes

3.1 Théorie axiomatique

Soient X, Z deux espace vectoriels normé réels et $L : D(L) \subset X \to Z$ un opérateur de Fredholm d'indice 0; notons par C_L l'ensemble des couples (F, Ω), où Ω est un ouvert borné de X; $F = L + N$ avec $N : \Omega \to Z$ $L-$compact sur Ω et satisfaisant la condition $F(x) \neq 0$, pour tout $x \in D(L) \cap \partial\Omega$.

3.1.1 Degré topologique relativement à L

L'application $D_L : C_L \to \mathbb{Z}$ est appelée degré relativement à L, s'il n'est pas identiquement nulle et satisfait aux axiomes suivants:

- **Axiome d'excision-additivité**

  Si $(F, \Omega) \in C_L$ et Ω_1, Ω_2 sont deux ouverts disjoints dans Ω avec $F(x) \neq 0$ pour tout $x \in D(L) \cap \left(\overline{\Omega} \diagdown \Omega_1 \cup \Omega_2\right)$, alors

$$(F, \Omega_1) \in C_L, \quad (F, \Omega_2) \in C_L \text{ et } D_L(F, \Omega) = D_L(F, \Omega_1) + D_L(F, \Omega_2).$$

- **Axiome d'invariance par homotopie**

Soit l'opérateur $H : (D(L) \times [0,1]) \cap \overline{\Gamma} \to Z$ défini par

$$H(x, \lambda) = Lx + N(x, \lambda),$$

où Γ est un ouvert borné de $X \times [0,1]$ et $N : \overline{\Gamma} \to Z$ est L-compact sur Γ. Si $H(x, \lambda) \neq 0$ pour tout $\lambda \in [0,1]$ et tout $x \in D(L) \cap (\partial\Omega)_\lambda$ où

$$(\partial\Gamma)_\lambda = \{x \in X; \ (x, \lambda) \in \Gamma\},$$

alors $D_L(H(., \lambda), (\Gamma)_\lambda)$ est indépendant du choix de λ dans $[0,1]$.

3.1.2 Propriétés

1. **Propriété d'excision**

   Si $(F, \Omega) \in C_L$ et $\Omega_1 \subset \Omega$ est un ouvert tel que $F(x) \neq 0$, pour tout $x \in D(L) \cap \left(\overline{\Omega} \backslash \Omega_1\right)$ alors

   $$(F, \Omega_1) \in C_L \text{ et } D_L(F, \Omega_1) = D_L(F, \Omega).$$

Démonstration. Il suffit d'utiliser l'axiome d'excision-additivité pour les ouverts Ω, $\varnothing$ pour démontrer que $D_L(F, \varnothing) = 0$, ensuite pour les ouverts $\Omega_1, \varnothing$ car par hypothèse $F(x) \neq 0$, pour tout $x \in D(L) \cap \left(\overline{\Omega} \backslash \Omega_1 \cup \varnothing\right)$; par suite $D_L(F, \Omega) = D_L(F, \Omega_1) + D_L(F, \varnothing)$. ■

2. **Propriété de non nullité du degré (ou propriété d'existence)**

   Si $(F, \Omega) \in C_L$ et $D_L(F, \Omega) \neq 0$, alors l'équation $F(x) = 0$, admet au moins une solution dans $D(L) \cap \Omega$.

Démonstration. Utilisons l'axiome d'excision-additivité pour $\Omega_1 = \Omega_2 = \varnothing$; si $F(x) \neq 0$, pour tout $x \in D(L) \cap \left(\overline{\Omega} \diagdown \varnothing\right)$ alors $D_L(F, \Omega) = D_L(F, \varnothing) + D_L(F, \varnothing) = 0 + 0 = 0$. ■

3. **Invariance sur le bord**

   Si (F, Ω) et (G, Ω) sont deux éléments de C_L avec $F(x) = G(x)$ pour tout $x \in D(L) \cap \partial\Omega$ alors

   $$D_L(F, \Omega) = D_L(G, \Omega).$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer l'axiome d'invariance par homotopie du degré, avec $F = L + M$; $G = L + S$ et $H(x, \lambda) = Lx + \lambda Mx + (1 - \lambda) Sx$. L'opérateur $N(., \lambda) = \lambda M(.) + (1 - \lambda) S(.)$ est $L-$compact sur Ω (car M et S le sont); d'un autre côté pour tout $x \in D(L) \cap \partial\Omega$ on a

$$H(x, \lambda) = F(x) \neq 0;$$

alors $D_L(H(., 0), \Omega) = D_L(H(., 1), \Omega)$. ■

4. **Propriété de normalisation**

   Si $(F, \Omega) \in C_L$ où F est la restriction à $\overline{\Omega}$ d'une application linéaire injective $A : D(A) \to Z$, alors

$$|D_L(F - b, \Omega)| = \begin{cases} 1 \text{ si } \; b \in F(D(L) \cap \Omega) \\ 0 \text{ si } b \notin F(D(L) \cap \Omega). \end{cases}$$

Pour plus de détails le lecteur pourra consulter ([29] et [31]).

3.1.3 Historique

L'application D_0 correspondant au cas $L = 0$ représente le degré construit par Kronecker en 1869 avec $X = Z = \mathbb{R}^n$, avec F de classe C^1, Ω est régulier et $0 \notin F(\partial\Omega)$; ensuite par Brouwer, en 1912 avec X, Z des espaces vectoriels normés de dimensions finies et orientés, F continue sur $\overline{\Omega}$ et $0 \notin F(\partial\Omega)$; dans ce cas D_0 est appelé degré de Brouwer, et est noté par

$$D_0(F, \Omega) = \deg_B(F, \Omega, 0).$$

En 1934, Leray et Schauder ont construit l'application degré D_I à partir du degré de Brouwer; dans ce cas $X = Z$ est un espace de Banach (en genéral de dimension infinie), $F : \overline{\Omega} \to X$ est une perturbation compacte de l'identité (i.e $F = I + K$) et $0 \notin F(\partial\Omega)$. D_I est appelé degré de Leray-Schauder et noté par

$$D_I(F, \Omega) = \deg_{LS}(F, \Omega, 0).$$

3.2 Quelques indications concernant la théorie du degré

3.2.1 Degré de Brouwer

Supposons que $\dim X = \dim Z < \infty$ et choisissons un orientation sur chaque espace (i.e munir chacun par une base ordonnée). Comme on l'a déja vu, l'opérateur $0 : X \to Z$ est de Fredholm d'indice 0 avec $\ker 0 = X$ et $co\ker 0 = Z$; dans ce cas pour un ouvert borné Ω de X, C_0 représente l'ensemble des couples (F, Ω) où $F : \overline{\Omega} \to Z$ est continue et $F(x) \neq 0$ pour tout $x \in \partial\Omega$.

Proposition 3.2.1 *Soient X, Z, W des espaces vectoriels normés tels que $\dim X = \dim Z = \dim W < \infty$, $F : \overline{\Omega} \subset X \to Z$ avec $(F, \Omega) \in C_0$ et $A : Z \to W$ application bijective, alors*

$$D_0(AF, \Omega) = \mathit{sign}\,(\det A).D_0(F, \Omega).$$

3.2.2 Indice de Brouwer

On peut localiser le degré de Brouwer dans un voisinage d'un point isolé de $F^{-1}(0)$ (voir [8] Ch.5). Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $F : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application continue et y un point isolé de $\Omega \cap F^{-1}(0)$. L'indice de Brouwer de l'application F au point y, est défini par

$$ind_B\ (F, y) = \deg_B(F, B(y, r), 0),$$

où $r > 0$ tel que $B(y, r) \cap F^{-1}(0) = \{y\}$.

Exemple. Si $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une application linéaire inversible, alors pour tout $y = F^{-1}(0)$;

$$ind_B(F, y) = \operatorname{sign}(\det F).$$

Théorème 3.2.1 *Étant donné $y \in \mathbb{R}^n$, Ω un voisinage de y et $F \in C\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$ telle que F soit differentiable au point y et $J_{F(y)} \neq 0$, alors*

$$ind_B(F, y) = \mathit{sign}\ \left(J_{F(y)}\right).$$

3.2.3 Degré de Leray-Schauder

Supposons que $X = Z$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel normé arbitraire. L'opérateur $I : X \to X$ est de Fredholm d'indice 0, C_I est l'ensemble des couples (F, Ω) tel que $F : \overline{\Omega} \to X$ est de la forme $F = I - K$ où K est un opérateur compact sur $\overline{\Omega}$ vérifiant

$$(I - K)(x) \neq 0 \text{ pour tout } x \in \partial\Omega.$$

Le degré de Leray-Schauder sur C_I est défini en utilisant le degré de Brouwer par

$$D_I(F, \Omega) = \lim_{n \to +\infty} D_0(F_n, \Omega \cap X_n),$$

où F_n est la restriction de $I - K_n$ sur $\overline{\Omega} \cap X_n$ avec $K_n : \overline{\Omega} \to X_n \subset X$ une application continue, $\dim X_n < \infty$ et

$$\lim_{n \to +\infty} \max_{x \in \overline{\Omega}} \|K_n x - Kx\| = 0.$$

Proposition 3.2.2 *Soit X un $\mathbb{R}-$espace vectoriel, Ω ouvert borné de X, $F = I - H$ un opérateur tel que $H : \overline{\Omega} \to Y_0 \subset X$ soit continue sur Ω et $\dim Y_0 < \infty$. Si $H(x) \neq x$ pour tout $x \in \partial\Omega$, alors*

$$(F, \Omega) \in C_I \quad et \quad D_I(F, \Omega) = D_0\left(F_{|Y_0}, Y_0 \cap \Omega\right).$$

Proposition 3.2.3 *Soit $F = I - H \in C_I$ avec $H : \overline{\Omega} \to Y_0 \subset X$, où Y_0 est un sous-espace fermé de X. Alors*

$$D_I(F, \Omega) = D_0\left(F_{|Y_0}, Y_0 \cap \Omega\right).$$

Proposition 3.2.4 *Soit $A : X \to X$ une application linéaire compacte et $F = I - A$ un opérateur injectif. Pour tout ouvert borné Ω de X tel que $0 \notin \partial\Omega$, on a $(F, \Omega) \in C_I$ et*

$$D_I(F, \Omega) = \begin{cases} 1 \ si \ \ 0 \in \Omega \\ 0 \ si \ \ 0 \notin \Omega. \end{cases}$$

Pour les démonstrations de ces propositions, on peut consulter [31].

3.3 Construction de l'application D_L dans le cas général

Notons par $C(L)$ l'ensemble des applications linéaires $A : X \to Z$ $L-$complètement continues sur X, telles que $\ker(L+A) = \{0\}$.

En vertu de la proposition (2.3.1) on remarque que $\mathcal{F}(L) \subset C(L)$.

Lemme 3.3.1 *Si $A \in C(L)$, $B \in C(L)$ alors l'application $\Delta_{B,A} = (L+B)^{-1}(A-B)$ est complètement continue sur X et*

$$I + (L+B)^{-1}(N-B) = (I+\Delta_{B,A})\left(I + (L+A)^{-1}(N-A)\right).$$

Démonstration. Il est clair que $\Delta_{B,A}$ est complètement continue car ($B \in C(L)$, $(A-B)$ est $L-$ complètement continue sur X). D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
I + (L+B)^{-1}(N-B) &= I + (L+B)^{-1}(L+B+A-B)(L+A)^{-1}(N-A+A-B) \\
&= I + \left(I + (L+B)^{-1}(A-B)\right)(L+A)^{-1}(N-A) + (L+B)^{-1}A - B \\
&= (I+\Delta_{B,A}) + (I+\Delta_{B,A})(L+A)^{-1}(N-A) \\
&= (I+\Delta_{B,A})\left(I+(L+A)^{-1}(N-A)\right);
\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. ■

Lemme 3.3.2 *Pour tout $r > 0$; $|D_I(I+\Delta_{B,A}, B(r))| = 1$.*

Démonstration. $I + \Delta_{B,A} : X \to X$ est un isomorphisme car c'est une perturbation complètement continue de l'identité avec $\ker(I+\Delta_{B,A}) = \ker(L+A) = \{0\}$ ■

Lemme 3.3.3 *Pour $F = L + N$ fixé avec $(F, \Omega) \in C_L$, alors*

$$\left|D_I\left(I+(L+A)^{-1}(N-A), \Omega\right)\right| \textit{ est constante}$$

pour tout les choix de A dans C_L.

Démonstration. Pour $A \in C(L)$, $B \in C(L)$ d'après le lemme (3.3.1) et la formule de produit de Leray (voir [7]) on a

$$\begin{aligned}
D_I\left(I+(L+B)^{-1}(N-B), \Omega\right) &= D_I\left((I+\Delta_{B,A})\left(I+(L+A)^{-1}(N-A)\right), \Omega\right) \\
&= D_I\left((I+\Delta_{B,A}, B(r)).D_I\left(I+(L+A)^{-1}(N-A), \Omega\right)\right)
\end{aligned}$$

et en employant le lemme (3.3.2) on obtient

$$\left|D_I\left(I+(L+B)^{-1}(N-B),\Omega\right)\right| = \left|D_I\left(I+(L+A)^{-1}(N-A),\Omega\right)\right|,$$

car $|D_I(I+\Delta_{B,A},B(r))| = 1$. ∎

Rappelons que

$$(L+JP)^{-1} = J^{-1}Q + K_{P,Q},$$

(où $J, P, Q, K_{P,Q}$ sont définies au début de ce chapitre), pour $A = JP$ on a

$$\begin{aligned} I+(L+A)^{-1}(N-A) &= I+\left(J^{-1}Q+K_{P,Q}\right)(N-JP) \\ &= I-P+J^{-1}QN+K_{P,Q}N. \end{aligned}$$

Posons

$$M(J,P,Q) = P - J^{-1}QN - K_{P,Q}N;$$

l'opérateur $M(J,P,Q)$ est compact sur $\overline{\Omega}$ (car N est $L-$compact sur $\overline{\Omega}$) et comme $(L+JP)(x) \neq 0$ pour tout $x \in D(L)\cap\partial\Omega$, alors $x - M(x) \neq 0$ pour tout $x \in \partial\Omega$ et par conséquent, $I - M(J,P,Q) \in C_I$.

Proposition 3.3.1 *La valeur* $D_I(I-M(J,P,Q),\Omega)$ *ne dépent pas du choix des projecteurs continus* P *et* Q*, tandis que si* J *et* $\tilde{J}$ *sont deux isomorphismes de* $\ker L$ *dans* $\operatorname{Im}(Q)$. *Alors*

$$D_I\left(I-M\left(\tilde{J},P,Q\right),\Omega\right) = sign\left(\det \tilde{J}^{-1}J\right)\ .\ D_I\ \left(I-M(J,P,Q),\Omega\right).$$

On cherche un isomorphisme $J : \ker L \to R(Q)$ tel que l'opérateur $A = JP$ vérifie

$$D_I(I+\Delta_{B,A},B(r)) = +1.$$

Fixons une orientation sur chacun des espaces $\ker L$ et $co\ker L$ et considérons la surjection canonique

$$\pi : Z \to co\ker L;$$

et un isomorphisme

$$\Lambda : co\ker L \to \ker L$$

préservant l'orientation (i.e. $\operatorname{sign}(\det\Lambda) > 0$). Soit $J_1 = \Lambda\pi_{|\operatorname{Im}(Q)}$ (restriction de $\Lambda\pi$ sur $\operatorname{Im}(Q)$) et pour avoir $D_I(I+\Delta_{B,A},B(r)) = +1$, il suffit de prendre $J = J_1^{-1}$.

3.3.1 Degré de Mawhin 1972

Définition 3.3.1 *Pour $(F, \Omega) \in C_L$, le degré de F dans Ω relativement à L est définie par*

$$\begin{aligned} D_L(F, \Omega) &= D_I\left(I - P + J^{-1}QN + K_{P,Q}N, \Omega\right) \\ &= \deg_{LS}\left(I - P + J^{-1}QN + K_{P,Q}N, \Omega, 0\right). \end{aligned}$$

Le degré ainsi défini s'appelle ***degré de coïncidence*** *de L et $-N$ sur $\Omega \cap D(L)$.*

Théorème 3.3.1 *En utilisant les propriétés du degré de Leray-Schauder, on peut montrer que D_L satisfait aux propriétés d'excision-additivité, invariance par homotopie et la non nullité du degré.*

Démonstration. (Voir [35]) Par la définition du degré D_L, on a $D_L(F, \Omega) = \deg_{LS}(I - M, \Omega)$ où $M = P - J^{-1}QN - K_{P,Q}N$ est un opérateur compact (car N est $L-$compact sur $\overline{\Omega}$). Pour démontrer la propriété de la non nullité du degré par exemple, on remarque que $\deg_{LS}(I - M, \Omega) \neq 0$ entraine qu'il existe $x \in D(L) \cap \overline{\Omega}$ tel que $x = Mx$ qui est équivalent à son tour à $Lx + Nx = 0$. ■

Le calcul de $D_L(F, \Omega)$ est réduit à celui du degré de Brouwer dans le cas particulier intéréssant suivant.

Proposition 3.3.2 *Si $(F, \Omega) \in C_L$ avec $F = L + N$ et $N(\Omega) \subset Y_0$ où Y_0 est le supplémentaire topologique de $\operatorname{Im}(L)$, alors $\left(N_{|\ker L}, \Omega \cap \ker L\right) \in C_0$ et*

$$D_L(F, \Omega) = sign\ (\det J) \deg_B\left(N_{|\ker L}, \Omega \cap \ker L, 0\right).$$

Démonstration. En utilisant la définition de D_L avec les mêmes notations (car $QN = N$ et $(I - P)_{|\ker L} = 0$). ■

Proposition 3.3.3 *Soient $F = L + B$, avec $B : X \to Z$ application linéaire $L-$complètement continue, Ω un ouvert borné de X tel que $0 \notin \partial\Omega$. Si $\ker(L + B) = \{0\}$ alors $(F, \Omega) \in C_L$ et*

$$|D_L(F, \Omega)| = \begin{cases} 1 & si \ \ 0 \in \Omega \\ 0 & si \ \ 0 \notin \Omega. \end{cases}$$

Démonstration. D'après la proposition (2.3.1), $F : D(L) \to Z$ est une application liénaire et bijective et comme $0 \notin \partial\Omega$, alors $Fx \neq 0$ pour tout $x \in D(L) \cap \partial\Omega$; il suffit donc d'utiliser la proposition (3.2.4). ■

Proposition 3.3.4 *Si* $(F, \Omega) \in C_L$ *avec* $F : D(L) \cap \overline{\Omega} \to Z$ *injective, alors pour tout* $b \in F(\Omega)$;

$$|D_L(F(.) - b, \Omega)| = 1$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la définition de D_L et la règle du produit de Leray. ■

3.3.2 Théorème généralisé de Borsuk

Théorème 3.3.2 *Si* $(F, \Omega) \in C_L$ *avec* Ω *symétrique par rapport à* 0, $0 \in \Omega$ *et* F *est impair alors* $D_L(F, \Omega)$ *est un entier impair (et par conséquent, non nul).*

Démonstration. Grâce à la définition précédente on a $D_L(L + N, \Omega) = \deg_{LS}(I - M, \Omega, 0)$; et comme $(I - M)(-x) = -x + M(x) = -(I - M)(x)$ pour tout $x \in \Omega$ car F et par suite N sont impairs. Il suffit d'utiliser le théorème de Borsuk ([7], page 24). ■

3.4 Théorèmes d'existence de type Leray-schauder

Les propriétés d'existence et d'invariance par homotopie, conduisent à des théorèmes d'existence trés importants souvent utilisés pour résoudre des problèmes aux limites non linéaires.Tous ces théorèmes sont des conséquences de la théorie du degré de Leray-Schauder.

3.4.1 Principe de continuation de Leray Schauder

Étant donné (voir Ch.IV de [44]) un opérateur

$$F : O \subset X \times [\alpha, \beta] \to X \quad \text{tel que} \quad F(x, \lambda) = x - K(x, \lambda),$$

où X est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel normé, O est un ouvert *borné* de l'espace $X \times [\alpha, \beta]$ muni de la topologie induite par la norme $\|(x, \lambda)\| = \|x\| + |\lambda|$, et $K : \overline{O} \to X$ est un opérateur complètement continue. Pour tout $B \subset X \times [\alpha, \beta]$ et $\lambda \in [\alpha, \beta]$ on note par B_λ l'ensemble

$$\{x \in X; \ (x, \lambda) \in B\}.$$

Théorème (homotopie généralisée) ([44] p. 49-50) Si $F(x, \lambda) \neq 0$, pour tout $(x, \lambda) \in \partial O$ (la frontière de O dans $X \times [\alpha, \beta]$), alors

$$\deg_{LS}(F(., \lambda), O_\lambda, 0) = \text{constante}$$

pour tout $\lambda \in [\alpha, \beta]$.

Démonstration. d'abord, on suppose que $O \neq \varnothing$, $\alpha = \inf\{\lambda \in [\alpha, \beta]; O_\lambda \neq \varnothing\}$ et $\beta = \sup\{\lambda \in [\alpha, \beta]; O_\lambda \neq \varnothing\}$. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, on pose

$$\hat{O} = O \cup O_\alpha \times]\alpha - \varepsilon, \alpha] \cup O_\beta \times [\beta, \beta + \varepsilon[,$$

il est clair que $\hat{O}$ est un ouvert borné de $X \times \mathbb{R}$ (car $\hat{O}$ est la réunion de trois ouverts bornés O , $O_\alpha \times]\alpha - \varepsilon, \alpha[$ et $O_\beta \times]\beta, \beta + \varepsilon[$ et ($O_\alpha \times \{\alpha\} \subset O$, $O_\beta \times \{\beta\} \subset O$). Soit K^* l'extension de l'opérateur K à $X \times \mathbb{R}$, l'existence de K^* est assuré par le théorème suivant dù à Dugundji.

Théorème (voir [44], Ch.I) Soit X et Z deux espaces de Banach, $f : C \to M$ une application continue où C est un fermé de X et M convexe dans Z. Alors il existe une application continue $\hat{f} : X \to M$ telle que $\hat{f}(x)) = f(x)$, pour tout $x \in C$.

Soit

$$F^*(x, \lambda) = (x - K^*(x, \lambda), \lambda - \lambda_0) = (x, \lambda) - (K^*(x, \lambda), \lambda_0),$$

où $\lambda_0 \in [\alpha, \beta]$ (fixé). Alors F^* est une perturbation complètement continue de l'identité dans $X \times \mathbb{R}$ vérifiant pour tout $(x, \lambda) \in \partial\hat{O}$,

$$F^*(x, \lambda) \neq 0,$$

car $K(x, \lambda) \neq x$, pour tout $(x, \lambda) \in \partial O$, alors $\deg_{LS}\left(F^*(x, \lambda), \hat{O}, 0\right)$ est bien défini et est constant pour chaque valeur de λ_0 (propriété d'excision). Pour tout $t \in [0.1]$ on considère

$$F_t^*(x, \lambda) = (x - t.K^*(x, \lambda) - (1 - t).K^*(x, \lambda_0), , \lambda - \lambda_0);$$

remarquons que, $F_t^*(x, \lambda) = 0$ si et seulement si $\lambda = \lambda_0$ et $x = K^*(x, \lambda_0)$; ceci montre que

$$F_t^*(x, \lambda) \neq 0$$

pour tout $(x,\lambda) \in \partial\hat{O}$ et tout $t \in [0.1]$. La propriété d'invariance par homotopie implique que

$$\deg_{LS}\left(F_1^*, \hat{O}, 0\right) = \deg_{LS}\left(F^*, \hat{O}, 0\right) = \deg_{LS}\left(F_0^*, \hat{O}, 0\right).$$

D'une autre part on a d'après la propriété d'excision,

$$\deg_{LS}\left(F_0^*, \hat{O}, 0\right) = \deg_{L.S}\left(F_0^*, O_{\lambda_0} \times]\alpha - \varepsilon, \beta + \varepsilon[\,, 0\right),$$

et en utilisant la formule de produit cartésien, on obtient

$$\deg_{L.S}\left(F_0^*, O_{\lambda_0} \times]\alpha - \varepsilon, \beta + \varepsilon[\,, 0\right) = \deg_{LS}\left(F\left(., _{\lambda_0}\right), O_{\lambda_0}, 0\right) = \text{constante}$$

car $\deg_{L.S}\left(. - \lambda_0,]\alpha - \varepsilon, \beta + \varepsilon[\,, 0\right) = \deg_B\left(I,]\alpha - \varepsilon, \beta + \varepsilon[\,, \lambda_0\right) = 1.$ ■

Comme conséquence immediate, nous énonçons le théorème suivant

Théorème de continuation de Leray Schauder

Théorème 3.4.1 *Soit F l'opérateur défini au début de la section (4.3). Si F satisfait aux conditions suivantes*

(i). $F(x,\lambda) \neq 0$, pour tout $(x,\lambda) \in \partial O$ (estimation a priori)

(ii). $\deg_{L.S}\left(F(.,\alpha), O_\alpha, 0\right) \neq 0$,

alors l'ensemble $\Sigma = \left\{(x,\lambda) \in \overline{O}; F(x,\lambda) = 0\right\}$ contient une partie connexe fermée C, reliant $O_\alpha \times \{\alpha\}$ à $O_\beta \times \{\beta\}$(i.e. $C_\alpha \cap O_\alpha \neq \varnothing$ et $C_\beta \cap O_\beta \neq \varnothing$).

Démonstration. d'après le principe d'homotopie généralisé de Leray-Schauder, on a

$$\deg_{L.S}\left(F(.,\alpha), O_\alpha, 0\right) = \deg_{L.S}\left(F(.,\beta), O_\beta, 0\right),$$

alors $A = \Sigma_\alpha \times \{\alpha\} \neq \varnothing$ et $B = \Sigma_\beta \times \{\beta\} \neq \varnothing$. Comme K est complètement continu, alors Σ est un sous-espace métrique compact de $X \times [\alpha,\beta]$ car N est complètement continue et pour $\lambda \in [\alpha,\beta]$ (fixé) on a;

$$\Sigma_\lambda = N\ (\Sigma_\lambda \times \{\lambda\}) \text{ et } \Sigma_\lambda \times \{\lambda\} \subset O_\lambda \times \{\lambda\} \subset O \text{ (borné)}.$$

Pour achever la démonstration, nous avons besoin du lemme suivant dû à Whyburn

(de Kuratowski et Whyburn) (voir [8], Ch.7) Si E est un espace métrique compact, A et B deux sous ensembles non vides, disjoints et fermés de E, alors on a l'alternative suivante:

1. ou bien il existe une partie connexe de E qui rencontre A et B à la fois;

2. ou bien il existe deux parties compacts K_1 et K_2 telles que

$$K_1 \cap K_2 = \varnothing, K_1 \cup K_2 = E, A \subset K_1 \text{ et } B \subset K_2.$$

Revenons à la preuve du théorème si on prend $E = \Sigma$, on remarque que

$$\Sigma_\alpha \times \ \{\alpha\} = A \ \text{ et } \ \Sigma_\beta \times \ \{\beta\} = B$$

sont deux sous-emsembles disjoints ($\alpha \neq \beta$) et fermés; alors s'il n'y a pas de tel continu (comme affirmé plus haut), il existerait deux parties compacts X_A, X_B; telles que

$$X_A \cap X_B = \varnothing, X_A \cup X_B = \Sigma \text{ et } A \subset X_A, B \subset X_B.$$

On peut donc trouver un ouvert $U \subset X \times [\alpha, \beta]$ tel que $A \subset V = O \cap U$ et $\Sigma \cap \partial V = \varnothing = V_\beta$ par conséquent;

$$\deg_{LS}(F(.,\lambda), V_\lambda, 0) = \text{ constante pour tout } \lambda \geq \alpha.$$

La propriété d'excision entraine que

$$\deg_{LS}(F(.,\alpha), V_\alpha, 0) = \deg_{LS}(F(.,\beta), O_\beta, 0) = \deg_{L.S}(F(.,\alpha), O_\alpha, 0) \neq 0;$$

et comme $V_\beta = \varnothing$, alors ces égalités conduisent à une contradiction. ■

On va formuler le théorème de continuation, lorsque l'ouvert O est *non borné* et en particulier dans le cas $O = X \times [\alpha, \beta]$.

Théorème 3.4.2 *Soit l'opérateur $F : O \subset X \times [\alpha, \beta] \to X$ défini par:*

$$F(x, \lambda) = x - N(x, \lambda),$$

où O est un ouvert non borné de l'espace $X \times [\alpha, \beta]$ et $N : \overline{O} \to X$ est un opérateur complètement continue sur $\overline{O}$. Supposons que $\Sigma_\alpha$est borné, $\Sigma_\alpha \cap (\partial O)_\alpha = \varnothing$ et $\deg_{L.S}(F(.,\alpha), O_\alpha, 0) \neq 0$. Alors $\Sigma = \left\{(x,\lambda) \in \overline{O};\ F(x,\lambda) = 0\right\}$ contient une partie connexe fermée C vérifiant les conditions suivantes:

1. $C \cap \ \Sigma_\alpha \times \ \{\alpha\} \neq \varnothing$.

2. Ou bien C rencontre $(\partial O) \cup \Sigma_\beta \times \{\beta\}$, ou bien C est non borné.

Démonstration. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\Sigma_\alpha \subset B(0, n_0)$. Pour tout $n \geq n_0$,

$$O_n = O \cap (B(0,n) \times [\alpha, \beta])$$

est un ouvert borné vérifiant les conditions du théorème précédent, alors il existe $x_n \in \Sigma_\alpha$ et une composante connexe C_n de Σ contenant (x_n, α) et rencontrant $\partial O_n \cup [\Sigma_\beta \cap B(0,n)] \times \{\beta\}$; or Σ_α est compact, alors la suite (x_n) possède un point d'accumulation $x_0 \in \Sigma_\alpha$; soit C_0 la composante connexe de Σ contenant (x_0, α). Supposons que C_0 ne rencontre ni ∂O ni $\Sigma_\beta \times \{\beta\}$ et montrons que C_0 est non borné; dans le cas contraire, soit D un sous-ensemble ouvert et borné de O tel que $C_0 \subset D$ et $\Sigma_\alpha \times \{\alpha\} \subset D$; le théorème précédent appliqué à l'ouvert D à la place de O, entraine que $\Sigma \cap \partial D \neq \varnothing$. Alors $\{(x_0, \alpha)\}$ et $\Sigma \cap \partial D$ satisfait aux conditions du lemme de Whyburn; par hypothèse ces parties ne peuvent pas être reliées par des composantes connexes de Σ; alors il existe un voisinage ouvert V_0 de (x_0, α) dans D, tel que $\partial V_0 \cap \Sigma = \varnothing$, or x_0 est un point d'accumulation de la suite (x_n), donc il existe $n_1 > n_0$, tel que $(x_{n_1}, \alpha) \in V_0$, et $B(0, n_1) \times [\alpha, \beta] \supset D$. Par conséquent, C_{n_1} rencontre simultanément V_0 et $X \times [\alpha, \beta] \diagdown V_0$, et par suite $\partial V_0 \cap C_{n_1} \neq \varnothing$, d'où une contradiction. ■

Pour la suite étant donnés $L : D(L) \subset X \to Z$ un opérateur de Fredholm d'indice 0; $N : \overline{\Gamma} \to Z$, opérateur L-compact sur $\overline{\Gamma}$, où Γ est un ouvert borné de $X \times [\alpha, \beta]$ (α, β sont deux reels donnés) notons par:

$$S = \left\{(x, \lambda) \in \overline{\Gamma} \cap D(L) \times [\alpha, \beta] ; Lx + N(x, \lambda) = 0\right\},$$

l'ensemble des solutions de la famille des équations parametrées $Lx + N(x, \lambda) = 0$. On suppose que $\Gamma_\alpha \neq \varnothing$.

Les résutats suivants, sont des conséquences immédiates du théorème de continuation de Leray-Schauder, car le calcul du degré D_L est ramené à celui du degré de Leray-Schauder.

Corollaire 3.4.1 *Si les conditions suivantes sont satisfaites*

(i) $(L(.) + N(., \alpha), \Gamma_\alpha) \in C_L$,

(ii) $D_L(L(.) + N(., \alpha), \Gamma_\alpha) \neq 0$.

Alors il existe un sous ensemble $\check{S}$ de S fermé et connexe reliant $\Gamma_\alpha \times \{\alpha\}$ soit à $\Gamma_\beta \times \{\beta\}$ soit à $\{(x,\lambda) \in \partial\Gamma; \lambda \in [\alpha,\beta]\}$.

Corollaire 3.4.2 *Si en plus, des conditions du corollaire (3.4.1) on a; $Lx + N(x,\lambda) \neq 0$ pour tout $x \in (\partial\Gamma)_\lambda$ et tout $\lambda \in [\alpha,\beta]$, alors il existe un sous ensemble $\check{S}$ de S fermé et connexe qui rejoint $\Gamma_\alpha \times \{\alpha\}$ à $\Gamma_\beta \times \{\beta\}$.*

Corollaire 3.4.3 *Soit Γ un ouvert (non nécessairement borné). Si l'ouvert Γ_α est borné et les conditions du corollaire (3.4.1) sont remplies, alors il existe un sous ensemble $\check{S}$ de S fermé, connexe tel que*

$\check{S}$ rencontre $\Gamma_\alpha \times \{\alpha\}$ et verifie l'alternative suivante:

1. *Ou bien $\check{S}$ est non borné,*
2. *ou bien $\check{S}$ rejoint $\Gamma_\alpha \times \{\alpha\}$ à $\Gamma_\beta \times \{\beta\} \cup \{(x,\lambda) \in \partial\Gamma; \lambda \in [\alpha,\beta]\}$.*

Dans ce qui suit, Ω désigne un *ouvert borné* de X. Le resultat suivant est un théorème général d'existence de type Leray-Schauder.

Théorème 3.4.3 *Soient $F = L + N$ avec $N : \overline{\Omega} \to Z$ $L-$compact sur $\overline{\Omega}$ et $G : D(L) \cap \overline{\Omega} \times [0,1] \to Z$ un opérateur de la forme $G(.,\lambda) = L(.) + H(.,\lambda)$ où $H : \overline{\Omega} \times [0,1] \to Z$ est $L-$compact et vérifiant $H(.,1) = N$. Si les conditions suivantes sont satisfaites*

1. *$G(x,\lambda) \neq 0$ pour tout $(x,\lambda) \in D(L) \cap \partial\Omega \times [0,1[$.*
2. *$D_L(G(.,0),\Omega) \neq 0$.*

Alors l'équation $Lx + Nx = 0$ admet au moins une solution $u \in D(L) \cap \overline{\Omega}$.

Démonstration. Si l'équation $Lx+Nx = 0$ a une solution dans $D(L)\cap\partial\Omega$, le théorème est démontré. Sinon nous aurons $G(x,\lambda) \neq 0$ pour tout $x \in D(L) \cap \partial\Omega \times [0,1]$ et grâce au propriété d'invariance par homotopie, on obtient

$$D_L(G(.,1),\Omega) = D_L(G(.,0),\Omega) \neq 0;$$

alors il suffit d'utiliser la propriété d'existence pour finir la preuve. ■

Théorème 3.4.4 *Soient* $\Omega \subset X$ *un ouvert borné, symétrique par rapport à* 0 *tel que* $0 \in \Omega$, $F = L + N$ *avec* $N : \overline{\Omega} \to Z$ *opérateur* $L-$*compact sur* $\overline{\Omega}$. *Si* $F(x) \neq \alpha F(-x)$ *pour tout* $x \in D(L) \cap \partial\Omega$ *et* $\alpha \in]0,1]$; *alors l'équation* $Lx + Nx = 0$ *admet au moins une solution,* $u \in D(L) \cap \overline{\Omega}$.

Démonstration. Soit l'opérateur $G : D(L) \cap \overline{\Omega} \times [0,1] \to Z$ défini par:

$$G(x,\lambda) = \frac{1+\lambda}{2} F(x) - \frac{1-\lambda}{2} F(-x);$$

aprés simplification on obtient $G(x,\lambda) = Lx + \frac{1+\lambda}{2} Nx - \frac{1-\lambda}{2} N(-x)$. Posons

$$H(x,\lambda) = \frac{1+\lambda}{2} Nx - \frac{1-\lambda}{2} N(-x);$$

et on vérifie facilement que $H : \overline{\Omega} \times [0,1] \to Z$ est $L-$compact, d'une autre part $G(.,1) = F$ et $G(-x,0) = -G(x,0)$ pour tout $x \in D(L) \cap \overline{\Omega}$. S'il existe $(x,\lambda) \in D(L) \cap \partial\Omega \times [0,1[$ tel que $G(x,\lambda) = 0$ et par suite $F(x) = \frac{1-\lambda}{1+\lambda} F(-x)$ ce qui représente une contradiction (car $0 < \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \leq 1$ si $\lambda \in [0,1[$). D'après la première étape de la démonstration et le théorème de Borzuk généralisé, nous avons $(G(.,0), \Omega) \in C_L$ et $G(-x,0) = -G(x,0)$ alors $D_L(G(x,0), \Omega)$ est un entier impair (car $0 \in \Omega$) et donc $D_L(G(x,0), \Omega) \neq 0$, ce qui nous place dans les conditions du théorème précédent. ■

Théorème 3.4.5 *Soient* $(G,\Omega) \in C_L$ *et* $F = L + N$ *avec* $N : \overline{\Omega} \to Z$ *est* $L-$*compact sur* $\overline{\Omega}$. *Si*

1. $\lambda.Fx + (1-\lambda) Gx \neq 0$, *pour tout* $x \in D(L) \cap \partial\Omega$ *et* $\lambda \in]0,1[$.
2. $D_L(G,\Omega) \neq 0$.

Alors l'équation $Fx = Lx + Nx = 0$ *admet au moins une solulion dans* $D(L) \cap \overline{\Omega}$.

Démonstration. On suppose que $G = L + T$; pour tout $x \in D(L) \cap \overline{\Omega}$ et $\lambda \in]0,1[$ on a

$$\lambda.Fx + (1-\lambda) Gx = Lx + (1-\lambda) Tx + \lambda Nx = Lx + N(x,\lambda);$$

$N(x,\lambda) = (1-\lambda) Tx + \lambda Nx$ est $L-$compact sur $\overline{\Omega}$ (combinaison linéaire des opérateurs $L-$compacts sur $\overline{\Omega}$). Appliquons le corollaire (3.4.1) avec $\Gamma = \Omega \times [0,1]$; on remarque que Γ et par suite S est borné; alors soit l'équation $Lx + Nx = 0$ admet une solution dans $D(L) \cap \partial\Omega$ ou bien on est dans les conditons du corollaire (3.4.2). ■

Corollaire 3.4.4 *Soient $F = L + N$ avec $N : \overline{\Omega} \to Z$ est $L-$compact sur $\overline{\Omega}$, $B : X \to Z$ une application linéaire $L-$complètement continue, telle que*

$$\ker(L+B) = \{0\} \text{ et } b \in (L+B)(D(L) \cap \Omega).$$

Si $Lx + (1-\lambda)(Bx - b) + \lambda Nx \neq 0$ pour tout $x \in D(L) \cap \partial\Omega$ et tout $\lambda \in]0,1[$; alors l'équation $Lx + Nx = 0$, admet au moins une solution dans $D(L) \cap \overline{\Omega}$.

Démonstration. Il suffit de prendre $G(.) = L + B(.) - b$ dans le théorème (3.4.3) en remarquant que $D_L(L + B - b, \Omega) = \pm 1$. ■

3.4.2 Cas particulier

Supposons que $\ker L = \{0\}$ avec $0 \in \Omega$. Si $Lx + \lambda Nx \neq 0$ pour tout $x \in D(L) \cap \partial\Omega \times]0,1[$; alors l'équation $Lx + Nx = 0$ admet au moins une solution $u \in D(L) \cap \overline{\Omega}$.

Démonstration. Il suffit de prendre $B = 0 : X \to Z$ et $b = 0$ dans le corollaire précédent. ■

Le théorème suivant est un cas spécial du théorème (3.4.3) où $\ker L \neq \{0\}$.

Théorème 3.4.6 *Soit $F = L + N$ et $T : \overline{\Omega} \to Y_0$ deux opérateurs tels que $N : \overline{\Omega} \to Z$ et T sont $L-$compact sur $\overline{\Omega}$ et $Z = \operatorname{Im} L \oplus Y_0$. Si les conditions suivantes sont satisfaites:*

1. *$Lx + (1-\lambda)Tx + \lambda Nx \neq 0$ pour tout $x \in D(L) \cap \partial\Omega$ et tout $\lambda \in]0,1[$.*
2. *$Tx \neq 0$ pour tout $x \in \ker L \cap \partial\Omega$.*
3. *$\deg_B \left(T_{|\ker L}, \Omega \cap \ker L, 0\right) \neq 0$.*

Alors l'équation $Lx + Nx = 0$ admet au moins une solution dans $D(L) \cap \overline{\Omega}$.

Démonstration. D'après la définition de la projection $Q : Z \to Z$, on a $QT = T$ (car $T\left(\overline{\Omega}\right) \subset Y_0$) alors $Lx + Tx = 0$, $x \in D(L) \cap \overline{\Omega}$ est équivalente à $Tx = 0, x \in \ker L$; comme $Tx \neq 0$ pour tout $x \in \ker L \cap \partial\Omega$ on en déduit que $(L + T, \Omega) \in C_L$ et

$$D_L(L + T, \Omega) = \pm \deg_B \left(T_{|\ker L}, \Omega \cap \ker L, 0\right) \neq 0,$$

ce qui montre que toutes les conditions du théorème (3.4.3) sont satisfaites. ■

Donnons maintenant une conséquence du théorème (3.4.6).

3.4.3 Théorème de continuation de Mawhin

Théorème 3.4.7 *Soit* $F = L + N$ *avec* $N : \overline{\Omega} \to Z$ *est* $L-$*compact sur* $\overline{\Omega}$. *Supposons que*

1. $Lx + \lambda Nx \neq 0$ *pour tout* $x \in [D(L) \diagdown \ker L] \cap \partial\Omega$ *et tout* $\lambda \in]0, 1[$.
2. $Nx \notin \mathrm{Im}\,(L)$ *pour tout* $x \in \ker L \cap \partial\Omega$.
3. $\deg_B \left(QN_{|\ker L}, \Omega \cap \ker L, 0\right) \neq 0$.

Alors l'équation $Lx + Nx = 0$ *admet au moins une solulion dans* $D(L) \cap \overline{\Omega}$.

Démonstration. Appliquons le théorème (3.4.6); pour cela on prend $T = QN$; il est clair que T est $L-$compact sur $\overline{\Omega}$. D'autre part $QNx \neq 0$ pour tout $x \in \ker L \cap \partial\Omega$, car $Nx \notin \mathrm{Im}\,(L) = \ker Q$. Supposons que $Lx + (1-\lambda)\,QNx + \lambda Nx = 0$, pour tout $x \in D(L) \cap \partial\Omega$ et $\lambda \in]0, 1[$; alors $QNx = 0$ et $Lx + \lambda Nx = 0$. $QNx = 0$ entraine que $Nx \in \mathrm{Im}\,(L)$ alors $x \in [D\,(L) \diagdown \ker L] \cap \partial\Omega$ et $Lx + \lambda Nx = 0$ contredit l'hypothèse 1) d'où $Lx + (1-\lambda)\,QNx + \lambda Nx \neq 0$, pour tout $(x, \lambda) \in [D(L) \cap \partial\Omega] \times]0, 1[$. ■

3.4.4 Théorème de coïncidence pour les ensembles convexes

Soit X et Z deux espaces de Banach réels, $L : D(L) \subset X \to Z$ un opérateur de Fredholm d'indice 0 et $N : X \to Z$ un opérateur non nécessairement linéaire, $L-$complètement continu sur X. Soit C un sous-ensemble *convexe,* fermé non vide de X, $\gamma : X \to C$ une rétraction continue (i.e. $\gamma_{|C} = I$) et Ω un ouvert borné de X. On suppose que γ envoie les sous-ensembles bornés de $\overline{\Omega}$ sur des bornés de C; alors l'opérateur $M_\gamma = M \circ \gamma$ où $M = P + J^{-1}QN + K_{P,Q}N$ est complètement continu sur $\overline{\Omega}$.

Proposition 3.4.1 *On suppose que*

1. $Lx \neq Nx$; *pour tout* $x \in (C \cap \partial\Omega) \cap D(L)$,
2. $M_\gamma(\overline{\Omega}) \subset C$.

Alors $\deg_{LS}(I - M_\gamma,\, \Omega,\, 0)$ *est bien défini.*

Démonstration. Soit $x \in \partial\Omega$ vérifiant $M_\gamma(x) = x$, d'après l'hypothèse (2) on conclut que $x \in C \cap D(L)$. Alors

$$M_\gamma(x) = M(\gamma(x)) = M\,(x) = x;$$

ceci est équivalent à $Lx = Nx$; ce qui contredit (1). ■

Proposition 3.4.2 *On suppose que*

1. $\deg_{LS}(I - M_\gamma,\, \Omega,\, 0) \neq 0,$

2. $M_\gamma(\overline{\Omega}) \subset C.$

Alors l'équation $Lx = Nx$ *admet une solution dans* $C \cap \Omega$.

Démonstration. D'après (1) puis (2) il existe $x \in \Omega$ tel que$M_\gamma(x) = x \in C$. Alors $x \in C \cap \Omega$ et vérifiant $M\,(x) = x$. ■

Théorème 3.4.8 *(voir [18]) On suppose que les conditions suivantes sont satisfaites*

A) $(P + J^{-1}QN)\gamma(\overline{\Omega}) \subset C$ *et* $M_\gamma(\overline{\Omega}) \subset C,$

B) $Lx \neq \lambda Nx$, *Pour tout* $x \in (C \cap \partial\Omega) \cap D(L)$ *et* $\lambda \in \,]0, 1],$

C) $\deg_B(I - (P + J^{-1}QN)\gamma_{|\ker L},\, \ker L \cap \Omega,\, 0) \neq 0.$

Alors l'équation $Lx = Nx$ *admet une solution dans* $C \cap \Omega$.

Démonstration. Considérons la famille d'opérateurs

$$M_\gamma(x, \lambda) = (P + J^{-1}QN)\gamma(x) + \lambda K_{P,Q}N\gamma(x)$$

pour λ variant dans $[0, 1]$. Par des arguments standart, on déduit que $Lx = \lambda Nx$ est équivalent à

$$x = M(x, \lambda) = Px + J^{-1}QNx + \lambda K_{P,Q}Nx.$$

On montre d'abord que $M_\gamma(x, \lambda) \neq x$ pour tout $(x, \lambda) \in \partial\Omega \times \,]0, 1]$. Si $x \in \partial\Omega$, alors par l'hypothèse A) on a

$$(P + J^{-1}QN)\gamma(x) \in C \ \text{ et } M_\gamma(x) \in C;$$

comme C est convexe, donc

$$(1-\lambda)(P+J^{-1}QN)\gamma(x)+\lambda M_{\gamma}(x)=M_{\gamma}(x,\lambda)\in C.$$

Par conséquent, si $x=M_{\gamma}(x,\lambda)$ alors $x\in\partial\Omega\cap C$, l'hypothèse B) implique que $Lx\neq\lambda Nx$ et par suite $x\neq M(x,\lambda)=M_{\gamma}(x,\lambda)$ d'où une contradiction. Pour $\lambda=0$ le resultat découle de l'hypothèse C); la propriété d'invariance par homotopie entraine que

$$\deg_{LS}(I-M_{\gamma}(x,1),\ \Omega,0)=\deg_{LS}(I-M_{\gamma}(x,0),\ \Omega,0);$$

comme l'image de $(P+J^{-1}QN)\gamma$ est inclu dans $\ker L$,

$$\deg_{LS}(I-M_{\gamma}(x,0),\ \Omega,\ 0)=\deg_{B}(I-(P+J^{-1}QN)\gamma_{|\ker L},\ \Omega\cap\ker L,\ 0)\neq 0.$$

Il suffit d'utiliser la proposition précédente pour aboutir au resultat. ∎

3.5 Exemple d'application

Soit $f:[0,1]\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ et $e:[0,1]\to\mathbb{R}$ deux fonctions continues. Considérons le problème aux limites ([2], page 499) suivants

$$\begin{cases} x''(t)=f(t,\ x(t),\ x'(t))+e(t) \\ x(0)=0,\ x(1)=\frac{1}{\eta}.x(\eta) \end{cases}; \tag{I.3.5}$$

où $\eta\in\,]0,1[$ et la nonlinéarité f vérifie les hypothèses

(H_1) Il existe trois fonctions p, q et r de $L^1([0,1])$ telles que

$$|f(t,u,v)|\leq p(t).|u|+q(t).|v|+r(t);$$

pour tout $(t,u,v)\in[0,1]\times\mathbb{R}^2$.

(H_2) Il existe $R_0>0$, tel que si $v\in\mathbb{R}$ et $|v|>R_0$, on a

$$|f(t,u,v)|\geq -l\ |u|+m|v|-M$$

pour tout $t\in[0,1]$ et $u\in\mathbb{R}$; où $m>l\geq 0,\ M\geq 0$.

(H_3) Il existe $R_1 > 0$, tel que si $v \in \mathbb{R}$ et $|v| > R_1$ on a pour tout $t \in [0,1]$,

$$\text{ou bien } vf(t, vt, v) \leq 0 \quad \text{ou bien } vf(t, vt, v) \geq 0.$$

On remaque que le problème homogène associé à (I.3.5) admet des solutions non triviales, pour cela on dit que c'est un problème en *résonance.*

Théorème 3.5.1 *Sous les hypothèses* (H_1), (H_2) *et* (H_3) *le problème (I.3.5) admet au moins une solution* $x \in C^1([0,1])$ *pourvu que*

$$2(\|p\|_1 + \|q\|_1) + \frac{l}{m} < 1.$$

On donne la preuve par étapes, dont chacune représentant un lemme à démontrer. On définit d'abord l'opérateur $L : D(L) \subset X \to L^1([0,1])$; par

$$D(L) = \left\{ x \in W^{2,1}([0,1]) ;\ x(0) = 0,\ x(1) = \frac{1}{\eta} x(\eta) \right\}$$

et pour tout $x \in D(L)$, $Lx = x''$. Soit $X_1 = \{x \in X; x'(0) = 0\}$.

Lemme 3.5.1 *L'opérateur* L *défini si-dessus est de Fredholm d'indice 0 et l'opérateur linéaire* $K : \mathrm{Im}(L) \to D(L) \cap X_1$ *défini par*

$$(Ky)(t) = \int_0^t \int_0^\tau y(s)\, ds d\tau \quad \textit{avec } y \in \mathrm{Im}(L),$$

est l'invese de l'opérateur $L_P = \left(L_{|D(L)\cap X_1}\right)$ *et vérifie, pour tout* $y \in \mathrm{Im}(L)$ *l'inégalité suivante:*

$$\|Ky\| \leq \|y\|_{L^1}.$$

Démonstration. $Lx = x'' = 0$; $x \in D(L)$ implique que $x = at + b$; $x(0) = 0$, $x(1) = \frac{1}{\eta} x(\eta)$, ce qui donne $b = 0$ et a quelquonque; alors $\ker L = \{x \in D(L);\ x(t) = at\}$. D'autre part pour tout $y \in \mathrm{Im}(L)$; il existe $x \in D(L)$ tel que $y(t) = x''(t)$, on pose $Y(t) = \int_0^t y(s)\, ds$ alors

$$\int_0^1 Y(t)\, dt = \int_0^1 [x'(t) - x'(0)]\, dt = x(1) - x(0) - x'(0)$$

et

$$\int_0^1 Y(\eta t)\, dt = \int_0^1 [x'(\eta t) - x'(0)]\, dt = \frac{1}{\eta} x(\eta) - x(0) - x'(0);$$

donc
$$\int_0^1 Y(t)\,dt = \int_0^1 Y(\eta t)\,dt,$$
car $x(1) = \frac{1}{\eta}x(\eta)$. Réciproquement, soit $y \in L^1([0,1])$ vérifiant $\int_0^1 Y(t)\,dt = \int_0^1 Y(\eta t)\,dt$, alors $x(t) = \int_0^t Y(s)\,ds$ appartient à $D(L)$ et vérifie $x''(t) = y(t)$; on a bien montré que
$$\operatorname{Im}(L) = \left\{ y \in L^1([0,1]) ;\ \int_0^1 Y(t)\,dt = \int_0^1 Y(\eta t)\,dt \right\}.$$
Pour $y \in L^1([0,1])$, soit
$$Qy = \frac{2}{1-\eta}\int_0^1 \int_{\eta t}^t y(s)\,dsdt,$$
on pose $y_1(t) = y(t) - Qy$; alors $Y_1(t) = Y(t) - t.Qy$, en écrivant Qy sous la forme
$$Qy = \frac{2}{1-\eta}\int_0^1 \left[\int_0^t y(s)\,ds - \int_0^{\eta t} y(s)\,ds\right] dt = \frac{2}{1-\eta}\left[\int_0^1 Y(t)\,dt - \int_0^1 Y(\eta t)\,dt\right];$$
d'où on conclut que
$$\int_0^1 (Y(t) - tQy)\,dt = \int_0^1 (Y(\eta t) - \eta t Qy)\,dt,$$
et finalement on obtient
$$\int_0^1 Y_1(t)\,dt = \int_0^1 Y_1(\eta t)\,dt.$$
ce qui montre que $y_1 \in \operatorname{Im}(L)$; donc $y \in \operatorname{Im}(L) + \mathbb{R} = \operatorname{Im}(L) \oplus \mathbb{R}$ car $\operatorname{Im}(L) \cap \mathbb{R} = \{0\}$; par suite L est un opérateur de Fredholm d'indice 0. Pour la suite on définit la projection $P : X \to X$ par $Px = x'(0)\,t$, on remarque que $\operatorname{Im} P = \ker L$ et $\ker P = \{x \in X; x'(0) = 0\}$.
Pour $x \in D(L) \cap \ker P$ on a
$$\begin{aligned}(KL_P x)(t) &= (Kx'')(t) = \int_0^t \int_0^\tau x''(s)\,dsd\tau \\ &= \int_0^t [x'(\tau) - x'(0)]\,d\tau = x(t) - x(0) - tx'(0) = x(t).\end{aligned}$$
Et pour tout $y \in \operatorname{Im}(L)$,
$$(L_P K y)(t) = \left(\int_0^t \int_0^\tau y(s)\,dsd\tau\right)'' = y(t).$$
Alors $K = L_P^{-1}$. D'autre part on a pour tout $y \in \operatorname{Im}(L)$, $t \in [0,1]$
$$|(Ky)(t)| \le \int_0^1 \int_0^1 |y(s)|\,dsd\tau \le \|y\|_{L^1} \text{ et } \left|(Ky)'(t)\right| = \left|\int_0^\tau y(s)\,ds\right| \le \|y\|_{L^1};$$
alors $\|Ky\| = \max\left(\|(Ky)\|_\infty, \left\|(Ky)'\right\|_\infty\right) \le \|y\|_{L^1}$. ∎

Lemme 3.5.2 $U_1 = \{x \in D(L) \setminus \ker L;\ Lx + \lambda Nx = 0,\ \ pour\ \lambda \in [0,1]\}$ *est un sous ensemble borné de X.*

Démonstration. On sait que $(Nx)(.) = f(.,\ x(.)\,,\ x'(.)\ ) + e(.)$. Pour tout $x \in U_1$, on a

$$Lx = -\lambda Nx \ \text{ avec } \lambda \neq 0 \text{ et par suite } QNx = 0$$

car $x \notin \ker L$ et $-\lambda Nx \in \operatorname{Im} L$; alors

$$\int_0^1 \int_{\eta t}^t [f(s,\ x(s)\,,\ x'(s)\ ) + e(s)]\, dsdt = 0,$$

donc il existe $c \in [0,1]$ tel que

$$|f(c,\ x(c)\,,\ x'(c)\ )| = |e(c)| \leq \|e\|_\infty .$$

D'une autre part pour $x \in D(L) \setminus \ker L$, en utilisant le lemme précédent et la condition (H_1) on obtient

$$\begin{aligned}
\|(I-P)x\|_\infty &= \|KL(I-P)x\|_\infty \leq \|L(I-P)x\|_{L^1} \\
&= \|Lx\|_{L^1} = |\lambda| \|Nx\|_{L^1} \leq \|Nx\|_{L^1} \\
&\leq \|p\|_{L^1} \|x\|_\infty + \|q\|_{L^1} \|x'\|_\infty \ \ + \|r\|_{L^1} + \|e\|_{L^1} .
\end{aligned}$$

Si pour un certaint $t_0 \in [0,1]\,, |x'(t_0)| \leq R_0$, alors on a

$$|x'(0)| = \left| x'(t_0) - \int_0^{t_0} x''(t)\, dt \right| \leq R_0 + \|x''\|_{L^1} .$$

Si $|x'(t)| > R_0$ pour tout $t \in [0,1]\,,$ la condition (H_2) implique que

$$\|e\|_\infty \geq |f(c,\ x(c)\,,\ x'(c)\ )| \geq -l\,|x(c)| + m\,|x'(c)| - M \geq -l\,\|x\|_\infty + m\,|x'(c)| - M;$$

et par suite

$$|x'(c)| \leq \frac{\|e\|_\infty + M}{m} + \frac{l}{m} \|x\|_\infty .$$

De ce qui précède, on déduit que

$$|x'(0)| = \left| x'(c) - \int_0^c x''(t)\, dt \right| \leq |x'(c)| + \|x''\|_{L^1} \leq \frac{\|e\|_\infty + M}{m} + \frac{l}{m} \|x\|_\infty + \|x''\|_{L^1} .$$

Donc dans tout les cas, on a

$$|x'(0)| \leq \max\left(\frac{\|e\|_\infty + M}{m},\ R_0\right) + \frac{l}{m}\|x\|_\infty + \|x''\|_{L^1}.$$

En écrivant $x(t) = \int_0^t x'(s)\,ds$, on obtient $|x(t)| \leq \left|\int_0^t x'(s)\,ds\right| \leq \int_0^t |x'(s)|\,ds \leq \int_0^1 |x'(s)|\,ds = \|x'\|_{L^1} \leq \int_0^1 \|x'\|_\infty\,dt$; alors

$$\|x\|_\infty \leq \|x'\|_{L^1} \leq \|x'\|_\infty.$$

D'une autre part on a

$$\|x'\|_\infty \leq \|x\| \leq \|Px\| + \|(I-P)x\| \leq \left(\|p\|_{L^1} + \|q\|_{L^1} + \frac{l}{m}\right)\|x'\|_\infty \quad + \|x''\|_{L^1} + C;$$

qui entraine

$$\|x'\|_\infty \leq \frac{\|x''\|_{L^1}}{C_1} + \frac{C}{C_1},$$

avec $C = \|r\|_{L^1} + \max\left(\|e\|_\infty + \frac{M}{m},\ R_0\right)$ et $C_1 = 1 - (\|p\|_{L^1} + \|q\|_{L^1} + \frac{l}{m})$. On remarque que $C_1 > (\|p\|_1 + \|q\|_1) \geq 0$ car $2(\|p\|_1 + \|q\|_1) + \frac{l}{m} < 1$. On a aussi

$$\begin{aligned}
\|x''\|_{L^1} &= \|Lx\|_{L^1} \leq \|Nx\|_{L^1} \\
&\leq \|p\|_{L^1}\|x\|_\infty + \|q\|_{L^1}\|x'\|_\infty \quad + \|r\|_{L^1} + \|e\|_{L^1} \\
&\leq (\|p\|_{L^1} + \|q\|_{L^1})\left(\frac{\|x''\|_{L^1}}{C_1} + \frac{C}{C_1}\right) + \|r\|_{L^1} + \|e\|_{L^1}
\end{aligned}$$

en posant $C_2 = \frac{C}{C_1}(\|p\|_{L^1} + \|q\|_{L^1}) + \|r\|_{L^1} + \|e\|_{L^1}$ et $C_3 = \frac{\|p\|_{L^1} + \|q\|_{L^1}}{C_1}$ $(C_3 < 1)$, on trouve que $\|x''\|_{L^1} \leq \frac{C_2}{1-C_3}$ alors $\|x\|_\infty \leq \|x'\|_{L^1} \leq \frac{C_2}{(1-C_3)C_1} + \frac{C}{C_1}$. ■

Lemme 3.5.3 *L'ensemble* $U_2 = \{x \in \ker L;\ Nx \in \operatorname{Im} L\}$ *est borné.*

Démonstration. Pour tout $x \in U_2$, $x = at$ où a est une constante et $QNx = 0$. Alors

$$\int_0^1 \int_{\eta t}^t f(s,\ as, a)\,dsdt = -\int_0^1 \int_{\eta t}^t e(s)\,dsdt;$$

donc il existe $d \in\ ]0,1[$ tel que $|f(d,\ ad,\ a)| = |e(d)| \leq \|e\|_\infty$. Il en resulte que $|a| \leq \max\left(R_0,\ \frac{M+\|e\|_\infty}{m-l}\right)$, si $|a| > R_0$ alors par la condition (H_2) on obtient $\|e\|_\infty \geq -l\,|a|\,d + m\,|a| - M \geq (-l+m)\,|a| - M$, car $0 < d < 1$ par suite $|a| \leq \frac{M+\|e\|_\infty}{m-l}$. ■

Lemme 3.5.4 *Si dans la condition* (H_3) *on suppose qu'il existe* $R_1 > 0$, *tel que pour tout* $v \in \mathbb{R}$ *et* $|v| > R_1$, $vf(t,\ vt,\ v) \leq 0$ *pour tout* $t \in [0,1]$, *alors l'ensemble*

$$U_3 = \{x \in \ker L;\ H(x,\lambda) = \lambda Jx + (1-\lambda) QNx = 0\}$$

est borné; où $\lambda \in [0,1]$ *et* $J : \ker L \to \operatorname{Im} Q$ *est l'isomorphisme linéaire défini par* $J(at) = a$.

Démonstration. Supposons que $x_n(t) = a_n t \in U_3$ et $\|a_n t\| = |a_n| \to +\infty$ quand $n \to +\infty$. Alors il existe $\lambda_n \in [0,1]$, tel que

$$\lambda_n a_n + (1-\lambda_n) QN\ (a_n t) = 0.$$

La suite (λ_n) admet une sous-suite convergente; pour simplifier on prend $\lambda_n \to \lambda_0$. Démontrons que $\lambda_0 \neq 1$; en effet par l'absurde nous avons

$$\lambda_n = -(1-\lambda_n)\frac{QN(a_n t)}{a_n},$$

alors $\lambda_n = (1-\lambda_n)\frac{\|QN(a_n t)\|}{|a_n|} \to 0$ quand $n \to +\infty$ (car QN est continue et $|a_n| \to +\infty$); ceci contredit le fait que $\lambda_n \to 1$.

Pour n assez grand, $1-\lambda_n \neq 0$; on peut écrire alors

$$\begin{aligned} -\frac{\lambda_n}{1-\lambda_n} &= \frac{1}{a_n} Q\left(f(t,\ a_n t,\ a_n) + e(t)\right) \\ &= \frac{2}{1-\eta}\int_0^1\int_{\eta t}^t \frac{f(s,\ a_n s,\ a_n)}{a_n} dsdt + \frac{2}{(1-\eta)a_n}\int_0^1\int_{\eta t}^t e(s)\, dsdt. \end{aligned}$$

Comme $|a_n| \to +\infty$ quand $n \to +\infty$, on peut choisir $|a_n| > \max(R_0, R_1)$. Alors pour n assez grand, nous avons d'après la condition (H_2)

$$\left|\frac{(fs,\ a_n s,\ a_n)}{a_n}\right| \geq -l + n - \frac{M}{|a_n|} \geq \frac{n-l}{2}.$$

En utilisant le fait que $a_n(fs,\ a_n s,\ a_n) \leq 0$, on déduit que $\frac{(fs,\ a_n s,\ a_n)}{a_n} \leq \frac{l-n}{2}$. Par le lemme de Fatou, on obtient

$$\begin{aligned} &\limsup_{\ n \to\infty} \left[\int_0^1\int_{\eta t}^t \frac{(fs,\ a_n s,\ a_n)}{a_n} dsdt + \frac{2}{a_n}\int_0^1\int_{\eta t}^t e(s)\, dsdt\right] \\ \leq\ &\limsup_{\ n \to\infty} \int_0^1\int_{\eta t}^t \frac{(fs,\ a_n s,\ a_n)}{a_n} dsdt \\ \leq\ &\int_0^1\int_{\eta t}^t \limsup_{\ n \to\infty} \frac{(fs,\ a_n s,\ a_n)}{a_n} dsdt \leq \frac{(l-n)(1-\eta)}{4}. \end{aligned}$$

Ceci est une contradiction avec $\frac{\lambda_n}{1-\lambda_n} \geq 0$; alors U_3 est borné.

Par le lemme (3.5.1), si B est un borné de $\operatorname{Im} L$, alors pour tout $y \in B$, on a $\|Ky\| \leq \|y\|_{L^1}$. D'autre part pour t_1, t_2 de $[0,1]$ on a

$$|Ky(t_2) - Ky(t_1)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} \int_0^{\tau} y(s)\, ds d\tau \right| \leq \int_{t_1}^{t_2} \int_0^{\tau} |y(s)|\, ds d\tau \leq \|y\|_{L^1} |t_2 - t_1|,$$

d'après le théorème d'Ascoli-Arzela K est compact, alors N est $L-$compact. Des lemmes (3.5.2), (3.5.3) et (3.5.4) on en déduit qu'il existe $\rho_1 > 0$, $\rho_2 > 0$ et $\rho_3 > 0$ tel que $U_1 \subset B(0,\rho_1)$, $U_2 \subset B(0,\rho_2)$ et $U_3 \subset B(0,\rho_3)$. Soit $\Omega = B(0,\rho)$ tel que $\rho = \max(\rho_1,\rho_2,\rho_3)$, alors $Lx + \lambda Nx \neq 0$ pour tout $x \in (D(L) \setminus \ker L) \cap \partial\Omega$ et $\lambda \in]0,1[$. $Nx \notin \operatorname{Im} L$ pour tout $x \in \ker L \cap \partial\Omega$. $\deg_B\left(QN_{|\ker L}, \ker L \cap \Omega, 0\right) = \deg_B(J, \ker l, 0) \neq 0$. Donc toutes les conditions du théorème de Mawhin sont vérifiées et alors le problème (I.3.5) admet au moins une solution $x \in D(L) \cap \overline{\Omega}$. ■

3.6 Théorème de continuation pour des équations semi-linéaires

Soit $L : D(L) \subset X \to Z$ un opérateur de Fredholm d'indice 0 tel que X, Z sont des *espaces de Banach* et $N : X \times [0,1] \to Z$ un opérateur $L-$complètement continu. Considérons l'équation semi-linéaire de la forme suivante:

$$Lx = N(x,\lambda); \text{ avec } x \in D(L) \text{ et } \lambda \in [0,1]. \tag{I.3.6}$$

Pour tout $B \subset X \times [0,1]$ et $\lambda \in [0,1]$ on pose $B_\lambda = \{x \in X; (x,\lambda) \in B\}$. Soit O un ouvert de $X \times [0,1]$ (n'est pas nécessairement borné); notons par Σ l'ensemble (éventuellement vide), des solutions (v,λ) de l'équation (I.3.6) dans $\overline{O}$, écrivons

$$\Sigma = \left\{(v,\lambda) \in \overline{O} \cap D(L) \times [0,1]; \quad Lv = N(v,\lambda)\right\}.$$

Supposons à présent que

$(\hat{H}_1)$ Σ_0 est un sous ensemble borné de X et $\Sigma_0 \subset O_0$.

$(\hat{H}_2)$ $D_L(L(.) - N(.,0), \Omega) \neq 0$.

$(\hat{H}_3)$ $\varphi : X \times [0,1] \to \mathbb{R}$ est une fonctionelle continue sur $X \times [0,1]$ et propre sur Σ.

Lemme 3.6.1 *Sous l'hypothèse $(\hat{H}_1)$, pour tout ouvert borné Ω de X tel que $\Sigma_0 \subset \Omega \subset O_0$ on a*

$$(L(.) - N(.,0), \Omega) \in C_L \text{ et } D_L(L(.) - N(.,0), \Omega) = constante$$

Démonstration. Soit $v \in \partial\Omega \cap \Sigma_0$ alors $v \in \Omega$ ce qui contredit le fait que Ω est un ouvert de X, (car Ω n'est pas un voisinage de v dans ce cas) d'autre part, si Ω et Ω'sont deux ouverts bornés tels que $\Sigma_0 \subset \Omega \subset \Omega' \subset O_0$; alors

$$D_L(L(.) - N(.,0), \Omega') = D_L(L(.) - N(.,0), \Omega)$$

selon la propriété d'excision. ■

Alors on pose par définition

$$D_L(L(.) - N(.,0), O_0) := D_L(L(.) - N(.,0), \Omega),$$

où Ω est un ouvert borné de X tel que $\Sigma_0 \subset \Omega \subset O_0$.

$(\hat{H}_2)$ entraine $\Sigma_0 \neq \varnothing$.

De $(\hat{H}_3)$, on conclut l'existence de deux réels

$$\varphi_- = \min_{x \in \Sigma_0} \varphi(x,0) \text{ et } \varphi_+ = \max_{x \in \Sigma_0} \varphi(x,0).$$

Théorème 3.6.1 *Sous les hypothèses $\hat{H}_1, \hat{H}_2, \hat{H}_3$; supposons en plus qu'il existe deux constantes c_-, c_+ avec $[\varphi_-, \varphi_+] \subset [c_-, c_+]$, telles que*

$$\varphi(v,\lambda) \notin \{c_-, c_+\} \text{ pour tout } (v,\lambda) \in O \cap \Sigma, \lambda \in]0,1[$$

et

$$\varphi(v,\lambda) \notin [c_-, c_+] \text{ pour tout } (v,\lambda) \in \partial O \cap \Sigma, \lambda \in]0,1[.$$

Alors l'équation $Lx = N(x,1)$ admet au moins une solution $v \in \overline{(O)}_1 \cap D(L)$.

Démonstration. ([29]) Supposons que $Lx = N(x,1)$ n'admet pas de solution; le corollaire (3.4.3) assure l'existence d'une partie connexe fermée $\check{S}$ du Σ, telle que $\check{S} \cap (\Sigma_0 \times \{0\}) \neq \varnothing$ et soit $\check{S}$ est non bornée soit $\check{S} \cap \partial O \neq \varnothing$. $\varphi(\check{S})$ est connexe (car c'est l'image d'une partie connexe par une fonction continue) et comme $\check{S}\cap(\Sigma_0\times\{0\})\neq\varnothing$; alors $\varphi(\check{S})\cap[\varphi_-,\varphi_+]\neq\varnothing$. Si $\check{S}\cap\partial O\neq\varnothing$; l'intervalle $\varphi(\check{S})$ rencontre soit $]-\infty,c_-[$ ou $]c_+,+\infty[$ car $\varphi(\check{S})\subset\varphi(\Sigma\cap\partial O)\cap[c_-,c_+]=\varnothing$; ce qui implique que $[c_-,c_+]\cap\varphi(\check{S})\neq\varnothing$,contradiction avec l'hypothèse. Supposons que $\check{S}$ est non borné, alors $\varphi(\check{S})$ est non bornée aussi, ce qui entraine que $\varphi(\check{S})$ contient au moins l'un des intervalles $[\varphi_+,+\infty[\,;\,]-\infty,\varphi_-]$, alors

$$\varphi(\check{S})\subset\varphi(\Sigma)\cap\{c_-,c_+\}\neq\varnothing$$

qui contredit l'hypothèse aussi. ■

Remarque 3.6.1 *Comme nous l'avons vu dans la preuve du théorème précédent la fonctionelle φ a pour but d'exclure la possibilité que le continuum $\check{S}$ des solutions soit non borné.*

Exemple 3.6.1 *Ω est un ouvert borné de X, on suppose que l'équation $Lx\neq N(x,\lambda)$ avec $x\in D(L)$ et $\lambda\in[0,1[$; soit $O=\Omega\times[0,1]$ et la fonctionelle $\varphi:X\times[0,1]\to\mathbb{R}$ définie par:*

$$\varphi(x,\lambda)=\begin{cases}-dist\ (x,\partial\Omega)\ \ si\ x\in\Omega\\ \ \ dist\ (x,\partial\Omega)\ \ si\ x\notin\Omega.\end{cases}$$

Par hypothèse $\Sigma_0\subset\Omega$; donc on peut prendre dans le théorème précedent les choix suivants:

$$c_-<-diam\ (\Omega)\leq\varphi_-\leq\varphi_+<0\leq c_+.$$

Considérons maintenant une conséquence du théorème (3.6.1). Soit

$$\tilde{\Sigma}=\{(v,\lambda)\in D(L)\times[0,1]\,;Lv=N(v,\lambda)\}\,;$$

on suppose que $\varphi:X\times[0,1]\to\mathbb{R}^+$est continue et satisfait aux conditions suivantes:

$(\hat{H}_4)$ Il existe $R>0$, tel que $\varphi(v,\lambda)\in\mathbb{N}$, pour tout $(v,\lambda)\in\tilde{\Sigma}$ avec $\|v\|\geq R$.

$(\hat{H}_5)$ Pour tout $n\in\mathbb{N}$; $\varphi^{-1}(n)\cap\tilde{\Sigma}$ est borné.

Soit $m=\sup\limits_{(v,\lambda)\in\tilde{\Sigma}\,\cap\,\overline{B}(R)\times[0,1]}\varphi(v,\lambda)$ et l' entier $k_0=[m]+1$, alors $\Gamma_0=\varphi^{-1}([0,k_0])$ est un fermé de $X\times[0,1]$ (image réciproque d'un fermé par φ (continue)) et $\tilde{\Sigma}\cap\overline{B}(R)\times[0,1]\subset\Gamma_0$ (d'après la définition de k_0).

Pour tout entier $k > k_0$ l'ensemble $\Sigma^k = \varphi^{-1}(k) \cap \tilde{\Sigma}$ est compact (selon $\hat{H}_5$ et le fait que N est $L-$complètement continue), alors

$$m_k = \text{dist}\left(\Gamma_0, \Sigma^k\right) > 0.$$

Soit l'ensemble $O^k = \varphi^{-1}\left(]k - \varepsilon_k, k + \varepsilon_k[\right)$ ou $0 < \varepsilon_k < \min\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}m_k\right)$. Pour un entier $i > k_0$ (fixé); on considère l'ouvert

$$O_i = X \times [0,1] \diagdown \Gamma_0 \cup \left(\underset{k>k_0, k\neq i}{\cup} \overline{O^k} \right)$$

et

$$\Sigma^i = \left\{ (v, \lambda) \in \overline{O_i} \cap D(L) \times [0,1] ; Lv = N(v, \lambda) \right\}.$$

Par construction, on a $\varphi(\Sigma^i \cap O_i) = \{i\}$ et par conséquent,

$$\varphi^i_- = \min\left\{ \varphi(v, 0), v \in \Sigma^i_0 \right\} = \max\left\{ \varphi(v, 0), v \in \Sigma^i_0 \right\} = \varphi^i_+ = i.$$

Alors l'ensemble $\left(\varphi^{-1}(i)\right)_0 \cap \tilde{\Sigma}_0 = \Sigma^i_0$ est borné; et comme $\varphi(v, 0) \neq k - \varepsilon_k$ et $\varphi(v, 0) \neq k + \varepsilon_k$ pour tout $v \in \Sigma^i_0$; alors $\Sigma^i_0 \subset (O_i)_0$. Supposons que

$(\hat{H}_6)$ $D_L(L(.) - N(., 0), \Omega_i) \neq 0$ où Ω_i est ouvert borné de X, tel que $\Sigma^i_0 \subset \Omega_i \subset O_i$.

Alors on peut appliquer le théorème (3.6.1) en prenant $O = O_i$ et $\Sigma = \Sigma^i$. D'après la construction précédente il est clair que si on choisit $c^i_- = i - \varepsilon_i$, $c^i_+ = i + \varepsilon_i$ et $\varphi^i_- = \varphi^i_+ = i$ on obtient

(i) $\varphi(v, \lambda) \notin \left\{c^i_-, c^i_+\right\}$ pour tout $(v, \lambda) \in \Sigma^i \cap O_i$ avec $\lambda \in]0, 1[$ car $\varphi(\Sigma^i \cap O_i) = \{i\}$.

(ii) $\varphi(v, \lambda) \notin \left[c^i_-, c^i_+\right]$ pour tout $(v, \lambda) \in \Sigma^i \cap \partial O_i$ avec $\lambda \in]0, 1[$.

Il reste à démontrer que φ est propre sur Σ^i; soit $K = [\alpha, \beta]$ un compact de $\mathbb{R}^+$, l'ensemble $\varphi^{-1}([\alpha, \beta]) \cap \Sigma^i$ est un fermé inclu dans Σ^i qui est compact, d'ou le résultat. Alors l'équation $Lx = N(x, 1)$ admet au moins une solution

$$v_i \in (\overline{O_i})_1 \cap D(L)$$

car toutes les conditions du théorème sont vérifiées.

Corollaire 3.6.1 *Si les hypothèses* $(\hat{H}_4)$, $(\hat{H}_5)$ *sont vérifiés et l'hypothèse* $(\hat{H}_6)$ *est satisfait, pour tout entier* $i > k_0$; *alors pour chacun de ses entiers, l'équation* $Lx = N(x, 1)$ *admet au moins, une solution* $v_i \in \overline{(O_i)}_1 \cap D(L)$ *tel que*

$$\varphi(v_i, 1) = i \quad et \quad \lim_{i \to +\infty} \|v_i\| = +\infty.$$

Démonstration. ([29]) Seule la dernière conclusion reste à démontrer. Par l'absurde supposns le contraire (i.e. $\lim_{i\to +\infty} \|v_i\| \neq +\infty$), alors il existe une sous-suite (v_{i_p}) bornée de solutions de l'équation $Lx = N(x, 1)$ telle que $\lim_{p\to+\infty} \varphi(v_{i_p}, 1) = i_p \to +\infty$,

ce qui est une contradiction car (v_{i_p}) est précompact. ■

3.7 Opérateur de Poincaré et problèmes périodiques

Il est bien connu que pour tout $(s, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ le problème

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(s) = y \end{cases} \tag{I.3.7}$$

où $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une fonction continue et localement lipschitzienne par rapport à x, admet une solution unique

$$x = x(t, s, y)$$

définie sur un intervalle maximal $J =]\tau_-(s, y), \tau_+(s, y)[$ avec

$$-\infty \leq \tau_-(s, y) < s < \tau_+(s, y) \leq +\infty;$$

en plus, x est continue sur $G = J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$.

3.7.1 Solution $T-$périodique d'une équation différentielle

Définition 3.7.1 *Soit* $T > 0$,*on appelle Solution* $T-$*périodique de l'équation*

$$x'(t) = f(t, x(t));$$

toute solution x *de cette équation, définie sur l'intervalle* $[0, T]$ *et vérifie* $x(0) = x(T)$.

Si on suppose en outre que, f est $T-$périodique relativement à t (i.e. $f\ (t+T,x) = f\ (t,x)$, $t \in \mathbb{R}$); alors une solution x, $T-$périodique de l'équation $x'\ (t) = f\ (t, x\ (t))$, peut être prolongée à une solution de cette équation définie sur $\mathbb{R}$ tout entier et vérifient

$$x\ (t+T) = x\ (t) \ \text{ quelque soit } t \in \mathbb{R}.$$

L'opérateur de Poincaré est l'opérateur défini par

$$\begin{aligned} P_T &: \ \mathbb{R}^n \rightarrow \ \mathbb{R}^n \\ P_T\ (y) &= \ x\ (T,0,y) \end{aligned}$$

où $x\ (t,0,y)$ est la solution unique du problème de Cauchy (I.3.7) lorsque $s = 0$.

Remarque 3.7.1 *$x\ (t,0,y)$ est une solution $T-$périodique du problème (I.3.7); si et seulement si $y = P_T\ (y)$ avec $\tau_+\ (0,y) > T$.*

3.7.2 Théorème d'existence (de Krasnosel'skii-Perov)

Théorème 3.7.1 *(voir [8]) Si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ tel que les conditions suivantes sont satisfaites:*

(i) pour tout $y \in \overline{\Omega}$, la solution $x\ (t,0,y)$ du problème (I.3.7) est définie au moins sur $[0,T]$,

(ii) pour tout $\lambda \in]0,1]$ et tout $y \in \partial\Omega$, on a $y \neq x\ (\lambda.T, 0, y)$,

(iii) quelque soit $x \in \partial\Omega$; $f\ (0,x) \neq 0$,

(iv) $D_0\ (f\ (0,.)\ ,\Omega) \neq 0$.

Alors

$$D_0\ (I - P_T, \Omega) = (-1)^n\ .D_0\ (f\ (0,.)\ ,\Omega)$$

et l'équation $x'\ (t) = f\ (t, x\ (t))$ admet au moins une solution $T-$périodique x telle que $x\ (0) \in \overline{\Omega}$.

3.7.3 Degré topologique d'applications de type gradient

On rapelle que si $V \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, le gradient de V est l'opérateur $\mathrm{grad}(V) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ défini par:

$$\mathrm{grad}(V)(x) = \left(\frac{\partial V(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial V(x)}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial V(x)}{\partial x_n}\right) \text{ pour tout } x = (x_1, x_2, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Théorème 3.7.2 *(voir [8], page)Soit ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $V \in C^1(\omega, \mathbb{R})$ telle que* $\mathrm{grad}\, V$ *est localement lipschitzienne. On note par V^c, $\overline{V^c}$ les ensembles*

$$\{x \in \omega; V(x) < c\}, \{x \in \omega; V(x) \leq c\}$$

respectivement ($c \in \mathbb{R}$); supposons qu'il existe $r > 0$, α, β deux nombres réels avec $\alpha < \beta$ et $x_0 \in \omega$ tels que

$$\overline{V^\alpha} \subset \overline{B}(x_0, r) \subset V^\beta \text{ et } \overline{V^\beta} \subset \omega \quad \text{est borné;}$$

et $\mathrm{grad}\, V(x) \neq 0$ *pour tout $x \in \overline{V^\beta} \setminus V^\alpha$. Alors*

$$D_0\left(\mathrm{grad}\, V, V^\beta\right) = 1.$$

Corollaire 3.7.1 *Soit $V \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ avec* $\mathrm{grad}\, V$ *est localement lipschitzien et tel que*

(i) $\lim\limits_{|x| \to +\infty} V(x) = +\infty$ *(i.e. V est coercive).*

(ii) Il existe $r_1 > 0$, tel que $\mathrm{grad}\, V(x) \neq 0$ *pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus B(r_1)$.*

Alors pour tout $r \geq r_1$,

$$D_0(\mathrm{grad}\, V(x), B(r)) = 1.$$

Démonstration. Soit $\alpha = \max\limits_{\|x\| \leq r_1} V(x)$. On remarque que$V^\alpha$ est borné car (V est coercive), il en résulte qu'il existe $r_0 > 0$ tel que $\overline{V^\alpha} \subset \overline{B}(r)$. Il suffit de prendre $\beta > \max\limits_{\|x\| \leq r_1} V(x)$ pour voir que tout les conditions du théorème (3.7.2) sont satisfaites avec $x_0 = 0$. ■

Lemme 3.7.1 *Soit $V \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$où* $\mathrm{grad}\, V$ *est localement lipschitzien. Alors toute solution x, $T-$périodiques du système,*

$$x'(t) = -\,\mathrm{grad}\, V(x(t))$$

est constante.

Démonstration. On sait que $\langle \operatorname{grad} V(x(t)), x'(t)\rangle = \frac{d\,V(x(t))}{d\,t}$, alors si x est une solution du système $x'(t) = -\operatorname{grad} V(x(t))$ on obtient

$$\frac{d\,V(x(t))}{d\,t} = \langle -x'(t), x'(t)\rangle = -\|x'(t)\|^2 .$$

Par intégration, on trouve

$$\int_0^T \|x'(t)\|^2\,dt = -V(x(T)) + V(x(0)) = 0$$

(car $x(T) = x(0)$); on en déduit que $x'(t) = 0 = -\operatorname{grad} V(x(t))$. ■

Remarque 3.7.2 *Tout les résultats ci- dessus restent vrais quand* $\operatorname{grad} V$ *est supposé seulement continue.*

3.7.4 Fonction directrice pour une équation différentielle

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction $T-$périodique en t et continue. On considère le système d'équations differentielles

$$x'(t) = f(t, x(t)). \tag{II.3.7}$$

Définition 3.7.2 *On dit que* $V \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *est une fonction directrice, pour l'équation différentielle* $x' = f(t, x)$, *s'il existe* $r_1 > 0$ *tel que*

$$\langle -\operatorname{grad} V(x), f(t, x)\rangle \leq 0 \tag{III.3.7}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ *et* $x \in \mathbb{R}^n \setminus B(r_1)$. *Si l'inégalité (III.3.7) est strict,* V *est appelée* ***fonction directrice stricte.***

Proposition 3.7.1 *[31] Si* $V \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *est une fonction directrice stricte pour le système (II.3.7) vérifiant*

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} V(x) = +\infty;$$

alors le système (II.3.7) admet au moins une solution $T-$*périodique.*

Démonstration. La condition $\langle -\operatorname{grad} V(x), f(t, x)\rangle < 0$, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$ avec $\|x\| \geq r_1$ implique que $\operatorname{grad} V(x) \neq 0$; d'après le corollaire (3.7.1) on obtient pour tout $r > r_1$;

$$D_0(\operatorname{grad} V(x), B(r)) = 1.$$

On définit l'homotopie $F : [0,1] \times (\mathbb{R}^n \diagdown B(r_1)) \to \mathbb{R}^n$ par

$$F(\lambda, x) = (1-\lambda) . \operatorname{grad} V(x) + \lambda . f(t,x);$$

il est clair que

$$\langle -\operatorname{grad} V(x), F(\lambda, x)\rangle = -(1-\lambda) . \|\operatorname{grad} V(x)\|^2 + \lambda . \langle -\operatorname{grad} V(x), f(t,x)\rangle < 0;$$

ce qui montre que

$$F(\lambda, x) \neq 0 \text{ pour tout } x \in (\mathbb{R}^n \diagdown B(r_1)).$$

Donc $D_0(F(\lambda, x), B(r))$ est bien définie et vaut par homotopie $D_0(F(\lambda, x), B(r)) = D_0(\operatorname{grad} V(x), B(r)) = D_0(f(t,x), B(r)) = 1 \neq 0$. ■

Lemme 3.7.2 *Si le système (II.3.7) admet une fonction directrice stricte V; alors toute solution x, $T-$périodique possible de ce système vérifie*

$$V(x(t)) \leq R_0 = \max_{\|x\| \leq r_1} V(x).$$

Démonstration. Si ce n'était pas le cas, il existerait t_0 tel que $V(x(t_0)) > R_0$. Par conséquent;

$$V(x(\tau)) = \max_{t \in \mathbb{R}} V(x) > R_0$$

qui entraine $\|x(\tau)\| > r_1$, $\frac{d}{dt} V(x(\tau)) = 0 = \langle \operatorname{grad} V(x(\tau)), f(\tau, x(\tau))\rangle$ qui est en contradiction avec le fait que V soit une fonction directrice stricte. ■

Chapitre 4

Applications diverses

4.1 Introduction

Dans les deux sections suivantes, On s'intérèssera à l'existence et à la multiplicité des solutions de l'équation differentielle ordinaire non linéaire suivante

$$x''(t) + g(x(t)) = p(t.x(t).x'(t));\ \ t \in [a, b] \tag{D1}$$

satisfaisant aux conditions aux limites de Sturm-Liouville ou de type périodique en a et b (i.e $x(a) - x(b) = x'(a) - x'(b) = 0$), où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et superlinéaire i.e

$$\lim_{|x| \to +\infty} \frac{g\,(x)}{x} = +\infty, \tag{D2}$$

et $p : [a, b] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue vérifiant une condition de croissance linéaire par rapport aux deux dernières variables.

En se basant sur la méthode de Leray-Schauder qui consiste à obtenir des estimations a priori pour les solutions possibles d'une famille d'équations dépendant d'un paramètre $\lambda \in [0, 1]$ et joignant (D1) à un simple problème pour lequel le degré topologique est non nul. On choisit par exemple

$$x''(t) + g(x(t)) = \lambda p(t.x(t).x'(t)). \tag{D3}$$

Pour $\lambda = 0$, une étude élémentaire de l'équation

$$x''(t) + g(x(t)) = 0 \tag{D4}$$

sous la condition (D2), basée sur la première intégrale de l'énergie, montre que (D4) admetra une infinité de solutions avec de grandes amplitudes, et vérifiant les conditions aux limites. D'après la méthode mentionnée ci-dessus et sous des conditions appropriées sur p, cette propriété a lien pour toutes les équations (D3), Par conséquent, l'ensemble des solutions possibles de (D3) satisfaisant aux conditions aux limites, n'est pas a priori borné. Cette difficulté, dans le cas de conditions aux limites périodiques, a été surmontée par l'introduction d'une fonctionelle φ qui sera décrite ulterieurement. L'approche que nous allons utiliser s'applique également à des situations plus générales, et en particulier à l'existence de solutions $T-$périodiques de certains systèmes hamiltoniens perturbés plan de la forme:

$$u'(t) = -J \left(H'(u(t)) + p(t, u(t))\right)$$

avec H vérifie certaines conditions superquadratiques.

4.2 Un exemple de fonctionelle φ pour des problèmes périodiques

Dans cette section, nous allons examiner un exemple de la fonctionelle φ montionnée au dernier théorème de la section 3.6. Soit l'équation différentielle ordinaire du premier ordre

$$x'(t) = f(t, x(t), \lambda); \; x \in C_T\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2\right). \tag{I.4.2}$$

où $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$ est une fonction continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times [0,1]$ et $T-$périodique en t i.e. pour tout $t \in \mathbb{R}$;

$$f(t+T, x, \lambda) = f(t, x, \lambda);$$

$C_T(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) = \{x \in C\ (\mathbb{R}, \mathbb{R}^2); x(t+T) = x(t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}\}$ est l'espace de Banach muni de la norme$\|x\| = \max\limits_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\|$ où $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$ et $\|x(t)\| = \sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)}$, $x'(t) = \frac{dx(t)}{dt} = (x_1'(t), x_2'(t))^T$.

On définit l'opérateur linéaire $L : D(L) \subset C_T(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) \to C_T(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ par

$$Lx(.) = x'(.) \quad \text{pour tout } x \in D(L) = C_T\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2\right) \cap C^1\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2\right);$$

et $N : C_T\ (\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) \times [0,1] \to C_T\ (\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ où $N(x(.), \lambda) = f\ (., x(.), \lambda)$ est l'opérateur de Némytskii associé à la fonction f. Il est clair que l'équation (I.4.2) est équivalente à

$$Lx = N(x, \lambda); x \in D(L) \text{ et } \lambda \in [0,1]. \tag{II.4.2}$$

Soit la fonctionelle $\varphi : C_T\ (\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) \times [0,1] \to \mathbb{R}^+$ définie par

$$\varphi(x, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^T \langle f(s, x(s), \lambda), Jx(s) \rangle \delta(x(s))\, ds \right|,$$

où J est la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On remarque que $J^{-1} = -J$ car $J^2 = -I_2$, et pour tout $x \in \mathbb{R}^2$; $\langle Jx, x \rangle = 0$.

Soit $\delta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est la fonction définie par:

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \|x\| < 1 \\ \|x\|^{-2} & \text{si } \|x\| \geq 1. \end{cases}$$

Il est clair que φ est continue, L est un opérateur de Fredholm d'indice 0 et N est $L-$complètement continue sur $C_T\ (\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) \times [0,1]$ .Posons

$$\Sigma = \{(v, \lambda) \in D(L) \times [0,1]; Lv = N(v, \lambda)\}.$$

Lemme 4.2.1 *Si* $(v, \lambda) \in \Sigma$ *avec* $\min_{t \in \mathbb{R}} \|v(t)\| \geq 1$, *alors* $\varphi(v, \lambda) \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Soit $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$; $v(t) = (v_1(t), v_2(t))$ où $v_1(t) = r(t)\cos\theta(t)$ et $v_2(t) = r(t)\sin\theta(t)$ donc $\tan\theta(t) = \frac{v_2(t)}{v_1(t)}$; par suite $\theta(t) = \arctan\frac{v_2(t)}{v_1(t)}$ et

$$\begin{aligned} \frac{d\,\theta(t)}{dt} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{v_2(t)}{v_1(t)}\right)^2} \left(\frac{v_2(t)}{v_1(t)}\right)' \\ &= \frac{v_2'(t).v_1(t) - v_2(t).v_1'(t)}{(v_1(t))^2 + (v_2(t))^2} \\ &= (v_2'(t).v_1(t) - v_2(t).v_1'(t)) \|v(t)\|^{-2}. \end{aligned}$$

D'une autre part, si (v, λ) est une solution de (I.4.2) alors

$$\begin{aligned} \langle f(t, v(t), \lambda), Jv(t) \rangle &= \langle Lv(t), Jv(t) \rangle \\ &= \langle v'(t), Jv(t) \rangle \\ &= -v_2(t).v_1'(t) + v_2'(t).v_1(t) \end{aligned}$$

(car $v'(t) = (v_1'(t), v_2'(t))$ et $Jv(t) = (-v_2(t), v_1(t))$). Alors

$$\begin{aligned}\varphi(v,\lambda) &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} d\theta(t)\right| \\ &= \frac{1}{2\pi}\left|[\theta(t)]_0^{2\pi}\right| \\ &= \frac{1}{2\pi}\left|(\theta(2\pi)-\theta(0))\right| = \left|\frac{2k\pi}{2\pi}\right| = |k|\end{aligned}$$

où $k \in \mathbb{Z}$. ■

Lemme 4.2.2 *Soit S une forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$, définie positive et un réel $\gamma > 0$. S'il existe $R > 0$ tel que pour tout $(t,x,\lambda) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\times[0,1]$, avec $\|x\| > R$ on a*

$$\textit{ou bien } \langle f(t,x,\lambda), Jx\rangle \geq S(x) - \gamma\|x\|$$

$$\textit{ou bien } \langle f(t,x,\lambda), Jx\rangle \leq -S(x) + \gamma\|x\|.$$

Alors il existe $R' \geq 1$, tel que

$$\varphi(v,\lambda) \geq (\omega\langle S\rangle)^{-1}$$

pour tout $(v,\lambda) \in \Sigma$ avec $\min_{t\in\mathbb{R}}\|v(t)\| \geq R'$.

Notation 4.2.1 $\langle S\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\,\theta}{S(\cos\,\theta,\sin\,\theta)}$ *et* $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Démonstration. Soients $A \geq \max(R,1)$, $\sigma = \min_{\|x\|=1} S(x)$. S'il existe $(v,\lambda) \in \Sigma$ tel que $\min_{t\in\mathbb{R}}\|v(t)\| \geq A$, alors

$$\begin{aligned}S(v(t)) &= S(r(t)\cos\theta(t), r(t)\sin\theta(t)) \\ &= r^2(t).S(\cos\theta(t),\sin\theta(t)) \\ &= \|v(t)\|^2.S(\cos\theta(t),\sin\theta(t))\end{aligned}$$

en utilisant l'hypothèse $\langle f(t,v(t),\lambda), Jv(t)\rangle \geq S(v(t)) - \gamma\|v(t)\|$; on obtient

$$\frac{d\,\theta(t)}{dt} \geq S(\cos\theta(t),\sin\theta(t)) - \frac{\gamma}{\|v(t)\|} \geq S(\cos\theta(t),\sin\theta(t)) - \frac{\gamma}{A};$$

divisons les deux membres par $S(\cos\theta(t),\sin\theta(t))$ et utilisons le fait que $\sigma = \min_{\|x\|=1} S(x)$ on trouve;

$$\begin{aligned}\frac{1}{S(\cos\theta(t),\sin\theta(t))}.\frac{d\,\theta(t)}{dt} &\geq 1 - \frac{\gamma}{A.S(\cos\theta(t),\sin\theta(t))} \\ &\geq 1 - \frac{\gamma}{A.\sigma}.\end{aligned}$$

Par suite

$$\int_0^T \frac{d\,\theta\,(t)}{S\,(\cos\theta\,(t)\,,\sin\theta\,(t))} \geq \int_0^T \left(1-\frac{\gamma}{A.\sigma}\right) dt = T-\frac{\gamma.T}{A.\sigma}$$

alors

$$\int_{\theta(0)}^{\theta(T)} \frac{d\,\theta}{S\,(\cos\theta,\sin\theta)} \geq T-\frac{\gamma.T}{A.\sigma}.$$

On sait que $\theta\,(T)-\theta\,(0)=2\pi k$ avec $\varphi\,(v,\lambda)=|k|\in\mathbb{N}$ (d'après le lemme (4.2.1)) alors

$$\begin{aligned} k &\geq \frac{T}{\int_0^{2\pi}\frac{d\,\theta}{S(\cos\ \theta,\sin\ \theta)}}-\frac{\gamma}{A..\sigma}.\frac{T}{\int_0^{2\pi}\frac{d\,\theta}{S(\cos\ \theta,\sin\ \theta)}} \\ &= \left(\frac{1}{T}\int_0^{2\pi}\frac{d\,\theta}{S\,(\cos\ \theta,\sin\ \theta)}\right)^{-1}\left(1-\frac{\gamma}{A.\sigma}\right). \end{aligned}$$

Si on choisit $A>\frac{\gamma}{\sigma}$ (i.e. $1-\frac{\gamma}{A..\sigma}>0$) on obtiendra $k\geq 0$ d'où le resutat,

$$\varphi\,(v,\lambda)\geq\left(\frac{1}{T}\int_0^{2\pi}\frac{d\,\theta}{S\,(\cos\ \theta,\sin\ \theta)}\right)^{-1}$$

(on utilise le fait que k est un entier et on prend A assez grand pour que $\frac{\gamma}{A.\sigma}$ soit assez petit). ■

Lemme 4.2.3 *Soient $V\in C^1\left(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}\right)$, $r>0$ vérifiant les conditions suivantes:*

(i). $|V\,(x)|\to+\infty$ quand $|x|\to+\infty$.

(ii). Il existe $a>0$ tel que pour tout $x\in\mathbb{R}^2\setminus B\,(r)$, on a

$$\langle \operatorname{grad} V\,(x)\,,f\,(t,x,\lambda)\rangle \leq a.\,|V\,(x)|\,.$$

Alors pour tout $r_1>0$, il existe $r_2>r_1$ tel que si $(v,\lambda)\in\Sigma$ avec $\|v\|\geq r_2$, on a

$$\min_{t\in\mathbb{R}}\|v\,(t)\|>r_1.$$

Démonstration. L'hypothèse (i) entraine que pour tout $A>0$, il existe $B>0$ tel que $|x|>B$ implique $|V\,(x)|>A$. Pour $A=r$ on peut chisir $r_0>r$, tel que $|V\,(x)|>0$ (i.e $\neq 0$ pour tout x vérifiant $\|x\|\geq r_0$). On définit la fonction

$$W:\ \mathbb{R}^2\setminus B\,(r_0)\to\mathbb{R};W\,(x)=\log\ |V\,(x)|\,.$$

Il est clair que

$$\lim_{\|x\|\to+\infty} W(x) = +\infty \tag{III.4.2}$$

et

$$\operatorname{grad} W(x) = \frac{\operatorname{grad} V(x)}{V(x)}.$$

Comme $V \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$,$V(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2 \diagdown B(r_0)$, alors $W \in C^1(\mathbb{R}^2 \diagdown B(r_0), \mathbb{R})$. Soit $(u, \lambda) \in \Sigma$ avec $\min_{t\in\mathbb{R}} \|u(t)\| \leq r_1$, fixons $c_0 > \max(r_0, r_1)$, et choisissons $t_1 \in \mathbb{R}$ tel que $\|v\| = \max_{t\in\mathbb{R}} \|u(t)\| = \|u(t_1)\|$; si on suppose que $\max_{t\in\mathbb{R}} \|u(t)\| > c_0$ alors il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\|u(t_0)\| = c_0$ car la fonction $t \in \mathbb{R} \to \|u(t)\| \in \mathbb{R}^+$ est continue et $\min_{t\in\mathbb{R}} \|u(t)\| \leq r_1 < c_0$; d'après la $T-$périodicité de u, on peut toujours choisir t_0 et t_1 dans l'intervalle $[0, T]$ de manière que $(t_1 - t_0) .V(x) > 0$ si $\|x\| \geq r_0$ et $\|u(t)\| > c_0$, si t est compris entre t_1 et t_0. On définit la fonction $w : [0, T] \to \mathbb{R}$; $w(t) = W(u(t))$; alors on peut écrire

$$w(t_1) = w(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} w'(s)\, ds = W(u(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} w'(s)\, ds \leq \max_{\|x\|=c_0} |W(x)| + cT = c_1, \tag{IV.4.2}$$

d'après (III.4.2) on peut trouver $r_3 \geq r_0$ tel que $W(x) > c_1$ si $\|x\| > r_3$. D'après (IV.4.2) on a $W(u(t_1)) \leq c_1$ ce qui implique $\|u(t_1)\| \leq r_3$; il suffit de prendre $r_2 = \max\{c_1, r_3\}$. ■

4.3 Perturbations d'un système hamiltonien autonome plan

Un système hamiltonien H est un système mécanique régi par les équations de Hamilton

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \text{ et } \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \text{ avec } i = 1, 2, ...n;$$

où H désigne l'énergie totale du système; c'est une fonction des grandeurs q_i (position) et p_i (impulsion). Soit $H \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $p : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une fonction $T-$périodique en t, continue envoie les bornés sur des bornés. Remarquons que les conditions posées sur p impliquent que cette dernière satisfait aux conditions de Carathéodory.

Exemple

En mécanique, l'évolution d'un ensemble de points matériels de vecteur position x est régie par la loi de Newton

$$mx'' = F(x, x'),$$

où on désigne par $x'(t) = \frac{dx}{dt}$ la vitesse, $x''(t) = \frac{d^2x}{dt^2}$ l'accélération et par la constante m la masse. La fonction $F(x, x')$ représente une force dépendant de la position et de la vitesse. S'il existe une fonction $V \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que

$$F(x) = -\operatorname{grad} V(x),$$

dans ce cas on dit que la force F *dérive d'un potentiel.* Posons $q = x$, $p = m.x'$ (quantité de mouvement) et

$$H(q,p) = \frac{1}{2}m. \|x'\|^2 + V(x) = \frac{1}{2m}\|p\|^2 + V(q).$$

Le système donné est équivalent au suivant

$$q' = \frac{\partial H}{\partial p}(q,p) \text{ et } p' = -\frac{\partial H}{\partial q}(q,p)\,;$$

et par suite, au système

$$z'(t) = -J\ H'(z(t)),$$

où $z(t) = (q(t), p(t)) = (x(t), m.x'(t))$.

Théorème 4.3.1 *On suppose que les conditions suivantes sont vérifiées*

(i) $|H(x)| \to +\infty$ *quand* $x \to +\infty$.

(ii) Il existe $r_0 > 0$ *tel que* $\operatorname{grad} H(x) \neq 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}^2 \diagdown B(r_0)$.

(iii) Il existe $r > 0$ *et* $a > 0$ *tels que* $\langle -Jp(t.x),\ \operatorname{grad} H(x)\rangle \leq a.|H(x)|$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *et* $x \in \mathbb{R}^2 \diagdown B(r)$.

(iv) Pour tout $\alpha > 0$, *Il existe* $d(\alpha) > 0$ *et une forme quadratique définie positive* S_α *sur* $\mathbb{R}^2$, *tels que*

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \langle S_\alpha \rangle = +\infty \text{ où } \langle S_\alpha \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\,\theta}{S(\cos\,\theta, \sin\,\theta)}$$

et

$$\langle \operatorname{grad} H(x), x\rangle - |\langle p(t,x), x\rangle| \geq S_\alpha(x) - d(\alpha),$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ *et* $x \in \mathbb{R}^2$.

Alors le système

$$x'(t) = -J\left(H'(x) + p(t, x(t))\right) \tag{I.4.3}$$

admet au moins une solution $T-$périodique x (i.e $x \in D(L) = C_T \cap C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$).

Démonstration. On définit la fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$ par

$$f(t, x, \lambda) = -J\left(H'(x) + \lambda . p(t, x)\right) - (1 - \lambda)\frac{H'(x)}{1 + \|H'(x)\|}.$$

Nous allons appliquer le corollaire (3.6.1) pour les opérateurs L et N définis au début de ce chapitre; d'abord en utilisant la condition (ii) on aura;

$$\begin{aligned} \langle f(t, x, 0), H'(x)\rangle &= \left\langle -JH'(x) - \frac{H'(x)}{1 + \|H'(x)\|}, H'(x)\right\rangle \\ &= -\frac{\|H'(x)\|^2}{1 + \|H'(x)\|} < 0 \end{aligned}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^2 \diagdown B(r_0)$; ceci montre que H est une fonction directrice stricte pour l'équation differentielle

$$x'(t) = f\ (t, x(t), 0) = -J\ H'(x) - \frac{H'(x)}{1 + \|H'(x)\|};$$

par l'hypothèse (i) et en vertu du corollaire (3.7.1), le lemme (3.7.1) et la proposition (3.7.1), on constate que l'ensemble

$$\Sigma_0 = \left\{x \in C_T \cap C^1\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2\right), Lx = N(x, 0)\right\}$$

est borné et que pour tout ouvert borné Ω tel que $\Sigma_0 \subset \Omega \subset C_T$ on a

$$|D_0(L - N(., 0), \Omega)| = 1.$$

En utilisant l'hypothèse (iii) on obtient

$$\begin{aligned} \langle f(t, x, \lambda), H'(x)\rangle &= \lambda - \langle Jp(t, x), H'(x)\rangle - (1 - \lambda)\frac{\|H'(x)\|^2}{1 + \|H'(x)\|} \\ &\leq \lambda . a . |H(x)| \leq a . |H(x)| \end{aligned}$$

(car $\lambda \in [0,1]$ et $\frac{\|H'(x)\|^2}{1+\|H'(x)\|} > 0$); alors les lemmes (4.2.3) et ensuite (4.2.1) impliquent l'éxistence de $\beta > 1$ tel que si $(v, \lambda) \in \Sigma$ avec $\min\limits_{t \in \mathbb{R}} \|v(t)\| \geq 1$ alors $\|v\| \geq \beta$ et $\varphi(v, \lambda) \in \mathbb{N}$.

En utilisant maintenant l'hypothèse (iv)

$$\begin{aligned}
\langle f(t,x,\lambda), Jx\rangle &= \left\langle -J\left((x)+\lambda.p(t,x)\right)-(1-\lambda)\frac{H'(x)}{1+\|H'(x)\|}, Jx\right\rangle \\
&= \langle -JH'(x), Jx\rangle - \lambda\langle Jp(t,x), Jx\rangle - \frac{(1-\lambda)}{1+\|H'(x)\|}\langle H'(x), Jx\rangle \\
&= -\langle H'(x), x\rangle - \lambda\langle p(t,x), x\rangle - \frac{(1-\lambda)}{1+\|H'(x)\|}\langle H'(x), Jx\rangle,
\end{aligned}$$

et comme $-\lambda\langle p(t,x), x\rangle \leq \lambda|\langle p(t,x), x\rangle| \leq |\langle p(t,x), x\rangle|$ et

$$\frac{\langle H'(x), Jx\rangle}{1+\|H'(x)\|} \leq \frac{|\langle H'(x), Jx\rangle|}{1+\|H'(x)\|} \leq \frac{\|H'(x)\|\,\|x\|}{1+\|H'(x)\|} \leq \|x\|.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\langle f(t,x,\lambda), Jx\rangle &\leq -\langle H'(x), x\rangle + |\langle p(t,x), x\rangle| + \|x\| \\
&\leq -S_\alpha(x) + d(\alpha) + \|x\| \\
&\leq -S_\alpha(x) + 2\|x\|;
\end{aligned}$$

pour tout $t\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}^2$ avec $\|x\|\geq d(\alpha)$. Par le lemme (4.2.2) on a que pour tout $\alpha>0$ il existe $r(\alpha)>1$ tel que

$$\varphi(v,\lambda) \geq (\omega\langle S_\alpha\rangle)^{-1},$$

où $(v,\lambda)\in\Sigma$ avec $\min\limits_{t\in\mathbb{R}}\|v(t)\|\geq r(\alpha)$. Le lemme (4.2.3) entraine que pour tout $\alpha>0$ il existe $R(\alpha)>r(\alpha)$, tel que si $(v,\lambda)\in\Sigma$ et $\|v\|\geq R(\alpha)$ alors $\varphi(v,\lambda)\geq(\omega\langle S_\alpha\rangle)^{-1}$ et comme nous avons

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\langle S_\alpha\rangle^{-1} = +\infty;$$

alors $\varphi(v,\lambda)\to+\infty$, quand $\|v\|\to+\infty$; cela implique que si $\varphi(v,\lambda)\leq n$, alors $\|v\|\leq c_n$, où c_n est un réel et finalement $\varphi^{-1}(n)\cap\Sigma$ est borné pour tout $n\in\mathbb{N}$; on est bien dans les conditions du corollaire (3.6.1). ■

4.3.1 Applications à des équations differentielles ordinaires de second ordre non linéaires

I - Considerons l'équation differentielle de la forme

$$x''(t) + g(x(t)) = r(t, x(t), x'(t)) \tag{II.4.3}$$

où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue vérifiant la condition de superlinéarité suivante:

$$\lim_{|x|\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = +\infty \tag{III.4.3}$$

$r : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est continue, $T-$périodique relativement à t et vérifie la condition de croissance linéaire suivante; il existe $K > 0$ et $M > 0$ tels que pour tout $(t, u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ on a;

$$|r(t, u, v)| \leq K(|u| + |v|) + M \tag{IV.4.3}$$

Théorème 4.3.2 *Si les conditions (III.4.3), (IV.4.3) sont satisfaites; alors l'équation (II.4.3) admet au moins une $T-$périodique solution [29].*

Démonstration. En prenant $u(t) = x(t)$, $v(t) = x'(t)$ et $z(t) = (u(t), v(t))$; l'équation (II.4.3) est équivalente au système

$$\begin{cases} u'(t) = v(t) \\ v'(t) = -g(u(t)) + r(t, u(t), v(t)) \end{cases}$$

Cette dernière équation peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} z'(t) &= (u'(t), v'(t)) \\ &= (v(t), -g(u(t)) + r(t, u(t), v(t))) \\ &= (v(t), -g(u(t))) + (0, r(t, u(t), v(t))) \\ &= -J.J\ [(v(t), -g(u(t))) + (0, r(t, u(t), v(t)))] \\ &= -J\ (g(u(t)), v(t)) - J\ (-r(t, u(t), v(t)), 0). \end{aligned}$$

Posons $\operatorname{grad} H(z) = (g(u(t)), v(t))$. Alors $\frac{\partial H}{\partial u} = g(u)$ et $\frac{\partial H}{\partial v} = v$; d'où

$$H(x) = H(u, v) = G(u) + \frac{1}{2}v^2;$$

telle que

$$G(u) = \int_0^u g(s).ds.$$

Soit la fonction $p : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tel que $p(t, z) = (-r(t, u(t), v(t)), 0)$; alors l'équation (II.4.3) est équivalente à l'équation (I.4.3). Montrons maintenant que, les fonctions p et H ainsi construites vérifient, les conditions du théorème (4.3.1). De la condition (III.4.3) nous avons les conclusions suivantes:

1. il existe $a > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $|x| \geq a$, on a $x.g(x) > 0$.

2. $\lim_{|x| \to +\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim_{|x| \to +\infty} g(x) = +\infty$.

3. Il existe $b > 0$ tel que $|x| > b$ implique $\frac{g(x)}{x} > 1$.

Pour $|u| \geq \rho = \max(a, b)$, nous avons $G(u) = G(\rho) + \int_\rho^u g(s).ds$; dans le cas $u \geq \rho$ on a $g(s) > s$; par intégration on obtient $\int_\rho^u g(s).ds > \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}\rho^2$; d'où $G(u) > \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}\rho^2 + G(\rho)$. Pour $u \leq -\rho$ on trouve $G(u) > \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}\rho^2 + G(-\rho)$ et par suite $\lim_{|u| \to +\infty} G(u) = +\infty$. Alors

$$H(x) = G(u) + \frac{1}{2}v^2 \to +\infty \text{ quand } \|x\| = \sqrt{u^2 + v^2} \to +\infty;$$

car $\|x\| = \sqrt{u^2 + v^2} \to +\infty$ entraine qu'au moins $|u|$ ou $|v|$ tend vers $+\infty$. D'autre part $H'(x) = (g(u), v) \neq 0$; en effet, $\lim_{|u| \to +\infty} |g(u)| = +\infty$ entraine que

$$\|H'(x)\| \to +\infty \text{ quand } \|x\| \to +\infty.$$

De ce qui précède, on déduit aussi qu'il existe $d_0 > 0$, tel que pour tout $u \in \mathbb{R}$ et $|u| \geq \rho$ on a

$$G(u) > \frac{1}{2}u^2 - d_0; \tag{V.4.3}$$

en effet, si on pose $h = -\frac{1}{2}\rho^2 + G(\rho)$, $l = -\frac{1}{2}\rho^2 + G(-\rho)$; d_0 est quelquonque, si $h > 0$ et $l > 0$; $d_0 = \min(-h, -l)$, si $h < 0$ et $l < 0$; $d_0 = -h$;si $h < 0$ et $l > 0$. Dans le cas $0 \leq u < \rho$ on a

$$-\max G(u) \leq \frac{1}{2}u^2 - G(u) < \frac{1}{2}\rho^2 - \min G(u)$$

ce qui donne, $G(u) > \frac{1}{2}u^2 - \left(\frac{1}{2}\rho^2 - \min G(u)\right)$. La condition (III.4.3) implique l'existence de $\alpha > 0$, $\beta > 0$ tels que

$$\lim_{s \to +\infty} \left(g(s) - \alpha.s^2\right) = 0 \text{ et } \lim_{s \to -\infty} \left(g(s) + \beta.s^2\right) = 0,$$

(i.e. la courbe représentative de g admet des branches paraboliques au voisinage de $+\infty, -\infty$). Pour $\varepsilon > 0$ fixé il existe $A > 0$, tel que

$$s > A \text{ entraine } \alpha.s^2 - \varepsilon < g(s) < \alpha.s^2 + \varepsilon$$

et

$$s < -A \text{ entraine } -\beta.s^2 - \varepsilon < g(s) < -\beta.s^2 + \varepsilon;$$

par intégration entre $m = \max(A, a)$ et u les deux membres de l'inégalité $\alpha.s^2 - \varepsilon < g(s)$ on obtient

$$G(u) > \frac{\alpha}{3}u^3 - \frac{\alpha}{3}m^3 - \varepsilon u + \varepsilon A + G(m),$$

et en diviseant par u^2 on trouve

$$\frac{G(u)}{u^2} > \frac{\alpha}{3}u - \frac{\alpha}{3}\frac{m^3}{u^2} - \frac{\varepsilon}{u} + \frac{\varepsilon}{u^2}A + \frac{G(m)}{u^2}.$$

Répétons les même étapes pour l'inégalité $g(s) < -\beta.s^2 + \varepsilon$ (ici les bornes d'intégration sont $-A$ et u) on aboutit à

$$\frac{G(u)}{u^2} > \frac{\beta}{3}u + \frac{\beta}{3}\frac{m^3}{u^2} - \frac{\varepsilon}{u} - \frac{\varepsilon}{u^2}A + \frac{G(-m)}{u^2};$$

on en déduit que

$$\lim_{|u|\to+\infty} \frac{G(u)}{u^2} = +\infty.$$

Le resutat (V.4.3) implique que pour tout $x = (u, v) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$H(x) \geq \frac{1}{2}\|x\|^2 - d_0.$$

Pour $x = (u, v) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|x\| \geq 2\sqrt{d_0}$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\left\langle -Jp(t.x), H'(x)\right\rangle}{H(x)} &= \frac{r(t,x).v}{H(x)} \leq \frac{|r(t,x)|.|v|}{|H(x)|} \\
&\leq \frac{(K(|u|+|v|)+M).|v|}{|H(x)|} \\
&\leq \frac{(K(|u|+|v|)+M).|v|}{\frac{1}{2}\|x\|^2 - d_0} \\
&\leq \frac{(K(|u|+|v|)+M).(|u|+|v|)}{\frac{1}{2}\|x\|^2 - d_0} \\
&\leq \frac{2K\|x\|^2 + M\sqrt{2}\|x\|}{\frac{1}{2}\|x\|^2 - d_0} = 4K + \frac{2\sqrt{2}M\|x\| - 8d_0}{\|x\|^2 - 2d_0} \leq c.
\end{aligned}$$

En effet $\|x\| \geq 2\sqrt{d_0} > \sqrt{2d_0}$ entraine que $\|x\|^2 - 2d_0 > 0$; d'autre part $\frac{2\sqrt{2}M\|x\| - 8d_0}{\|x\|^2 - 2d_0}$ tend vers 0 quand $\|x\| \to +\infty$. À partir de la condition $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \frac{g(u)}{u} = +\infty$ on conclut que pour tout $\alpha > 0$, il existe $d(\alpha) > 0$ tels que $\frac{g(u)}{u} \geq \alpha^2 + \frac{(K+1)^2}{2}$; par conséquent on a pour tout $u \in \mathbb{R}$;

$$u.g(u) \geq \left(\alpha^2 + \frac{(K+1)^2}{2}\right)u^2 - d(\alpha).$$

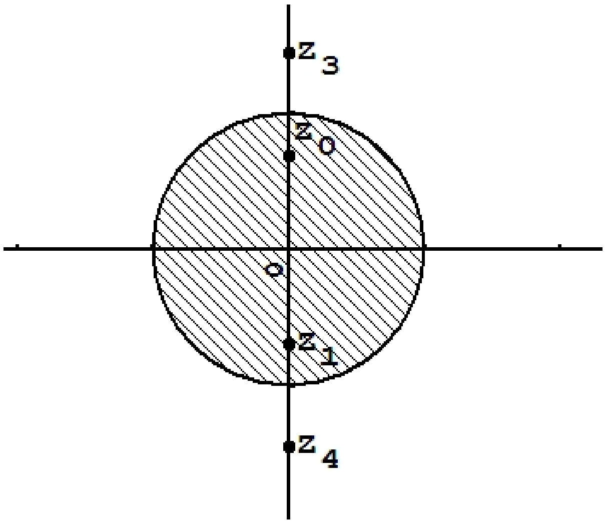


Figure 4.3.1 : Fig.1

Alors, on a les estimations

$$\begin{aligned}\left\langle H'(x), x\right\rangle - \left|\left\langle p(t,x), x\right\rangle\right| &= g(u).u + v^2 - |u|\,|r(t,u,v)| \\ &\geq \left(\alpha^2 + \frac{(K+1)^2}{2}\right)u^2 + v^2 - d(\alpha) - \left[K(|u|+|v|) + M\right]|u| \\ &\geq \left(\alpha^2 + \frac{(K^2+1)}{2}\right)u^2 - K|u|.|v| - M|u| - d(\alpha) \\ &\geq \alpha^2.u^2 + \frac{v^2}{2} - d(\alpha) - \frac{M^2}{2} \geq S_\alpha - \delta(\alpha).\end{aligned}$$

On remarque que $S_\alpha = \alpha^2.u^2 + \frac{v^2}{2}$ est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ définie positive; car $S_\alpha(u,u) = \left(\alpha^2 + \frac{1}{2}\right)u^2 > 0$ pour tout $u \neq 0$. Calculons

$$\langle S_\alpha \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\,\theta}{S_\alpha(\cos\ \theta, \sin\ \theta)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\,\theta}{\alpha^2.(\cos\theta)^2 + \frac{(\sin\theta)^2}{2}}.$$

En opéant le changement de variable suivant, $\cos\theta = \frac{e^{i\,\theta}+e^{-i\,\theta}}{2}$; $\sin\theta = \frac{e^{i\,\theta}-e^{-i\,\theta}}{2i}$ et ensuite $z = e^{i\,\theta}, z^{-1} = e^{-i\,\theta}$ on trouve $dz = iz.dz$ et

$$\langle S_\alpha \rangle = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1} \frac{8z.dz}{(2\alpha^2-1)z^4 + 2(2\alpha^2+1)z^2 + (2\alpha^2-1)}.$$

La fonction f définie par $f(z) = \frac{8z.dz}{(2\alpha^2-1)z^4+2(2\alpha^2+1)z^2+(2\alpha^2-1)}$ possède quatre pôles simples:

$z_0 = i\sqrt{\frac{\alpha\sqrt{2}-1}{\alpha\sqrt{2}+1}}, z_1 = -z_0,\ z_3 = i\sqrt{\frac{\alpha\sqrt{2}+1}{\alpha\sqrt{2}-1}},\ z_4 = -i\sqrt{\frac{\alpha\sqrt{2}+1}{\alpha\sqrt{2}-1}}$ seulement z_0, z_1 sont à l'intérieur du cercle de rayon 1 centré à l'origine. Appliquons le théorème des résidus;

le résidu de f en $z_0 = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = \frac{1}{\alpha\sqrt{2}}$=le résidu de f en $-z_0$; alors on trouve $\langle S_\alpha \rangle = \frac{\sqrt{2}}{\alpha}$ et c'est clair que $\frac{\sqrt{2}}{\alpha} \to 0$ quand $\alpha \to +\infty$. ■

II - Comme autre application du théorème (4.3.1), on considère le système hamiltonien perturbé suivant:

$$x'(t) = -J\left(H'(x) + p(t, x(t))\right) \tag{VI.4.3}$$

où $H \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $p : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est une fonction continue $T-$périodique en t.

Théorème 4.3.3 *Si les conditions suivantes sont vérifiées:*

(i) $\frac{\langle H'(x), x \rangle}{\|x\|^2} \to +\infty$ *quand* $\|x\| \to +\infty$.

(ii) Il existe $K > 0, M > 0$; *tels que pour tout* $x \in \mathbb{R}^2$ *on a* $\|H'(x)\| \leq K. |H(x)| + M$

(iii) Il existe $C > 0$ *tel que pour tout* $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ *on a* $\|p(t, x)\| \leq C$.

Alors le système (VI.4.3) admet au moins une solution $T-$périodique.

Démonstration. Démontrons que les conditions du théorème (4.3.1) sont satisfaites. Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on déduit que

$$\frac{\langle H'(x), x \rangle}{\|x\|} \leq \frac{|\langle H'(x), x \rangle|}{\|x\|} \leq \frac{\|H'(x)\| . \|x\|}{\|x\|} = \|H'(x)\|,$$

donc $\|H'(x)\|$ et ensuite $|H(x)| \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$ (d'après (i) et (ii)). En utilisant respectivement l'inégalité de Cauchy-Schwartz, les condition (iii) et (ii), on obtient

$$\langle -Jp(t.x), H'(x) \rangle \leq \|-Jp(t.x)\| . \|H'(x)\| \leq C. \|H'(x)\| \leq CK. |H(x)| + C.M.$$

Or il existe $R > 0$, tel que $\|x\| \geq R$ entraine que $|H(x)| \geq CM$. Alors

$$\langle -Jp(t.x), H'(x) \rangle \leq (CK + 1) . |H(x)|$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^2$ avec $\|x\| \geq R$, la condition (i) entraine que pour tout $\alpha > 0$, il existe $\delta(\alpha) > 0$, vérifiant

$$\langle H'(x), x \rangle \geq \left(\alpha^2 + \frac{1}{2}\right) . \|x\|^2 - \delta(\alpha).$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned}\langle H'(x), x\rangle - |\langle p(t.x), x\rangle| &\geq \left(\alpha^2+\frac{1}{2}\right).\|x\|^2-\delta(\alpha)-C.\|x\| \\ &\geq \left(\alpha^2+\frac{1}{2}\right).\|x\|^2-\delta(\alpha)-\frac{C^2+\|x\|^2}{2} \\ &\geq \alpha^2.\|x\|^2-\left(\delta(\alpha)+\frac{C^2}{2}\right).\end{aligned}$$

Il suffit de poser $S_\alpha(u,v)=\alpha^2.(u^2+v^2)$ comme forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ défine positive; on remarque que $\langle S_\alpha\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\,\theta}{\alpha^2}=\frac{1}{\alpha^2}\to 0$, quand $\alpha\to+\infty$. ■

4.4 Une équation différentielle superlinéaire du second ordre avec conditions de Dirichlet homogènes

On considère le problème

$$\begin{cases} x''(t)+g(x(t))=p(t,x(t),x'(t)) \\ x(0)=x(1)=0; \end{cases} \tag{I.4.4}$$

où $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une fonction continue, superlinéaire (i.e. $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=+\infty$), $p:[0,1]\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ est un fonction continue et possède une croissance linéaire par rapport aux deux dernières variables. Pour simplifier le traitement du problème, on peut toujours supposer que $g(x).x\neq 0$, si $x\neq 0$ (si c'était nécessaire, ajouter un terme borné au deux membres de l'équation). On considère la famille de problèmes paramétrés par $\lambda\in[0,1]$

$$\begin{cases} x''(t)+g(x(t))=\lambda.p\left(t,x(t),x'(t)\right) \\ x(0)=x(1)=0; \end{cases}$$

ce problème peut s'écrire comme équation abstraite de la forme

$$Lx=N(x,\lambda)\ \text{ avec } x\in C_0^1([0,1])\ \text{ et } \lambda\in[0,1];$$

où l'espace

$$C_0^1([0,1])=\left\{x\in C^1([0,1]);x(0)=x(1)=0\right\}$$

est muni de la norme usuelle de l'espace $C^1([0,1])$ et

$$Lx=-x'';N(x,\lambda)=g(x(.))-\lambda.p(.,x(.),x'(.)).$$

On remarque que $\ker L = \{0\}$, car le problème $-x'' = 0$, $x(0) = x(1) = 0$ n'admet pas de solutions non triviales. Commençons par l'étude du cas $\lambda = 0$. On a

$$\begin{cases} x''(t) + g(x(t)) = 0 \\ x(0) = x(1) = 0; \end{cases} \tag{II.4.4}$$

multiplions par $x'(t)$ et intégrons membre à membre, on obtient

$$\frac{1}{2}(x'(t))^2 + G(x(t)) = \frac{1}{2}(x'(0))^2 = const. \tag{III.4.4}$$

Cette équation représente la conservation de l'énergie totale $H(x, x') = \frac{1}{2}x'^2 + G(x)$, où $G(x) = \int_0^x g(r)\,dr$ est l'énergie potentielle. Dans le plan de phase $(x, y) = (x, x')$, les niveaux d'énergie de la fonction H sont des courbes fermées qui entourent l'origine. Pour tout $s > 0$, le temps nécessaire pour une solution correspondant au niveau d'énergie $\frac{s^2}{2}$, pour tourner dans le plan de phase en partant d'un point d'abcisse x_0 jusqu'au point d'abcisse x_1 est donné par

$$\tau(s; x_0, x_1) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dr}{\sqrt{s^2 - 2G(r)}}.$$

On pose $x'(0) = s$ et on définit les applications temps (voir [3]).

$\tau_+(s)$ est le temps nécessaire pour une solution (x, y) du système plan $x' = y, y' = -g(x)$ pour tourner du point $(0, s)$, au point $(0, -s)$ en rencontrant le demi-plan $x > 0$ une seule fois.

$\tau_-(s)$ est le temps nécessaire pour une solution (x, y) du système plan $x' = y, y' = -g(x)$ pour tourner du point $(0, -s)$, au point $(0, s)$ en rencontrant le demi- plan $x < 0$ une seule fois.

Si on prend $y(t) = x'(t) = 0$, l'équation (III.4.4) ($\Leftrightarrow G(u) = \frac{1}{2}.s^2$) admet deux solutions $m_-(s) < 0, m_+(s) > 0$ et comme $\frac{1}{2}.(-s)^2 = \frac{1}{2}.s^2$, alors $m_\mp(-s) = m_\mp(s)$. D'après ce qui précède on peut citer les tableaux de variation d'une solution x du problème (II.4.4) sur les intervalles $[0, \tau_-(s)], [0, \tau_+(s)]$ avec $s > 0$;

t	$0 \qquad \mu_0 \qquad \tau_-(s)$
$x'(t)$	$-s \quad - \quad 0 \quad + \quad s$
$x(t)$	$0 \searrow m_-(s) \nearrow 0$

t	$0 \qquad \mu_1 \qquad \tau_+(s)$
$x'(t)$	$s \quad + \quad 0 \quad - - s$
$x(t)$	$0 \nearrow m_+(s) \searrow 0$

pour $m_-(s) < x(t) < m_+(s)$, on a $s^2 - 2G(x(t)) > 0$; dans ce cas (III.4.4) implique $\frac{x'(t)}{\sqrt{s^2-2G(x(t))}} = 1$ d'où $\frac{d\,x(t)}{\sqrt{s^2-2G(x(t))}} = dt$, alors $t_0 = \int_0^{x(t_0)} \frac{du}{\sqrt{s^2-2G(u)}}$; il en résulte que

$$\tau_-(s) = 2.\int_{m_-(s)}^{0} \frac{du}{\sqrt{s^2-2G(u)}} \quad \text{et} \quad \tau_+(s) = 2.\int_0^{m_+(s)} \frac{du}{\sqrt{s^2-2G(u)}};$$

on remarque que $\tau_\pm(-s) = \tau_\pm(s)$ et $\tau_\pm(s) \to 0$ quand $s \to \infty$.

Lemme 4.4.1 *La solution $x(.,s)$ du problème de Cauchy;*

$$\begin{cases} x''(t) + g(x(t)) = 0 \\ x(0) = 0, \ x'(0) = s \end{cases} \tag{VI.4.4}$$

est solution de (II.4.4) si et seulement s'il existe deux entiers m, n tels que

$$|m-n| \leq 1 \ \textit{et} \ m.\tau_-(s) + n.\tau_+(s) = 1.$$

Démonstration. Soit $H = \{0, t_1, t_2, .., t_k, P\}$ l'ensemble des zéros de la solution $x(.,s)$ tel que $0 < t_1 < t_2 < .... < t_k < P \leq 1$; alors on a

$$P = \tau_+(s) + \tau_-(s) + \tau_+(s) + ...(k+1 \text{ termes});$$

on distingue les deux cas suivants

1. k impair : $P = n(\tau_+(s) + \tau_-(s))$ avec $n = \frac{k+1}{2}$,
2. k pair : $P = m.\tau_-(s) + n.\tau_+(s)$ avec $|m-n| = 1$ et $m+n = k+1$.

$x(.,s)$ est une solution du problème (II.4.4) signifie que $x(1,s) = 0$ (i.e. $P = 1$); alors pour que ceci soit vérifiée, il faut et il suffit qu'il existe deux entiers m, n, tels que $|m-n| \leq 1$ et $1 = m.\tau_-(s) + n.\tau_+(s)$. ∎

Soit l'ensemble

$$S = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}_+^2;\ m.u + n.v = 1 \text{ où } (m,n) \in \mathbb{N}^2 \text{ avec } |m-n| \leq 1 \right\};$$

d'après le lemme précédent, $x(.,s)$ est solution du problème (II.4.4) si et seulement si $(\tau_-(s), \tau_+(s)) \in S$.

On définit l'ouvert borné dans $\mathbb{R}^2$

$$O_s = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2; v^2 + 2.G(u) < s^2\right\}$$

et l'ouvert borné correspondant dans l'espace $C_0^1([0,1])$

$$\Omega_s = \left\{u \in C_0^1([0,1]); (u'(t))^2 + 2.G(u(t)) < s^2 \text{ pour tout } t \in [0,1]\right\}.$$

On remarque que

$$u \in \Omega_s \Leftrightarrow (u(t), u'(t)) \in O_s \text{ pour tout } t \in [0,1].$$

Il en résulte que, pour tout $s \neq 0$ tel que $((\tau_-(s), \tau_+(s))) \notin S$, l'équation $x''(t)+g(x(t)) = 0$ n'admet pas des solutions sur la frontière de Ω_s

$$\partial\Omega_s = \left\{u \in C_0^1([0,1]); (u'(t))^2 + 2.G(u(t)) = s^2 \text{ pour tout } t \in [0,1]\right\};$$

donc

$$D_L(L - N(.,0), \Omega_s) = D_I\left(I - L^{-1}N(.,0), \Omega_s\right);$$

est bien défini et afin de calculer cette valeur, rappelons les résultats suivants:

Lemme 4.4.2 *Soit $s > 0$ tel que,$(\tau_-(s), \tau_+(s)) \notin S$. Alors*

$$D_L(L - N(.,0), \Omega_s) = \deg(U,]-s, s[, 0)$$

telle que $U :]-s, s[\to \mathbb{R}$ est l'application définie par $U(\beta) = x(1,\beta)$ avec $x(.,\beta)$ est la solution du problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} w' = f(t,w) \\ w(0) = (0,\beta) \end{cases}$$

où $w = (x, x')$ et $f(t,w) = (x', -g(x))$.

Ce lemme est une conséquence d'un théorème de dualité du à Krasnosel'skii. Ce genre des théorèmes permet de calculer le degré associé à une équation similaire à la notre, à partir du degré d'une fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, pour laquelle le calcul du degré est beaucoup plus simple. Soit l'application $W : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $W(s) = x(1,s) + s$, où $x(1,s)$ est la solution unique du problème de Cauchy (VI.4.4).

On dit que $\Omega_s \subset C_0^1([0,1])$ et $M \subset \mathbb{R}$ ont un noyau commun par rapport au problème (II.4.4), s'il n'y a pas de point fixe de $I - L^{-1}N(.,0)$ sur $\partial\Omega_s$ et de W sur ∂M et si pour toute solution x du problème (II.4.4), $x \in \Omega_s$ si et seulement si $x(0) \in M$.

Pour plus de détail, il suffit de se référer aux ([23], [19], [39]).

Lemme 4.4.3 *Pour tout $s \in \mathbb{R}$ tel que $(\tau_-(s), \tau_+(s))$ appartient à la composante connexe non bornée, contenant la diagonale, on a*

$$\deg(U,]-s, s[, 0) = 1,$$

dans les cas où $(\tau_-(s), \tau_+(s))$ appartiennent aux composantes connexes bornées contenant la diagonale; sa valeur est alternativement $-1, +1$ dés qu'on se rapproche de l'origine et sur toutes les autres composantes

$$\deg(U,]-s, s[, 0) = 0.$$

Démonstration. L'application $s \to \deg(U,]-s, s[, 0)$ est constante, lorsque $(\tau_-(s), \tau_+(s))$ varie dans une composante connexe de $\mathbb{R}^2 \diagdown S$; il suffit donc d'appliquer cette remarque à chacune des composantes connexes du plan limitée par les demi-droites ou les segments de droite définis par les équations suivantes: $mx + ny = 1$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$, $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ et $|m - n| \leq 1$

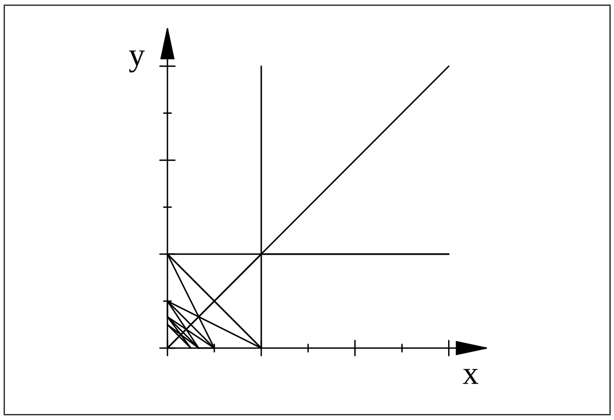


Fig.2 Composantes connexes

■

Conclusion 4.4.1 *Si on suppose pour simplifier que la fonction g est impaire; on aura*

$$m_-(s) = -m_+(s) \;\; et \;\; \tau_-(s) = \tau_+(s),$$

et en vertu des lemmes (4.4.2) et (4.4.3), on obtiendra immediatement

$$D_L(L - N(.,0), \Omega_s) = (-1)^n$$

où n est l'entier, tel que $\frac{1}{n+1} < \tau_-(s) < \frac{1}{n}$.

Lemme 4.4.4 *Soit $0 < s_1 < s_2$, tels que $(\tau_-(s_1), \tau_+(s_1)) \notin S$ et $(\tau_-(s_2), \tau_+(s_2)) \notin S$. Alors*

$$D_L\left(L - N\ (.,0), \Omega_{s_1}^{s_2}\right) = D_L(L - N\ (.,0), \Omega_{s_2}) - D_L(L - N\ (.,0), \Omega_{s_1});$$

où $\Omega_{s_1}^{s_2} = \left\{u \in C_0^1([0,1]); s_1^2 < (u'(t))^2 + 2.G(u(t)) < s_2^2\right\}$.

Démonstration. Il suffit de prendre $\Omega_{s_2} = \Omega_{s_1} \cup \Omega_{s_1}^{s_2}$ puis l'utilisation de l'axiome d'exision-additivité. ■

Introduisons la fonctionnelle continue $\varphi : C_0^1([0,1]) \times [0,1] \to \mathbb{R}_+$ définie par;

$$\varphi(x,\lambda) = \left|\frac{1}{\pi}\int_0^1 \left[x'^2(t) + x(t).(g(x(t)) - \lambda.p(t,x(t),x'(t)))\right]\delta(x(t),x'(t))\,dt\right| \quad \text{(V.4.4)}$$

avec $\delta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$, $\delta(x,y) = \min\left(1, \frac{1}{x^2+y^2}\right)$. Par conséquent, si (x,λ) est une solution du problème

$$\begin{cases} x''(t) + g(x(t)) = \lambda.p(t,x(t),x'(t)) \\ x \in C_0^1([0,1]), \end{cases}$$

vérifiant $x'^2(t) + x^2(t) \geq 1$. Alors on peut écrire

$$\begin{aligned} \varphi(x,\lambda) &= \left|\frac{1}{\pi}\int_0^1 \left[x'^2(t) + x(t).(-x''(t))\right]\frac{1}{x'^2(t)+x^2(t)}dt\right| \\ &= \left|\frac{1}{\pi}\int_0^1 -\left(\frac{x'(t)}{x(t)}\right)'.\frac{1}{1+\left(\frac{x'(t)}{x(t)}\right)^2}dt\right| \\ &= \left|\frac{1}{\pi}\int_0^1 -d\left(\arctan\left(\frac{x'(t)}{x(t)}\right)\right)\right|. \end{aligned}$$

Supposons que $\{t_0 = 0, t_1, t_2, .., t_{n-1}, t_n = 1\}$ soit l'ensmble de zéros de la solution x tel que $0 < t_1 < t_2 < ... < t_{n-1} < 1$; alors pour deux zéros consécutifs t_i, t_{i+1} on distingue les deux cas suivants:

t	$t_i \quad \mu_0 \quad t_{i+1}$
$x\prime(t)$	$+ \quad 0 \quad -$
$x(t)$	$0 \nearrow x(\mu_0) \searrow 0$
$x(t) > 0$ et $x'(t_{i+1}) < 0 < x\prime(t_i)$	

t	$t_i \quad \mu_0 \quad t_{i+1}$
$x\prime(t)$	$- \quad 0 \quad +$
$x(t)$	$0 \searrow x(\mu_0) \nearrow 0$
$x(t) < 0$ et $x'(t_{i+1}) > 0 > x'(t_i)$	

En vertu de l'hypothèse $x'^2(t) + x^2(t) \geq 1$, il est clair que si $x(t) = 0$ alors $x'(t) \neq 0$. Dans les deux cas on trouve:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\pi} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{x'^2(t) - x(t).x''(t)}{x'^2(t) + x^2(t)} dt \right| &= \left| \frac{1}{\pi}. \left[-\arctan(\frac{x'(t)}{x(t)}) \right]_{t_i}^{t_{i+1}} \right| \\ &= \left| \frac{1}{\pi}.(-1) \left(-\frac{\pi}{2} - (+\frac{\pi}{2}) \right) \right| = 1; \end{aligned}$$

qui nous permet de déduire que

$$\varphi(x, \lambda) = \left| \frac{1}{\pi}. \sum_{i=0}^{i=n} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{x'^2(t) - x(t).x''(t)}{x'^2(t) + x^2(t)} dt \right| = n,$$

i.e. si $\int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{x'^2(t) - x(t).x''(t)}{x'^2(t)+x^2(t)} dt > 0$ quand $i = 0, 1, 2....n-1$ on aura; $\varphi(x, \lambda) + 1 =$ nombre des zéros de la solution x.

Théorème 4.4.1 *([29]) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction impaire, continue et superlinéaire; $p : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ continue et possédant une croissance linéaire par rapport aux deux dernières variables. Alors il existe $k_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $j > k_0$ le problème (I.4.4) admet au moins une solutions x_j, ayant exactement $j + 1$ zéros dans l'intervalle $[0, 1]$; de plus $\|x_j\| \to +\infty$ quand $j \to +\infty$.*

Pour prouver ce théorème, on utilisera le corollaire (3.6.1) et les deux propositions suivantes, qui représentent des propriétes pour la fonctionelle φ ainsi définie; et sur lesquelles s'appuit la preuve du théorème. Soit

$$\Sigma = \left\{ (v, \lambda) \in C_0^1([0, 1]) \times [0, 1]; Lv = N(v, \lambda) \right\},$$

où L et N sont définis au début de cette section.

4.4.1 Proposition (oscillations rapides pour les grandes solutions)

Proposition 4.4.1 *(voir [3]) Il existe une constante $c > 0$, telle que pour tout $\alpha > 0$, il existe $D(\alpha) \geq 1$ tel que*

$$\varphi(v, \lambda) \geq c.\alpha$$

quelque soit $(v, \lambda) \in \Sigma$ vérifiant la condition $v'^2(t) + v^2(t) \geq D^2(\alpha)$, pour tout $t \in [0, 1]$.

Démonstration. D'après les hypothèses sur les deux fonctions g et p, on déduit que

$$y^2 + x.(g(x) - \lambda.p(t, x, y)) \to +\infty, \text{ quand } x^2 + y^2 \to +\infty$$

uniformément par rapport à $t \in [0, 1]$ et $\lambda \in [0, 1]$. Alors pour $\alpha > 0$, il existe $D(\alpha) \geq 1$, tels que pour tout $(v, \lambda) \in \Sigma$ vérifiant $v'^2(t) + v^2(t) \geq D^2(\alpha)$, on a

$$v'^2(t) + v(t).\left(g(v(t)) - \lambda.p\left(t, v(t), v'(t)\right)\right) \geq \alpha;$$

ce qui entraine

$$\varphi(v, \lambda) \geq \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\alpha}{v'^2(t) + v^2(t)} dt;$$

et comme $v'^2(t) + v^2(t) \geq D^2(\alpha) \geq 1$ implique $0 < \frac{1}{v'^2(t)+v^2(t)} \leq 1$, il suffit donc de prendre $\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{1}{v'^2(t)+v^2(t)} dt = c.$ ■

4.4.2 Proposition (propriété élastique)

Proposition 4.4.2 *([3]) Pour tout $r_1 > 0$, il existe $r_2 > r_1$ tel que si $(v, \lambda) \in \Sigma$, on a*

$$\|v\| \geq r_2 \textit{ implique que } \min_{t \in [0,1]} \left(v'^2(t) + v^2(t)\right) \geq r_1^2.$$

Démonstration. Revenons à la démonstration du théorème (4.4.1). Pour $r_1 \geq 1$, il existe $R > r_1$ tel que pour tout $(v, \lambda) \in \Sigma$ qui vérifie $\|v\| \geq R$; on aura $(v'^2(t) + v^2(t)) \geq r_1^2 \geq 1$ et alors $\varphi(v, \lambda) \in \mathbb{N}$.

Soit un entier $k_0 \geq \sup\{\varphi(v, \lambda); (v, \lambda) \in \Sigma \text{ et } \|v\| \leq R\}$. D'après les propositions (4.4.1) et (4.4.2) pour $\alpha > 0$ donné; on peut trouver $R(\alpha) > D(\alpha) \geq 1$, tel que pour toute $(v, \lambda) \in \Sigma$ vérifiant $\|v\| \geq R(\alpha)$ ($\Longrightarrow \min_{t \in [0,1]} \left(v'^2(t) + v^2(t)\right) \geq r_1^2$), nous avons $\varphi(v, \lambda) \geq c.\alpha$ et par suite

$$\varphi(v, \lambda) \to +\infty \text{ quand } \|v\| \to \infty.$$

En particulier, si $(v,\lambda) \in \Sigma$ et $\varphi(v,\lambda) = n \in \mathbb{N}$ avec $n > k_0$; alors il existe $r_n > 0$ tel que $\|v\| \leq r_n$; par conséquent

$$\varphi^{-1}(n) \cap \Sigma \text{ est borné.}$$

D'après le dernier résultat l'ensemble,

$$\begin{aligned} \Sigma_0^k &= \left(\varphi^{-1}(k)\right)_0 \cap \Sigma_0 \\ &= \left\{(v,0) \in C_0^1([0,1]) \times \{0\}\, ;\, Lv = N(v,0) \text{ et } \varphi(v,0) = k\right\} \end{aligned}$$

est borné. Soit Ω^k un ouvert borné de $C_0^1([0,1])$ qui contient Σ_0^k et pas d'autre partie de Σ_0. Compte tenu du calcul du degré montionné si-dessus on peut démontrer que

$$D_L\left(L - N(.,0), \Omega^k\right) = 2(-1)^k \neq 0,$$

ce qui montre que toute les conditions du corollaire (3.6.1) sont satisfaites; alors le problème $L - N(.,1) = 0$ admet pour tout $j > k_0$ au moins une solution $v_j \in C_0^1([0,1])$ verifiant $\varphi(v_j, 1) = j$. ■

4.5 Solutions périodiques d'équations différentielles du second ordre à nonlinéarités singulières

4.5.1 Introduction

Les équations différentielles de second ordre nonlinéaires, ou les systèmes avec des forces de rappel singulières, interviennent naturellement dans la description des particules soumis aux forces de type Newtoniennes ou des forces de rappel causées par des gaz comprimés. À titre d'exemple l'équation différentielle

$$x'' + c.x' + \frac{x}{1-x} = e(t),$$

décrit le mouvement d'un piston, dans un cylindre fermé à l'une de ses éxtrémités et soumis à une force éxtérieure $e(t)$, $T-$périodique et à valeur moyenne nulle, la force de rappel d'un gaz parfait et un frottement de viscosité.

4.5.2 Cas d'une force de rappel de type attractif

Dans cette section, on considère l'équation différentielle (voir [29])

$$x'' + f(x).x' + g(x) = h(t), \tag{I.4.5}$$

où $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ ($g(x)$ représente la force de rappel) et $h : [0, T] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues. La méthode des sous et sur-solutions fournit un théorème d'existence qui va être décrit plus tard, pour les solutions $T-$périodiques de l'équation (I.4.5), qui peut être prouvé par des arguments du degré topologique.

4.5.3 Sous-solution et sur-solution

Définition 4.5.1 *([9]) Soit α et β deux fonctions de l'espace $C^2([0, T])$. On dit que α est une **sous-solution** du problème $T-$périodique associé à l'équation (I.4.5) si pour tout $t \in [0, T]$ on a*

$$\alpha''(t) + f(\alpha(t))\alpha'(t) + g(\alpha(t)) \geq h(t) \text{ et } \alpha(0) = \alpha(T), \ \alpha'(0) \geq \alpha'(T).$$

*On dit que β est une **sur-solution** du problème $T-$périodique associé à l'équation (I.4.5) si pour tout $t \in [0, T]$ on a*

$$\beta''(t) + f(\beta(t))\beta'(t) + g(\beta(t)) \leq h(t) \text{ et } \beta(0) = \beta(T) \ , \ \beta'(0) \leq \beta'(T).$$

Lemme 4.5.1 *Soit α et β deux fonctions $T-$périodiques de classe C^2 telles que $\alpha \leq \beta$ et pour tout $t \in [0, T]$*

$$\alpha''(t) + f(\alpha(t))\alpha'(t) + g(\alpha(t)) \geq h(t) \text{ et } \beta''(t) + f(\beta(t))\beta'(t) + g(\beta(t)) \leq h(t).$$

Alors l'équation (I.4.5) admet au moins une solution $T-$périodique u vérifiant

$$\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t) \text{ pour tout } t \in [0, T].$$

α et β sont appelées respectivement sous- solution et sur-solution du problème $T-$périodique associé à l'équation (I.4.5).

Lemme 4.5.2 *Pour tout* $c \in \mathbb{R}$, *et toute fonction* $e : [0,T] \to \mathbb{R}$ *telle que* $\overline{e} = \frac{1}{T}.\int_0^T e(t)\,.dt = 0$, *l'équation*

$$z''(t) + f(c + z(t))\,.z'(t) = e(t)\,,$$

admet au moins une solution $T-$*périodique* u *telle que;*

$$\overline{u} = 0 \ \ et \ \ \|u\|_\infty \leq K.\,\|e\|_{L_2}\,,$$

où K *est indépendant de* c *et de* u.

Démonstration. Considérons l'homotopie

$$\begin{cases} u''(t) + \lambda f(c + u(t))\,.u'(t) - \lambda e(t) = 0 \\ u(0) = u(T) \ \text{ et } u'(0) = u'(T)\,,\ \lambda \in [0,1]\,. \end{cases} \tag{II.4.5}$$

Pour $\lambda = 0$ le problème donné admet une solution unique u telle que $u(t) = d$ (d constante) et comme $\overline{u} = 0$; alors u est identiquement nulle sur $[0,T]$. Notons par G la fonction de Green associée au problème (II.4.5); soit le sous-espace

$$\hat{C}^{\,1}([0,T]) = \left\{u \in C^{\,1}([0,T])\,; \overline{u} = 0\right\}$$

et l'opérateur

$$P_\lambda : \hat{C}^{\,1}([0,T]) \to \hat{C}^{\,1}([0,T])\,; P_\lambda : u \mapsto P_\lambda u$$

défini par

$$(P_\lambda u)(t) = \lambda \int_0^T G(t,s)\,.\left(f(c + u(s))\,.u'(s) - e(s)\right) ds.$$

Estimons a priori l'ensemble des points fixes de P_λ dans $\hat{C}^{\,1}([0,T])$; multiplions les deux membres de l'équation par u et intégrons; on obtient

$$\|u'\|_{L_2}^2 = \lambda \int_0^T e(t)\,.u(t)\,dt;$$

en utilisant les inégalités de Hôlder et de Sobolev on trouve

$$\|u'\|_{L_2}^2 \leq \|e\|_{L_1}\,.\,\|u\|_\infty \leq \|e\|_{L_1}\,.\sqrt{\frac{T}{12}}.\,\|u'\|_{L_2}\,;$$

alors

$$\|u'\|_{L_2} \leq \sqrt{\frac{T}{12}}.\,\|e\|_{L_1} \ \text{ et }.\,\|u\|_\infty \leq \frac{T}{12}.\,\|e\|_{L_1} \leq \frac{T}{12}.\sqrt{T}.\,\|e\|_{L_2}\,.$$

Par suite la propriété d'invariance par homotopie du degrés entraine que le problème (II.4.5), admet une solution $u \in \hat{C}^{\,1}([0,T])$ pour $\lambda = 1$. ∎

4.5.4 Théorème (de Habets-Sanchez)

Théorème 4.5.1 *Supposons que la fonction* $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *satisfait aux conditions suivantes:*

(i) $\lim_{x \to 0^+} g(x) = +\infty.$

(ii) $\limsup_{x \to +\infty} \left[g(x) - \overline{h}\right] < 0.$

Alors l'équation (I.4.5) admet au moins une solution positive u *(i.e* $u(t) > 0$ *pour tout* $t \in [0, T]$*). Ce théorème a été prouvé par Lazer-Solimini (voir [24]) dans le cas où* $f = 0$.

Démonstration. Comme h est continue sur $[0, T]$ (compact), alors elle atteint ses bornes $m = \min\limits_{t\in[0,T]} h(t)$, $M = \max\limits_{t\in[0,T]} h(t)$. D'après l'hypothèse (i) il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$0 < x \leq \alpha \implies g(x) \geq M \geq h(t)$$

pour tout $t \in [0, T]$. En particulier $g(\alpha) \geq h(t)$ pour tout $t \in [0, T]$; donc α est une sous-solution du problème $T-$périodique associé à l'équation (I.4.5). L'hypothèse (ii) implique qu'il existe $r > 0$, tel que pour tout $x \geq r$ on a $g(x) \leq \overline{h}$. Soit la fonction $\hat{h}$ telle que $\hat{h}(t) = h(t) - \overline{h}$, il est clair que $\overline{\hat{h}} = 0$. Choisissons $c > 0$ suffisament grand, tel que pour tout $t \in [0, T], c + u(t) \geq \max(r, \alpha)$; où u est une solution de l'équation

$$z''(t) + f(c + z(t)).z'(t) = \hat{h}(t).$$

En posant $\beta(t) = c + u(t)$,on obtient;

$$\begin{aligned} \beta''(t) + f(\beta(t))\beta'(t) + g(\beta(t)) &= u''(t) + f(c + u(t)).u'(t) + g(\beta(t)) \\ &= h(t) - \overline{h} + g(\beta(t)) \leq h(t) - \overline{h} + \overline{h} = h(t). \end{aligned}$$

Alors β est une sur-solution du problème. D'après le lemme (4.5.1), on obtient l'existence d'une solution $T-$périodique positive x telle que $\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t)$ pour l'équation (I.4.5).

■

Corollaire 4.5.1 *Soit* $g :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ *une fonction continue telle que:*

1. $\lim_{x \to 0^+} g(x) = +\infty.$

2. $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0.$

Alors l'équation (I.4.5) admet au moins une solution $T-$périodique positive si et seulement si $\overline{h} > 0$.

Démonstration. ($\Longleftarrow$) Si $\overline{h} > 0$, on trouve $\limsup_{x \to +\infty} \left[g(x) - \overline{h}\right] < 0$ et l'existence de la solution est assurée par le théorème (4.5.1).

($\Longrightarrow$) supposons que u est une solution $T-$périodique positive de (I.4.5); alors pour tout $t \in [0, T]$;

$$u''(t) + f(u(t)).u'(t) + g(u(t)) = h(t);$$

en intègrant de 0 à T les deux membres, on aboutit à

$$[u'(t)]_0^T + [F(u)]_{u(0)}^{u(T)} + \int_0^T g(u(t))\,dt = T.\overline{h},$$

comme $[u'(t)]_0^T = [F(u)]_{u(0)}^{u(T)} = 0$ (car $u(0) - u(T) = u'(0) - u'(T) = 0$) et $g(x) > 0$; alors $\overline{h} = \frac{1}{T}\int_0^T g(u(t))\,dt > 0$. ■

Cas particuliers de l'équation (I.4.5)

1. L'équation de la forme

$$x''(t) + \frac{1}{x^\alpha(t)} = h(t)$$

où $\alpha > 0$; se ramène à l'équation (I.4.5) en prenant pour tout $x \in]0, +\infty[$; $f(x) = 0$, $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ et vérifie toutes les conditions du corollaire (4.5.1); alors elle admet au moins une solution $T-$périodique et positive u, si $\overline{h} > 0$.

2. Soit l'équation differentielle:

$$y''(t) + f_1(y(t)).y'(t) + \ell.\frac{y(t)}{1 - y(t)} = e(t); \tag{III.4.5}$$

où la fonction $f_1 :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est continue, la fonction $e : [0, T] \to \mathbb{R}$ est continue et à valeur moyenne nulle. Utilisons la variable auxiliaire $x = 1 - y$, (III.4.5) prend alors la forme suivante

$$-x''(t) + f_1(1 - x(t)).(-x'(t)) + \ell.\frac{1 - x(t)}{x(t)} = e(t),$$

qui est à son tour équivalente à

$$x''(t) + f_1(1 - x(t)).x'(t) - \frac{\ell}{x(t)} = -\ell - e(t). \tag{IV.4.5}$$

En posant $f(x) = f_1(1 - x(t))$, $g(x) = -\frac{\ell}{x}$ et $h(t) = -\ell - e(t)$ on obtient,

$$x''(t) + f(x(t))\,x'(t) + g(x(t)) = h(t).$$

Il est clair que pour $\ell < 0$ toutes les conditions du corollaire (4.5.1) sont satisfaites, et nous avons en outre $\overline{h} = -\ell > 0$, alors (IV.4.5) admet au moins une solution $T-$périodique et positive u. Comme $u(t) = 1 - x(t) > 0$, alors x est une solution $T-$périodique de (III.4.5) avec $x(t) < 1$ pour tout $t \in [0, T]$.

4.5.5 Cas d'une force de rappel de type répulsif

Dans ce cas, on considère l'équation de la forme

$$x''(t) + cx'(t) - g(x(t)) = h(t), \tag{V.4.5}$$

où a est une constante réelle, $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et $h : [0, T] \to \mathbb{R}$ appartient à $L^1([0, T])$. Pour démontrer l'existence d'une solution $T-$périodique positive de (V.4.5), introduisons d'abord le lemme suivant.

Lemme 4.5.3 *Soit R, r deux réels positifs tels que $R > r$. Si les conditions suivantes sont satisfaites:*

(i) Pour tout $\lambda \in]0, 1]$, chaque solution $T-$périodique positive possible u, de l'équation parametrée

$$x''(t) + cx'(t) - \lambda g(x(t)) = \lambda h(t), \tag{VI.4.5}$$

vérifie $x(t) \in]r, R[$ pour tout $t \in [0, T]$.

(ii) Toute solution positive possible $v \in \mathbb{R}$ de l'équation $g(x) + \overline{h} = 0$, satisfait $v \in]r, R[$.

(iii) $\left[g(r) + \overline{h}\right]\left[g(R) + \overline{h}\right] < 0$.

Alors l'équation (V.4.5) admet au moins une solution x; telle que $x(t) \in [r, R]$ pour tout $t \in [0, T]$.

Démonstration. Soit l'opérateur $L : D(L) \subset X = C^1([0,T]) \to L_1([0,T])$ défini par

$$Lx = x'' + cx';$$

avec $D(L) = \{x \in C^1([0,T]); x'' \in L^1([0,T])\}$. En résolvant le problème

$$\begin{cases} x'' + cx' = 0 \\ x(0) = x(T) \text{ et } x'(0) = x'(T); \end{cases}$$

on déduit que

$$\ker L = \{x \in D(L);\ x(t) = x(0) \text{ pour tout } t \in [0,T]\} \approx \mathbb{R}.$$

Pour $e \in R(L)$ il existe $x \in D(L)$, tel que $x'' + c.x' = e$ et par intégration sur $[0,T]$, on trouve $\overline{e} = 0$. La réciproque est vraie d'après le lemme (4.5.2); d'où

$$\operatorname{Im}(L) = \left\{e \in L^1([0,T]);\ \overline{e} = 0\right\};$$

il est clair que pour tout $L^1([0,T]) = R(L) \oplus \mathbb{R}$ (car toute $h \in L^1([0,T])$ se décompose de façon unique) en somme d'une fonction $\hat{h}$ à valeur moyenne nulle, et d'une fonction constante $\overline{h}$; on conclut que L est un opérateur de Fredholm d'indice 0.

Soit la projection $Q : L^1([0,T]) \to L^1([0,T])$ définie par $Qu = \overline{u}$. D'autre part, on peut démontrer que l'opérateur

$$N : \Omega \subset C^1([0,T]) \to L^1([0,T]); (Nx)(.) = g(x(.)) + h(.)$$

est $L-$compact sur $\overline{\Omega}$, où Ω est l'ouvert borné suivant,

$$\Omega = \left\{x \in C^1([0,T]); r < x(t) < R \text{ pour tout } t \in [0,T]\ \right\}.$$

Le problème (VI.4.5) est alors équivalent à l'équation abstraite,

$$Lx = \lambda.Nx$$

Pour résoudre cette dernière équation, on utilise le théorème de continuation (3.4.6). De l'hypothèse (i) on déduit que

$$Lx = \lambda.Nx \text{ implique que } x \in \Omega,$$

ce qui est équivalent à dire que, si $x \in (D(L) \diagdown \ker L) \cap \partial\Omega$ et $\lambda \in]0,1[$ on aura nécessairement $Lx \neq \lambda.Nx$. Soit $x \in \ker L \cap \partial\Omega$ $(x(t) = r$ où $R)$ pour $x = d \in \{r, R\}$ nous avons

$$w = \frac{1}{T}\int_0^T Nx(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T [g(d) + h(t)]\,dt = g(d) + \overline{h},$$

de l'hypothèse (ii) on déduit que si $g(d) + \overline{h} = 0$, on aura $r < d < R$ qui contredit le fait que $d \in \{r, R\}$ et par suite $Nx \notin \operatorname{Im}(L)$. Pour tout $x \in \ker L \cap \Omega =]r, R[$ (i.e. $x = a$), nous avons

$$QNx = \frac{1}{T}\int_0^T Nx(t)\,dt = g(a) + \overline{h} = \ell(a)$$

où $\ell :]r, R[\to \mathbb{R}$ continue alors;

$$\begin{aligned} \deg(QN \diagup \ker L, \ker L \cap \Omega, 0) &= \deg(\ell,]r, R[, 0) \\ &= \frac{\operatorname{sign}(\ell(R)) - \operatorname{sign}(\ell(r))}{2} = \pm 1 \neq 0 \end{aligned}$$

(car $\ell(r).\ell(R) < 0$). ■

Théorème 4.5.2 *Soit a et b deux réels tels que* $a \in \left]0, \frac{1}{2(T\exp(|c|T))^2}\right[$, $b \geq 0$. *Si la fonction g satisfait aux conditions suivantes:*

(i) Pour tout $x > 0$; $g(x) \geq -ax - b$.

(ii) $\lim_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$.

(iii) $\limsup_{x \to +\infty} \left[g(x) + \overline{h}\right] < 0$.

(iv) $\int_0^1 g(x)\,dx = +\infty$.

Alors l'équation (V.4.5) admet au moins une solution positive $T-$périodique.

Démonstration. Nous allons démontrer que toutes les conditions du lemme (4.5.3) sont satisfaites.

1) De l'hypothèse (i) on remarque que pour tout $x > 0$

$$g(x) + ax + b = |g(x) + ax + b| \geq ||g(x)| - |ax + b|| = ||g(x)| - ax + b|;$$

alors $|g(x)| - ax + b \leq g(x) + ax + b$; ce qui montre que

$$|g(x)| \leq g(x) + 2ax + 2b. \qquad (\acute{N}_1)$$

Si u est une solution de (VI.4.5) pour un certain $\lambda \in]0,1]$ fixé et compte tenu des conditions périodiques sur u on a

$$\frac{1}{T}\int_0^T g(u(t))\,dt + \overline{h} = 0, \tag{$\acute{N}_2$}$$

et

$$\int_0^T |u''(t) + c.u'(t)|\,dt \leq \lambda \int_0^T |g(u(t))|\,dt + \lambda \int_0^T |h(t)|\,dt;$$

en utilisant l'inégalité ($\acute{N}_1$) on aboutit à

$$\begin{aligned}\int_0^T |u''(t) + c.u'(t)|\,dt &\leq \lambda.\left[\int_0^T g(u(t))\,dt + 2.a\int_0^T u(t)\,dt + 2.b.T + \int_0^T |h(t)|\,dt\right]\\ &\leq \lambda.\left[-T.\overline{h} + 2.a\,\|u\|_{L_1} + 2.bT + \int_0^T |h(t)|\,dt\right];\end{aligned}$$

et comme

$$\int_0^T |h(t)|\,dt - T.\overline{h} = \int_0^T [|h(t)| - h(t)]\,dt \leq 2.\int_0^T |h(t)|\,dt;$$

finalement on trouve

$$\|u'' + c.u'\|_{L_1} \leq 2.\lambda\left[a.\|u\|_{L_1} + \|h\|_{L_1} + bT\right]. \tag{VII.4.5}$$

2) Par définition, $\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$ est équivalent à dire que pour tout $A > 0$, il existe $R(A) > 0$, tel que

$$0 < x \leq R(A) \Longrightarrow g(x) \geq A;$$

alors il suffit de choisir $A > 0$ assez grand pour trouver $R_0 > 0$ tel que pour tout $0 < x \leq R_0$ on a

$$g(x) \geq A > 0\ ,\ g(x) + \overline{h} > 0.$$

Par une démarche similaire, on démontre que l'hypothèse (iii) entraine l'existence d'un réel $R_1 > R_0$, tel que

$$g(x) + \overline{h} < 0 \text{ quand } x \geq R_1;$$

si la solution u vérifie $0 < u(t) \leq R_0$ queqlque soit $t \in [0,T]$; on aura $g(u(t)) + \overline{h} > 0$ et alors

$$\frac{1}{T}\int_0^T g(u(t))\,dt + \overline{h} > 0$$

qui est en contradiction avec le resultat $(\acute{N}_2)$; on en déduit qu'il existe $t_0 \in [0,T]$ tel que $u(t_0) > R_0$. Supposons maintenant que $u(t) \geq R_1$ pour tout $t \in [0,T]$, alors $g(u(t)) + \overline{h} < 0$ et par suite

$$\frac{1}{T}\int_0^T g(u(t))\,dt + \overline{h} < 0,$$

un contradiction avec $(\acute{N}_2)$; et donc il existe $t_1 \in [0,T]$ tel que $u(t_1) < R_1$.

3) On pose $u'(t_3) = \int_0^T u'(t)\,dt = 0$ ($t_3 \in [0,T]$). Alors on peut écrire

$$u'(t)\,.\exp(ct) = \int_{t_3}^{t} (u''(s) + c.u'(s))\exp(cs)\,ds,$$

car $(u'(t)\,.\exp(ct))' = (u''(t) + c.u'(t))\exp(ct)$. En utilisant les résultats de la partie 2) de la preuve, on obtient

$$u(t) = u(t_1) + \int_{t_1}^{t} \exp(-c\tau)\left[\int_{t_3}^{\tau} (u''(s) + c.u'(s))\exp(cs)\,ds\right]d\tau,$$

il est clair que si $\mu \in \mathbb{R}$, on a $\exp(\mu s) \leq \exp(|\mu|\,T)$ pour tout $s \in [0,T]$, alors

$$\begin{aligned}\int_{t_3}^{\tau} (u''(s) + c.u'(s))\exp(cs)\,ds &\leq \exp(|c|\,T)\,.\int_0^T |(u''(s) + c.u'(s))|\,ds\\ &= \exp(|c|\,T)\,.\,\|u'' + c.u'\|_{L_1}\end{aligned}$$

et

$$\int_{t_1}^{t} \exp(-c\tau)\,d\tau \leq \exp(|c|\,T)\,.T.$$

Donc

$$\begin{aligned}u(t) &< R_1 + \exp(|\mu|\,T)\,.\,\|u'' + c.u'\|_{L_1}\int_{t_1}^{t}\exp(-c\tau)\,d\tau\\ &\leq R_1 + T.\exp(2\,|c|\,T)\,.\,\|u'' + c.u'\|_{L_1};\end{aligned}$$

et par intègration sur $[0,T]$ on obtient

$$\|u\|_{L_1} < T.R_1 + T^2.\exp(2\,|c|\,T)\,.\,\|u'' + c.u'\|_{L_1}.$$

Combinons ce dernier résultat avec (VII.4.5) on a alors

$$\begin{aligned}\|u'' + c.u'\|_{L_1} &\leq 2.\lambda\left[a.\,\|u\|_{L_1} + \left\|h^-\right\|_{L_1} + bT\right]\\ &< 2\lambda.aT^{\,2}.\exp(2\,|c|\,T)\,.\,\|u'' + c.u'\|_{L_1} + 2.\lambda.\left(aT.R_1 + \left\|h^-\right\|_{L_1} + bT\right)\\ &< 2aT^{\,2}.\exp(2\,|c|\,T)\,.\,\|u'' + c.u'\|_{L_1} + 2.\lambda.\left(aT.R_1 + \left\|h^-\right\|_{L_1} + bT\right).\end{aligned}$$

Après simplification, on aboutit à l'inégalité suivante:

$$\left(1-2.aT^{2}.\exp\left(2\left|c\right|T\right)\right)\left\|u''+c.u'\right\|_{L_1}<2.\lambda.\left(aTR_1+\left\|h^{-}\right\|_{L_1}+bT\right).$$

Par hypothèse on a $a<\left(2T^2.\exp\left(2\left|c\right|T\right)\right)^{-1}$, donc $\left(1-2.aT^{2}.\exp\left(2\left|c\right|T\right)\right)>0$ alors

$$\left\|u''+c.u'\right\|_{L_1}<\lambda.\frac{2\left(aTR_1+\left\|h^{-}\right\|_{L_1}+bT\right)}{1-2.aT^{2}.\exp\left(2\left|c\right|T\right)}=\lambda.R_2,$$

où R_2 ne dépend pas ni de λ ni de u. Utilisons ce résultat pour majorer $\left|u'\left(t\right)\right|$ et $u\left(t\right)$, on a pour tout $t\in\left[0,T\right]$

$$\begin{aligned}\left|u'\left(t\right)\right| &= \left|\exp\left(-ct\right)\int_{t_3}^{t}\left(u''\left(s\right)+c.u'\left(s\right)\right)\exp\left(cs\right)ds\right|\\ &\leq \exp\left(\left|c\right|T\right).\exp\left(\left|c\right|T\right)\left\|u''+c.u'\right\|_{L_1}\\ &< \lambda.\exp\left(2\left|c\right|T\right).R_2 \ =\lambda.R_3.\end{aligned}$$

et

$$u\left(t\right)<R_1+T.\exp\left(2\left|c\right|T\right).\lambda.R_2<R_1+T.\exp\left(2\left|c\right|T\right).R_2=R.$$

4) Multiplions les deux membres de l'équation (VI.4.5) par u' et intégrons de t_0 à t;on obtient

$$\frac{1}{2}\left(u'^2\left(t\right)-u'^2\left(t_0\right)\right)+c\int_{t_0}^{t}u'^2\left(s\right)ds-\lambda\int_{t_0}^{t}g\left(u\left(s\right)\right)u'\left(s\right)ds=\lambda\int_{t_0}^{t}h\left(s\right).u'\left(s\right)ds,$$

ce qui entraine que

$$\lambda\int_{u(t)}^{u(t_0)}g\left(x\right)dx=\frac{1}{2}\left(-u'^2\left(t\right)+u'^2\left(t_0\right)\right)-c\int_{t_0}^{t}u'^2\left(s\right)ds+\lambda\int_{t_0}^{t}h\left(s\right).u'\left(s\right)ds.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\lambda\int_{u(t)}^{u(t_0)}g\left(x\right)dx &\leq \frac{1}{2}\left(u'^2\left(t_0\right)\right)+\left|c\right|\int_{t_0}^{t}u'^2\left(s\right)ds+\lambda.\int_{t_0}^{t}\left|h\left(s\right)\right|.\left|u'\left(s\right)\right|ds\\ &\leq \frac{1}{2}.\lambda^2.R_3^2+\lambda^2.R_3^2.\left|c\right|.T+\lambda^2.R_3.\left\|h\right\|_{L_1}=\lambda^2.R_4;\end{aligned}$$

D'où

$$\int_{u(t)}^{u(t_0)}g\left(x\right)dx\leq\lambda.R_4\leq R_4,$$

où R_4 est une constante qui ne dépend ni de u ni de λ. Soit t tel que $u\left(t\right)<R_0$, alors

$$\int_{u(t)}^{R_0}g\left(x\right)dx+\int_{R_0}^{u(t_0)}g\left(x\right)dx\leq R_4,$$

ce qui implique

$$\int_{u(t)}^{R_0} g(x)\,dx \le R_4 - \int_{R_0}^{u(t_0)} g(x)\,dx \le R_4 + \int_{R_0}^{R} |g(x)|\,dx = R_5, \qquad (\acute{N}_3)$$

(car $u(t_0) < R$). On pose $G(s) = \int_s^{R_0} g(x)\,dx$, par l'hypothèse (iv) on a $\lim\limits_{s\to 0^+} G(s) = +\infty$; alors pour tout $A > 0$, il existe $r(A) > 0$ tel que

$$0 < s \le r(A) \implies G(s) > A;$$

en particulier, on peut choisir $r \in]0, R_0[$, pour $A = R_5$ de manière que $\int_r^{R_0} g(x)\,dx > R_5$. La monotonie de G (ici G est décroissante car nous avons de la partie (2), $g(x) > 0$ pour tout $x \in]0, R_0[$) et le résultat $(\acute{N}_3)$) entraine que $G(u(t)) < G(r)$, et par suite $u(t) > r$ et comme on a démontré que $u(t) < R$; alors la première condition du lemme (4.5.3) est satisfaite. D'une part, remarquons que par construction on a $r < R_0, R > R_1$, c'est à dire $[R_0, R_1] \subset]r, R[$ et d'après la partie (2)

$$g(a) + \overline{h} > 0, \text{ si } 0 < a \le R_0 \text{ et } g(a) + \overline{h} < 0, \text{ si } a \ge R_1,$$

alors toute solution $a \in \mathbb{R}$ de l'équation $g(x) + \overline{h} = 0$, vérifie nécessairement $r < a \le R$. Il suffit de remplacer a par r puis R pour voir que $\left(g(r) + \overline{h}\right)\left(g(R) + \overline{h}\right) < 0$. ■

Corollaire 4.5.2 *Supposons que la fonction* $g :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ *satisfait aux conditions suivantes:*

(i) $\lim_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$.

(ii) $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

(iii) $\int_0^1 g(x)\,dx = +\infty$.

Alors l'équation (V.4.5) admet une solution T-périodique positive si et seulement si, $\overline{h} < 0$.

Démonstration. ($\Longrightarrow$) si u est une solution T-périodique positive de (V.4.5) alors pour tout $t \in [0, T]$, nous aurons

$$u''(t) + c.u'(t) - g(u(t)) = h(t);$$

en intégrant sur $[0, T]$ les deux membres, on obtient

$$-\int_0^T g(u(t))\,dt = \overline{h},$$

u est T-périodique et $g(u(t)) > 0$ alors $\overline{h} < 0$.

($\Longleftarrow$)Supposons $\overline{h} < 0$ et appliquons le théorème (4.5.2); il reste à vérifier que les conditions (i) et (iii). Nous avons pour tout $x > 0$, $g(x) > -ax - b$ car $g(x) > 0$ et $-ax - b < 0$. $\lim_{x \to 0^+} \left(g(x) + \overline{h}\right) = \overline{h} < 0$ alors $\limsup_{x \to 0^+} \left(g(x) + \overline{h}\right) < 0$. ■

Cas particuliers de l'équation (V.4.5)

1) *L'équation de Lazer-Solimini*

$$x''(t) - \frac{1}{(x(t))^\alpha} = h(t), \text{ avec } \alpha > 0$$

est un cas particulier de l'équation (V.4.5) ($c = 0$, $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$) qui satisfait à toutes les conditions du corollaire (4.5.2).

2) *L'équation differentielle de type Forbat*

$$x''(t) + c.x'(t) + k.\frac{x(t)}{1 - x(t)} = e(t), \tag{$\mathcal{L}$}$$

où $e \in L^1([0, T])$ tel que $\overline{e} = 0$. Si on pose $u(t) = 1 - x(t)$ la dernière équation devient

$$u''(t) + c.u'(t) - \frac{k}{u(t)} = -k - e(t), \tag{$\mathcal{L}'$}$$

qui est de type (V.4.5) avec $g(u) = \frac{k}{u}$ et $h(t) = -k - e(t)$ pour $k > 0$ la fonction g, satisfait aux trois conditions du corollaire (4.5.2), en outre $\overline{h} = -k < 0$; donc il en résulte que $(\mathcal{L}')$ admet une solution positive $T-$périodique v, alors l'équation $(\mathcal{L})$ admet $x(t) = 1 - v(t)$ comme solution $T-$périodique, telle que $x(t) < 1$.

4.6 Bifurcation à l'infini et multiplicité de solutions

4.6.1 Points de bifurcation

Soit X et Z deux espaces vectoriels normés, $L : D(L) \subset X \to Z$ opérateur de Fredholm d'indice nul, $N : U \times V \to Z$ opérateur $L-$complètement continue, où U est un ouvert de

X contenant $0, V$ est un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ tel que pour tout $\mu \in V$, on a

$$N(0, \mu) = 0.$$

On définit l'opérateur $F : (D(L) \cap U) \times V \to Z$ par

$$F(x, \mu) = Lx - N(x, \mu);$$

on remarque que l'équation

$$F(x, \mu) = 0, \tag{I.4.6}$$

admet pour tout $\mu \in V$ la solution triviale $x = 0$.

Définition 4.6.1 *[31] Soit $\mu_0 \in V$; on dit que $(0, \mu_0)$ est un point de bifurcation pour l'équation I.4.6, si tout voisinage de $(0, \mu_0)$ dans $U \times V$ contient au moins une solution (x, μ) de cette équation, avec $x \neq 0$. En d'autre terme; s'il existe une suite (x_k, μ_k) de solutions de l'équation (I.4.6) dans $(D(L) \cap U \setminus \{0\}) \times V$ convergeant vers $(0, \mu_0)$, on dit que ce dernier est un point de bifurcation pour cette l'équation voir aussi [35]. Si la suite de solutions (x_k, μ_k) vérifie*

$$\|x_k\| \to +\infty \text{ et } \mu_k \to \mu_0,$$

(∞, μ_0) est dit un point de bifurcation à l'infini (voir aussi [6] ch.10).

4.6.2 Valeurs $L-$caractéristiques d'un opérateur linéaire A et ses multiplicités

Soit $A : X \to Z$ est un opérateur linéaire; $\lambda \in \mathbb{R}$ est dite valeur $L-$caractéristique (réelle) de A si

$$\ker(L - \lambda.A) \neq \{0\}.$$

On note par $\sigma_L(A)$ l'ensemble des valeurs $L-$caractéristiques de A. Si $X = Z$, $L = I$, une valeur $I-$caractéristique de A est une valeur caractéristique dans le sens usuel c'est à dire l'inverse d'une valeur propre de A.

Définition 4.6.2 *Supposons que l'opérateur A est $L-$complètement continue, λ valeur $L-$caractéristique de A et $\mathbb{R} \setminus \sigma_L(A) \neq \varnothing$; la $L-$multiplicité de la valeur λ est l'entier,*

$$m_L(\lambda) = \dim \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \ker\left(I - (\lambda - \alpha)(L - \alpha A)^{-1} A\right)^n,$$

où $\alpha \in \mathbb{R} \diagdown \sigma_L(A)$ arbitraire.

Proposition 4.6.1 *Sous les conditions de la définition précédente, si λ est une valeur $L-$caractéristique de A, alors on a*

$$m_L(\lambda) = \dim \ker (L - \lambda.A) \iff A(\ker(L - \lambda.A)) \cap \operatorname{Im}(L - \lambda.A) = \{0\}$$

4.6.3 Linéarisation et existence de points de bifurcation

On suppose en outre que sur $U \times V$

$$N(x, \mu) = \mu.Ax + R(x, \mu), \tag{II.4.6}$$

où $A : X \to Z$ est un opérateur linéaire $L-$complètement continue; tel que $V \diagdown \sigma_L(A) \neq \varnothing$ et $R : U \times V \to Z$ est une application $L-$complètement continue vérifiant,

$$\lim_{\|x\| \to 0} \frac{\|R(x, \mu)\|}{\|x\|} = 0 \tag{III.4.6}$$

uniformément pour μ borné.

Proposition 4.6.2 *Si $(0, \mu_0)$ est un point de bifurcation pour l'équation (I.4.6) avec $N(x, \mu)$ donné par (II.4.6); alors $\mu_0 \in \sigma_L(A)$. La condition de cette proposition n'est pas suffisante.*

En effet si on considère $X = Z = \mathbb{R}^2$, $L = A = I$ et $R(x_1, x_2) = \binom{-x_2^3}{x_1^3}$, il est clair que $(L - 1.A)(x) = x - x = 0$ pour tout $x \in X$, alors 1 est une valeur caractéristique de A, par contre $((0.0), 1)$ n'est pas un point de birfucation car l'équation $F(x, \mu) = x - \mu x - R(x, \mu) = \binom{(1-\mu)x_1 + x_2^3}{(1-\mu)x_2 - x_1^3} = 0$ n'admet que la solution triviale.

Théorème 4.6.1 *Si μ_0 est une valeur L-caractéristique de A, dont la $L-$multiplicité est impaire; alors $(0, \mu_0)$ est un point de bifurcation pour l'équation (I.4.6). En plus, il existe $r_0 > 0$ tel que pour tout $0 < r \leq r_0$, cette équation admet au moins une solution (x_r, μ_r) telle que $|x_r| = r$ et $\mu_r \to \mu_0$ quand $r \to 0$.*

Démonstration. (Voir [31]) ■

Théorème 4.6.2 *Supposons à présent que*

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} \frac{\|R(x,\mu)\|}{\|x\|} = 0, \tag{IV.4.6}$$

uniformément pour μ borné; à la place de la condition (III.4.6). Dans ce cas, si μ_0 est une valeur L-caractéristique (réelle) de A avec $L-$multiplicité impaire, alors (∞, μ_0) est un point de bifurcation pour l'équation (I.4.6).

Soit la projection $\pi : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par, $\pi(x,\mu) = \mu$ et S l'ensemble des solutions non triviales de l'équation (I.4.6). c'est à dire que,

$$S = \{(x,\mu) \in (D(L) \cap U \setminus \{0\}) \times V; Lx = \mu.Ax + R(x,\mu)\}.$$

4.6.4 Bifurcation globale à l'infini (théorème de Rabinowitz 1973)

Théorème 4.6.3 *(voir [6] et [17]) Supposons que la condition (IV.4.6) soit satisfaite et μ_0 est une valeur $L-$caractéristique (réelle) de A, avec $L-$multiplicité impaire. Si Σ est la composante connexe fermé de S contenant (∞, μ_0); alors*

1. *ou bien $\pi(\Sigma)$ est non borné,*
2. *ou bien Σ rejoint un point de bifurcation $(0,\mu)$,*
3. *ou bien Σ rejoint un autre point de bifurcation de l'infini $(\infty,\mu) \neq (\infty,\mu_0)$.*

Application

On s'intéresse à la structure de l'ensemble $(x,\mu) \in X \times \mathbb{R}$ des solutions positives, de l'équation non-linéaire

$$Lx - \mu x + Nx = 0, \tag{$\Im$}$$

quand μ est assez proche de 0; où $X = C([0,T])$ et $L : D(L) \subset X \to X$ est l'opérateur défini par $Lx = -x'' - cx'$, pour tout

$$x \in D(L) = \left\{x \in C^{1}([0,T]); x(0) = x(T) \text{ et } x'(0) = x'(T)\right\}.$$

$N : \overline{\Omega} \to X$ est l'opérateur défini par $Nx = G(x(.)) + h(.)$ où

$$\Omega = \{x \in X; r < x(t) < R, t \in [0,T]\};$$

$G :]0,+\infty[\to [0,+\infty[$ est une fonction continue et $h \in L^1([0,T])$. On remarque que l'équation $(\Im)$ est équivalente à:

$$x''(t) + cx'(t) + \mu x(t) = G(x(t)) + h(t). \tag{$\Im'$}$$

Théorème 4.6.4 *([29]) Si les fonctions G et h vérifient les conditions suivantes:*

($\hbar$1). $\lim_{x\to 0^+} G(x) = +\infty$.

($\hbar$2). $\lim_{x\to +\infty} G(x) = 0$.

($\hbar$3). $\overline{h} = \frac{1}{T}\int_0^T h(t)\,dt < 0$.

Alors il existe $\eta > 0$, tel que

(i). l'équation $(\Im')$ admet au moins une solution positive x si $\mu \in [0,\eta]$ et

(ii). au moins deux solutions $T-$périodiques positives si $\mu \in [-\eta, 0[$.

Démonstration. d'abord remarquons que l'équation $(\Im')$ est de la forme (V.4.5) avec $g(x) = G(x) - \mu x$, on a d'après ($\hbar$1), $\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$, et comme $G(x) \geq 0$ pour tout $x > 0$, alors $g(x) \geq -\mu x$ pour ces valeurs de x et $\mu \leq \eta$. D'une autre part, nous avons $\overline{h} < 0$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0 - \infty$; si $\mu > 0$ alors

$$\limsup_{x\to+\infty} \left[g(x) + \overline{h}\right] < 0,$$

(ce résultat reste vrai pour $\mu = 0$); on en déduit que le résultat du théorème (4.5.2) est valable dans le cas de l'équation $(\Im')$ pour tout $\mu \in [0,\eta]$ et que toute solution possible de cette équation est contenue dans l'ouvert

$$\Omega = \{x \in X;\ r < x(t) < R,\ t \in [0,T]\},$$

où r et R sont donnés par la preuve du théorème (4.5.2), ce qui signifie que l'équation donnée n'admet aucune solution sur la frontière de Ω, par suite le degré de coincidence

$D_L(L - \mu I + N, \Omega)$ est bien défini et égal ± 1; alors il existe $\gamma > 0$, tel que le même résutat est vrai pour $-\gamma \leq \mu \leq \eta$. Par conséquent, il existe un continu C_R des solutions (x, μ) de l'équation $(\Im)$ dans $[-\gamma, \eta] \times \Omega$, dont la projection sur $\mathbb{R}$ est $[-\gamma, \eta]$. D'une autre part, le théorème fondamental concernant le bifurcation à l'infini entraine l'existence, d'un autre continu C_∞, des solutions positives (x, μ) bifurquées à l'infini en $\mu = 0$; alors il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $0 < \epsilon < \alpha$, on associe le sous-continu $C_\epsilon \subset C_\infty$ des solutions contenu dans le voisinage

$$U_\epsilon(\infty, 0) = \left\{ (x, \mu) ; \|x\| > \frac{1}{\epsilon}, |\mu| < \epsilon \right\},$$

du point de bifurcation $(\infty, 0)$ et relie ce point à $\partial U_\epsilon(\infty, 0)$. Nécessairement, pour $\epsilon = \min\left(\frac{1}{R}, \gamma, \alpha\right)$ nous avons $C_\epsilon \subset \{(x, \mu) \in C_\infty; -\epsilon \leq \mu < 0\}$ et par suite, on obtient une deuxième solution x telle que $\|x\| > R$, pour $-\eta = -\min(\epsilon, \beta) \leq \mu < 0$ avec $\beta = \sup\{-\mu; \ (x, \mu) \in C_\epsilon\}$. ■

4.7 Stabilité et indice des solutions périodiques

Introduction

Il est bien connu que les techniques du degré topologique ont été largement appliquées dans l'étude de l'existence et la multiplicité des solutions de problèmes aux limites non linéaires. Dans cette section, nous cherchons à mettre en évidence le rôle et l'utilisation de cet outil dans l'étude de la stabilité des solutions périodiques d'une certaine classe d'équations differentielles. d'abord nous allons introduire des rappels sur quelques notions fondamentales du systèmes différentiels et la stabilité qui vont nous servir par la suite.

4.7.1 Préliminaires sur les systèmes différentiels - généralites et rappels

Soit le systéme linéaire homogène

$$u' = A(t) . u, \tag{$\Re$}$$

où la fonction matricielle A, qui associe à tout t de l'intervalle $I =]\alpha, \beta[$ la matrice $A(t) \in M_n(\mathbb{R})$ est continue.

Définitions (voir [4])

Une fonction matrice $t \longmapsto \Psi(t)$, $n \times n$ définie sur I, est dite solution matricielle du système linéaire homogène $(\Re)$, si chacune de ses colonnes est une solution vectorielle, dans ce cas nous avons,

$$\Psi'(t) = A(t).\Psi(t)$$

Une solution matricielle $t \longmapsto \Psi(t)$ est appelée solution matricielle fondamentale,si ses colonnes forment un système fondamental des solutions du système $(\Re)$. De plus, une solution matricielle fondamentale $t \longmapsto \Psi(t)$ est appelée matrice fondamentale principale du système $(\Re)$ en $t_0 \in I$ si

$$\Psi(t_0) = I_n,$$

où I_n est la matrice unité d'ordre n. Si $t \to \Phi(t)$ est une solution matricielle fondamentale de $(\Re)$ et $t_0 \in I$; alors

$$\Psi(t) := \Phi(t).\Phi^{-1}(t_0)$$

est la matrice fondamentale principale en $t_0 \in I$ du $(\Re)$, $(\Phi(t_0)$ est inversible car, ces colonnes sont des vecteurs linéairement indépendants.

Cas particulier

Prenons dans le système $(\Re)$, $A(t) \in M_2(\mathbb{R})$, telle que

$$A(t+T) = A(t)$$

pour tout $t \in \left]-\infty, +\infty\right[$; dans ce cas, si $\Phi(t)$ est une matrice fondamentale du système $u' = A(t).u$ à $t_0 \in I$; alors $\Phi(T).\Phi^{-1}(t_0)$ est appelée *matrice monodromie* de ce système; les valeurs propres μ_1, μ_2 de cette matrice, sont dites *multiplicateurs caractéristiques* du même système, pour chaque valeur μ_i avec $i \in \{1, 2\}$, il exste une solution non triviale x_i du système satisfaisant

$$x_i(t+T) = \mu_i.x_i(t), \ t \in \left]-\infty, +\infty\right[.$$

Si $\max|\mu_i| < 1$, alors l'origine (solution triviale du système) est exponentiellement stable et s'il existe au moins $i \in \{1, 2\}$ tel que $|\mu_i| > 1$, alors l'origine est instable.

4.7.2 Formule de Jacobi-Liouville

On suppose que $t \longmapsto \Phi(t)$, est une solution matricielle du systéme linéaire homogène $(\Re)$ sur I. Pour $t_0 \in I$ on a

$$\det(\Phi(t)) = \det(\Phi(t_0)) . \exp\left(\int_{t_0}^{t} tr(A(s))\, ds\right).$$

En particulier, $\Phi(t)$ est une solution matricielle fondamentale [44], si et seulement si, $\det \Phi(t_0) \neq 0$.

Démonstration. [4] La solution matricielle $t \to \Phi(t)$ est une fonction differentiable. Alors on peut écrire

$$\lim_{h \to 0} [\Phi(t+h) - (I_n + h.A(t))\Phi(t)] = 0,$$

car $\dot{\Phi}(t) = A(t) . \Phi(t)$; ce qui est équivalent à dire que,

$$\Phi(t+h) = (I_n + h.A(t))\Phi(t) + 0(h)$$

En utilisant la formule de Leibniz du determinant d'une matrice carrée $B = (b_{ij})$ d'ordre n,

$$\det(B) = \sum_{\sigma} sgn(\sigma) \prod_{i=1}^{n} b_{i\ \sigma(i)},$$

(où $\sigma(i)$ désigne une permutation de $\{1, 2, 3, ...n\}$, $sgn(\sigma)$ est la signature de σ) et le fait que le déterminant du produit de deux matrices est le produit de leurs déterminants, alors on aboutit à

$$\begin{aligned} \det \Phi(t+h) &= \det(I_n + h.A(t)) . \det \Phi(t) + 0(h) \\ &= (1 + h.tr(A(t))) . \det \Phi(t) + 0(h); \end{aligned}$$

ce qui montre que la fonction $g : I \to \mathbb{R}$, telle que $g(t) = \det \Phi(t)$ est dérivable pour tout $t \in \mathbb{R}$ et

$$g'(t) = h.tr(A(t)) . g(t);$$

en intégrant les deux membres de t_0 à t, d'où le résultat

$g(t) = g(t_0) . \exp(\int_{t_0}^{t} tr(A(s))\, ds)$. ■

On rencontre le plus souvent des systèmes différentiels non linéaires où x' ne dépend pas linéairement de x. Sans perte de généralité, on s'intérssera au système différentiel (voir [27]) en dimension deux de la forme suivante:

$$z' = f(t,z) = (f_1(t,z), f_2(t,z)), \tag{L}$$

où $f_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(i = 1,2)$ vérifient $\frac{\partial f_i}{\partial x}, \frac{\partial f_i}{\partial y}$ sont continues. Une solution de ce système est une fonction $z(t) = (x(t), y(t))$ telle que $z'(t) = f(t, z(t))$ (i.e $x'(t) = f_1(t, (x(t), y(t)))$ et $y(t) = f_2(t, (x(t), y(t))))$; pour tout $t \in \mathbb{R}$. Quand t varie dans $\mathbb{R}$, la solution $z(t)$ décrit une courbe des états dans l'espace $\mathbb{R}^2$. L'ensemble des points d'une courbe solution est appelé trajectoire.

4.7.3 Trajectoires et équilibres

Un point $E = (\ell, \hbar) \in \mathbb{R}^2$ est appelé équilibre du système différentiel (L), si la fonction constante $z(t) = E$ est solution de (L) (i.e. $f(t,E) = 0$). La trajectoire de cette équilibre est réduite au point E.

4.7.4 Stabilité d'un équilibre

Un point d'équilibre E est stable si, pour tout $\varepsilon > 0$ on a $\|x(t) - E\| < \varepsilon$ quel que soit $t \geq 0$ et pour toute solution $x(t)$ de condition initiale $x_0 = x(0)$ assez proche de E.

Si de plus, chaque $x(t)$ tend vers E quand t tend vers $+\infty$, on dit que E est un équilibre asymptotiquement stable.

Cas d'un système linéaire

Pour un système linéaire $X' = A.X$, où A est une matrice constante; l'origine $O(0,0)$ est un équilibre (car, $A.0 = (0,0)$). Cet équilibre est

1. stable, si A est diagonalisable avec toutes ses valeurs propres de partie réelle négative ou nulle,

2. asymptotiquement stable, si toutes les valeurs propres de A ont leur partie réelle strictement négative,

3. instable, si l'une au moins des valeurs propres de A est de partie réelle strictement positive.

4.7.5 Linéarisation autour d'un équilibre

Supposons que E est un point d'équilibre du système différentiel

$$z'(t) = f(t, z(t)),$$

pour approcher la fonction $f(t, z(t)) = (f_1(t, z), f_2(t, z))$, formons au voisinage de E sa matrice Jacobienne,

$$f_z(t, z(t)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix};$$

où les dérivées partielles sont calculées au point E, L'approximation affine de f au point $E = (\ell, \hbar)$ s'écrit sous la forme:

$$f(t, z) = f(t, E) + f_z(t, z(t)).u = f_z(t, z(t)).u$$

car $f(t, E) = 0$, où $u = z - E$, ce qui montre qu'au voisinage de E nous avons

$$u' = z' - E' = f(t, z) = f_z(t, z(t)).u.$$

Le système differentiel linéaire

$$u' = f_z(t, z(t)).u \tag{L'}$$

s'appelle le linéarisé du système (L) au point E. Le système (L) est linéarisable autour de E, s'il vérifie l'une au moins des conditions suivantes(voir [27]):

(i) Aucune valeur propre de la matrice $f_z(t, z(t))$ n'est de partie réelle nulle.

(ii) Les valeurs propres de $f_z(t, z(t))$ sont toutes de parties réelles strictement négatives, ou bien toutes de parties réelles strictement positives.

Si le système (L) est linéarisable autour de E, alors

1. le point d'équilibre E est stable si et seulement si l'origine est stable pour le système linéarisé.

2. le point d'équilibre E est asymptotiquement stable si, et seulement si, l'origine est asymptotiquement stable pour le système linéarisé.

Soit à présent le système differentiel

$$x' = f(t, x), \tag{I.4.7}$$

où la fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est continue, $T-$périodique par rapport à la variable t quand x est fixée et de classe C^1 relativement à x quand t est fixée.

Introduisons l'opérateur de Poincaré $P_T : D_T \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; tel que

$$P_T(x_0) = x(T, x_0),$$

où $x(., x_0)$ est la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

et

$$D_T = \left\{ x_0 \in \mathbb{R}^2; x(0, x_0) \text{ est définie sur } [0, T] \right\} \text{ (ouvert de } \mathbb{R}^2\text{)}.$$

Rappelons que $x(., x_0)$ est une solution $T-$périodique de (I.4.7), si et seulement si, $x_0 = P_T(x_0)$. Notons par:

$$\Sigma = \left\{ x \in C^1([0, T]); x' = f(t, x), x(0) = x(T) \right\}$$

et par

$$\text{Fix}(P_T) = \{ x_0 \in D_T ; x_0 = P_T(x_0) \}.$$

Définition 4.7.1 *On dit que a est une solution isolée $T-$périodique de (I.4.7), s'il existe $r_a > 0$ tel que*

$$B(a, r_a) \cap \Sigma = \{a\},$$

où $B(a, r_a)$ est la boule ouverte de centre a et de rayon r_a dans l'espace $C^1([0, T])$ muni de la norme,

$$\|x\| = \max_{t \in [0,T]} \|x(t)\| + \max_{t \in [0,T]} \|x'(t)\|.$$

4.7.6 Indice d'une solution $T-$périodique

Si x est une solution isolée $T-$périodique de (I.4.7), alors $x(0)$ est un point fixe isolé de l'opérateur P_T, c'est à dire qu'il existe $r_0 > 0$ tel que

$$B(x(0), r_0) \cap \operatorname{Fix}(P_T) = \{x(0)\};$$

alors on peut énoncer la définition suivante:

Définition 4.7.2 *([38]) L'indice de Brouwer*

$$Ind_B(P_T, x(0)) := \deg_B(I - P_T, B(x(0), r), 0),$$

est bien défini pour tout $r \leq r_0$, on l'appelle indice de x, de période T et on le note par $\gamma_T(x)$. De manière analogue, si x est une solution isolée $2T-$périodique de (I.4.7), l'indice de x, de période $2T$ est définie par

$$\gamma_{2T}(x) = \deg_B(I - P_{2T}, B(x(0), r), 0),$$

où r est suffisament petit.

Remarquons que, toute solution $T-$périodique de (I.4.7), est une solution $2T$-périodique et si une solution est isolée $2T-$périodique de (I.4.7), elle est également isolée comme $T-$périodique solution de (I.4.7).

4.7.7 Solution non dégénérée

Définition 4.7.3 *On dit que la solution $T-$périodique x du système (I.4.7), est non dégénérée [29] de période T (resp. $2T$) si l'unique solution $T-$périodique (resp. $2T-$périodique) du système linéarisé de (I.4.7)*

$$u'(t) = f_x(t, x(t)).u(t), \tag{II.4.7}$$

est la solution triviale.

Théorème 4.7.1 *Supposons que*

$$\operatorname{div}(f(t,x)) < 0, \text{ pour tout } (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \tag{III.4.7}$$

et soit x, une solution $T-$périodique du système (I.4.7) non dégénérée de période $2T$. Alors [29] x est uniformément asymptotiquement stable (resp. instable), si et seulement si,

$$\gamma_{2T}(x) = 1(resp. -1).$$

Démonstration. Soit $U(t)$ la matrice fondamentale principale à $t_0 = 0$ du système (II.4.7) (considéré comme équation avec coefficients $T-$périodique, car f et par suite ses dérivées partielles sont $T-$périodiques). Notons par λ_1, λ_2 les valeurs propres de la matrice $U(T)$, alors l'identité

$$\det(U(T) - \lambda.I_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2).\lambda + \lambda_1.\lambda_2,$$

est vrai pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, et le fait que si λ_1 est complexe, on aura $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$. D'une autre, part on a par la formule Liouville

$$\lambda_1.\lambda_2 = \det(U(T)) = \det(U(0)).\exp\left(\int_0^T tr(f_x(s, x(s)))\,ds\right),$$

où x est une solution $T-$périodique du système (I.4.7). Comme on a

$$\det(U(0)) = \det(I_2) = 1 \text{ et } \mathrm{tr}(f_x(s, x(s))) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \mathrm{div}(f(t, x)),$$

et d'après la condition (III.4.7), on obtient

$$\lambda_1.\lambda_2 = \det(U(T)) = \exp\left(\int_0^T \mathrm{div}(f(s, x(s)))\,ds\right) \in \left]0, 1\right[,$$

la solution x est non dégénérée implique que $\lambda_i \neq -1$ et $+1$ $(i = 1, 2)$. D'après ce qui précède si $\lambda_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, alors $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ et par suite,

$$|\lambda_1|^2 = |\lambda_2|^2 = \lambda_1.\lambda_2 \in \left]0, 1\right[.$$

Donc on a démontré que dans tous les cas, $|\lambda_i| < 1$ $(i = 1, 2)$. On suppose à présent que x est la solution du problème (I.4.7) associée à la condition initiale $x(0) = x_0$. Alors à partir de l'identité

$$x'(t, x_0) = f(t, x(t, x_0))$$

on déduit que

$$\left[x'_{x_0}(t, x_0)\right]' = f_x(t, x(t, x_0)).x'_{x_0}(t, x_0) \text{ et } x'_{x_0}(0, x_0) = I_2,$$

ce qui montre que $U(t) = x'_{x_0}(t, x_0)$ est la matrice fondamentale principale à $t_0 = 0$ du système (II.4.7) car elle vérifie

$$U'(t) = f_x(t, x(t, x_0)) . U(t) \text{ avec } U(0) = I_2;$$

en particulier, on a

$$U(T) = x'_{x_0}(T, x_0) = P'_T(x_0);$$

$P'_T(x_0)$ est la matrice monodromie du système (II.4.7) lorsque $x(t, x_0)$ est $T-$périodique et λ_1, λ_2 sont les multiplicateurs caractéristiques du système (II.4.7). Il est clair que

$$\det\left(I_2 - P'_T(x_0)\right) = (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)$$

car si A est une matrice carré d'ordre 2, $\lambda_1$et λ_2 sont ses valeurs propres alors son polynôme caractéristique est

$$\det(A - \lambda . I_2) = \det(\lambda I_2 - A) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2),$$

il suffit donc de prendre $\lambda = 1$. Par conséquent, si $x(t, x_0)$ est isolée et est $T-$périodique, et en vertu du théorème (3.2.1) on peut écrire

$$\begin{aligned} \gamma_T(x) &= \deg_B(I - P_T, B(x_0, r), 0) = J_{I-P_T}(x_0) = \operatorname{sign}\det\left(I_2 - P'_T(x_0)\right) \\ &= \operatorname{sign}(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2). \end{aligned}$$

D'une autre part [8], on a pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^2$,

$$P'_{2T}(x_0) = x(2T, x_0) = x(T, x(0, x_0)) = x(T, x(T, x_0)) = P'_T\left(P'_T(x_0)\right),$$

car x est T-périodique, alors

$$P'_{2T}(x_0) = P'_T(P_T(x_0)) \circ P'_T(x_0),$$

et comme $P_T(x_0) = x_0$, on obtient

$$P'_{2T}(x_0) = P'_T(x_0)) \circ P'_T(x_0),$$

ce qui nous permet de calculer

$$\begin{aligned}
\det\left(I_2 - P'_{2T}(x_0)\right) &= \det\left(I_2 - P'_T(x_0)) \circ P'_T(x_0)\right) \\
&= \det\left(I_2 - U(T) \circ U(T)\right) \\
&= \det\left(I_2 - U(T)\right).\det\left(I_2 + U(T)\right) \\
&= \det\left(I_2 - U(T)\right).\det\left(I_2 - (-U(T))\right) \\
&= (1-\lambda_1)(1-\lambda_2)(1+\lambda_1)(1+\lambda_2) \\
&= \left(1-\lambda_1^2\right)\left(1-\lambda_2^2\right).
\end{aligned}$$

Par conséquent, si $x(t, x_0)$ est $T-$périodique et isolée de période $2T$, et comme $\lambda_i \neq -1$ et $\lambda_i \neq 1$ $(i = 1, 2)$ alors

$$\gamma_{2T}(x) = \text{sign}\left(\left(1-\lambda_1^2\right)\left(1-\lambda_2^2\right)\right).$$

Pour achever la démonstration du théorème distingons deux cas

1. Si l'une des λ_i est non réelle et donc l'autre également, on remarque que

$$\left(1-\lambda_1^2\right)\left(1-\lambda_2^2\right) = \left(1-\lambda_1^2\right)^2 > 0,$$

car dans ce cas on a $|\lambda_i| < 1$ et par suite $\gamma_{2T}(x) = 1$.

2. Si λ_1, λ_2 sont réelles, alors $\gamma_{2T}(x) = 1$ si et seulement si λ_1^2 et λ_2^2 sont à la fois inferieures strictement à 1 où supérieures strictement à 1; cette dernière éventualité est exclue car $\lambda_1.\lambda_2 \in]0,1[$. Dans le cas $|\lambda_1| > 1$, on obtient $\gamma_{2T}(x) = -1$ car $\lambda_1.\lambda_2 \in]0,1[$.

■

4.7.8 Cas des équations differentielles du second ordre

Considérons dans cette section, l'équation differentielle de second ordre;(voir [29])

$$x'' + cx' + g(t, x) = 0; \tag{IV.4.7}$$

où $c > 0$, $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, $T-$périodique par rapport à la première variable et admet une dérivée partielle continue par rapport à la deuxième variable. Une telle équation est équivalente au système

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = -cv - g(t,u) \end{cases}$$

qui est à son tour, équivalent au système

$$w' = f(t,w),$$

où $w = (u,v) = (u,u')$ et $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $f(t,w) = (v, -cv - g(t,u))$.

On remarque que

$$\operatorname{div} f(t,w) = \frac{\partial v}{\partial u} + \frac{\partial(-c.v - g(t,u))}{\partial v} = 0 - c = -c < 0,$$

pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ (car $c > 0$). Nous allons caractériser la stabilité d'une solution x, $T-$périodique de l'équation (IV.4.7) à l'aide de son indice $\gamma_T(x) := \gamma_T(w)$ seulement.

Convention. Soit α, β deux fonctions réelles, définies sur $[0,T]$. On note $\alpha \ll \beta$ pour dire que $\alpha(t) \leq \beta(t)$ quelque soit $t \in [0,T]$ et l'inégalité stricte aura lieu dans un sous-ensemble de mesure de Lebesgue non nulle.

Théorème 4.7.2 *Supposons que φ est une solution $T-$périodique et isolée de l'équation (IV.4.7) vérifiant la condition*

$$g'_\varphi(t,\varphi(t)) \leq \left(\frac{\pi}{T}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2,$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. Alors φ est uniformément asymptotiquement stable (resp. instable), si et seulement si $\gamma_T(\varphi) = 1$ (resp.-1).

Pour démontrer ce théorème, donnons d'abord les deux lemmes suivants:

Lemme 4.7.1 *Si $\beta : [t_0, t_0+T] \to \mathbb{R}$ une fonction continue satisfaisant à la condition $\beta << \left(\frac{\pi}{T}\right)^2$ alors le problème aux limites à deux points*

$$\begin{cases} w'' + \beta(t).w = 0 \\ w(t_0) = 0 = w(t_0+T); \end{cases}$$

n'admet que la solution triviale.

Démonstration. On peut se référer à ([30]) (lemme 3). ■

Lemme 4.7.2 *Étant donné, $c > 0$ et $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et $T-$périodique. Si*

$$\alpha << \left(\frac{\pi}{T}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2;$$

alors les multiplicateurs caractéristiques de l'équation différentielle linéaire de second ordre

$$x'' + c.x' + \alpha(t).x = 0, \tag{M}$$

sont positifs.

Démonstration. Prenons dans l'équation (M) l'inconnu auxiliaire u, tel que $x(t) = \exp(-\frac{c}{2}t).u(t)$ on obtient

$$u'' + \left(\alpha(t) - \frac{c^2}{4}\right).u = 0. \tag{M'}$$

Remarquons que $x(t) = 0$, si et seulement si, $u(t) = 0$ (car $\exp\left(-\frac{c}{2}t\right) \neq 0$); supposons que (M) a un multiplicateur caractéristique $\lambda < 0$, alors elle admet une solution non triviale x_1 vérifiant

$$x_1(t+T) = \lambda.x_1(t),$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. Soit $s \in \mathbb{R}$ tel que $x_1(s) \neq 0$, alors $x_1(s).\ x_1(s+T) < 0$ et par suite, il existe $t_0 \in]s, s+T[$ tel que $x_1(t_0) = 0 = x_1(t_0+T)$. D'après ce qui précède, $u_1(t) = x_1(t).\exp\left(\frac{c}{2}.t\right)$ est une solution de l'équation (M') satisfaisant aux conditions aux bords

$$u_1(t_0) = 0 = u_1(t_0+T).$$

Dans l'équation (M'), on pose $\alpha(t) - \frac{c^2}{4} = \beta(t)$ et comme $\alpha << \left(\frac{\pi}{T}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2$; alors $\beta(t) << \left(\frac{\pi}{T}\right)^2$. Or $\left(\frac{\pi}{T}\right)^2$est la valeur propre principale du problème aux limites du deux points sur un intervalle de longueur T pour l'opérateur $-u''$; d'après le lemme (4.7.1), (M') n'admet que la solution triviale; cela contredit le fait que x_1 est non triviale. ■

Revenons à la démonstration du théorème.

Démonstration. Etudions d'abord le cas

$$g'_\varphi(t, \varphi(t)) = \left(\frac{\pi}{T}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. Alors l'équation

$$x'' + cx' + x\left(\left(\frac{\pi}{T}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2\right) = 0,$$

est à coefficients constantes sa polynôme caractéristique est $\lambda^2 + c.\lambda + \left(\frac{\pi}{T}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2$et ces exposants caractéristiques sont

$$\lambda_1 = -\frac{c}{2} - i.\frac{\pi}{T},\ \lambda_1 = -\frac{c}{2} + i.\frac{\pi}{T};$$

ce qui montre immediatement que la solution φ est uniformément asymtotiquement stable, et que $\gamma_T(\varphi) = \gamma_{2T}(\varphi) = 1$ car $-\frac{c}{2} < 0$. Supposons à présent que

$$g'_\varphi(t, \varphi(t)) \neq \left(\frac{\pi}{T}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2;$$

d'après le lemme (4.7.2) l'équation

$$x'' + cx' + g'_\varphi(t, \varphi(t)).x = 0,$$

n'admet pas des mutiplicateurs caractéristique négatifs; c'est à dire que ces derniers sont, soit non réels et alors d'après le théorème (4.7.1), $\gamma_T(\varphi) = \gamma_{2T}(\varphi) = 1$ et φ est uniformément asymtotiquement stable; ou bien $\mu_i \geq 0, i \in \{1, 2\}$ dans ce cas nous avons; $\gamma_{2T}(\varphi) = \text{sign}(1 - \mu_1^2)(1 - \mu_2^2) = \text{sign}(1 - \mu_1)(1 - \mu_2) = \gamma_T(\varphi)$ car, $(1 + \mu_1)(1 + \mu_2) > 0$. ■

Exemple 4.7.1 *L'éxemple suivant montre que la constante $\left(\frac{\pi}{T}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2$ utilisée dans le théorème précédent est optimale, c'est à dire qu'on ne pas la remplacer par une autre plus grande. Soit ω une fonction $T-$périodique définie par:*

$$\omega(t) = \begin{cases} -\omega_1^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 & si\ \ t \in]0, a[\\ \omega_2^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 & si\ \ t \in]a, T[\,; \end{cases}$$

pour un certain $a \in]0, T[$ et $\omega_1 > 0$, $\omega_2 > 0$. Considérons l'équation

$$x'' + cx' + \omega(t).x = 0;$$

il est clair que

$$\omega(t) = -\omega_1^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 < \left(\frac{\pi}{T}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2$$

pour tout $t \in]0, a[$; alors dire que la condition du théorème n'est pas remplie, entraine que $\omega_2^2 > \left(\frac{\pi}{T}\right)^2$ et on remarque que c'est le cas quand on fixe a tel que $\omega_2 (T - a) = \pi$. La résolution directe de l'équation, montre qu'on peut choisir ω_1, de telle sorte que la solution triviale est instable avec $\gamma_T (o) = 1$.

4.7.9 Équation de second ordre avec nonlinéarité convexe

Soit l'équation

$$x'' + cx' + g (t, x) = s, \tag{V.4.7}$$

tels que $c > 0$, $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue $T-$périodique par rapport à la première variable et admet une dérivée partielle continue par rapport à la deuxième variable et s est un paramêtre réel. On suppose que les conditions suivantes sont satisfaites:

($\hbar_1$) la fonction g est strictement convexe, (i.e. $[g'_x (t, x) - g'_x (t, y)] (x - y) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec $x \neq y$).

($\hbar_2$) $\lim\limits_{x \to +\infty} g'_x (t, x) \leq \left(\frac{\pi}{T}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2$.

($\hbar_3$) $\lim\limits_{|x| \to +\infty} g (t, x) = +\infty$.

Dans ce qui suit, nous allons donner des résultats concernant le stabilité des solutions $T-$périodiques. D'abord nous commençons par introduire des lemmes necéssaires pour la preuve.

Lemme 4.7.3 *Considérons l'opérateur differentiel* L_α *défini sur l'espace des fonctions* $T-$*périodique par*

$$L_\alpha (x) = x'' + cx' + \alpha (.) x;$$

où $c \in \mathbb{R}$ *et* $\alpha \in L^1 (\mathbb{R} / T.\mathbb{Z})$ *(espace des fonctions* $T-$*périodiques,* L^1-*integrables sur tout intervalle de longueur* T*) et vérifiant la condition*

$$\alpha << \left(\frac{\pi}{T}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2; \tag{G}$$

alors les résultas suivants sont vrais

1. *Toute solution $T-$périodique u de l'équation $L_{\alpha}(x)=\mu$, où $\mu\in\mathbb{R}$ (quelconque) est soit la solution triviale, ou bien ne s'annule jamais sur $[0,T]$.*

2. *Pour α_1,α_2 de $L^1(\mathbb{R}\diagup T.\mathbb{Z})$ telles que $\alpha_1<<\alpha_2$, vérifiant la condition (G); alors les équations*
$$L_{\alpha_i}(x)=0,(i=1,2)$$
ne peuvent pas admettre simultanément des solutions $T-$périodiques non triviales.

Démonstration. (1) Soit v une solution non triviale de l'équation $L_{\alpha}(x)=\mu$, s'il existe $t_0\in[0,T]$ tel que $v(t_0)=0$; alors $v(t_0+T)=0$. Par la même démarche utilisée dans la preuve du lemme précédent, la fonction w
$$w(t)=\exp\left(-\frac{c}{2}t\right).v(t)$$
est une solution de l'équation
$$w''+\left(\alpha(t)-\frac{c^2}{4}\right).w=0,$$
qui s'annule en t_0 et t_0+T, et comme $\alpha-\frac{c^2}{4}<<\left(\frac{\pi}{T}\right)^2$ alors on a une contradiction avec le lemme (4.7.1).

(2) Pour tout x et φ de $L^2(\mathbb{R}\diagup T.\mathbb{Z})$ on a,
$$\begin{aligned}\langle L_{\alpha}(x),\varphi\rangle &= \int_0^T\left(x''(t)+c.x'(t)+\alpha(t).x(t)\right).\varphi(t)\,dt\\ &= \int_0^T x''(t).\varphi(t)\,dt+c\int_0^T x'(t).\varphi(t)\,dt+\int_0^T\alpha(t).x(t).\varphi(t)\,dt.\end{aligned}$$

Éffectuons des intégrations par partie, on trouve
$$\begin{aligned}\int_0^T x''(t).\varphi(t)\,dt &= \left[x'(t).\varphi(t)\right]_0^T-\int_0^T x'(t).\varphi'(t)\,dt\\ &= 0-\left(\left[x(t).\varphi'(t)\right]_0^T-\int_0^T x(t).\varphi''(t)\,dt\right)\\ &= \int_0^T x(t).\varphi''(t)\,dt;\\ \int_0^T x'(t).\varphi(t)\,dt &= \left[x(t)..\varphi(t)\right]_0^T-\int_0^T x(t).\varphi'(t)\,dt\;=-\int_0^T x(t).\varphi'(t)\,dt.\end{aligned}$$

Alors

$$\langle L_\alpha(x), \varphi\rangle = \int_0^T (\varphi''(t) - c.\varphi'(t) + \alpha(t).\varphi(t)).x(t).dt = \langle x, L_\alpha^*(\varphi)\rangle;$$

où L_α^* est l'opérateur adjoint de L_α et est défini par:

$$L_\alpha^*(x) = x'' - c.x' + \alpha(t).x.$$

Remarquons d'abord, que les conclusions obtenus sur L_α dans la partie (1) restent valable pour l'opérateur adjoint L_α^*. Raisonons par l'absurde, si les deux équations $L_{\alpha_i}(x) = 0$ $(i = 1, 2)$, admettent respectivement x_1, x_2 comme solutions $T-$périodiques non triviales; alors l'équation adjointe $L_{\alpha_1}^*(x) = 0$, admet une solution φ non triviale et $T-$périodique. Par la partie (1) de ce lemme, x_1 et φ n'ont pas de zéros dans $[0, T]$; sans perte de généralités supposons que $x_1(t)$, $\varphi(t)$ sont strictement positives, quelque soit $t \in [0, T]$. D'une autre part, nous avons

$$L_{\alpha_1}(x_2) - L_{\alpha_2}(x_2) = (\alpha_1 - \alpha_2)x_2 = L_{\alpha_1}(x_2);$$

et par suite

$$\langle L_{\alpha_1}(x_2), \varphi\rangle = \left\langle x_2, L_{\alpha_1}^*(\varphi)\right\rangle = 0 = \int_0^T [(\alpha_1(t) - \alpha_2(t))]\, x_2(t).\varphi(t).dt,$$

ce qui montre que, $(\alpha_1(t) - \alpha_2(t)) = 0$, presque pour tout $t \in [0, T]$ qui est en contradiction avec l'hypothèse $\alpha_1 << \alpha_2$. ■

Lemme 4.7.4 *On suppose que la condition ($\hbar_3$) est satisfaite; alors il existe une fonction croissante M telle que*

$$|x(t)| + |x'(t)| < M(|s|),$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ et toute x solution $T-$périodique de l'équation (V.4.7).

Démonstration. De la condition ($\hbar_3$), on déduit qu'il existe $\gamma > 0$, tel que pour tout $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}$ nous avons; $g(t, x) > \gamma$. Soit x une solution $T-$périodique de l'équation (V.4.7), quand on intègre membre à membre cette équation, on obtient

$$\overline{g(., x(.))} = \frac{1}{T}\int_0^T g(t, x(t))dt = s > \gamma,$$

car $\int_0^T (x''(t) + cx'(t))\,dt = 0$. En plus on a

$$\begin{aligned}
\int_0^T |(x''(t) + cx'(t))|\,dt &= \int_0^T |g(t, x(t)) - \gamma + \gamma - s|\,dt \\
&\leq \int_0^T (g(t, x(t)) - \gamma)dt + \int_0^T |\gamma - s|\,dt \\
&= T.(s-\gamma) + T.(|\gamma - s|) \\
&= T((s-\gamma) + |s-\gamma|) \ = 2T(s-\gamma)^+
\end{aligned}$$

car $g(t,x) > \gamma$. Par conséquent, si on pose $\ell(\sigma) = \exp(-c(t-\sigma)).x'(\sigma)$ on trouve,

$$\ell'(\sigma) = \exp(-c(t-\sigma))[x''(\sigma) + c.x'(t)],$$

soit $\tau \in [0,T]$ tel que $x'(\tau) = 0$; alors

$$\int_0^T \exp(-c(t-\sigma))[x''(\sigma) + c.x'(t)]\,d\sigma = [\exp(-c(t-\sigma)).x'(\sigma)]_\tau^t = x'(t);$$

utilisons à présent le résultat précédent; on obtient

$$\begin{aligned}
|x'(t)| &\leq \left| \int_\tau^t \exp(-c(t-\sigma))[x''(\sigma) + c.x'(t)]\,d\sigma \right| \\
&\leq \int_\tau^t \exp(-c(t-\sigma))\,|[x''(\sigma) + c.x'(t)]|\,d\sigma \\
&\leq \int_0^T |x''(\sigma) + c.x'(t)|\,dt \leq 2T.(s-\gamma)^+,
\end{aligned}$$

qui entraine immédiatement que pour tout $t \in [0,T]$,

$$|x(t) - x(0)| \leq \int_0^t |x'(s)|\,ds \leq 2T^{\,2}.(s-\gamma)^+.$$

La condition $(\hbar_3)$ implique qu'il existe un fonction $R(s)$ croissante, telle que

$$g(t,x) > s \ \text{ lorsque } \tau \in [0,T] \ \text{ et } \ |x| \geq R(s).$$

Pour majorer $x(0)$, on suppose que $|x(0)| \geq R(s) + 2T^{\,2}.(s-\gamma)^+$, alors pour tout $\tau \in [0,T]$, on a

$$|x(t)| \geq |x(0)| - |x(t) - x(0)| \geq R(s)$$

il en résulte que, $\overline{g(.,x(.))} > s$, ce qui est une contradiction avec $\overline{g(.,x(.))} = s$, alors

$$|x(0)| < R(s) + 2T^{\,2}.(s-\gamma)^+.$$

Finalement on déduit que,

$$|x(t)| \leq |x(0)| + |x(t) - x(0)| \leq R(s) + 4T^{\,2}.(s-\gamma)^{+};$$

donc $|x(t)| + |x'(t)| \leq R(s) + (4T^{\,2} + 2T)(s-\gamma)^{+} = M(s)$. ■

Lemme 4.7.5 *Supposons que la fonction g vérifie les conditions ($\hbar_1$),($\hbar_2$). Si x_1, x_2 sont deux solutions $T-$périodiques de l'équation (V.4.7) pour $s = s_1$ et $s = s_2$ respectivement tels que $x_1 \neq x_2$; alors nous avons soit $x_1 < x_2$ ou bien $x_1 > x_2$.*

Démonstration. Remarquons tout d'abord que

$$L_{\alpha}(x_2 - x_1) = s_2 - s_1,$$

pour une fonction $T-$périodique bien choisie α $(\alpha(t) = \frac{g(t,x_2)-g(t,x_1)}{x_2-x_1})$ qui à cause des conditions ($\hbar_1$) et ($\hbar_2$) vérifie la condition (G); en se servant du lemme 1), on conclut que $(x_2 - x_1)(t) \neq 0$ pour tout $t \in [0,T]$, car $x_2 - x_1$ est une solution non triviale de l'équation $L_\alpha(x) = s_2 - s_1$. ■

On peut maintenant, prouver le théorème suivant.

Théorème 4.7.3 *Supposons que les conditions ($\hbar_1$), ($\hbar_2$) et ($\hbar_3$) sont satisfaites. Alors il existe $s_0 \in \mathbb{R}$, tel que les conclusions suivantes sont vérifiées:*

(i) Si $s > s_0$, l'équation (V.4.7) admet exactement deux solutions $T-$périodiques, dont une est uniformément asymptotiquement stable et l'autre est instable.

(ii) Si $s < s_0$, les solutions de l'équation (V.4.7) sont non bornées.

(iii) Si $s = s_0$, l'équation (V.4.7) admet une solution unique, qui n'est pas asymptotiquement stable.

Démonstration. (voir [8] et [29]) Si $s^* \in \mathbb{R}$ vérifie $g(t,0) \leq s^*$ pour tout $t \in [0,T]$; alors $x = 0$ est une sous-solution de l'équation (V.4.7) (pour $s = s^*$) et avec conditions aux limites $T-$périodiques. L'hypothèse ($\hbar_2$) entraine l'existence de $R > 0$ vérifiant $g(t,-R) \geq s^*$, pour tout $t \in [0,T]$, alors $x = -R$ est une sur-solution de (V.4.7) avec conditions aux limites

$T-$périodiques, donc cette équation admet au moins une solution $T-$périodique x vérifiant $-R < x(t) < 0$ quelque soit $t \in [0, T]$. Soit

$$S = \{s \in \mathbb{R};\ (\text{V.4.7}) \text{ admet au moins une solution } T - \text{périodique }\},$$

d'après ce qui précède $S \neq \varnothing$. D'une autre part, si x est une solution $T-$périodique de (V.4.7); alors il existe $\gamma > 0$, tel que $s = \overline{g}(.x(.)) \geq \gamma$, c'est à dire que S est minoré par γ. Montrons que S est non majoré; pour cela soit $s_1 \in S$ et x_1 la solution de (V.4.7) correspondante à la valeur $s = s_1$, donc pour $s > s_1$ nous aurons

$$x_1'' + c.x_1' + g(t, x_1) = s_1 < s.$$

Alors x_1 est une sous- solution de (V.4.7) avec conditions aux limites $T-$périodiques; utilisons encore la condition $(\hbar_2)$, il existe $R' > -\min\limits_{t\,\in[0,T]} x_1(t)$ tel que $g(t, -R') > s$, alors $x = -R'$ est une sur-solution de (V.4.7) avec conditions aux limites $T-$périodiques; on déduit que (V.4.7) admet au moins une solution $T-$périodique x, vérifie $-R < x(t) < x_1(t)$ pour tout $t \in [0, T]$, d'où $s \in S$. On pose $s_0 = \inf S$, on a alors $s_0 > \gamma$ et par le lemme (1), on démontre que $s_0 \in S$. D'après ce qui précède, on a les conclusions suivantes:

1. Pour $s \geq s_0$, l'équation (V.4.7) admet au moins une solution $T-$périodique.
2. Si $s < s_0$, l'équation (V.4.7) n'admet pas des solutions $T-$périodiques.

Démontrons à présent que cette équation admet au plus deux solutions $T-$périodiques, et que toute solution est nécessairement isolée; supposons que l'équation admet trois solutions $T-$périodiques différentes u_i $(i = 1, 2, 3)$ et par le lemme (4.7.5), on peut poser $u_1 < u_2 < u_3$. Il est clair que, $v_i = u_{i+1} - u_i$ $(i = 1, 2)$ est une solution $T-$périodique de l'équation $L_{\alpha_i}(x) = 0$, où

$$\alpha_i = \frac{g(t, u_{i+1}) - g(t, u_i)}{u_{i+1} - u_i}, (i = 1, 2);$$

d'après le théorème des acroissement finis $\alpha_i = g_x'(t, r_i)$ tel que $u_i < r_i < u_{i+1}$, alors

$$\alpha_2 - \alpha_1 = g_x'(t, r_2) - g_x'(t, r_1),$$

et comme $r_2 > r_1$ alors $\alpha_2 > \alpha_1$ (car g est strictement convexe). D'après le lemme (4.7.3), il existe $i \in \{1, 2\}$ unique tel que v_i est une solution triviale d'où la contradiction. Soit u_0

la solution $T-$périodique associée à la valeur $s = s_0$, la continuité de l'indice implique que u_0 est dégénérée et

$$\gamma_T (u_0) = 0,$$

car si s'était le contraire, l'équation (V.4.7) aurait une solution $T-$périodique pour tout $s \in]s_0 - \varepsilon, s_0[$ et $\varepsilon > 0$. Remarquons que si u_1 est une autre solution $T-$périodique de (V.4.7) pour une valeur $s_1 \geq s_0$, d'après le lemme (4.7.5) et comme g est strictement convexe, on a soit $u_1 < u_0$ et alors $g'_x (t, u_1) < g'_x (t, u_0)$ sur $[0, T]$; ou bien $u_1 > u_0$ et alors $g'_x (t, u_1) > g'_x (t, u_0)$ sur $[0, T]$. La deuxième partie du lemme (4.7.3) entraine que u_1 est non dégénérée et alors $s \neq s_0$. Nous avons démontré que pour $s = s_0$, l'équation (V.4.7) a une solution unique u_0 qui ne peut pas être uniformément asymptotiquement stable, car $\gamma_T (u_0) = 0 \neq 1$. Une conséquence de raisonnement si-dessus est l'existence, d'exactement deux solutions $T-$périodiques et non dégénérées de l'équation (V.4.7) pour une valeur $s > s_0$. Étant donné $s_1 > s_0$, soit l'opérateur de Poincaré associé à l'équation (V.4.7)

$$P^*_{T,s} : D_T \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ P^*_{T,s} (\xi) = (u (T, \xi), u' (T, \xi)),$$

avec $\xi = (u (0), u' (0))$ et $s \in [s_0, s_1]$; on suppose que $(\xi_1, \xi_2) \in \partial\Omega$ est un point fixe isolé de $P^*_{T,s}$ où

$$\Omega = \{(\xi_1, \xi_2) \in D_T;\ |\xi_1| + |\xi_2| < M_0 = M\ (\max(|s_0|, |s_1|))\},$$

alors l'équation (V.4.7) admet une solution $T-$périodique u, vérifiant $u (0) = \xi_1$, $u' (0) = \xi_2$ on a

$$|u (0)| + |u' (0)| = M_0,$$

et d'après le lemme (4.7.4) on a,

$$|u (t)| + |u' (t)| < M (|s|) \leq M_0$$

pour tout $t \in [0, T]$ (car M est croissante), alors $|u (0)| + |u' (0)| < M_0$, d'où une contradiction et par suite $P^*_{T,s}$ n'admet pas de point fixe sur $\partial\Omega$. La propriété de l'invariance par homotopie du degré implique que

$$\deg_B \left(I - P^*_{T,s_1}, \Omega, 0\right) = \deg_B \left(I - P^*_{T,s_0}, \Omega, 0\right) = \gamma_T (u_0) = 0.$$

On a alors nécessairement

$$\gamma_T(u_1^*) = -\gamma_T(u_1) = -1,$$

où u_1, u_1^* sont les deux solutions $T-$périodiques non dégénérées de l'équation (V.4.7) pour $s = s_1$; d'après le théorème (4.7.2), u_1 est uniformément asymptotiquement stable et u_1^* est instable. Finalement, supposons que u est une solution bornée de (V.4.7) pour $s < s_0$. On a déja montré que pour tout $t \in [0, T]$

$$|u'(t)| \leq 2T.(s-\gamma)^+ ;$$

étant donnés $u_- \leq \inf u(t) \leq \sup u(t) \leq u_+$, avec $|u_\pm|$ assez grands. Considérons l'équation tronquée associée

$$x'' + cx' + g^*(t,x) = s, \tag{VI.4.7}$$

où la fonction g^* est définie par

$$g^*(t,x) = \begin{cases} g(t,x) & \text{pour } x \in \left]x_-, x_+\right[\\ g(t,x_-) & \text{pour } \quad x \leq x_- \\ g(t,x_+) & \text{pour } \; x \leq x_+. \end{cases}$$

Avant de continuer cette démonstration, rappelons le théorème suivant (démontré par J.L. Massera en 1950), qui sera util pour la suite.

Théorème (de Massera)[28] On considère l'équation différentielle linéaire:

$$x' = A(t).x + b(t), \tag{E}$$

où $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n \times n}$, $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ sont des applications continues et $T-$périodiques. Alors l'équation (E) admet une solution $T-$périodique si et seulement si, elle avait une solution x bornée dans $[0, +\infty[$ (i.e. il existe $C > 0$, $|x(t)| < C$ pour tout $t \geq 0$).

Revenons à la démonstration du théorème, d'abord on remarque que l'équation (VI.4.7) est équivalente au système plan

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = s - c.v - g^*(t,x) ; \end{cases}$$

que l'on peut formuler $w' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -c \end{pmatrix} .w + s - g^*(t,u)$ où $w = \binom{u}{v}$. On a par construction, u est une solution de l'équation tronquée (VI.4.7) avec $|u| + |u'|$ borné, alors le théorème de

Massera appliqué à cette équation (écrite sous la forme précédente) implique qu'elle admet une solution $T-$périodique, ce qui contredit le lemme (4.7.4). Alors pour les valeurs $s < s_0$ l'équation (V.4.7) n'admet pas des solutions bornées. ■

4.8 Solutions positives d'un problème aux limites de premier ordre en résonance

Dans cette application, Zima M. ([51]) a obtenu des conditions suffisantes pour l'existence de solutions positives à un problème aux limites de premier ordre dans le cas de résonance. L'étude faite est basé sur un théorème de coincidence dû à O'Regan et Zima.

Considérons le problème aux limites suivant:

$$\begin{cases} x'(t) + a(t)\,x(t) = f(t, x(t)), \ t \in [0, T], \\ x(0) = \alpha x(T), \end{cases} \tag{I.4.8}$$

où $a : [0, T] \to [0, +\infty[$ et $f : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues, $T > 0$, $\alpha = e^{\int_0^T a(s)ds}$.

Le problème homogène associé à (I.4.8) admet des solutions non triviales ($x(t) = 2e^{-\int_0^t a(s)ds}$ par exemple), dans ce cas on dit que le problème (I.4.8) est en *résonance*. On utilisera dans ce qui suit les notations suivantes:

$$\phi(t) =: e^{\int_0^t a(s)ds} \text{ et } \psi(t) =: \int_0^t \frac{ds}{\phi(s)}; \text{pour tout } t \in [0, T].$$

$$k(t, s) =: \begin{cases} \frac{\phi(s)}{\phi(t)}\left(1 + \frac{\psi(s)}{\psi(T)}\right), & 0 \le s \le t \le T \\ \frac{\phi(s)}{\phi(t)}\left(\frac{\psi(s)}{\psi(T)}\right), & 0 \le t < s \le T \end{cases}$$

$$G(t, s) =: \frac{M\ \phi(s)}{\phi(t)\int_0^T \phi(\tau)d\tau} + k(t, s) - \frac{\int_0^T k(t, \tau)d\tau}{\int_0^T \phi(\tau)d\tau}\phi(s);\ t, s \in [0, T], \text{ où } M > 0.$$

Supposons de plus qu'il existe 3 constantes positives κ, M et R telles que

(C1) $\kappa M \le \frac{1}{\alpha\psi(T)} \int_0^T \phi(\tau)\, d\tau$,

(C2) $G(t, s) \ge 0$ et $\frac{1}{\phi(t)\psi(T)} - \kappa G(t, s) \ge 0$, pour tout $t, s \in [0, T]$,

(C3) $f(t, R) < 0$ et $f(t, \frac{R}{\phi(t)}) < 0$, pour tout $t \in [0, T]$, (C4) $f(t,x) > -\kappa x$, pour tout $(t,x) \in [0,T] \times [0,R]$,

(C5) il existe quatre nombres réels $t_0 \in [0,T]$, $r \in \left]0, \frac{R}{\alpha}\right[$, $\beta > 0$, $m \in]0,1[$ et deux fonctions continues $g : [0,T] \to [0,+\infty[$, $h :]0,r] \to [0,+\infty[$ telles que

(a) $f(t,x) \geq g(t) .h(x)$ pour $(t,x) \in [0,T] \times]0,r]$,

(b) $\frac{h(x)}{x^\beta}$ est non croissante sur $]0,r]$ et

(c) $\frac{h(r)m^\beta}{r} \int_0^T G(t_0,s)g(s)\,ds \geq 1 - \frac{mT}{\phi(t_0)\psi(T)}$.

Définition 4.8.1 *([6]) Soit X un espace de Banach réel, on appelle un cône tout sous-ensemble C de X convexe fermé vérifiant:*

1. $\mu C \subset C$, pour tout $\mu > 0$;

2. $C \cap (-C) = \{0\}$.

Dans ce cas on rappelle que C induit une relation d'ordre partiel dans X définie par

$$x \preceq y \Leftrightarrow y - x \in C;$$

et que pour tout $u \in C \diagdown \{0\}$, il existe un réel $\sigma(u) > 0$ tel que

$$\|x + u\| \geq \sigma(u) \|x\|, \text{ quelque soit } x \in C.$$

Théorème 4.8.1 *Sous les conditions (C1)-(C5), le problème (I.4.8) admet au moins une solution positive définie sur $[0,T]$.*

La démonstration de ce théorème est basée sur le théorème de coincidence suivant prouvé par O'Regan et Zima en 2006 (voir [36])

Théorème 4.8.2 *Soit X et Z deux espaces de Banach sur $\mathbb{R}$, $L : D(L) \subset X \to Z$ un opérateur de Fredholm d'indice 0 et $N : X \to Z$ un opérateur non linéaire $L-$complètement continu sur X. On considère un cône C et deux ouverts bornés Ω_1, Ω_2 de X tels que $\overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$, et soit $\gamma : X \to C$ une rétraction continue (i.e. $\gamma_{|C} = I$). On note par*

$$M = P + JQN + K_{P,Q} \text{ et } M_\gamma = M \circ \gamma,$$

où $P : X \to X$, $Q : Z \to Z$ sont des projections continues telles que $\operatorname{Im} P = \ker L$, $\ker Q = \operatorname{Im} L$ et $J : \operatorname{Im} Q \to \ker L$ est un isomorphisme. Supposons que

1. *$Lx \neq \lambda Nx$, pour tout $x \in (C \cap \partial\Omega_2) \cap D(L)$ et $\lambda \in]0,1[$,*

2. *$\gamma(\overline{\Omega_2})$ est borné dans C,*

3. *$\deg_B(I-(P+JQN)\gamma_{|\ker L}, \ker L \cap \Omega_2, 0) \neq 0$,*

4. *il existe $u_0 \in C \diagdown \{0\}$ tel que $\|x\| \leq \sigma(u_0)\|Mx\|$, pour $x \in C(u_0) \cap \partial\Omega_1$, où*

$$C(u_0) = \{x \in C;\ \mu u_0 \preceq x,\ \mu > 0\};$$

5. *$(P+JQN)\gamma(\partial\Omega_2) \subset C$,*

6. *$M_\gamma\left(\overline{\Omega_2} \diagdown \Omega_1\right) \subset C$.*

Alors l'équation $Lx = Nx$ admet une solution dans l'ensemble $C \cap (\overline{\Omega_2} \diagdown \Omega_1)$.

Démonstration. [du théorème (4.8.1)] Considérons l'espace de Banach $X = Z = C([0,T])$ dont sa norme est définie par $\|x\| = \max_{t\in[0,T]}|x(t)|$. Soit les opérateurs $L : D(L) \subset X \to X$ et $N : X \to X$ définis par

$$\begin{aligned} D(L) &= \left\{x \in C^1([0,T]), x(0) = \alpha x(T)\right\}, \\ (Lx)(.) &= x'(.) + a(.)\,x(.) \text{ et } (Nx)(.) = f(.,x(.)). \end{aligned}$$

x est solution non triviale de $x'(t)+a(t)\,x(t) = 0 \Leftrightarrow x(t) = c.\exp(-\int_0^t a(s)\,ds)$;donc

$$\ker L = \left\{x \in D(L); x(t) = \frac{c}{\exp(\int_0^t a(s)\,ds)} = \frac{c}{\phi(t)}, c \in \mathbb{R} \text{ et } t \in [0,T]\right\}.$$

D'autre part, $y \in \operatorname{Im} L$ si et seulement s'il existe $x \in D(L)$ tel que $x'(t)+a(t)\,x(t) = y(t)$ pour tout $t \in [0,T]$; en résolvant cette équation différentielle linéaire avec deuxième membre par la méthode de variation des constantes, on trouve

$$x(t) = \frac{x(0)}{\phi(t)} + \frac{1}{\phi(t)}\int_0^t \phi(s)\,y(s)\,ds;$$

pour $t = T$, on obtient $x(T) = \frac{x(0)}{\phi(T)} + \frac{1}{\phi(T)}\int_0^T \phi(s)\,y(s)\,ds$ qui ne sera vrai que dans le cas où $\int_0^T \phi(s)\,y(s)\,ds = 0$ car $x(0) = \alpha.x(T)$. Reciproquement, pour tout $y \in X$ et vérifiant

$\int_0^T \phi(s)\, y(s)\, ds = 0$, il existe $x \in D(L)$ tel que $x'(t)+a(t)\,x(t) = y(t)$ (il suffit de prendre $x = \frac{c}{\phi(t)} + \frac{1}{\phi(t)} \int_0^t \phi(s)\, y(s)\, ds$, avec c constante réelle). Alors

$$\operatorname{Im} L = \left\{ y \in X;\ \int_0^T \phi(s)\, y(s)\, ds = 0 \right\}.$$

Définissons à présent les projections $P : X \to X$ par

$$(Px)(t) = \frac{c}{\phi(t)} \quad \text{où} \quad c = \frac{\int_0^T x(s)\, ds}{\psi(T)};$$

et $Q : X \to X$ par

$$Qy = \frac{\int_0^T \phi(s)\, y(s)\, ds}{\int_0^T \phi(s)\, ds}.$$

On remarque que $\operatorname{Im} P = \ker L$ et $\ker Q = \operatorname{Im} L$. L'application linéaire $H : X \to \mathbb{R}$ définie par

$$H(y) = \int_0^T \phi(s)\, y(s)\, ds$$

est continue, car

$$|H(y)| \leq T.\exp(\max_{t\in[0,T]} a(t)) \max_{t\in[0,T]} |y(t)| = T.\exp(\|a\|).\, \|y\|;$$

alors $\operatorname{Im} L = H^{-1}(\{0\})$ est un fermé; on note par $Y_1 = \operatorname{Im} Q$ le supplémentaire topologique de $\operatorname{Im} L$ (i.e. $Y = \operatorname{Im} L \oplus Y_1$). D'autre part $\dim \ker L = \dim \mathbb{R} = \dim Y_1 = 1$, ce qui montre que L est un opérateur de Fredholm d'indice 0. Démontrons à présent que l'application $K : X \to X$ définie par

$$Ky(t) = \int_0^T k(t,s) y(s)\, ds,$$

est l'inverse de l'opérateur $L_P = L_{|\ker P \cap D(L)}$; on a pour tout $y \in \operatorname{Im} L$,

$$\begin{aligned}
(Ky)(t) &= \frac{1}{\phi(t)} \int_0^t \phi(s).y(s)\, ds + \frac{1}{\phi(t)\,\psi(T)} \int_0^t \phi(s).\psi(s).y(s)\, ds + \\
&\quad \frac{1}{\phi(t)\,\psi(T)} \int_t^T \phi(s).\psi(s).y(s)\, ds;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(Ky)'(t) &= -\frac{a(t)}{\phi(t)} \int_0^t \phi(s).y(s)\, ds + y(t) - \frac{a(t)}{\phi(t)\,\psi(T)} \int_0^t \phi(s).\psi(s).y(s)\, ds + \\
&\quad \frac{\psi(t).y(t)}{\psi(T)} - \frac{a(t)}{\phi(t)\,\psi(T)} \int_t^T \phi(s).\psi(s).y(s)\, ds - \frac{\psi(t).y(t)}{\psi(T)} \\
&= y(t) - a(t) \int_0^t \frac{\phi(s)}{\phi(t)} (1 + \frac{\psi(s)}{\psi(T)}) y(s)\, ds - a(t) \int_t^T \frac{\phi(s).\psi(s)}{\phi(t)\,\psi(T)} .y(s)\, ds \\
&= y(t) - a(t)\, Ky(t).
\end{aligned}$$

Alors

$$L_P K y\left(t\right) = \left(Ky\right)'\left(t\right) + a\left(t\right)\left(Ky\right)\left(t\right) = y(t).$$

D'un autre coté, pour $x \in \ker P$ (i.e. $\int_0^T x\left(s\right) ds = 0$) on obtient

$$\begin{aligned}
KL_P x &= \int_0^T k(t,s)(x'\left(s\right) + a\left(s\right) x\left(t\right))ds \\
&= \int_0^T k(t,s)x'\left(s\right) ds + \int_0^T k(t,s) a\left(s\right) x\left(t\right) ds \\
&= \int_0^t \frac{\phi\left(s\right)}{\phi\left(t\right)}(1 + \frac{\psi\left(s\right)}{\psi\left(T\right)})x'\left(s\right) ds + \frac{1}{\phi\left(t\right)\psi\left(T\right)} \int_t^T \phi\left(s\right).\psi\left(s\right) x'\left(s\right) ds \\
&\quad + \int_0^T k(t,s) a\left(s\right) x\left(t\right) ds \\
&= \frac{1}{\phi\left(t\right)\psi\left(T\right)} \int_0^T \phi\left(s\right).\psi\left(s\right) x'\left(s\right) ds + \frac{1}{\phi\left(t\right)} \int_0^t \phi\left(s\right) x'\left(s\right) ds \\
&\quad + \int_0^T k(t,s) a\left(s\right) x\left(t\right) ds.
\end{aligned}$$

Utilisons des intégrations par partie pour calculer les deux premiers intégrals

$$\begin{aligned}
\int_0^T \phi\left(s\right).\psi\left(s\right) x'\left(s\right) ds &= \left[\phi\left(s\right).\psi\left(s\right) x\left(s\right)\right]_0^T - \int_0^T (a(s)\phi\left(s\right)\psi\left(s\right) + 1)x\left(s\right) ds \\
&= \alpha\psi\left(T\right) x\left(T\right) - \int_0^T a(s)\phi\left(s\right)\psi\left(s\right) x\left(s\right) ds \\
&= \alpha\psi\left(T\right) x\left(T\right) - \int_0^t \phi\left(s\right)\psi\left(s\right) a(s) x\left(s\right) ds - \\
&\quad \int_t^T a(s)\phi\left(s\right)\psi\left(s\right) x\left(s\right) ds.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^t \phi\left(s\right) x'\left(s\right) ds &= \left[\phi\left(s\right) x\left(s\right)\right]_0^t - \int_0^t a(s)\phi\left(s\right) x\left(s\right) ds \\
&= \phi\left(s\right) x\left(t\right) - x\left(0\right) - \int_0^t \phi\left(s\right) a(s) x\left(s\right) ds.
\end{aligned}$$

Alors $KL_P x\left(t\right) = x(t)$ car $\alpha x\left(T\right) = x\left(0\right)$. Comme a et f sont continues, alors les applications $QN : X \to \mathbb{R}$, $QNx = \frac{\int_0^T \phi(s) f(s,x(s)) ds}{\int_0^T \phi(s) ds}$, $(I-Q)N$ sont continues et envoient les bornés sur des bornés de $D(L) \subset X$ car si x est borné, on aura

$$\left|QNx\right| \leq \sup_{s\in[0,T]} \left|f\left(s, x\left(s\right)\right)\right| \text{ et } \left|(I-Q)Nx\right| \leq 2 \sup_{s\in[0,T]} \left|f\left(s, x\left(s\right)\right)\right|.$$

(ici le sup existe car $\mathbb{R}$ est un espace séparé de dimension finie) et l'application K est complètement continue sur X car si $x \in X$ soit borné et comme les fonctions ϕ et ψ sont croissantes et positives, on aura

$$\begin{aligned}
|Kx(t)| &\leq \max_{t\in[0,T]} |x(t)| \left[\int_0^t \frac{\phi(s)}{\phi(t)}\left(1+\frac{\psi(s)}{\psi(T)}\right)ds + \int_t^T \frac{\phi(s)}{\phi(t)}\left(\frac{\psi(s)}{\psi(T)}\right)ds\right] \\
&\leq \|x\|\left(\int_0^t 1.(1+1)\,ds + \int_t^T 1.1ds\right) = \|x\|(t+T) \\
&\leq 2T.\|x\|.
\end{aligned}$$

D'autre part pour $(t_1, t_2) \in [0,T]^2$ (sopposons par exemple que $t_1 < t_2$)

$$\begin{aligned}
|Kx(t_2) - Kx(t_1)| &= \left|\int_0^T (k(t_2,s)-k(t_1,s))x(s)\,ds\right| \\
&\leq \|x\|\int_0^T |(k(t_2,s)-k(t_1,s))|\,ds;
\end{aligned}$$

et comme ϕ est continue sur $[0,T]$; alors après simlifications on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^T |(k(t_2,s)-k(t_1,s))|\,ds &= \left(\frac{1}{\phi(t_1)} - \frac{1}{\phi(t_2)}\right)\int_0^{t_1}\phi(s)\left(1+\frac{\psi(s)}{\psi(T)}\right)ds \\
&\quad +\left(\frac{1}{\phi(t_1)} - \frac{1}{\phi(t_2)}\right)\int_{t_1}^{t_2}\phi(s)\frac{\psi(s)}{\psi(T)}ds \\
&\quad +\frac{1}{\phi(t_1)}\int_{t_1}^{t_2}\phi(s)\,ds + \left(\frac{1}{\phi(t_1)} - \frac{1}{\phi(t_2)}\right)\int_{t_2}^{T}\phi(s)\frac{\psi(s)}{\psi(T)}ds \\
&\leq \left(\frac{1}{\phi(t_1)} - \frac{1}{\phi(t_2)}\right)\left[2\int_0^{t_1}\phi(s)\,ds + \int_{t_1}^{t_2}\phi(s)\,ds + \int_{t_2}^{T}\phi(s)\,ds\right] \\
&\quad +\frac{1}{\phi(t_1)}\int_{t_1}^{t_2}\phi(s)\,ds \\
&\leq \frac{2(\phi(t_2)-\phi(t_1))}{\phi(t_1)\phi(t_2)}\int_0^T\phi(s)\,ds + \frac{1}{\phi(t_1)}\int_{t_1}^{t_2}\phi(s)\,ds \to 0 \text{ quand } t_1 \to t_2.
\end{aligned}$$

Définissons l'isomorphisme

$$J : \operatorname{Im} Q \to \ker L \text{ est défini par } J(c)(t) = \frac{Mc}{\phi(t)}.$$

Considérons les ensembles suivants

$$\begin{aligned}
C &= \{x \in X;\ x(t) \geq 0,\ t \in [0,T]\}, \\
\Omega_1 &= \{x \in X;\ m\|x\| < |x(t)| < r,\ t \in [0,T]\}, \\
\Omega_2 &= B(0,R).
\end{aligned}$$

On remarque que Ω_1 et Ω_2 sont des ouverts bornés de X et

$$\overline{\Omega_1} = \{x \in X;\ m\,\|x\| \leq |x(t)| \leq r,\ t \in\ [0,T]\} \subset \Omega_2,$$

car $\alpha = e^{\int_0^T a(s)ds} \geq 1$ entraine que $r < \frac{R}{\alpha} \leq R$. C est un cône de X et $C \cap (\overline{\Omega_2} \diagdown \Omega_1) \neq \varnothing$ ($x \in X$ tel que $x(t) = \frac{r+R}{2}$ est un élément de cet ensemble). Pour démontrer 1), on suppose qu'il existe $x_0 \in (C \cap \partial\Omega_2) \cap D\,(L)$ et $\lambda_0 \in]0,1[$ tel que $Lx_0 = \lambda_0 N x_0$. Alors

$$x_0'(t) + a(t)x_0(t) = \lambda_0 f(t, x_0(t)),\ t \in [0,T]$$

soit $t^* \in [0,T]$ tel que $\|x_0\| = \max_{t\in[0,T]} |x_0(t)| = x_0(t^*) = R$ (car $x_0 \in \partial\Omega_2$), alors on obtient $0 + a(t^*)R = \lambda_0 f(t^*, R)$ et d'après la condition (C3) on a

$$0 \leq a(t^*)R = \lambda_0 f(t^*, R) < 0,$$

d'où la contradiction. Soit l'application $\gamma : X \to C$ définie par $(\gamma x)\,(.) = |x(.)|$, c'est clair que γ est une rétraction et que pour tout $x \in \overline{\Omega_2}$, $\|(\gamma x)\,(.)\| = \|x\| \leq R$, ce qui montre que $\gamma(\overline{\Omega_2})$ est borné dans C. Pour $x \in \ker L \cap \Omega_2$, $\lambda \in [0,1]$ et $t \in [0,T]$ on définit

$$H(x,\lambda)(t) = x(t) - \frac{\lambda}{\phi\,(t)}\left[\frac{1}{\psi\,(T)}\int_0^T |x(s)|\,ds + \frac{M}{\int_0^T \phi\,(s)\,ds}\int_0^T f(s,|x(s)|)\phi\,(s)\,ds\right].$$

On suppose qu'il existe $x \in \ker L \cap \partial\Omega_2$ tel que $H(x,\lambda) = 0$ c'est à dire que $x\,(t) = \frac{c}{\phi(t)}$ et $\|x\| = R$, d'après la condition (C4) on a

$$\begin{aligned}
c &= \lambda\left[\frac{|c|}{\psi\,(T)}\int_0^T \frac{ds}{\phi\,(s)} + \frac{M}{\int_0^T \phi\,(s)\,ds}\int_0^T f(s,\frac{|c|}{\phi\,(s)})\phi\,(s)\,ds\right] \\
&= \lambda\left[|c| + \frac{M}{\int_0^T \phi\,(s)\,ds}\int_0^T f(s,\frac{|c|}{\phi\,(s)})\phi\,(s)\,ds\right] \\
&\geq \lambda\left[|c| - \frac{\kappa MT\,|c|}{\int_0^T \phi\,(s)\,ds}\right] = \lambda\,|c|\left[1 - \frac{\kappa MT}{\int_0^T \phi\,(s)\,ds}\right];
\end{aligned}$$

d'après la condition (C1) et le fait que $a(t) \geq 0$, pour tout $t \in [0,T]$ alors ϕ est croissante et par suite on obtient $\frac{\kappa MT}{\int_0^T \phi(\tau)d\tau} \leq \frac{T}{\alpha\psi(T)} \leq 1$(car $\alpha\psi\,(T) = \int_0^T \frac{\phi(T)}{\phi(s)}ds \geq \int_0^T ds = T$), donc $c \geq 0$ et $\|x\| = \max_{t\in[0,T]}(\frac{c}{\phi(t)}) = c = R$. Alors

$$\begin{aligned}
R &= \lambda\left[\frac{1}{\psi\,(T)}\int_0^T \frac{Rds}{\phi\,(s)} + \frac{M}{\int_0^T \phi\,(s)\,ds}\int_0^T f(s,\frac{R}{\phi\,(s)})\phi\,(s)\,ds\right] \\
&= \lambda R + \frac{\lambda M}{\int_0^T \phi\,(s)\,ds}\int_0^T f(s,\frac{R}{\phi\,(s)})\phi\,(s)\,ds.
\end{aligned}$$

Donc on aboutit à

$$0 \leq R(1-\lambda) = \frac{\lambda M}{\int_0^T \phi(s)\,ds} \int_0^T f(s, \frac{R}{\phi(s)})\phi(s)\,ds$$

ce contredit (C3). Alors $H(x,\lambda) \neq 0$ pour tout $(x,\lambda) \in (\ker L \cap \partial\Omega_2) \times [0,1]$ et par la propriété de l'invariance par homotopie on obtient

$$\begin{aligned} 1 &= \deg_B(H(x,0), \ker L \cap \Omega_2, 0) \\ &= \deg_B(H(x,1), \ker L \cap \Omega_2, 0) \\ &= \deg_B(I - (P + JQN)\gamma_{|\ker L}, \ker L \cap \Omega_2, 0) \end{aligned}$$

car $H(x,0) = I_{|\ker L}$ et $H(x,1) = I - (P + JQN)\gamma_{|\ker L}$. Pour montrer 4) posons $u_0(t) = 1$ pour tout $t \in [0,T]$, on remarque que $u_0 \in C \setminus \{0\}$et qu'on a

$$\|x + u_0\| = \|x\| + 1 > 1.\|x\|, \text{ pour tout } x \in C;$$

alors on peut choisir $\sigma(u_0) = 1$. C'est clair de voir que l'ensemble

$$C(u_0) = \{x \in C;\ x(t) - \mu \geq 0,\ \mu > 0 \text{ et } t \in [0,T]\ \} = \{x \in C;\ x(t) \neq 0,\ t \in [0,T]\}.$$

Pour $x \in C(u_0) \cap \partial\Omega_1$ nous avons $x(t) > 0$ sur $[0,T]$, $0 < \|x\| < r$ et $x(t) \geq m\|x\|$ sur $[0,T]$. D'après la condition (C5) on aura pour tout $x \in C(u_0) \cap \partial\Omega_1$

$$\begin{aligned} (Mx)(t_0) &= \frac{1}{\phi(t_0)\psi(T)} \int_0^T x(s)ds + \int_0^T G(t_0,s) f(s,x(s))ds \\ &\geq \frac{1}{\phi(t_0)\psi(T)} \int_0^T m\|x\|\,ds + \int_0^T G(t_0,s)g(s)\,h(x(s)ds \\ &\geq \frac{Tm\|x\|}{\phi(t_0)\psi(T)} + \int_0^T G(t_0,s)g(s)\,\frac{h(x(s))}{x^\beta(s)} x^\beta(s)\,ds \\ &\geq \frac{Tmr}{\phi(t_0)\psi(T)} + \int_0^T G(t_0,s)g(s)\,\frac{h(r)}{r^\beta} m^\beta \|x\|^\beta\,ds \\ &= \frac{Tmr}{\phi(t_0)\psi(T)} + h(r)m^\beta \int_0^T G(t_0,s)g(s)\,ds \\ &\geq r = \|x\|. \end{aligned}$$

Alors $\|Mx\| = \max_{t\in[0,T]} |Mx(t)| \geq (Mx)(t_0) \geq \|x\|$. En utilisant les conditions (C1) et (C4) on obtient pour tout $x \in \partial\Omega_2$ (i.e. $\|x\| = R$)

$$\begin{aligned}
(P+JQN)\gamma x(t) &= \frac{1}{\phi(t)\psi(T)}\int_0^T |x(s)|\,ds + \frac{M}{\phi(t)\int_0^T \phi(s)\,ds}\int_0^T f(s,|x(s)|)\phi(s)\,ds \\
&\geq \frac{1}{\phi(t)}\left[\frac{1}{\psi(T)}\int_0^T |x(s)|\,ds - \frac{\kappa M}{\int_0^T \phi(s)\,ds}\int_0^T |x(s)|\,\phi(s)\,ds\right] \\
&\geq \frac{1}{\phi(t)}\left[\frac{1}{\psi(T)}\int_0^T |x(s)|\,ds - \frac{1}{\alpha\psi(T)}\int_0^T |x(s)|\,\phi(s)\,ds\right] \\
&= \frac{1}{\phi(t)\psi(T)}\left[\int_0^T \left(1-\frac{\phi(s)}{\alpha}\right)|x(s)|\,ds\right] \geq 0;
\end{aligned}$$

car ϕ est croissante sur $[0,T]$ et $\alpha = \phi(T)$, donc $(P+JQN)\gamma(\partial\Omega_2) \subset C$. De (C2) et (C4) on déduit que pour tout $x \in \overline{\Omega}_2 \diagdown \Omega_1$ et $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}
M\gamma x(t) &= \frac{1}{\phi(t)\psi(T)}\int_0^T |x(s)|\,ds + \int_0^T G(t,s) f(s,|x(s)|)ds \\
&\geq \frac{1}{\phi(t)\psi(T)}\int_0^T |x(s)|\,ds - \kappa\int_0^T G(t,s)\,|x(s)|\,ds \geq 0;
\end{aligned}$$

alors $M\gamma\left(\overline{\Omega}_2 \diagdown \Omega_1\right) \subset C$, ceci complète la démonstration. ■

4.9 Existence de solutions à un problème aux limites non local avec croissance non linéaire

4.9.1 Introduction

Dans cette application, on considère le problème aux limites non local suivant(voir [48]) :

$$\begin{cases} x''(t) = f(t,\ x(t),\ x'(t)),\ t \in\,]0,1[\\ x(0) = \alpha x(\eta) \text{ et } x'(1) = \int_0^1 x'(s)dg(s); \end{cases} \tag{I.4.9}$$

avec $\alpha \geq 0,\ \ 0 < \eta < 1,\ f : [0,1]\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $g : [0,1] \to [0,+\infty[$ une fonction non décroissante telle que $g(0) = 0$. L'intégral figurant dans les conditions aux limites est au sens de Stieltjes. Si $g(1) = 1$, le problème homogène associé admettra des solutions non triviales, c'est à dire que le problème donné est en résonance; notre objectif est d'étudier l'existence de solutions à ce problème en ce cas et d'établir des résultats d'existence en vertu de la croissance non linéaire de la fonction f. Le procédé utilisé est basée sur le théorème de continuation de Mawhin (théorème (3.4.7)).

4.9.2 Notations

Si $x \in X = C^1([0,1])$, on utilisera dans ce qui suit les normes suivantes: $\|x\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} |x(t)|$, $\|x\| = \max(\|x\|_\infty, \|x'\|_\infty)$ et on note par $\|x\|_{L^1}$ la norme del'espace $Z = L^1([0,1])$. Soit L'opérateur linéaire $L : D(L) \subset X \to Z$ défini par

$$Lx = x'',\ x \in D(L) = \left\{x \in W^{2,1}([0,1]);\ x(0) = \alpha x(\eta),\, x'(1) = \int_0^1 x'(s)dg(s)\right\}$$

où $W^{2,1}([0,1]) = \{x : [0,1] \to \mathbb{R}; x \text{ et } x' \text{ sont absolument continue}\}$ (espace de Sobolev). Soit l'opérateur $N : X \to Z$ défini par

$$(Nx)(t) = f(t,\ x(t),\ x'(t)),\ t \in]0,1[.$$

Avec ces Notations on a

$$\text{le problème (I.4.9)} \ \Leftrightarrow\ Lx = Nx.$$

Nous allons établir des théorèmes d'existence pour le problème (I.4.9) dans les deux cas suivants:

(i) $\alpha = 0$, $g(1) = 1$ et $\int_0^1 sdg(s) \neq 1$;

(ii) $\alpha = 1$, $g(1) = 1$ et $\int_0^1 sdg(s) \neq 1$.

Théorème 4.9.1 *Supposons que*

(h_1) *il existes* $a, b, d,\ r$ *quatre fonctions de* $L^1([0,1])$ *et une constante* $\theta \in [0,1]$ *tels que pour tout* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $t \in [0,1]$ *on a*

$$|f(t,x,y| \leq a(t)|x| + b(t)|y| + d(t)(|x|^\theta + |y|^\theta) + r(t),$$

(h_2) *il existe une constante* $M > 0$, *telle que pour* $x \in D(L)$, *Si* $|x'(t)| > M$ *pour tout* $t \in [0,1]$, *alors*

$$\int_0^1 f(s,\ x(s),\ x'(s))ds - \int_0^1 \int_0^s f(\tau,\ x(\tau),\ x'(\tau))d\tau dg(s) \neq 0,$$

(h_3) *il existe une constante* $M^* > 0$ *telle que pour tout* $v \notin [-M^*, M^*]$, *on a ou bien*

$$v\left[\int_0^1 f(s,\ vs,\ v)ds - \int_0^1 \int_0^s f(\tau,\ v\tau,\ v)d\tau dg\,(s) < 0,\right]$$

ou bien

$$v\left[\int_0^1 f(s,\ vs,\ v)ds - \int_0^1 \int_0^s f(\tau,\ v\tau,\ v)d\tau dg\,(s) > 0.\right]$$

Alors le problème (I.4.9) avec $\alpha = 0,\ g(1) = 1$ *et* $\int_0^1 sdg(s) \neq 1$; *admet au moins une solution* $x \in C^1\left([0,1]\right)$ *pourvu que*

$$\|a\|_{L^1} + \|b\|_{L^1} < \frac{1}{2}. \tag{II.4.9}$$

Divisons la preuve de ce théorème en des étapes dont chacune sera représentée par la démonstration d'un lemme.

Lemme 4.9.1 *Supposons que* $\alpha = 0,\ g(1) = 1$ *et* $\int_0^1 sdg(s) \neq 1$. *Alors* L *est un opérateur de Fredholm d"indice* 0; *de plus on peut définir les projections continues* $P : X \to X$, $Q : Z \to Z$ *et l'opérateur linéaire* $K_P = \left(L\mid_{\ker L \cap D(L)}\right)^{-1} : \operatorname{Im} L \to \ker L \cap D(L)$ *par:*

$$\begin{aligned}(Px)(t) &= x'(0)t,\ Qy = \frac{1}{1-\int_0^1 sdg(s)}\left[\int_0^1 y(s)\,ds - \int_0^1\int_0^s y(\tau)\,d\tau dg(s)\right]\\ \text{et}\quad (K_P y)(t) &= \int_0^t \int_0^s y(\tau)\,d\tau ds.\end{aligned}$$

En outre

$$\|K_P y\| \leq \|y\|_{L^1}.$$

Démonstration. Sous les conditions données on a

$$Lx = x'' = 0 \Leftrightarrow x(t) = ct + d,\ \text{où } c,\ d \text{ sont des constantes réelles;}$$

et comme $x(0) = 0$, alors $d = 0$ donc

$$\ker L = \{x \in D(L);\ x(t) = ct,\ c \in \mathbb{R},\ t \in [0,1]\}.$$

D'autre part on a

$$x'' = y \Leftrightarrow x'(s) - x'(0) = \int_0^s y(\tau)\,d\tau \Leftrightarrow \int_0^1 x'(s)dg(s) - x'(0)\int_0^1 dg(s) = \int_0^1\int_0^s y(\tau)\,d\tau dg(s);$$

après simplification on obtient

$$x'(1) - x'(0)\left(g(1) - g(0)\right) = \int_0^1 \int_0^s y\left(\tau\right) d\tau dg(s);$$

par hypothèse, $g(1) - g(0) = 1$ et comme $x'(1) - x'(0) = \int_0^1 x''\left(s\right) ds = \int_0^1 y\left(s\right) ds$, alors

$$\int_0^1 y\left(s\right) ds - \int_0^1 \int_0^s y\left(\tau\right) d\tau dg(s) = 0. \tag{III.4.9}$$

Reciproquement, pour $y \in Z$ vérifiant (III.4.9) on pose

$$x(t) = ct + \int_0^t \int_0^s y\left(\tau\right) d\tau ds$$

où c est une constante réelle, c'est clair que $x'' = y$ et $x(0) = 0$, en plus on a $x'(t) = c + \int_0^t y\left(\tau\right) d\tau$ alors

$$\begin{aligned} x'(1) &= c + \int_0^1 y\left(\tau\right) d\tau = \int_0^1 cdg(s) + \int_0^1 \int_0^s y\left(\tau\right) d\tau dg(s) \\ &= \int_0^1 \left[c + \int_0^s y\left(\tau\right) d\tau\right] dg(s) = \int_0^1 x'(s) dg(s), \end{aligned}$$

donc

$$\operatorname{Im} L = \left\{ y \in Z;\ \int_0^1 y\left(s\right) ds - \int_0^1 \int_0^s y\left(\tau\right) d\tau dg(s) = 0 \right\}.$$

D'après ce qui précède, $\ker L$ est isomorphe à $\mathbb{R}$ donc $\dim \ker L = 1$ et comme $\operatorname{Im} L = \ker Q = Q^{-1}\left(\{0\}\right)$, $\operatorname{Im} L$ est fermé. Soit à présent $y_1 = y - Qy$ avec $y \in Z$,

$$\begin{aligned} Qy_1 &= \frac{1}{1 - \int_0^1 sdg(s)} \left[\int_0^1 (y\left(s\right) - Qy) ds - \int_0^1 \int_0^s (y\left(\tau\right) - Qy) d\tau dg(s)\right] \\ &= Qy - \frac{Qy}{1 - \int_0^1 sdg(s)} (1 - \int_0^1 sdg(s)) = 0, \end{aligned}$$

alors $y_1 \in \operatorname{Im} L$. donc $Z = \operatorname{Im} L + Z_1$, où $Z_1 = \{y \in Z;\ y \text{ est constante sur } [0,1]\}$ et comme $\operatorname{Im} L \cap Z_1 = \{0\}$, on a bien

$$Z = \operatorname{Im} L \oplus Z_1;$$

ce qui montre que $\dim Z_1 = co \dim \operatorname{Im} L = 1$ donc L est un opérateur de Fredholm d'indice 0. K_P est l'inverse généralisé de l'opérateur $L : D(L) \cap \ker P \to Z$ en effet, pour $y \in \operatorname{Im} L$ on a

$$\left(LK_P y\right)(t) = \left(K_P y\right)''(t) = y\left(t\right);$$

et pour $x \in D(L) \cap \ker P$

$$\begin{aligned}
\left(K_P L x\right)(t) &= \int_0^t \int_0^s (Lx)(\tau)\, d\tau ds = \int_0^t \int_0^s x''(\tau)\, d\tau ds \\
&= \int_0^t \left[x'(s) - x'(0)\right] ds = x(t) - x(0) - x'(0)t \\
&= x(t),
\end{aligned}$$

car nous avons par hypothèse $x \in \ker P$ et $x(0) = 0$. Pour tout $y \in \operatorname{Im} L$, $t \in [0,1]$

$$\left|\left(K_P y\right)(t)\right| \leq \int_0^1 \int_0^1 |y(s)|\, ds dt = \|y\|_{L^1}, \left|\left(K_P y\right)'(t)\right| = \left|\int_0^t y(\tau)\, d\tau\right| \leq \|y\|_{L^1};$$

alors $\|K_P y\| = \max(\|K_P y\|_\infty, \left\|(K_P y)'\right\|_\infty) \leq \|y\|_{L^1}$. ■

Lemme 4.9.2 *Si l'hypothèse* (h_1) *et la condition* *(II.4.9) du théorème précédent sont remplis, alors il existe* $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{r}$ *fonctions de* $L^1([0,1])$ *telles que*

$$|f(t,x,y)| \leq \overline{a}(t)\,|x| + \overline{b}(t)\,|y| + \overline{r}(t).$$

Démonstration. Sans perte de généralité, on suppose que $\beta = \|d\|_{L^1} \neq 0$. Soit $\gamma \in \left]0, \frac{1}{2\beta}\left(\frac{1}{2} - (\|a\|_{L^1} + \|b\|_{L^1})\right)\right[$, alors il existe $\overline{M} > 0$ tel que

$$|x|^\theta \leq \gamma\,|x| + \overline{M} \text{ et } |y|^\theta \leq \gamma\,|y| + \overline{M}.$$

(h_1) entraine que

$$|f(t,x,y| \leq \left(a(t) + \gamma d(t)\right)|x| + \left(b(t) + \gamma d(t)\right)|y| + 2d(t)\,\overline{M} + r(t);$$

en posant $\overline{a}(t) = a(t) + \gamma d(t)$, $\overline{b}(t) = b(t) + \gamma d(t)$ et $\overline{r}(t) = r(t) + 2\overline{M}d(t)$, l'inégalité précédente devient

$$|f(t,x,y)| \leq \overline{a}(t)\,|x| + \overline{b}(t)\,|y| + \overline{r}(t).$$

Évidemment, $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{r} \in L^1([0,1])$ et comme

$$\begin{aligned}
\|\overline{a}\|_{L^1} &\leq \|a\|_{L^1} + \gamma\,\|d\|_{L^1}, \\
\left\|\overline{b}\right\|_{L^1} &\leq \|b\|_{L^1} + \gamma\,\|d\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

Alors

$$\|\overline{a}\|_{L^1} + \left\|\overline{b}\right\|_{L^1} < (\|a\|_{L^1} + \|b\|_{L^1}) + \left(\frac{1}{2} - (\|a\|_{L^1} + \|b\|_{L^1})\right) = \frac{1}{2}.$$

Donc on peut remplacer dans (h_1), les fonctions a, b, d, r par $\overline{a}$, $\overline{b}, 0, \overline{r}$. ■

Lemme 4.9.3 *Si les hypothèses* (h_1), (h_2) *sont satisfaites et si* $\alpha = 0$, $g(1) = 1$ *et* $\int_0^1 sdg(s) \neq 1$; *alors*

$$\Omega_1 = \{x \in D(L) \diagdown \ker L;\ Lx = \lambda Nx,\ \lambda \in [0,1]\}$$

est un sous-ensemble borné de X.

Démonstration. Soit $x \in \Omega_1$, alors il existe $\lambda \in [0,1]$ tel que $Lx = \lambda Nx$ avec $x \in \ker P$ (i.e. $x'(0) = 0$). Donc $\lambda \neq 0$ et $QNx = 0$ (car $Nx = L\left(\frac{1}{\lambda}x\right) \in \operatorname{Im} L$), par suite

$$\int_0^1 f(s,\ x(s),\ x'(s))ds - \int_0^1 \int_0^s f(\tau, x(\tau),\ x'(\tau))\, d\tau dg(s) = 0,$$

d'après l'hypothèse (h_2), il existe $t_0 \in [0,1]$ tel que $|x'(t_0)| \leq M$. Compte tenu de

$$x'(0) = x'(t_0) - \int_0^{t_0} x''(s)ds,$$

alors nous avons

$$\begin{aligned}
|x'(0)| &\leq |x'(t_0)| + \int_0^{t_0} \left|x''(s)\right| ds \\
&\leq M + \|x''\|_{L^1} = M + \|Lx\|_{L^1} \\
&\leq M + \lambda \|Nx\|_{L^1} \\
&\leq M + \|Nx\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

À nouveau pour $x \in \Omega_1$, on sait d'après le lemme (4.9.1) que

$$\begin{aligned}
\|(I-P)x\| &= \|K_P L(I-P)x\| \\
&\leq \|L(I-P)x\|_{L^1} = \|Lx\|_{L^1} \leq \|Nx\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

De ces deux derniers resultats on déduit que

$$\|x\| \leq \|Px\| + \|(I-P)x\| = |x'(0)| + \|(I-P)x\| \leq M + 2\|Nx\|_{L^1}.$$

D'après (h_1) et le lemme (4.9.2), on obtient

$$\|Nx\|_{L^1} = \int_0^1 |f(s,\ x(s),\ x'(s))|\, ds \leq \|\overline{a}\|_{L^1} \|x\|_\infty + \left\|\overline{b}\right\|_{L^1} \|x'\|_\infty + \|\overline{r}\|_{L^1},$$

donc

$$\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq 2(\|\overline{a}\|_{L^1} \|x\|_\infty + \left\|\overline{b}\right\|_{L^1} \|x'\|_\infty + \|\overline{r}\|_{L^1} + \frac{M}{2});$$

alors

$$\|x\|_\infty \leq \frac{2}{1-2\|\overline{a}\|_{L^1}} \left(\left\|\overline{b}\right\|_{L^1} \|x'\|_\infty + \|\overline{r}\|_{L^1} + \frac{M}{2} \right),$$

car $1-2\|\overline{a}\|_{L^1} \geq 1-2\left(\|\overline{a}\|_{L^1} + \left\|\overline{b}\right\|_{L^1}\right) > 0$. D'autre part on a

$$\begin{aligned}
\|x'\|_\infty &\leq \|x\| \\
&\leq \frac{4\|\overline{a}\|_{L^1}}{1-2\|\overline{a}\|_{L^1}} \left(\left\|\overline{b}\right\|_{L^1} \|x'\|_\infty + \|\overline{r}\|_{L^1} + \frac{M}{2} \right) + \\
&\quad 2(\left\|\overline{b}\right\|_{L^1} \|x'\|_\infty + \|\overline{r}\|_{L^1} + \frac{M}{2}) \\
&= \left(\frac{2\left\|\overline{b}\right\|_{L^1}}{1-2\|\overline{a}\|_{L^1}} \right) \|x'\|_\infty + \left(\frac{2}{1-2\|\overline{a}\|_{L^1}} \right) \left(\|\overline{r}\|_{L^1} + \frac{M}{2} \right)
\end{aligned}$$

après simplification on obtient

$$\|x'\|_\infty \leq \frac{2}{1-2\left(\|\overline{a}\|_{L^1} + \left\|\overline{b}\right\|_{L^1}\right)} \left(\|\overline{r}\|_{L^1} + \frac{M}{2} \right) = M_1,$$

par suite

$$\|x\|_\infty \leq \frac{2}{1-2\|\overline{a}\|_{L^1}} \left(\left\|\overline{b}\right\|_{L^1} M_1 + \|\overline{r}\|_{L^1} + \frac{M}{2} \right) = M_{2.}.$$

Alors

$$\|x\| = \max\left(\|x\|_\infty, \|x'\|_\infty\right) \leq \max(M_1, M_{2.}).$$

De ce qui précède on conclut également que $\|x''\|_{L^1} = \|Lx\|_{L^1} \leq \|Nx\|_{L^1} \leq \|\overline{a}\|_{L^1} M_2 + \left\|\overline{b}\right\|_{L^1} M_1 + \|\overline{r}\|_{L^1}$; donc Ω_1 est borné. ∎

Lemme 4.9.4 *Si l'hypothèse (h_2) est vérifié, alors l'ensemble*

$$\Omega_2 = \{x \in \ker L;\ Nx \in \operatorname{Im} L\}$$

est borné.

Démonstration. Soit $x \in \Omega_2$, alors $x \in \ker L$ (i.e. $x = ct$) et $QNx = 0$ car $Nx \in \operatorname{Im} L = \ker Q$; par conséquent on peut écrire

$$\int_0^1 f(s,\ cs,\ c)ds - \int_0^1 \int_0^s f(\tau, c\tau,\ c)\, d\tau dg(s) = 0,$$

de l'hypothèse (h_2), on déduit qu'il existe $t_1 \in [0,1]$ tel que $|x'(t_1)| = |c| \leq M$. Comme dans ce cas on a

$$\|x\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} |x(t)| = |c| = \|x'\|_\infty;$$

alors $\|x\| \leq M$ donc Ω_2 est borné. ∎

Lemme 4.9.5 *Si la première partie de l'hypothèse* (h_3) *est satisfaite, alors*

$$\frac{c}{1-\int_0^1 sdg(s)}\left[\int_0^1 f(s,\ cs,\ c)ds-\int_0^1\int_0^s f\left(\tau,c\tau,\ c\right)d\tau dg(s)\right]<0,$$

pour tout $c\notin[-M^*,M^*]$ *et l'ensemble* $\Omega_3=\{x\in\ker L;-\lambda x+(1-\lambda)\,JQNx=0,\ \lambda\in[0,1]\}$ *est borné.* ($J:\operatorname{Im}Q\to\ker L$ *désigne l'isomorphisme défini par* $(Jc)(t)=ct,$ *pour tout* $c\in\mathbb{R}$ *et* $t\in[0,1]$*).*

Démonstration. Soit $x=c_0t\in\Omega_3$, alors on a

$$\begin{aligned}\lambda c_0 t &= (1-\lambda)\,tQNx\\ &= \frac{(1-\lambda)\,t}{1-\int_0^1 sdg(s)}\left[\int_0^1 f(s,\ cs,\ c)ds-\int_0^1\int_0^s f\left(\tau,c\tau,\ c\right)d\tau dg(s)\right]\end{aligned}$$

où $t\in[0,1]$, donc

$$\lambda c_0=\frac{1-\lambda}{1-\int_0^1 sdg(s)}\left[\int_0^1 f(s,\ cs,\ c)ds-\int_0^1\int_0^s f\left(\tau,c\tau,\ c\right)d\tau dg(s)\right];$$

pour $\lambda=1$ on obtient $c_0=0$. Par ailleurs, si $|c_0|>M^*,$ d'après la première partie de l'hypothèse (h_3) et le faite que $\int_0^1 sdg(s)\le\int_0^1 dg(s)=g(1)-g(0)=1$ avec $1-\int_0^1 sdg(s)\neq 0$, on a

$$\lambda c_0^2=\frac{(1-\lambda)\,c_0}{1-\int_0^1 sdg(s)}\left[\int_0^1 f(s,\ cs,\ c)ds-\int_0^1\int_0^s f\left(\tau,c\tau,\ c\right)d\tau dg(s)\right]<0;$$

qui représente une contradiction avec $\lambda c_0^2\ge 0$. Alors $\|x\|=|c_0|\le M^*$. ■

La preuve du théorème (4.9.1) est une conséquence immédiate des lemmes ci-dessus et le théorème de continuation de Mawhin.

Démonstration. Posons $\Omega=\{x\in X;\ \|x\|\le R\}=B\left(0,R\right)$ tel que $\overset{3}{\underset{i=1}{\cup}}\Omega_i\subset\Omega$. On peut utiliser le théorème d'Ascoli-Arzela pour montrer que l'opérateur $K_{P,Q}=K_P(I-Q)$ soit compact sur $\overline{\Omega}$. Ensuite par les lemmes précédentes on a

(i) $Lx\neq\lambda Nx$, pour tout $x\in(D(L)\diagdown\ker L)\cap\partial\Omega$ et $\lambda\in\,]0,1[$ (car $\Omega_1\cap\partial\Omega\times\,]0,1[\,=\varnothing$).

(ii) $Nx\notin\operatorname{Im}L$, pour tout $x\in\ker L\cap\partial\Omega$ (car $\Omega_2\cap\partial\Omega=\varnothing$).

(iii) On a $H(x,\lambda) = -\lambda x + (1-\lambda)\, JQNx \neq 0$, pour tout $x \in \ker L \cap \partial\Omega$ (car $\Omega_3 \cap \partial\Omega = \varnothing$); alors par la propriété d'invariance par homotopie du degré on obtient

$$\begin{aligned}
\deg_B\left(JQN\mid_{\ker L},\ \ker L \cap \Omega,\ 0\right) &= \deg_B\left(H(.,0),\ \ker L \cap \Omega,\ 0\right) \\
&= \deg_B\left(H(.,1),\ \ker L \cap \Omega,\ 0\right) \\
&= \deg_B\left(-I,\ \ker L \cap \Omega,\ 0\right).
\end{aligned}$$

Comme $\ker L \cap \Omega = \{ct; |c| < R\}$ est isomorphe à l'interval $]-R,R[$ (de l'espace de dimension 1 $\mathbb{R}$), alors

$$\begin{aligned}
\deg_B\left(-I,\ \ker L \cap \Omega,\ 0\right) &= \deg_B(-I,\ ]-R,R[\,,\ 0) \\
&= (-1)^1 \deg_B(I,\ ]-R,R[\,,\ 0) = -1.1 = -1 \neq 0.
\end{aligned}$$

Donc l'équation $Lx = Nx$ admet au moins une solution $x \in D(L) \cap \overline{\Omega}$.

■

Remarque 4.9.1 *Si la deuxième partie de l'hypothèse* (h_3) *est vérifiée c'est à dire que*

$$\frac{c}{1-\int_0^1 sdg(s)}\left[\int_0^1 f(s,\ cs,\ c)ds - \int_0^1 \int_0^s f(\tau, c\tau,\ c)\, d\tau dg(s)\right] > 0$$

pour tout $c \notin [-M^*, M^*]$, *dans ce cas on démontre que l'ensemble*

$$\Omega_3 = \{x \in \ker L;\ \lambda x + (1-\lambda)\, JQNx = 0,\ \lambda \in [0,1]\}$$

est borné et que

$$\deg_B\left(JQN\mid_{\ker L},\ \ker L \cap \Omega,\ 0\right) = \deg_B\left(I,\ \ker L \cap \Omega,\ 0\right) = 1;$$

dés que $0 \in \ker L \cap \Omega$.

Théorème 4.9.2 *Soit* $f : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *une fonction continue verifiant la condition* (h_1) *du théorème précédant. De plus supposons que*

(h_4) *il existe une constante* $M > 0$, *tel que pour* $x \in D(L)$, *si* $|x(t)| > M$ *pour tout* $t \in [0,1]$, *alors*

$$\int_0^1 f(s,\ x(s),\ x'(s))ds - \int_0^1 \int_0^s f(\tau, x(\tau),\ x'(\tau))\, d\tau dg(s) \neq 0,$$

(h_5) *il existe une constante $M^* > 0$, tel que pour tout $e \notin [-M^*, M^*]$, on a ou bien*

$$e\left[\int_0^1 f(s,\ e,\ 0)ds - \int_0^1 \int_0^s f(\tau,\ e,\ 0)d\tau dg\,(s) < 0,\right]$$

ou bien

$$e\left[\int_0^1 f(s,\ e,\ 0)ds - \int_0^1 \int_0^s f(\tau,\ e,\ 0)d\tau dg\,(s) > 0.\right]$$

Alors le problème (I.4.9) avec $\alpha = 1$, $g(1) = 1$ et $\int_0^1 sdg(s) \neq 1$ admet au moins une solution $x \in C^1([0,1])$ à condition que

$$\|a\|_{L^1} + \|b\|_{L^1} < \frac{1}{2}.$$

Démonstration. En utilisant la même méthode que dans la démonstration du théorème et les lemmes précédents, dans ce cas nous avons

$$\begin{aligned}
\ker L &= \{x \in D(L);\ x\,(t) = e \in \mathbb{R},\ t \in [0,1]\}\ \text{(car } x(0) = x(\eta)\text{) et} \\
\operatorname{Im} L &= \left\{y \in Z;\ \int_0^1 y\,(s)\,ds - \int_0^1 \int_0^s y\,(\tau)\,d\tau dg(s) = 0\right\}.
\end{aligned}$$

L est opérateur de Fredholm d'indice 0 car $\dim \ker L = co\dim \operatorname{Im} L = 1$ et $\operatorname{Im} L$ est fermé. On définit les projections continues $P : X \to X$, $Q : Z \to Z$ par

$$(Px)\,(.) = x\,(0)\ \text{ et } Qy = \frac{1}{1 - \int_0^1 sdg(s)}\left[\int_0^1 y\,(s)\,ds - \int_0^1 \int_0^s y\,(\tau)\,d\tau dg(s)\right];$$

Soit l'opérateur $K_P : \operatorname{Im} L \to D(L) \cap \ker P$ défini par

$$(K_P y)\,(t) = -\frac{t}{\eta}\int_0^\eta \int_0^s y\,(\tau)\,d\tau ds + \int_0^t \int_0^s y\,(\tau)\,d\tau ds,$$

pour tout $y \in \operatorname{Im} L$, $x \in D(L) \cap \ker P$, on obtient après simplifications que

$$\begin{aligned}
(LK_P y)\,(t) &= \left(-\frac{t}{\eta}\int_0^\eta \int_0^s y\,(\tau)\,d\tau ds + \int_0^t \int_0^s y\,(\tau)\,d\tau ds\right)'' = 0 + y\,(t)\ \text{ et} \\
(K_P Lx)\,(t) &= -\frac{t}{\eta}\int_0^\eta \int_0^s x''\,(\tau)\,d\tau ds + \int_0^t \int_0^s x''\,(\tau)\,d\tau ds \\
&= x'(0)t + x(t) - x(0) - x'(0)t = x(t);
\end{aligned}$$

car $\ker P = \{x \in X;\ x(0) = 0\}$ alors $K_P = \left(L\,|_{D(L)\cap\ker P}\right)^{-1}$. D'autre part, pour tout $y \in \operatorname{Im} L$ nous avons

$$|(K_P y)\,(t)| \leq \frac{t}{\eta}\int_0^\eta \|y\|_{L^1}\,ds + \int_0^t \|y\|_{L^1}\,ds = 2t\,\|y\|_{L^1} \leq 2\,\|y\|_{L^1}$$

et

$$\begin{aligned} \left|(K_P y)'(t)\right| &= \left|-\frac{1}{\eta}\int_0^\eta \int_0^s y(\tau)\,d\tau ds + \int_0^t y(\tau)\,d\tau\right| \\ &\leq \frac{1}{\eta}\int_0^\eta \|y\|_{L^1} ds + \|y\|_{L^1} = 2\|y\|_{L^1}; \end{aligned}$$

il en resulte que $\|K_P y\| \leq 2\|y\|_{L^1}$. Soit $x \in \Omega_1 = \{x \in D(L) \setminus \ker L;\ Lx = \lambda Nx,\ \lambda \in [0,1]\}$, alors $Lx = \lambda Nx$ et $\lambda \neq 0$ ceci entraine que $Nx \in \operatorname{Im} L = \ker Q$; donc

$$\int_0^1 f(s, x(s), x'(s))ds - \int_0^1 \int_0^s f(\tau, x(\tau),\ x'(\tau))\,d\tau dg(s) = 0.$$

De l'hypothèse (h_4) on déduit qu'il existe $t_0 \in [0,1]$ vérifiant $|x(t_0)| \leq M$ et compte tenu de $x(0) = x(t_0) - \int_0^{t_0} x'(s)ds$; on obtient

$$|x(0)| \leq M + \|x'\|_\infty,$$

comme $x(0) = x(\eta)$, le théorème de Rolle implique qu'il existe $t_1 \in]0, \eta[$ tel que $x'(t_1) = 0$. De la relation $x'(t) = x'(t_1) + \int_{t_1}^t x''(s)\,ds$, on déduit que

$$\|x'\|_\infty \leq \|x''\|_{L^1}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \|Px\| &= |x(0)| \leq M + \|x''\|_{L^1} \\ &= M + \|Lx\|_{L^1} = M + \lambda\|Nx\|_{L^1} \leq M + \|Nx\|_{L^1}. \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant la même méthode que dans les preuves des lemmes (4.9.2) et (4.9.3), nous pouvons prouver que Ω_1 est également borné. Similaire aux preuves des autres lemmes (4.9.4) - (4.9.5) et le théorème (4.9.1), on peut démontrer le théorème (4.9.2).

Exemple 4.9.1 *Soit le problème*

$$\begin{cases} x''(t) = t^3 + 8 + \sin^3 x + \frac{1}{9}(t+1)\,x' \\ x(0) = 0 \ \ et \ \ x'(1) = \int_0^1 x'(s)\,dg(s); \end{cases}$$

où $t \in [0,1]$ *et* $g(s) = s^2$. *On remarque que* $f(t,x,y) = t^3 + 8 + \sin^3 x + \frac{1}{9}(t+1)\,y$ *et que* $g(0) = 0,\ g(1) = 1,\ \int_0^1 sdg(s) = \int_0^1 2s^2 ds = \frac{2}{3} \neq 1$, *on peut écrire aussi*

$$\begin{aligned} |f(t,x,y)| &\leq 1^3 + 8 + 1 + \frac{1}{9}(1+1)\,|y| \\ &= 0\,|x| + \frac{2}{9}\,|y| + 10 \\ &= a(t)\,|x| + b(t)\,|y| + r(t); \end{aligned}$$

avec

$$\|a\|_{L^1} + \|b\|_{L^1} = \frac{2}{9} < \frac{1}{2}.$$

On sait que pour tout fonction constante e *on a* $e = \int_0^1 edg(s)$, *alors*

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 f(s, x(s), x'(s))ds - \int_0^1 \int_0^s f(\tau, x(\tau), x'(\tau))d\tau dg\,(s) \\
= &\int_0^1 \int_0^1 f(\tau, x(\tau), x'(\tau))d\tau dg\,(s) - \int_0^1 \int_0^s f(\tau, x(\tau), x'(\tau))d\tau dg\,(s) \\
= &\int_0^1 \left[\int_0^1 f(\tau, x(\tau), x'(\tau))d\tau - \int_0^s f(\tau, x(\tau), x'(\tau))d\tau\right] dg\,(s) \\
= &\int_0^1 \int_s^1 f(\tau, x(\tau), x'(\tau))d\tau dg\,(s)\,.
\end{aligned}$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned}
yf(t,\ x,\ y) &= \frac{1}{9}\,(t+1)\,y^2 + \left(t^3 + 8 + \sin^3 x\right) y \\
&= y\left(\frac{1}{9}\,(t+1)\,y + t^3 + 8 + \sin^3 x\right);
\end{aligned}$$

alors

$$yf(t,x,y) > 0 \Leftrightarrow y > 0 \ \text{ou}\ y < -\frac{t^3 + 8 + \sin^3 x}{\frac{1}{9}\,(t+1)} \leq -\frac{1+8-1}{\frac{1}{9}\,(1+1)} = -36,$$

en d'autre terme f *et* $x'(t)$ *ont la même signe quand* $|x'(t)| > M$, *nous pouvons choisir* $M = M^* = 36$. *Alors les conditions du théorème (4.9.1) sont satisfaites ce qui montre que le problème donné admet au moins une solution* $x \in X$.

■

Bibliographie

[1] Bresis H., Analyse Fonctionnelle Théorie et Applications; Masson Paris, 1987.

[2] Cañada A., Drábek P., and Fonda A., Handbook of Differentials equations, Vol. II, Elsevier North Holland 2005.

[3] Capietto A., Mawhin J., and Zanolin F., On the existence of two solutions with a prescribed number of zeros for a superlinear two-point boundary value problem, in "Topological Methods in Nonlinear Analysis", Jour. of the J. Schauder Center Vol. 6, 1995, 175–188.

[4] Chicone C., Ordinary Differential Equations with Applications, Springer Verlag, New York, 1999.

[5] Chang K.Ch., Methods in Nonlinear Analysis, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2005.

[6] Deimling K., Nonlinear Functional Analysis, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo, 1985.

[7] Djebali S., Le degré topologique théorie et applications, E.N.S. Kouba 2007.

[8] Dinca G. and Mawhin J., Brouwer Degree and Application, January 17, 2009.

[9] De Coster C., and Habets P., Two-Point Boundary Value Problems (Lower and Upper Solutions), Elsevier, 2006.

[10] Faure R., Solutions périodiques d'équations différentielles et méthode de Leray-Shauder (cas des vibrations forcées), Annales de l'institut de Fourier, tome 14, n° 1, (1964), p.195 -204.

[11] Fonda A., Guiding functions and periodic solutions to functional equations, Amer. Math. Soc. Vol. 99, $n^0$1,(1987),79 -85.

[12] Fonda A., and Mawhin J., Quadratic forms, weighted eigenfunctions and boundary value problems for nonlinear second order ordinary differential equations, Royal Soc. of Edinburgh, 112A 1989, 145 -153.

[13] Fonda A., and Mawhin J., Planar differential systems at resonance, Advances in Differential Equations, Vol. 11, Num. 10 (2006), 1111–1133.

[14] Fonda A., Positively homogeneous hamiltonian systems in the plane, J. Dif. Equ. 200 (2004) 162–184.

[15] Fonda A., and Zanolin F., Bounded solutions of nonlinear second order ordinary differential equations, in " Discrete and continuous dynamical systems" Vol. 4 $N^0$1, 1998, 91-98.

[16] Fonseca I., and Gangbo W., Degree Theory in Analysis and Applications, Oxford Science Publications, Clarendon Press Oxford, 1995.

[17] Gámez J.L., and Ruiz J.F., Bifurcation of solutions of elliptic problems: Local and global behaviour, in "Topological Methods in Nonlinear Analysis", J. of the J. Schauder Center, Vol. 23, 2004, 203 -212.

[18] Gaines R.E. and Jairo Santanilla M., A coincidence theorem in convex sets with applications to periodic solutions of ordinary differential equations, J. of Math. Vol. 12, Num. 4, (1982), 669-678.

[19] Henrard M., Degré topologique et existence d'une infinité de solutions d'un problème aux limites pour une équation singulière, Portugalia Math., Vol. 52 Fasc. 2 - 1995.

[20] Hetzer G., and Stallbohm V., Coincidence degree and Rabinowitz's bifurcation theorem, Pub. Inst. de Math. nouvelle série, tome 20 (34) 1976, 117- 129.

[21] Jordon D.W., and Smith P., Nonlinear Ordinary Differential Equations: Problems and Solutions, A Sourcebook for Scientists and Engineers, Oxford University Press, New York, 2007.

[22] Kielhöfer H., Bifurcation Theory: An Introduction with Applications to PDEs, Apl. Math. scien. Vol 156, Springer-Verlag New York, Inc. 2004.

[23] Krasnosel'skii M.A. and Zabreiko P.P., Geometrical methods of nonlinear Analysis, Springer-Yerlag. Berlin, 1984.

[24] Lazer A.C., and Solimini S., On periodic solutions of nonlinear differential equations with singularities, Proc. Amer. Math. Soc. 99 (1987), 109-114

[25] Leray J., Étude de diverses équations integrales et de quelque problèmes que pose l'hydrodynamique, J. Math. Pures Appl.12 (1933),1- 82.

[26] Leray J. et Schauder J., Topologie et équations fonctionnelles, Ann. scien. de l'$E.N.S$ 3^e série, tome 51(1934), 45 - 78.

[27] Liret F., Maths à l'usage des étudiants en pratique, Dunod, 2006.

[28] Massera J.L., The existence of periodic solutions of systems of differential equations, Duke Math. J. 17 (1950), 457-475.

[29] Mawhin J., Topological degree and boundary value problems for nonlinear differential equations, in "Topological Methods for Ordinary Differential Equations", M. Furi, P. Zecca ed., Lect. Notes in Math. No. 1537, Springer, Berlin, 1993, 80 - 148.

[30] Mawhin J., and Ward J.R., Periodic solutions of some forced Lienard differential equations at resonance, Arch. Math. (Basel), 41 (1983), 337-351.

[31] Mawhin J., Topological degree methods in nonlinear boundary value problems, CBMS 40, Amer. Math. Soc, Providence, R.I., 1979.

[32] Mawhin J., Leray-Schauder continuation theorems in the absence of a priori bounds, in "Topological Methods in Nonlinear Analysis", J. of the Schauder Center, Vol. 9, 1997, 179 -200.

[33] Mawhin J., Leray-Schauder degree: a half century of extensions and applications, J. of the J. Schauder Center, Vol.14 (1999),195- 228.

[34] Mawhin J., Degré topologique et solutions des systèmes différentiels non linéaires, Bul. de la Soc. Roy. des Scien. de Liege, 38^e année, n^0 7 -8,1969, 308 -398.

[35] O'Regan D., Cho Y.J., and Chen Y.Q., Topological Degree Theory and Applications, Vol. 10 Chapman & Hall/CRC, 2006.

[36] O'Regan D. and Zima M., Leggett-Williams norm-type theorems for coincidences, Arch. Math. 87(2006), 233–244.

[37] Ortega R. and Tarallo M., Almost periodic equation and condition of Ambrosetti-Prodi type, Math. Proc. Cambr. Philo. Soc. 135 (2003), 239 -254.

[38] Ortega R., Some Applications of the topological degree to stability Theory, Dep. de Mat. Apl., Univ. de Granada, Notes by Juan Compos.

[39] Ortega R., Stability and index of periodic solutions of an equation of Dufing type, Boll. Un. Math. Ital.(7) 3-B(1989), 533- 546.

[40] Papini D., and Zanolin F., A topological approach to superlinear indefinite boundary value problems, in "Topological Methods in Nonlinear Analysis", J. of the Schauder Center, Vol. 15, 2000, 203–233.

[41] Papini D., and Zanolin F., Differential equation with indefinite weight boundary value problems and qualitative properties of the solutions, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino, Vol. 60, 4 (2002) Turin Lectures.

[42] Petryshyn W.V., Generalized Topological Degree and Semilinear Equations, Camb. Univ. Press, 1995.

[43] Rachunková I., Method of lower and upper functions and the existence of solutions to singular periodic problems for nonlinear differential equations of order two, Math. Notes, Miskolc, Vol. 1., No. 2., (2000), 135–143.

[44] Schmitt K., and Thompson R. C., Nonlinear Analysis and Differential Equations: An Introduction, November 11, 2004.

[45] Taddei V., and Zanolin F., Bound sets and two-point boundary problems for second order differential equations, Geor. Math. Jour, Vol. 14, Num. 2, (2007) 385–402.

[46] Ureña A. J., Nonlinear Boundary Value Problems, PhD Thesis, Granada, November, 5, 2002.

[47] Villari G., and Zanolin F., On forced nonlinear oscillations of a second order equation with strong restoring term, Funkcialaj Ekvacioj, 31 (1988) 383-395.

[48] Xiaojie L., Existence of solutions to a nonlocal boundary value problem with nonlinear growth; Hind. Pub. Corp., Vol. 2011, 15 pages.

[49] Zanolin F., Continuation theorems for the periodic problems via the translation operator, Rend. Sem. mat. Univ. pol. Torino, Vol. 54, 1996, 1 -23.

[50] Zhang M., Lectures on Periodic Solutions of Nonlinear Diferential Equations,Tsinghua University, September 13, 2006.

[51] Zima M., Positive solutions for first-order boundary value problems at resonance, Com. in App. Ana. 13 (2009), no. 4, 671- 680.