

N° d'ordre :

N° de série :

**UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA**

---

**Faculté des Sciences et de la Technologie et Sciences de la Matière**  
**DEPARTEMENT DES**  
**MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE**

---

**MAGISTER**

**Spécialité : Mathématiques**

**Option : Analyse numérique et E. D. P**

**Par : Habita Khaled**

**THÈME**

**Étude du phénomène de verrouillage rencontré dans l'approximation  
par éléments finis des coques élastiques minces**

**Soutenu publiquement le :** \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_ le devant le jury composé de :

Mr. <b>D. A. CA</b>	M. C à l'université de KASDI MERBAH – Ouargla	Président.
Mr. <b>A.AB</b>	Pr. à l'université Larbi BEN M'HIDI – Oum Bouaghi	Examineur
Mr. <b>A.GC</b>	M. C à l'université de KASDI MERBAH – Ouargla	Examineur
Mr. <b>S. M.D</b>	M. C à l'université de KASDI MERBAH – Ouargla	Rapporteur

# Remerciements

*Je tiens en premier lieu à exprimer mes plus vifs remerciements à Monsieur Djamel Ahmed CHACHA, mon Directeur de thèse pour l'intéressant sujet qu'il m'a proposé.*

*Je lui suis également reconnaissant pour la confiance qu'il m'a accordée. Il m'est impossible de lui exprimer toute ma gratitude en seulement quelques lignes.*

*J'adresse mes plus vifs remerciements aux Monsieur SAID Mohamed Said et Monsieur TAMRABET Abdellah pour avoir accepté d'examiner ce travail et Monsieur SETTOU Nourddine qui me fait l'honneur d'être président de mon jury.*

*Je voudrais également remercier tous les membres du département de mathématique et surtout son directeur et mon professeur Monsieur Mostafa ACILA et tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin pour achever ce travail.*

*Je tiens à remercier tous mes amis et mes collègues et surtout ceux avec qui on a passé une période agréable à l'université de Kasdi Merbeh de Ouargla.*

*Je voudrais également remercier toute ma famille, mes parents, mes frères, mes sœurs, mon époux et mes fils qui m'ont toujours soutenu et encouragé.*

# Table des matières

<b>Notations et conventions</b>	<b>iv</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Notions générales sur les méthodes des éléments finis et le phénomène de verrouillage</b>	<b>5</b>
1.1 Introduction . . . . .	5
1.2 Les grandes lignes des méthodes des éléments finis . . . . .	7
1.2.1 Théorie abstraite de l'approximation variationnelle . . . . .	8
1.2.2 Interpolation par éléments finis et les techniques de construction de $V_h$	11
1.3 Les méthodes mixtes et la condition inf-sup . . . . .	13
1.3.1 Une généralisation du théorème de Lax-Milgram . . . . .	14
1.3.2 Problèmes de type point selle et leurs approximations . . . . .	15
1.4 Le phénomène de verrouillage pour une classe de problèmes elliptiques : une condition suffisante générale pour le remède et un exemple . . . . .	27
1.4.1 Introduction et définition du verrouillage . . . . .	27
1.4.2 Le problème continu . . . . .	29
1.4.3 Une famille de problèmes discrets . . . . .	34
1.4.4 Une condition suffisante pour la convergence uniforme . . . . .	36
1.4.5 Exemple : le problème d'arche . . . . .	42

<b>2</b>	<b>Rappel de quelques notions générales sur la théorie classique des coques élastiques minces</b>	<b>51</b>
2.1	Description de la géométrie d'une coque . . . . .	52
2.1.1	Surface moyenne d'une coque. Base covariante et base contravariante	52
2.1.2	Définition géométrique de la coque non déformée . . . . .	53
2.1.3	Première et seconde formes fondamentales . . . . .	54
2.1.4	La dérivée covariante d'un vecteur et les symboles de Christoffel . . .	57
2.2	Comportement et classification des coques élastiques minces . . . . .	58
2.2.1	Classification des surfaces et lignes asymptotiques . . . . .	59
2.2.2	Modèles de coques : Koiter et Naghdi . . . . .	64
2.2.3	Coques inhibées - Coques non inhibées : Comportement asymptotique	72
2.2.4	Classification des coques selon l'énergie dominante . . . . .	81
<b>3</b>	<b>Problème de verrouillage pour les coques élastiques minces</b>	<b>82</b>
3.1	Introduction . . . . .	82
3.2	Considérations générales concernant le verrouillage des coques minces . . . .	84
3.2.1	Position du problème : . . . . .	85
3.2.2	Processus de passage à la limite et conséquence sur le verrouillage . .	87
3.2.3	Toute approximation polynômiale est nécessairement verrouillante . .	91
3.3	Une méthode d'éléments finis robuste pour les problèmes des coques de Naghdi à flexion dominante . . . . .	97
3.3.1	Introduction . . . . .	97
3.3.2	Une reformulation robuste du problème . . . . .	99
3.3.3	Estimation abstraite d'erreur avec une supposition de stabilisation . .	101
3.3.4	Éléments finis mixtes et stabilité . . . . .	103
3.3.5	Relaxation de la condition " $h^2 < C\varepsilon$ " : . . . . .	109
3.3.6	Technique de l'intégration réduite . . . . .	112
	<b>Annexes</b>	<b>115</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>121</b>

# Notations et conventions

Dans toute la suite de ce mémoire, nous utiliserons les notations suivante :

1) Dans toute la suite de ce mémoire, nous utiliserons des lettres grecques,  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ , pour des indices prenant leurs valeurs dans l'ensemble  $\{1, 2\}$ , des lettres latines,  $i, j, k, \dots$ , pour des indices prenant leurs valeurs dans l'ensemble  $\{1, 2, 3\}$ .

2) Nous adoptons la convention de sommation sur les indices répétés haut et bas, par exemple :

$$u_i v^i = \sum_{i=1}^{i=3} u_i v^i, \quad u_\alpha v^\alpha = \sum_{\alpha=1}^{i=2} u_\alpha v^\alpha,$$

3) Pour la dérivation par rapport à une variable nous utiliserons la notation :  $u_{,\alpha} = \frac{\partial u}{\partial x^\alpha}$ .

4) En vue de faire l'écriture des équations plus simple et plus compacte, nous nous servons, par fois, de la notation alternée comme dans [9], [11] et [23], ainsi on écrit :

$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3), \quad \underline{x} = (x_\alpha) = (x_1, x_2) \quad \text{et} \quad \underline{\lambda} = (\lambda_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{pmatrix}, \quad \text{où } \lambda_{12} = \lambda_{21}.$$

5)  $a$  : le déterminant de la matrice  $(a_{\alpha\beta}) = \det (a_{\alpha\beta}) = a_{11}a_{22} - (a_{12})^2$ .

$\vec{a}_\alpha$  : base covariante du plan tangent.

$\vec{a}^\alpha$  : base contravariante du plan tangent.

$\vec{a}_3$  : vecteur unitaire normal au plan tangent.

$\vec{a}_3$  : normale unitaire à la surface moyenne déformée.

$a_3^\star$  : "transformée" du vecteur  $\vec{a}_3$  après déformation.

$a_{\alpha\beta}$  : première forme fondamentale ( $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha} = \vec{a}_\alpha \cdot \vec{a}_\beta$ ).

$a^{\alpha\beta}$  : première forme fondamentale ( $a^{\alpha\beta} = a^{\beta\alpha} = \vec{a}^\alpha \cdot \vec{a}^\beta$ ).

$b_{\alpha\beta}, b_\beta^\alpha, b^{\alpha\beta}$  : second forme fondamentale.

$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$  : symboles de Christoffel.

- $v_{\beta|\alpha} = v_{\beta,\alpha} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} v_{\gamma}$ , : dérivation covariante à partir d'une dérivation usuelle.
- $\rightharpoonup$  : convergence faible.
- $ds$  : élément de longueur.
- $dS$  : élément de surface.
- $E^3; E^2$  : espaces euclidiens.
- $\vec{e}_i$  : vecteurs du repère orthonormé fixe de  $E^3$ .
- $\xi^{\alpha}$  : coordonnées curvilignes de la surface.
- $\xi^3$  : coordonnée normale.
- $\Omega$  : domaine (ouvert connexe borné de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 2$ ) de référence.
- $\bar{\Omega}$  : fermeture de  $\Omega$ .
- $\Gamma = \partial\Omega$  : frontière de  $\Omega$ .
- $\Gamma_0$  : partie encastrée de  $\Gamma$ .
- $\Gamma_1$  : partie libre de  $\Gamma$ .
- $S, \bar{S}$  : surface moyenne de la coque.
- $M$  : point courant de la coque.
- $T_M$  : le plan tangent à  $\bar{S}$  en  $M$ .
- $\vec{\phi}$  : carte définissant la surface moyenne.
- $P$  : la projection orthogonale du point  $M$  sur la surface moyenne non déformée.
- $\vec{U}$  : champ de déplacement de la coque tridimensionnelle.
- $\vec{u}$  : champ de déplacement de la surface moyenne.
- $u_i$  : composantes covariantes de  $\vec{u}$ .
- $\theta_{\alpha}$  : composantes de la rotation de la normale  $\vec{a}_3$
- $E$  : module de Young.
- $\nu$  : coefficient de Poisson.
- $a^{\alpha\beta\gamma\delta}$  : le tenseur d'élasticité de la coque.
- $a(.,.)$  : forme bilinéaire usuelle.
- $a^{RM}(.,.)$  : forme bilinéaire associée au modèle linéaire de Naghdi.
- $a^K(.,.)$  : forme bilinéaire associée au modèle linéaire de Koiter.
- $V$  : espace de Hilbert des fonctions admissibles.
- $V_h$  : espace de Hilbert approché de  $V$ .

$V^{RM}$  : espace des déplacements admissibles pour le modèle linéaire de Naghdi.

$V^K$  : espace des déplacements admissibles pour le modèle linéaire de Koiter.

$f(\cdot)$  : forme linéaire (énergie potentielle des charges extérieures).

$\Upsilon_{\alpha\beta}$  : composantes covariantes du tenseur de changement de courbure de la surface moyenne.

$\Lambda_{\alpha\beta}$  : composantes covariantes du tenseur de déformations membranaires.

$\Phi_\alpha$  : composantes covariantes du tenseur de cisaillement transverse.

$\tau_h$  : une famille de triangulations de  $\Omega$  indexée par (la taille du maillage)  $h$

$K, T$  : triangle courant.

$h_K = \text{diam}(K)$  : diamètre du triangle  $K$ .

$h = \max_{K \in \tau_h} \text{diam}(K)$ .

$\rho_K$  : la rondeur du triangle  $K$  ( $\rho_K = \sup \{\text{diam}(\beta); \beta \text{ boule de } \mathbb{R}^2, \beta \subset K\}$ ).

$\mathbf{P}_k$  : espace des polynômes de deux variables  $x_1, x_2$  à coefficients réels et de degré globale inférieur ou égal à  $k$ .

$\pi_h, \Pi_h$  : opérateure d'interpolation linéaire.

$P_k(T)$  : espace des polynômes définis sur le triangle  $T$  de deux variables à coefficients réels et de degré global inférieur ou égal à  $k$ .

$\mathbf{C}^0(\bar{\Omega})$  : espace des fonctions définies et continues sur  $\bar{\Omega}$ .

$\mathbf{C}^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$  : espace des fonctions höldériennes d'ordre  $\alpha$  sur  $\bar{\Omega}$ , c'est à dire l'espace des fonctions  $f$  continues sur  $\Omega$  telles que

$$\sup_{x,y \in \Omega} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} < +\infty.$$

$\mathbf{C}^{m,\alpha}(\bar{\Omega})$  : espace des fonctions  $f \in \mathbf{C}^m(\Omega)$  telles que

$$D^j f \in \mathbf{C}^{0,\alpha}(\bar{\Omega}), \quad \forall j, |j| \leq m.$$

# Introduction générale

Les équations aux dérivées partielles décrivent un grand nombre de phénomènes dans notre environnement, surtout dans les domaines de la physique et de la mécanique.

Dans la plupart des cas, il n'est pas possible d'en trouver des solutions analytiques c'est à dire que le calcul explicite de la solution exacte de ce genre d'équations est souvent hors d'être atteint. C'est pourquoi, d'une manière générale, le problème exacte est approché par un problème discret qui peut être résolu par les méthodes numériques.

Avec le progrès des performances des ordinateurs et le développement des méthodes numériques (surtout les méthodes des éléments finis qui sont apparues dans les années 1950-1955 pour l'approximation des problèmes, posé en mécanique des milieux continus, développés par des ingénieurs puis étudiés par des mathématiciens), la simulation numérique est devenue pour l'ingénieur un outil plus souple, plus facile à réaliser et plus économique que la simulation expérimentale et tend de plus en plus à s'y substituer.

On s'intéresse ici à étudier les problèmes des coques élastiques minces par les méthodes des éléments finis en sachant qu'il existe d'autres méthodes numériques pour approcher les solutions des équations aux dérivées partielles comme la méthode des différences finies et la méthode des volumes finies, ...ect.

Dans la littérature mécanique : une coque mince est une structure tridimensionnelle caractérisée par une épaisseur très petite par rapport aux autres dimensions caractéristiques, si nous supposons que  $\varepsilon$  est le rapport de l'épaisseur à une autre caractéristique de la coque on doit avoir :  $\varepsilon < \frac{1}{10} \min(L_1, L_2)$  où  $L_1, L_2$  sont les autres dimensions caractéristiques. Ce type de structure apparaît fréquemment dans des constructions courantes (ponts, toits de bâtiments, ...) dans la conception industrielle (turbines, pièces mécaniques, carrosseries

d'automobiles,...) et même dans le monde vivant (artères, branches,...). De fait, celles ci sont des structures légères qui répondent d'une manière efficace aux efforts qu'elles subissent, principalement grâce à la courbure de leur surfaces.

Dans le milieu industriel, l'objectif principal est d'obtenir une structure la plus mince et la plus robuste (rigide) possible pour utiliser un minimum de matériau dans sa construction, tandis que par exemple, en biomécanique la modélisation et simulation numérique du couplage fluide\structure mince peut apporter de l'information pour le traitement de divers pathologie, comme les anévrismes<sup>(1)</sup>.

Afin de simuler numériquement le comportement de ces structures minces, il est important de formuler des méthodes d'éléments finis qui soient robustes vis-à vis au *verrouillage numérique*, mais c'est quoi le *verrouillage numérique* ?

Pour en donner ici une idée générale on peut dire que le *verrouillage numérique* est un phénomène indésirable ou une pathologie qui se produit lorsqu'on cherche à approximer la solution  $u^\varepsilon$  d'une formulation variationnelle par une méthode d'éléments finis, on dit alors qu'il y'a *verrouillage numérique* quand **les estimations d'erreur** optimales, que l'on peut démontrer pour un schéma d'approximation donné à  $\varepsilon$  fixé, **dégénèrent**, lorsque l'on fait tendre  $\varepsilon$  vers zéro. Dans la section §1.4 on va donner une définition mathématique claire et précise de ce phénomène.

Pour donner un sens à ce terme dans le cas des structures minces, on peut affirmer que la signification communément admise semble être *l'incapacité des champs de déplacements discrétisés à représenter une classe particulière de déplacements que la formulation tend à favoriser*. Pour les coques, cette classe se compose des déplacements pour les quels la normale à la surface moyenne reste normale après la déformation (hypothèse de Kirchhoff-Love), et la métrique de la surface moyenne elle-même reste inchangée (espace des flexions purs on l'appelle aussi espace des déplacements inextensionnels).

D'autre part il faut noter que le *verrouillage numérique* est l'une des difficultés majeures dans la formulation d'éléments finis robustes pour l'analyse numérique des structures minces,

---

<sup>(1)</sup>Un anévrisme ou anévrysme est une dilatation localisée de la paroi d'une artère aboutissant à la formation d'une poche de taille variable, communiquant avec l'artère au moyen d'une zone rétrécie que l'on nomme le collet. Sa forme habituelle est celle d'un sac, son diamètre pouvant atteindre plusieurs centimètres.

mais ce phénomène concerne aussi les formulations incompressibles de la mécanique des milieux continus en particulier.

Des nombreux travaux ont été réalisés dans la recherche de remèdes contre cette pathologie. Les *méthodes mixtes* - dont les fondements théoriques ont été établis par Babuška (1973) et Brezzi (1974)- constituent un outil efficace pour la conception et l'analyse rigoureuse des méthodes numériques qui échappent au verrouillage, en particulier dans la mécanique des fluides incompressibles et les modèles de plaques (voir [17]).

Pour les coques la situation est radicalement différente :

malgré que ce phénomène a préoccupé les ingénieurs depuis plusieurs décennies il semble qu'il n'a pas encore -modulo quelques années, puisque nous ne sommes pas au courant de ce qui passe au niveau du domaine de recherche - trouvé de solution "définitive".

La présence de coefficients géométriques variables (notamment les courbures) dans les formulations des coques rend impraticable la technique classique de démonstration de *la condition inf-sup* : le lemme de Fortin.

Le but de ce mémoire est essentiellement d'exposer quelques résultats importants choisis parmi un très grand nombre de recherches : on donne une condition nécessaire et suffisante pour le remède de cette pathologie pour les coques minces et deux exemples de méthodes d'éléments finis échappent au verrouillage; l'une concernant les problèmes d'arches qui n'utilise pas les méthodes mixtes (voir [7]) et l'autre concerne les coques minces qui utilise une formulation mixte similaire à celle de Arnold et Brezzi (voir [9]) et une condition inf-sup relaxée proposée dans [23].

Donc dans le premier chapitre on va exposer très rapidement les grandes lignes des méthodes des éléments finis et les méthodes mixtes puis on va présenter le phénomène de verrouillage dans un cadre abstrait de problèmes elliptiques qui dépendent d'un petit paramètre. L'analyse asymptotique de ces problèmes nous a permis de dégager une condition générale suffisante pour le remède de cette pathologie et on termine ce chapitre par une application sur les problèmes d'arches (voir [7]) : on donne un schéma d'éléments finis qui possède un comportement verrouillant et un autre *robuste* qui n'utilise pas les méthodes mixtes.

Dans le second on va rappeler la théorie classique de coques élastiques minces. On donne une description de la géométrie d'une coque puis, pour bien isoler les coques concernées par le phénomène du verrouillage des autres, on fait une classification des coques selon :

- La nature de sa surface moyenne.
- La prise en compte ou non des effets des déformations de cisaillement transverse : modèle de Naghdi et le modèle de Koiter.
- La rigidité géométrique ou non de sa surface moyenne : coques inhibées et non inhibées.
- L'énergie de déformation dominante de la coque.

Dans le troisième chapitre on donne premièrement quelques considérations générales concernant le verrouillage des coques élastiques minces puis on présente une méthode d'éléments finis robuste pour les problèmes des coques de Naghdi à flexion dominante qui utilise une formulation mixte similaire à celle de Arnold et Brezzi et une condition inf-sup relaxée proposée dans [23].

# Chapitre 1

## Notions générales sur les méthodes des éléments finis et le phénomène de verrouillage

### 1.1 Introduction

De nombreux problèmes physiques sont formulés de la façon suivante :

$$\begin{cases} Au = f & \text{sur } \Omega, \\ Bu = g & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \quad (1.1.1)$$

où  $\Omega$  est un ensemble (généralement un domaine) de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\Gamma$  la frontière de  $\Omega$ ,  $A$  et  $B$  des opérateurs différentiels,  $f$  et  $g$  sont des fonctions données et  $u$  la solution du problème. Ce genre de problèmes est appelé “problèmes aux limites”<sup>(1)</sup>. Les inconvénients liés à ce

---

<sup>(1)</sup>Définition : On appelle **problème aux limites** une équation aux dérivées partielles munie de conditions aux limites sur la totalité de la frontière du domaine sur lequel elle est posée.

Définition : On appelle **problème de Cauchy** une équation aux dérivées partielles où, pour au moins une variable (généralement le temps  $t$ ) les conditions “au bord” sont des conditions initiales (i.e., ne portent que sur un bord  $t = 0$ , et pas en  $t = T$ ).

De nombreux modèles sont à la fois des problèmes aux limites et des problèmes de Cauchy ( pour plus de détails voir [40]).

type de formulation sont essentiellement dus à la trop grande régularité que l'on exige des différents paramètres, c'est pourquoi on introduit souvent ce qu'on appelle "la formulation faible", ou "la formulation variationnelle" du problème (1.1.1) qui s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in V \text{ tel que :} \\ a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V. \end{cases} \quad (1.1.2)$$

où  $V$  est un espace de fonctions admissibles (un espace de Hilbert) et  $a(\cdot, \cdot)$ ,  $L(\cdot)$  sont des formes bilinéaire et linéaire utilisant des intégrales sur  $\Omega$  et  $\Gamma$ .

Ce second type de formulation est souvent plus conforme à la réalité physique. Par exemple en élasticité, la forme quadratique  $\frac{1}{2}a(v, v)$  représente l'énergie de déformation du milieu, associée à un déplacement virtuel  $v$ , tandis que  $L(v)$  représente l'énergie potentielle des forces extérieures appliquées au milieu, associée au même déplacement  $v$ .

Naturellement, la résolution exacte des équations (1.1.1) et (1.1.2) est généralement impossible et l'on est conduit à rechercher des approximations de la solution. C'est là où la méthode des éléments finis se montre comme une méthode numérique de référence pour le calcul des solutions des problèmes aux limites surtout celles qui sont elliptiques. À l'heure actuelle la méthode des éléments finis occupe une place de premier plan dans le monde de calcul scientifique.

L'idée de base de cette méthode est de remplacer l'espace de Hilbert  $V$  sur lequel est posée la formulation variationnelle, qui est généralement de dimension infinie, par un sous-espace  $V_h$  de **dimension finie**, pour n'avoir qu'un nombre finie d'inconnues ou ce qu'on appelle "degrés de liberté" (qui seront les composantes de la solution approchée  $u_h$  dans une base de  $V_h$ ), puis on définit cette solution approchée  $u_h$  de la solution  $u$  comme étant la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \text{trouver } u_h \in V_h \text{ tel que :} \\ a(u_h, v_h) = L(v_h), \quad \forall v_h \in V_h, \end{cases} \quad (1.1.3)$$

qui se ramène donc à la résolution d'un système linéaire dont la matrice est appelée matrice de rigidité (qui sera définie positive et symétrique quand  $a$  sera coercive et symétrique).

On montre alors :

i) que le problème (1.1.3) admet une solution unique  $u_h$ ; pour cela, on utilise l'inclusion  $V_h \subset V$ , ce qui permet de se ramener au résultat d'existence et d'unicité de la solution pour le problème continu (1.1.2);

ii) que la convergence de la solution approchée  $u_h$  vers la solution  $u$  est directement liée aux propriétés d'approximation des fonctions  $v \in V$  par les fonctions  $v_h \in V_h$ .

Ainsi, la construction de l'espace  $V_h$  constitue la clé de voûte de la méthode d'approximation variationnelle. L'objet de la méthode des éléments finis est précisément de construire des familles d'espaces  $V_h$  qui ont des propriétés d'approximation convenables et qui conduisent à une mise en œuvre numérique satisfaisante.

Ce pendant, appliquée dans le calcul des structures minces la méthode des éléments finis rencontre une difficulté sérieuse : *le verrouillage numérique*.

Dans ce chapitre on va rappeler premièrement les principaux techniques d'interpolation par éléments finis, puis on va donner, dans la deuxième section, une généralisation du théorème de Lax-Milgram (théorème de Nécas) qui est la base théorique des méthodes mixtes, dont les fondements ont été mis en place dans les années soixante-dix par Babuška et Brezzi et quelques résultats concernant des problèmes de type point selle puis on étudie le phénomène de verrouillage dans cadre abstrait de problèmes elliptiques et on termine par un exemple de problèmes d'arches.

## 1.2 Les grandes lignes des méthodes des éléments finis

Dans cette section, on ne va pas exposer la méthode des éléments finis et ses différentes variantes à cause de la nature de ce mémoire, mais on va rappeler quelques résultats dont nous avons besoin ultérieurement. Le lecteur désirant se familiariser avec ce sujet pourra consulter par exemple [33] et [37] pour une introduction, ou bien [4], [34] et [36] (chapitre 12) pour une étude plus détaillée. On va premièrement rappeler quelques résultats concernant la théorie abstraite de l'approximation variationnelle des problèmes aux limites elliptiques, puis on rappelle la notion d'élément fini et les techniques d'interpolation des fonctions définies sur un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , qui servent à la construction concrète des espaces d'interpolation

$V_h$ , en insistant sur le cas où  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  puisque on va faire une approximation *bidimensionnelle* d'un problème d'élasticité tridimensionnelle comme on va le voir dans le chapitre 2.

### 1.2.1 Théorie abstraite de l'approximation variationnelle

On se donne un espace de Hilbert  $V$  sur  $\mathbb{R}$ , muni d'une norme notée  $\|\cdot\|$ , et une forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  continue sur  $V \times V$  et  $V$ -elliptique, c'est à dire une forme bilinéaire pour laquelle il existe deux constantes  $M > 0$  et  $\alpha > 0$  telles que

$$\forall u \in V, \quad \forall v \in V, \quad a(u, v) \leq M\|u\|\|v\|, \quad (1.2.1)$$

$$\forall u \in V, \quad a(u, u) \geq \alpha\|u\|^2, \quad (1.2.2)$$

et soit une forme linéaire  $L$  continue sur  $V$ , on sait alors que, d'après le théorème de Lax-Milgram (annexe théorème A.10), le problème (1.1.2) admet une solution et une seule.

**Remarque 1.2.1** *Dans le théorème de Lax-Milgram, la condition (1.2.2) peut être, évidemment, remplacé par la condition*

$$\inf_{u \in V} \frac{a(u, u)}{\|u\|^2} = \inf_{\substack{u \in V \\ \|u\|=1}} a(u, u) > 0.$$

*Dans ce mémoire, nous commettrons systématiquement l'abus de notation d'écrire, par exemple,*

$$\sup_{u \in V} \frac{a(u, u)}{\|u\|^2} \text{ au lieu de } \sup_{\substack{u \in V \\ v \neq 0}} \frac{a(u, u)}{\|u\|^2}.$$

On suppose maintenant que  $V_h$  est un sous-espace de  $V$  de dimension finie et dépendant d'un paramètre  $h > 0$  destiné à tendre vers zéro. On note  $I(h)$  la dimension de  $V_h$ ; en pratique  $V_h$  doit représenter une approximation de l'espace  $V$ , dans le sens où le nombre de degrés de liberté puisse être aussi grand que possible, de manière à approcher la solution exacte de manière la plus précise possible. Autrement dit, on souhaite que la dimension  $I(h)$  de  $V_h$  tende vers  $+\infty$  quand  $h$  tend vers zéro (par exemple,  $I(h)$  est inversement proportionnel à  $h$ ) i.e.,

$$\lim_{h \rightarrow 0} I(h) = +\infty.$$

Plus précisément, on fera les hypothèses suivantes sur les espaces  $V_h$ .

**Définition 1.2.1** On dit que les espaces  $V_h$ ,  $h > 0$ , forment une approximation interne (on dit aussi approximation conforme) de  $V$  si :

1) pour tout  $h > 0$ ,  $V_h \subset V$ ,

2) pour tout  $v \in V$  on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[ \inf_{v_h \in V_h} \|v - v_h\| \right] = 0, \quad (1.2.3)$$

ou, en d'autres termes

$$\forall v \in V, \forall \varepsilon > 0, \exists h_0 > 0 \text{ telle que : } \{0 < h < h_0 \Rightarrow \exists v_h \in V_h : \|v - v_h\| < \varepsilon\}.$$

Le choix de ces espaces  $V_h$  étant fait, on associe pour chaque  $h > 0$  le "problème approché" (1.1.3) qui admet, en appliquant toujours le théorème de Lax-Milgram, une solution unique.

Examinons maintenant l'erreur commise lorsqu'on approche la solution  $u$  du (1.1.2) par la solution  $u_h$  du (1.1.3). La simplicité du résultat fondamental suivant est une première justification de la méthode d'approximation variationnelle.

**Théorème 1.2.1 (lemme de Céa) :** Soit  $V$  un espace de Hilbert et  $V_h$  un sous-espace de  $V$  de dimension finie. On suppose que la forme linéaire  $L$  est continue sur  $V$  et la forme bilinéaire  $a$  vérifie (1.2.1) et (1.2.2), de sorte que le problème variationnel (1.1.2) et le problème variationnel approché associé (1.1.3) admettent, respectivement,  $u$  et  $u_h$  comme solutions uniques. Alors on a une première estimation de l'erreur entre  $u$  et  $u_h$  sous la forme

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|. \quad (1.2.4)$$

Par conséquent, d'après (1.2.3), il suffit que la famille  $(V_h)_{h>0}$  forme une approximation interne de  $V$  pour avoir

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\| = 0, \quad (1.2.5)$$

c'est à dire pour que la solution approchée  $u_h$  converge vers la solution exacte  $u$ .

**Preuve.** Soit  $v_h$  un élément quelconque de  $V_h$ , posons  $w_h = v_h - u_h$ .

Puisque  $V_h$  est un sous-espace de  $V$ , l'élément  $w_h$  appartient à  $V_h$  et donc à  $V$ .

Or  $u$  et  $u_h$  sont solutions de (1.1.2) et (1.1.3) d'où

$$\begin{cases} a(u, w_h) = L(w_h), \\ a(u_h, w_h) = L(w_h), \end{cases}$$

on obtient par soustraction

$$a(u - u_h, w_h) = 0,$$

et donc, en utilisant la bilinéarité de  $a$  on trouve

$$a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h).$$

On déduit alors de (1.2.1) et (1.2.2) que

$$\alpha \|u - u_h\|^2 \leq a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h) \leq M \|u - u_h\| \|u - v_h\|,$$

et comme  $v_h$  est un élément quelconque de  $V_h$  on trouve aisément (1.2.4).

■

**Remarque 1.2.2** Dans le cas où la forme bilinéaire  $a$  est, de plus, symétrique, la solution du problème (1.1.2) est caractérisée comme étant la solution du problème de minimisation :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ solution de} \\ J(u) = \min_{v \in V} J(v), \end{cases} \quad (1.2.6)$$

où  $J$  est la fonctionnelle quadratique définie sur  $V$  par

$$J(v) = \frac{1}{2} a(u, v) - L(v).$$

**Remarque 1.2.3** Comme  $d(u, V_h) = \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\| = \|u - \pi_h(u)\|$  (où  $\pi_h(u)$  est appelé l'interpolé de  $u$  par l'opérateur de projection orthogonale  $\pi_h : V \rightarrow V_h$ ) donc le théorème 1.2.1 montre que le problème de l'évaluation de l'erreur  $u - u_h$  se ramène à un problème d'évaluation de la distance, dans  $V$ , entre la solution exacte  $u$  et le sous-espace  $V_h$  de  $V$ .

Comme une conséquence du théorème 1.2.1, on a le résultat général de convergence suivant :

**Théorème 1.2.2** *On suppose qu'il existe un sous-espace  $W$  de  $V$  dense dans  $V$  et une application  $r_h$  de  $W$  dans  $V_h$  tels que*

$$\forall v \in W, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|v - r_h(v)\| = 0.$$

*Alors la méthode d'approximation variationnelle converge au sens (1.2.5).*

## 1.2.2 Interpolation par éléments finis et les techniques de construction de $V_h$

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  un domaine (on convient ici d'appeler domaine un ouvert borné connexe de  $\mathbb{R}^d$ ) polygonal, i.e., tel que sa frontière  $\Gamma$  est une union finie de segments. Posons

$$V = H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega); \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq d \right\}, \quad (1.2.7)$$

l'espace de Sobolev bien connu. L'idée générale de construction de l'espace d'approximation  $V_h$  consiste à recouvrir  $\bar{\Omega}$  par des éléments de petite taille (distinée à tendre vers 0) et de forme simple, essentiellement des triangles ou des rectangles pour  $d = 2$ , notés par  $T_j$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, N_T\}$ , donc on aura

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{j \in \{1, 2, \dots, N_T\}} T_j,$$

et on dit qu'on a construit un maillage de  $\Omega$ .

On note  $\tau_h$  l'ensemble de tous les éléments  $T_j$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, N_T\}$ , ainsi formés,  $h$  est défini par

$$h = \max_{j \in \{1, 2, \dots, N_T\}} h(T_j)$$

où  $h(T_j)$  désigne le diamètre de  $T_j$ , i.e., la distance maximale entre deux points quelconques de  $T_j$ . En générale  $\tau_h$  s'appelle une "triangulation" de  $\Omega$ , et on utilise cette terminologie même si les éléments sont des rectangles.

On considère maintenant une famille de triangulations du domaine  $\Omega$ , indexée par  $h$  et notée par  $(\tau_h)_h$  avec la condition  $h \rightarrow 0$  qui signifie que tous les éléments  $T_j$  ont un diamètre qui tend vers zéro. Ces éléments doivent satisfaire un certain nombre de contraintes très connues pour qu'on peut dire que la triangulation est admissible (voir par exemple [33]). Après cela l'espace  $V_h$  peut être construit de plusieurs manières, citons la plus importante.

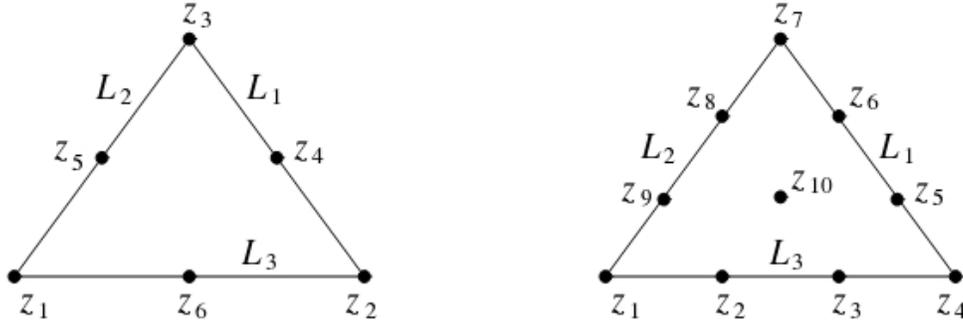


Figure 1.2.1 : Exemples d'éléments finis de Lagrange avec leurs degrés de libertés pour  $k = 2$  et  $k = 3$

### Éléments finis de Lagrange $\mathbf{P}_k$

Si  $d = 2$  et  $\Omega$  est supposé recouvert d'une famille de triangles  $T_j \in \tau_h$ , on note par  $\mathbf{P}_k$  l'espace des polynômes de deux variables  $x_1, x_2$  à coefficients réels et de degré globale inférieur ou égal à  $k$ , i.e.,

$$\mathbf{P}_k = \left\{ p(\underline{x}) = p(x_1, x_2) = \sum_{0 \leq i+j \leq k} \alpha_{ij} x_1^i x_2^j, \alpha_{ij} \in \mathbb{R} \right\},$$

on vérifie aisément que  $\mathbf{P}_k$  est un espace vectoriel de dimension  $\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$ .

L'espace d'approximation  $V_h$  de l'espace  $V$  définie en (1.2.7) est généralement défini, dans ce cas, de la forme suivante (Pour les détails de construction de ces espaces d'interpolation on peut voir [33], [37], [36], ou bien [4]), (voir aussi figure 1.2.1) :

$$V_h^k = \{ v_h \in \mathbf{C}^0(\bar{\Omega}); \quad \forall T_j \in \tau_h, v_h|_{T_j} \in \mathbf{P}_k \}. \quad (1.2.8)$$

On montre que cet espace est un espace de Hilbert, de dimension finie, pour la norme induite par celle de  $V$ . D'autre part, pour une famille de triangulations  $(\tau_h)_h$  on montre aussi que les espaces  $(V_h^k)$  forment une approximation conforme de  $V$  au sens de la définition 1.2.1. Pour plus de détails voir par exemple [33] ou [37].

**Remarque 1.2.4** *Il est important de signaler qu'on a proposé ici seulement l'interpolation par des fonctions continues alors qu'il existe dans le domaine une large variante pour construire des éléments finis. Il y a par exemple les éléments finis de Hermite qui donne une interpolation par des fonction de classe  $C^1$  où les  $V_h \subset C^1(\bar{\Omega})$  et l'interpolation par des fonctions discontinues où les  $V_h \subset L^2(\Omega)$  et plusieurs autres.*

## Méthode de Galerkin

La méthode de Galerkin a été un précurseur de la méthode des éléments finis. Bien qu'elle n'a pas d'intérêt numérique en générale, elle est très utile d'un point de vue théorique (notamment pour l'étude des problèmes non-linéaires). Elle rentre dans le cadre de l'approximation variationnelle décrit ci-dessus.

On suppose ici que l'espace de Hilbert  $V$  est séparable de dimension infinie ce qui entraîne qu'il existe une base hilbertienne  $(e_i)_{i \geq 1}$  de  $V$ . On choisit alors le sous-espace engendré par cette base hilbertienne comme espace dense dans  $V$ . En posant  $h = \frac{1}{n}$ , on définit  $V_h$  comme le sous-espace de dimension finie engendré par  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  et on peut appliquer facilement le théorème 1.2.2.

Malgré son adéquation au cadre théorique, la méthode de Galerkin est peu commode d'un point de vue numérique. En effet, la matrice de rigidité  $\mathbf{K}_h$  que l'on obtient ainsi est généralement **“pleine”**, c'est à dire que tous ces coefficients sont non nuls en général, et **“mal-conditionnée”**, c'est à dire que la résolution numérique du système linéaire sera instable car très sensible aux erreurs d'arrondi du calcul sur ordinateur. De ce point de vue, la méthode des éléments finis est bien plus performante et de loin préférable à la méthode de Galerkin.

## 1.3 Les méthodes mixtes et la condition inf-sup

Les méthodes des éléments finis dans les quelles on utilise deux espaces pour approcher deux variables inconnues reçoivent la dénomination générale de *“méthodes mixtes”*.

Il est connu depuis assez longtemps (les années 70) des méthodes efficaces pour le deverrouillage d'une méthode d'éléments finis, mais les méthodes mixtes introduites par Babuška (1973) et Brezzi (1974) ont apporté une véritable révolution dans ce domaine.

La philosophie de ces méthodes, appliquée pour le deverrouillage d'une méthode d'éléments finis standard, consiste à *reformuler le problème variationnel par l'introduction d'une inconnue auxiliaire et de discrétiser à la fois l'inconnue primitive et cette nouvelle inconnue*.

On obtient ainsi un système variationnel qui pose un problème de type point selle à résoudre et à discrétiser.

On va présenter dans cette section le cadre théorique général de ces méthodes et quelques résultats qui sont utiles à notre travail, pour plus de détails sur ces méthodes et leurs applications on pourra voir par exemple [17].

### 1.3.1 Une généralisation du théorème de Lax-Milgram

Le théorème suivant, dû à Nečas (voir [25]) a joué un rôle fondamental dans la théorie des méthodes mixtes. C'est une excellente généralisation du théorème de Lax-Milgram, puisqu'elle suppose que la forme bilinéaire  $a$  est continue sur  $V \times W$  et de plus elle donne une condition nécessaire et suffisante pour que le problème soit bien posé, tandis que le théorème de Lax-Milgram ne donne qu'une condition suffisante.

**Théorème 1.3.1 (Nečas) :** *Soient  $V$  et  $W$  deux espaces de Hilbert,  $f \in W'$  et  $a : V \times W \longrightarrow \mathbb{R}$  une forme bilinéaire continue sur l'espace de Hilbert  $V \times W$  i.e.,*

$$\exists \alpha > 0 \text{ telle que : } |a(u, v)| \leq \alpha \|u\|_V \cdot \|v\|_W, \quad \forall (u, v) \in V \times W.$$

Alors le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V \text{ telle que :} \\ a(u, v) = f(v), \quad \forall v \in W, \end{array} \right. \quad (1.3.1)$$

est bien posé si et seulement si :

(1) Il existe une constante  $\gamma > 0$  telle que :

$$\inf_{u \in V} \sup_{v \in W} \frac{a(u, v)}{\|u\| \cdot \|v\|} \geq \gamma > 0. \quad (1.3.2)$$

(2) et on a

$$\forall v \in W, \quad (\forall u \in V, a(u, v) = 0) \Rightarrow (v = 0). \quad (1.3.3)$$

**Remarque 1.3.1** *Si on pose  $V_1 = \{u \in V : \|u\| = 1\}$ ,  $W_1 = \{v \in W : \|v\| = 1\}$ , la condition (1.3.2) peut se réécrire sous l'une des formes suivantes*

$$\begin{aligned} \inf_{u \in V_1} \sup_{v \in W_1} a(u, v) &> 0, \\ \sup_{\substack{v \in W \\ \|v\| \leq 1}} a(u, v) &\geq \gamma \|u\|, \quad \forall u \in V. \end{aligned}$$

Elle peut se réécrire encore sous la forme

$$\forall u \in V, \quad \gamma \|u\| \leq \sup_{v \in W} \frac{a(u, v)}{\|v\|}$$

Cette forme sera fréquemment utilisée par la suite.

La condition (1.3.3) peut aussi se réécrire sous la forme

$$\sup_{u \in V_1} a(u, v) > 0, \quad \text{pour tout } v \in W - \{0\}.$$

**Remarque 1.3.2** On note que, que dans le cas où  $V = W$ , la condition d'ellipticité (1.2.2) implique que les conditions (1.3.2) et (1.3.3) sont satisfaites, donc c'est une condition suffisante pour que (1.1.2) soit bien posé. Pour le théorème de Lax-Milgram, dans le cas particulier où la forme bilinéaire  $a$  est symétrique et positive, sa coercivité est une condition nécessaire et suffisante pour que le problème (1.1.2) soit bien posé.

### 1.3.2 Problèmes de type point selle et leurs approximations

On va considérer ici une forme particulière du problème (1.3.1) qui conduit sous certaines hypothèses (voir la remarque 1.3.3) à un problème de type point selle (voir définition A.2 dans l'annexe). Ce type de problèmes mobilisent une grande partie des problèmes de mécanique et en particulier les problèmes de déformation des coques.

Soient  $V$  et  $W$  deux espaces de Hilbert,  $f \in V', g \in W'$  et deux formes bilinéaires continues  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  et  $b : V \times W \rightarrow \mathbb{R}$ . Le problème abstrait que nous considérons s'écrit sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V \text{ et } p \in W \text{ tels que :} \\ a(u, v) + b(v, p) = f(v), \quad \forall v \in V \\ b(u, q) = g(q), \quad \forall q \in W. \end{array} \right. \quad (1.3.4)$$

On peut facilement reformuler ce problème de la manière suivante :

On introduit l'espace produit  $X = V \times W$  qui est un espace de Hilbert pour la norme  $\|\varphi\|_X = \|(u, p)\|_X = (\|u\|_V^2 + \|p\|_W^2)^{\frac{1}{2}}$  pour tout  $\varphi = (u, p) \in X = V \times W$ . (voir par exemple [32]). Si on définit la forme bilinéaire  $K$  et la forme linéaire  $L$  sur l'espace  $X$  par

$$\begin{aligned} K & : X \times X \rightarrow \mathbb{R} / K(\varphi, \psi) = K[(u, p); (v, q)] = a(u, v) + b(v, p) + b(u, q), \\ L & : X \rightarrow \mathbb{R} / L(\psi) = L(v, q) = f(v) + g(q), \end{aligned}$$

le problème (1.3.4) sera équivalent au problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } \varphi = (u, p) \in X = V \times W \text{ telle que :} \\ K(\varphi, \psi) = L(\psi), \quad \forall \psi = (v, q) \in X. \end{cases} \quad (1.3.5)$$

En effet, il est clair que si  $(u, p) \in V \times W$  est solution du problème (1.3.4) alors  $(u, p) \in X$  est aussi solution de (1.3.5). Inversement, supposons que  $(u, p) \in X$  est solution de (1.3.5), i.e :

$$a(u, v) + b(v, p) + b(u, q) = f(v) + g(q), \quad \forall (v, q) \in X,$$

et en particulier pour  $(0, q) \in X$ , ce qui donne, en utilisant la linéarité de  $a$  et  $b$  :

$$b(u, q) = g(q), \quad \forall q \in W,$$

et de même pour tout  $(v, 0) \in V \times W$  on a :

$$a(u, v) + b(v, p) = f(v),$$

ce qui montre que  $(u, p) \in V \times W$  est solution du problème (1.3.4), d'où l'équivalence.

Mais le problème variationnel (1.3.5) ne peut pas être résolu par le théorème de Lax-Milgram, car la forme bilinéaire  $K$  n'est pas  $X$ -elliptique puisque pour tout  $\psi = (0, q) \in X$  on a  $K(\psi, \psi) = 0$  alors que  $\|(0, q)\|_X \neq 0$  pour  $q \neq 0$ . Cependant on peut utiliser le théorème de Nečas en choisissant  $V = W = X$ .

F. Brezzi dans le théorème suivant (voir [16]) a donné un résultat important pour l'existence et l'unicité du problème (1.3.4)

**Théorème 1.3.2 (Brezzi) :** *On suppose que la forme bilinéaire  $a$  est continue sur  $V \times V$  et  $N$ -elliptique où*

$$N = \{v \in V : \forall p \in W, b(v, p) = 0\},$$

i.e.,

$$\inf_{\{v \in N : \|v\|=1\}} a(v, v) > 0,$$

et que la forme bilinéaire  $b$  est continue sur  $V \times W$  et vérifie la condition

$$\inf_{v \in W} \sup_{u \in V} \frac{b(u, v)}{\|u\| \|v\|} = \inf_{u \in V_1} \sup_{v \in W_1} b(u, v) > 0. \quad (1.3.6)$$

Alors pour toutes les formes linéaires continues  $f \in V', g \in W'$ , le problème (1.3.4) admet une solution unique.

**Remarque 1.3.3** Nous généralisons maintenant la remarque 1.2.2 au cadre abstrait (1.3.4) lorsque la forme  $a$  est symétrique et positive. En particulier, on montre que le problème de minimisation (1.2.6) se transforme en un problème de point selle au sens de la définition A.2 dans l'annexe (voir [4] et [17]), donc on peut dire que :

le couple  $(u, p)$  est solution de (1.3.4) si et seulement si  $(u, p)$  est point selle de la fonctionnelle

$$\mathcal{L}(v, q) = \frac{1}{2}a(v, v) + b(v, q) - f(v).$$

**Remarque 1.3.4** La condition (1.3.6) est souvent appelée "**la condition inf-sup**", quelques auteurs l'appellent aussi "**la condition de Babuška-Brezzi**", le courant actuel semble utiliser l'expression "**LBB condition**" qui veut dire : la condition de Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi .

Une condition nécessaire et suffisante pour que le problème (1.3.4) soit bien posé est que la condition inf-sup soit satisfaite et que l'opérateur  $A \in \mathcal{L}(V, V)$  associé à la forme bilinéaire  $a$  est un isomorphisme (voir

On va maintenant chercher une approximation de la solution du problème abstrait (1.3.4) par la méthode de Galerkin. Le principe général consiste à remplacer dans (1.3.4) les espaces fonctionnels  $V$  et  $W$  par des espaces de dimension finie, notés  $V_h$  et  $W_h$ . Les techniques d'interpolation par éléments finis présentées brièvement dans le paragraphe §1.2.2 fournissent un moyen pratique pour construire de tels espaces. Pour des raisons de simplicité, l'accent portera sur l'étude de l'approximation conforme où  $V_h \subset V$  et  $W_h \subset W$ . Dans ces conditions les formes  $a, b, f$  et  $g$  sont définies sur  $V_h \times V_h, V_h \times W_h, V_h,$  et  $W_h,$  respectivement, et il est loisible de considérer le problème approché suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ et } p_h \in W_h \text{ tels que :} \\ a(u_h, v_h) + b(v_h, p_h) = f(v_h), \quad \forall v_h \in V_h, \\ b(u_h, q_h) = g(q_h), \quad \forall q_h \in W_h, \end{array} \right. \quad (1.3.7)$$

et de même que pour le problème continu, on introduit le sous-espace  $N_h$  de  $V_h$  défini par

$$N_h = \{v_h \in V_h : \forall p_h \in W_h, b(v_h, p_h) = 0\},$$

mais il faut faire attention ici car l'espace  $N_h$  n'est pas en général un sous-espace de  $N$ , donc la  $N$ -ellipticité de la forme  $a$  n'entraîne pas, en général, sa  $N_h$ -ellipticité. En transposant les résultats du théorème 1.3.2 au cas de dimension finie on obtient le

**Théorème 1.3.3** *On suppose que la forme bilinéaire  $a$  est  $N_h$ -elliptique, et que la forme bilinéaire  $b$  vérifie la condition*

$$\inf_{v_h \in W_h} \sup_{u_h \in V_h} \frac{b(u_h, v_h)}{\|u_h\| \|v_h\|} > 0. \quad (1.3.8)$$

*Alors pour toutes les formes linéaires continues  $f \in V'$ ,  $g \in W'$ , le problème (1.3.7) admet une solution unique.*

**Remarque 1.3.5** *La condition (1.3.8) est souvent appelée "la condition inf-sup discrète" ou bien "la condition LBB discrète", elle exprime que le choix des sous-espaces  $V_h$  et  $W_h$  ne peut pas être fait indépendamment l'un de l'autre puisque il y a une relation de compatibilité entre les deux espaces et peut être vérifié seulement pour des choix tout à fait spéciale. Cette condition, lorsqu'elle est satisfaite, exprime en fait la stabilité uniforme du schéma numérique pour la variable auxiliaire, elle peut être satisfaite pour un certain élément fini et pas pour un autre, sa vérification est par fois très difficile. En pratique, pour démontrer que la condition de compatibilité (1.3.8) est satisfaite, on utilise souvent ce qu'on appelle "le critère de Fortin" (1977) (voir par exemple [4] ou [11]).*

On va maintenant exposer la forme générique d'un problème mixte pour un modèle de structures minces.

Soient  $V$  et  $W$  deux espaces de Hilbert. On suppose qu'on a trois formes bilinéaires continues

$$A : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}, \quad B : V \times W \longrightarrow \mathbb{R}, \quad C : W \times W \longrightarrow \mathbb{R},$$

une forme linéaire continue  $F : V \longrightarrow \mathbb{R}$ , et un petit paramètre  $\varepsilon \in ]0, 1]$ .

On considère le problème abstrait  $A^\varepsilon$  suivant<sup>(1)</sup> :

$$\text{Problème } A^\varepsilon : \begin{cases} \text{Trouver } (u, p) \in V \times W \text{ telle que :} \\ A(u, v) + B(v, p) = F(v), & \forall v \in V \\ B(u, q) - \varepsilon^2 C(p, q) = 0, & \forall q \in W, \end{cases} \quad (1.3.9)$$

et on introduit sur l'espace  $W$  la semi-norme (voir [17]) suivante

$$|q|_W = \sup_{v \in V} \frac{|B(v, q)|}{\|v\|_V} = \sup_{\{v \in V: \|v\|=1\}} |B(v, q)|, \quad \text{pour tout } q \in W. \quad (1.3.10)$$

Cette semi-norme est très importante dans l'analyse asymptotique de (1.3.9), car c'est elle qui apparaît naturellement dans les estimation a priori sur la partie  $p$  de la solution de (1.3.9).

En remarquant que  $|B(v, q)| \leq \|B\| \cdot \|v\| \cdot \|q\|$  il découle que

$$|q|_W \leq \|B\| \cdot \|q\|, \quad \text{pour tout } q \in W. \quad (1.3.11)$$

**Théorème 1.3.4** *Si les formes bilinéaires  $A$  et  $C$  sont coercives i.e., ils existent deux constantes  $c_1 > 0$  et  $c_2 > 0$  telles que :*

$$A(v, v) \geq c_1 \|v\|_V^2, \forall v \in V \quad \text{et} \quad C(q, q) \geq c_2 \|q\|_W^2, \forall q \in W.$$

*Alors le problème  $A^\varepsilon$  (i.e., 1.3.9) admet une solution unique  $(u, p)$ , et de plus il existe une constante  $C$  qui dépend seulement de  $\|A\|, \|C\|, c_1$  et  $c_2$  et de  $\varepsilon$  telle que :*

$$\|u\|_V + |p|_W + \varepsilon \|p\|_W \leq C \|F\|_{V'}, \quad (1.3.12)$$

*ce qui veut dire que le problème  $A^\varepsilon$  est bien posé.*

**Preuve.** ([9]) On introduit l'espace produit  $X = V \times W$  qui est un espace de Hilbert pour la norme  $(\|u\|_V^2 + \|p\|_W^2)^{\frac{1}{2}}$  ou la norme  $\|u\|_V + \|p\|_W$ , car elles sont équivalentes (voir par exemple [32]), puis on définit la forme bilinéaire  $a$  par

$$a : X \times X \longrightarrow \mathbb{R} / a[(u, p); (v, q)] = A(u, v) + B(v, p) - B(u, q) + \varepsilon^2 C(p, q),$$

---

<sup>(1)</sup>Quand les formes  $A$  et  $C$  sont positives et symétriques ce problème correspond aussi à un problème de point selle :

$$\inf_{v \in V} \sup_{q \in W} \frac{1}{2} a(v, v) + b(v, q) - \frac{\varepsilon}{2} C(q, q) - f(v). \\ \text{(voir [17]).}$$

et sur  $X$  la forme linéaire

$$L : X \longrightarrow \mathbb{R} / L(v, q) = F(v),$$

et on pose le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u, p) \in X \text{ telle que:} \\ a[(u, p); (v, q)] = L(v, q), \quad \forall (v, q) \in X, \end{array} \right. \quad (1.3.13)$$

il est claire que le problème  $A^\varepsilon$  est équivalent, en suivant le même démarche dans le début de cette section, au problème (1.3.13).

Par conséquent, pour montrer que le problème  $A^\varepsilon$  admet une solution unique il suffit d'appliquer le théorème de Lax-Milgram sur le problème (1.3.13) mais on munissant cette fois l'espace  $X$  d'une nouvelle norme équivalente à savoir

$$\|(u, p)\|_{V \times W} = \|u\|_V + |p|_W + \varepsilon \|p\|_W.$$

En effet, d'après (1.3.11) on peut voir facilement que

$$\varepsilon.(\|u\|_V + \|p\|_W) \leq \|u\|_V + |p|_W + \varepsilon \|p\|_W \leq \max(1, \|B\| + \varepsilon).(\|u\|_V + \|p\|_W),$$

ce qui montre que les normes

$$\|u\|_V + |p|_W + \varepsilon \|p\|_W \quad \text{et} \quad \|u\|_V + \|p\|_W$$

sont équivalentes sur l'espace  $X = V \times W$ .

Maintenant en utilisant la continuité de  $A$  et  $C$  et la définition du semi-norme  $|\cdot|_W$  on a, pour tout  $(u, p), (v, q) \in V \times W$ ,

$$\begin{aligned} |a[(u, p); (v, q)]| &\leq |A(u, v)| + |B(v, p)| + |B(u, q)| + \varepsilon^2 |C(p, q)| \\ &\leq |A(u, v)| + \frac{|B(v, p)|}{\|v\|_V} \|v\|_V + \frac{|B(u, q)|}{\|u\|_V} \|u\|_V + \varepsilon^2 |C(p, q)| \\ &\leq \|A\| \|u\|_V \|v\|_V + |p| \cdot \|v\|_V + |q| \cdot \|u\|_V + \varepsilon^2 \|C\| \|p\| \|q\| \\ &\leq \max(\|A\|, 1, \|C\|).(\|u\| \|v\| + |p| \cdot \|v\| + |q| \cdot \|u\| + \varepsilon^2 \|p\| \|q\|) \\ &\leq \max(\|A\|, 1, \|C\|).(\|u\| + |p| + \varepsilon \|p\|)(\|v\| + |q| + \varepsilon \|q\|) \\ &\leq \max(\|A\|, 1, \|C\|). \|(u, p)\|_{V \times W} \cdot \|(v, q)\|_{V \times W}. \end{aligned}$$

Pour la coercivité de  $a$ , elle découle aussi de la coercivité de  $A$  et  $C$  et du fait que les normes

$$\|u\| + |p| + \varepsilon\|p\| \text{ et } (\|u\|_V^2 + \varepsilon^2\|p\|_W^2)^{\frac{1}{2}}$$

sont équivalentes sur l'espace  $X = V \times W$  car on peut voir facilement que

$$k_1(\|u\|_V^2 + \varepsilon^2\|p\|_W^2)^{\frac{1}{2}} \leq \|u\| + |p| + \varepsilon\|p\| \leq k_2\left(\frac{\|B\|}{\varepsilon} + 1\right)(\|u\|_V^2 + \varepsilon^2\|p\|_W^2)^{\frac{1}{2}}.$$

où  $k_1$  et  $k_2$  sont les constantes d'équivalence telle que

$$k_1(\|u\|_V^2 + \varepsilon^2\|p\|_W^2)^{\frac{1}{2}} \leq \|u\| + \varepsilon\|p\| \leq k_2(\|u\|_V^2 + \varepsilon^2\|p\|_W^2)^{\frac{1}{2}}$$

En effet on, a pour tout  $(u, p) \in V \times W$ ,

$$\|L(u, p)\| = |F(u)| \leq \|F\| \|u\| \leq \|F\| (\|u\| + |p| + \varepsilon\|p\|).$$

$$\begin{aligned} a[(u, p); (u, p)] &= A(u, u) + \varepsilon^2 C(p, p) \geq c_1 \|u\|_V^2 + \varepsilon^2 c_2 \|p\|_W^2 \\ &\geq \min(c_1, c_2) \cdot (\|u\|_V^2 + \varepsilon^2 \|p\|_W^2) \\ &\geq \min(c_1, c_2) \cdot (\|u\| + |p| + \varepsilon\|p\|)^2 \\ &\geq \min(c_1, c_2) \cdot \|(u, p)\|_{V \times W}^2. \end{aligned}$$

Pour la continuité de la forme  $L$  elle découle facilement de la continuité de  $F$ .

Finalement et pour être bref, on peut dire qu'en appliquant le théorème de Lax-Milgram on obtient aisément (1.3.12), donc le problème  $A^\varepsilon$  est bien posé. ■

Soit maintenant  $V_h \subset V$  et  $W_h \subset W$  deux sous-espaces de dimension finies, considérons alors le problème discret associé suivant

$$\text{Problème } A_h^\varepsilon : \begin{cases} \text{Trouver } (u_h, p_h) \in V_h \times W_h \text{ telle que :} \\ A(u_h, v_h) + B(v_h, p_h) = F(v_h), & \forall v_h \in V_h \\ B(u_h, q_h) - \varepsilon^2 C(p_h, q_h) = 0, & \forall q_h \in W_h. \end{cases} \quad (1.3.14)$$

**Théorème 1.3.5** *Le Problème  $A_h^\varepsilon$  admet une solution unique  $(u_h, p_h)$  et de plus il existe une constante  $C$  qui dépend seulement de  $\|A\|, \|B\|, \|C\|, c_1$  et  $c_2$  telle que:*

$$\|u - u_h\|_V + \varepsilon\|p - p_h\|_W \leq C \inf_{\substack{v_h \in V_h \\ q_h \in W_h}} (\varepsilon^{-1}\|u - v_h\| + |p - q_h|_W + \varepsilon\|p - q_h\|_W). \quad (1.3.15)$$

**Preuve. ([9])** L'existence et l'unicité de la solution du problème  $A_h^\varepsilon$  est une conséquence du théorème de Lax-Milgram. Démontrons l'estimation (1.3.15). Comme  $V_h \subset V$  et  $W_h \subset W$  on a d'après (1.3.9)

$$\begin{cases} A(u, v_h) + B(v_h, p) = F(v_h), & \forall v_h \in V_h \\ B(u, q_h) - \varepsilon^2 C(p, q_h) = 0, & \forall q_h \in W_h. \end{cases} \quad (1.3.16)$$

En utilisant la linéarité des formes  $A$ ,  $B$  et  $C$  et en soustrayant (1.3.14) de (1.3.16) on trouve

$$\begin{cases} A(u - u_h, v_h) + B(v_h, p - p_h) = 0, & \forall v_h \in V_h \\ B(u - u_h, q_h) - \varepsilon^2 C(p - p_h, q_h) = 0, & \forall q_h \in W_h. \end{cases}$$

Donc pour tout  $u^* \in V_h$  et tout  $p^* \in W_h$  on a :

$$\begin{aligned} A(u - u^* + u^* - u_h, v_h) + B(v_h, p - p^* + p^* - p_h) &= \\ A(u - u^*, v_h) - A(u_h - u^*, v_h) + B(v_h, p - p^*) - B(v_h, p_h - p^*) &= 0, \end{aligned}$$

ce qui montre que :

$$A(u_h - u^*, v_h) + B(v_h, p_h - p^*) = A(u - u^*, v_h) + B(v_h, p - p^*), \quad \forall v_h \in V_h \quad (1.3.17)$$

et de même on montre que :

$$B(u_h - u^*, q_h) - \varepsilon^2 C(p_h - p^*, q_h) = B(u - u^*, q_h) - \varepsilon^2 C(p - p^*, q_h), \quad \forall q_h \in W_h. \quad (1.3.18)$$

En choisissant  $v_h = u_h - u^*$  et  $q_h = p_h - p^*$  et en soustrayant (1.3.18) de (1.3.17) on trouve

$$\begin{aligned} A(u_h - u^*, u_h - u^*) + \varepsilon^2 C(p_h - p^*, p_h - p^*) &= \\ A(u - u^*, u_h - u^*) + B(u_h - u^*, p - p^*) - B(u - u^*, p_h - p^*) + \varepsilon^2 C(p - p^*, p_h - p^*). \end{aligned}$$

Or on a d'après la coercivité des deux formes  $A$  et  $C$  :

$$\begin{aligned} c_1 \|u_h - u^*\|_V^2 + c_2 \varepsilon^2 \|p_h - p^*\|_W^2 &\leq A(u_h - u^*, u_h - u^*) + \varepsilon^2 C(p_h - p^*, p_h - p^*) \\ &\leq |A(u - u^*, u_h - u^*)| + |B(u_h - u^*, p - p^*)| + \\ &\quad |B(u - u^*, p_h - p^*)| + \varepsilon^2 |C(p - p^*, p_h - p^*)| \end{aligned} \quad (1.3.19)$$

et d'après la continuité des formes  $A, B$  et  $C$  on a

$$|A(u - u^*, u_h - u^*)| \leq \|A\| \|u - u^*\|_V \|u_h - u^*\|_V, \quad (1.3.20)$$

$$|C(p - p^*, p_h - p^*)| \leq \|C\| \|p - p^*\|_W \|p_h - p^*\|_W, \quad (1.3.21)$$

$$|B(u - u^*, p_h - p^*)| \leq \|B\| \|u - u^*\|_V \|p_h - p^*\|_W. \quad (1.3.22)$$

D'autre part on a aussi

$$\begin{aligned} |B(u_h - u^*, p - p^*)| &= \|u_h - u^*\|_V \cdot \left| B\left(\frac{u_h - u^*}{\|u_h - u^*\|_V}, p - p^*\right) \right| \\ &\leq \|u_h - u^*\|_V \cdot \sup_{v \in V / \|v\|=1} |B(v, p - p^*)| \\ &\leq \|u_h - u^*\|_V \cdot |p - p^*|_W. \end{aligned} \quad (1.3.23)$$

Avec les relations (1.3.20), (1.3.21), (1.3.22) et (1.3.23) l'estimation (1.3.19) devient

$$\begin{aligned} c_1 \|u_h - u^*\|_V^2 + c_2 \varepsilon^2 \|p_h - p^*\|_W^2 \\ \leq \|A\| \|u - u^*\|_V \|u_h - u^*\|_V + \|u_h - u^*\|_V \cdot |p - p^*|_W \\ + \|B\| \|u - u^*\|_V \|p_h - p^*\|_W + \varepsilon^2 \|C\| \|p - p^*\|_W \|p_h - p^*\|_W, \end{aligned}$$

ce qui montre qu'il existe une constante  $C$  qui dépend seulement de  $\|A\|, \|B\|, \|C\|, c_1$  et  $c_2$  (ici on peut prendre par exemple  $C = \frac{\max(1, \|A\|, \|B\|, \|C\|)}{\min(c_1, c_2)}$ ) telle que :

$$\begin{aligned} &\|u_h - u^*\|_V^2 + \varepsilon^2 \|p_h - p^*\|_W^2 \\ \leq C &\left[ \begin{array}{l} \|u - u^*\|_V \|u_h - u^*\|_V + \|u_h - u^*\|_V \cdot |p - p^*|_W \\ + \|u - u^*\|_V \|p_h - p^*\|_W + \varepsilon^2 \|p - p^*\|_W \|p_h - p^*\|_W \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Il est maintenant facile d'en déduire qu'il existe une constante  $C_1 > 0$  telle que :

$$\|u_h - u^*\|_V + \varepsilon \|p_h - p^*\|_W \leq C_1 (\varepsilon^{-1} \|u - u^*\|_V + |p - p^*|_W + \varepsilon \|p_h - p^*\|_W). \quad (1.3.24)$$

En ajoutant au deux membres de (1.3.24)  $\|u - u^*\|_V + \varepsilon \|p - p^*\|_W$  puis utilisant l'inégalité triangulaire (sachant que  $\varepsilon \in ]0, 1]$ , car ici l'existence de la constante  $C$  exige que  $\varepsilon$  soit majoré) on obtient :

$$\|u - u_h\|_V + \varepsilon \|p - p_h\|_W \leq C (\varepsilon^{-1} \|u - u^*\|_V + |p - p^*|_W + \varepsilon \|p_h - p^*\|_W), \quad \forall u^* \in V_h, \forall p^* \in W_h$$

(ici on peut prendre par exemple  $C = \max(C_1 + 1, C_1 + \varepsilon)$ ) ce qui prouve clairement (1.3.15).

■

**Remarque 1.3.6** Il est intéressant de noter que l'estimation (1.3.15) donnée au théorème 1.3.5 montre que lorsque l'espace  $V_h \times W_h$  approche  $V \times W$ , i.e:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[ \inf_{\substack{v_h \in V_h \\ q_h \in W_h}} (\|u - v_h\| + \|p - q_h\|_W) \right] = 0,$$

la solution approchée  $(u_h, p_h)$  converge vers la solution exacte  $(u, p)$  quand  $h \rightarrow 0$ . En effet en vertu de (1.3.11) on voit facilement que pour tout  $\varepsilon > 0$  fixée on a

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \inf_{\substack{v_h \in V_h \\ q_h \in W_h}} (\varepsilon^{-1} \|u - v_h\| + |p - q_h|_W + \varepsilon \|p - q_h\|_W) \right] &\leq \\ \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \inf_{\substack{v_h \in V_h \\ q_h \in W_h}} (\varepsilon^{-1} \|u - v_h\| + (\|B\| + \varepsilon) \|p - q_h\|_W) \right] &\leq \\ \max(\varepsilon^{-1}, \|B\| + \varepsilon) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \inf_{\substack{v_h \in V_h \\ q_h \in W_h}} (\|u - v_h\| + \|p - q_h\|_W) \right] &= 0, \end{aligned} \quad (1.3.25)$$

ce qui montre, d'après l'estimation (1.3.15), que

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\|u - u_h\|_V + \varepsilon \|p - p_h\|_W) = 0, \quad (1.3.26)$$

et donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\|u - u_h\|_V + \|p - p_h\|_W) = \lim_{h \rightarrow 0} (\|(u - u_h, p - p_h)\|_{V \times W}) = 0, \quad (1.3.27)$$

et comme la convergence de (1.3.26) n'est pas uniforme en  $\varepsilon$  à cause de l'existence du facteur  $\varepsilon^{-1}$  au premier membre de (1.3.25) qui ne peut pas être majoré lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , et donc la convergence de (1.3.27) n'est pas uniforme, i.e., la solution approchée  $(u_h, p_h)$  converge vers la solution exacte  $(u, p)$ , quand  $h \rightarrow 0$ , mais pas uniformément en  $\varepsilon$ , lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  : un phénomène de verrouillage apparaît, selon la définition 1.4.1.  $\square$

Pour obtenir une estimation uniforme on doit supposer une hypothèse de stabilité, c'est une condition *similaire* à la "condition Inf-Sup discrète" donnée en (1.3.8) :

on suppose qu'il existe une constante  $\gamma_h > 0$  de sorte que

$$\sup_{v_h \in V_h} \frac{B(v_h, q_h)}{\|v_h\|_V} \geq \gamma_h |q_h|_W, \quad \forall q_h \in W_h. \quad (1.3.28)$$

Cette condition exprime en fait, comme on va le voir dans le théorème suivant, la stabilité *uniforme* du schéma numérique pour la variable auxiliaire. Sous cette condition on obtient le

**Théorème 1.3.6** *Il existe une constante  $C$  qui dépend seulement de  $\|A\|, \|C\|, c_1, c_2$  et  $\gamma_h$  telle que :*

$$\|u - u_h\|_V + |p - p_h|_W + \varepsilon \|p - p_h\|_W \leq C \inf_{\substack{v_h \in V_h \\ q_h \in W_h}} (\|u - v_h\|_V + |p - q_h|_W + \varepsilon \|p - q_h\|_W) \quad (1.3.29)$$

**Preuve.** ([9]) On suit la même démarche de la preuve du théorème précédent mais on traite ici la quantité  $|B(u - u^*, p_h - p^*)|$  de la même manière que  $|B(u_h - u^*, p - p^*)|$  on trouve donc

$$|B(u_h - u^*, p - p^*)| \leq \|u_h - u^*\|_V \cdot |p_h - p^*|_W. \quad (1.3.30)$$

En vertu des relations (1.3.20), (1.3.21), (1.3.23) et (1.3.30) l'estimation (1.3.19) devient

$$\begin{aligned} & c_1 \|u_h - u^*\|_V^2 + c_2 \varepsilon^2 \|p_h - p^*\|_W^2 \\ & \leq \|A\| \|u - u^*\|_V \|u_h - u^*\|_V + \|u_h - u^*\|_V \cdot |p - p^*|_W \\ & \quad + \|u - u^*\|_V |p_h - p^*|_W + \varepsilon^2 \|C\| \|p - p^*\|_W \|p_h - p^*\|_W. \end{aligned}$$

ce qui montre qu'il existe une constante  $C$  qui dépend seulement de  $\|A\|, \|C\|, c_1$  et  $c_2$  (ici on peut prendre par exemple  $C = \frac{\max(1, \|A\|, \|C\|)}{\min(c_1, c_2)}$ ) telle que :

$$\begin{aligned} & \|u_h - u^*\|_V^2 + \varepsilon^2 \|p_h - p^*\|_W^2 \\ & \leq C \left[ \begin{array}{l} \|u - u^*\|_V \|u_h - u^*\|_V + \|u_h - u^*\|_V \cdot |p - p^*|_W \\ + \|u - u^*\|_V |p_h - p^*|_W + \varepsilon^2 \|p - p^*\|_W \|p_h - p^*\|_W \end{array} \right]. \quad (1.3.31) \end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant l'hypothèse (1.3.28) et la relation (1.3.17) on a

$$\begin{aligned} |p_h - p^*|_W & \leq \frac{1}{\gamma_h} \sup_{v_h \in V_h} \frac{|B(v_h, p_h - p^*)|}{\|v_h\|_V} \\ & \leq \frac{1}{\gamma_h} \left[ \sup_{v_h \in V_h} \frac{\|A\| \|u - u^*\|_V \|v_h\|_V}{\|v_h\|_V} + \sup_{v_h \in V_h} \frac{|B(v_h, p - p^*)|}{\|v_h\|_V} + \|A\| \|u_h - u^*\|_V \right] \\ & = \frac{1}{\gamma_h} [\|A\| \|u - u^*\|_V + |p - p^*|_W + \|A\| \|u_h - u^*\|_V]. \quad (1.3.32) \end{aligned}$$

En combinant les estimations (1.3.31) et (1.3.32) on montre aisément qu'il existe une constante  $C$  qui dépend seulement de  $\|A\|, \|B\|, \|C\|, c_1, c_2$  et  $\frac{1}{\gamma_h}$  telle que :

$$\|u - u_h\|_V + |p - p_h|_W + \varepsilon \|p - p_h\|_W \leq C [\|u - u^*\|_V + |p - p^*|_W + \varepsilon \|p - p^*\|_W].$$

ce qui montre (1.3.29) et achève la preuve. ■

**Remarque 1.3.7** *Il est maintenant claire que sous cette condition on obtient avec ce théorème une estimation uniforme en  $\varepsilon$ , et donc la méthode mixte qui satisfait (1.3.28) devient robuste à condition que les  $\gamma_h$  soient minorées par une constante  $\gamma > 0$  indépendante de  $h$  pour que (1.3.29) aura un sens lorsque  $h \rightarrow 0$ , i.e., la constante  $C$  ne tend pas vers l'infini en provoquant une dégradation du taux de convergence de la méthode.*

**Remarque 1.3.8** *Les méthodes mixtes ont permis d'obtenir, dans un cadre d'analyse rigoureux, des méthodes numériques très performantes et parfaitement fiables pour les formulations incompressibles et les modèles de plaques (voir [17], [12] et leurs références), ainsi que les modèles de poutres droites (voir [8]) et courbes (voir [15]). Malheureusement ces méthodes sont difficilement généralisables aux coques, l'obstacle rencontré, en essayant de montrer (1.3.8), provient de la présence de coefficients géométriques comme les courbures et les coefficients de Christoffel dans l'expression des formes bilinéaires, alors que pour les plaques celles-ci ne contenaient que les variables elles-même et leurs dérivées (voir [12]). Dans § 3.3 on a choisi, après une lecture rapide des différents travaux connus sur le phénomène de verrouillage pour les coques, l'exposition d'une méthode mixte qui repose sur une technique de relaxation de (1.3.8).*

*Finalement il faut souligner que les méthodes mixtes ne constituent pas l'unique moyen rigoureux d'analyser et de traiter le verrouillage. En effet d'autres méthodes ont été employées avec succès dans certains cas (voir [7]), c'est le but du paragraphe suivante.*

## 1.4 Le phénomène de verrouillage pour une classe de problèmes elliptiques : une condition suffisante générale pour le remède et un exemple

### 1.4.1 Introduction et définition du verrouillage

Dans cette section on va étudier le comportement numérique d'une classe de problèmes elliptiques qui dépendent d'un petit paramètre  $\varepsilon$ , et on va donner une définition mathématique d'un phénomène bien connu dans le monde des sciences de l'ingénieur, c'est le phénomène dit *deverrouillage* ou blocage (locking, en anglais). Ce phénomène n'est pas limité aux structures élastiques minces (poutres, arches, plaques, coques...) où le petit paramètre  $\varepsilon$  est l'épaisseur de la structure, mais aussi dans plusieurs d'autres domaines, citons par exemple :

-Le problème de diffusion de la chaleur dans une plaque fortement anisotrope, par exemple la conductivité dans les deux directions  $x_1$  et  $x_2$  de cette plaque est respectivement :  $k_1 = 1$  et  $k_2 = \frac{1}{T}$  où  $T \rightarrow 0$  (voir par exemple [19]).

-Les matériaux qui possèdent un coefficient de Poisson  $\nu$  ; quand  $\nu \rightarrow 0$  un phénomène de *verrouillage* apparaît dans l'approximation par éléments finis des problèmes d'élasticité 2D (voir [20]).

Dans tous ces cas le paramètre joue un rôle d'un amplificateur de l'erreur comise entre la solution exacte et la solution approchée par éléments finis; en d'autres termes la solution approchée **converge lentement** vers la solution exacte autant que le paramètre  $\varepsilon$  tends vers zéro, si on note par  $T(\varepsilon)$  le taux de convergence on a :

$$T(\varepsilon) \rightarrow 0, \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Pour voir celà il faut noter que plusieurs problèmes de ce type peuvent être formuler variationnellement de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in V \text{ telle que :} \\ a(u, v) + \frac{1}{\varepsilon} b(u, v) = f(v), \quad \forall v \in V. \end{array} \right. \quad (1.4.1)$$

On peut remarquer que la constante de continuité de la forme du premier membre contient le facteur  $\varepsilon$ , et si on utilise la méthode de Galerkin standard pour approcher la solution  $u$  on trouve, d'après le lemme de Céa, que :

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M\varepsilon^{-1}}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|.$$

(il suffit de prendre  $M = \max(M_a, M_b)$  avec  $M_a, M_b$  les constantes de continuité des formes  $a$  et  $b$  et  $\alpha$  la constante d'uniforme coercivité).

En pratique il est impossible de prendre des pas de maille  $h$  d'autant plus petit que  $\varepsilon$ , puisque si  $\varepsilon$  est suffisamment petit, les valeurs de  $h$  nécessaires sont alors hors de portée de la capacité des ordinateurs; sachant que théoriquement la solution approchée converge vers la solution exacte pour toute valeur de  $\varepsilon$  fixée, quand  $h \rightarrow 0$ .

Donc ce que nous souhaitons est bien évidemment de pouvoir disposer d'un outil d'approximation dont la précision est indépendante de la valeur de  $\varepsilon$ , on dit dans ce cas que l'approximation est robuste.

**Définition du verrouillage :**

Soient données  $V$  un espace de Hilbert réel et deux formes bilinéaires continues :

$$a_0(.,.) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad a_1(.,.) : V \times V \rightarrow \mathbb{R},$$

et  $f(.) : V \rightarrow \mathbb{R}$  une forme linéaire continue.

Pour tous  $\varepsilon \in ]0, 1]$  on pose le problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u^\varepsilon \in V \text{ tel que :} \\ a^\varepsilon(u^\varepsilon, v) = f(v), \quad \forall v \in V. \end{array} \right. \quad (1.4.2)$$

On suppose que les conditions du théorème de Lax-Milgram sont vérifiées pour assurer l'existence et l'unicité de la solution  $u^\varepsilon$ , pour chaque valeur de  $\varepsilon \in ]0, 1]$ .

Désignons par  $V_h$ , avec  $h \rightarrow 0$ , une famille de sous espaces de  $V$  de dimensions finies approchant  $V$ . Considérons alors les problèmes approchés associés :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u_h^\varepsilon \in V_h \text{ tel que :} \\ a^\varepsilon(u_h^\varepsilon, v_h) = \frac{1}{\varepsilon} a_0(u_h^\varepsilon, v_h) + a_1(u_h^\varepsilon, v_h) = f(v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \end{array} \right. \quad (1.4.3)$$

Il est bien connu que, si les  $V_h$  approchent  $V$ , pour chaque valeur de  $\varepsilon \in ]0, 1]$ , on a :

$$u_h^\varepsilon \rightarrow u^\varepsilon \text{ dans } V \text{ fort, quand } h \rightarrow 0. \quad (1.4.4)$$

Babuška et Suri dans [19] définissent le *verrouillage* comme la non-uniformité de la convergence (1.4.4) pour  $h \rightarrow 0$  par rapport à  $\varepsilon$  et qualifient de *robuste* une méthode d'approximation dont la convergence pour  $h \rightarrow 0$  est uniforme par rapport au paramètre  $\varepsilon$ . Cette définition semble tout à fait judicieuse et adaptée par tous les chercheurs (voir par exemple [6], [7], [9], [11], [22] et [23], ...ect).

**Définition 1.4.1** (*Sanchez-Hubert J. et Sanchez-Palencia E.[24]*) :

Nous dirons que  $(V_h)_{h>0}$  est une approximation robuste du problème (1.4.2) si la convergence (1.4.4) est uniforme par rapport au paramètre  $\varepsilon$ , c'est à dire :

$$\begin{aligned} \forall \delta > 0, \quad \exists h_0 > 0 \text{ (dépendant de } \delta \text{ mais pas de } \varepsilon) \text{ tel que :} \\ h \leq h_0 \Rightarrow \quad \| u_h^\varepsilon - u^\varepsilon \| < \delta, \quad \forall \varepsilon \in ]0, 1]. \end{aligned} \quad (1.4.5)$$

Si l'approximation n'est pas robuste on dit qu'elle verrouille. □

En pratique, si le phénomène de *verrouillage* apparaît, la valeur  $h_0$  doit être adaptée à chaque valeur de  $\varepsilon$ . En particulier, changer les valeurs de  $\varepsilon$  pour un pas de maille fixé peut altérer la qualité de l'approximation.

Nous nous proposons à présent d'étudier le comportement asymptotique de la solution  $u^\varepsilon$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  et l'approximation de Galerkin correspondante  $u_h^\varepsilon$ .

## 1.4.2 Le problème continu

Soient  $V$  un espace de Hilbert réel dont le produit scalaire est noté par  $\langle u, v \rangle$  et la norme associée par  $\|v\|$ , et deux formes bilinéaires continues et *symétriques* définies sur  $V$  :

$$a_0 : V \times V \rightarrow \mathbb{R} \qquad a_1 : V \times V \rightarrow \mathbb{R},$$

et  $\varepsilon \in ]0, 1]$  un petit paramètre.

On définit alors la forme bilinéaire  $a^\varepsilon : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  par :

$$a^\varepsilon(u, v) = \frac{1}{\varepsilon} a_0(u, v) + a_1(u, v),$$

qui est donc aussi bilinéaire, continue et symétrique.

Les hypothèses fondamentales dans toute cette section sont :

(H<sub>1</sub>)..... $\forall \varepsilon \in ]0, 1]$ ,  $a^\varepsilon$  est coercive, i.e.,

$$\forall \varepsilon \in ]0, 1], \exists \alpha(\varepsilon) > 0 : a^\varepsilon(v, v) \geq \alpha(\varepsilon) \|v\|^2, \forall v \in V. \quad (1.4.6)$$

(H<sub>2</sub>).....La forme bilinéaire  $a_0$  est positive, i.e.,

$$\forall v \in V : a_0(v, v) \geq 0,$$

et son noyau  $G$  est non réduit à l'origine :

$$G = \{w \in V; a_0(w, v) = 0, \forall v \in V\} \neq \{0\}. \quad (1.4.7)$$

D'après la positivité de la forme  $a_0$  on déduit l'inégalité de Cauchy-Schwarz suivante :

$$\forall w, v \in V : |a_0(w, v)|^2 \leq a_0(w, w) \cdot a_0(v, v),$$

(voir annexe Théorème A.1), et à fortiori on a :

$$\forall w \in G, \forall v \in V : |a_0(w, v)|^2 \leq a_0(w, w) \cdot a_0(v, v),$$

ce qui montre que le noyau  $G$  peut être écrit aussi sous la forme :

$$G = \{w \in V; a_0(w, w) = 0\}.$$

**Lemme 1.4.1** *L'espace  $G$  définie dans (1.4.7) est un sous-espace fermé de l'espace de Hilbert  $V$ . Donc il est lui-même un espace de Hilbert pour la topologie induite par celle de  $V$ .*

**Preuve.** Considérons une suite  $\{w_n\}$  d'éléments de  $G$  convergeant vers l'élément  $w \in V$ , i.e.,  $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = w \in V$ . Montrons que  $w \in G$ . En utilisant la continuité de la forme  $a_0$  on voit facilement que :

$$\begin{aligned} a_0(w, v) &= a_0\left(\lim_{n \rightarrow \infty} w_n, v\right), \quad \forall v \in V. \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_0(w_n, v) = 0, \quad \forall v \in V. \end{aligned}$$

ce qui montre que  $w \in G$  et que  $G$  contient les limites de ses suites. ■

1.4. Le phénomène de verrouillage pour une classe de problèmes elliptiques : une condition suffisante générale pour le remède et un exemple

---

Dans ce qui suit on va voir le rôle fondamental qui va jouer cet espace lorsqu'on étudie le phénomène de *verrouillage*.

Sous ces hypothèses il est clair que :

1/Pour tout  $\varepsilon \in ]0, 1]$ , les formes  $a^\varepsilon$  sont uniformément  $\alpha$ -coercives, où  $\alpha = \alpha(1)$ , puisque  $\forall \varepsilon \in ]0, 1]$  on a :

$$\begin{aligned} a^\varepsilon(v, v) &= \frac{1}{\varepsilon} a_0(v, v) + a_1(v, v) \\ &\geq \frac{1}{1} a_0(v, v) + a_1(v, v) \\ &= a^1(v, v) \geq \alpha(1) \|v\|^2. \end{aligned}$$

2/La forme bilinéaire  $a_1$  est  $G$ -elliptique car :

$$\begin{aligned} a^1(w, w) &= a_1(w, w), \quad \forall w \in G \\ &\geq \alpha \|w\|^2, \quad \forall w \in G. \end{aligned}$$

Soit  $l : V \rightarrow \mathbb{R}$  une forme linéaire continue donnée.

D'après le théorème de Lax-Milgram,  $\forall \varepsilon \in ]0, 1]$  les équations :

$$u^\varepsilon \in V, \quad a^\varepsilon(u^\varepsilon, v) = l(v), \quad \forall v \in V, \quad (1.4.8)$$

$$u^0 \in G, \quad a_1(u^0, w) = l(w), \quad \forall w \in G, \quad (1.4.9)$$

admettent chacune une solution unique.

Le théorème suivant donne un résultat sur le comportement asymptotique de la solution  $u^\varepsilon$  de l'équation (1.4.8), lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Théorème 1.4.1** *Quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , la solution  $u^\varepsilon$  de l'équation (1.4.8) converge fortement dans  $V$  vers  $u^0$ , solution unique de l'équation (1.4.9). La solution  $u^0 = 0$  si et seulement si  $l \in G^\perp$ .*

**Preuve. (voir[7]) :** Elle est faite en trois étapes.

1/Limite faible a priori :

1.4. Le phénomène de verrouillage pour une classe de problèmes elliptiques : une condition suffisante générale pour le remède et un exemple

---

Pour tout  $\varepsilon \in ]0, 1]$  supposons que  $u^\varepsilon$  est la solution de l'équation (1.4.8), on a donc les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha \|u^\varepsilon\|^2 &\leq a^\varepsilon(u^\varepsilon, u^\varepsilon) \\ &= l(u^\varepsilon) = |l(u^\varepsilon)| \\ &\leq \|l\|_{V'} \cdot \|u^\varepsilon\|. \end{aligned}$$

Donc pour tout  $\varepsilon \in ]0, 1]$  on a :

$$\|u^\varepsilon\| \leq \frac{1}{\alpha} \|l\|_{V'}, \quad (1.4.10)$$

ce qui montre que la famille  $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  est bornée dans  $V$  (espace de Hilbert et à fortiori espace de Banach réflexif) on peut donc en extraire une sous-suite, qu'on la note aussi par  $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  qui converge faiblement dans  $V$ , i.e.,: il existe  $w^0 \in V : u^\varepsilon \rightharpoonup w^0$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . On va montrer par la suite que cette convergence est forte dans  $V$ .

2/Propriétés de la limite  $w^0$  :

On sait que :

$$\forall v \in V, \quad a_0(., v) \in V' \text{ et } a_1(., v) \in V',$$

alors si on suppose qu'il existe une sous-suite  $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  de la famille  $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  telle que :

$$\exists w^0 \in V : u^\varepsilon \rightharpoonup w^0, \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0,$$

on a alors :

$$a_0(u^\varepsilon, v) \rightarrow a_0(w^0, v), \quad a_1(u^\varepsilon, v) \rightarrow a_1(w^0, v), \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0; \quad \forall v \in V.$$

En multipliant les deux membres de l'équation (1.4.8) par  $\varepsilon$  et en passant à la limite, quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on trouve que :

$$a_0(w^0, v) = 0 \quad \forall v \in V,$$

ce qui signifie que  $w^0 \in G$ .

Considérons maintenant l'équation (1.4.8) en choisissant  $G$  comme espace test on a :

$$\begin{aligned} a^\varepsilon(u^\varepsilon, w) &= a_1(u^\varepsilon, w), \quad \forall w \in G, \quad \forall \varepsilon \in ]0, 1] \\ &= l(w), \quad \forall w \in G, \quad \forall \varepsilon \in ]0, 1]. \end{aligned}$$

1.4. Le phénomène de verrouillage pour une classe de problèmes elliptiques : une condition suffisante générale pour le remède et un exemple

---

En passant ici aussi à la limite on a :

$$w^0 \in G, \quad a_1(w^0, w) = l(w), \quad \forall w \in G,$$

ce qui montre que  $w^0$  est aussi solution de l'équation (1.4.9) et d'après l'unicité de la solution de cette équation on a:  $w^0 = u^0$ .

On conclut alors que toute sous-suite  $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  de la famille  $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  qui converge faiblement dans  $V$  vers une limite, cette limite est forcément  $u^0$ , solution de l'équation (1.4.9).

De plus  $u^0 = w^0 = 0$  si et seulement si  $l(w) = 0, \forall w \in G$  i.e. :  $\langle l, w \rangle_{V',V} = 0, \forall w \in G$  c'est à dire que :  $u^0 = 0$  si et seulement si  $l \in G^\perp$

3/Convergence forte :

Considérons la sous-suite  $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  qui converge faiblement dans  $V$  vers  $u^0$  on a, d'après la bilinéarité, la symétrie et la  $\alpha$ -coercivité de la forme  $a^\varepsilon$  :

$$\begin{aligned} \alpha \|u^\varepsilon - u^0\|^2 &\leq a^\varepsilon(u^\varepsilon - u^0, u^\varepsilon - u^0) \\ &= a^\varepsilon(u^\varepsilon, u^\varepsilon) + a^\varepsilon(u^0, u^0) - 2a^\varepsilon(u^\varepsilon, u^0), \end{aligned} \quad (1.4.11)$$

or  $u^0 \in G$  est la solution de (1.4.9), en choisissant  $v = u^0$ , on a donc :

$$\begin{aligned} a^\varepsilon(u^0, u^0) &= a_1(u^0, u^0), \quad \forall \varepsilon \in ]0, 1] \\ &= l(u^0), \quad \forall \varepsilon \in ]0, 1], \end{aligned} \quad (1.4.12)$$

et comme  $u^\varepsilon$  est solution de (1.4.8) et en choisissant  $v = u^\varepsilon$  puis  $v = u^0$  on a aussi :

$$a^\varepsilon(u^\varepsilon, u^\varepsilon) = l(u^\varepsilon), \quad \forall \varepsilon \in ]0, 1],$$

$$a^\varepsilon(u^\varepsilon, u^0) = l(u^0), \quad \forall \varepsilon \in ]0, 1],$$

en passant à la limite, quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on a :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a^\varepsilon(u^\varepsilon, u^0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} l(u^0) = l(u^0), \quad (1.4.13)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a^\varepsilon(u^\varepsilon, u^\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} l(u^\varepsilon) = l(u^0), \quad (1.4.14)$$

ce qui montre que, en substituant (1.4.12), (1.4.13) et (1.4.14) dans (1.4.11),

$$\alpha \|u^\varepsilon - u^0\|^2 \rightarrow 0, \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0,$$

1.4. Le phénomène de verrouillage pour une classe de problèmes elliptiques : une condition suffisante générale pour le remède et un exemple

---

et donc  $\|u^\varepsilon - u^0\| \rightarrow 0$ , quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  ce qui veut dire que

$$u^\varepsilon \rightarrow u^0, \text{ (fort dans } V), \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Finalement, en moyennant ces trois étapes il est clair que toute la famille  $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  converge fortement vers  $u^0$ , quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . ■

**Remarque 1.4.1** *On a aussi :*

$$\frac{1}{\varepsilon} a_0(u^\varepsilon, u^\varepsilon) \rightarrow 0, \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (1.4.15)$$

En effet,  $\forall \varepsilon \in ]0, 1]$  on a :

$$\frac{1}{\varepsilon} a_0(u^\varepsilon, u^\varepsilon) = l(u^\varepsilon) - a_1(u^\varepsilon, u^\varepsilon),$$

et on sait que  $u^\varepsilon \rightarrow u^0$ , et d'après la continuité des formes  $l$  et  $a_1$  on a :

$$l(u^\varepsilon) \rightarrow l(u^0), \quad a_1(u^\varepsilon, u^\varepsilon) \rightarrow a_1(u^0, u^0),$$

or  $u^0$  est la solution de (1.4.9) i.e.,

$$l(w) - a_1(u^0, w) = 0, \quad \forall w \in G,$$

en particulier pour  $u^0 \in G$  on a :  $l(u^0) - a_1(u^0, u^0) = 0$ , ce qui montre aisément (1.4.15).

### 1.4.3 Une famille de problèmes discrets

On s'intéresse maintenant au problème suivant : on veut chercher une méthode pour calculer une approximation de  $u^\varepsilon$ , comme on a expliqué à l'introduction, un de nos objectifs est de prouver qu'il existe une condition suffisante avec laquelle on peut trouver une méthode d'éléments finis telle que la solution  $u^\varepsilon$  peut être approximée par  $u_h^\varepsilon$  avec :

$$\|u_h^\varepsilon - u^\varepsilon\| \rightarrow 0 \text{ quand } h \rightarrow 0, \text{ uniformément pour } \varepsilon \in ]0, 1].$$

1.4. Le phénomène de verrouillage pour une classe de problèmes elliptiques : une condition suffisante générale pour le remède et un exemple

---

Donc, supposons  $(V_h)_{h>0}$  une famille de sous-espaces de  $V$  de dimensions finies, on utilise la méthode de Galerkin pour un  $\varepsilon$  fixé, on a à résoudre la famille d'équations suivantes :

$$\begin{cases} \forall h > 0, \text{ trouver } u_h^\varepsilon \in V_h \text{ telle que :} \\ a^\varepsilon(u_h^\varepsilon, v_h) = l(v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \end{cases} \quad (1.4.16)$$

Pour tout  $h > 0$  et pour tout  $\varepsilon \in ]0, 1]$  on a une solution unique du problème (1.4.16), d'après le théorème de Lax-Milgram.

Soit  $G_h = G \cap V_h$ , de même que pour  $V$ , en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz il est clair qu'on a :

$$\begin{aligned} G_h &= \{w_h \in V_h : a_0(w_h, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in V_h\} \\ &= \{w_h \in V_h : a_0(w_h, w_h) = 0\}. \end{aligned} \quad (1.4.17)$$

Nous considérons aussi la méthode de Galerkin pour le problème (1.4.9) :

$$\begin{cases} \forall h > 0, \text{ trouver } u_h^0 \in G_h \text{ telle que :} \\ a_1(u_h^0, v_h) = l(v_h), \quad \forall v_h \in G_h. \end{cases} \quad (1.4.18)$$

D'après le théorème de Lax-Milgram chaque équation admet une solution unique, on va étudier les deux limites :

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_h^\varepsilon & \quad \text{pour } h \text{ fixé,} \\ \lim_{h \rightarrow 0} u_h^\varepsilon & \quad \text{pour } \varepsilon \text{ fixé.} \end{aligned}$$

**Théorème 1.4.2** *Pour  $h > 0$  donné, la solution  $u_h^\varepsilon$  du problème (1.4.16) converge dans  $V_h$ , lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , vers la solution unique  $u_h^0$  du problème (1.4.18) i.e. :*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_h^\varepsilon = u_h^0, \quad \text{fort dans } V_h.$$

**Preuve.** C'est exactement la même preuve que celle du théorème 1.4.1, c'est juste un peu simplifié parceque la convergence faible et forte sont les mêmes dans un espace de dimension finie . ■

Maintenant dans le but de passer à la limite, quand  $h \rightarrow 0$ , on rappelle qu'une famille de sous-espaces  $(V_h)_{h>0}$  d'un espace de Hilbert  $V$  est dite qu'elle approche  $V$  si et seulement si :

$$\forall u \in V, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\| \right] = 0.$$

Le résultat suivant est classique (voir théorème 1.2.1).

**Théorème 1.4.3** *i) Si une famille  $(V_h)_{h>0}$  approche  $V$  alors : pour tout  $\varepsilon > 0$  la solution  $u_h^\varepsilon$  du problème (1.4.16) converge vers la solution  $u^\varepsilon$  du problème (1.4.8), lorsque  $h \rightarrow 0$  i.e. :*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} u_h^\varepsilon = u^\varepsilon \quad \text{dans } V.$$

*ii) Si la famille  $(G_h)_{h>0}$  approche  $G$  alors*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} u_h^0 = u^0 \quad \text{dans } G.$$

#### 1.4.4 Une condition suffisante pour la convergence uniforme

L'objectif de cette section est de donner une condition suffisante générale pour le remède du phénomène de *verrouillage*.

On va montrer que : l'approximation  $(V_h)_{h>0}$  de  $V$  est *robuste* si, de plus que  $(V_h)_{h>0}$  approche  $V$ , la famille  $(G_h)_{h>0}$  approche  $G$ . En d'autres termes, si  $(V_h)_{h>0}$  approche  $V$  et  $(G_h)_{h>0}$  approche  $G$  on a alors

$$\lim_{h \rightarrow 0} u_h^\varepsilon = u^\varepsilon \quad \text{dans } V, \text{ uniformément pour } \varepsilon \in ]0, 1].$$

On va distinguer deux cas :  $\varepsilon \in [\varepsilon_0, 1]$  et  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[$  (où  $\varepsilon_0 > 0$ ).

**Proposition 1.4.1** *Si  $(V_h)_{h>0}$  approche  $V$  alors :  $\forall \varepsilon_0 > 0$ ,  $\lim_{h \rightarrow 0} \left[ \sup_{\varepsilon_0 \leq \varepsilon \leq 1} \|u_h^\varepsilon - u^\varepsilon\| \right] = 0$ .*

**Preuve. (voir [7]):** Soit  $X = C^0([\varepsilon_0, 1])$  l'espace des fonctions définies et continues sur  $[\varepsilon_0, 1]$  à valeurs réels munit de la norme de la convergence uniforme, i.e. :

$$\text{pour } f \in X, \quad \|f\|_X = \max_{\varepsilon_0 \leq x \leq 1} |f(x)|.$$

On doit démontrer que pour toute suite  $(h_n)$  qui converge vers zéro on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\phi_n\|_X = 0,$$

où

$$\phi_n(\varepsilon) = \|u^\varepsilon - u_{h_n}^\varepsilon\|, \quad \forall \varepsilon \in [\varepsilon_0, 1], \text{ i.e. :}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \max_{\varepsilon_0 \leq \varepsilon \leq 1} \|u_{h_n}^\varepsilon - u^\varepsilon\| \right] = 0.$$

On a vu au théorème 1.4.3 que

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{h \rightarrow 0} \|u_h^\varepsilon - u^\varepsilon\| = 0,$$

ce qui signifie que la suite  $(\phi_n(\varepsilon))$  converge ponctuellement (on dit encore simplement) sur l'intervalle  $]0, 1]$ , donc à fortiori sur l'intervalle  $[\varepsilon_0, 1]$ . En utilisant le théorème d'Ascoli (voir annexe théorème A.7), pour que cette convergence soit uniforme il suffit de montrer que la suite  $(\phi_n(\varepsilon))$  est équicontinue, cela peut être fait en montrant, par exemple, que l'application

$$f : [\varepsilon_0, 1] \longrightarrow V \quad / \quad f(\varepsilon) = u^\varepsilon - u_h^\varepsilon,$$

est différentiable et que sa différentielle est uniformément bornée par rapport à  $\varepsilon$  et à  $h$  (cette propriété est largement connue, on la trouvera souvent sous forme d'un exercice après un cours sur le théorème d'Ascoli).

Soit donc deux opérateurs linéaires et bornés définis par :

$$A^\varepsilon : V \longrightarrow V / \langle A^\varepsilon u, v \rangle = a^\varepsilon(u, v); \quad \forall u, v \in V,$$

$$A_h^\varepsilon : V_h \longrightarrow V_h / \langle A_h^\varepsilon u_h, v_h \rangle = a^\varepsilon(u_h, v_h); \quad \forall u_h, v_h \in V_h.$$

(L'existence de ces deux opérateurs est assurée par le théorème A.4, voir annexe) et d'après le théorème de représentation de Reisz on définit les deux éléments  $L \in V$  et  $L_h \in V_h$  par :

$$\langle L, v \rangle = l(v), \quad \forall v \in V,$$

$$\langle L_h, v_h \rangle = l(v_h), \quad \forall v_h \in V_h.$$

En considérant les équations (1.4.2) et (1.4.3) on voit facilement que :

$$\forall \varepsilon \in ]\varepsilon_0, 1], \quad A^\varepsilon u^\varepsilon = L,$$

$$\forall \varepsilon \in ]\varepsilon_0, 1], \quad A_h^\varepsilon u_h^\varepsilon = L_h.$$

Il est clair que les deux applications :

$$\varepsilon \longmapsto A^\varepsilon \quad \text{de } [\varepsilon_0, 1] \quad \text{dans } \mathcal{L}(V),$$

1.4. Le phénomène de verrouillage pour une classe de problèmes elliptiques : une condition suffisante générale pour le remède et un exemple

---

$$\varepsilon \longmapsto A_h^\varepsilon \text{ de } [\varepsilon_0, 1] \text{ dans } \mathcal{L}(V_h),$$

sont indéfiniment différentiables sur l'intervalle  $[\varepsilon_0, 1]$  puisqu'il est clair que les applications

$$\varepsilon \longmapsto a^\varepsilon(u, v) = \frac{1}{\varepsilon} a_0(u, v) + a_1(u, v), \text{ de } [\varepsilon_0, 1] \text{ dans } \mathbb{R},$$

$$\varepsilon \longmapsto a^\varepsilon(u_h, v_h) = \frac{1}{\varepsilon} a_0(u_h, v_h) + a_1(u_h, v_h), \text{ de } [\varepsilon_0, 1] \text{ dans } \mathbb{R},$$

sont indéfiniment différentiables sur l'intervalle  $[\varepsilon_0, 1]$  pour tout  $u, v \in V$  et tout  $u_h, v_h \in V_h$  fixés. Par exemple on a facilement (voir dans l'annexe la proposition A.2) :

$$\begin{aligned} \left\langle \left( \frac{dA^\varepsilon}{d\varepsilon} u, v \right) \right\rangle &= \frac{d}{d\varepsilon} \langle A^\varepsilon u, v \rangle, & \forall u, v \in V \\ &= \frac{d}{d\varepsilon} \left[ \frac{1}{\varepsilon} a_0(u, v) + a_1(u, v) \right], & \forall u, v \in V \\ &= \frac{-1}{\varepsilon^2} a_0(u, v), & \forall u, v \in V. \end{aligned}$$

Donc en utilisant le théorème des fonctions implicites, les applications :

$$\varepsilon \longmapsto u^\varepsilon \text{ de } [\varepsilon_0, 1] \text{ dans } V,$$

$$\varepsilon \longmapsto u_h^\varepsilon \text{ de } [\varepsilon_0, 1] \text{ dans } V_h,$$

sont aussi indéfiniment différentiables sur l'intervalle  $[\varepsilon_0, 1]$  et nous avons, d'après la notion de dérivabilité des fonctions de variable réelle à valeurs dans un espace de Banach et la continuité et la linéarité de la forme  $a^\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} a^\varepsilon \left( \frac{du^\varepsilon}{d\varepsilon}, v \right) &= a^\varepsilon \left[ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u^{\varepsilon+h} - u^\varepsilon}{h}, v \right], & \forall v \in V, \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^\varepsilon(u^{\varepsilon+h}, v) - a^\varepsilon(u^\varepsilon, v)}{h}, & \forall v \in V, \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^\varepsilon(u^{\varepsilon+h}, v) - l(v)}{h}, & \forall v \in V. \end{aligned} \tag{1.4.19}$$

Montrons maintenant que

$$a^\varepsilon(u^{\varepsilon+h}, v) = l(v) + \frac{h}{\varepsilon(\varepsilon+h)} a_0(u^{\varepsilon+h}, v), \quad \forall v \in V. \tag{1.4.20}$$

En effet, on a par définition des formes  $a^\varepsilon$ :

$$a^{\varepsilon+h}(u, v) = \frac{1}{\varepsilon+h} a_0(u, v) + a_1(u, v), \quad \forall u, v \in V$$

$$a^\varepsilon(u, v) = \frac{1}{\varepsilon} a_0(u, v) + a_1(u, v), \quad \forall u, v \in V$$

en faisant la soustraction membre à membre on trouve aisément

$$a^\varepsilon(u, v) = a^{\varepsilon+h}(u, v) + \frac{h}{\varepsilon(\varepsilon+h)} a_0(u, v), \quad \forall u, v \in V. \quad (1.4.21)$$

En choisissant  $u = u^{\varepsilon+h}$  (qui est la solution de l'équation (1.4.8), pour  $\varepsilon = \varepsilon + h$ ) dans (1.4.21) on trouve (1.4.20). Maintenant en substituant (1.4.20) dans (1.4.19) on trouve d'après la continuité de  $a_0$  et de l'application  $\varepsilon \mapsto u^\varepsilon$

$$\begin{aligned} a^\varepsilon\left(\frac{du^\varepsilon}{d\varepsilon}, v\right) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h}{\varepsilon(\varepsilon+h)} a_0(u^{\varepsilon+h}, v)}{h}, \quad \forall v \in V, \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon(\varepsilon+h)} a_0(u^{\varepsilon+h}, v), \quad \forall v \in V, \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} a_0(u^\varepsilon, v), \quad \forall v \in V, \end{aligned} \quad (1.4.22)$$

avec le même calcul on trouve aussi

$$a^\varepsilon\left(\frac{du_h^\varepsilon}{d\varepsilon}, v_h\right) = \frac{1}{\varepsilon^2} a_0(u_h^\varepsilon, v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \quad (1.4.23)$$

Maintenant en choisissant  $v = \frac{du^\varepsilon}{d\varepsilon}$  dans (1.4.22) et  $v_h = \frac{du_h^\varepsilon}{d\varepsilon}$  dans (1.4.23) on trouve que :

$$\begin{aligned} \alpha \left\| \frac{du^\varepsilon}{d\varepsilon} \right\|^2 &\leq a^\varepsilon\left(\frac{du^\varepsilon}{d\varepsilon}, \frac{du^\varepsilon}{d\varepsilon}\right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} a_0\left(u^\varepsilon, \frac{du^\varepsilon}{d\varepsilon}\right) \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon_0^2} \|a_0\| \cdot \|u^\varepsilon\| \cdot \left\| \frac{du^\varepsilon}{d\varepsilon} \right\|, \end{aligned}$$

et donc on a :

$$\left\| \frac{du^\varepsilon}{d\varepsilon} \right\| \leq \frac{1}{\alpha \cdot \varepsilon_0^2} \|a_0\| \cdot \|u^\varepsilon\|.$$

Finalement d'après (1.4.10) on trouve :

$$\left\| \frac{du^\varepsilon}{d\varepsilon} \right\| \leq \frac{1}{(\alpha \varepsilon_0)^2} \cdot \|a_0\| \cdot \|l\|_{V'},$$

et de la même façon on a aussi :

$$\left\| \frac{du_h^\varepsilon}{d\varepsilon} \right\| \leq \frac{1}{(\alpha \varepsilon_0)^2} \cdot \|a_0\| \cdot \|l\|_{V'},$$

1.4. Le phénomène de verrouillage pour une classe de problèmes elliptiques : une condition suffisante générale pour le remède et un exemple

---

ce qui montre que  $\left\| \frac{du^\varepsilon}{d\varepsilon} \right\|$  et  $\left\| \frac{dw_h^\varepsilon}{d\varepsilon} \right\|$  sont uniformément bornés pour  $h > 0$  et pour  $\varepsilon \in ]\varepsilon_0, 1]$ . Donc la famille  $(\phi_n(\varepsilon))$  est équicontinue ce qui prouve que la convergence sur le compacte  $[\varepsilon_0, 1]$  est uniforme. ■

Etudions maintenant la situation au voisinage de  $\varepsilon = 0$ , c'est là où l'hypothèse fondamentale exigeant que  $(G_h)_{h>0}$  approche  $G$  interfère. On la

**Proposition 1.4.2** *Si  $(G_h)_{h>0}$  approche  $G$  alors :*

$$\forall \eta > 0, \exists \varepsilon_0 = \varepsilon_0(\eta) > 0 \text{ et } \exists h_0 = h_0(\eta) > 0 \text{ telle que :}$$

$$\text{pour tout } h \in ]0, h_0[ \text{ et } \varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[ \text{ on a : } \|u^\varepsilon - u_h^\varepsilon\| \leq \eta.$$

**Preuve.** ([7]) On sait que la forme  $a^\varepsilon$  définit un produit scalaire sur  $V$  et que  $u_h^\varepsilon$  est la projection orthogonale de  $u^\varepsilon$  sur le sous-espace  $V_h$  (voir la remarque 1.2.3) i.e :

$$a^\varepsilon(u^\varepsilon - u_h^\varepsilon, u^\varepsilon - u_h^\varepsilon) = \inf_{v_h \in V_h} a^\varepsilon(u^\varepsilon - v_h, u^\varepsilon - v_h).$$

En utilisant la coercivité uniforme de  $a^\varepsilon$  et en choisissant  $v_h = w_h \in G_h$  on trouve que :

$$\begin{aligned} \alpha \|u^\varepsilon - u_h^\varepsilon\|^2 &\leq a^\varepsilon(u^\varepsilon - u_h^\varepsilon, u^\varepsilon - u_h^\varepsilon) \\ &\leq \inf_{w_h \in G_h} a^\varepsilon(u^\varepsilon - w_h, u^\varepsilon - w_h), \end{aligned}$$

or on sait que :

$$a^\varepsilon(u^\varepsilon - w_h, u^\varepsilon - w_h) = \frac{1}{\varepsilon} a_0(u^\varepsilon, u^\varepsilon) + a_1(u^\varepsilon - w_h, u^\varepsilon - w_h),$$

donc on trouve que :

$$\alpha \|u^\varepsilon - u_h^\varepsilon\|^2 \leq \frac{1}{\varepsilon} a_0(u^\varepsilon, u^\varepsilon) + a_1(u^\varepsilon - w_h, u^\varepsilon - w_h), \forall w_h \in G_h. \quad (1.4.24)$$

On va estimer, premièrement, le premier terme du second membre.

Comme on l'a vu à la remarque 1.4.1 :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} a_0(u^\varepsilon, u^\varepsilon) = 0,$$

celà signifie que :

$$\forall \eta > 0, \exists \varepsilon_1(\eta) > 0 \text{ telle que : } 0 < \varepsilon < \varepsilon_1(\eta) \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} a_0(u^\varepsilon, u^\varepsilon) < \frac{\eta}{2}. \quad (1.4.25)$$

1.4. Le phénomène de verrouillage pour une classe de problèmes elliptiques : une condition suffisante générale pour le remède et un exemple

---

Estimons le deuxième terme. On sait que la forme  $a_1$  est continue sur  $V$  donc il existe une constante  $c$  telle que :

$$\begin{aligned} a_1(u^\varepsilon - w_h, u^\varepsilon - w_h) &\leq c \|u^\varepsilon - w_h\|^2 \\ &\leq c(\|u^\varepsilon - u^0\| + \|u^0 - w_h\|)^2, \quad \forall w_h \in G_h. \end{aligned}$$

De plus on a :  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u^\varepsilon = u^0$ , c'est à dire que :

$$\forall \eta > 0, \exists \varepsilon_2(\eta) > 0 \text{ telle que : } 0 < \varepsilon < \varepsilon_2(\eta) \Rightarrow \|u^\varepsilon - u^0\| < \sqrt{\frac{\eta}{8c}}, \quad (1.4.26)$$

on a aussi  $(G_h)_{h>0}$  approche  $G$  ce qui signifie que :

$$\forall \eta > 0, \exists h_0(\eta) > 0 \text{ telle que : } 0 < h < h_0(\eta) \Rightarrow \exists w_h \in G_h : \|u^0 - w_h\| < \sqrt{\frac{\eta}{8c}}, \quad (1.4.27)$$

on tire de (1.4.26) et (1.4.27) que

$$\begin{aligned} \forall \eta > 0, \exists \varepsilon_2(\eta) > 0 \text{ et } \exists h_0(\eta) > 0, \text{ telle que : } 0 < \varepsilon < \varepsilon_2(\eta) \text{ et } 0 < h < h_0(\eta) \Rightarrow \\ \left\{ \exists w_h \in G_h; a_1(u^\varepsilon - w_h, u^\varepsilon - w_h) \leq c\left(\sqrt{\frac{\eta}{8c}} + \sqrt{\frac{\eta}{8c}}\right)^2 = \frac{\eta}{2} \right\}. \end{aligned} \quad (1.4.28)$$

En fin de (1.4.25) et (1.4.28) on déduit que :

$$\begin{aligned} \forall \eta > 0, \exists \varepsilon_0(\eta) = \min\{\varepsilon_1(\eta), \varepsilon_2(\eta)\} > 0 \text{ et } \exists h_0(\eta) > 0 \text{ telle que :} \\ 0 < \varepsilon < \varepsilon_0(\eta) \text{ et } 0 < h < h_0(\eta) \Rightarrow \alpha \|u^\varepsilon - u_h^\varepsilon\|^2 \leq \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \eta \\ \Rightarrow \|u^\varepsilon - u_h^\varepsilon\| \leq \sqrt{\frac{\eta}{\alpha}} = \eta_0, \end{aligned}$$

ce qui signifie que :

$$\forall \eta_0 > 0 \exists h_0(\eta) > 0 \text{ telle que : } 0 < h < h_0(\eta) \Rightarrow \sup_{0 < \varepsilon < \varepsilon_0} \|u^\varepsilon - u_h^\varepsilon\| \leq \eta_0,$$

et donc on a :  $\lim_{h \rightarrow 0} \left[ \sup_{0 < \varepsilon < \varepsilon_0} \|u^\varepsilon - u_h^\varepsilon\| \right] = 0. \blacksquare$

Avec ces deux propositions on peut maintenant énoncer le

**Théorème 1.4.4** Si  $(V_h)_{h>0}$  approche  $V$  et  $(G_h)_{h>0}$  approche  $G$  alors :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[ \sup_{0 < \varepsilon \leq 1} \|u^\varepsilon - u_h^\varepsilon\| \right] = 0.$$

En d'autre terme on peut dire: pour qu'une méthode d'éléments finis soit échappante au *verrouillage* il suffit que, de plus que  $(V_h)_{h>0}$  approche  $V$ ,  $(G_h)_{h>0}$  approche  $G$ .

Celà montre qu'une condition suffisante pour que la suite  $(u_h^\varepsilon)_{h>0}$  converge uniformément, pour  $\varepsilon$  se trouvant dans certains voisinage de 0, vers la solution  $u^\varepsilon$  est que  $(G_h)_{h>0}$  approche  $G$ ; à l'extérieure de ce voisinage nous n'avons besoin que de la condition générale de toutes les méthodes des d'éléments finis :  $(V_h)_{h>0}$  approche  $V$ .

Donc le problème de *verrouillage* n'est pas à craindre sauf que lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

### 1.4.5 Exemple : le problème d'arche

Dans ce paragraphe on va montrer qu'une arche dans le cadre de l'élasticité linéaire est un exemple qui rentre dans le cadre général des problèmes étudiée précédemment, le petit paramètre,  $\varepsilon > 0$ , ici est l'épaisseur de l'arche. Il est bien connu que les méthodes numériques classiques donnent souvent des comportements *verrouillantes* quand l'épaisseur est suffisamment petit (voir par exemple [3], [8] et [15]).

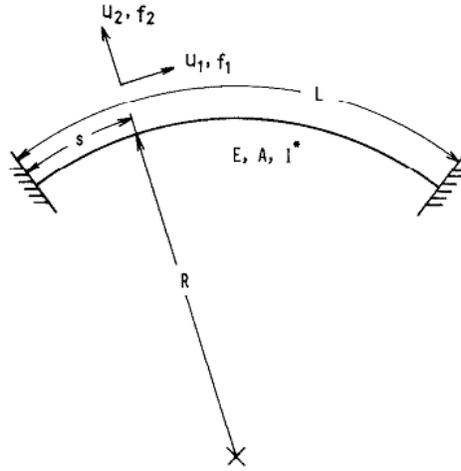
Nous allons voir dans cette section une procédure d'éléments finis standard et montrer qu'elle est susceptible de *verrouiller* pour une faible épaisseur, puis nous la modifierons pour obtenir une autre procédure qui converge uniformément quelque soit la faiblesse de l'épaisseur de l'arche.

#### **Le problème continu**

Une arche est un corps solide tridimensionnel construit autour d'une courbe moyenne, on suppose qu'elle est invariante dans une direction et qu'elle admet une épaisseur  $\sqrt{\varepsilon}$  supposée très petite par rapport aux autres dimensions, la courbe moyenne est générée par un plan courbe que nous paramétrisons avec une abscisse curviligne  $s$ , comme dans la littérature classique, on suppose qu'elle est de classe  $C^3$ .

L'arche est soumise à un chargement que nous supposons aussi invariant dans une direction, ainsi cela devient un problème à deux dimensions (problème plan).

Le problème est finalement réduit à une équation variationnelle de dimension un, plusieurs modèles peuvent être considérer, correspondant aux différents types de chargement pour une géométrie donnée, on considère ici le modèle standard de Kirchhoff- Love dont le quel on néglige les contraintes normales et les contraintes de cisaillement.



Quand elle est chargée, un champ de déplacement  $\mathbf{U}(s)$  apparaît sur l'arche, dans le modèle de Kirchhoff- Love, ce champ est décomposé par rapport à la base locale  $(t(s), n(s))$  où  $t(s), n(s)$  sont les vecteurs tangent et normale au point de coordonnées local  $s$ , les inconnues sont donc deux fonctions numériques  $u_1(s)$  et  $u_2(s)$  telle que :

$$\mathbf{U}(s) = u_1(s).t(s) + u_2(s).n(s).$$

On suppose que la longueur de l'arche est égale à 1, et qu'elle est encastree en ces bords.

On utilise les notations suivantes :

$$V = H_0^1(I) \times H_0^2(I); \text{ avec } I = ]0, 1[,$$

où

$$H_0^1(I) = \{v \in L^2(]0, 1[); v' \in L^2(]0, 1[) \text{ et } v(0) = v(1) = 0\},$$

$$H_0^2(I) = \{v \in L^2(]0, 1[); v', v'' \in L^2(]0, 1[) \text{ et } v(0) = v(1) = v'(0) = v'(1) = 0\},$$

sont les espaces de Sobolev bien connus et  $v', v''$  sont les dérivées première et seconde de  $v$  prise au sens des distributions.

Pour  $v = (v_1, v_2) \in V$  on pose :

$$\gamma(v) = v_1' + \delta v_2 \quad \text{et} \quad \rho(v) = (\delta v_1 - v_2)'$$

avec  $\delta \in C^1(]0, 1[)$  la courbure de la courbe moyenne, puisqu'on a déjà supposé que cette courbe moyenne est de classe  $C^3$  (voir la définition A.3 de la courbure d'une courbe dans l'annexe).

On définit la forme bilinéaire  $a^\varepsilon$  comme suit :

$$\forall u, v \in V, \quad a^\varepsilon(u, v) = \frac{C}{\varepsilon} \cdot a_0(u, v) + D \cdot a_1(u, v),$$

$$a_0(u, v) = \int_0^1 \gamma(u)\gamma(v)ds, \quad \text{et} \quad a_1(u, v) = \int_0^1 \rho(u)\rho(v)ds,$$

avec  $C$  et  $D$  sont des constantes mécaniques de l'arche qu'on suppose, dans la suite, égale à 1.

On suppose que l'arche est soumise à un chargement  $f^\varepsilon \in V'$ . Le champ des déplacements résultant est la solution du problème suivant :

$$u^\varepsilon \in V, \quad \varepsilon^{3/2} a^\varepsilon(u^\varepsilon, v) = f^\varepsilon(v) \quad \forall v \in V.$$

Il est connue (voir [34]) que ce problème admet une solution unique, en fait  $a^\varepsilon$  est uniformément coercive pour  $\varepsilon \in ]0, 1]$  et elle vérifie les hypothèses  $(H_1)$  et  $(H_1)$  exigées dans le cadre générale de cette section. Le chargement  $f^\varepsilon$  est habituellement de la forme:  $f^\varepsilon = f_0 + \sqrt{\varepsilon}f_1$ , le terme  $f_0$  provient des forces surfaciques comme par exemple une pression produite par le vent, l'autre terme  $f_1$  provient des forces volumiques comme le poids de l'arche. De toute façon, comme le problème est linéaire ces deux types de forces peuvent être étudié séparément. De plus toujours, en utilisant les argument de linéarité, l'étude de l'équation :

$$u^\varepsilon \in V, \quad a^\varepsilon(u^\varepsilon, v) = l(v) \quad \forall v \in V,$$

où  $l$  ne dépend pas de  $\varepsilon$  est suffisant pour avoir une information complète sur les changements réaliste car le champs réel des déplacements  $\mathbf{U}^\varepsilon$  dans l'arche peut être déduit de  $u^\varepsilon$  en le multipliant par une puissance convenable de  $\varepsilon$ .

Maintenant, la dernière chose que nous avons à examiner, afin de montrer que nous somme dans le cadre général de l'étude abstraite faite ultérieurement, est le noyau de la forme bilinéaire  $a_0(., .)$ . Comme avant, on le désigne par :

$$G = \{w \in V; a_0(w, v) = 0, \quad \forall v \in V\}.$$

On a ici la

**Proposition 1.4.3** *Supposons que la courbure de l'arche n'est pas identiquement nul, i.e., ( $\delta \neq 0$ ) alors on a :*

$$G = \left\{ w = (w_1, w_2); \quad w_2 \in H_0^2(I), \quad \int_0^1 (\delta w_2)(s) ds = 0, \quad w_1(s) = - \int_0^s (\delta w_2)(t) dt \right\},$$

et cet espace  $G$  est isomorphe à un hyperplan fermé de  $H_0^2(I)$ .

**Preuve.** ([7]) Il est clair que :

$$\begin{aligned} w \in G &\iff \int_0^1 \gamma(w)\gamma(v) ds = 0, \forall v \in V \\ &\iff \gamma(w) = 0, \end{aligned}$$

et comme  $\gamma(w) = w_1' + \delta w_2$ , donc:  $w_1' = -\delta w_2$ , et alors comme  $\delta \in L^\infty(I)$ , si  $w_2 \in H_0^2(I)$ ,  $w_1$  sera évidemment dans  $H_0^1(I)$  et on aura aussi :

$$\int_0^1 (\delta w_2)(s) ds = - [w_1(1) - w_1(0)] = 0,$$

$$w_1(s) = - \int_0^s (\delta w_2)(t) dt,$$

puisque  $w_1(1) = w_1(0) = 0$ , car  $w_1 \in H_0^1(I)$  ce qui montre la caractérisation de  $G$ .

D'autre part l'application :

$$w_2 \longmapsto \left( - \int_0^s (c w_2)(t) dt, \quad w_2(s) \right), \quad \forall s \in I$$

est linéaire et continue de l'espace

$$\left\{ w_2 \in H_0^2(I) : \int_0^s (c w_2)(t) dt = 0 \right\},$$

(qui est un hyperplan fermé de  $H_0^2(I)$ , car l'application:  $w_2 \longmapsto \int_0^s (c w_2)(t) dt = 0$  est une forme linéaire continue sur  $H_0^2(I)$ ) dans l'espace  $G$ , ce qui montre l'isomorphisme énoncé plus haut. ■

**Remarque 1.4.2** *Si la courbure  $\delta$  de l'arche est identiquement nul ( $\delta = 0$ ), ce qui veut dire que l'arche est pratiquement une poutre ("beam" en anglais) alors il est facile de voir que :  $G = \{0\} \times H_0^2(I)$ .*

*Dans tous les cas on a donc montré que  $G$  est non réduit à l'origine.*

**1/ Un modèle discret verrouillant :**

Discretisons l'intervalle  $[0, 1]$  en choisissant un entier  $N > 0$  et en posons :

$$h = \frac{1}{N+1}, \quad x_0 = 0, \quad x_i = ih, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad \text{et } x_{N+1} = 1.$$

Soit  $P_k$  l'espace des polynômes définis sur cette discretisation de degré au plus égale à  $k$ , on définit l'espace  $V_h = V_{h_1} \times V_{h_2}$  par :

$$V_{h_1} = P_1 \cap H_0^1(I), \quad V_{h_2} = P_3 \cap H_0^2(I).$$

Il est connu que la famille  $(V_h)_{h>0}$  approche  $V$  (voir [34]), on peut voir facilement que  $P_3$  est l'espace minimum pour que la forme  $a_1$  ne soit pas constante) on a donc, d'après le théorème 1.4.3

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} u_h^\varepsilon = u^\varepsilon \quad \text{dans } V,$$

c'est à dire que  $(u_h^\varepsilon)_{h>0}$  converge simplement vers  $u^\varepsilon$  pour  $\varepsilon \in ]0, 1]$ , pour étudier l'uniformité de cette convergence nous pourrions voir si  $(G_h)_{h>0}$  approche  $G$ , on peut distinguer deux cas:

**1<sup>er</sup> cas :** Si la courbure  $\delta$  de l'arche est identiquement nulle, ce qui veut dire que l'arche, dans ce cas, est tout simplement une poutre, en vertu de la remarque 1.4.2 on a donc

$$G = \{0\} \times H_0^2(I), \quad G_h = \{0\} \times V_{h_2},$$

et comme  $(V_h)_{h>0}$  approche  $V$  alors  $(V_{h_2})_{h>0}$  approche  $H_0^2(I)$  ce qui montre que la famille  $(G_h)_{h>0}$  approche  $G$  et par conséquent, d'après le théorème.1.3.4, la convergence de  $(u_h^\varepsilon)_{h>0}$  vers  $u^\varepsilon$ , quand  $h \rightarrow 0$ , est uniforme ce qui veut dire que l'approximation  $(V_h)_{h>0}$  est *robuste*.

Pour ce cas très particulier on voit que les composantes  $u_1^\varepsilon$  et  $u_2^\varepsilon$  de  $u^\varepsilon$ , par rapport à notre repère local  $(t(s), n(s))$ , sont couplées ce qui donne des propriétés très spéciales.

**2<sup>ièm</sup> cas :** Si maintenant l'arche admet une vraie courbure ( $\delta \neq 0$ ), on a vu à la proposition 1.4.3 que  $G$  est isomorphe à un hyperplan fermé de  $H_0^2(I)$  donc  $G \neq \{0\}$ . On sait aussi que :

$$G_h = \{w_h \in V_h ; \gamma(w_h) = 0\}, \quad \text{avec } \gamma(w_h) = w'_{h_1} + \delta w_{h_2}, \quad \text{et } w_{h_1} \in P_1,$$

ce qui signifie que si  $w_h \in G_h$  alors  $cw_{h_2}$  est constante, de plus comme  $\delta$  est continue sur l'intervalle  $[0, 1]$ , on a :

$$\delta w_{h_2} \in C^0([0, 1]), \quad \text{avec} \quad \delta w_{h_2}(0) = cw_{h_2}(1) = 0.$$

et si  $\delta$  est non nul sauf peut être en quelques points isolés alors  $w_{h_2} = 0$ , en utilisant la relation  $w'_{h_1} + cw_{h_2} = 0$ , on déduit que :

$$w'_{h_1} = 0, \quad w_{h_1} \in C^0([0, 1]), \quad cw_{h_1}(0) = cw_{h_1}(1) = 0,$$

donc :  $w_{h_1} = 0$ , et par conséquent, pour tout  $h > 0$  l'espace  $G_h$  est réduit à l'origine i.e. :

$$G_h = \{0\}.$$

et comme  $G \neq \{0\}$  donc la famille  $(G_h)_{h>0}$  n'approche pas  $G$ .

On sait qu'un verrouillage total se produit, en fait pour l'éviter on devrait avoir :

$\lim_{h \rightarrow 0} u_h^0 = u^0$  mais  $u_h^0 = 0 \quad \forall h > 0$  et  $u^0 \neq 0$  sauf peut être si le chargement  $l \in G^\perp$  (voir le théorème 1.4.1) On peut maintenant voir facilement la

**Proposition 1.4.4** *Si  $l \notin G^\perp$  et la courbure de l'arche n'est pas identiquement nul ( $\delta \neq 0$ ) alors le schéma de discrétisation décrit dans cette section ne converge pas uniformément, quand  $h \rightarrow 0$ , pour  $\varepsilon \in ]0, 1]$ . Un phénomène de verrouillage se produit et on a :*

$$\sup_{0 < \varepsilon < 1} \|u_h^\varepsilon - u^\varepsilon\| \geq \|u^0\| > 0.$$

### Un modèle conforme et robuste pour une arche circulaire :

L'intervalle  $[0, 1]$  sera discrétiser de la même façon que la précédente. On va choisir :

$$V_{h_1} \subset P_k \cap H_0^1(I), \quad V_{h_2} = P_3 \cap H_0^2(I).$$

On veut démontrer qu'il est possible d'ajuster  $k$  et de choisir l'espace  $V_{h_1}$  de telle sorte que la famille  $(G_h)_{h>0}$  approche  $G$ . L'idée consiste à trouver des espaces  $V_{h_1}$  et  $V_{h_2}$  donnant moins de restriction que le cas précédent de manière que  $G_h$  soit plus grand et plus riche.

Supposons que la courbure de l'arche est constante ce qui veut dire que l'arche est circulaire (voir la définition A.3). En utilisant la relation qui définit  $G_h$  avec  $w_{h_2} \in P_3$ , on choisit  $k$  de façon que  $w'_{h_1}$  soit de même degré que  $w_{h_2}$  i.e,  $w_{h_1} \in P_4$ . On obtient le :

**Théorème 1.4.5** *La courbure de l'arche est supposée une constante non nulle, si on définit*

:

$$V_{h_1} = P_4 \cap H_0^1(I), \quad \text{et} \quad V_{h_2} = P_3 \cap H_0^2(I),$$

alors la famille  $(V_h)_{h>0}$  approche  $V$  et la famille  $(G_h)_{h>0}$  approche  $G$  et par conséquent :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[ \sup_{0 < \varepsilon \leq 1} \|u^\varepsilon - u_h^\varepsilon\| \right] = 0.$$

Donc l'approximation  $(V_h)_{h>0}$  est robuste.

**Démonstration.** ([7]) Il est connu que  $(V_h)_{h>0}$  approche  $V$  (voir [34]), démontrons donc que  $(G_h)_{h>0}$  approche  $G$ . On a vu à la proposition 1.4.3 que :

$$G = \left\{ w = (w_1, w_2); \quad w_2 \in H_0^2(I), \int_0^1 w_2(t) dt = 0, w_1(s) = -\delta \int_0^s w_2(t) dt \right\},$$

(ici la courbure de l'arche  $\delta$  est supposée une constante non nulle, pour simplifier on suppose que  $\delta = 1$ ). Cet espace est isomorphe à l'hyperplan fermé de  $H_0^2(I)$

$$F = \left\{ w_2 \in H_0^2(I); \quad \int_0^1 w_2(t) dt = 0 \right\},$$

de la même façon on a

$$G_h = \left\{ (w_{h_1}, w_{h_2}); w_{h_2} \in H_0^2(I) \cap P_3, \int_0^1 w_{h_2}(t) dt = 0, w_{h_1}(s) = -\int_0^s w_{h_2}(t) dt \right\},$$

lui aussi, isomorphe à l'hyperplan fermé de

$$F_h = \left\{ w_{h_2} \in V_{h_2}; \int_0^1 w_{h_2}(t) dt = 0 \right\},$$

donc l'application :  $v \mapsto \int_0^s v(t) dt$  est linéaire et bornée de l'espace  $F$  dans  $H_0^1(I)$ , il nous suffit de prouver que  $(F_h)_{h>0}$  approche  $F$  pour avoir  $(G_h)_{h>0}$  approche  $G$ . Comme il est connu que  $V_{h_2} = P_3 \cap H_0^2(I)$  approche  $H_0^2(I)$  il nous suffit de montrer la compatibilité de la valeur moyenne.

1.4. Le phénomène de verrouillage pour une classe de problèmes elliptiques : une condition suffisante générale pour le remède et un exemple

---

Soit  $\phi \in F$  donnée, comme  $V_{h_2}$  approche  $H_0^2(I)$ , on a :

$$\forall \eta > 0, \exists h_0 > 0 \text{ telle que : } 0 < h < h_0 \Rightarrow \{\exists \psi_h \in V_{h_2} : \|\phi - \psi_h\|_2 < \eta\},$$

où  $\|\psi\|_2$  désigne la norme naturelle dans  $H_0^2(I)$ .

Choisisant  $\theta_h \in V_{h_2}$  de sorte que  $\int_0^1 \theta_h(t) dt = 1$ , en considérant

$$\phi_h = \psi_h - \theta_h \int_0^1 \psi_h(t) dt,$$

on voit que  $\phi_h \in F_h$  car

$$\int_0^1 \phi_h(t) dt = \int_0^1 \psi_h(t) dt \cdot \left[1 - \int_0^1 \theta_h(t) dt\right] = 0,$$

il est facile de voir aussi que

$$\|\phi - \phi_h\|_2 \leq \|\phi - \psi_h\|_2 \cdot [1 + \|\theta_h\|_2],$$

donc le théorème sera démontré s'il est possible de choisir  $\theta_h$  de sorte que sa norme demeure bornée dans  $H_0^2(I)$ , quand  $h \rightarrow 0$ .

**Construction de la fonction  $\theta_h$  :**

Prenons  $\mu \in H_0^2(I)$  telle que :  $\int_0^1 \mu(t) dt = 1$ , alors il existe  $h_1 > 0$  qui vérifie :

$$0 < h < h_1 \Rightarrow \exists \lambda_h \in V_{h_2} : \|\mu - \lambda_h\|_2 < \frac{1}{2}.$$

Si on choisit

$$\theta_h = \frac{\lambda_h}{\int_0^1 \lambda_h(t) dt},$$

alors on aura :  $\theta_h \in V_{h_2}$  et  $\int_0^1 \theta_h(t) dt = 1$  avec

$$\|\theta_h\|_2 = \frac{\|\lambda_h\|}{\int_0^1 \lambda_h(t) dt},$$

et de plus comme  $\left| \int_0^1 \lambda_h(t) dt - 1 \right| \leq \left| \int_0^1 \lambda_h(t) dt - \mu \right| \leq \|\lambda_h - \mu\|_2$ , ce qui montre que

$$0 < h < h_1 \Rightarrow \left| \int_0^1 \lambda_h(t) dt \right| > \frac{1}{2},$$

donc il existe une constante  $c > 0$  telle que :

$$0 < h < h_1 \Rightarrow \|\theta_h\| \leq c.$$

ce qui achève la preuve du théorème. ■

**Conclusion :** Dans cette section on a étudié le comportement numérique des problèmes elliptiques qui dépendent d'un petit paramètre  $\varepsilon$  et on a exposé une condition générale qui assure le remède du verrouillage sans utiliser les méthodes mixtes et la condition Inf-Sup.

Un exemple a été étudié, concernant les arches dans le cadre d'élasticité linéaire sous le modèle de Kirchhoff-Love. L'estimation d'erreur uniforme a été déjà donnée par Kikuchi dans [15] en utilisant un calcul direct, mais Chenais et Paumier ont utilisé dans [7] une analyse asymptotique et ils ont donné un schéma d'éléments finis qui possède un comportement verrouillant et un autre robuste.

## Chapitre 2

# Rappel de quelques notions générales sur la théorie classique des coques élastiques minces

Une coque mince est un milieu continu tridimensionnel dont la forme est proche d'une surface (dite surface moyenne de la coque) avec une épaisseur petite . L'objet de *la théorie linéarisée des coques* est d'étudier le comportement, c'est à dire les déformations ou les déplacements, de la coque sous l'action de charges suffisamment petites de sorte que la coque déformée soit proche de son état initial pour que l'étude reste dans le cadre *linéarisé*.

Rappelons que dans ce chapitre on va exposer, comme il a été déjà signalé au début, dans la première section une description de la géométrie d'une coque quelconque avec tout ce qui est nécessaire à cette description, ensuite dans la seconde section on va faire une classification qui nous permet de bien identifier les diverses coques susceptibles d'être infecter par le phénomène du verrouillage quand celles-ci sont approximées par éléments finis.

## 2.1 Description de la géométrie d'une coque

### 2.1.1 Surface moyenne d'une coque. Base covariante et base contravariante

Soient  $E^3$  l'espace euclidien habituel rapporté à un repère orthonormé fixe  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , et  $E^2$  le plan euclidien habituel rapporté à un repère orthonormé fixe  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ .

**Définition 2.1.1** On appelle surface moyenne  $\overline{S}$  d'une coque, l'image, dans  $E^3$  d'un sous-ensemble  $\overline{\Omega}$  (fermeture de  $\Omega$ ) où  $\Omega$  est un domaine (ouvert connexe et borné) du plan euclidien  $E^2$  (dit domaine de référence) dont la frontière est notée  $\Gamma = \partial\Omega$ , par une application vectorielle :

$$\vec{\phi} : \overline{\Omega} \subset E^2 \longrightarrow \overline{S} \subset E^3 / (\xi^1, \xi^2) \mapsto \vec{\phi}(\xi^1, \xi^2) = (\vec{\phi}^1(\xi^1, \xi^2), \vec{\phi}^2(\xi^1, \xi^2), \vec{\phi}^3(\xi^1, \xi^2)).$$

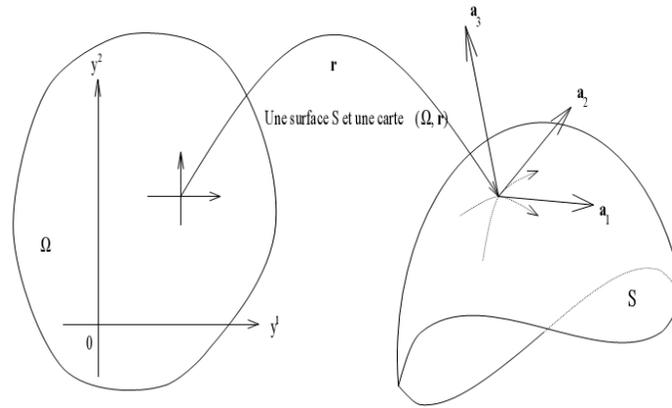
On note  $\partial S = \vec{\phi}(\Gamma)$  de telle sorte que  $\overline{S} = S \cup \partial S$ , et nous supposons que  $\vec{\phi}$  et  $\Gamma$  suffisamment régulières, on dit alors que la surface est définie par une carte  $(\Omega, \vec{\phi})$ . En particulier, nous supposons que tous les points de la surface moyenne  $\overline{S} = \vec{\phi}(\overline{\Omega})$  sont régulières de telle sorte que les vecteurs

$$\begin{aligned} \vec{a}_\alpha(\xi^1, \xi^2) &= \vec{\phi}_{,\alpha}(\xi^1, \xi^2) = \frac{\partial \vec{\phi}(\xi^1, \xi^2)}{\partial \xi^\alpha} \\ &= \left( \frac{\partial \vec{\phi}^1(\xi^1, \xi^2)}{\partial \xi^\alpha}, \frac{\partial \vec{\phi}^2(\xi^1, \xi^2)}{\partial \xi^\alpha}, \frac{\partial \vec{\phi}^3(\xi^1, \xi^2)}{\partial \xi^\alpha} \right), \quad \alpha = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

sont définis d'une façon unique et linéairement indépendants, pour tout les points  $\underline{\xi} = (\xi^1, \xi^2) \in \overline{\Omega}$ . Ces deux vecteurs définissent **le plan tangent** à la surface moyenne en tout point  $\vec{\phi}(\underline{\xi})$ . Le vecteur normal unitaire au plan tangent (donc orienté suivant la normale à la surface) est donnée par :

$$\vec{a}_3 = \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|}, \quad (2.1.2)$$

où  $|\cdot|$  désigne la norme euclidienne dans l'espace  $E^3$  équipée du produit scalaire habituel  $(\vec{x}, \vec{y}) \longrightarrow \vec{x} \cdot \vec{y} = x_i \cdot y_i$  (selon la notation des indices répétés) et  $\times$  désigne le produit vectoriel habituel.


 Figure 2.1.1 : Une surface  $S$  et une carte  $(\Omega, \vec{\phi})$ .

**Définition 2.1.2** Le point  $\vec{\phi}(\xi)$  et le triplet  $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$  définissent un repère local de l'espace  $E^3$  en chaque point  $\vec{\phi}(\xi)$  de la surface moyenne  $\bar{S}$ , on l'appelle base covariante attachée au point  $\vec{\phi}(\xi)$  (voir Figure 2.1.1).

Cette base covariante n'est pas en générale orthonormée ni même orthogonale, c'est pour quoi pour les commodités des calculs on lui associe une base duale appelée base contravariante (voir Figure 2.1.2), définie comme suit : à chaque vecteur  $\vec{a}_\alpha$  on lui associe le vecteur  $\vec{a}^\beta$  du même plan tangent qui vérifie :

$$\langle \vec{a}_\alpha, \vec{a}^\beta \rangle = \vec{a}_\alpha \cdot \vec{a}^\beta = \delta_\alpha^\beta = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta \\ 0, & \alpha \neq \beta \end{cases}, \quad \text{et} \quad \vec{a}^3 = \vec{a}_3.$$

( $\delta_\alpha^\beta$  est le symbole de Kronecker)

Ainsi tout vecteur  $\vec{v}$  de l'espace  $E^3$  peut s'exprimer dans ces deux bases par ces composantes covariantes (indices en haut) ou par ces composantes contravariantes (indices en bas)

$$\vec{v} = v_i \cdot \vec{a}^i, \quad \text{ou bien} \quad \vec{v} = v^i \cdot \vec{a}_i.$$

## 2.1.2 Définition géométrique de la coque non déformée

Aux deux coordonnées curvilignes  $\xi^1, \xi^2$  qui permettent de définir la surface moyenne de la coque, on ajoute une troisième coordonnée  $\xi^3$ , qui est mesurée le long de la normale  $\vec{a}_3$  à la surface moyenne  $\bar{S}$  au point  $\vec{\phi}(\xi^1, \xi^2)$ . Ce système  $(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$  est, au moins localement, un système de coordonnées curvilignes de  $E^3$ .

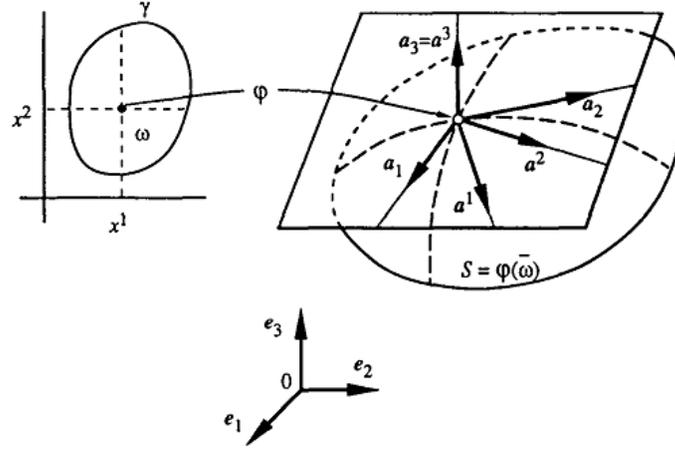


Figure 2.1.2 : En chaque point de la surface moyenne  $S$  de la coque, les vecteurs  $\vec{a}_\alpha$  forment la base covariante du plan tangent à  $S$  et les vecteurs  $\vec{a}^\beta$  forment la base contravariante. Avec le vecteur normal  $\vec{a}_3$  on forme les deux bases covariante et contravariante de l'espace  $\vec{E}$  au même point.

L'épaisseur  $t$  de la coque est définie au moyen de l'application :

$$t : (\xi^1, \xi^2) \in \bar{\Omega} \longrightarrow \{x \in \mathbb{R}; x > 0\},$$

alors la coque  $C$  (voir figure 2.1.3) est le sous-ensemble fermé de  $E^3$  défini par :

$$C = \left\{ M \in E^3; \overrightarrow{OM} = \vec{\phi}(\xi^1, \xi^2) + \xi^3 \vec{a}_3, \quad (\xi^1, \xi^2) \in \bar{\Omega}, \quad -\frac{1}{2}t(\xi^1, \xi^2) \leq \xi^3 \leq \frac{1}{2}t(\xi^1, \xi^2) \right\}.$$

Dans le cas où la coque est supposée qu'elle admet une épaisseur constante autour de sa surface moyenne notée par  $2\varepsilon$  ( $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^\star$ , voir figure 2.1.4), la coque est alors le sous-ensemble fermé de  $E^3$  définie par :

$$C = \left\{ M \in E^3; \overrightarrow{OM} = \vec{\phi}(\xi^1, \xi^2) + \xi^3 \vec{a}_3, \quad (\xi^1, \xi^2) \in \bar{\Omega}, \quad -\varepsilon \leq \xi^3 \leq \varepsilon \right\}.$$

### 2.1.3 Première et seconde formes fondamentales

Définissons maintenant les deux premières formes fondamentales d'une surface.

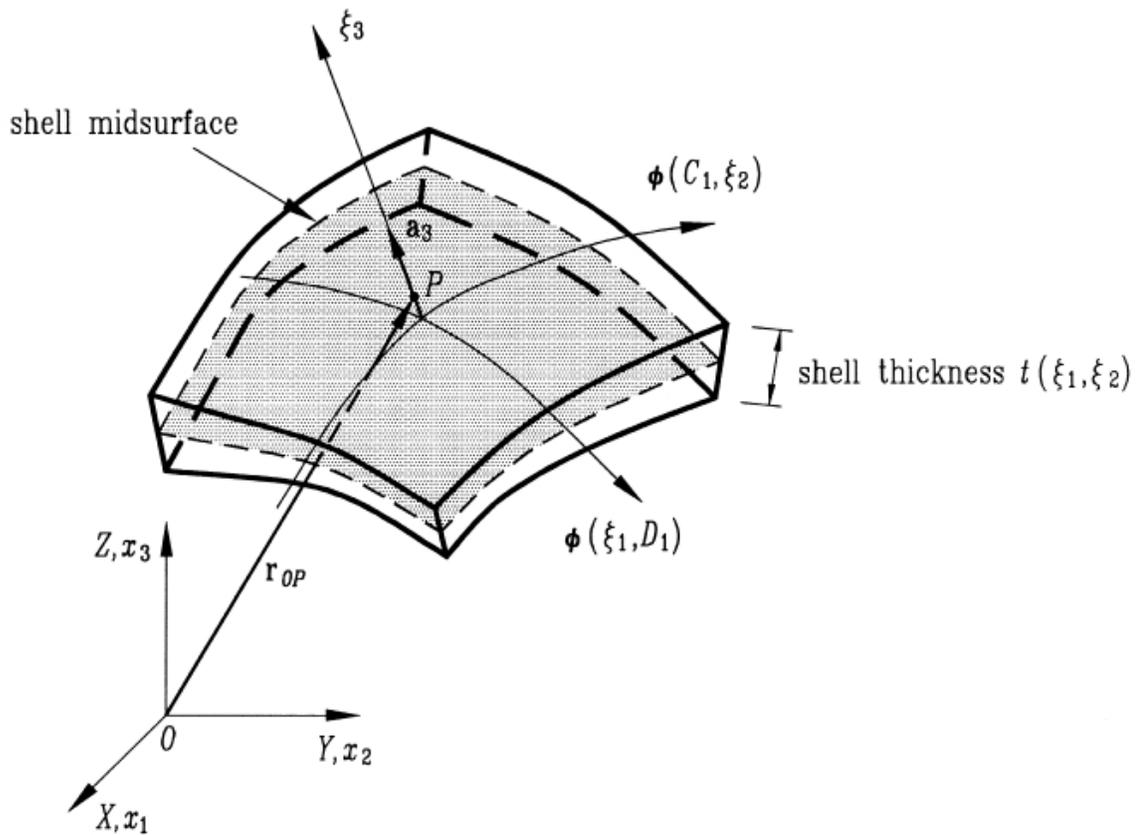


Figure 2.1.3 : La géométrie générale d'une coque à épaisseur variable.

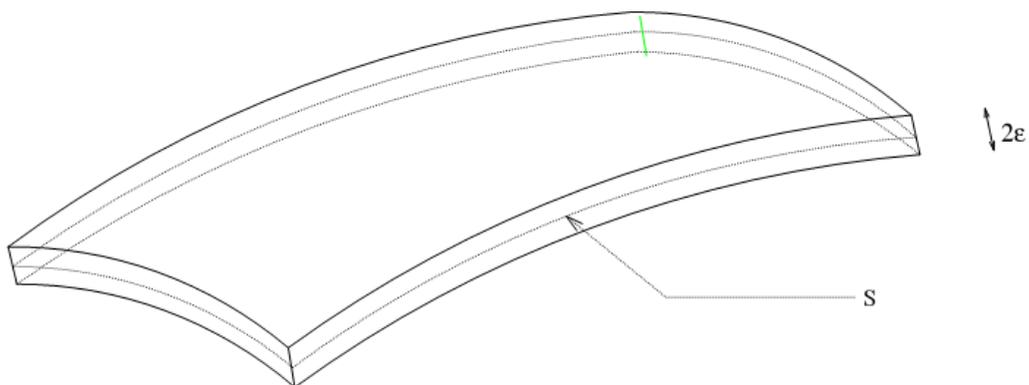


Figure 2.1.4 : Une coque de surface moyenne  $S$  et d'épaisseur constante  $2\epsilon$ .

Ce sont des applications qui, à tout point de la surface, associent une forme quadratique sur le plan tangent. Soient  $M$  un point de la surface moyenne  $\overline{S}$  et  $T_M$  le plan tangent à  $\overline{S}$  en  $M$ .

**Définition 2.1.3** *La première forme fondamentale de la surface  $\overline{S}$  en  $M$ , notée  $\mathbf{I}_M$ , est la forme quadratique sur  $T_M$  dont les coefficients  $(a_{\alpha\beta})$  de sa représentation matricielle dans le repère  $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$  sont donnés par:*

$$a_{\alpha\beta} = \langle \vec{a}_\alpha, \vec{a}_\beta \rangle = \vec{a}_\alpha \cdot \vec{a}_\beta = \vec{\phi}_{,\alpha} \cdot \vec{\phi}_{,\beta} = a_{\beta\alpha}. \quad (2.1.3)$$

En chaque point  $M$  de la surface  $\overline{S}$ , la première forme fondamentale est définie comme le carré de la forme différentielle  $d\vec{\phi}$ , on note  $\mathbf{I}_M = d\vec{\phi} \cdot d\vec{\phi}$  et on a :

$$\forall X \in T_M, X = x^\alpha \cdot \vec{a}_\alpha : \mathbf{I}_M(X) = \langle x^\alpha \cdot \vec{a}_\alpha, x^\alpha \cdot \vec{a}_\alpha \rangle = x^1 x^1 a_{11} + 2x^1 x^2 a_{12} + x^2 x^2 a_{22}.$$

**Définition 2.1.4** *La seconde forme fondamentale de la surface  $\overline{S}$  en  $M$ , notée  $\mathbf{II}_M$ , est la forme quadratique sur  $T_M$  dont les coefficients  $(b_{\alpha\beta})$  de sa représentation matricielle dans le repère  $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$  sont donnés par:*

$$\begin{aligned} b_{\alpha\beta} &= \langle -\vec{a}_\alpha, \vec{a}_{3,\beta} \rangle \\ &= -\vec{a}_\alpha \cdot \vec{a}_{3,\beta} \\ &= \vec{a}_3 \cdot \vec{a}_{\alpha,\beta} = \vec{a}_3 \cdot \vec{a}_{\beta,\alpha}. \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

**Remarque 2.1.1** *L'origine de la dénomination des deux formes fondamentales provient du fait qu'elles suffisent à déterminer toutes les propriétés géométriques de la surface . La première forme fondamentale induit une métrique sur la surface  $\overline{S}$ , donc elle mesure les longueurs (intrinsèques) de la surface. La longueur d'un élément d'arc  $ds$  le long d'une courbe de classe  $C^1$  est donnée par*

$$ds^2 = a_{11} dx^1 dx^1 + 2a_{12} dx^1 dx^2 + a_{22} dx^2 dx^2.$$

*La seconde forme fondamentale mesure la courbure de la surface  $\overline{S}$  dans une direction et on a :*

$$\forall X \in T_M, X = x^\alpha \cdot \vec{a}_\alpha : \mathbf{II}_M(X) = x^1 x^1 b_{11} + 2x^1 x^2 b_{12} + x^2 x^2 b_{22}.$$

Aux coefficients des deux premières formes fondamentales  $a_{\alpha\beta}$  et  $b_{\alpha\beta}$  on associe les coefficients  $a^{\alpha\beta}$  et  $b_{\beta}^{\alpha}$  définis par

$$a^{\alpha\beta} = \langle \vec{a}^{\alpha}, \vec{a}^{\beta} \rangle = \vec{a}^{\alpha} \cdot \vec{a}^{\beta} = a^{\beta\alpha},$$

$$b_{\beta}^{\alpha} = -\langle \vec{a}_{,\beta}^3, \vec{a}^{\alpha} \rangle.$$

On peut voir facilement que :

$$\vec{a}_{\alpha} = a_{\alpha\beta} \vec{a}^{\beta}, \quad \vec{a}^{\alpha} = a^{\alpha\beta} \vec{a}_{\beta}, \quad b_{\beta}^{\alpha} = a^{\alpha\lambda} b_{\lambda\beta}, \quad b_{\alpha\beta} = a_{\alpha\lambda} b_{\beta}^{\lambda}, \quad \text{et} \quad a^{\alpha\gamma} a_{\gamma\beta} = \delta_{\beta}^{\alpha}.$$

(2.1.5)

La dernière égalité montre que la matrice  $(a^{\alpha\beta})$  est l'inverse de la matrice  $(a_{\alpha\beta})$ .

### 2.1.4 La dérivée covariante d'un vecteur et les symboles de Christoffel

Soit  $\vec{v}$  un champ de vecteur exprimé dans le repère local, lorsqu'on passe d'un point  $p$  à un autre infiniment voisin  $p + dp$ , non seulement les composantes du vecteur varient mais aussi le repère locale est modifié, les dérivées partielles d'un vecteur n'obéissent pas aux règles de dérivation usuelles. Les règles de Gauss et de Weingarten nous donnent les règles de dérivation dans ces bases:

$$\vec{a}_{\alpha,\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} \vec{a}_{\gamma} + b_{\alpha\beta} \vec{a}_3, \quad \vec{a}_{,\beta}^{\alpha} = -\Gamma_{\beta\lambda}^{\alpha} \vec{a}^{\lambda} + b_{\beta}^{\alpha} \vec{a}_3. \quad (\text{Gauss})$$

$$\vec{a}_{3,\alpha} = \vec{a}_{,\alpha}^3 = -b_{\alpha}^{\lambda} \vec{a}_{\lambda}. \quad (\text{Weingarten})$$

où les coefficients  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$  sont les symboles de Christoffel définis par

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} = \Gamma_{\beta\alpha}^{\gamma} = \vec{a}^{\alpha} \cdot \vec{a}_{\gamma,\beta} = \vec{a}^{\alpha} \cdot \vec{a}_{\beta,\gamma}. \quad (2.1.6)$$

Ainsi, si nous avons un champ de vecteur  $\vec{v}$  (à valeur dans  $\mathbb{R}^3$ ) défini sur  $\bar{\Omega}$  (où  $\Omega$  un domaine de  $E^2$ ), nous pouvons exprimer ses dérivées partielles dans la base contravariante

(resp. dans la base covariante) en fonction des composantes covariantes de  $\vec{v}$  et de leurs dérivées partielles

$$\begin{aligned}\vec{v}_{,\alpha} &= (v_i \vec{a}^i)_{,\alpha} = v_{i,\alpha} \vec{a}^i + v_i \vec{a}^i_{,\alpha} \\ &= (v_{\beta,\alpha} - \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma v_\gamma - b_{\alpha\beta} v_3) \vec{a}^\beta + (v_{3,\alpha} - b_\alpha^\gamma v_\gamma) \vec{a}^3.\end{aligned}$$

La dérivée covariante (notée à l'aide d'une barre verticale) est donnée comme suit

$$v_{\beta|\alpha} = v_{\beta,\alpha} - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma v_\gamma, \quad \text{et} \quad v_{3|\alpha} = v_{3,\alpha}.$$

L'expression de l'élément d'aire de la surface est donnée par

$$\begin{aligned}dS &= |\vec{a}_1 \times \vec{a}_2| d\xi_1 d\xi_2 \\ &= \sqrt{a} d\xi_1 d\xi_2.\end{aligned}$$

où  $a$  est le déterminant de la matrice  $(a_{\alpha\beta})$

$$a = a_{11}a_{22} - (a_{12})^2. \quad (2.1.7)$$

## 2.2 Comportement et classification des coques élastiques minces

Nous décrivons dans cette section les diverses classification des coques, suivant la nature géométrique de sa surface moyenne (elliptique, parabolique, hyperbolique) dans le cas où la coque est non déformée, i.e. la coque est dans son état initial naturel.

Ensuite on suppose que la coque est déformée sous des charges extérieures sur sa surface moyenne avec des conditions aux limites. On classe les coques, dans ce cas, suivant :

- La prise en compte ou la négligence des effets des déformations de *cisaillement transverse*.
- La nature de l'énergie de déformation dominante.

### 2.2.1 Classification des surfaces et lignes asymptotiques

Nous venons de voir que la première forme fondamentale mesure les longueurs d'une surface tandis que la seconde forme fondamentale mesure les courbures de la surface, c'est à dire sa "forme géométrique". Nous allons préciser celà par une classification des points d'une surface.

Soit une surface  $\overline{S}$  définie par une carte  $(\Omega, \vec{\phi})$ . En tout point  $M$  de cette surface on définit la fonction qui à tout vecteur,  $X = x^\alpha \cdot \vec{a}_\alpha$ , unitaire tangent à  $\overline{S}$  en  $M$ , associe le nombre :

$$\mathbf{II}_M(X) = x^1 x^1 b_{11} + 2x^1 x^2 b_{12} + x^2 x^2 b_{22} = x^\alpha x^\alpha b_{\alpha\alpha} + 2x^1 x^2 b_{12},$$

cette fonction, comme elle est définie sur un compact, atteint ses deux valeurs extrémales  $k_M^1$  et  $k_M^2$  appelées *courbures principales* (maximale et minimale).

Les directions correspondantes sont appelées *directions principales*.

**Définition 2.2.1** On appelle *ligne de courbure* toute courbe dont tous les vecteurs tangents sont proportionnels à une direction principale.

Les directions  $X$  pour lesquelles la fonction  $\mathbf{II}_M$  s'annule ( $\mathbf{II}_M(X) = 0$ ), et sur lesquelles les courbures changent éventuellement de signe) sont appelées *directions asymptotiques*.

La notion de direction asymptotique conduit à la classification des surfaces.

**Définition 2.2.2** On appelle *ligne asymptotique* d'une surface une courbe de cette surface dont chaque vecteur tangent est proportionnel à une direction asymptotique (voir figure 2.2.1).

**Définition 2.2.3** En chaque point  $M$  d'une surface, on appelle *courbure totale* ou *courbure de Gauss* de la surface, le produit des deux courbures principales, on le note  $K_M$ . On appelle *courbure moyenne* en chaque point  $M$  de la surface la somme des deux courbures principales, on le note  $H_M$  :

$$K_M = k_M^1 \cdot k_M^2, \quad H_M = k_M^1 + k_M^2.$$

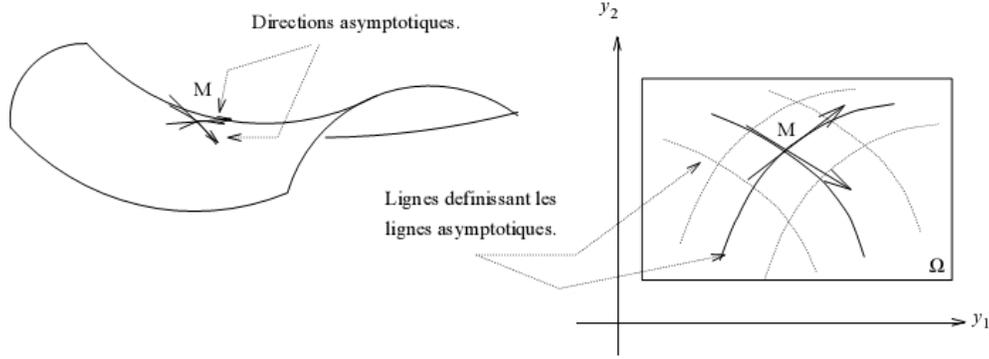


Figure 2.2.1 : Lignes définissant les lignes asymptotiques.

Suivant le signe de la courbure de Gauss  $K$ , nous avons la classification usuelle d'un point  $M$  de la surface :

Si  $K_M > 0$  : les courbures principales passant par  $M$  sont de même signe, et il n'y a pas de directions asymptotiques en  $M$ . La surface (au moins un voisinage de  $M$ ) se trouve d'un même côté du plan tangent. On dit que le point  $M$  est *elliptique* (voir figure 2.2.2).

Si  $K_M < 0$  : les courbures principales  $k_1$  et  $k_2$  sont de signe opposé. Le plan tangent traverse la surface suivant les deux directions asymptotiques. On dit que le point est *hyperbolique*.

Si  $K_M = 0$  : on distingue ici deux cas :

1/  $k_M^1 \neq 0$  ou  $k_M^2 \neq 0$  : Les courbures sont du même signe. Le plan tangent "colle" à la surface (linéairement) le long de la direction principale de courbure nulle (qui est donc une direction asymptotique), on dit que le point est *parabolique* (voir figure 2.2.3)

2/  $k_M^1 = 0$  et  $k_M^2 = 0$  : Toutes les courbes passant par  $M$  ont une courbure nulle (i.e.  $\mathbf{I}_M \equiv 0$ ),

on dit alors que le point est *méplat*; une surface entièrement constituée de points méplats est une surface plane (i.e.  $\mathbf{II}_M \equiv 0$ ).

**Proposition 2.2.1** (voir [5]) : Le signe de la courbure de Gauss  $K_M$  dépend du signe de  $\det(\mathbf{II}_M)$ , et nous avons de plus:

$$K_M = \frac{\det(\mathbf{II}_M)}{\det(\mathbf{I}_M)} = \frac{b_{11}b_{22} - (b_{12})^2}{a_{11}a_{22} - (a_{12})^2}. \quad (2.2.1)$$

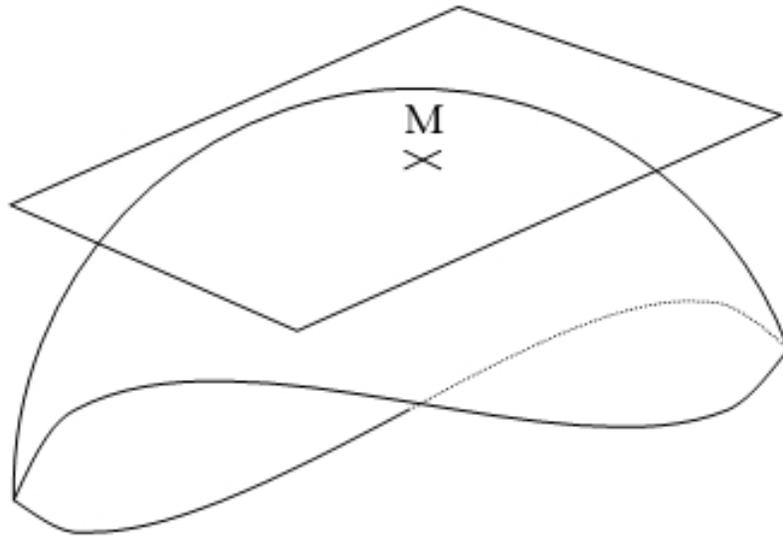


Figure 2.2.2 : Un point elliptique  $M$ .

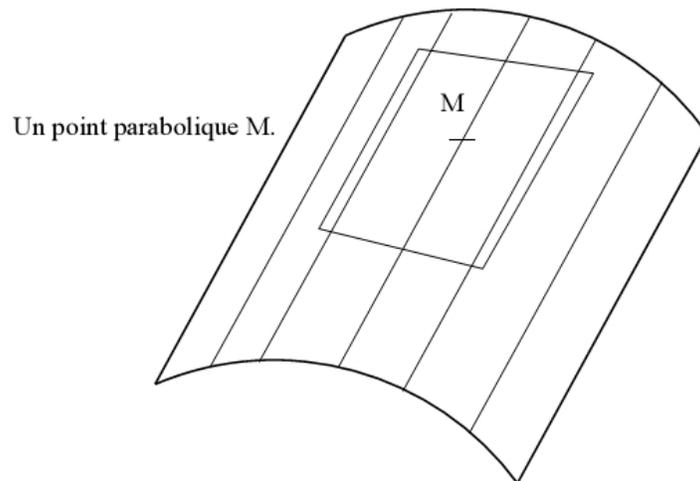


Figure 2.2.3 : Un point parabolique  $M$ .

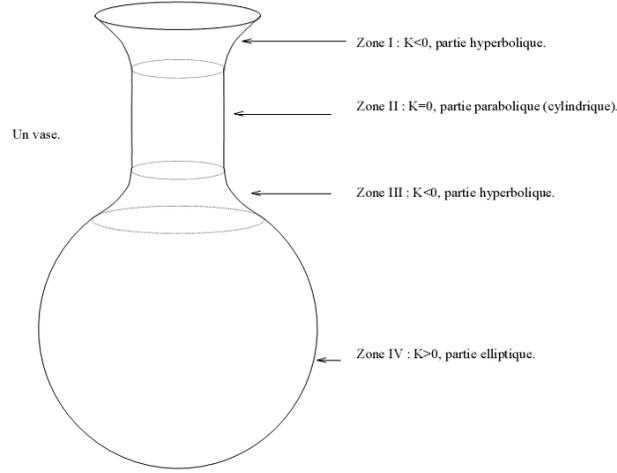


Figure 2.2.4 : Un vase avec ses différents parties de surface.

**Proposition 2.2.2** (voir [5]) : Soit  $(C)$  une courbe de la surface  $\overline{S}$  définie par la carte  $[I, c = r(\varphi_1(t), \varphi_1(t))]$ . Alors la courbe  $(C)$  est une ligne asymptotique de  $\overline{S}$  si

$$(\varphi_1')^2 b_{11} - 2\varphi_1' \varphi_2' b_{12} + (\varphi_2')^2 b_{22} = 0.$$

De façon analogue nous avons la classification usuelle d'une portion de surface:

**Définition 2.2.4** Soit une surface  $\overline{S}$  définie par une carte  $(\Omega, \vec{\phi})$ . On dira que  $\overline{S}$  est uniformément elliptique, parabolique, hyperbolique, suivant que  $K_M$  est positif, nul ou négatif uniformément sur  $\overline{\Omega}$ , i.e, pour tout point  $M \in \overline{S}$ .

Naturellement, une surface peut contenir tout les types de points, comme par exemple dans le cas d'un vase qui peut être considéré comme constitué d'une première partie hyperbolique (zone I) puis d'une partie cylindrique (zone II), puis encore d'une partie hyperbolique (zone III) et enfin d'une partie elliptique (zone IV) (voir figure 2.2.4)

**Définition 2.2.5** Une surface  $\overline{S}$  est dite réglée s'il existe une carte  $(\Omega, \vec{\phi})$  de  $\overline{S}$  telle que

$$\vec{\phi}(\xi^1, \xi^2) = c(\xi^1) + \xi^2 g(\xi^1), \quad (2.2.2)$$

où  $g(\xi^1)$  est un champs de vecteur sur la courbe  $c(\xi^1)$ , qu'on peut choisir unitaire.

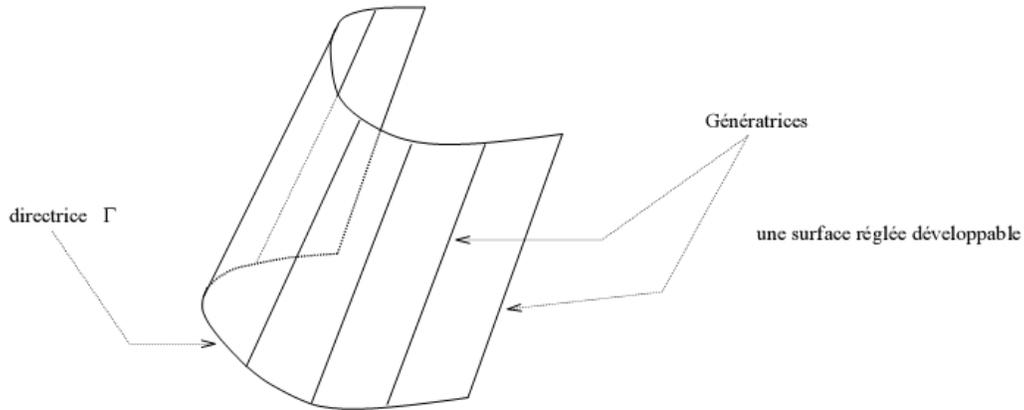


Figure 2.2.5 : Une surface réglée développable avec sa directrice et ses génératrices.

Les courbes à  $\xi^1$  constant sont des droites, ce sont les génératrices de  $\overline{S}$ . Les courbes à  $\xi^2$  constant (par exemple la courbe  $c$ ) sont appelées directrices (voire figure 2.2.5).

**Proposition 2.2.3** (voir [5]): Soit une surface réglée définie comme en (2.2.2), alors les coefficients de la seconde forme fondamentale et les symboles de Christoffel se simplifient comme suit:

$$b_{22} = \Gamma_{22}^\alpha = 0. \quad (2.2.3)$$

**Remarque 2.2.1** La relation  $b_{22} = 0$  indique que les courbes à  $\xi^1$  constant, c'est à dire les génératrices de  $\overline{S}$ , sont des lignes asymptotiques de  $\overline{S}$ . Une surface réglée est donc de courbure totale  $K \leq 0$ .

**Définition 2.2.6** Soit  $\overline{S}$  une surface réglée. On dit que  $\overline{S}$  est développable si la normale unitaire à  $\overline{S}$  est constante le long des génératrices. Autrement dit, une surface réglée définie comme en (2.2.2) est développable si et seulement si:

$$\vec{a}_{3,2} = 0.$$

Si bien que d'après (2.1.4), nous avons de plus:

$$b_{12} = 0,$$

ce qui, d'après (2.2.3) et (2.2.1), entraîne que:  $b_{11}b_{22} - (b_{12})^2 = \det(\mathbf{II}_M) = 0$ , c'est à dire que la courbure totale  $K$  de  $\overline{S}$  est nulle. Résumons :

**Proposition 2.2.4** Soit  $\overline{S}$  une surface réglée. Alors :

i) Les génératrices sont des des lignes asymptotiques, d'où  $K \leq 0$ .

ii)  $\overline{S}$  est développable si et seulement si  $K = 0$ , et si  $\overline{S}$  est définie comme en (2.2.2)

on a  $b_{22} = b_{12} = \Gamma_{22}^\alpha = 0$ .

**Corollaire 2.2.1** Une surface réglée non-développable est hyperbolique.

Exemples de surfaces développables :

1- Cylindre généralisé ( $g(\xi^1) = cte$ ) : c'est une surface développable qui peut être définie par une carte  $(\Omega, \overrightarrow{\phi})$  avec

$$\overrightarrow{\phi}(\xi^1, \xi^2) = c(\xi^1) + \xi^2 \overrightarrow{U}_0,$$

où  $C = c(\xi^1)$  est une courbe plane et  $\overrightarrow{U}_0$  un vecteur transversal au plan de la courbe  $C$ .

2- Cône ( $c(\xi^1) = cte$ ): Soit  $x$  un point quelconque, alors un cône de sommet  $x$  est une surface  $\overline{S} = (\Omega, \overrightarrow{\phi})$  définie par

$$\overrightarrow{\phi}(\xi^1, \xi^2) = x + \xi^2 g(\xi^1).$$

## 2.2.2 Modèles de coques : Koiter et Naghdi

A partir de maintenant on suppose que la coque, en tant que matériau élastique occupant dans son état naturel un domaine d'épaisseur supposé fixe  $t$  autour d'une surface  $\overline{S}$ , est

i) Soumise à des conditions aux limites cinématiques, par exemple fixée par une partie (ou la totalité) de sa frontière  $\partial S_0 = \overrightarrow{\phi}(\Gamma_0) \times [-\frac{t}{2}, \frac{t}{2}]$  (avec  $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \partial\Omega$ ) où  $\Gamma_0$  est supposée de mesure strictement positive ( $mes(\Gamma_0) > 0$ ).

ii) Chargée par une distribution de forces dont la résultante est  $\overrightarrow{f}$  sur sa surface moyenne  $S$  et dont le moment résultant est approximativement nul sur  $S$ .

Sous l'action de ces charges la coque se déforme (figure 2.2.6).

Le problème mécanique consiste à trouver, sous l'effet de ces forces, le champ de déplacements  $\overrightarrow{U}$  de toute particule  $M$  de la coque *tridimensionnelle*.

A l'aide d'hypothèses a priori convenables on peut obtenir différents modèles de coques. Par la suite on va exposer deux modèles différents qui sont représentatifs des grandes classes de modélisation de coques minces :

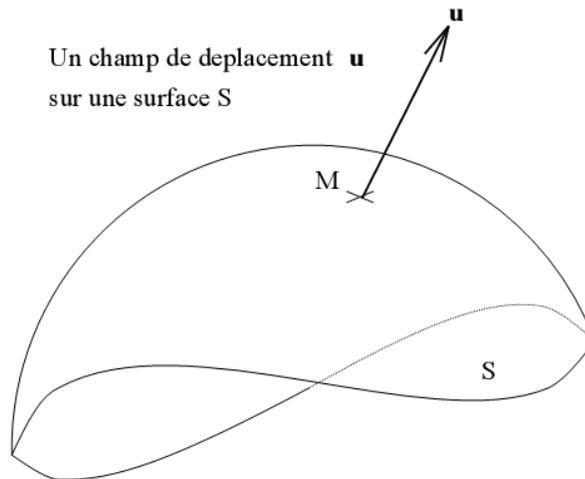


Figure 2.2.6 : Un champ de déplacement  $\vec{U}$  sur une surface  $S$ .

1) le premier, dû à Koiter (1966), repose sur une hypothèse de conservation des normales au cours de la déformation.

2) le second, dû à Naghdi (1963,1972), prend en compte les effets des déformations de *cisaillement transverse* (pour plus de détails voir [29]).

### 1) Le modèle linéaire de Naghdi

**Aspects géométriques de la déformation :** Ce modèle prend en compte les effets des déformations de *cisaillement transverse*.

La prise en compte de ces effets revient à supposer que les particules situées sur la normale unitaire  $\vec{a}_3$  avant déformation, restent alignées au cours de la déformation en constituant un nouveau vecteur  $\vec{a}_3^\star \neq \vec{a}_3$ , où  $\vec{a}_3$  désigne la nouvelle normale unitaire à la surface moyenne déformée.

**Remarque 2.2.2** On a utilisé ici la formulation simplifiée de Batoz et Geoffroy (1983) qui respecte les hypothèses de contraintes planes (i.e tous points de la coque conserve sa distance à la surface moyenne au cours de la déformation), et de déformations de cisaillement constantes dans l'épaisseur de la coque mince pour autoriser une approximation bidimensionnelle des déformations tridimensionnelles de la coque, on dit alors que le modèle de Naghdi appartient à la famille des coques de Reissner-Mindlin (Pour plus de détails voir [29]).

Donc si on note le champ de déplacement d'une particule quelconque  $M$  de la coque tridimensionnelle (n'appartenant pas à sa surface moyenne i.e.,  $\xi^3 \neq 0$ ) par  $\vec{U}$  on a

$$\vec{U} = \vec{u} + \xi^3 \theta_\alpha \vec{a}^\alpha,$$

où  $\vec{u}$  est le champ de déplacement de la projection orthogonale  $P$  du point  $M$  sur la surface moyenne non déformée, i.e.,

$$\vec{u} = u_i \vec{a}^i,$$

et où les paramètres  $\theta_\alpha$  sont les composantes de la rotation de la normale  $\vec{a}_3$  au cours de la déformation, i.e.,

$$\vec{a}_3^\star = \vec{a}_3 + \theta_\alpha \vec{a}^\alpha.$$

Donc la nouvelle position du point  $M$  est déterminée par les cinq inconnues  $(\vec{u}, \theta) = (u_i, \theta_\alpha)$ .

En outre, l'hypothèse de conservation des normales entraîne l'approximation suivante

$$\vec{a}_3 = \vec{a}_3 - \varphi_\alpha \vec{a}^\alpha, \quad \text{avec} \quad \varphi_\alpha(\vec{u}) = u_{3,\alpha} + b_\alpha^\lambda u_\lambda.$$

**La formulation variationnelle du problème** On a dit plus haut que le problème mécanique consiste à trouver le champ de déplacements  $\vec{U}$  de toute particule  $M$  de la coque tridimensionnelle, pour cela il est nécessaire de trouver les composantes  $u_i$  de la projection orthogonale  $P$  du point  $M$  sur la surface moyenne non déformée et les composantes  $\theta_\alpha$  de la rotation de la normale  $\vec{a}_3$  (voir figure 2.2.7), c'est donc un problème d'équations aux dérivées partielles à cinq inconnues qui sont des fonctions des coordonnées  $(\xi^1, \xi^2) \in \Omega$ .

On rappelle les conditions aux limites du problème: la coque est totalement encastree sur une partie de son bord  $\partial S_0 = \vec{\phi}(\Gamma_0) \times [-\frac{t}{2}, \frac{t}{2}]$ , ce qui signifie que :

$$u_i = 0 \quad \text{et} \quad \theta_\alpha = 0, \quad \text{sur} \quad \Gamma_0.$$

Il est alors tout à fait naturel de choisir l'espace des déplacements admissibles comme suit :

$$V^{RM} = (H_{\Gamma_0}^1)^5 \quad \text{où} \quad H_{\Gamma_0}^1 = \{v \in H^1(\Omega), \quad v|_{\Gamma_0} = 0\}.$$

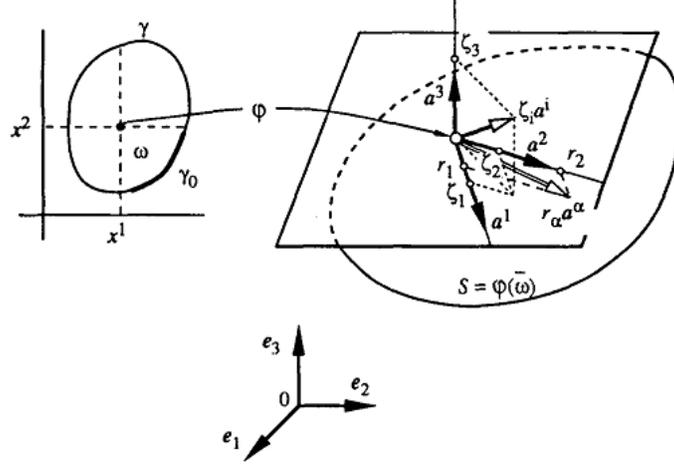


Figure 2.2.7 : Dans le modèle de Naghdi les cinq inconnues sont les trois composantes covariantes  $u_i$  du déplacement de la projection  $P$  du point  $M$  sur la surface moyenne et les deux composantes covariantes  $\theta_\alpha$  de la rotation de la normale  $\vec{a}_3$ . (D'après [28]).

Il est très bien connu que  $H_{\Gamma_0}^1$  est un espace de Hilbert (c'est un espace intermédiaire entre les espaces  $H^1(\Omega)$  et  $H_0^1(\Omega)$ , voir [34]) donc notre espace  $V$  l'est aussi.

En vue de faire l'écriture des équations plus simple et plus compacte, nous nous servons de la notation alternée comme dans [9], [11] et [23], ainsi on écrit :

$$\vec{v} = (v_i) = (v_1, v_2, v_3), \quad \underline{x} = (x_\alpha) = (x_1, x_2) \quad \text{et} \quad \underline{\lambda} = (\lambda_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{pmatrix}, \quad \text{où } \lambda_{12} = \lambda_{21},$$

et donc :

$$V^{RM} = \{(\vec{v}, \underline{\psi}) : v_i, \psi_\alpha \in H_{\Gamma_0}^1\} = (H_{\Gamma_0}^1)^5,$$

qui est, bien sur un espace de Hilbert, muni de la norme induite par celle de  $[H^1(\Omega)]^5$  :

$$\|(\vec{v}, \underline{\psi})\|_{V^{RM}}^2 = \|\vec{v}\|_{[H^1(\Omega)]^3}^2 + \|\underline{\psi}\|_{[H^1(\Omega)]^2}^2.$$

Pour simplifier notre étude, nous supposons toujours que la coque est réalisée par un matériau élastique, homogène et isotrope.

Comme dans plusieurs références (on peut voir par exemple [9], [23]) on montre que les composantes covariantes du tenseur de changement de courbure de la surface moyenne, du tenseur de déformations de cisaillement transverse, du tenseur de déformation de la surface

moyenne (i.e., de déformations membranaires), sont données respectivement par :

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}_{\alpha\beta}(\vec{u}, \underline{\theta}) &= \frac{1}{2} [\theta_{\alpha|\beta} + \theta_{\beta|\alpha} - b_{\alpha}^{\gamma}(u_{\gamma|\beta} - b_{\gamma\beta}u_3) - b_{\beta}^{\gamma}(u_{\gamma|\alpha} - b_{\gamma\alpha}u_3)] \\ &= \frac{1}{2} [\theta_{\alpha,\beta} + \theta_{\beta,\alpha} - b_{\alpha}^{\gamma}(u_{\gamma,\beta} - \Gamma_{\gamma\beta}^{\delta}u_{\delta}) - b_{\beta}^{\gamma}(u_{\gamma,\alpha} - \Gamma_{\gamma\alpha}^{\delta}u_{\delta})] + b_{\alpha}^{\gamma}b_{\gamma\beta}u_3 - \Gamma_{\alpha\beta}^{\delta}\theta_{\delta}, \\ \Phi_{\alpha}(\vec{u}, \underline{\theta}) &= \theta_{\alpha} + u_{3,\alpha} + b_{\alpha}^{\gamma}u_{\gamma}, \\ \mathbf{\Lambda}_{\alpha\beta}(\vec{u}) &= \frac{1}{2}(u_{\alpha|\beta} + u_{\beta|\alpha}) - b_{\alpha\beta}u_3 = \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) - \Gamma_{\alpha\beta}^{\delta}u_{\delta} - b_{\alpha\beta}u_3.\end{aligned}$$

et le tenseur d'élasticité de la coque (qui sont indépendants de l'épaisseur  $t$ ) sont donnés par :

$$a^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{E}{2(1+\nu)}(a^{\alpha\gamma}a^{\beta\delta} + a^{\alpha\delta}a^{\beta\gamma} + \frac{2\nu}{1-\nu}a^{\alpha\beta}a^{\gamma\delta}).$$

Les paramètres  $E > 0$  et  $\nu \in ]0, 1[$  désignent le *module de Young* et le *coefficient de Poisson* du matériau qui constitue la coque, et les  $a^{\alpha\beta}$  sont les coefficients contravariantes de la première forme fondamentale,  $b_{\alpha\beta}$  ( respect.  $b_{\alpha}^{\gamma}$ ) sont les coefficients covariantes (respect. mixtes) de la deuxième forme fondamentale.

Rappelons que les coefficients  $a^{\alpha\beta\gamma\delta}$  remplissent les conditions de symétrie et de positivité, i.e. :

$$\begin{aligned}a^{\alpha\beta\gamma\delta} &= a^{\gamma\delta\alpha\beta} = a^{\alpha\beta\delta\gamma} && \text{(symétrie)} \\ a^{\alpha\beta\gamma\delta}\xi_{\alpha\beta}\xi_{\gamma\delta} &\geq c \sum |\xi_{\alpha\beta}|^2, \quad \forall \xi_{\alpha\beta} \text{ symétriques avec } c > 0. && \text{(positivité)}.\end{aligned}$$

Alors pour un champ de déplacements arbitraire caractérisé par  $(\vec{v}, \underline{\psi}) = ((v_i), (\psi_{\alpha}))$ , l'énergie de flexion (i.e., de changement de courbure de la surface moyenne), l'énergie de cisaillement transverse, l'énergie membranaire et l'énergie potentielle des charges extérieures sont données respectivement par :

$$\begin{aligned}E^f &= \frac{t^3}{24} \int_{\Omega} a^{\alpha\beta\gamma\delta} \mathbf{Y}_{\alpha\beta}(\vec{v}, \underline{\psi}) \mathbf{Y}_{\gamma\delta}(\vec{v}, \underline{\psi}) \sqrt{ad\underline{x}}, \\ E^c &= \frac{t}{2} \int_{\Omega} \frac{E}{2(1+\nu)} a^{\alpha\beta} \Phi_{\alpha}(\vec{v}, \underline{\psi}) \Phi_{\beta}(\vec{v}, \underline{\psi}) \sqrt{ad\underline{x}}, \\ E^m &= \frac{t}{2} \int_{\Omega} a^{\alpha\beta\gamma\delta} \mathbf{\Lambda}_{\alpha\beta}(\vec{v}) \mathbf{\Lambda}_{\gamma\delta}(\vec{v}) \sqrt{ad\underline{x}}, \\ W &= t^3 \int_{\Omega} f^i v_i \sqrt{ad\underline{x}}.\end{aligned}$$

Le problème du modèle de coque de Naghdi est de trouver  $(\vec{u}, \underline{\theta}) \in V$  qui minimise l'énergie totale :

$$\mathbf{E}(\vec{v}, \underline{\psi}) = E^f + E^c + E^m - W,$$

qui est équivalent à la formulation variationnelle suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } (\vec{u}, \underline{\theta}) \in V^{RM} \text{ qui vérifie :} \\ t.a_0^{RM}(\vec{u}, \underline{\theta}; \vec{v}, \underline{\psi}) + t^3 a_1^{RM}(\vec{u}, \underline{\theta}; \vec{v}, \underline{\psi}) = F^t(\vec{v}), \quad \forall (\vec{v}, \underline{\psi}) \in V^{RM}. \end{array} \right. \quad (2.2.4)$$

avec

$$\begin{aligned} a_1^{RM}(\vec{u}, \underline{\theta}; \vec{v}, \underline{\psi}) &= \frac{1}{12} \int_{\Omega} a^{\alpha\beta\gamma\delta} \mathbf{Y}_{\alpha\beta}(\vec{u}, \underline{\theta}) \mathbf{Y}_{\gamma\delta}(\vec{v}, \underline{\psi}) \sqrt{ad} \underline{x}, \\ a_0^{RM}(\vec{u}, \underline{\theta}; \vec{v}, \underline{\psi}) &= \int_{\Omega} \frac{E}{2(1+\nu)} a^{\alpha\beta} \Phi_{\alpha}(\vec{u}, \underline{\theta}) \Phi_{\beta}(\vec{v}, \underline{\psi}) \sqrt{ad} \underline{x} \\ &\quad + \int_{\Omega} a^{\alpha\beta\gamma\delta} \mathbf{\Lambda}_{\alpha\beta}(\vec{u}) \mathbf{\Lambda}_{\gamma\delta}(\vec{v}) \sqrt{ad} \underline{x}, \\ F^t(\vec{v}) &= t^3 \int_{\Omega} f^i v_i \sqrt{ad} \underline{x}. \end{aligned}$$

qui est équivalent à la formulation variationnelle suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } (\vec{u}, \underline{\theta}) \in V^{RM} \text{ qui vérifie :} \\ \frac{1}{t^2} a_0^{RM}(\vec{u}, \underline{\theta}; \vec{v}, \underline{\psi}) + a_1^{RM}(\vec{u}, \underline{\theta}; \vec{v}, \underline{\psi}) = F(\vec{v}), \quad \forall (\vec{v}, \underline{\psi}) \in V. \end{array} \right. \quad (2.2.5)$$

où

$$F(\vec{v}) = \int_{\Omega} f^i v_i \sqrt{ad} \underline{x}.$$

## 2) Le modèle bidimensionnel linéarisé de W.T.Koiter :

Le modèle de Koiter est un modèle simplifié du modèle de Naghdi. *L'idée de base des théories de coques minces de Koiter est de réduire l'étude de la déformation d'une coque mince à la détermination du champ de déplacement  $\vec{u} = u_i \vec{a}^i$  des particules de sa surface moyenne.*

Il est intéressant de noter que ce modèle peut être obtenu à partir du modèle de Naghdi en négligeant les effets des déformations de *cisaillement transverse*, i.e., qu'un champ de déplacements  $\vec{U}$  sur la coque peut être défini à partir du champ de déplacements  $\vec{u}$  de sa surface moyenne (voir figure 2.2.8). Cela découle des hypothèses de W.T.Koiter suivantes :

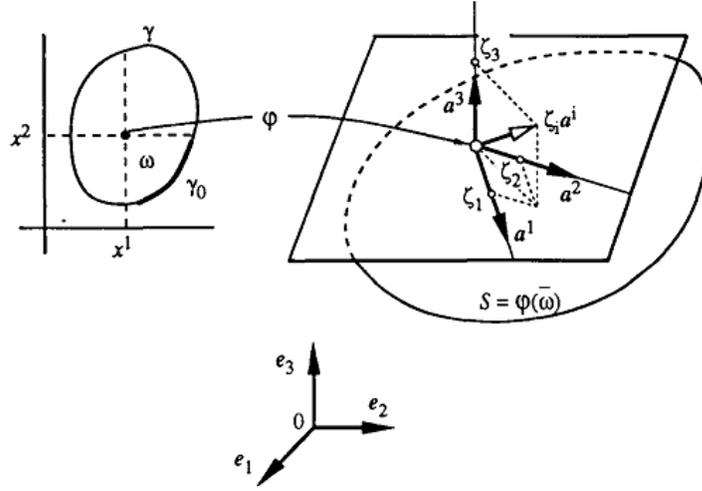


Figure 2.2.8 : Dans le modèle de Koiter les trois inconnues sont les composantes covariantes  $u_i$  des points du surface moyenne.

-Les normales à la surface moyenne non déformée demeurent normales à la surface moyenne après déformation (cette hypothèse est dite hypothèse de Kirchhoff-Love).

-Au cours de la déformation, les contraintes sont approximativement planes et parallèles au plan tangent à la surface moyenne.

Donc dans ce modèle on néglige les effets des *déformations de cisaillement transverse* i.e.,  $\vec{a}_3^\star \equiv \vec{a}_3$ , et alors on a :

$$\vec{U} = \vec{u} + \xi^3 \vec{a}_3.$$

Si bien que le problème mécanique tridimensionnel sur la coque se réduit à un problème bidimensionnel sur la surface moyenne.

On rappelle que la théorie classique linéarisée consiste à admettre que les contraintes membranaires et les moments sont des fonctions linéaires des tenseurs de déformation et de changement de courbure de la surface moyenne, ces derniers représentent les variations des coefficients de la représentation matricielle de la première et la deuxième forme fondamentale, sont données respectivement par :

$$\begin{aligned} \mathbf{\Lambda}_{\alpha\beta}(\vec{u}) &= \frac{1}{2}(u_{\alpha|\beta} + u_{\beta|\alpha}) - b_{\alpha\beta}u_3 = \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) - \Gamma_{\alpha\beta}^\delta u_\delta - b_{\alpha\beta}u_3, \\ \mathbf{\Upsilon}_{\alpha\beta}(\vec{u}) &= -(u_{3|\alpha\beta} - b_\alpha^\lambda b_{\lambda\beta}u_3 + b_{\alpha|\beta}^\lambda u_\lambda + b_\alpha^\lambda u_{\lambda|\beta} + b_\alpha^\lambda u_{\lambda|\alpha}), \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

On trouve dans [29] plus de détails concernant le passage du modèle de Naghdi au modèle de Koiter.

De la forme des composantes des tenseurs de déformations membranaires  $\mathbf{\Lambda}_{\alpha\beta}(\vec{u})$  (surtout l'expression  $u_{3|\alpha\beta}$  qui implique que  $u_3 \in H^2(\Omega)$ ) et de changement de courbure de la surface moyenne  $\mathbf{\Upsilon}_{\alpha\beta}(\vec{u})$ , on déduit le cadre fonctionnel approprié (l'espace des déplacements admissibles) :

$$V^K = \left\{ \vec{v} = (v_\alpha, v_3) \in (H^1(\Omega))^2 \times H^2(\Omega); \vec{v}|_{\Gamma_0} = \vec{0}, \frac{\partial v_3}{\partial n}|_{\Gamma_0} = 0 \right\},$$

qui est aussi un espace de Hilbert, muni de la norme naturelle :

$$\|(\vec{v})\|_{V^K} = (\|v_1\|_{1,\Omega}^2 + \|v_2\|_{1,\Omega}^2 + \|v_3\|_{2,\Omega}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

L'énergie de flexion, l'énergie membranaire et l'énergie potentielle des charges extérieures sont données respectivement par :

$$\begin{aligned} E^f &= \frac{t^3}{24} \int_{\Omega} a^{\alpha\beta\gamma\delta} \mathbf{\Upsilon}_{\alpha\beta}(\vec{v}) \mathbf{\Upsilon}_{\gamma\delta}(\vec{v}) \sqrt{a} d\underline{x}, \\ E^m &= \frac{t}{2} \int_{\Omega} a^{\alpha\beta\gamma\delta} \mathbf{\Lambda}_{\alpha\beta}(\vec{v}) \mathbf{\Lambda}_{\gamma\delta}(\vec{v}) \sqrt{a} d\underline{x}, \\ W &= t^3 \int_{\Omega} f^i v_i \sqrt{a} d\underline{x}. \end{aligned}$$

Le problème du modèle de coque de Koiter est de trouver  $\vec{u} \in V$  qui minimise l'énergie totale

$$\mathbf{E}(\vec{v}) = E^f + E^m - W.$$

qui est équivalent à la formulation variationnelle suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \vec{u} \in V^K \text{ qui vérifie :} \\ \frac{1}{t^2} a_0^K(\vec{u}, \vec{v}) + a_1^K(\vec{u}, \vec{v}) = \langle F, \vec{v} \rangle_{V',V} = F(\vec{v}) \quad \forall \vec{v} \in V^K, \end{array} \right. \quad (2.2.7)$$

où

$$\begin{aligned} a_0^K(\vec{u}, \vec{v}) &= \int_{\Omega} a^{\alpha\beta\gamma\delta} \mathbf{\Lambda}_{\alpha\beta}(\vec{u}) \mathbf{\Lambda}_{\gamma\delta}(\vec{v}) \sqrt{a} d\underline{x}, \\ a_1^K(\vec{u}, \vec{v}) &= \frac{1}{12} \int_{\Omega} a^{\alpha\beta\gamma\delta} \mathbf{\Upsilon}_{\alpha\beta}(\vec{u}) \mathbf{\Upsilon}_{\gamma\delta}(\vec{v}) \sqrt{a} d\underline{x}, \\ F(\vec{v}) &= \int_S f^i v_i ds = \int_{\Omega} f^i v_i \sqrt{a} d\underline{x}. \end{aligned}$$

**Remarque 2.2.3** (*Ellipticité des deux modèles*). La principale difficulté, pour montrer que les problèmes (2.2.4) et (2.2.7) admettent des solutions uniques, est d'établir l'ellipticité de l'énergie de déformation. On ne peut ici exposer les démonstrations des théorèmes qui assurent cette ellipticité, ils sont très bien détaillés surtout dans [28] et [29].

### 2.2.3 Coques inhibées - Coques non inhibées : Comportement asymptotique

Le concept de “modèle de coque” en lui même présuppose qu'on s'intéresse à un objet dont l'épaisseur est “petite” par rapport aux autres dimensions. Dans la pratique il n'est pas rare d'avoir affaire à des structures pour lesquelles l'épaisseur est inférieure de plusieurs ordres de grandeur à toutes les autres dimensions. On dit alors que la coque est “mince”. Dans le cas d'un aéroréfrigérant de centrale nucléaire, par exemple, le rapport épaisseur/hauteur avoisine les 0,2%.

Etant donné la façon dont  $t$  apparaît dans les formulations (2.2.4) et (2.2.7), avec un poids variant de 1 à  $t^2$  devant les différents termes du membre de gauche, il est légitime de se demander quelle influence ce paramètre peut avoir sur le modèle (i.e., la solution du problème du modèle) lorsqu'il devient très petit, pour savoir quelles sont les propriétés qui sont ou non conservées. Il est également intéressant de savoir si le modèle converge, en un sens à préciser, vers un “modèle limite” quand le paramètre  $t$  tend vers zéro, de façon à pouvoir éventuellement substituer ce modèle limite au modèle complet lorsque le paramètre est jugé suffisamment petit.

On souhaite aussi étudier l'influence du paramètre sur la qualité des approximations numériques par éléments finis qu'on peut faire de ce modèle, de façon à détecter des difficultés du type “verrouillage numérique” dont on sait qu'elles arrivent effectivement pour d'autres formulations de structures minces (voir [3], [8], [10], [15], [22] et §1.4). On va dans un premier temps s'intéresser au comportement asymptotique des modèles eux mêmes, tandis que la question des méthodes numériques est spécifiquement traitée au chapitre 3.

*Les travaux de Sanchez-Palencia* sur les comportements asymptotiques des modèles de coques ont dégagé des résultats très importants (pour plus de détails voir [13], [14] et [24] chapitres 4, 5 et 6). Il apparaît, dans ses travaux, que ces comportements prennent deux

formes radicalement différentes, comme on va le voir, suivant que la surface moyenne (avec conditions aux limites cinématiques) est *géométriquement rigide* ou non (cas des coques dite *inhibées* ou non).

Pour voir celà, il est important de remarquer que, d'une façon générique, les modèles de coques que nous avons présenter rapidement ont tous des formulations variationnelles du type suivant :

$$\varepsilon^3 a(u^\varepsilon, v) + \varepsilon b(u^\varepsilon, v) = F^\varepsilon(v), \quad \forall v \in V, \quad (2.2.8)$$

où  $u^\varepsilon$  est l'inconnu, que l'on appelle "déplacement" même si certains champs sont de nature un peu différente (comme par exemple les rotations), et  $V$  l'ensemble des "déplacements admissibles", compte-tenu des espaces concernés et des conditions aux limites imposées,  $a$  et  $b$  représentent des formes bilinéaires dont l'expression dépend du modèle considéré, mais pas du paramètre  $\varepsilon$ . Enfin le second membre correspond au travail des forces extérieures pour le déplacement virtuel  $v$ .

Lorsque on étudie le comportement de formulations telles que (2.2.8), il apparaît rapidement qu'un certain sous-espace de l'espace des déplacements admissibles joue un rôle prépondérant (voir par exemple [13] et [22]). Il s'agit de l'espace :

$$G = \{v \in V ; b(v, v) = 0\} = \{v \in V ; b(v, w) = 0 \quad \forall w \in V\}. \quad (2.2.9)$$

Cette égalité est obtenue, comme on l'avait vu au début de §1.4, par l'application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz à la forme bilinéaire, symétrique et positive  $b$ .

Rappelons que l'espace  $G$  définie dans (2.2.9) est un sous-espace fermé de l'espace de Hilbert  $V$ . Donc il est lui-même un espace de Hilbert pour la topologie induite par celle de  $V$ . Pour le modèle de Koiter l'espace  $G$  devient (d'après la positivité des coefficients  $a^{\alpha\beta\gamma\delta}$ ) :

$$G^K = \{\vec{v} \in V^K; \quad \Lambda_{\alpha\beta}(\vec{v}) = 0, \quad \alpha, \beta = 1, 2\}, \quad (2.2.10)$$

ce qui signifie que  $G^K$  correspond aux déplacements qui engendrent des déformations membranaires nulles. De même, pour le modèle de Naghdi on a :

$$G^{RM} = \{(\vec{v}, \underline{\psi}) \in V^{RM}; \quad \Lambda_{\alpha\beta}(\vec{v}) = 0, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \text{ et } \Phi_\alpha(\vec{v}, \underline{\psi}) = 0, \quad \alpha = 0\}, \quad (2.2.11)$$

ainsi les déformations membranaires et de cisaillement sont nulles. Dans les deux formulations,  $G$  contient les déplacements pour lesquels seules les déformations de flexions sont non-nulles.

On dit alors que  $G$  est l'espace des “déplacements de flexions pure” ou tout simplement, l'espace des flexions pures (voir [13], [14]).

Notons que, pour le modèle de Naghdi, les conditions de cisaillement nul sont équivalentes aux relations suivantes :

$$\psi_\alpha = -(v_{3,\alpha} + b'_\alpha v_\gamma),$$

qui fournissent une expression explicite de  $\underline{\psi}$  en fonction de  $\vec{v}$ . Par conséquent les conditions déterminantes pour  $G^{RM}$  sont essentiellement celles des déformations membranaires nulles, comme pour  $G^K$ . C'est pourquoi on appelle aussi parfois “déplacements inextensionnels” les éléments de  $G$ . Lorsqu'on parle simplement de la déformation d'une surface il est évident que les déformations de cisaillement n'ont pas de sens, donc on a la :

**Définition 2.2.7** Une surface (resp. une portion de surface) est dite (géométriquement) **rigide** ou (à flexion pure) **inhibée** si le système :

$$\Lambda_{\alpha\beta}(\vec{v}) = 0, \quad \alpha, \beta = 1, 2 \tag{2.2.12}$$

avec les conditions cinématiques, éventuellement imposées sur le bord de la surface, a pour unique solution la solution triviale, i.e.,  $\vec{v} = 0$ .

Le système (2.2.12), qui est de trois équations aux dérivées partielles à trois inconnues, est appelé *système de rigidité* de la surface considérée. Il est clair que pour montrer qu'une surface est rigide ou non, il faut résoudre un problème de Cauchy linéaire du 1<sup>er</sup> ordre.

On trouvera dans [24] deux chapitres consacrés complètement à l'étude détaillée du rigidité des surfaces avec beaucoup d'exemples. Bien sur la thèse [5] est totalement consacrée à cet objet.

Pour classifier les coques on regarde l'espace  $G$  et on a la définition suivante :

**Définition 2.2.8** Si  $G = \{0\}$  la coque sera dite à flexion pure inhibée, ou tout simplement **inhibée**; dans le cas contraire i.e., si  $G \neq \{0\}$  elle sera dite à flexion pure non-inhibée, ou tout simplement **non-inhibée**.

On montre que la caractérisation de l'espace  $G$  dépend seulement de la géométrie de la coque (i.e., de sa surface moyenne) et des conditions aux limites imposées.

**1/ Cas de flexion pure non inhibée :**

On sait que, pour que la solution de (2.2.8) demeure bornée sans autant tendre vers zéro lorsque  $\varepsilon$  lui même tend vers zéro, il faut faire l'hypothèse que le second membre est de la forme :

$$F^\varepsilon(v) = \varepsilon^3 F(v),$$

où  $F$  est une forme linéaire *indépendante* de  $\varepsilon$  (voir par exemple [13] et [17]). En termes concrets, on peut dire que la raideur de la structure diminue comme  $\varepsilon^3$ .

Pour chaque valeur de  $\varepsilon$ , on résout alors le problème suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u^\varepsilon \in V \text{ tel que :} \\ a(u^\varepsilon, v) + \frac{1}{\varepsilon^2} b(u^\varepsilon, v) = F(v), \quad \forall v \in V. \end{array} \right. \quad (2.2.13)$$

On a vu que le problème limite, lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u^0 \in G \text{ tel que :} \\ a(u^0, v) = F(v), \quad \forall v \in G, \end{array} \right. \quad (2.2.14)$$

et on a alors le résultat suivant (voir la remarque 1.4.1) :

**Proposition 2.2.5** *La solution  $u^\varepsilon$  du problème (2.2.13) converge fortement vers la solution  $u_0$  du problème (2.2.14) pour la norme de  $V$ . De plus on a :*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^2} b(u^\varepsilon, u^\varepsilon) = 0. \quad (2.2.15)$$

Cette relation signifie que l'énergie membranaire, et éventuellement de cisaillement pour les modèles de Naghdi, tend vers zéro avec  $\varepsilon$ .

Donc lorsqu'une coque est non-inhibée, que ce soit du type de Koiter ou bien du type de Naghdi, sa déformation sous l'action d'efforts extérieur a naturellement tendance à être de type flexion (déplacements inextensionnels), c'est à dire que les déplacements dominants sont ceux qui provoquent des changements de courbure de la surface moyenne de la coque, et ce d'autant plus que son épaisseur est petite, ce qui est intuitivement cohérent ( nous

pouvons, par exemple, penser à une feuille de papier; il est “assez difficile” de l’étirer (voir [5]).

Ceci explique que les coques à flexion pure non-inhibée sont par fois dites “à flexion dominante” (“bending-dominated” en anglais, voir aussi [22]).

**Remarque 2.2.4** *Cette idée, qui a été établit par Sanchez-Palencia de façon précise et rigoureuse est assez intuitive, et se trouve en filigrane dans des remarques heuristiques de certains anciens auteurs, Love par exemple (voir [24]).*

Plus bas on va donner une définition proposer par quelques chercheurs sur la classification des coques suivant le type de l’énergie dominante.

## 2/ Cas de flexion pure inhibée :

Dans ce cas, i.e.,  $G = \{v \in V ; b(v, v) = 0\} = \{0\}$ , il est clair que la forme bilinéaire symétrique est devenue définie positive, puisque  $b(v, v) = 0$  entraîne  $v = 0$ , donc  $[b(v, v)]^{\frac{1}{2}}$  définit une nouvelle norme sur  $V$  ( voir annexe, théorème A1), mais qui n’est pas en générale équivalente à la norme naturelle de  $V$  car la forme  $b$  n’est pas coercive.

On note alors  $V^0$  l’espace complété de  $V$  pour cette nouvelle norme.  $V^0$  est bien sûr un espace moins régulier que l’espace  $V$  et sa nature exacte dépend de la coque considérée et des conditions aux limites imposées.

Par exemple pour le modèle de Koiter, si la coque est uniformément elliptique, de surface suffisamment régulière, et encastrée sur toute son bord, on peut montrer que la flexion est inhibée (voir plus loin) et que  $V^0$  s’identifie à l’espace  $[H_0^1(\Omega)]^2 \times L^2(\Omega)$  (voir [24]).

La mise à l’échelle convenable pour le second membre du problème est alors (voir par exemple [12]) :

$$F^\varepsilon(v) = \varepsilon F(v), \tag{2.2.16}$$

c’est à dire que la raideur de la structure est de l’ordre de  $\varepsilon$ . La famille de problèmes à résoudre devient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u^\varepsilon \in V \text{ telle que :} \\ a_0(u^\varepsilon, v) + \varepsilon^2 a_1(u^\varepsilon, v) = F(v), \quad \forall v \in V. \end{array} \right. \tag{2.2.17}$$

On voit qu'on a maintenant affaire à un problème classique de *perturbation singulière* de problème aux limites elliptique (pour plus de détails voir [21]).

On définit le problème limite :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_l \in V^0 \text{ tel que :} \\ b(u_l, v) = F(v), \quad \forall v \in V^0. \end{cases} \quad (2.2.18)$$

Ce problème est bien posé si le second membre a un sens, c'est à dire si  $F$  est dans le dual de  $V^0$ . Notons que ceci n'est pas automatique car  $V^0$  est plus grand que  $V$  ( $V \subset V^0$ ), donc  $(V^0)'$  est plus petit que  $V'$  [ $(V^0)' \subset V'$ ]. Si cette condition est remplie i.e.  $F \in (V^0)'$  qui veut dire qu'il existe une constante  $M > 0$  telle que

$$|F(v)| \leq M. [b(v, v)]^{\frac{1}{2}}.$$

On a aussi convergence du problème de perturbation singulière, que l'on exprime dans la proposition suivante (voir [12], [14] et [21]) :

**Proposition 2.2.6** *Si  $F \in (V^0)'$  la solution  $u^\varepsilon$ , converge au sens de la norme  $[b(v, v)]^{\frac{1}{2}}$  vers  $u_l$ , solution de (2.2.18). De plus on a :*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 a_1(u^\varepsilon, u^\varepsilon) = 0. \quad (2.2.19)$$

Dans ce cas, la relation (2.2.19) montre que **l'énergie de déformation de flexion devient négligeable** par rapport aux autres termes quand  $\varepsilon$  tend vers zéro, alors que c'était le contraire pour une coque non-inhibée! en d'autres termes on peut dire qu'*une coque inhibée se comporte comme étant  $\varepsilon^{-2}$  fois plus rigide qu'une coque non-inhibée analogue.*

Une autre différence notable entre les comportements asymptotiques de ces deux modèles, est que, pour la coque inhibée, il y a perte de régularité lorsque l'on passe de  $V$  à  $V^0$ , alors que ce n'est pas le cas pour la coque non-inhibée au passage de  $V$  à  $G$ . Dans certains cas, cette perte de régularité peut poser des problèmes sérieux.

Par exemple pour une coque de Koiter uniformément elliptique fixée sur une partie seulement de sa frontière, on peut montrer que la flexion pure est inhibée, mais l'espace  $V^0$

n'est pas un espace de distribution (voir [24]). Ceci implique qu'il existe des chargements aussi régulières que l'on veut qui ne sont pas dans le dual de  $V^0$ ; dans ces conditions il est difficile de donner un sens au problème limite (2.2.18), Sanchez-Palencia utilise le terme "coque chancelante".

### 3/ Etude du sous-espace des déplacements de flexion pure :

On a vu à quel point le contenu du sous-espace des déplacements de flexion pure  $G$ , et en particulier le fait que celui-ci soit ou non réduit à l'origine, est un facteur prépondérant dans le comportement asymptotique des modèles de coques. On a aussi observé que, parmi les équations qui définissent  $G$ , les conditions essentielles sont celles qui expriment des déformations membranaires nulles, i.e:

$$\mathbf{\Lambda}_{\alpha\beta}(\vec{v}) = 0, \quad \alpha, \beta = 1, 2. \quad (2.2.20)$$

Sanchez-Palencia a démontré dans [14] une propriété remarquable de ce système d'équations différentielles, c'est que la nature de ce système (elliptique, parabolique ou hyperbolique) est la même que celle de la surface moyenne au point considéré.

On va s'intéresser à des coques dont la surface moyenne est de nature uniforme (partout elliptique, parabolique ou hyperbolique)

#### Surfaces elliptiques :

Pour une surface uniformément elliptique et suffisamment régulière (par exemple une portion d'ellipsoïde), il suffit d'imposer un déplacement nul sur une partie de la frontière de mesure non-nulle pour inhiber les déplacements de flexion pure (voir figure 2.2.9 et voir aussi [5] et [39]) i.e  $G = \{v \in V ; b(v, v) = 0\} = \{0\}$ .

Si cette partie est en fait toute la frontière on a un modèle limite qui conserve une certaine régularité (modèle en "membrane", voir [12]). Si ce n'est pas le cas on obtient une coque "chancelante".

Par contre, si aucune condition aux limites n'est imposée (et en présence d'un bord libre), alors il semblerait qu'il existe des déplacements de flexion pure (voir [1]).

#### Surfaces hyperbolique :

Une surface elliptique  $S$  fixée le long de la courbe  $\Gamma$

$S$  est entièrement inhibée.

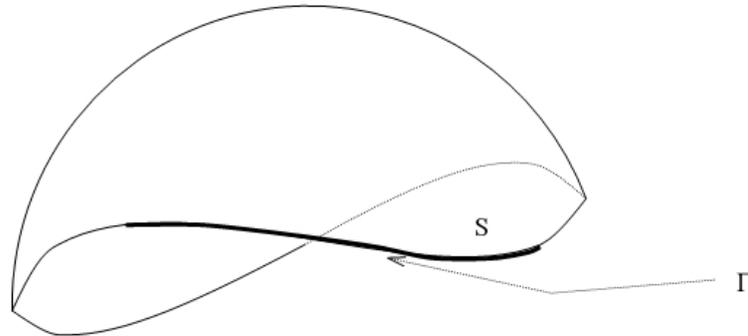


Figure 2.2.9 : Une surface elliptique  $S$  fixée le long d'une partie de sa frontière: la courbe  $\Gamma$ .

Dans le cas d'une surface hyperbolique le système (2.2.20) est lui même de nature hyperbolique, de plus ses caractéristiques correspondent aux lignes asymptotiques de la surface (voir [24]). Par conséquent, il apparaît clairement que le sous-espace des déplacements de flexion pur est étroitement dépendant des conditions aux limites, qui jointes à (2.2.20) définissent un problème de Cauchy, en générale bien posé.

Il est intéressant, pour analyser ce problème le plus simplement possible, d'utiliser le système de coordonnées qui correspond aux lignes asymptotiques, ce qui est loisible si elle est suffisamment régulière. Le système (2.2.20) devient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{1|1} = 0, \\ v_{2|2} = 0, \\ \frac{1}{2}(v_{1|2} + v_{2|1}) = b_{12}v_3, \end{array} \right.$$

avec  $b_{12} > 0$ , ce qui fait que la troisième équation exprime explicitement  $v_3$  en fonction de  $v_1$  et  $v_2$ .

Ainsi, comme il a été montré dans [12], au contraire des surfaces elliptiques, les surfaces hyperboliques conduisent facilement à des situations non-inhibées, à moins que l'on n'impose des conditions aux limites sur une très grande partie de sa frontière.

### Surfaces paraboliques :

Il pourrait sembler que les surfaces paraboliques (par exemple cylindres et cônes) correspondent à une situation marginale, à la frontière entre les deux grandes catégories précédentes.

ment évoquées. Cependant, dans la pratique ces formes géométriques sont manifestement de loin les plus employées, probablement pour des questions de facilité de mise en œuvre (surfaces développables). L'étude du comportement mécanique des coques correspondantes revêt donc une importance toute particulière (voir [12]).

D'après les résultats de cette section on peut conclure que, les surfaces paraboliques sont des surfaces réglées développables, dans ce cas les caractéristiques sont doubles et coïncident naturellement avec les génératrices de la surface. Il y a donc lieu de distinguer deux cas suivant que la courbe de contact coïncide avec une génératrice ou non, si elle est génératrice la coque est non inhibée, sinon la coque est inhibée. Pour plus de détails voir [24].

Pour donner une idée, nous détaillons l'analyse dans le cas cylindrique, mais on vérifie qu'elle s'étend aisément au cas conique. On se place dans le système de coordonnées "naturelles" du cylindre (i.e, selon les génératrices et les sections transverses), tel que tous les symboles de Christoffel s'annulent. Le système (2.2.20) devient alors :

$$\begin{cases} v_{1,1} = 0, \\ v_{2,2} = b_{22}v_3, \\ v_{1,2} + v_{2,1} = 0. \end{cases} \quad (2.2.21)$$

On voit que si on fixe les déplacements sur une portion de section transverse, toute la bande correspondante se trouve inhibée. Par contre, si l'on impose des conditions le long de génératrices, les déplacements de flexion pure restent possibles sur tout le reste de la surface : on peut en fait fixer arbitrairement  $v_1$  et  $v_2$  sur une section transverse quelconque, ce qui détermine l'ensemble des champs des déplacements de flexion pure. Ils comprennent notamment les déplacements de type "poutre courbe", c'est à dire ceux pour lesquels toutes les sections transverses se déforment de manière identique, chacune dans son plan selon un mode de flexion pure de poutre.

**Remarque 2.2.5** *on trouve que c'est important de signaler que ce mémoire est concerné surtout, comme on va le voir, par les coques non-inhibées car se sont elles qui dégagent le phénomène du verrouillage quand on les approximent par éléments finis. Les coques inhibées posent un autre problème : "la perturbation singulière".*

## 2.2.4 Classification des coques selon l'énergie dominante

Il est bien connu que la résolution des problèmes de coques ce n'est qu'une minimisation de l'énergie totale  $\mathbf{E}^T$ , et on a déjà vu que l'énergie de déformation est décomposée en deux énergies principales:

énergie de déformation membranaire  $E^m$ , énergie de déformation de flexion, i.e de changement de courbure de la surface moyenne  $E^f$ .

Cette classification repose sur la comparaison de ces énergies par rapport à l'énergie totale, lorsque on fait tendre l'épaisseur de la coque vers zéro (c'est pourquoi dans ce cas, i.e., lorsque la coque est très mince, l'énergie de cisaillement devient, bien sur, négligeable devant les autres énergies).

On dit que la coque est à "flexion-dominante" si

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{E^m}{\mathbf{E}^T} = 0, \quad (2.2.22)$$

et on dit qu'elle est à "membrane-dominante" si

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{E^f}{\mathbf{E}^T} = 0. \quad (2.2.23)$$

Dans le cas où les relations (2.2.22) et (2.2.23) ne sont pas satisfaites, on dit que la coque est en "situation intermédiaire" ou "situation mixte", i.e, aucune partie de l'énergie n'est négligeable par rapport à l'autre.

En considérant les mêmes, forces appliquées, matériau et conditions aux limites, une coque peut exhiber des comportements asymptotiques complètement différents en fonction de la nature géométrique de sa surface moyenne. Pour plus de détails sur ces points voir [27] et [2].

# Chapitre 3

## Problème de verrouillage pour les coques élastiques minces

### 3.1 Introduction

Il est important de souligner, dès le début, que si l'on raisonne à une épaisseur fixée de la coque, alors les résultats d'ellipticité de Bernardou et Ciarlet (1976) pour le modèle de Koiter et Coutris (1978) pour le modèle de Naghdi (voir [28] pour une synthèse globale des résultats d'existence des différents modèles linéaires de coques minces) ont pour conséquence que toute méthode d'éléments finis conformes appliquée à l'équation (2.2.8) admet une estimation d'erreur bornée par l'erreur d'interpolation, en l'absence de toute approximation complémentaire (intégration numérique, frontière courbe, ect.). Toutefois, si l'on parle de coque mince, c'est que l'on souhaite pouvoir faire des calculs pour des valeurs éventuellement très petites de l'épaisseur.

Or il est bien connu ici que ce calcul numérique rencontre les problèmes de verrouillage dont la causalité est souvent mal perçue, cependant l'étude des approximations numériques à la lumière du comportement asymptotique des coques d'épaisseur très petite permet souvent d'appréhender ces difficultés et d'en déceler l'origine. Comme on l'avait déjà vue (voir sous section § 2.2.3), l'étude du comportement asymptotique des coques élastiques lorsque l'épaisseur  $2\varepsilon$  tend vers zéro a fait apparaître deux types de comportement très différents

suivant que la surface moyenne, compte tenue des conditions aux limites cinématiques, admet des déplacements inextensionnels (coques dite à “flexion pures non inhibées” ou , plus simplement, “non inhibée”) ou non (coques à “flexion pures inhibées” ou encore “inhibée”).

Nous allons examiner, dans ce chapitre, les problèmes de verrouillage en **écartant** de ce champ d’étude les cas pathologiques rencontrés dans **les coques inhibées** puisqu’il est clair qu’on ne peut attendre de bon résultats de la méthode numérique lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro que dans la mesure où la solution exacte conserve un minimum de régularité. Par exemple dans le cas où la coque est de surface moyenne uniformément elliptique encastrée sur une partie seulement de son bord, on a déjà vu qu’il est de toutes façon difficile de donner un sens au problème limite.

Dans ces cas, il faut certainement admettre de ne calculer la coque que pour des valeurs “raisonnablement petites” de l’épaisseur. il est en outre vraisemblable que les irrégularités qui apparaîtraient pour des valeurs moindres seraient le signe d’instabilités mécaniques qui ne pourraient être correctement traitées dans un cadre linéaire (voir [12]).

Si on suppose, dans le cas des *coques inhibées*, que la solution exacte conserve asymptotiquement de “bonnes propriétés”, comme pour l’exemple déjà signalé de la coque elliptique encastrée sur tout son bord pour le modèle de Koiter, alors sous des hypothèses peu restrictives on montre que toute méthode d’éléments finis conforme satisfait une propriété de convergence uniforme (voir [12]).

Donc on peut dire que pour les coques inhibées, en excluant les cas pathologiques où le comportement asymptotique de la solution exacte correspond à un problème mal posé, une discrétisation directe et conforme de la formulation variationnelle a toutes les chances de produire de bon résultats.

En revanche, utilisées pour une coque non inhibée, ces méthodes directes verrouillent.

Cette affirmation élémentaire est néanmoins utile pour introduire un peu d’ordre dans l’ensemble des commentaires sur le phénomène de verrouillage qui sont d’habitude rencontrés dans la littérature des coques minces. Par exemple dans [38] p. 238-289, on a considérée trois exemples de coques comme des “benchmarks” pour tester l’adéquation des éléments

finis alors que le troisième exemple (demi-sphère avec une frontière libre) est le seul qui est non-inhibée (voir l'introduction de [6]).

Une autre remarque, on trouve qu'il est important de le signaler (voir [24]), est que le phénomène de verrouillage, que nous étudierons par la suite, est assez paradoxal au sens que les espaces d'approximation  $V_h$  permettent d'approcher tout élément de  $V$  et, a fortiori, tout élément du sous-espace  $G$ . Néanmoins, le processus de pénalisation associé au passage à la limite quand  $\varepsilon \searrow 0$  anihile tous les éléments qui ne trouvent pas dans  $G$ . C'est la raison pour laquelle, afin d'éviter le verrouillage, les éléments de  $G$  devraient pouvoir être approchés par des éléments de  $G_h = G \cap V_h$ , espace qui se réduit souvent à l'élément nul (ou encore qui contient très peu d'éléments, voir la proposition 3.2.1).

Les considérations qui précèdent permettent de comprendre que **la théorie asymptotique des coques est l'instrument privilégié pour analyser le phénomène de verrouillage.**

Dans ce chapitre on va premièrement exposer des considérations générales sur le phénomène de verrouillage pour les coques minces et montrer que c'est une pathologie qui frappe presque tous les méthodes d'éléments finis pour au moins un certains formes de surfaces moyennes (voir notamment [6]). En suite on va exposer une méthode robuste qui n'est pas très restrictive et qui est basée sur la relaxation de la "condition inf-sup discrète" (voir notamment [23]).

## 3.2 Considérations générales concernant le verrouillage des coques minces

*Le verrouillage* (membranaire pour les coques de Koiter, membranaire et de cisaillement pour les coques de Naghdi) intervient lorsque la surface moyenne de la coque admet des "flexions pures" satisfaisant aux conditions aux limites cinématiques, i.e., lorsque la coque est non-inhibée,  $G \neq \{0\}$  (voir § 2.2.3). Dans ce cas, *les approximations discrètes par éléments finis sont inappropriées pour décrire ces flexions pures*, qui sont les configurations limites des solutions lorsque l'épaisseur tend vers zéro.

On va démontrer que tout schéma d'éléments finis qui est constitué par des fonctions polynomiales par morceaux, présente *nécessairement* le phénomène de verrouillage pour certaines surfaces (et probablement pour presque toute les surfaces admettant des flexions pures).

### 3.2.1 Position du problème :

Voyons d'abord le problème dans le cadre le plus simple des théories des coques : la théorie de Koiter. On a déjà vu que le problème continu, dans le cas où la coque est bien sur non-inhibée, d'épaisseur fixe égale à  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0]$ , est formulé comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver un déplacement } \vec{u}^\varepsilon \in V \text{ qui vérifie :} \\ \frac{1}{\varepsilon^2} a_0(\vec{u}^\varepsilon, \vec{v}) + a_1(\vec{u}^\varepsilon, \vec{v}) = \langle F, \vec{v} \rangle_{V', V} = F(\vec{v}), \quad \forall \vec{v} \in V, \end{array} \right. \quad (3.2.1)$$

où

$$\begin{aligned} a_0(\vec{u}, \vec{v}) &= \int_{\Omega} a^{\alpha\beta\gamma\delta} \mathbf{\Lambda}_{\alpha\beta}(\vec{u}) \mathbf{\Lambda}_{\gamma\delta}(\vec{v}) \sqrt{ad} \underline{x}, \\ a_1(\vec{u}, \vec{v}) &= \frac{1}{12} \int_{\Omega} a^{\alpha\beta\gamma\delta} \mathbf{\Upsilon}_{\alpha\beta}(\vec{u}) \mathbf{\Upsilon}_{\gamma\delta}(\vec{v}) \sqrt{ad} \underline{x}, \\ \langle F, \vec{v} \rangle_{V', V} &= F(\vec{v}) = \int_S f^i v_i ds = \int_{\Omega} f^i v_i \sqrt{ad} \underline{x}, \\ V &= \left\{ \vec{v} = (v_\alpha, v_3) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^2(\Omega); \vec{v} |_{\Gamma_0} = \vec{0}, \frac{\partial v_3}{\partial n} |_{\Gamma_0} = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Les conditions cinématiques sont supposées telles que :

$$[ a_0(\vec{v}, \vec{v}) + a_1(\vec{v}, \vec{v}) ]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.2.2)$$

soit une norme sur  $V$ , équivalente à la norme de  $V$  en tant que sous-espace fermé de l'espace  $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)$ . Ceci est le cas si  $\Omega$  est connexe et si  $\Gamma_0$  n'est pas vide (voir [29]).

L'hypothèse suivant la quelle (3.2.2) est une norme équivalente à la norme naturelle sur  $V$  assure alors, en vertu de théorème de Lax-Milgram, l'existence et l'unicité de la solution du problème 3.2.1 pour chaque valeur de  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0]$ .

Notre objectif consiste à faire une étude asymptotique du comportement de la solution  $\vec{u}^\varepsilon$  (champ des déplacements) du problème (3.2.1) et ces approximations  $\vec{u}_h^\varepsilon$ , par les méthodes des éléments finis, lorsque  $\varepsilon$  (l'épaisseur de la coque considérée) tend vers zéro.

Désignons par  $V_h$  (avec  $h \searrow 0$ ) une famille de sous-espaces de  $V$  tels que les  $V_h$  approchent  $V$ , c'est à dire que :

$$\forall \vec{u} \in V, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \inf_{\vec{v}_h \in V_h} \|\vec{u} - \vec{v}_h\|_V \right] = 0. \quad (3.2.3)$$

ou en d'autres termes :

$$\forall \vec{u} \in V, \quad \exists \vec{v}_h \in V_h \text{ tel que : } \|\vec{u} - \vec{v}_h\|_V \longrightarrow 0, \text{ quand } h \searrow 0. \quad (3.2.4)$$

Notons que l'hypothèse (3.2.3) est satisfaite pour un certain nombre d'approximations par éléments finis de problèmes de coques (voir [29]).

Considérons alors le problème approché associé à (3.2.1) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \vec{u}_h^\varepsilon \in V_h \text{ qui vérifie :} \\ \frac{1}{\varepsilon^2} a_0(\vec{u}_h^\varepsilon, \vec{v}) + a_1(\vec{u}_h^\varepsilon, \vec{v}) = \langle F, \vec{v} \rangle_{V', V} = F(\vec{v}), \quad \forall \vec{v} \in V_h, \end{array} \right. \quad (3.2.5)$$

et supposons de plus que :

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ fixé, } \vec{u}_h^\varepsilon \longrightarrow \vec{u}^\varepsilon \text{ dans } V \text{ fort, quand } h \searrow 0, \quad (3.2.6)$$

où  $\vec{u}_h^\varepsilon$  et  $\vec{u}^\varepsilon$  sont les solutions de (3.2.5) et (3.2.1) respectivement, ce qu'est classiquement satisfait si les espaces  $V_h$  approchent  $V$ .

On rappelle ici la définition de robustesse d'une méthode d'éléments finis.

**Définition 3.2.1** *Nous dirons que  $V_h$  est une approximation robuste du problème (3.2.1) si la convergence (3.2.6) est uniforme par rapport au paramètre  $\varepsilon$ , c'est à dire :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{étant donné } \delta \geq 0, \text{ il existe } h_0 \geq 0 \text{ tel que :} \\ h \leq h_0 \Rightarrow \|\vec{u}_h^\varepsilon - \vec{u}^\varepsilon\|_V \leq \delta, \quad \forall \varepsilon \in ]0, \varepsilon_0]. \end{array} \right. \quad (3.2.7)$$

*Si l'approximation n'est pas robuste on dit qu'elle verrouille.*

**Remarque 3.2.1** La propriété (3.2.7) assure qu'une approximation correcte de la solution peut être obtenue indépendamment de l'épaisseur de la coque considérée pour un pas de maillage suffisamment petit.

Le théorème qui suit est la base de l'étude du verrouillage faite dans cette section.

**Théorème 3.2.1** Sous les hypothèses qui viennent d'être énoncées, considérons les limites réitérées suivantes :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \lim_{h \rightarrow 0} \overrightarrow{u}_h^\varepsilon \right] \quad \text{dans } V \text{ fort,} \quad (3.2.8)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overrightarrow{u}_h^\varepsilon \right] \quad \text{dans } V \text{ fort.} \quad (3.2.9)$$

Supposons alors qu'une des deux hypothèses a) ou b) suivantes soit satisfaite :

a) Les limites (3.2.8) et (3.2.9) existent et sont différentes.

b) La limite (3.2.8) existe mais pas la limite (3.2.9).

Alors l'approximation verrouille (i.e., n'est pas robuste).

**Démonstration.** Raisonnons par l'absurde et supposons que l'approximation  $V_h$  est robuste c'est à dire que la convergence (3.2.6) est uniforme en  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0]$ .

Les hypothèses générales de cette section nous permettent d'appliquer le théorème classique de la convergence uniforme des fonctions continues (voir annexe, théorème A.7).

En effet en prenant, dans cette théorème,  $E = \mathbb{R}$ ,  $F = V$ ,  $x = \varepsilon$ ,  $A = ]0, \varepsilon_0]$ ,  $f(x) = \overrightarrow{u}^\varepsilon$ ,  $f_n(x) = \overrightarrow{u}_h^\varepsilon$  (où  $h = \{h_n\}$  est une suite tendant vers zéro lorsque  $n$  tend vers l'infinie) et enfin  $a = 0$ . on voit facilement, en vertu de l'hypothèse (3.2.6), que :

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overrightarrow{u}^\varepsilon &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \lim_{h \rightarrow 0} \overrightarrow{u}_h^\varepsilon \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overrightarrow{u}_h^\varepsilon \right], \end{aligned}$$

ce qui est en contradiction avec les assertions a) et b) et achève la démonstration. ■

### 3.2.2 Processus de passage à la limite et conséquence sur le verrouillage

Rappelons que le sous-espace des flexions pures est de Hilbert et est définie par :

$$G = \{v \in V; \quad a_0(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) = 0\},$$

et que nous pouvons poser le problème limite pour  $\varepsilon \searrow 0$  de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \vec{u}^0 \in G \text{ tel que :} \\ a_1(\vec{u}^0, \vec{v}) = \langle F, \vec{v} \rangle_{V',V}, \quad \forall \vec{v} \in G. \end{array} \right. \quad (3.2.10)$$

La forme  $a_1$  étant continue et  $G$ -elliptique puisque  $a_0$  s'annule sur  $G$  donc  $\vec{u}^0$  existe et est unique en vertu du théorème de Lax-Milgram.

Définissons comme suit les opérateurs  $A^\varepsilon \in \mathcal{L}(V, V')$  et  $A^0 \in \mathcal{L}(G, G')$  :

$$\langle A^\varepsilon \vec{u}, \vec{v} \rangle_{V',V} = \frac{1}{\varepsilon^2} a_0(\vec{u}, \vec{v}) + a_1(\vec{u}, \vec{v}), \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in V. \quad (3.2.11)$$

$$\langle A^0 \vec{u}, \vec{v} \rangle_{G',G} = a_1(\vec{u}, \vec{v}), \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in G. \quad (3.2.12)$$

**Remarque 3.2.2** Il découle du théorème de Lax-Milgram (voir le théorème A.10 dans l'annexe) que les opérateurs  $A^\varepsilon$  et  $A^0$  définissent des isomorphismes de  $V$  et  $G$  sur  $V'$  et  $G'$  respectivement. De plus si on désigne par  $G^0$  l'espace polaire de  $G$  :

$$G^0 = \left\{ F \in V'; \quad \langle F, \vec{v} \rangle_{V',V} = 0, \quad \forall \vec{v} \in G \right\},$$

alors  $V'$  peut être décomposé comme somme directe de  $G'$  et  $G^0$  :

$$V' = G' \oplus G^0.$$

On notera que, en vertu le théorème 1.4.1, la condition nécessaire et suffisante pour que  $\vec{u}^0$  soit différent de zéro est que la composante de  $F$  sur  $G'$  ne s'annule pas.

De la même manière, nous définissons pour chaque  $h$  :

$$G_h = G \cap V_h = \{ \vec{v} \in V_h; \quad a_0(\vec{v}, \vec{v}) = 0 \}, \quad (3.2.13)$$

et désignant par  $\vec{u}_h^0$  la solution du problème approché :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \vec{u}_h^0 \in G_h \text{ tel que :} \\ a_1(\vec{u}_h^0, \vec{v}) = \langle F, \vec{v} \rangle_{G',G} \quad \forall \vec{v} \in G_h. \end{array} \right. \quad (3.2.14)$$

nous avons alors, d'après le théorème 1.4.1 et le théorème 1.4.2, le

**Théorème 3.2.2** Soit  $\vec{u}^\varepsilon$ ,  $\vec{u}_h^\varepsilon$ ,  $\vec{u}^0$ ,  $\vec{u}_h^0$ , les solutions de (3.2.1), (3.2.5), (3.2.10), (3.2.14) respectivement. Alors on a:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \vec{u}^\varepsilon = \vec{u}^0, \quad \text{dans } V \text{ fort.} \quad (3.2.15)$$

et pour tout  $h$  fixé,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \vec{u}_h^\varepsilon = \vec{u}_h^0, \quad \text{dans } V \text{ fort.} \quad (3.2.16)$$

**Remarque 3.2.3** Le résultat (3.2.15) constitue la propriété fondamentale de la théorie des coques minces : lorsque l'épaisseur tend vers zéro, la solution converge vers une solution qui est un déplacement inextentionnel, c'est à dire une flexion pure. Cette propriété est significative lorsque la coque est non inhibée, c'est à dire que sa surface moyenne admet des flexions pures non nulles  $G \neq \{0\}$ . Rappelons que dans le cas d'une surface moyenne inhibée (3.2.15) est toujours vrai mais bien entendu,  $\vec{u}^0 = 0$ . Pour avoir une meilleure description du comportement asymptotique de la solution  $\vec{u}^\varepsilon$  on peut poser  $\vec{u}^\varepsilon = \varepsilon^2 \vec{v}^\varepsilon$  et étudier le comportement limite de  $\vec{v}^\varepsilon$  (pour cela voir [24]). Ce processus limite n'a rien avoir avec le verrouillage membranaire mais fait intervenir des couches limites (voir par exemple [5]).

Conformément à (3.2.16) on a un comportement analogue pour le problème approché dans l'espace  $V_h$  : le verrouillage membranaire se produit lorsque l'espace des déplacements discrets, noté  $V_h$ , "approche mal" les éléments du sous-espace  $G$  qui sont les déplacements inextentionnels. Plus précisément on a la

**Proposition 3.2.1** Supposons les hypothèses générales de cette section, en particulier que  $V_h$  approche  $V$ , sont satisfaites mais que  $G_h$  définie par (3.2.13) n'approche pas  $G$  (au sens de (3.2.3) ou (3.2.4)).

Alors l'approximation du problème (3.2.5) par  $V_h$  n'est pas robuste. le verrouillage a lieu pour au moins un  $F$ , par exemple  $F = A^0 \vec{v}^0$  où  $A^0$  est l'opérateur défini en (3.2.12) et  $\vec{v}^0$  un élément de  $G$  qui ne peut pas être approché par des éléments de  $G_h$ .

**Preuve.** ([6]) Comme  $G_h$  n'approche pas  $G$  alors il existe au moins un élément non nul  $\vec{v}^0$  de  $G$  qui ne peut pas être approché par des éléments de  $G_h$  c'est à dire qu'on ne peut pas trouver une suite  $\{\vec{v}_h\}$  d'éléments de  $G_h$  tel que :

$$\|\vec{v}^0 - \vec{v}_h\|_V \longrightarrow 0, \quad \text{quand } h \searrow 0.$$

Vérifions maintenant que les conditions du théorème 3.2.1 sont satisfaites.

Choisissons les forces  $F$  de façon que  $F = A^0 \vec{v}^0$ .

D'après les hypothèses (3.2.6) et (3.2.15) on a :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \lim_{h \rightarrow 0} \vec{u}_h^\varepsilon \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \vec{u}^\varepsilon = \vec{u}^0,$$

or  $\vec{u}^0$  est la solution du problème (3.2.10), et avec le choix des forces  $F$  on a donc :

$$\begin{aligned} a_1(\vec{u}^0, \vec{v}) &= \langle F, \vec{v} \rangle_{G', G}, & \forall \vec{v} \in G, \\ &= \langle A^0 \vec{v}^0, \vec{v} \rangle_{G', G}, & \forall \vec{v} \in G, \\ &= a_1(\vec{v}^0, \vec{v}), & \forall \vec{v} \in G, \end{aligned}$$

ce qui montre que  $\vec{u}^0$  n'est autre que  $\vec{v}^0$ , ce qui veut dire que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \lim_{h \rightarrow 0} \vec{u}_h^\varepsilon \right] = \vec{v}^0.$$

Par ailleurs, la limite réitérée

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \vec{u}_h^\varepsilon \right],$$

devient en vertu de (3.2.16)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \vec{u}_h^0, \quad \text{dans } V \text{ fort.}$$

Mais comme  $\vec{u}_h^0 \in G_h \subset G$  la convergence est en fait dans  $G$  fort, cette limite peut ou non exister mais, dans tous les cas, elle n'est par hypothèse, égale à  $\vec{v}^0$  et le théorème 3.2.1 s'applique. ■

**Remarque 3.2.4** Ce théorème a donné, dans le cadre le plus simple des théories de coques : la théorie de Koiter, une condition nécessaire pour qu'une approximation  $V_h$  soit robuste (voir [6]) est que  $G_h$  approche  $G$ . En suivant les hypothèses et la démonstration du

théorème on voit facilement que rien ne l'empêche à être généralisés au cas des coques du type de Naghdi et même au problèmes elliptiques du type (1.4.2). Or on a déjà vu que cette condition est suffisante pour la robustesse d'une approximation  $V_h$  pour ce même type de problèmes ce qui montre que cette condition est en réalité une condition nécessaire et suffisante dans le cas général.

**Remarque 3.2.5** Dans les cas les plus pathologiques du verrouillage, on aura en fait :

$G \neq \{0\}$ , alors que  $G_h = G \cap V_h = \{0\}$ .

Dans un tel cas, on a en appliquant le théorème 3.2.2 :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \vec{u}_h^\varepsilon = 0, \text{ en revanche } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \vec{u}^\varepsilon = \vec{u}^0 \neq 0.$$

Dans ce cas on dit qu'il y'a un **verrouillage total** pour toutes les forces  $F$  dont la composante dans  $G'$  est non nulle (voir [6]).

**Remarque 3.2.6** On va voir dans la section suivante des exemples où ..

**Remarque 3.2.7** mais où  $G$  contient des éléments dont la troisième composante est non nulle. Il est claire que dans ces cas  $G_h$  n'approche pas  $G$  et que le verrouillage a lieu.

### 3.2.3 Toute approximation polynômiale est nécessairement verrouillante

Dans cette section, nous allons voir que **toute approximation par éléments finis**, tels que les éléments de  $V_h$  soient, dans chaque triangle de la maille, des fonctions polynômiales (c'est à dire pratiquement toute méthode d'éléments finis) **bloque pour certaines formes de la surface moyenne**.

Comme nous l'avons vu dans la proposition 3.2.1, le verrouillage apparaît lorsque les espaces  $G_h = G \cap V_h$  n'approchent pas  $G$ , rappelons que :

$$G_h = \{\vec{v}_h \in V_h; \mathbf{\Lambda}_{\alpha\beta}(\vec{v}) = 0, \quad \alpha, \beta = 1, 2\}. \quad (3.2.17)$$

Pour donner une idée intuitive du problème, considérons pour fixer les idées et dans le but de simplification, le cas où les coefficients  $b_{\alpha\beta}$  de la deuxième forme fondamentale sont constants et où les symboles de Christoffel sont nuls. Dans ce cas, les contraintes apparaissant dans (3.2.17) s'écrivent alors en substituant dans (2.2.6)

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda_{11}(\vec{v}) = \partial_1 v_1 - b_{11} v_3 = 0, \\ \Lambda_{22}(\vec{v}) = \partial_2 v_2 - b_{22} v_3 = 0, \\ \Lambda_{12}(\vec{v}) = \frac{1}{2}(\partial_2 v_1 + \partial_1 v_2) - b_{12} v_3 = 0. \end{array} \right. \quad (3.2.18)$$

Supposons qu'un des coefficients  $b_{11}$  ou  $b_{22}$  ne s'annule pas. Cette condition est certainement satisfaite si la surface moyenne est elliptique ou parabolique. Supposons que  $b_{11} \neq 0$ . La première condition de (3.2.18) montre que

$$\vec{v} \in G_h \quad \Rightarrow \quad v_3 = \frac{1}{b_{11}} \partial_1 v_1. \quad (3.2.19)$$

Considérons alors la restriction de (3.2.19) à un triangle de la maille. comme  $v_1$  est un polynôme de degré  $m$ , pour un certain  $m$ ,  $v_3$  est donc nécessairement de degré  $m - 1$ . On remarquera que (3.2.19) est en contradiction avec le fait que les composantes  $v_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ) appartiennent à  $H^1$  alors que  $v_3$  est un élément de  $H^2$  (voir [24]).

Conformément à ça, on constatera que *tout schéma par élément finis utilise des polynômes de degré plus élevé pour la discrétisation de  $v_3$  que dans celle de  $v_1$  et  $v_2$*  (voir, par exemple [29]).

Ce raisonnement est très proche de celui fait par Chenais et Paumier dans [7], où ils ont montré que dans le cas d'une arche circulaire, il existe une approximation par éléments finis, non classique, où  $v_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ) et  $v_3$  sont respectivement des polynômes de degré 4 et 3, mais il ne faudrait pas en conclure que la discrétisation de  $v_3$  par des polynômes d'ordre inférieur est une méthode générale pour supprimer le verrouillage. Dans la suite on va montrer que toute approximation polynômiale conforme bloque pour certaines surfaces.

Rappelons que le verrouillage ne concerne que les surfaces non inhibées ce qui implique des conditions de fixation adéquates aux frontières. En particulier, une partie (ou la totalité) du bord doit être libre; des exemples ont été données dans [12].

Notre démonstration repose principalement sur les remarques 3.2.5 et 3.2.6. Montrons, pour certaines surfaces spécifiques, que

$$\vec{v} \in G_h \quad \Rightarrow \quad (\vec{v} = 0 \quad \text{ou} \quad v_3 = 0), \quad (3.2.20)$$

les cas considérés sont le hélicoïd droit, le parabolôïde hyperbolique et la parabolôïde elliptique. Dans la suite nous allons faire des démonstrations très simples où les conditions aux limites n'interviennent pas. Selon (3.2.17) si nous prenons la restriction de  $v$  à un élément de la maille, il est suffisant de montrer que si chaque composante de  $v$  est un polynôme, alors

$$\mathbf{\Lambda}_{\alpha\beta}(\vec{v}) = 0, \quad \alpha, \beta = 1, 2 \quad \Rightarrow \quad (\vec{v} = 0 \quad \text{ou} \quad v_3 = 0). \quad (3.2.21)$$

### 1) Cas de parabolôïde hyperbolique :

Le parabolôïde hyperbolique est la surface définie par (nous conservons les notations du chapitre précédent)

$$\phi(\xi^1, \xi^2) = (\xi^1, \xi^2, \xi^1 \cdot \xi^2). \quad (3.2.22)$$

Si on explicite le système du (3.2.21) (dit système de rigidité) il sera écrit, d'après (2.2.6) comme suit

$$\begin{cases} \mathbf{\Lambda}_{11}(\vec{v}) = \partial_1 v_1 - \Gamma_{11}^\delta v_\delta - b_{11} v_3 = 0, \\ \mathbf{\Lambda}_{12}(\vec{v}) \equiv \frac{1}{2}(\partial_2 v_1 + \partial_1 v_2) - \Gamma_{12}^\delta v_\delta - b_{12} v_3 = 0, \\ \mathbf{\Lambda}_{22}(\vec{v}) \equiv \partial_2 v_2 - \Gamma_{22}^\delta v_\delta - b_{22} v_3 = 0. \end{cases} \quad (3.2.23)$$

En vertu de (2.1.1), (2.1.2), (2.1.3) et (2.1.7) on obtient facilement

$$\vec{a}_1 = (1, 0, \xi^2), \quad \vec{a}_2 = (0, 1, \xi^1), \quad \vec{a}_3 = a^{-\frac{1}{2}}(-\xi^2, -\xi^1, 1), \quad (3.2.24)$$

où

$$a = 1 + (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2. \quad (3.2.25)$$

D'après (2.1.4) et (3.2.24), les coefficients de la deuxième forme fondamentale seront

$$b_{11} = b_{22} = 0, \quad b_{12} = a^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.2.26)$$

Les symboles de Christoffel définis en (2.1.6) sont calculés à l'aide des vecteurs contravariants  $a^i$ , en respectant (2.1.5) puis (2.1.6) on a

$$\begin{cases} \vec{a}^1 = \frac{1}{a}[1 + (\xi^1)^2, -\xi^1 \cdot \xi^2, \xi^2], \\ \vec{a}^2 = \frac{1}{a}[-\xi^1 \cdot \xi^2, 1 + (\xi^2)^2, \xi^1], \\ \vec{a}^3 = \vec{a}_3 = a^{-\frac{1}{2}}(-\xi^2, -\xi^1, 1). \end{cases} \quad (3.2.27)$$

$$\Gamma_{11}^\delta = \Gamma_{22}^\delta = 0, \quad \Gamma_{11}^1 = \frac{1}{a}\xi^2, \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{1}{a}\xi^1. \quad (3.2.28)$$

En substituant (3.2.28) et (3.2.26) dans (3.2.23) le système devient

$$\begin{cases} \partial_1 v_1 = 0, \\ \partial_2 v_1 + \partial_1 v_2 = 2a^{-\frac{1}{2}}v_3 + 2\frac{1}{a}(\xi^2 v_1 + \xi^1 v_2), \\ \partial_2 v_2 = 0, \end{cases} \quad (3.2.29)$$

d'où l'on tire

$$2a^{\frac{1}{2}}v_3 = a(\partial_2 v_1 + \partial_1 v_2) - 2(\xi^2 v_1 + \xi^1 v_2), \quad (3.2.30)$$

or, compte tenu de (3.2.25),  $2a^{\frac{1}{2}}v_3$  ne peut pas être un polynôme mais les  $v_i$  sont des polynômes ce qui montre qu'on a  $v_3 = 0$ .

Comme  $G$  contient des éléments dont la troisième est non nulle, il est clair que  $G_h$  n'approche pas  $G$  (voir remarque 3.2.6). De plus, il est facile de montrer que  $v_1 = v_2 = 0$ .

En effet,  $v_1$  et  $v_2$ , étant des polynômes, sont des fonctions analytiques, il est alors suffisant de montrer qu'elles s'annulent dans un voisinage de l'origine.

L'équation (3.2.30) avec  $v_3 = 0$  peut être écrite sous la forme

$$[1 + (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2] \left( \frac{\partial v_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial v_2}{\partial \xi^1} \right) = 2(\xi^2 v_1 + \xi^1 v_2).$$

pour  $\xi^1 = 0$  cette équation devient, compte tenu de (3.2.29)

$$[1 + (\xi^2)^2] \left( \frac{\partial v_1}{\partial \xi^2} + Cte \right) = 2\xi^2 v_1,$$

d'où, compte tenu du fait que  $v_1$  est un polynôme en  $\xi^2$

$$v_1 = Cte [1 + (\xi^2)^2],$$

un raisonnement analogue pour  $\xi^2 = 0$  donnerait

$$v_2 = Cte [1 + (\xi^1)^2].$$

En rapportant ces expressions dans (3.2.30) on constate que  $v_1 = v_2 = 0$ , ce qui montre que le blocage est totale (voir remarque 3.2.5).

**2) Cas de parabolöide elliptique :**

L'équation de la surface est donné par

$$\phi(\xi^1, \xi^2) = (\xi^1, \xi^2, \frac{1}{2} [(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2]).$$

Après des calculs qui sont essentiellement analogues à ceux du cas précédent on trouve

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 &= (1, 0, \xi^1), & \vec{a}_2 &= (0, 1, \xi^2), & \vec{a}_3 &= a^{-\frac{1}{2}}(-\xi^1, -\xi^2, 1), \\ a &= 1 + (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2, & & & & (3.2.31) \\ b_{11} &= b_{22} = a^{-\frac{1}{2}}, & b_{12} &= 0, \\ \Gamma_{11}^1 &= \Gamma_{22}^1 = a^{-1}\xi^1, & \Gamma_{11}^2 &= \Gamma_{22}^2 = a^{-1}\xi^2, & \Gamma_{12}^\delta &= 0 \end{aligned}$$

et le système de rigidité devient

$$\begin{cases} \partial_1 v_1 = \partial_2 v_2 = \frac{\xi^1}{a} v_1 + \frac{\xi^2}{a} v_2 + \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} v_3, \\ \partial_2 v_1 + \partial_1 v_2 = 0, \end{cases} \quad (3.2.32)$$

en multipliant la première équation de (3.2.32) par  $a$  on obtient

$$a\partial_1 v_1 = a\partial_2 v_2 = \xi^1 v_1 + \xi^2 v_2 + a^{\frac{1}{2}} v_3,$$

d'où, avec le même raisonnement qu'au cas précédent, on a nécessairement  $v_3 = 0$ .

**3) Cas de hélicoïde droit :**

Dans ce cas on a

$$\begin{aligned} \phi(\xi^1, \xi^2) &= \phi(\theta, r) = (r \cos \theta, r \sin \theta, k\theta), \\ \left\{ \begin{array}{l} \vec{a}_1 = (-r \sin \theta, r \cos \theta, k), \\ \vec{a}_2 = (\cos \theta, \sin \theta, 0), \\ \vec{a}_3 = a^{-\frac{1}{2}}(-k \sin \theta, k \cos \theta, -r), \end{array} \right. & \text{avec } a = r^2 + k^2. \end{aligned} \quad (3.2.33)$$

$$\begin{aligned} b_{11} &= b_{22} = 0, & b_{12} &= ka^{-\frac{1}{2}}, \\ \Gamma_{11}^1 &= \Gamma_{22}^\delta = \Gamma_{12}^2 = 0, & \Gamma_{11}^2 &= -r, & \Gamma_{12}^1 &= a^{-1}r, \end{aligned}$$

et le système de rigidité devient

$$\begin{cases} \partial_1 v_1 = -rv_1, \\ \partial_2 v_2 = 0, \\ \partial_2 v_1 + \partial_1 v_2 = 2a^{-1}rv_1 + 2ka^{-\frac{1}{2}}v_3. \end{cases} \quad (3.2.34)$$

De la troisième équation de (3.2.34) on obtient

$$2ka^{\frac{1}{2}}v_3 = a(\partial_2 v_1 + \partial_1 v_2) - 2rv_1.$$

Toujours avec le même raisonnement qu'au cas précédent, et d'après (3.2.33), on a  $v_3 = 0$ .

Les considérations qui précèdent montrent le caractère très générale du blocage dans le cas des coques non inhibées. De plus, il apparaît que le blocage membranaire est lié à la structure spécifique locale des équations sans avoir besoin de prendre en compte les conditions aux limites.

**Remarque 3.2.8** *On note que les plaques sont de toute évidence des coques non inhibées particulières car la surface moyenne d'une plaque, qui est un portion de plan, ne peut pas être de toute évidence géométriquement rigide quelque soit la nature des conditions aux limites imposées réellement sur sa frontière, donc lorsque les éléments finis des coques sont utilisés pour les plaques le blocage membranaire ne se produit pas. Ce fait peut être aisément compris à l'aide de l'équation (3.2.18). En effet, dans le cas des plaques on a  $b_{\alpha\beta} = 0$  et l'équation (3.2.18) montre que les éléments de  $G$  sont tels que  $(v_1, v_2)$  est un déplacement rigide dans le plan (s'annulant du fait des conditions aux limites) alors que  $v_3$  est arbitraire.  $G_h$  admet la même définition et approche  $G$  pourvu que l'approximation de  $V$  par  $V_h$  soit indépendante pour les trois composantes comme il ressort des approximations par éléments finis usuels.*

## 3.3 Une méthode d'éléments finis robuste pour les problèmes des coques de Naghdi à flexion dominante

### 3.3.1 Introduction

Durant les années 80 et 90, de très grands progrès ont été obtenus dans la compréhension et le remède du phénomène de verrouillage rencontré dans les approximations par éléments finis des “structures minces” :

Pour les problèmes 1D i.e., les poutres et les arches, il est maintenant complètement connu comment construire des méthodes d'éléments finis échappantes à cette pathologie (voir par exemple [8], [7], [15] et [12]). Nous avons exposé au §1.4 un exemple pour les problèmes d'arches issu de [7].

Pour les plaques (problèmes 2D) de type Reissner-Mindlin, qui souffrent du verrouillage de cisaillement, des progrès considérables ont également été réalisés, et maintenant le problème de verrouillage de cisaillement peut être remédié par divers techniques (voir par exemple [10], [12] et [18]).

Ainsi, à l'exception des coques, le problème du verrouillage des modèles de structures minces est à l'heure actuelle maîtrisé de façon satisfaisante, notamment grâce à des méthodes d'approximation issues des formulations mixtes.

En ce qui concerne les coques, il est bien connu que les solutions par éléments finis des modèles de **coques à flexion dominante** (i.e., les coques non-inhibées) souffrent du verrouillage membranaire et de cisaillement pour le type de Naghdi, et du verrouillage membranaire pour le type de Koiter.

D'autre part, pour établir la convergence *uniforme* d'une méthode d'éléments finis mixte, il est aussi bien connu que l'étape cruciale consiste à démontrer une certaine condition mathématique : c'est la “**condition Inf-Sup discrète**”.

Dans le cas des coques cette condition est particulièrement délicate. L'obstacle rencontré provient de la présence de coefficients géométriques comme les courbures et les coefficients de Christoffel dans l'expression des formes, alors que pour les plaques et les poutres celles-ci ne contiennent que les variables elles-mêmes et leurs dérivées. C'est pour quoi il n'existait, selon [23], [12] et autres, aucune méthode d'éléments finis de coques minces dont on ait pu

démontrer rigoureusement, dans le cas général, qu'elle était insensible au verrouillage, en dehors de cas particuliers géométriques tels que le cylindre (voir [22]), ou la sphère (voir [1]), alors que de nombreuses équipes y travaillent dans le monde entier (voir [31]).

La littérature des approximations par éléments finis des coques est, bien sur, très vaste c'est pour quoi on ne citera dans cette introduction que quelques exemples remarquables de travaux.

Il est aussi compréhensible, au moins à mon avis, qu'on ne donnera dans ce petit mémoire qu'une variante pour le remède du phénomène. On est, bien sur, encore loin d'y faire une étude !

**En 1993 Arnold et Brezzi** ont proposé, dans [9], une formulation mixte qui traite le problème de coque de Naghdi comme un problème abstrait de type point selle et qui se base sur une intégration partielle des contraintes membranaires et de cisaillement. Pour démontrer la "condition Inf-Sup discrète" ils ont supposé que tous les coefficients géométriques sont des constantes dans chaque élément du maillage. En pratique cette hypothèse peut rarement être satisfaite (sauf pour un cylindre circulaire! voir [12]).

**En 1994 Suri** a utilisé dans ([30]) une version *hp* d'une méthode d'éléments finis dont les éléments sont des parallélogrammes. Il a augmenté l'ordre des polynômes d'approximation pour permettre aux coefficients géométriques de la coque d'être des polynômes, donc il a amélioré le résultat de Arnold et Brezzi avec un certain coût supplémentaire (voir [23]).

**En 1996 Chapelle et Stenberg**, afin de démontrer la "condition Inf-Sup discrète", ont utilisé dans [11] une technique de stabilisation (voir aussi [12]) et donc ils ont donné *la première méthode d'éléments finis de coque* dont la résistance au verrouillage ait pu être démontrée sans hypothèse simplificatrice (voir [31]).

En revanche, le traitement spécifique appliqué à la méthode la rend inapte à représenter correctement le comportement en membrane des coques dans les configurations où le verrouillage n'est pas à redouter !. D'autre part cette technique semblait très coûteuse pour les coques de Koiter et l'analyse proposée est basée sur des hypothèses de régularité fortes qui sont eux même un problème ouvert (voir [23]).

**En 1997 Bramble et Sun** ont suivi la formulation mixte de Arnold et Brezzi avec des petites modifications sur les inconnues auxiliaires et au lieu de vérifier la "condition

Inf-Sup discrète" ils ont proposé une "condition Inf-Sup discrète relaxée" qui nécessite seulement que les coefficients géométriques de la coque sont dans  $C^{0,1}$  et que  $h^2 < Ct$ .

Cette dernière condition n'est pas très restrictive car elle peut être relaxée de deux manières.

Dans les paragraphes suivantes nous allons essayer de présenter cette variante.

### 3.3.2 Une reformulation robuste du problème

On a vu dans (2.2.4) que la formulation variationnelle du problème de coque de Naghdi était de la forme (1.4.2) ce qui pose le problème du verrouillage. On rappelle qu'elle est donner par

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } (\vec{u}, \underline{\theta}) \in V \text{ qui vérifie :} \\ \frac{1}{t^2} a_0^{RM}(\vec{u}, \underline{\theta}; \vec{v}, \underline{\psi}) + a_1^{RM}(\vec{u}, \underline{\theta}; \vec{v}, \underline{\psi}) = F(\vec{v}), \quad \forall (\vec{v}, \underline{\psi}) \in V. \end{array} \right. \quad (3.3.1)$$

avec

$$V = (H_{\Gamma_0}^1)^5 = \{(\vec{v}, \underline{\psi}) : v_i, \psi_\alpha \in H_{\Gamma_0}^1\}, \text{ où } H_{\Gamma_0}^1 = \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma_0} = 0\}.$$

$$\begin{aligned} a_1^{RM}(\vec{u}, \underline{\theta}; \vec{v}, \underline{\psi}) &= \frac{1}{12} \int_{\Omega} a^{\alpha\beta\gamma\delta} \mathbf{\Upsilon}_{\alpha\beta}(\vec{u}, \underline{\theta}) \mathbf{\Upsilon}_{\gamma\delta}(\vec{v}, \underline{\psi}) \sqrt{a} d\underline{x}, \\ a_0^{RM}(\vec{u}, \underline{\theta}; \vec{v}, \underline{\psi}) &= \int_{\Omega} \frac{E}{2(1+\nu)} a^{\alpha\beta} \mathbf{\Phi}_{\alpha}(\vec{u}, \underline{\theta}) \mathbf{\Phi}_{\beta}(\vec{v}, \underline{\psi}) \sqrt{a} d\underline{x} + \int_{\Omega} a^{\alpha\beta\gamma\delta} \mathbf{\Lambda}_{\alpha\beta}(\vec{u}) \mathbf{\Lambda}_{\gamma\delta}(\vec{v}) \sqrt{a} d\underline{x}, \\ F(\vec{v}) &= \int_{\Omega} f^i v_i \sqrt{a} d\underline{x}. \end{aligned}$$

Pour éviter le verrouillage dans les problèmes des plaques et coques minces, l'idée générale consiste à introduire un nouveau terme inconnu qui ressemble à  $\varepsilon^{-2}(Lw - Dz)$  où  $L, D$  sont des opérateurs différentiels,  $w, z$  sont des fonctions et  $\varepsilon$  est un petit paramètre.

Ici on définit deux inconnues pour la déformation de cisaillement  $\underline{\phi}$  et la déformation membranaire  $\underline{\lambda}$  par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi^\beta = (t^{-2} - c_0) \frac{E}{2(1+\nu)} a^{\alpha\beta} \mathbf{\Phi}_{\alpha}(\vec{u}, \underline{\theta}) \sqrt{a}, \\ \lambda^{\gamma\delta} = (t^{-2} - c_0) a^{\alpha\beta\gamma\delta} \mathbf{\Lambda}_{\alpha\beta}(\vec{u}) \sqrt{a}. \end{array} \right. \quad (\text{avec } c_0 \in ]0, t^{-2}[) \quad (3.3.2)$$

Le but d'inclure  $(a^{\alpha\beta})$  dans  $\underline{\phi}$  et  $(a^{\alpha\beta\gamma\delta})$  dans  $\underline{\lambda}$  est de supprimer le plus grand nombre des coefficients géométriques de la coque de certains termes de sorte qu'on obtient moins de trouble dans la vérification de la condition de stabilité discrète.

Pour toute constante fixée  $c_0 \in ]0, t^{-2}[$ , on pose

$$\begin{aligned} A(\underline{\vec{u}}, \underline{\theta}; \underline{\vec{v}}, \underline{\psi}) &= \frac{1}{12} \int_{\Omega} a^{\alpha\beta\gamma\delta} \Upsilon_{\alpha\beta}(\underline{\vec{u}}, \underline{\theta}) \Upsilon_{\gamma\delta}(\underline{\vec{v}}, \underline{\psi}) \sqrt{a} d\underline{x} \\ &+ c_0 \int_{\Omega} \frac{E}{2(1+\nu)} a^{\alpha\beta} \Phi_{\alpha}(\underline{\vec{u}}, \underline{\theta}) \Phi_{\beta}(\underline{\vec{v}}, \underline{\psi}) \sqrt{a} d\underline{x} \\ &+ c_0 \int_{\Omega} a^{\alpha\beta\gamma\delta} \Lambda_{\alpha\beta}(\underline{\vec{u}}) \Lambda_{\gamma\delta}(\underline{\vec{v}}) \sqrt{a} d\underline{x}. \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

La forme bilinéaire  $A(., .; ., .)$  est coercive comme l'a été montrer par Bernardou et Ciarlet dans [28]. Posons encore

$$\begin{aligned} B_s(\underline{\vec{v}}, \underline{\psi}; \underline{\eta}) &= \int_{\Omega} \Phi_{\beta}(\underline{\vec{v}}, \underline{\psi}) \eta^{\beta} \Phi_{\beta}(\underline{\vec{v}}, \underline{\psi}) d\underline{x}, \\ C_s(\underline{\phi}, \underline{\eta}) &= \int_{\Omega} \frac{E}{2(1+\nu)} a_{\alpha\beta} \phi^{\alpha} \eta^{\beta} \frac{1}{\sqrt{a}} d\underline{x}, \\ B_m(\underline{\vec{v}}, \underline{\chi}) &= \int_{\Omega} \Lambda_{\alpha\beta}(\underline{\vec{v}}) \chi^{\alpha\beta} d\underline{x}, \\ C_m(\underline{\lambda}, \underline{\chi}) &= \int_{\Omega} a_{\alpha\beta\gamma\delta} \lambda^{\alpha\beta} \chi^{\gamma\delta} \frac{1}{\sqrt{a}} d\underline{x}. \end{aligned}$$

Ici  $(a_{\alpha\beta\gamma\delta})$  désigne l'inverse du tenseur  $(a^{\alpha\beta\gamma\delta})$ .

On peut vérifier facilement que

$$a_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1 - \nu^2}{E} (a_{\alpha\gamma} a_{\beta\delta} - \frac{\nu}{1 + 2\nu} a_{\alpha\beta} a_{\gamma\delta}).$$

Donc le problème de coque de Naghdi (2.2.4) est équivalent au problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{chercher } (\underline{\vec{u}}, \underline{\theta}) \in V, \quad \underline{\phi} \in W_s \text{ et } \underline{\lambda} \in W_m \text{ telles que :} \\ A(\underline{\vec{u}}, \underline{\theta}; \underline{\vec{v}}, \underline{\psi}) + B_s(\underline{\vec{v}}, \underline{\psi}; \underline{\eta}) + B_m(\underline{\vec{v}}, \underline{\chi}) = F(\underline{\vec{v}}), \quad \forall (\underline{\vec{v}}, \underline{\psi}) \in V, \\ B_s(\underline{\vec{v}}, \underline{\psi}; \underline{\eta}) - \varepsilon^2 C_s(\underline{\phi}, \underline{\eta}) = 0, \quad \forall \underline{\eta} \in W_s, \\ B_m(\underline{\vec{v}}, \underline{\chi}) - \varepsilon^2 C_m(\underline{\lambda}, \underline{\chi}) = 0, \quad \forall \underline{\chi} \in W_m, \end{array} \right. \quad (3.3.4)$$

où

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 &= \frac{t^2}{1 - c_0 t^2}, & V &= \{(\underline{\vec{v}}, \underline{\psi}) : v_i, \psi_{\alpha} \in H_{\Gamma_0}^1\}, \\ W_s &= \{\underline{\eta} : \eta^{\alpha} \in L^2(\Omega)\}, & \text{et } W_m &= \{\underline{\chi} : \chi^{\alpha\beta} \in L^2(\Omega)\}. \end{aligned}$$

Même (3.3.4) est pratique pour l'implémentation, cependant il est plus commode, pour l'analyse de la stabilité et l'estimation de l'erreur, de définir

$$\begin{aligned} B(\underline{\vec{v}}, \underline{\psi}; \underline{\eta}, \underline{\chi}) &= B_s(\underline{\vec{v}}, \underline{\psi}; \underline{\eta}) + B_m(\underline{\vec{v}}, \underline{\chi}), \\ C(\underline{\phi}, \underline{\lambda}; \underline{\eta}, \underline{\chi}) &= C_s(\underline{\phi}, \underline{\eta}) + C_m(\underline{\lambda}, \underline{\chi}), \end{aligned}$$

$W = W_s \times W_m$ , et considérer la version la plus abstraite du problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\underline{\vec{u}}, \underline{\theta}) \in V \text{ et } (\underline{\phi}, \underline{\lambda}) \in W = W_s \times W_m \text{ telle que :} \\ A(\underline{\vec{u}}, \underline{\theta}; \underline{\vec{v}}, \underline{\psi}) + B(\underline{\vec{v}}, \underline{\psi}; \underline{\eta}, \underline{\chi}) = F(\underline{\vec{v}}), \quad \forall (\underline{\vec{v}}, \underline{\psi}) \in V, \\ B(\underline{\vec{u}}, \underline{\theta}; \underline{\eta}, \underline{\chi}) - \varepsilon^2 C(\underline{\phi}, \underline{\lambda}; \underline{\eta}, \underline{\chi}) = 0, \quad \forall (\underline{\eta}, \underline{\chi}) \in W. \end{array} \right. \quad (3.3.5)$$

Comme dans [9] on introduit dans l'espace  $W$  la semi-norme  $|\cdot, \cdot|_W$  définie par

$$|\underline{\eta}, \underline{\chi}|_W = \sup_{(\underline{\vec{v}}, \underline{\psi}) \in V} \frac{|B(\underline{\vec{v}}, \underline{\psi}; \underline{\eta}, \underline{\chi})|}{\|\underline{\vec{v}}, \underline{\psi}\|_V}, \quad \forall (\underline{\eta}, \underline{\chi}) \in W.$$

En utilisant le théorème 1.3.4, il est facile de voir que le problème (3.3.5) admet une solution unique et on a

$$\|\underline{\vec{u}}, \underline{\theta}\|_V + |\underline{\phi}, \underline{\lambda}|_W + \varepsilon \|\underline{\phi}, \underline{\lambda}\|_W \leq C \|F\|_{V'}.$$

### 3.3.3 Estimation abstraite d'erreur avec une supposition de stabilisation

Malgré l'introduction des coefficients de la géométrie de la coque  $(a^{\alpha\beta\gamma\delta})\sqrt{a}$  et  $(a^{\alpha\beta})\sqrt{a}$  dans les nouvelles inconnues, il reste quelques coefficients géométriques dans les termes :

$$\begin{aligned} B_s(\underline{\vec{v}}, \underline{\psi}; \underline{\eta}) &= \int_{\Omega} \eta^\alpha (\psi_\alpha + v_{3,\alpha} + b_\alpha^\gamma v_\gamma) d\underline{x}, \\ B_m(\underline{\vec{v}}, \underline{\chi}) &= \int_{\Omega} \chi^{\alpha\beta} \left[ \frac{1}{2} (v_{\alpha,\beta} + v_{\beta,\alpha}) - \Gamma_{\alpha\beta}^\delta v_\delta - b_{\alpha\beta} v_3 \right] d\underline{x}, \end{aligned}$$

et par conséquent il semble qu'il n'est pas possible de prouver la version de "la condition Inf-Sup discrète", donc on va la substituer par une condition légèrement plus faible. Cette version plus faible de la condition de stabilité pourrait être utile pour d'autres problèmes qui dépendent d'un paramètre qu'on va l'exposer d'une manière abstraite comme suit :

Soient  $V$  et  $W$  deux espaces de Hilbert et  $A, B$  et  $C$  trois formes bilinéaires continues

$$A : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}, \quad B : V \times W \longrightarrow \mathbb{R}, \quad C : W \times W \longrightarrow \mathbb{R},$$

et une fonctionnelle linéaire continue  $F : V \longrightarrow \mathbb{R}$ . On suppose que  $A$  et  $C$  sont coercives et donc les normes induites par ces formes dans  $V$  et  $W$  sont équivalentes à  $\|\cdot\|_V, \|\cdot\|_W$  respectivement.

Comme dans la section §1.3.2, on considère le problème de type point selle qui dépend d'un petit paramètre  $\varepsilon$  de la forme suivant :

$$\begin{aligned} \text{Problème } A^\varepsilon : \quad & \text{Trouver } (u, p) \in V \times W \text{ telle que :} \\ & \begin{cases} A(u, v) + B(v, p) = F(v), & \forall v \in V, \\ B(u, q) - \varepsilon^2 C(p, q) = 0, & \forall q \in W. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

et soient  $V_h \subset V$  et  $W_h \subset W$  des sous-espaces de dimensions finies, une solution approchée du problème  $A^\varepsilon$  est donnée par la solution du problème associé  $A_h^\varepsilon$  suivant :

$$\begin{aligned} \text{Problème } A_h^\varepsilon : \quad & \text{Trouver } (u_h, p_h) \in V_h \times W_h \text{ telle que :} \\ & \begin{cases} A(u_h, v_h) + B(v_h, p_h) = F(v_h), & \forall v_h \in V_h, \\ B(u_h, q_h) - \varepsilon^2 C(p_h, q_h) = 0, & \forall q_h \in W_h. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

Un affaiblissement de "la condition Inf-Sup discrète" est donnée par

**A.1** : Il existe une constante  $\gamma > 0$  (indépendante de  $h$ ) et une constante  $\hat{C} > 0$  telle que

$$|q_h|_W \leq \frac{1}{\gamma} \sup_{v_h \in V_h} \frac{B(v_h, q_h)}{\|v_h\|_V} + \hat{C} \varepsilon \|q_h\|_W, \quad \forall q_h \in W_h. \quad (3.3.8)$$

Sous cette condition nous avons le théorème suivant :

**Théorème 3.3.1** *Soit  $(u, p)$  solution de (3.3.6) et  $(u_h, p_h)$  solution de (3.3.7). Si la condition **A.1** est satisfaite alors il existe une constante  $\check{C} > 0$  qui dépend seulement de  $\gamma, \hat{C}$  et des constantes de continuité et de coercivité des formes  $A$  et  $C$  telle que*

$$\|u - u_h\|_V + |p - p_h|_W + \varepsilon \|p - p_h\|_W \leq \check{C} \inf_{\substack{v_h \in V_h \\ q_h \in W_h}} (\|u - v_h\|_V + |p - q_h|_W + \varepsilon \|p - q_h\|_W). \quad (3.3.9)$$

**Preuve.** ([23]) On peut montrer avec le même démarche de la preuve du théorème 1.3.6 que

$$\begin{aligned} & \|u_h - u^*\|_V^2 + \varepsilon^2 \|p_h - p^*\|_W^2 \\ & \leq C \left[ \begin{array}{l} \|u - u^*\|_V \|u_h - u^*\|_V + \|u_h - u^*\|_V \cdot |p - p^*|_W \\ + \|u - u^*\|_V |p_h - p^*|_W + \varepsilon^2 \|p - p^*\|_W \|p_h - p^*\|_W \end{array} \right], \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

en remarquant que, de la même manière que (1.3.23), on a :

$$|B(u - u^*, p - p^*)| \leq \|u - u^*\|_V \cdot |p_h - p^*|_W, \quad (3.3.11)$$

et en substituant les relations (1.3.20), (1.3.21), (1.3.23) et (3.3.11) au lieu de (1.3.22) dans l'estimation (1.3.19), on trouve facilement (3.3.10). Utilisons maintenant "la condition Inf-Sup discrète relaxée" (3.3.8), i.e :

$$|p_h - p^*|_W \leq \frac{1}{\gamma} \sup_{v_h \in V_h} \frac{|B(v_h, p_h - p^*)|}{\|v_h\|_V} + \hat{C}\varepsilon \|p_h - p^*\|_W.$$

et d'après (1.3.17) on trouve que

$$|p_h - p^*|_W \leq \frac{1}{\gamma_h} \left[ \sup_{v_h \in V_h} \frac{|A(u_h - u^*, v_h)|}{\|v_h\|_V} + |p - p^*|_W + \sup_{v_h \in V_h} \frac{|A(u - u^*, v_h)|}{\|v_h\|_V} \right] + \hat{C}\varepsilon \|p_h - p^*\|_W,$$

ce qui montre qu'il existe une constante  $C$  (qui dépend seulement de  $\gamma, \hat{C}$  et  $\|A\|$ ) telle que

$$|p_h - p^*|_W \leq C [\|u_h - u^*\|_V + \|u - u^*\|_V + |p - p^*|_W + \varepsilon \|p_h - p^*\|_W]. \quad (3.3.12)$$

Finalement d'après (3.3.12), (3.3.10) et l'inégalité triangulaire on trouve aisément (3.3.9).

■

Ce théorème montre que (3.3.7) fournit une approximation quasi-optimal de la solution de (3.3.6). Une évaluation de l'erreur dépendra de n'importe quelle régularité est valable pour la solution exacte  $(u, p)$  de (3.3.6) et des propriétés d'approximation des espaces  $V_h$  et  $W_h$ .

### 3.3.4 Éléments finis mixtes et stabilité

Notre objectif est maintenant de discrétiser la formulation mixte (3.3.5) du modèle de coque de Naghdi présentée dans la section § 3.3.2 et d'analyser l'erreur dans le cadre de la section § 3.3.3.

Il est claire que tous les formes  $A, B$  et  $C$  sont des formes bilinéaires continues et que les formes  $A$  et  $C$  sont coercives. Donc en appliquant le théorème 1.3.4 le problème (3.3.5) est bien posé, de plus pour tous choix des espaces d'éléments finis  $V_h \subset V$  et  $W_h \subset W$  le théorème 1.3.5 assure la convergence de la solution approchée  $(u_h, p_h) \in V_h \times W_h$  vers la solution exacte de (3.3.5), pour toute valeur fixée du paramètre  $\varepsilon$  (voir remarque 1.3.5), mais cette convergence n'est pas uniforme en  $\varepsilon$  donc, d'après (??) le phénomène du verrouillage apparaît.

Pour s'échapper du verrouillage on va, au lieu d'appliquer le théorème 1.3.6, appliquer le théorème 3.3.1, i.e., on va construire des espaces d'éléments finis qui satisfont la condition (3.3.8), pour celà supposons donc que le domaine de référence  $\Omega$  est polygonal et  $\tau_h$  une famille de triangulations de  $\Omega$ , donc

$$\bar{\Omega} = \cup_i K_i$$

où  $K_i$  est un triangle (fermé) tel que  $K_i \cap K_j = \emptyset$  ou un sommet ou un côté entier pour  $i \neq j$ , indexée par (la taille du maillage)  $h$  où

$$h = \max_{k \in \tau_h} h_K,$$

et où  $h_K$  est le diamètre de l'élément  $K \in \tau_h$  i.e.,

$$h_K = \max_{x_1, x_2 \in K} \|\underline{x}_1 - \underline{x}_2\|.$$

Supposons de plus que  $\tau_h$  est **régulière**. Rappelons qu'une famille de maillages  $\tau_h$  est dite **régulière** s'il existe une constante  $\sigma_0 > 0$  indépendant de  $h$  tel que

$$\forall h, \forall K \in \tau_h : \sigma_k = \frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma_0,$$

où  $\rho_K$  est la rondeur du triangle  $K$  définie par

$$\rho_K = \sup \{ \text{diam}(\mathfrak{B}); \mathfrak{B} \text{ boule de } \mathbb{R}^2, \mathfrak{B} \subset K \},$$

Le rapport  $\sigma_k$  mesure l'aplatissement du triangle  $K$ , il atteint son maximum,  $\sigma_k = \sqrt{3}$ , pour  $K$  équilatéral. D'une façon générale si on note  $\theta_K$  le plus petit angle du triangle  $K$ , un résultat classique de géométrie plane donne

$$\sigma_k = \frac{h_K}{\rho_K} \leq \frac{2}{\sin \theta_K}.$$

Ainsi, la famille de triangulation  $\tau_h$  est régulière si les triangles ne s'aplatissent pas trop lorsque  $h \rightarrow 0$ . Afin de voir la nécessité de la régularité de  $\tau_h$ , on peut dire brièvement :

le terme  $\sigma_k$  apparaît dans les majorations de l'erreur local, i.e., dans chaque triangle  $K \in \tau_h$ , et pour obtenir des majorations de l'erreur d'interpolation globale sur  $\Omega$  et prouver la convergence vers zéro de ces majorations lorsque  $h \rightarrow 0$  nous avons besoin de contrôler

et minorer la quantité  $\sigma_k$  i.e. supposer que  $\tau_h$  soit régulière (pour plus de détails voir par exemple [4]).

D'autre part, l'ensemble  $\Gamma_0$ , qui est une partie ou la totalité de la frontière  $\partial\Omega$ , où ils sont imposées les conditions aux limites de Dirichlet est supposé être l'union des côtés des triangles pour chaque triangulation  $\tau_h$ . On utilise la notation  $P_k(T)$  pour désigner l'espace des polynômes définis sur le triangle  $T$  de deux variables à coefficients réels et de degré global inférieur ou égal à  $k$ , on définit aussi les espaces

$$\begin{aligned} L_k^s(\tau_h) &= \{p \in H^s(\Omega) : p|_T \in P_k(T), \forall T \in \tau_h\}, \\ B_k(\tau_h) &= \{p \in H_0^1(\Omega) : p|_T \in P_k(T) \cap H_0^1(T), \forall T \in \tau_h\}, \\ M_k^m(\tau_h) &= L_k^1(\tau_h) \cap H_{\Gamma_0}^1 + B_m(\tau_h). \end{aligned}$$

Pour ce problème de coque on va prendre exactement la même paire d'espaces d'approximation utilisés par Arnold et Brezzi dans [9] à savoir l'espace des fonctions continues et polynômiales par morceaux (éléments finis de Lagrange de degré  $k+2$  pour les déplacements et de degré  $k+1$  pour les rotations) augmentées par des "fonctions bulles" pour les inconnues primitives  $(\vec{u}, \underline{\theta})$ , et l'espace d'approximation des fonctions discontinues pour les nouveaux inconnues  $(\underline{\phi}, \underline{\lambda})$  (voir figure 3.3.1) i.e.,

$$\begin{aligned} V_h &= \{(\vec{v}, \underline{\psi}) \in V : v_i \in M_{k+2}^{k+3}(\tau_h), \psi_\alpha \in M_{k+1}^{k+3}(\tau_h)\}, \\ W_h &= \{(\underline{\eta}, \underline{\chi}) \in W : \eta_\alpha, \chi_{\alpha\beta} \in L_k^0(\tau_h)\}, \quad \text{où} \\ L_k^0(\tau_h) &= \{v_h \in L^2(\Omega) : v_h|_T \in P_k(T), \forall T \in \tau_h\}. \end{aligned}$$

On note ici que, la technique d'augmentation par des "fonctions bulles" est souvent utilisée dans la littérature lorsque l'élément finis considéré ne satisfait pas uniformément la condition de compatibilité des espaces  $V_h$  et  $W_h$  i.e., la "LBB" discrète, en raison que l'espace des degrés de liberté de l'un n'est pas assez riche (ou, réciproquement, l'autre espace est trop riche).

Pour remédier à ce problème, l'idée la plus simple consiste à ajouter pour chaque triangle du maillage des degrés de liberté associés aux coordonnées barycentriques de ce triangle (pour la définition de ces coordonnées voir définition A.4, pour la définition de ces fonctions bulles voir définition A.5 dans l'annexe et pour plus de détails sur l'emploi de cette technique voir par exemple [4]).

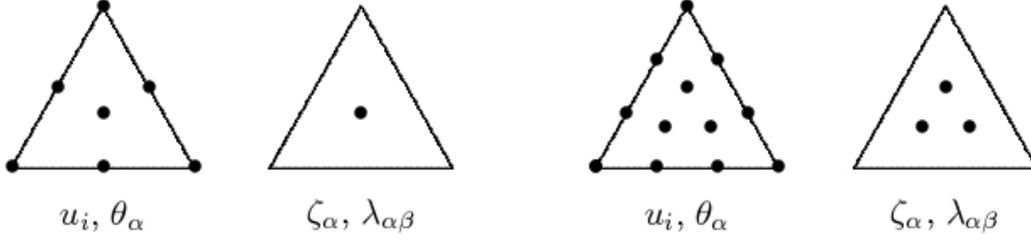


Figure 3.3.1 : Les degrés de libertés des déplacements et des rotations (les inconnues primitives) et les degrés des déformations de cisaillement et des déformations membranaires (les inconnues auxiliaires), pour les cas  $k = 0$  et  $k = 1$ .

D'autre part, on remarque la différence ici de la formulation de [9], est que les nouveaux inconnues (i.e., les inconnues auxiliaires) sont définies différemment que celles dans [9].

Il est connu que la façon de définir les nouveaux inconnues, dans la méthode mixte, joue un rôle très important dans l'analyse de stabilité de cette méthode.

En utilisant l'interpolé de Clément (voir [35]), le lemme 7 de [9] a construit un opérateur d'interpolation linéaire  $\pi_h : H_{\Gamma_0}^1 \longrightarrow M_{k+2}^{k+3}(\tau_h)$  qui possède les propriétés suivantes

$$\|\pi_h w\|_{1,\Omega} \leq C \|w\|_{1,\Omega} \quad \forall w \in H_{\Gamma_0}^1, \quad (3.3.13)$$

$$\|w - \pi_h w\|_{0,\Omega} \leq Ch \|w\|_{1,\Omega} \quad \forall w \in H_{\Gamma_0}^1, \quad (3.3.14)$$

$$\int_T (w - \pi_h w) p d\underline{x} = 0 \quad \forall w \in H_{\Gamma_0}^1, \quad (3.3.15)$$

$$\int_e (w - \pi_h w) p ds = 0 \quad \forall w \in H_{\Gamma_0}^1, \quad (3.3.16)$$

où  $C$  est une constante,  $e$  est un coté du triangle  $T$  de la triangulation  $\tau_h$ , et  $p$  est une fonction de  $L_k^0(\tau_h)$ .

De plus, avec le théorème de Green on a facilement que (3.3.15) et (3.3.16) impliquent pour tout  $T \in \tau_h$  et tout  $p \in L_k^0(\tau_h)$  on a

$$\int_T (w - \pi_h w)_{,\alpha} p d\underline{x} = 0, \quad \forall w \in H_{\Gamma_0}^1. \quad (3.3.17)$$

D'après la construction de  $\pi_h$  on peut facilement définir l'opérateur d'interpolation linéaire  $\pi_h^\star : H_{\Gamma_0}^1 \longrightarrow M_{k+1}^{k+3}(\tau_h)$  qui possède aussi les propriétés suivantes

$$\|\pi_h^\star w\|_{1,\Omega} \leq C \|w\|_{1,\Omega} \quad \forall w \in H_{\Gamma_0}^1, \quad (3.3.18)$$

$$\|w - \pi_h^\star w\|_{0,\Omega} \leq Ch\|w\|_{1,\Omega} \quad \forall w \in H_{\Gamma_0}^1,$$

$$\int_T (w - \pi_h^\star w) p d\underline{x} = 0 \quad \forall w \in H_{\Gamma_0}^1,$$

**Lemme 3.3.1** Soient  $p \in L_k^0(\tau_h)$  et  $b : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction lipschitzienne sur tout  $T \in \tau_h$ , alors il existe une constante  $C$  telle que

$$\sup_{w \in H_{\Gamma_0}^1} \frac{\langle p, bw \rangle_{L^2}}{\|w\|_{1,\Omega}} \leq C \sup_{w \in M_{k+2}^{k+3}(\tau_h)} \frac{\langle p, bw \rangle_{L^2}}{\|w\|_{1,\Omega}} + Ch^2 \|p\|_{L^2}. \quad (3.3.19)$$

**Preuve.** Soit  $\pi_h$  l'opérateur d'interpolation défini précédemment. On définit  $\bar{b} \in L_0^0(\tau_h)$ , qui est donc une constante sur chaque  $T \in \tau_h$ , de sorte que  $\bar{b}|_T$  est égale à la moyenne de la fonction  $b$  sur  $T$ , pour tout triangle  $T \in \tau_h$  i.e :

$$\forall T \in \tau_h, \exists \underline{x}_T \in T \quad \text{telle que} : \bar{b}|_T = b(\underline{x}_T) = \frac{1}{\text{mes}(T)} \int_T b d\underline{x}.$$

Considérons  $0 \neq w \in H_{\Gamma_0}^1$  alors, d'après (3.3.15), on a

$$\begin{aligned} \langle p, bw \rangle_T &= \int_T pbw d\underline{x} = \langle p, b\pi_h w \rangle_T + \langle p, b(w - \pi_h w) \rangle_T \\ &= \langle p, b\pi_h w \rangle_T + \langle p, (b - \bar{b})(w - \pi_h w) \rangle_T, \end{aligned}$$

et par conséquent, en sachant que  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Omega = \sum_{T \in \tau_h} \langle \cdot, \cdot \rangle_T$  et en utilisant (3.3.13) et l'inégalité de Cauchy- Schwarz, il existe une constante qu'on la note aussi par  $C$  telle que

$$\frac{\langle p, bw \rangle_\Omega}{\|w\|_{1,\Omega}} \leq C \frac{\langle p, b\pi_h w \rangle_\Omega}{\|\pi_h w\|_{1,\Omega}} + \frac{\|p\|_{0,\Omega} \cdot \|b - \bar{b}\|_{L^\infty} \cdot \|w - \pi_h w\|_{0,\Omega}}{\|w\|_{1,\Omega}}. \quad (3.3.20)$$

Or la fonction  $b$  est lipschitzienne sur tout  $T \in \tau_h$  donc

$$\begin{aligned} \|b - \bar{b}\|_{L^\infty} &= \sup_{\underline{x} \in \Omega} \text{ess} |b(\underline{x}) - \bar{b}(\underline{x})| \\ &= \max_{T \in \tau_h} \left\{ \sup_{\underline{x} \in T} \text{ess} |b(\underline{x}) - b(\underline{x}_T)| \right\} \\ &\leq \max_{T \in \tau_h} \{C_T \cdot h_T\} \leq Ch, \end{aligned} \quad (3.3.21)$$

maintenant en utilisant (3.3.14) et (3.3.21), (3.3.20) devient

$$\frac{\langle p, bw \rangle_\Omega}{\|w\|_{1,\Omega}} \leq C \frac{\langle p, b\pi_h w \rangle_\Omega}{\|\pi_h w\|_{1,\Omega}} + Ch^2 \|p\|_{0,\Omega}, \quad \forall w \in H_{\Gamma_0}^1 (w \neq 0).$$

ce qui montre, en prenant la borne supérieure, (3.3.19).  $\blacksquare$

Nous sommes maintenant prêts à établir la condition de stabilité pour  $V_h \times W_h$  et le problème de coque.

**Lemme 3.3.2** *On suppose que les fonctions  $b_{\alpha\beta}$ ,  $\Gamma_{\alpha\beta}^\delta$  et  $b_\alpha^\delta$  sont lipschitziennes sur  $\Omega$ , alors pour  $(\underline{\eta}, \underline{\chi}) \in W_h$  on a*

$$\begin{aligned} \left| \underline{\eta}, \underline{\chi} \right|_W &= \sup_{(\underline{v}, \underline{\psi}) \in V} \frac{B(\underline{v}, \underline{\psi}; \underline{\eta}, \underline{\chi})}{\|\underline{v}, \underline{\psi}\|_V} \\ &\leq C \sup_{(\underline{v}, \underline{\psi}) \in V_h} \frac{B(\underline{v}, \underline{\psi}; \underline{\eta}, \underline{\chi})}{\|\underline{v}, \underline{\psi}\|_V} + Ch^2 \|\underline{\eta}, \underline{\chi}\|_W. \end{aligned} \quad (3.3.22)$$

**Preuve.** ([23]) On définit l'opérateur d'interpolation  $\Pi_h : V \longrightarrow V_h$  par

$$\Pi_h(\underline{v}, \underline{\psi}) = (\pi_h v_1, \pi_h v_2, \pi_h v_3, \pi_h^\star \psi_1, \pi_h^\star \psi_2). \quad (3.3.23)$$

d'après les propriétés des opérateurs  $\pi_h$  et  $\pi_h^\star$ : (3.3.13) et (3.3.18) on peut voir facilement que  $\|\Pi_h(\underline{v}, \underline{\psi})\|_V \leq C\|\underline{v}, \underline{\psi}\|_V$ . En utilisant les mêmes arguments du preuve précédente on a pour tout  $(\underline{v}, \underline{\psi}) \in V$ ,

$$\begin{aligned} \frac{B(\underline{v}, \underline{\psi}; \underline{\eta}, \underline{\chi})}{\|\underline{v}, \underline{\psi}\|_V} &= \frac{B[\Pi_h(\underline{v}, \underline{\psi}); \underline{\eta}, \underline{\chi}]}{\|\underline{v}, \underline{\psi}\|_V} + \frac{\langle \eta^\beta, b_\beta^\delta(v_\delta - \pi_h v_\delta) \rangle_\Omega}{\|\underline{v}, \underline{\psi}\|_V} \\ &\quad + \frac{\langle \chi^{\alpha\beta}, \Gamma_{\alpha\beta}^\delta(v_\delta - \pi_h v_\delta) + b_{\alpha\beta}(v_3 - \pi_h v_3) \rangle_\Omega}{\|\underline{v}, \underline{\psi}\|_V} \\ &\leq C \frac{B[\Pi_h(\underline{v}, \underline{\psi}); \underline{\eta}, \underline{\chi}]}{\|\Pi_h(\underline{v}, \underline{\psi})\|_V} + \frac{\langle \eta^\beta, (b_\beta^\delta - \bar{b}_\beta^\delta)(v_\delta - \pi_h v_\delta) \rangle_\Omega}{\|\underline{v}, \underline{\psi}\|_V} \\ &\quad + \frac{\langle \chi^{\alpha\beta}, (\Gamma_{\alpha\beta}^\delta - \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\delta)(v_\delta - \pi_h v_\delta) + (b_{\alpha\beta} - \bar{b}_{\alpha\beta})(v_3 - \pi_h v_3) \rangle_\Omega}{\|\underline{v}, \underline{\psi}\|_V} \\ &\leq C \sup_{(\underline{v}, \underline{\psi}) \in V_h} \frac{B(\underline{v}, \underline{\psi}; \underline{\eta}, \underline{\chi})}{\|\underline{v}, \underline{\psi}\|_V} + Ch^2 \|\underline{\eta}, \underline{\chi}\|_W. \end{aligned}$$

ici on a utilisé la définition de la forme  $B$  et les relations (3.3.14), (3.3.15) et (3.3.17) et le fait que les fonctions  $b_{\alpha\beta}$ ,  $\Gamma_{\alpha\beta}^\delta$ ,  $b_\alpha^\delta$  sont lipschitziennes sur  $\Omega$ .

Les fonctions  $\bar{b}_{\alpha\beta}$ ,  $\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\delta$  et  $\bar{b}_\alpha^\delta$  sont dans  $L_0^0(\tau_h)$  et sur tout  $T \in \tau_h$  elles prennent les moyennes des fonctions  $b_{\alpha\beta}$ ,  $\Gamma_{\alpha\beta}^\delta$ ,  $b_\alpha^\delta$  respectivement.

Il est clair maintenant, toujours en prenant la borne supérieure, que

$$\left| \underline{\eta}, \underline{\chi} \right|_W = \sup_{(\underline{v}, \underline{\psi}) \in V} \frac{B(\underline{v}, \underline{\psi}; \underline{\eta}, \underline{\chi})}{\|\underline{v}, \underline{\psi}\|_V} \leq C \sup_{(\underline{v}, \underline{\psi}) \in V_h} \frac{B(\underline{v}, \underline{\psi}; \underline{\eta}, \underline{\chi})}{\|\underline{v}, \underline{\psi}\|_V} + Ch^2 \|\underline{\eta}, \underline{\chi}\|_W.$$

■

Dans notre cas de problème de coque de Naghdi, la condition de stabilité sera comme suit :

**A.2** : Ils existent  $\gamma_s > 0$  et  $\hat{C} > 0$  telle que

$$\left| \underline{\eta}, \underline{\chi} \right|_W \leq \frac{1}{\gamma_s} \sup_{(\underline{v}, \underline{\psi}) \in V_h} \frac{B(\underline{v}, \underline{\psi}; \underline{\eta}, \underline{\chi})}{\|\underline{v}, \underline{\psi}\|_V} + \hat{C} \varepsilon \|\underline{\eta}, \underline{\chi}\|_W, \quad \forall (\underline{\eta}, \underline{\chi}) \in W_h. \quad (3.3.24)$$

Le théorème suivant est donc un cas particulier du théorème 3.3.1.

**Théorème 3.3.2** Soit  $(\underline{u}, \underline{\theta}, \underline{\phi}, \underline{\lambda})$  solution du problème (3.3.5).

Si  $h^2 < \tilde{C}\varepsilon$  pour une certaine constante  $\tilde{C}$  alors il existe une constante  $\bar{C}$ , qui dépend seulement des constantes  $\gamma_s, \hat{C}, \tilde{C}$  et des constantes de continuité et de coercivité des formes bilinéaires  $A$  et  $C$  définies dans la section § 3.3.3, telle que

$$\begin{aligned} & \|\underline{u} - \underline{u}_h, \underline{\theta} - \underline{\theta}_h\|_V + \left| \underline{\phi} - \underline{\phi}_h, \underline{\lambda} - \underline{\lambda}_h \right|_W + \varepsilon \|\underline{\phi} - \underline{\phi}_h, \underline{\lambda} - \underline{\lambda}_h\|_W \\ & \leq \bar{C} \inf_{\substack{(\underline{v}, \underline{\psi}) \in V_h \\ (\underline{\eta}, \underline{\chi}) \in W_h}} \left[ \|\underline{u} - \underline{v}, \underline{\theta} - \underline{\psi}\|_V + \left| \underline{\phi} - \underline{\eta}, \underline{\lambda} - \underline{\chi} \right|_W + \varepsilon \|\underline{\phi} - \underline{\eta}, \underline{\lambda} - \underline{\chi}\|_W \right], \end{aligned} \quad (3.3.25)$$

où  $(\underline{u}_h, \underline{\theta}_h) \in V_h$  et  $(\underline{\phi}_h, \underline{\lambda}_h) \in W_h$  est la solution unique du problème approché du problème (3.3.5) i.e

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\underline{u}_h, \underline{\theta}_h) \in V_h \text{ et } (\underline{\phi}_h, \underline{\lambda}_h) \in W_h \text{ telle que:} \\ A(\underline{u}_h, \underline{\theta}_h; \underline{v}, \underline{\psi}) + B(\underline{v}, \underline{\psi}; \underline{\eta}_h, \underline{\chi}_h) = F(\underline{v}), \quad \forall (\underline{v}, \underline{\psi}) \in V_h, \\ B(\underline{u}_h, \underline{\theta}_h; \underline{\eta}, \underline{\chi}) - \varepsilon^{-2} C(\underline{\phi}_h, \underline{\lambda}_h; \underline{\eta}, \underline{\chi}) = 0, \quad \forall (\underline{\eta}, \underline{\chi}) \in W_h. \end{array} \right. \quad (3.3.26)$$

### 3.3.5 Relaxation de la condition “ $h^2 < C\varepsilon$ ” :

À proprement parler, la condition  $h^2 < C\varepsilon$  signifie que la taille de la maille dépend de l'épaisseur de la coque. Bien que nous estimons que dans la pratique  $h^2 < C\varepsilon$  n'est pas très restrictif, nous avons deux façons de relaxer cette condition.

Tout d'abord, on peut stabiliser le problème abstrait (3.3.6) en remplaçant  $\varepsilon^2$  par  $\varepsilon^2 + h^4$  et considérer le problème suivant

$$\begin{aligned} \text{Problème } A^{\varepsilon, h} : \text{ Trouver } (u^h, p^h) \in V \times W \text{ telle que :} \\ \left\{ \begin{array}{l} A(u^h, v) + B(v, p^h) = F(v), \quad \forall v \in V, \\ B(u^h, q) - (\varepsilon^2 + h^4)C(p^h, q) = 0, \quad \forall q \in W. \end{array} \right. \end{aligned} \quad (3.3.27)$$

cette technique est largement utilisée dans les problèmes de plaques de type Reissner-Mindlin (voir par exemple [18]); dans la plus part des cas  $\varepsilon^2$  est remplacé par  $\varepsilon^2 + h^4$ . En soustrayant (3.3.27) de (3.3.6) on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} A(u - u^h, v) + B(v, p - p^h) = 0, \quad \forall v \in V, \\ B(u - u^h, q) - (\varepsilon^2 + h^4)C(p - p^h, q) = -h^4C(p, q), \quad \forall q \in W. \end{array} \right.$$

lorsqu'on prend  $v = u - u^h$  et  $q = p - p^h$  et on fait soustraire la seconde équation de la première et en respectant la positivité de la forme  $C$  on trouve

$$A(u - u^h, u - u^h) + (\varepsilon^2 + h^4)C(p - p^h, p - p^h) = h^4C(p, p - p^h) \leq h^4C(p, p)$$

ce qui montre (en se rappelant que les formes  $A$  et  $C$  définissent des normes équivalentes à celles des espaces  $V$  et  $W$  respectivement et en utilisant l'équivalence entre les normes  $\|\cdot\|_V + \|\cdot\|_W$  et  $(\|\cdot\|_V^2 + \|\cdot\|_W^2)^{\frac{1}{2}}$ ) qu'il existe une constante  $c$  telle que

$$\|u - u^h\|_V + (\varepsilon + h^2)\|p - p^h\|_W \leq ch^2\|p\|_W.$$

et il s'ensuit aussi que

$$\|p - p^h\|_W \leq c\|u - u^h\|_V \leq ch^2\|p\|_W.$$

Si  $\|p\|_W$  est bornée par  $\|F\|_{V'}$  avec une constante indépendante de  $\varepsilon$  nous aurions alors une convergence uniforme. C'est en effet le cas pour les problèmes de plaques de type Reissner-Mindlin avec des conditions aux limites de Dirichlet où la norme  $L^2$  de la contrainte de cisaillement est bornée par celle du chargement. Pour les coques un tel résultat n'est pas connu. Pour les plaques de Reissner-Mindlin qui sont simplement supportées aux bords, il est connu (voir [9]) que la norme  $L^2$  de la contrainte de cisaillement n'est uniformément bornée

quand  $\varepsilon$  tend vers zéro, et par conséquent, cette approche de stabilisation ne semble pas très prometteur pour les problèmes de coques qui sont simplement supportés aux bords.

Cependant, nous avons la méthode suivante, qui nous oblige à utiliser des espaces de plus grande bulle, i.e.  $M_{k+2}^{k+m}(\tau_h)$ , pour  $m \geq 3$ , mais certainement qui satisfait l'hypothèse de stabilisation **A.2**.

On va ici redéfinir l'opérateur d'interpolation  $\pi_h : H_{\Gamma_0}^1 \longrightarrow M_{k+2}^{k+3}(\tau_h)$  en gardant la même notation  $\pi_h$ .

**Lemme 3.3.3** *Il existe un opérateur d'interpolation  $\pi_h : H_{\Gamma_0}^1 \longrightarrow M_{k+2}^{k+m}(\tau_h)$ , pour  $m \geq 3$  de telle sorte que les relations (3.3.13), (3.3.14), (3.3.16) et (3.3.17) sont vérifiées pour tout  $p \in L_k^0(\tau_h)$ , et de plus la relation (3.3.15) est vérifiée pour tout  $p \in L_{k+m-3}^0(\tau_h)$ .*

**Preuve.** ([23]) Premièrement, notons par :  $\pi_h^0 : H_{\Gamma_0}^1 \longrightarrow L_1^1(\tau_h) \cap H_{\Gamma_0}^1$  l'opérateur d'interpolation de Clément qui satisfait, dans le cas où la famille  $(\tau_h)_h$  est **régulière**

$$\|v - \pi_h^0 v\|_{0,T} + h_T \|v - \pi_h^0 v\|_{1,T} \leq ch_T \|v\|_{1,V(T)}, \quad \forall T \in \tau_h, \forall v \in H_{\Gamma_0}^1. \quad (3.3.28)$$

où  $c > 0$  est une constante et  $V(T)$  l'ensemble de tous les triangles de  $\tau_h$  qui ont une intersection non vide avec le triangle  $T$ . Pour la preuve, assez technique, on pourra voir [35]. Deuxièmement, notons par  $\pi_h^1 : H_{\Gamma_0}^1 \longrightarrow L_{k+2}^1(\tau_h) \cap H_{\Gamma_0}^1$  l'opérateur d'interpolation qui satisfait  $\pi_h^1 v = 0$  aux sommets de tout les triangles de  $\tau_h$  et

$$\int_T (v - \pi_h^1 v) p d\mathbf{x} = 0, \quad \text{pour tout } T \in \tau_h, \quad v \in H_{\Gamma_0}^1, \quad p \in P_{k-1}, \quad (3.3.29)$$

$$\int_e (v - \pi_h^1 v) p ds = 0, \quad \text{pour tout } e \in E_h, \quad v \in H_{\Gamma_0}^1, \quad p \in P_{k-1}. \quad (3.3.30)$$

ici  $E_h$  est l'ensemble de tous les côtés de tous les triangles de  $\tau_h$ .

Avec un argument de l'échelle, on peut montrer que

$$\|v - \pi_h^1 v\|_{0,T} + h_T \|v - \pi_h^1 v\|_{1,T} \leq c(\|v\|_{0,T} + h_T \|v\|_{1,T}), \quad \forall T \in \tau_h, \forall v \in H_{\Gamma_0}^1. \quad (3.3.31)$$

Troisièmement, notons par  $\pi_h^2 : H_{\Gamma_0}^1 \longrightarrow B_{k+m}(\tau_h)$ ,  $m \geq 3$ , l'opérateur d'interpolation qui satisfait

$$\int_T (v - \pi_h^2 v) p d\mathbf{x} = 0, \quad \text{pour tout } T \in \tau_h, \quad v \in H_{\Gamma_0}^1, \quad p \in P_{k+m-3}.$$

On peut aussi montrer que

$$\|\pi_h^2 v\|_{0,T} + h_T \|\pi_h^2 v\|_{1,T} \leq c \|v\|_{0,T}, \quad \text{pour tout } T \in \tau_h, \quad v \in H_{\Gamma_0}^1.$$

Finalement, en posant

$$\pi_h v = \pi_h^0 v + \pi_h^1 v (v - \pi_h^0 v) + \pi_h^2 v [v - \pi_h^0 v - \pi_h^1 v (v - \pi_h^0 v)], \quad (3.3.32)$$

on peut vérifier, après des calculs simples, que les relations (3.3.13), (3.3.14), (3.3.16) et (3.3.17) sont vérifiées pour tout  $p \in L_k^0(\tau_h)$ , et la relation (3.3.15) est vérifiée pour tout  $p \in L_{k+m-3}^0(\tau_h)$ . ■

Maintenant, si on utilise la définition de l'opérateur d'interpolation  $\Pi_h$  dans le lemme 3.3.2 en remplaçant  $\pi_h$  par le nouveau défini dans (3.3.32) et en supposant que les coefficients géométriques de la coque  $b_{\alpha\beta}$ ,  $b_\beta^\delta$  et  $\Gamma_{\alpha\beta}^\delta$  sont dans  $C^{m-3,1}$  sur tout triangle de  $\tau_h$ , alors nous pouvons rapprocher ces coefficients uniformément par des polynômes de degré  $m-3$ , et démontrer que

$$\begin{aligned} \left| \underline{\eta}, \underline{\chi} \right|_W &= \sup_{(\vec{v}, \underline{\psi}) \in V} \frac{B(\vec{v}, \underline{\psi}; \underline{\eta}, \underline{\chi})}{\|\vec{v}, \underline{\psi}\|_V} \\ &\leq C \sup_{(\vec{v}, \underline{\psi}) \in V_h} \frac{B(\vec{v}, \underline{\psi}; \underline{\eta}, \underline{\chi})}{\|\vec{v}, \underline{\psi}\|_V} + Ch^{m-1} \|\underline{\eta}, \underline{\chi}\|_W. \end{aligned} \quad (3.3.33)$$

pour l'espace

$$V_h = V_h^m = \{(\vec{v}, \underline{\psi}) \in V : v_i \in M_{k+2}^{k+m}(\tau_h), \psi_\alpha \in M_{k+1}^{k+3}(\tau_h)\}.$$

Une fois  $h^{m-1} < C\varepsilon$ , la condition de stabilité **A.2** sera bien sur satisfaite et on termine le reste de l'analyse comme dans la section précédente.

Par conséquent, pour tout  $\varepsilon > 0$  fixé et  $0 < h < 1$  il existe un entier  $m$  telle que  $h^{m-1} < \varepsilon$  et le problème (3.3.26) possède donc, pour  $V_h = V_h^m$ , une solution approchée de la solution exacte du problème (3.3.5) avec une estimation de l'erreur quasi-optimale et indépendante de  $\varepsilon$ .

### 3.3.6 Technique de l'intégration réduite

La technique de l'intégration réduite est largement utilisée dans les problèmes qui présentent le phénomène du verrouillage numérique. Au lieu de spécialiser cette idée à notre méthode, nous présentons d'abord une brève description abstraite de la technique.

Considérons un problème qui souffre du verrouillage :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que :} \\ A(u, v) + \varepsilon^{-2}C(\mathcal{L}u, \mathcal{L}v) = F(v), \quad \forall v \in V. \end{array} \right.$$

où  $V$  est un espace de Hilbert,  $\mathcal{L} : V \rightarrow W$  est un opérateur linéaire borné et  $W$  est aussi un espace de Hilbert,  $A$  et  $C$  sont des formes bilinéaires symétriques continues et coercives sur les espaces  $V$  et  $W$  respectivement. D'après ces hypothèses, on déduit aisément qu'il existent deux constantes  $c_1 > c_0 > 0$  telles que

$$c_0 \|v\|_V^2 \leq A(v, v) + \varepsilon^{-2}C(\mathcal{L}v, \mathcal{L}v) \leq c_1 \varepsilon^{-2} \|v\|_V^2.$$

mais si on discrétise directement le problème, l'estimation de l'erreur va contenir le coefficient  $\varepsilon^{-2}c_1/c_0$ , ce qui signifie qu'on a un phénomène de verrouillage.

La façon habituelle de s'échapper du verrouillage est d'introduire la reformulation suivante du problème :

Posons  $p = \varepsilon^{-2}\mathcal{L}u$  et  $B(v, q) = C(\mathcal{L}v, q)$ . On vérifie aisément que le problème de type point selle suivant est équivalente au problème initial, i.e, au problème  $A^\varepsilon$  définie dans (3.3.6). Pour des sous-espaces arbitraires  $V_h \subset V$  et  $W_h \subset W$  on considère le problème approché

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ et } p_h \in W_h \text{ tel que :} \\ A(u_h, v_h) + B(v_h, p_h) = F(v_h), \quad \forall v_h \in V_h, \\ B(u_h, q_h) - \varepsilon^{-2}C(p_h, q_h) = 0, \quad \forall q_h \in W_h. \end{array} \right. \quad (3.3.34)$$

Si la paire des espaces  $(V_h, W_h)$  satisfait la condition de stabilité **A.1** donnée dans la section 3.3.3 le théorème 3.3.1 de la même section sera applicable.

L'idée de l'intégration réduite est que la quantité inconnue  $p_h$  peut être éliminée, on peut toujours faire ceci de la façon suivante :

On définit l'opérateur de la projection orthogonale  $S_h : W \rightarrow W_h$  par

$$C(S_h r, q_h) = C(r, q_h), \quad \forall q_h \in W_h.$$

On obtient alors  $p_h = \varepsilon^{-2}S_h \mathcal{L}u_h$  et  $B(v, p_h) = C(S_h \mathcal{L}v, p_h)$ . D'où le problème (3.3.34) se réduit au problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u_h \in V_h \text{ tel que :} \\ A(u_h, v_h) + \varepsilon^{-2}C(S_h \mathcal{L}u_h, S_h \mathcal{L}v_h) = F(v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \end{array} \right.$$

Quand l'espace  $W_h$  est un sous-espace d'éléments finis composé de polynômes discontinus, l'opérateur  $S_h$  sera facilement calculable. L'avantage de ce dernier problème est qu'il ne contient que l'inconnue primitive, cependant son système algébrique est mal conditionné (voir [23]).

Pour convertir notre méthode mixte dans cette section à la méthode de l'intégration réduite, on a besoin de définir l'opérateur  $\mathcal{L}$  simplement comme suit :

$$\mathcal{L}(\vec{u}, \underline{\theta}) = \left[ \left( \frac{E}{2(1+\nu)} a^{\alpha\beta} \Phi_\alpha(\vec{u}, \underline{\theta}) \sqrt{a} \right), \left( a^{\alpha\beta\gamma\delta} \Lambda_{\alpha\beta}(\vec{u}) \sqrt{a} \right) \right],$$

et la forme bilinéaire  $C$  comme suit :

$$C(\underline{\phi}, \underline{\lambda}; \underline{\eta}, \underline{\chi}) = \int_{\Omega} \frac{2(1+\nu)}{E} a_{\alpha\beta} \phi^\alpha \eta^\beta \frac{1}{\sqrt{a}} d\underline{x} + \int_{\Omega} a_{\alpha\beta\gamma\delta} \lambda^{\alpha\beta} \chi^{\gamma\delta} \frac{1}{\sqrt{a}} d\underline{x},$$

puis on utilise le cadre donné dans cette paragraphe.

# Annexes

**Théorème A.1** ([36]): On dit que la forme bilinéaire  $a(., .)$  définie sur l'espace de Banach  $E$  est *non négative* (on dit encore *positive*) si:  $\forall x \in E, a(x, x) \geq 0$ .

Elle est dite *définie positive* si :

$$\forall x \in E, x \neq 0, \quad a(x, x) > 0.$$

Soit  $a(., .)$  une forme bilinéaire non négative sur l'espace de Banach  $E$ .

Alors pour tout  $x, y \in E$ , on a l'inégalité de Cauchy- Schwarz :

$$|a(x, y)|^2 \leq a(x, x).a(y, y),$$

il résulte alors que :

i) Si  $a(., .)$  est non négative, l'application  $x \mapsto \sqrt{a(x, x)}$  est une semi-norme sur  $E$ .

ii) Si  $a(., .)$  est définie positive, l'application  $x \mapsto \sqrt{a(x, x)}$  est une norme sur  $E$ .

**Théorème A.2** (Riesz, [36]) : Soit  $V$  un espace de Hilbert.

Étant donné  $f \in V'$ , il existe  $u \in V$  unique tel que

$$\forall v \in V, \quad \langle u, v \rangle = f(v).$$

De plus, on a

$$\|u\|_V = \|f\|_{V'}.$$

L'application  $f \in V' \mapsto u \in V$  est donc un isomorphisme isométrique.

Une conséquence intéressante du théorème de Riesz est la proposition suivante :

**Proposition A.1:** Soit  $V$  un espace de Hilbert. Alors  $V$  est réflexif.

**Théorème A.3** ([37]): Soit  $a(.,.)$  une forme bilinéaire symétrique et continue sur un espace de Hilbert  $H$  et coercive sur un sous-espace  $V$ , alors  $(V, \sqrt{a(.,.)})$  est un espace de Hilbert.

**Théorème A.4** ([36]): Soient  $H_1$  et  $H_2$  deux espaces de Hilbert. Il existe un isomorphisme de  $(H_1 \times H_2)'$  sur  $\mathcal{L}(H_1, H_2)$  qui associe à toute forme bilinéaire continue  $a(.,.)$  l'opérateur  $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$  défini par :

$$\langle Ax, y \rangle_{H_2} = a(x, y), \quad \forall x \in H_1, \quad y \in H_2$$

et l'on a :

$$\|a\|_{(H_1 \times H_2)'} = \|A\|_{\mathcal{L}(H_1, H_2)} \quad (3.3.35)$$

L'opérateur  $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$  s'appelle l'opérateur associé à la forme  $a(.,.)$ .

**Théorème A.5** ([32]):

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces métriques,  $A$  une partie de  $E$  et  $\{f_n\}$  une suite d'applications de  $A$  dans  $F$ , convergeant uniformément vers  $f$ , i.e :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ telle que : } (n \geq n_0 \Rightarrow d_F[f_n(x), f(x)] \leq \varepsilon, \quad \forall x \in A).$$

Soit  $a$  un point de  $E$  adhérent à  $A$ .

Si pour chaque  $n$ ,  $f_n(x)$  a une limite quand  $x$  tend vers  $a$  par valeurs dans  $A$ , et si  $F$  est complet, alors  $f(x)$  a une limite quand  $x$  tend vers  $a$  par valeurs dans  $A$ , et en outre

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f_n(x) \right].$$

**Théorème A.6** (des fonctions implicites)

Soit  $f$  une application de classe  $C^1$  d'un ouvert  $U$  de  $E_1 \times E_2$  dans  $F$ , avec  $E_1, E_2$  et  $F$  des espaces de Banach.

Si  $f$  est différentiable par rapport à la deuxième variable en  $(a_1, a_2) \in E_1 \times E_2$  et si cette différentielle est un isomorphisme de  $E_2$  dans  $F$ , alors il existe une application  $\phi$  de classe  $C^1$  définie sur un ouvert  $U_1$  de  $E_1$  contenant  $a_1$  et à valeurs dans un ouvert  $U_2$  de  $E_2$  contenant  $a_2$  telle que pour tout  $(y_1, y_2)$  dans  $U_1 \times U_2$  on a :

$$f(y_1, y_2) = f(a_1, a_2) \iff y_2 = \phi(y_1),$$

et pour tout  $x$  dans  $U$  on a :

$$D\phi(x) = -[D_2f(x, \phi(x))]^{-1} \circ D_1f(x, \phi(x)).$$

**Preuve:** (voir [26]).

**Théorème A.7** ([32]): Soient  $E$  un espace topologique,  $F$  un espace métrique et  $\{f_n\}$  une suite d'applications de  $E$  dans  $F$  également continues (on dit encore que la suite est équicontinue) et converge simplement vers  $f$  sur  $E$ , alors  $f$  est continue et la convergence est uniforme sur tout compact de  $E$ .

**Proposition A.2** : Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions à une variable réelle  $t$ , à valeurs dans un espace de Banach et indéfiniment différentiables.

Si  $f$  est linéaire alors on a :

$$f^{(n)}(t) = \begin{cases} f(1) & \text{pour } n = 1 \\ 0 & \text{pour } n > 1 \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}^\star)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{d^n}{dt} [f(g(t))] = f \left[ \frac{d^n}{dt} g(t) \right] \quad (3.3.36)$$

**Preuve:** 1) Pour  $n = 1$  on va utiliser directement la définition de dérivation des fonctions à une variable réelle  $t$ , à valeurs dans un espace de Banach, on a alors

$$\begin{aligned} \forall t \in D_f : \quad f'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) + f(h) - f(t)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot f(1)}{h} = f(1). \end{aligned}$$

Pour  $n > 1$  le résultat est évident car  $f(1)$  est indépendant des valeurs de  $t \in D_f$ .

2) Le second résultat sera prouvé par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$  et en utilisant le premier résultat et un résultat classique sur la dérivée composée de deux fonctions i.e

$$[f(g(t))]' = f'[g(t)].g'(t)$$

Il est clair que, pour  $n = 0$ , (3.3.36) est satisfait. Supposons qu'elle est vérifiée jusqu'à le rang  $n$  et démontrons la pour  $n + 1$ . On a

$$\begin{aligned} \frac{d^{n+1}}{dt} [f(g(t))] &= \left( \frac{d^n}{dt} [f(g(t))] \right)' \\ &= \left( f \left[ \frac{d^n}{dt} g(t) \right] \right)' \\ &= f' \left[ \frac{d^n}{dt} g(t) \right] \cdot \left[ \frac{d^n}{dt} g(t) \right]' \\ &= f(1) \cdot \frac{d^{n+1}}{dt} g(t) = f \left[ \frac{d^{n+1}}{dt} g(t) \right]. \end{aligned}$$

ce qui prouve (3.3.36).

**Définition A.1:** On dit que le problème (1.1.2) est bien posé, au sens de Hadamard, s'il admet une solution et une seule et si on a la propriété de stabilité linéaire suivante (on dit que la solution dépend continuellement des données) :

$$\exists c > 0, \forall L \in V', \quad \|u\| \leq c \|L\|_{V'}$$

**Théorème A.10 (Lax-Milgram)** ([36]): Soit un espace de Hilbert  $V$  sur  $\mathbb{R}$ , muni d'une norme notée  $\|\cdot\|$ , et une forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  continue sur  $V \times V$  et  $V$ -elliptique, c'est à dire une forme bilinéaire pour laquelle il existe deux constantes  $M > 0$  et  $\alpha > 0$  telles que

$$\begin{aligned} \forall u \in V, \quad \forall v \in V, \quad a(u, v) &\leq M \|u\| \|v\|, \\ \forall v \in V, \quad a(v, v) &\geq \alpha \|v\|^2. \end{aligned}$$

et soit une forme linéaire  $L$  continue sur  $V$ , alors que, le problème

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in V \text{ tel que} \\ a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V \end{cases}$$

admet une solution unique. De plus, l'application linéaire  $L \mapsto u$  est continue de  $V'$  dans  $V$  (plus précisément on a  $\|u\| \leq \frac{1}{\alpha} \|L\|_{V'}$ ). Ce problème est donc bien posé.

On montre aussi que l'opérateur associé  $A \in \mathcal{L}(V, V')$  est un isomorphisme de  $V$  sur  $V'$ .

**Définition A.2**([4]):  $V$  et  $W$  étant deux espaces de Hilbert.

Soit une application  $\mathcal{L} : V \times W \longrightarrow \mathbb{R}$ .

On dit que  $(u, p) \in V \times W$  est un point selle de l'application  $\mathcal{L}$  si

$$\forall (v, q) \in V \times W, \quad \mathcal{L}(u, q) \leq \mathcal{L}(u, p) \leq \mathcal{L}(v, q).$$

**Lemme A.1**([4]):  $(u, p)$  est un point selle de l'application  $\mathcal{L}$  si et seulement si

$$\sup_{q \in W} \mathcal{L}(u, q) = \inf_{v \in V} \sup_{q \in W} \mathcal{L}(v, q) = \sup_{q \in W} \inf_{v \in V} \mathcal{L}(v, q) = \inf_{v \in V} \mathcal{L}(v, p).$$

**Définition A.3** (Courbure d'une courbe): On suppose que l'on a une courbe paramétrée de classe  $C^2$ . On note  $s$  l'abscisse curviligne sur la courbe,  $M(s)$  le point d'abscisse  $s$ ,  $\vec{T}(s)$  le vecteur tangent au point d'abscisse  $s$  et  $\vec{N}(s)$  le vecteur normal.

Alors la courbure de cette courbe en un point quelconque  $M(s)$  est le réel  $K(s)$  définie par

$$\frac{d\vec{T}(s)}{ds} = K(s) \cdot \vec{N}(s)$$

C'est une quantité qui caractérise la forme d'une courbe et son degré de flexion, d'incurvation.

Il est facile de voir que :

- $K(s) = 0$  si et seulement si la courbe est un segment de droite ou une droite.
- $K(s) = K$  (constante) si et seulement si la courbe est un cercle ou un arc de cercle.

**Définition A.4** (coordonnées barycentriques)

Les coordonnées barycentriques d'un point  $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$  par rapport aux sommets  $a_1, a_2, a_3$  d'un triangle  $K$  sont les fonctions  $\lambda_i = \lambda_i(\underline{x})$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , telles que

$$\lambda_i \in \mathbf{P}_1 \quad \lambda_i(a_j) = \delta_{ij} \text{ (symbole de Kronecker), pour } 1 \leq i, j \leq 3,$$

Les coordonnées barycentriques ont les propriétés suivantes :

$$\sum_{i=0}^3 \lambda_i = 1, \quad p = \sum_{i=0}^3 p(a_i) \lambda_i, \quad \forall p \in \mathbf{P}_1.$$

**Définition A.5** (fonction “bulle”)

Soient  $\lambda_1^K, \lambda_2^K, \lambda_3^K$  les coordonnées barycentriques par rapport à un triangle  $K$ . On note  $\mu^K$  la fonction “bulle” associée au triangle  $K$  et définie sur  $\bar{\Omega}$  (où  $K \subset \bar{\Omega}$ ) par

$$\mu^K = \begin{cases} \lambda_1^K \lambda_2^K \lambda_3^K & \text{sur } K, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

On a :  $\mu|_K^K \in \mathbf{P}_3$  (car les  $\lambda_i \in \mathbf{P}_1$ , d’où, en se référant à la forme de son graphe, le terme de fonction “bulle”). Il est facile de voir aussi que  $\mu^K = 0$  sur le bord  $\partial K$  et qu’elle est continue sur  $\bar{\Omega}$ .  $\square$

Nous donnons ici sans démonstration un résultat d’interpolation locale qui est largement utilisé.

**Proposition A.3 (Interpolé de Clément, [35])**

Soit  $\Omega$  un domaine de  $\mathbb{R}^d$ . Soit  $(\tau_h)_h$  une famille régulière de maillages affines de  $\Omega$ . Soit  $V_h$  un espace d’approximation construit avec  $\tau_h$  que nous supposons  $H^1$ -conforme. Soit  $K$  un élément de  $\tau_h$  et notons  $V(K)$  l’ensemble de tous les éléments de  $\tau_h$  qui ont une intersection non vide avec  $K$ . Soit  $I$  une face de  $K$  et notons  $V(I)$  l’ensemble de tous les éléments de  $\tau_h$  qui ont une intersection non vide avec  $I$ .

Il existe un opérateur  $C_h : H^1(\Omega) \longrightarrow V_h$  et une constante  $c > 0$  tels que

$$\forall h, \forall K \in \tau_h, \quad \begin{cases} \|v - C_h v\|_{0,K} \leq ch_K \|v\|_{1,V(K)} \\ \|v - C_h v\|_{0,I} \leq ch_I^{\frac{1}{2}} \|v\|_{1,V(I)}. \end{cases}$$

De plus, si la famille  $(\tau_h)$  est régulière, on a

$$\forall h, \forall K \in \tau_h, \quad \|v - C_h v\|_{1,K} \leq ch_K \|v\|_{1,V(K)}.$$

# Bibliographie

- [1] **A. Kirmse**, Bending-dominated deformation of thin spherical shells : analysis and finite- element approximation. *SIAM J. Numer Anal.*, 30(4) : 1015-1040, (1993).
- [2] **A. Blouza, F. Brezzi et C. Lovadina**, Sur la classification des coques linéairement élastiques. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics*, vol. 328, issue 9, pp. 831-836, (1999).
- [3] **A. Habbal & D. Chenais**, Deterioration of finite element method for arche structures when thickness goes to zero. *Numer.Math.* 62, p. 321-341. (1992).
- [4] **A. Ern & J. L Guermont**, *Elément finis : théorie, application, mise en œuvre*. Springer (2002)
- [5] **D. Choï**, Sur la rigidité géométrique des surfaces. Application à la théorie des coques minces. Thèse de doctorat à l'université de Paris 6, (1995).
- [6] **D. Choï, F. J. Palma, E. Sanchez-Palencia, M. A. Vilarino**, Membrane locking in the finite element computation of very thin elastic shells, *Math. Model. Numer. Anal.*, 32(2), p. 131-152. (1998).
- [7] **D. Chenais & J. C. Paumier**, On locking phenomenon for a class of elliptic problems, *Numer. Math.*, 67, p. 427-440. (1994)
- [8] **D.N. Arnold**, Discretisation by finite element of a model parameter dependent problem, *Numer.Math.*, 37: 405-421, (1981).

- 
- [9] **D.N. Arnold & F. Brezzi**, Locking-free finite element methods for shells, *Maths. Comp.* 66, 1-14. (1997).
- [10] **D.N. Arnold & R. Falk**, Asymptotic analysis of the boundary layer for the Reissner-Mindlin plate model. *SIAM J. Math. Anal.* 27: p.486-514, (1996).
- [11] **D. Chapelle & R. Stenberg**, Stabilized finite element formulations for shells in a bending dominated state, *SIAM J. Numer. Anal.*, 36(1) : 32-73, (1998).
- [12] **D. Chapelle**, Étude des phénomènes de verrouillage numériques pour les problèmes de coque minces. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie (Paris 6), 1996. Laboratoire des Ponts et Chaussées.
- [13] **E. Sanchez-Palencia**, Statique et dynamique des coques minces. I : cas des flexion pure non-inhibée. *Compt. Rend. Acad. Sci. Paris, série I* , 309, p. 411-417 (1989).
- [14] **E. Sanchez-Palencia**, Statique et dynamique des coques minces. II : cas des flexion pure inhibée, approximation membranaire. *Compt. Rend. Acad. Sci. Paris, série I*, 309, p. 531-537 (1989).
- [15] **F. Kikuchi**, Accuracy of some finite element models for arch problems. *Comput. Methods Appl. Math. Enginer.* 35, p. 315-345. (1982).
- [16] **F. Brezzi**, On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from lagrangian multipliers *R.A.I.R.O.* p 129-151. R2. (1974).
- [17] **F. Brezzi & M. Fortin**, *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. Springer-Verlag, (1991).
- [18] **F. Brezzi, M. Fortin & R. Stenberg**, Error analysis of mixed-interpolated elements for Reissner-Mindlin plates. *Math. Models and Methods in Applied Sciences 1*: p125-151. (1991).
- [19] **I. Babuška & M.Suri**, On locking and robustness in the finite element. *SIAM Jour. Numer. Anal.*, 29, p. 1261-1293 (1992).

- 
- [20] **I. Babuška & M.Suri**, Locking effects in the finite element approximation of elasticity problems. Numer.math.1992
- [21] **J. L. Lions**, Perturbations singulières dans les problèmes aux limites et en contrôle optimal, Springer-Verlag, (1973).
- [22] **J. Pitkäranta**, The Problem of membrane locking in finite element analysis of cylindrical shells. Numer.Math, 61, p. 523-542, (1992).
- [23] **J. H. Bramble & Tong Sun**, A Locking-free finite element method for Naghdi shells.
- [24] **J. Sanchez-Hubert & E. Sanchez-Palencia**, Coques élastiques minces : Propriétés asymptotiques. Masson 1997.
- [25] **J. Nečas**, Sur une méthode pour résoudre les équations aux dérivées partielles de type elliptique, voisine de la variationnelle. Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa, 16: 305-326, (1962).
- [26] **Henri. Cartant**, Calcul différentiel , collection méthodes (1967)
- [27] **K. Bathe, D. Chapelle & Lee**, A shell problem highly sensitive to thickness changes. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 57(8): 1039-1052, (2003).
- [28] **M. Bernardou, P.G. Ciarlet & B. Miara**, Existence theorems for two-dimensional linear shell theories, J. Elasticity 34 (1992) 111-138.
- [29] **M. Bernardou**, Méthodes d'éléments finis pour les problèmes de coques minces. Masson 1994.
- [30] **M. Suri**, A reduced constraint  $hp$  finite element method for shell problems. Mathematics of computation. volume 66, number 217, pages 15-29. (1997).
- [31] **Modélisation, analyse et contrôle pour le calcul des structures**, Rapport d'activité (2002). I.N.R.I.A. (France).

- [32] **L. Schwartz**, ANALYSE : Topologie générale et analyse fonctionnelle. Hermann, Paris (1980).
- [33] **P. Raviart & J. Thomas**, Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles. Dunod. Paris (1998).
- [34] **P. G. Ciarlet**, The finite element method for elliptic problems. North-Holland Amsterdam. (1978).
- [35] **P. Clément**, Approximation by finite element functions using local regularisation. RAIRO, Anal. Numér., 9: p. 77-84 (1975).
- [36] **R. Dautray & J.L. Lions**, Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques. Masson , Paris. (1988).
- [37] **S. Brenner & L. Scott**, The mathematical theory of finite element methods. Springer-Verlag, New-York, (1991).
- [38] **T. Belytschko, H. Stolarski, W.K. Liu, N. Carpenter and J. S. J. Ong**, Stress projection for membrane and shear locking in shell finite elements, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 51, p. 221-258 (1985).
- [39] **V. Lods & C. Mardare**, Détermination de l'espace inextensionnel d'une coque linéairement élastique, partiellement encastrée et de surface moyenne uniformément elliptique. compt. Rend. Acad. Sci. Paris, t. 324, série I, p. 1315-1320, (1997).
- [40] **Grégoire Allaire**, Analyse numérique et optimisation : une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique. Les éditions de l'école polytechnique, France. (Mai 2006).