UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matière

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : EDP et Analyse Numérique

Par :KHAOULA BOULIFA

Théme

Existence Globale Des Solution D'un Système De Reaction-Diffusion..

Soutenu publiquement le : 12/06/2014

Devant le jury composé de :

Yacine Gurboussa	M.A. universié KASDI Merbah - Ouargla	Président
Salim Badija	M. A. université KASDI Merbah - Ouargla	Examinateur
Med Tayeb Ben Moussa	M.A. université KASDI Merbah - Ouargla	Rapporteur

Dédicaces

Merci **Allah** (mon dieu) de m'avoir donné la capacité d'écrire et de réfléchir, la force d'y croire, la patience d'aller jusqu'au bout du rêve et le bonheur de lever mes mains vers le ciel et de dire " Ya Kayoum "

Je dédie ce modeste travail à celle qui m'a donné la vie, le symbole de tendresse, qui s'est sacrifiée pour mon bonheur et ma réussite, à ma mère

A mon père, école de mon enfance, qui a été mon ombre durant toutes les années des études, et qui a veillé tout au long de ma vie à m'encourager, à me donner l'aide et à me protéger.

A mon fiancé, qui ma donné soutien moral.

A mes adorables sœurs

.

A mes frères .

A toute la grande famielle **Boulifa**

A mes amies .

A tous ceux qui me sont chères .

A tous ceux qui m'aiment .

A tous ceux que j'aime .

Je dédie ce travail .

Remerciement

Au premier temps, nous tenons à remercier notre dieu, notre créateur, qui nous a donné la force pour réaliser ce travail.

Nous tonons à remercier mon promoteur Mr .Ben moussa med tayeb pour avoir accepté à suivre la réalisation de notre étude, pour son aide pour les excellons conseils tout le long de la fin de notre cycle de recherche et que ces modestes lignes témoignant de notre grande gratitude .

Nous remercions également les membres de jury d'avoir accepté de juger ce travail :

Monsieur Yacine Gurboussa , Maitre de conférence à l'université d'Ouargla. Pour m'avoir accepté la présidence de mon jury.

Monsieur Salim Badija, Maitre assistante à l'université d'Ouargla. D'avoir accepté d'examiner ce modeste travail.

Nous ne saurions jamais oublié tous les étudiants de 2ième année Master Mathématiques.

Enfin nous remercions nos familles qui nous port soutien moral.

Table des matières

Introduction

Les systèmes de reaction-diffusion joue un role très important dans les domaine de médecine et l'envirnoment,chimi,puisque la modilisation montre que plusieure des maladies ,épidimie, polution par exemple SIDA , ont des modèles mathématiques sous forme de reaction-diffusion .

Ce travail est une contribution à l'étude de l'existence globale et du comportement asymptotique des solutions de systémes de réaction-diffusion du type suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u + F(u), sur(0, +\infty) \times \Omega \\ \\ \qquad u(0, .) = u_0(.), \quad sur\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière régulière $\partial\Omega$, $u(t, .)$ est une fonction définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, D est une matrice carrée d'ordre m définie positive et diagonalisable appelèe matrice de diffusion .

avec Δ designe le Laplacien usuel.

F est une fonction localement lipschitzienne de $\mathbb{R}^m$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ appelée terme de réaction qui est le résultat de toutes les interactions entre les composantes de u.

On ajoutera une condition aux limites sur la frontière $\partial\Omega$ de manière à ce que le problème (2.1) soit bien posé.

Dans ce travail on a suit les pas de Kiran Mokhtar par son article publié en(1993) ,(Annaba)

Nous essayon de refaire les calcul, montrer les pasages de plus nous ajoutons à l'aide la proposition (11) la démonstration de la positivité des solution qui est une étape essentielle dans ce genre de système.

Dans le cadre de cette problématique, notre travail consiste à l'étude de l'existence globale et du comportement asymptotique des solutions d'un système de réaction diffusion à matrice de diffusion pleine.

Comme les équations de réaction-diffusion font partie du domaine des équations d'évolution

Ce travail est organisé de la façon suivante :

Dans le premier chapitre, nous commençons par rappeler briévement quelques rappele et notions générales. Ensuite nous présentons certains résultats.

chapitre 2, nous avons abordé la théorie des équations d'évolution et Le théorème de Hille-Yosida qu'est une alternative au théorème de Cauchy-Lipschitz pour la résolution du problème de Cauchy.

Chapitre 3,nous nous intéressons aux problèmes d'évolution semi-linéaires et en particulier à l'équation de la chaleur semi-linéaire qu'est un exemple d'habitude d'une équation parabolique.

Chapitre 4,constitue l'objet principal de notre mémoire a été exclusif à l'étude d'un système de réaction-diffusion à matrice de diffusion pleine.

Nous terminons ce travail par une conclusion.

Modèle Mathématique

A ce titre on peut citer comme exemple un phénomène épidémiologique notée par FIV(Felire Immunde Ficienayvirus) modélisant la propagation d'une épidémie dans une population de chats. Celle ci est supposée etre divisée en plusieurs classes, u,w, v, z, représentant successivement la classe des males susceptibles, des males infectés, des femelles susceptibles et des femelles infectées. Le modèle est le suivant :

$$u_t - d_1\Delta u = -\lambda_1\varphi_1(u)\omega^\gamma - \lambda_2\varphi_2(u)z^\eta$$

$$\omega_t - d_2\Delta\omega = \lambda_1\varphi_1(u)\omega^\gamma - \lambda_2\varphi_2(u)z^\eta - a\omega, \quad x \in \Omega, \quad t > 0$$

$$v_t - d_3\Delta v = \lambda_3\varphi_3(v)\omega^\sigma - \lambda_4\varphi_4(v)z^\rho$$

$$z_t - d_4\Delta z = \lambda_3\varphi_3(v)\omega^\sigma - \lambda_4\varphi_4(v)z^\rho - az$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial \omega}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial \eta} = 0 \quad x \in \Omega, \quad t > 0$$

$$(u, \omega, v, z)(x, 0) = (u_0, \omega_0, v_0, z_0) \quad x \in \Omega$$

où Ω est un ouvert borne de R^n , d_i, λ_i , $i = 1, 2, 3, 4$, a et λ,γ,ρ,σ des coefficients tels que $d_i > 0$, $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, $a > 0$ et λ,γ,ρ,$\sigma \geq 1$.

Les fonctions φ_i, $i = 1, 2, 3, 4$ sont continues et positives sur Ω.

u_0, ω_0, v_0, z_0 sont les données initiales du système supposées comme fonctions continues positives et uniformément bornées sur Ω.

Le facteur principal favorisant la diffusion de cette épidémie est le contact sexuel.

L'étude de ce système par W. E.Fitzgibbon, M. E.Parrott et G. F.Webb a permis de montrer que ce phénomène n'est pas endémique tant q'il n'ya pas de source de succeptibles.

L'objectif primordial est d'étudier la propagation de l'épidémie.

Ainsi nous avons à résoudre d'abord les questions relatives à l'existence et l'unicité des solutions puis à étudier leur comportement à l'infini quand ces solutions sont partout définies.

Chapitre 1

Notation et Notion Générales

l'objectif de ce chapitre est de rappeler quelque notions et résultats préliminaires qui utiles dans les chapitres ulterieures.

Opérateurs Différentiels :

Soit n un entier,on note $x = (x_1....x_n)$ un point(ou vecteur) de $\mathbb{R}^n$.

On appelle champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$ une application: $V : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ qui à $x(x_1, ...x_n)$ associé $v(x) = (v_1(x), ...v_n(x))$

Pour une fonction $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, son gradient est le champ de vecteurs définie par : $gradu(x) = \nabla u(x) = (\dfrac{\partial u}{\partial x_1}(x), ..., \dfrac{\partial u}{\partial x_n}(x))$

Pour une champ de vecteurs $v : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ on appelle divergence de V la fonction définie par : div $V(x) = \dfrac{\partial V}{\partial x_1}(x) + ... + \dfrac{\partial V}{\partial x_n}(x)$

On appelle laplacien d'une fonction $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :
$\Delta u(x) = div(\nabla u)(x) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x) + ... + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}(x).$

Espace Fonctionnels :

$C(\Omega)$ designe l'espace des fonctions continues et bornées sur Ω muni de la norme, $|u|_{C(\Omega)} = \max_{x\in\Omega} |u(x)|$

$C^k(\Omega), k \in \mathbb{N}$ désigne l'espace des fonction k fois continument différentiables sur Ω et on écrit : $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k\geqslant 0} C^k(\Omega)$

$C_0(\Omega)$ l'espace des fonctions continues à support compact dans Ω.

$L^p(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions u mesurables sur Ω, $1 \leq p \leq \infty$ telle que : $\int_\Omega |u|^p dx < \infty$.
Muni de la norme :

$$\|u\|^p_{L^p(\Omega)} = \int_\Omega |u|^p dx \qquad .u \in L^P(\Omega)$$

$L^\infty(\Omega)$ désigne l'espace de fonctions u mesurables et vérifient $|u| \leq C$ pp (presque partout) sur Ω.où C est une constante positive
muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty}(\Omega) = suppss|u(x)| = inf\{C, |u| < C \ \ pp \ \ sur \ \ \Omega\}$$

On définit les espace $L^p(0,T,X)$,$1 \leq p \leq \infty$ et $L^\infty(0,T,X)$ comme suite

$$L^p(0,T,X) = \{u : [0,T] \longrightarrow X mesurable, \int_0^T \|U\|^p_X dt < \infty\}$$

muni de la norme $\|u\|^P_{L^p(0,T,X)} dt = \int_0^T \|u\|^P_X dt$.

$$L^\infty(0,T,X) = \{u : [0,T] \longrightarrow X mesurable, \underset{t\in(0,T)}{supess} \|u\|_X < \infty\}$$

muni de la norme $\|u\|^p_{L^\infty(0,T,X)} = \underset{t\in(0,T)}{supess} \|u\|_X$
Naturellement on a :

$$L^P(0,T,L^P(\Omega)) = L^P((0,T)\times\Omega) \quad 1 \leq p \leq \infty$$

Pour $m \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq p \leq \infty$, les espaces de sobolev $H^m(\Omega)$ et $W^{m,p}(\Omega)$ sont définies comme suite :

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), D^\alpha u \in L^2(\Omega) \; pour \; tout \; \alpha \in \mathbb{N}^n \; vrifiant \; |\alpha| \leq m\}$$

muni de la norme :

$$\|u\|^2_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^2 dx = \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

Par exemple

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \quad , 1 \leq i \leq n\}$$

muni de la norme :

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega |u|^2 dx + \int_\Omega \sum_{i=1}^n |\frac{\partial u}{\partial x_i}|^2 dx = \int_\Omega |u|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$$

$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega), D^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq m\}$

muni de la norme :

$$\|u\|^p_{m,p} = \sum_{\alpha \leq m} \|D^\alpha u\|^P_{L^P(\Omega)}$$

Où $D^\alpha = \dfrac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+....+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} .... \partial x_n^{\alpha_n}}, |\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ est la dérivée au sens des distribution.

Comme exemple

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega), u' \in L^p(\Omega)\}$$

muni de la norme $\|u\|_{1,p} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^P}, u \in W^{1,p}(\Omega)$

$D(\Omega)$ désigne l'espace des fonction de C^∞ qui a support compact sur Ω.

$H^m(\Omega) = W^{n,2}(\Omega)$

$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$.

$H^m_0 = H^{m,2}_0$.

Formule de Green :

Soit Ω un ouvert borné de fontière régulière $\partial\Omega$,$V(x)$ la normale extérieure au point x. Soient u une fonction de $H^2(\Omega)$ et V une fonction de $H^1(\Omega)$ Alors la formule de Green s'écrit :.

$$\int\limits_{\Omega}(\Delta u)vdx = \int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial V}Vd\sigma - \int\limits_{\Omega}\nabla u\cdot\nabla vdx$$

Inégalité de Gronwall :

Soit $\varphi \in L^{\infty}(0,T), \varphi > 0$ et $\lambda \in L^1(0,T)$, $\lambda \geq 0$
s' $\exists c_1, c_2 \geq 0$ tels que $\varphi(t) \leq c_1 + c_2\int\limits_0^t \lambda(s)\varphi(s)ds$ pp sur $[0,T]$.
Alors :

$$\varphi(t) \leqslant c_1 exp(c_2\int\limits_0^t \lambda(s)ds) \qquad pp\, sur\, [0,T] \tag{1.1}$$

Démonstration

$\psi(t) = c_1 + c_2\int\limits_0^t \lambda(s)\varphi(s)ds = c_1 + c_2(F(t) - F(0))$
$\Rightarrow \psi'(t) = c_2\varphi(t)\lambda(t)$

D'aprés (1) on aurait

$\psi'(t) \leqslant c_2\psi(t)\lambda(t)$
$\Rightarrow \dfrac{\psi'(t)}{\psi(t)} \leqslant c_2\lambda(t)$

$\Rightarrow ln\psi(t) - ln\psi(0) \leqslant c_2\int\limits_0^t \lambda(s)ds$

$\Rightarrow \psi(t) \leqslant exp(c_2\int\limits_0^t \lambda(s)ds)\psi(0)$

avec $ln\psi(0) = c_1$ D'ou $\psi(t) \leqslant c_1 exp(c_2\int\limits_0^t \lambda(s)ds)$
comme $\varphi(T) \leqslant \psi(t)$.

Définition 1 *On dit q'une fonction $F : E \longrightarrow E$est lipschitizienne sur les bornés de E.Si pour tout $r > 0$,il existe une constant M_r telle que : $\forall u, v \in B(0,r)$,$|F(u) - F(v)|_E \leq M_r\,|u - v|_E$*

Semi-groupe de contraction :

Définition 2 *On appelle semi-groupe de contractions une famille à un paramètre* $S(t)_{t\geq 0}$ *d'opérateurs linéaires continus sur E espace de Banach telle que :*

1. $\|S(t)\| = 1$ pour tout $t \geq 0$.

2. $S(0) = Id$.

3. $S(t+s) = S(t) \circ S(s)$ pour tous $t, s \geq 0$.

4. Pour tout $u_0 \in E$,$S(t)u_0 \in C([0, +\infty[)$.

L'opérateur $u_0 \in E \longrightarrow S(t)u_0 = u(t)$ a un effet régularisant sur la donnée initiale.

Remarque 3 *: Sur* $E = \mathbb{R}^N$*, l'opérateur A est une matrice de* $M_N(\mathbb{R}).S(t) = e^{tA}$ *définit un semi-groupe. L'exponentielle d'une matrice est définie par une série entière donc on peut écrire* $S(t)$ *comme suit :*

$$S(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$$

Définition 4 *Soit A un opérateur linéaire de X dans X .*
On dit que A est accrétif si $Re < Au, u > \geq 0$ *pour tout* $u \in D(A)$*. De plus si* $\forall f \in X$,$\exists u \in D(A)$ *telque* $u + \lambda Au = f$ *i.e .* $R(I + \lambda A) = H$ $\forall \lambda > 0$ *alors on dit que A est maximal accrétif (m-accrétif).*

Chapitre 2

Equation D'évolution

2.1 Introduction

On s'intéresse à la résolution du problème d'évolution :

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = 0, sur[0, \infty[\\ \\ \quad u(0, x) = u_0. \end{cases} \tag{2.1}$$

où $u = u(t, x)$, A est un opérateur défini sur un espace (E) de Banach.

Le théorème suivant permet d'assurer l'existence de la solution de ce type d'équation ([1])

2.2 Théorème de Hille Yosida

Nous étendons maintenant la téorème de Hille Yosida

Théorème 5 (Hille-Yossida) *Soit E un espace de Banach et soit $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ un opérateur linéaire m-accrétif.*

1. *Alors pour tout $u_0 \in D(A)$, il existe une unique fonction $u \in C^1([0, +\infty[, E) \cap C([0, +\infty[, D(A))$ telle que :*

$$
\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = 0, \quad sur[0, \infty[\\ \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{2.2}
$$

De plus en on a :

pour tout $t \geq 0, \|u(t)\| \leq \|u_0\|$ *et* $\|\dfrac{du}{dt}(t)\| = \|Au(t)\| \leq \|Au_0\|$

2. *Si* $u(t)$ *est la solution de (2.2), alors l'application*

$$
\begin{aligned} S(t) : D(A) &\rightarrow D(A) \\ u_0 &\rightarrow u(t) \end{aligned}
$$

vérifier :

(i) $S(t)$ *est une application linéaire continue de norme inférieure ou égale à* 1 *pour tout* $t \geq 0$ *.*

(ii) $S(t)$ *se prolonge à* E *tout entier.*

(iii) $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ *définit un semi-groupe sur* E*.*

(iv) *L'application :*

$$
\begin{aligned} [0, +\infty[&\rightarrow E \\ t &\rightarrow S(t)u_0 \end{aligned}
$$

est continue sur $[0, +\infty[$*.*

Dans la démonstration du théorème nous serons amenés a considérons á nouveau le problème (P_λ) :

$$
(P_\lambda) \begin{cases} \dfrac{du_\lambda}{dt} + A_\lambda u_\lambda = 0, sur[0, +\infty[\\ \\ u_\lambda(0) = u_0. \end{cases} \tag{2.3}
$$

u_λ designe la solution du problème approché et A_λ designe la régularisée de Yosida de A . Pour $u_0 \in E$,comme $A_\lambda \in L(E)$, Le problème ci dessus posède une unique solution d'après le théorème de cauchy-lipschitz. Notons S_λ le semi groupe associé à u_λ , $u_\lambda(t) = S_\lambda(t)u_0$.

Voici maintenant deux lemes préliminaire à la démonstration du théorème :

Lemme 1 *: les opérateur A_λ et $S_\mu(t)$ commutent .*

Démonstration : Soit $u_0 \in E$ on pose $v(t) = S_\mu(t)A_\lambda u_0$ on a donc :

$$\begin{cases} v'(t) + A_\mu v(t) = 0 \\ \\ v(0) = A_\lambda u_0. \end{cases} \tag{2.4}$$

A-t-on $v(t) = A_\lambda S_\mu(t)u_0$? On a :

$$\begin{cases} u'(t) + A_\mu u(t) = 0 \\ \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

On pose $w(t) = A_\lambda u(t)$. Si $w(t)$ vérifie (2.4) . Alors on aura le résultat. On a
$w'(t) = A_\lambda u'(t) = -A_\lambda A_\mu u(t) = -A_\mu A_\lambda u(t) = -A_\mu w(t)$
et $w(0) = A_\lambda u_0$. Donc $w'(t) + A_\mu w(t) = 0$.

Lemme 2 *Soit $u_0 \in E$ et $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ un opérateur linéaire et m-accrétif.Alors si u_λ est solution du probleme approché (2.3) on a :*

1. $\|u_\lambda(t)\| \leq \|u_0\|$ *et donc* $\|S_\lambda(t)\| \leq 1 \qquad \forall t \geq 0$

2. $\|u_\lambda(t) - u_\mu(t)\| \leq t\|A_\lambda u_0 - A_\mu u_0\| \qquad \forall t \geq 0 \qquad \forall \lambda, \mu \geq 0.$

Démonstration :

1 - on considère le problème approché comme $A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(Id - J_\lambda)$ ou $J_\lambda = (I + AI)^{-1}$ est la resolvante associée a A , on a que $\frac{du_\lambda}{dt} + \frac{1}{\lambda}u_\lambda(t) - \frac{1}{\lambda}J_\lambda u_\lambda(t) = 0$
Posons $v(t) = e^{\frac{t}{\lambda}}u_\lambda$.Alors on a que $v'(t) = e^{\frac{t}{\lambda}}(u_{\lambda t} + \frac{1}{\lambda}u_\lambda(t))$ donc $v'(t) = \frac{1}{\lambda}J_\lambda v(t)$ et on remplace ceci dans l'expression de v', il vient que :

$$v(t) - v(0) = \int_0^t \frac{1}{\lambda} J_\lambda v(s) ds$$

donc comme $v(0) = u_0$ on a

$$\|v(t)\| \leq \|u_0\| + \int_0^t \frac{1}{\lambda}\|v(s)\| ds$$

car$\|J_\lambda\| \leq 1$ et finalement implique le lemme de Gronwall que
$\|v(t)\| \leq \|u_0\|e^{\frac{t}{\lambda}}$ et donc $\|u_\lambda(t)\| \leq \|u_0\|$.

2 - on pose $\varphi(t) = S_\lambda(T-t)S_\mu(t)u_0$. On a donc

$$\varphi(T) = S_\lambda(0)S_\mu(T)u_0 = u_\mu(T)$$

$$\varphi(0) = S_\lambda(T)S_\mu(0)u_0 = u_\lambda(T).$$

Par suite il vient que si $\varphi \in C^1([0,T],E)$ alors :

$$\|\varphi(T) - \varphi(0)\| \leq \int_0^T \|\varphi'(s)\| ds$$

et on utilisant le fait que $A_\lambda u_\lambda(t) = A_\lambda S_\lambda(t)u_0 = -u_{\lambda t}$ et que A_λ et $S_\mu(t)$ commutent on a :

$$\varphi'(t) = -(-A_\lambda S_\lambda(T-t)S_\mu(t)u_0 + S_\lambda(T-t)(-A_\mu S_\mu(t)u_0)$$

$$\varphi'(t) = S_\lambda(T-t)S_\mu(t)(A_\lambda u_0 - A_\mu u_0) \qquad \forall t \geq 0.$$

En effet on a :

$$\frac{\varphi(s+h) - \varphi(s)}{h} = \frac{S_\lambda(T-s-h)S_\mu(s+h)u_0 - S_\lambda(T-s)S_\mu(s)u_0}{h}$$

et ceci est égal à :

$\frac{1}{h}[S_\lambda(T-s-h)S_\mu(s+h)u_0 - S_\lambda(T-s-h)S_\mu(s)u_0$

$$+S_\lambda(T-s-h)S_\mu(s)u_0 - S_\lambda(T-s)S_\mu(s)u_0]$$

$$= S_\lambda(T-s-h)S_\mu(s)\left[\frac{S_\mu(h)-I}{h}\right]u_0 - S_\lambda(T-s)S_\mu(s)\left[\frac{S_\lambda(-h)-I}{-h}\right]u_0$$

$$\to -S_\lambda(t-s)S_\mu(s)[A_\mu u_0 - A_\lambda u_0] \qquad quand \qquad h \to 0$$

Donc finalement :

$$\begin{aligned}
\|\varphi(T) - \varphi(0)\| &\leq \int_0^T \|S_\lambda(T-s)S_\mu(s)(A_\lambda u_0 - A_\mu u_0)\| ds \\
&\leq \int_0^T \|S_\lambda(T-s)\|\|S_\mu(s)\|\|A_\lambda u_0 - A_\mu u_0\| ds \\
&\leq T\|A_\lambda u_0 - A_\mu u_0\|.
\end{aligned}$$

en utilisant le fait que $\|S_\lambda(T-s)\| \leq 1$ et $\|S_\mu(s)\| \leq 1$ .On a donc le résultat souhaité.

Nous pouvons maintenant enfin passer à la preuve du théorème de Hille-Yosida. La démonstration comporte sept étapes :

Démonstration de Hille-Yosida

- **Etape1** :On considère le problème approché (P_λ) .On à d'apprè cauchy lipschitz il admettait une et une seule solution u_λ. On considère dans la suite S_λ le semi groupe associé à cette solution.

- **Etape2** :Soit $u_0 \in D(A)$. le but de cette partie et de démontrer que u_λ converge unifomément sur $[0,T]$ vers une fonction $u \in C^1([0,\infty[,E)$.Ceci est immédiat car le lemme 2 entraine que la suit u_λ est de cauchy dans E qui est complet , donc $u_\lambda(t) \longrightarrow u$ dans E uniformément par rapport à $t \in [0,T]$.

- **Etape3** :le premier point du lemme2 entraine par passage à la limite que $\|u(t)\| \leq \|u_0\|$ de plus l'application :

$$\begin{aligned} D(A) &\longrightarrow E \\ u_0 &\longrightarrow S(t)u_0 = u(t) \end{aligned}$$

  est linéaire en tant que limite simple des applications $u_0 \longrightarrow u_\lambda(t)$ qui sont linéaires. De plus$\|S(t)\|_{L(E)} \leq 1$, et $D(A)$ est dense dans E puisque A est m-accrétif donc on peut prolonger ce semi-groupe par densité et continuité à E tout entier, de sorte que $\|S(t)\|_{L(E)} \leq 1$.

- **Etape4** :Soit $u_0 \in E$. Montrons que si $u(t) = S(t)u_0$ alors en fait u est limite uniforme des u_λ par rapport à $t \in [0,T]$, ce qui donnera que $u \in C([0,T],E)$. On utilise le fait que $D(A)$ est dense dans E donc :

$$\forall u_0 \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists y_0 \in D(A), \|y_0 - u_0\| \leq \varepsilon.$$

On cherche donc à majorer $\|S_\lambda(t)u_0 - S(t)u_0\|$, allons y donc gaiement :

$$\begin{aligned}
\|S_\lambda(t)u_0 - S(t)u_0\| &\leq \|S_\lambda(t)u_0 - S_\lambda(t)y_0\| + \|S_\lambda(t)y_0 - S(t)y_0\| \\
&+ \|S(t)y_0 - S(t)u_0\| \\
&\leq \|S_\lambda(t)\|\|u_0 - y_0\| + \|S_\lambda(t)y_0 - S(t)y_0\| \\
&+ \|S(t)\|\|u_0 - y_0\| \\
&\leq 1 \times \varepsilon + \varepsilon + 1 \times \varepsilon
\end{aligned}$$

On peut rendre petit le terme du milieu car $y_0 \in D(A)$ et d'après l'étape 2 on a convergence dans ce cas là de u_λ vers u.Donc finalement :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall t \in [0, T], \exists \lambda_0, \forall \lambda < \lambda_0, \|u_\lambda(t) - u(t)\| \leq 3\varepsilon.$$

On conclut que $u(t) \in C([0, T], E)$ car c'est une limite uniforme d'une suite de fonctions continues.

- **Etape5** : On montre maintenant que pour tout $u_0 \in D(A)$ on a $u \in C^1([0, +\infty[, E) \bigcap C([0, +\infty[, D(A))$. Soit donc $u_0 \in D(A)$. Par définition de u_λ qui est C^1, on a :

$$u_\lambda(t) = u_0 + \int_0^t -A_\lambda u_\lambda(s) ds = u_0 - \int_0^t A_\lambda S_\lambda(s) u_0 ds.$$

D'après le lemme 1 A_λ et $S_\lambda(t)$ commutent pour tout $\lambda > 0$ et pour tout $t \geq 0$,d'où :

$$u_\lambda(t) = u_0 - \int_0^t S_\lambda(s) A_\lambda u_0 ds.$$

Passons à la limite quand λ tend vers 0,on a $u_\lambda(t) \longrightarrow u(t)$ dans E uniformément par rapport à $t \in [0, T]$ d'après l'étape 2. On a aussi :

$$\int_0^t S_\lambda(s) A_\lambda u_0 ds \longrightarrow \int_0^t S(s) A u_0 ds$$

En effet :

$$\begin{aligned}\|S_\lambda(s)A_\lambda u_0 - S(s)Au_0\| &\leq \|S_\lambda(s)(A_\lambda u_0 - Au_0)\| + \|(S_\lambda(s) - S(s))Au_0\| \\ &\leq \|A_\lambda u_0 - Au_0\| + \|(S_\lambda(s) - S(s))(Au_0)\|.\end{aligned}$$

Or $A_\lambda u_0 \longrightarrow Au_0$, $\forall u_0 \in D(A)$ et d'après la quatrième étape on a $(S_\lambda(s) - S(s))(Au_0) \longrightarrow 0$ uniformément car $Au_0 \in E$ donc :

$$\|S_\lambda(s)A_\lambda u_0 - S(s)Au_0\| \longrightarrow 0 \quad quand \quad \lambda \longrightarrow 0$$

et la convergence est uniforme en $t \in [0,T]$ donc on a convergence des intégrales sans problème. Donc à la limite on obtient :

$$u(t) = u_0 + \int_0^t S(s)Au_0 ds.$$

D'après la quatrième étape on a que $S(s)Au_0 \in C([0,T],E)$ d'où $\int_0^T S(s)Au_0 ds$ est une fonction $C^1([0,T],E)$ et par conséquent $u \in C^1([0,T],E)$.De plus :

$$\frac{du}{dt}(t) = S(t)Au_0(t) \qquad\qquad \forall t \geq 0.$$

Ceci reste vrai si $S(t)A = AS(t)$ sur D(A), on a $\forall\lambda > 0$, $\forall t \geq 0$ que $A_\lambda S_\lambda(t)u_0 = A(J_\lambda S_\lambda(t)u_0)$ et

$$\begin{aligned}\|J_\lambda S_\lambda(t)u_0 - S(t)u_0\| &\leq \|J_\lambda(S_\lambda(t)u_0 - S(t)u_0)\| + \|J_\lambda S(t)u_0 - S(t)u_0\| \\ &\leq \|S_\lambda(t)u_0 - S(t)u_0\| + \|J_\lambda S(t)u_0 - S(t)u_0\|\end{aligned}$$

car $\|J_\lambda\|_{L(E)} \leq 1$.

. $S_\lambda(t)u_0 \longrightarrow S(t)u_0$ uniformément sur $[0,T]$

. $J_\lambda S_\lambda(t)u_0 \longrightarrow S(t)u_0$.

On a alors :

$$(J_\lambda S_\lambda(t)u_0, A(J_\lambda S_\lambda(t)u_0)) \longrightarrow (S(t)u_0, S(t)Au_0) \quad quand \quad \lambda \longrightarrow 0.$$

Le graphe de A étant fermé, ceci implique que $S(t)u_0 \in D(A)$ pour tout $t \geq 0$ et $A_\lambda S_\lambda u_0 \longrightarrow AS(t)u_0$, par unicité de la limite on a $AS(t)u_0 = S(t)Au_0$ et donc on en déduit que $u \in C([0, +\infty[, D(A))$ pour tout $u_0 \in D(A)$, donc :

$$\frac{du}{dt}(t) + Au(t) = 0 \qquad\qquad \forall t \geq 0.$$

- **Etape6** :On montre enfin que $\{S(t), t \geq 0\}$ est un semi-groupe. Soit $u_0 \in E$ et $u_{0,n} \in D(A)$ tels que $u_{0,n} \longrightarrow u_0 \quad quand \quad n \longrightarrow \infty$, il vient :

$$\begin{aligned}
\|S_\lambda(t)u_0 - S(t)u_0\| &\leq \|S_\lambda(t)u_0 - S_\lambda(t)u_{0,n}\| + \|S_\lambda(t)u_{0,n} - S(t)u_{0,n}\| \\
&+ \|S(t)u_{0,n} - S(t)u_0\| \\
&\leq 2\|u_{0,n} - u_0\| + \|S_\lambda(t)u_{0,n} - S(t)u_{0,n}\| \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

Donc $S_\lambda(t)u_0 \longrightarrow S(t)u_0$ uniformément sur $[0, T]$ pour tout $T > 0$ quand $\lambda \longrightarrow 0$.
De plus $S_\lambda(t) \circ S_\lambda(s) = S_\lambda(s) \circ S_\lambda(t)$ pour tout $\lambda, t, s \geq 0$, d'où :

$$\begin{aligned}
\|S(t)S(s)u_0 - S(t+s)u_0\| \leq &\quad \| \quad S(t)S(s)u_0 - S(t)S_\lambda(s)u_0\| \\
&+ \quad \|S(t)S_\lambda(s)u_0 - S_\lambda(t)S_\lambda(s)u_0\| + \|S_\lambda(t+s)u_0 - S(t+s)u_0 \\
&\underset{\lambda\to 0}{\longrightarrow} \quad 0.
\end{aligned}$$

Donc $\{S(t), t \geq 0\}$ est en semi groupe de contractions.

- **Etape7** :**Unicité** Soit u une solution de (2.1) et soit $T > 0$. Posons $v(t) = S(T - t)u(t), t \in [0, T]$, alors $v \in C([0, T], D(A)) \cap C^1([0, T], E)$ et :

$$\begin{aligned}
v'(t) &= -AS(T-t)u(t) + S(T-t)u'(t) \\
&= S(T-t)(u'(t) - Au(t)) \\
&= 0, \forall t \in [0, T].
\end{aligned}$$

Donc $v(T) = v(0)$ c'est -à- dire que $u(T) = S(T)u_0$.

Chapitre 3

Equation D'évolution Semi-linéaire

3.1 Introduction

Soient E un espace de Banach, $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ un opérateur linéaire et m-accrétif, $F : E \longrightarrow E$ une application de E dans E.
Nous allons nous intéresser au problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = F(u), sur[0, +\infty[\\ \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{3.1}$$

On prend maintenant un problème semi-linéaire concret pour illustrer la théorie sur les EDP semi-linéaires.

3.2 Equation de la chaleur semi-linéaire

On s'intéresse donc à l'équation de la chaleur avec une donnée $F : X \longrightarrow X$ localement lipschitzienne. Le problème s'énonce ainsi :
On cherche

$$u \in C([0,T], X) \cap C([0,T], H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T], L^2(\Omega)), \Delta u \in C([0,T], L^2(\Omega))$$

tel que :

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = F(u) \\ \\ u(0) = u_0 \in X. \end{cases} \tag{3.2}$$

On a alors :

Proposition 6 *Soit $u_0 \in X$, $T > 0$ et $u \in C([0,T],X)$. Alors u est solution du problème (3.2) si et seulement si u vérifie :*

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)F(u(s))ds. \tag{3.3}$$

3.2.1 Existence locale

On énonce premiérement un résultat d'existence locale :

Théorème 7 *: Pour tout $u_0 \in X$, il existe un unique u défini sur $[0,T]$ solution de (3.2) pour tout $t \in [0,T]$.*
De plus si $T < \infty$ alors $\|u(t)\| \longrightarrow +\infty$ quand $t \longrightarrow T$ (explosion en temps fini).

Démonstration : Soit $u_0 \in X$. La proposition implique que trouver une solution de (3.2) équivaut à trouver u vérifiant (3.3). On applique le théorème d'existence locale suivante **théorème** : Soit $F : E \longrightarrow E$ lipschitzienne sur les bornés. Alors : $\forall u_0 \in E$, $\exists T > 0$, $\exists! u \in C([0;T[,E)$ solution généralisée locale de (3.1). . On pose

$$g : [0,T] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

tel que $F(u)(x) = g(u(x))$. On vérifie que g est lipschitzienne sur les bornés. Montrons donc que :

$$\forall r \forall h, v \in B(0,r), \exists M_r, \|g(t,h) - g(t,v)\| \leq M_r \|h - v\|.$$

Soit $r > 0$, pour tout x, $\|F(h)(x) - F(v)(x)\| = \|g\left(h(x)\right) - g\left(v(x)\right)\|$, or F est localement lipschitzienne donc pour tout $h \in B(0,r)$, il existe V_h et K_h, tels que pour tous $v, w \in V_h$, on a

$$\|F(v)(x) - F(w)(x)\| \leq K_h \|v(x) - w(x)\| \leq \max_r (\sup_{h \in B(0,r)} K_h) \|v(x) - w(x)\|.$$

Donc on peut appliquer le théorème d'existence locale car la constante de Lipschitz est indépendante de h.

3.2.2 Existence globale

Il y a deux types de résultats pour l'éxistence globale. Le premier donne que si F satisfait certaines conditions pour $|u|$ grand, alors toutes les solutions de (3.2) sont globales et le deuxième donne que si F satisfait à certaines conditions pour $|u|$ petit, les solutions seront globales à condition d'avoir de petites données initiales. On considére dans un premier temps $|u|$ grand. On a le théorème suivant :

Théorème 8 *: On suppose qu'il existe des constantes K et C telles que*

$$uF(u) \leq C|u|^2, pour |u| > K.$$

Alors pour tout $u_0 \in X$ la solution de (3.2) donnée par (3.3) est globale.

Démonstration. Montrons que

$$\sup_{[0,T]} \|u(t)\| < +\infty.$$

Ceci donnera que $T = +\infty$ et que la solution est globale. Faisons une estimation d'énergie c'est-à-dire multiplions l'équation par u et intégrons sur Ω , on obtient :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u|^2 = -\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega |F(u)u|.$$

Les intégrales ci-dessus sont bien définies compte tenu de l'espace dans lequel on a choisi u. On scinde la derniére intégrale :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u|^2 = -\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_{\Omega\cap(|u|\leq K)} |F(u)u| + \int_{\Omega\cap(|u|\geq K)} C|u|^2.$$

Le terme $\int_\Omega |\nabla u|^2$ est positif donc :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u|^2 \leq C' + C\int_{\Omega\cap(|u|\geq K)} |u|^2.$$

On a pu majorer la première intégrale par C' puisque u et $F(u)$ sont continues sur un compact. On pose $f(t) = \int_\Omega |u(t)|^2 dt$. On intègre l'inégalité précédente entre 0 et t on obtient que :

$$f(t) - f(0) \leq C't + C\int_0^t f(s)ds.$$

On utilise maintenant le lemme de Gronwall qui donne :

$$f(t) \leq (f(0) + C't)exp(C \int_0^t f(s)ds).$$

De plus $t \in [0, T]$, on obtient finalement la majoration suivante :

$$f(t) \leq (f(0) + C'T)exp(C \int_0^T f(s)ds) < +\infty.$$

On obtient ainsi le résultat souhaité.

Voici maintenant le théorème d'existence globale pour $|u|$ petit.
On notera $\lambda = \inf \{\|\nabla u\|_{L^2}, u \in H_0^1(\Omega), \|u\|_{L^2} = 1\}$.

Théorème 9 *: On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ et $\mu < \lambda$ tels que :*

$$uF(u) \leq \mu|u|^2, \forall |u| \leq \alpha.$$

Alors il existe une constante A telle que si $\|u_0\| \leq \alpha A$, la solution u correspondante de (3.2) est globale et

$$\|u(t)\| \leq A\|u_0\|e^{-(\lambda-\mu)t}, \forall t \geq 0.$$

Démonstration : premiére partie. On multiplie l'équation par u puis on intègre par parties sur Ω et on a :

$$\int_\Omega u_t u dx - \int_\Omega u \Delta u dx = \int_\Omega F(u) u dx$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^2(t)dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 dx = \int_\Omega g(u(t))udx$$

en utilisant la formule de Green. On pose maintenant $f(t) = \int u^2(t)dt$, on a donc :

$$f'(t) = 2\int_\Omega g(u(t))u(t)dx - 2\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + 2\int_{\partial\Omega} u\nabla u.$$

On peut majorer f' comme suit :

$$\begin{aligned} f'(t) &\leq 2\int_\Omega u(t)g(u(t))dx - 2\lambda\int |u(t,x)|^2dx \\ &\leq 2\int_\Omega u(t)g(u(t))dx - 2\lambda f(t). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} f'(t) &\leq -2\lambda f(t) + 2\int_\Omega g(u(t))u(t)dx \\ &\leq -2(\lambda-\mu)f(t) \end{aligned}$$

et en intégrant on a :

$$f(t) \leq e^{-2(\lambda-\mu)t}f(0).$$

Finalement on obtient :

$$\|u(t)\| \leq e^{-2(\lambda-\mu)t}\|u_0\|.$$

Sous certaines hypothèses, on a donc montré l'existence de solutions globales. Cependant, il y a explosion en temps fini pour certaines données initiales, c'est ce que nous allons démontrer dans la suite par des estimations d'énergie.

3.2.3 Explotion en temps fini

Soit $u \in C_0(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Considérons :

$$E(u) = \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \int_\Omega G(u)$$

où

$$G(u) = \int_0^u g(s)ds$$

Lemme 3 *Soient* $T > 0$,$u \in C((0,T), C_0(\Omega)) \cap C((0,T), D(A)) \cap C^1((0,T), L^2(\Omega))$. *Alors, pour tout* $0 < s < t < T$, *on a :*

$$\int_s^t \int_\Omega (\Delta u + g(u))u_t + E(u(t)) = E(u(s)).$$

Démonstration. Soit $u \in C((0,T), C_0(\Omega)) \cap C((0,T), D(A)) \cap C^1((0,T), L^2(\Omega))$. On se ramène au cas où $u \in C^1((0,T), D(A))$ en approchant u par $\frac{1}{h}\int_t^{t+h} J_\lambda u(s)ds$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (\Delta u + g(u))u_t &= \int_\Omega \Delta u u_t + \int_\Omega g(u(t))u_t \\
&= \sum_{j=0}^{n} \int_\Omega \partial_j u \partial_j u_t + \int_\Omega g(u(t))u_t \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\sum_{j=0}^{n} \|\partial_j u\|_0^2\right) + \int_\Omega g(u(t))u_t \\
&= \frac{d}{dt}E(u).
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Lemme 4 *: Soit $u_0 \in C_0(\Omega)$ et soit u la solution correspondante de* (3.2)*. Alors, pour tout $0 < s < t < T(u_0)$, on a :*

$$\forall t \in (0, T(u_0)), \frac{d}{dt}\left(\int_\Omega u(t)^2\right) + 2\int_\Omega |\nabla u|^2 = 2\int_\Omega u(t)g(u(t)) \tag{3.4}$$

$$\forall 0 < s < t < T(u_0), \int_s^t \int_\Omega u_t^2 + E(u(t)) = E(u(s)). \tag{3.5}$$

Démonstration. Multiplions l'équation $u_t - \Delta u = g(u)$ par $u(t)$ et intégrons par parties sur Ω. On obtient :

$$\int_\Omega u_t u - \int_\Omega \Delta u u(t) = g(u(t))u(t)$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{d}{dt}u^2 + \int_\Omega |\nabla u|^2 = \int_\Omega g(u(t))u(t).$$

D'où (3.4).

De plus, d'après l'équation

$$\int_s^t \int_\Omega (\Delta u + g(u))u_t = \int_s^t \int_\Omega u_t^2.$$

D'où (3.5).

Lemme 5 *: Supposons que $u_0 \in C_0(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Alors la solution u de (3.2) vérifie $u \in C([0,T(u_0)),L^2)$. Si de plus, $\Delta u_0 \in L^2$, on a $u \in C([0,T(u_0)),D(A)) \cap C^1([0,T(u_0)),L^2)$.*

Démonstration. Soit $u_0 \in C_0 \cap H_0^1$ et soit $t \in (0,T(u_0))$. On a :

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)F(u(s))ds.$$

D'où :

$$|u(t)-u_0|_{H^1} \leq |(S(t)-I)u_0|_{H^1} + \left|\int_0^t S(t-s)F(u(s))ds\right|_{H^1}.$$

On utilise l'inégalité suivante :

$$|\nabla u|_0 \leq (\frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{2}}|u_0|_0,$$

on a :

$$\left|\int_0^t S(t-s)F(u(s))ds\right|_{H^1} \leq \int_0^t \frac{1}{\sqrt{(t-s)}}|F(u(s))|ds$$

d'où :

$$|u(t)-u_0|_{H^1} \leq |(S(t)-I)u_0|_{H^1} + C\sqrt{t} \to 0, quand \quad t \to 0.$$

Donc $u \in C([0,T(u_0)),H_0^1)$. En particulier, si $T < T(u_0)$, u est bornée dans H^1 sur $[0,T]$ et donc $F(u)$ aussi. Si $\Delta u_0 \in L^2$, on a :

$$|\Delta(u(t)-u_0)|_0 + C\int_0^t \frac{1}{\sqrt{(t-s)}}|F(u(s))|_{H^1}ds \to 0, quand \quad t \to 0$$

et donc $u \in C([0,T(u_0)),D(A))$. En particulier, $u_t(t) \to \Delta u_0 + F(u_0)$ dans L^2 par l'équation. De plus, pour tout $t < T(u_0)$, on a :
$\dfrac{u(t)-u_0}{t} = \dfrac{S(t)-I}{t}u_0 + \dfrac{1}{t}\int_0^t S(t-s)F(u(s))ds \to \Delta u_0 + F(u_0)$ quand $t \to 0$.
Donc $u \in C^1([0,T(u_0)),L^2)$.

Proposition 10 *: Supposons qu'il existe $K \geq 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que :*

$$xg(x) \geq (2+\varepsilon)G(x)^{1+\varepsilon}, pour |x| \geq K;$$

et posons $\mu = min\{xg(x); 0 \leq x \leq K\}$, $v = max\{G(x); 0 \leq x \leq K\}$. Soit $u_0 \in C_0(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ tel que :

$$(2+\varepsilon)E(u_0) < \lambda(\Omega)(\mu - (2+\varepsilon)v).$$

Alors $T(u_0) < \infty$.

Démonstration. Posons $f(t) = \int_\Omega u(t)^2$ et ramenons-nous à une équation différentielle.On a, d'après le lemme 4 (3.4),

$$\forall t \in (0, T(u_0)), \frac{d}{dt}\int_\Omega u(t)^2 + 2\int_\Omega |\nabla u|^2 = 2\int_\Omega u(t)g(u(t))$$

d'où

$$f'(t) = -2\int_\Omega |\nabla u|^2 dt + 2\int_{\Omega\cap(|u|\leq K)} u(t)g(u(t))dt + 2\int_{\Omega\cap(|u|\geq K)} u(t)g(u(t))dt$$

et

$$f'(t) \geq -2\int_\Omega |\nabla u|^2 dt + 2\int_{\Omega\cap(|u|\leq K)} u(t)g(u(t))dt + 2(2+\varepsilon)\int_{\Omega\cap(|u|\geq K)} G(u(t))dt \quad (3.6)$$

d'après l'hypothèse

$$xg(x) \geq (2+\varepsilon)G(x)^{1+\varepsilon} \geq (2+\varepsilon)G(x) pour\, |x| \geq K.$$

Or, pour $u_0 \in C_0(\Omega) \cap H_0^1$, la solution u de (3.2) vérifie $u \in C([0, T(u_0)), D(A)) \cap C^1([0, T(u_0)), L^2)$ d'après le lemme 5. On peut donc prendre $s = 0$ dans la démonstration du lemme 4 et intégrer par parties, il vient :

$$\forall 0 < t < T(u_0), \int_0^t \int_\Omega u_t^2 + E(u(t)) = E(u(0)).$$

On a alors en multipliant l'égalité précédente par $2(2+\varepsilon)$:

$$\begin{aligned}
2(2+\varepsilon)\left\{E(u_0) - \int_0^T \int_\Omega (u_t)^2\right\} &= 2(2+\varepsilon)E(u(t)) \\
&= 2(2+\varepsilon)\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega G(u(t)) \\
&= (2+\varepsilon)\int_\Omega |\nabla u|^2 - 2(2+\varepsilon)\int_{\{|u|<K\}} G(u(t)) \\
&- 2(2+\varepsilon)\int_{\{|u|\geq K\}} G(u(t))
\end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$2(2+\varepsilon)\int_{|u|\geq K} G(u(t)) = -2(2+\varepsilon)\int_{|u|<K} G(u(t)) + 2(2+\varepsilon)\int_{\Omega}|\nabla u(t)|^2 - 2(2+\varepsilon)\left\{E(u_0) - \int_0^T\int_{\Omega} u_t^2\right\} \tag{3.7}$$

De plus,d'après le lemme 4 (3.4) et par l'hypothèse

$$(2+\varepsilon)E(u(0)) < \lambda(\Omega)(\mu - (2+\varepsilon)v)$$

on obtient dans l'égalité ci-dessus :

$$2\int_{|u|<K} u(t)g(u(t)) - 2(2+\varepsilon)\int_{|u|<K} G(u(t)) \geq 2\lambda(\Omega)(\mu - (2+\varepsilon)v) \tag{3.8}$$

D'où, en combinant (3.6),(3.7) et (3.8), on a : $\forall 0 \leq t < T(u_0)$,

$$f'(t) \geq \varepsilon\int_{\Omega}|\nabla u|^2 + 2(2+\varepsilon)\int_0^T\int_{\Omega} u_t^2 + 2\lambda(\Omega)(\mu - (2+\varepsilon v) - 2(2+\varepsilon)E(u_0).$$

En particulier,

$$f'(t) \geq 2(2+\varepsilon)\int_0^T\int_{\Omega} u_t^2 \tag{3.9}$$

car

$$-2(2+\varepsilon)E(u_0) + 2\lambda(\Omega)(\mu - (2+\varepsilon)v) > 0 \quad parhypothse.$$

En posant $h(t) = \int_0^t f(s)ds$ et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$h'(t) - h'(0) = f(t) - f(0) = 2\int_0^T\int_{\Omega} uu_t \leq 2h(t)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T\int_{\Omega} u_t^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

D'où, par (3.9) :

$$h''(t) \geq \frac{(2+\varepsilon)}{2}\frac{(h'(t)-h'(0))^2}{h(t)}$$

et

$$h(t)h''(t) \geq (1+\frac{\varepsilon}{2})(h'(t)-h'(0))^2. \tag{3.10}$$

Supposons par l'absurde que $T(u_0) = \infty$. On éduit alors de (3.9) que $f(t) \to \infty$ lorsque $t \to \infty$. En particulier,

$$\frac{h'(t)-h'(0)}{h'(t)} \to 1 quand \quad t \to \infty.$$

Donc il existe t_0 tel que :

$$\forall t \geq t_0, (1+\frac{\varepsilon}{2})(h'(t)-h'(0))^2 \geq (1+\frac{\varepsilon}{4})h'(t)^2.$$

Remarquons que

$$(h(t)^{\frac{-\varepsilon}{4}})'' = -\frac{\varepsilon}{4}h(t)^{\frac{-9\varepsilon}{4}}h''(t)h(t) - 5\frac{\varepsilon}{4}h'(t)^2 < 0$$

d'après les résultats précédents pour $t \leq t_0$. Or, $h(t) > 0$ par positivité de l'integrale et $h(t)^{\frac{-\varepsilon}{4}} \to 0$ lorsque $t \to \infty$ car $f(t) \to \infty$ quand t tend vers l'infini. Il existe donc $t_1 \leq t_0$ tel que $(h(t)^{\frac{-\varepsilon}{4}})'(t_1) < 0$. D'où, par développement de Taylor, comme $(h(t)^{\frac{-\varepsilon}{4}})'' \geq 0$ pour $t \leq t_0$,

$$\forall t \geq t_1, 0 \leq h(t)^{\frac{\varepsilon}{4}} \leq h(t_1)^{\frac{-\varepsilon}{4}} + (t-t_1)(h^{\frac{-\varepsilon}{4}})'(t_1)$$

et donc

$$\forall t \geq t_1, t \leq t_1 - \frac{h(t_1)^{\frac{-\varepsilon}{4}}}{(h^{\frac{-\varepsilon}{4}})'(t_1)}$$

ce qui est absurde.

3.2.4 Application au cas où $F(u) = \pm|u|^{p-1}u$

Nous allons nous intéresser au problème suivant : soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, à frontière lipschitzienne ; pour $u_0 \in C_0(\Omega)$ donnée, on cherche u et $T > 0$ solution du problème de Cauchy :

$$(P') \begin{cases} u \in C([0,T], C_0(\Omega)) \cap C((0,T], H_0^1(\Omega)) \cap C^1((0,T], L^2(\Omega)) \\ u_t - \Delta u = \pm|u|^{p-1}u, sur(0;T] \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Posons :

$$g(y) = \pm|y|^{p-1}y$$

Pour $F(u) = -|u|^{p-1}u$,on a toujours $T(u_0) = \infty$ et u est bornée dans $C_0(\Omega)$.

Pour $F(u) = +|u|^{p-1}u$,on a $T(u_0) = \infty$ pour $\|u_0\|$ assez petit. D'autre part, pour certains u_0 on a $T(u_0) < \infty$ (explosion en temps fini).

On admet que F est lipschitzienne sur les bornés. Il en résulte qu'il existe $T > 0$ et $u \in C([0,T[,\mathbb{R})$ solution du problème (P').

Pour $g(y) = -|y|^{p-1}y$

$$\exists C, K > 0, \forall |x| \geq K, xg(x) \leq C|x|^2$$

car tout nombre négatif peut etre majoré par une constante positive.

Pour $g(y) = +|y|^{p-1}y$

La solution est globale pour toute donnée initiale u_0 pour $p \leq 1$. En effet, dans ce cas-là, $\dfrac{|y|^{p+1}}{|y|^2} \to 0 \quad$ quand $y \to \infty$
D'où :

$$\exists y_0, \forall y \geq y_0, \frac{|y|^{p-1}}{|y|^2} < 1.$$

De plus, pour y petit, on a :

$$yg(y) = y^2|y|^{p-1} \leq (\max_{|y|\leq\alpha}|y|^{p-1})|y|^2.$$

On choisit α tel que $\alpha^{p-1} > inf\,\{\|\nabla u\|_0, u \in H_0^1(\Omega), \|u\|_0 = 1\}$. Alors, il existe $A < \infty$ tel que si $\|u_0\| < \alpha A$, la solution correspondante est globale.

Chapitre 4

Existence Globale des Solutions d'un Système de Réaction-Diffusion

4.1 Introduction :

Notre but est d'analyser le systeme semi-linéaire d'équation de réaction-diffusion :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \nabla a(u)\nabla u + a(u)\Delta u - uh(u)v, sur(0,\infty)\times\Omega \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = \nabla b(v)\nabla v + b(v)\Delta v + uh(u)v - \lambda v, sur(0,\infty)\times\Omega \end{cases} \tag{4.1}$$

$$u(0,x) = \varphi(x), v(0,x) = \psi(x), x \in \Omega \in \mathbb{R}^n \tag{4.2}$$

($n = 1, 2$ ou 3 en pratique) considéré avec les condition aux limites de Neumann ou Dirichlet :

$$\frac{du(t,x)}{d\nu} = \frac{dv(t,x)}{d\nu} = 0 \quad sur(0,\infty)\times\partial\Omega. \tag{4.3}$$

où :

$$u(t,x) = v(t,x) = 0 \quad sur(0,\infty)\times\partial\Omega. \tag{4.4}$$

Où Ω est un domaine borné et lisse ($\partial\Omega \in C^{2+\beta}$ avec une certaine $\beta \in (0,1)$), $t \geq 0$ et ν désigne le vecteur normal vers l'extèrieur à $\partial\Omega$. Les diffusivités $a(.)$ et $b(.)$ sont supposès etre lisse,non dégnérée,strictement positif et uniformément bornée,c'est-à-dire il existe des constantes positives C_0 et C_1 telle que :

$$0 < C_0 \leq min(a(u), b(u)) < max(a(u), b(u)) \leq C_1 < \infty, \quad pour\ tous\ u \in \mathbb{R}.$$

Egalement en suppose que $h \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ et $\lambda > 0$.
La motivation principale de l'etude du système (4.1) vient du système Kermach-mckendrick ce qui représente un modéle de base pou la description des épidémies Susceptibles-Infectieux-Retires
le schéma (S-I-R) [4]

$$\begin{cases} S'(t) = \mu S(t)I(t), \\ I'(t) = \mu S(t)I(t) - \lambda I(t), pour \quad t \geq 0, \mu, \lambda > 0 \\ R'(t) = \lambda I(t). \end{cases} \tag{4.5}$$

où

- Susceptibles : les individus qui n'ont pas d'immunité contre l'agent infectieux et qui peuvent s'infecter s'ils sont exposés.
- Infectieux : les individus qui sont actuellement infectés et peuvent transmettre l'infection aux susceptibles avec lesquels ils sont en contact.
- Retirés : les individus qui sont immunisés contre l'infection, et de ce fait n'affectent pas la dynamique de la transmission quand ils sont en contact avec les autres individus.

Le modéle proposé (4.1) est clairement une extension de (4.5).Dans (4.1) u et v représentent,respectivement, la densité d'individus sensibles, et la densité d'individus infectieux au moment $t \geq 0$ et aux point x de l'habitat Ω.l'orsque a et b sont des constantes, le système (4.1) a été étudié par Capasso [5] et par Haraux et Kirane [6]

4.2 Positivité des Solutions

De raison physique les solution d'un système de reaction diffusion doit etre toujour positive

nous éssayon dans cette proposition et a l'aide de principe de maximan de prouver que les solution (4.1)-(4.4) sont positive

Proposition 11 *Soit (u,v) les solutions de (4.1)-(4.4) alors l'ensemble* $\sum = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 / u_0 \geq 0 \; et \; v_0 \geq 0\}$ *est une région invariante*

Preuve :

On à : $u(0.x) = \varphi(x)$

$v(0.x) = \psi(x)$

De la relation $u = u^+ - u^-$ En appliquant le principe du maximum à (4.1),en multiplier par u^- et intègre sur Ω on obtien :

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} u^- = \int_\Omega \nabla a \left|\nabla u\right|^2 u^- + \int_\Omega a(u)\Delta u u^- - \int_\Omega u h(u) v u^-$$

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (u^-)^2 = \int_\Omega \nabla a \left|\nabla u\right|^2 u^- + \int_\Omega \Delta u(a(u)u^-) - \int_\Omega h(u) v u u^-$$

à partir la formule de Green on obtient :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (u^-)^2 &= \int_\Omega \nabla a \left|\nabla u\right|^2 u^- - \int_\Omega \nabla u \nabla(a(u)u^-) - \int_\Omega h(u) v u u^- \\ &= \int_\Omega \nabla a \left|\nabla u\right|^2 u^- - \int_\Omega \nabla u(\nabla u \nabla a u^- + \nabla u^- a(u)) + \int_\Omega h(u) v (u^-)^2 \\ &= \int_\Omega \nabla a \left|\nabla u\right|^2 u^- - \int_\Omega \nabla a \left|\nabla u\right|^2 u^- + \int_\Omega \left|\nabla u^-\right|^2 a(u) + \int_\Omega h(u) v (u^-)^2 \\ &= +\int_\Omega \left|\nabla u^-\right|^2 a(u) + \int_\Omega h(u) v (u^-)^2 \end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (u^-)^2 dx + \int_\Omega \left|\nabla u^-\right|^2 a(u) = -\int_\Omega h(u) v (u^-)^2$$

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega (u^-)^2 dx \leq -2\int_\Omega h(u) v (u^-)^2$$

Alors :

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega (u^-)^2 dx \leq C(T)\int_\Omega (u^-)^2$$

D'autre façon on à :

$$\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial t} v^- dx = \int_\Omega \nabla b \left|\nabla v\right|^2 v^- dx + \int_\Omega b(v)\Delta v v^- dx + \int_\Omega uh(u)vv^- - \int_\Omega \lambda vv^-$$

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (v^-)^2 dx = \int_\Omega \nabla b \left|\nabla v\right|^2 v^- dx + \int_\Omega \Delta v(b(v)v^-)dx + \int_\Omega h(u)vuv^- dx - \int_\Omega \lambda vv^- dx$$

à partir la formule de Green on obtient :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (v^-)^2 dx &= \int_\Omega \nabla b \left|\nabla v\right|^2 v^- dx - \int_\Omega \nabla v \nabla (b(v)v^-)dx + \int_\Omega h(u)vuv^- dx - \int_\Omega \lambda vv^- dx \\
&= \int_\Omega \nabla b \left|\nabla v\right|^2 v^- dx - \int_\Omega \nabla v(\nabla v \nabla b v^- + \nabla v^- b(v))dx - \int_\Omega h(u)u(v^-)^2 dx \\
&+ \int_\Omega \lambda (v^-)^2 dx \\
&= \int_\Omega \nabla b \left|\nabla v\right|^2 v^- dx - \int_\Omega \nabla b \left|\nabla v\right|^2 v^- dx + \int_\Omega \left|\nabla v^-\right|^2 b(v)dx - \int_\Omega h(u)u(v^-)^2 dx \\
&+ \int_\Omega \lambda (v^-)^2 dx \\
&= +\int_\Omega \left|\nabla v^-\right|^2 b(v)dx - \int_\Omega h(u)u(v^-)^2 dx + \int_\Omega \lambda (v^-)^2 dx
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_\Omega (v^-)^2 dx &\leq 2\int_\Omega h(u)u(v^-)^2 dx \\
&\leq C(T)\int_\Omega (v^-)^2
\end{aligned}$$

D'après la Formule de Gronwall on obtient que $v \geq 0$, Finallement on déduit que :$u \geq 0$ et $v \geq 0$ sur $(0, T^*) \times \Omega$

4.3 Existence globale

Dans la suit,les fonction initiales arbitraires $\varphi, \psi \in C^{2+\beta}(\bar{\Omega})$ la satisfaction de conditions de compatibilité appropriés :

(c) $\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = \frac{\partial \psi}{\partial \nu} = 0$, sur $\partial\Omega$ dans le cas de condition de Neummann (4.3), ou $\nabla\left(a(\varphi)\nabla\varphi\right) = \varphi h(\varphi)\psi$, $\nabla\left(b(\psi)\nabla\psi\right) = -\varphi h(\varphi)\psi + \lambda\psi$

et $\varphi = \psi = 0$ sur $\partial\Omega$ dans le cas de condition de dirichlet (4.4) seront considérés.

Maintenant,à priori bornés sous la norme de L^∞ sont dérivés suivant la méthode itérative de Moser comme dans [3] .

Théorème 12 *: pour les fonctions initiales arbitraires $\varphi, \psi \in C^{2+\beta}(\overline{\Omega})$,$\varphi \geq 0$, $\psi \geq 0$,satisfaisant à la condition de compatibilité (c), il existe un unique, non négatif , solution limitée globale (u, v) , $u, v \in C^{1+\alpha/4, 2+\alpha/2}([0,\infty)\times\overline{\Omega})$ de (4.1)-(4.4),($\alpha = min(\beta, \frac{1}{2})$) En particulier, l'orbite $\Gamma(u_0, v_0) = \{(u(t,.), v(t,.)), t \geq 0\}$ et relativement compact dans $C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^2)$.*

Démonstration : pour u et v fixe , les opérateurs $\nabla(a(u)\nabla u)$ et $\nabla(b(v)\nabla v)$ générer semi-groupes analytiques sur L^p ,donc le systeme (4.1)-(4.4) a un unique, non counitinuable,solution classique (u,v) sur $[0, T_{max}) \times \overline{\Omega}$ pour certaines $T_{max} < \infty$. De plus, $u, v \in L^\infty([0,T) \times \overline{\Omega})$ pour $0 < T < T_{max}$

$$\lim_{t\to T_{max}} \{\|u(t,.)\|_\infty + \|v(t,.)\|_\infty\} = \infty.$$

Maintenent,nous obtenons une majoration a priori pour (u, v) sur $L^\infty(\Omega)$, nous avons :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla a(u)\nabla u + a(u)\Delta u - uh(u)v. \tag{4.6}$$

multipliant (4.6) par pu^{p-1},p et entier,et en intégrant sur Ω,nous obtenons :

$$\int_\Omega pu^{p-1}\frac{\partial u}{\partial t} = \int_\Omega pu^{p-1}\nabla a(u)\nabla u + \int_\Omega pu^{p-1}a(u)\Delta u - \int_\Omega pu^{p-1}uh(u)v$$

Donc

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u^p = p\int_\Omega u^{p-1}\nabla a(u)\nabla u + p\int_\Omega u^{p-1}a(u)\Delta u - p\int_\Omega u^{p-1}uh(u)v \tag{4.7}$$

on a :

$$
\begin{aligned}
p\int_\Omega u^{p-1}\nabla a(u)\nabla u + p\int_\Omega u^{p-1}a(u)\Delta u &= p\int_\Omega u^{p-1}\left|\nabla u\right|\nabla a\left|\nabla u\right| + p\int_\Omega u^{p-1}a(u)\Delta u \\
&= p\int_\Omega u^{p-1}\left|\nabla u\right|^2\nabla a + p\int_\Omega u^{p-1}a(u)\Delta u
\end{aligned}
$$

En utilisant la Formule de Green,nous trouvons :

$$
\begin{aligned}
p\int_\Omega u^{p-1}\nabla a(u)\nabla u + p\int_\Omega u^{p-1}a(u)\Delta u &= p\int_\Omega u^{p-1}\left|\nabla u\right|^2\nabla a + \left(-p\int_\Omega \nabla u\nabla(a(u)u^{p-1})\right) \\
&= p\int_\Omega u^{p-1}\left|\nabla u\right|^2\nabla a - p\int_\Omega \nabla u(\nabla a(u)u^{p-1} \\
&+ \nabla u^{p-1}a(u)) \\
&= p\int_\Omega u^{p-1}\left|\nabla u\right|^2\nabla a - p\int_\Omega \nabla u(\nabla u\nabla a u^{p-1} \\
&+ (p-1)u^{p-2}\nabla u a(u)) \\
&= p\int_\Omega u^{p-1}\left|\nabla u\right|^2\nabla a - p\int_\Omega u^{p-1}\left|\nabla u\right|^2\nabla a \\
&- p(p-1)\int \left|\nabla u\right|^2 u^{p-2}a(u)
\end{aligned}
$$

So :

$$
p\int_\Omega u^{p-1}\nabla a(u)\nabla u + p\int_\Omega u^{p-1}a(u)\Delta u = -p(p-1)\int_\Omega \left|\nabla u\right|^2 u^{p-2}a(u) \tag{4.8}
$$

Compenser(4.8) - en- (4.7), nous trouvons :

$$
\frac{d}{dt}\int_\Omega u^p = -p(p-1)\int_\Omega \left|\nabla u\right|^2 u^{p-2}a(u) - p\int_\Omega u^p h(u)v \tag{4.9}
$$

$$
\frac{d}{dt}\int_\Omega u^p + p(p-1)\int_\Omega \left|\nabla u\right|^2 u^{p-2}a(u) = -p\int_\Omega u^p h(u)v \leq 0 \tag{4.10}
$$

Donc :

$$
\frac{d}{dt}\int u^p \leq 0
$$

à partir de laquelle on déduit, pour tous $1 \leq p \leq \infty$,

$$
\|u(t)\|_p \leq \|\varphi\|_p \leq C \tag{4.11}
$$

où $\|.\|_p$est la norme usuelle dans $L^p(\Omega)$.

D'autre part,

De la même façon , nous trouvons :

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega v^p + p(p-1)\int_\Omega |\nabla v|^2 v^{p-2} b(v) = p\int_\Omega (v^p h(u)u - \lambda v^p). \tag{4.12}$$

Maintenant,nous avons :

$$\begin{aligned} \left|\nabla v^{\frac{p}{2}}\right|^2 &= \left|\frac{p}{2} v^{\frac{p}{2}-1}\nabla v\right|^2 \\ &= \frac{p^2}{4} v^{2(\frac{p}{2}-1)} |\nabla v|^2 \\ &= \frac{p^2}{4} v^{p-2} |\nabla v|^2 \end{aligned}$$

Alors :

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega v^p + p(p-1)\int_\Omega \frac{4}{p^2} b(v) \left|\nabla v^{\frac{p}{2}}\right|^2 = p\int_\Omega (v^p h(u)u - \lambda v^p).$$

en utilisant l'hypothèse sur $b(.)$ et l'estimation (4.11) avec $p = \infty$,on obtient :

$$\frac{d}{dt}(\int_\Omega v^p) + 4C_0\int_\Omega \left|\nabla v^{\frac{p}{2}}\right|^2 \leq Mp\int_\Omega v^p, \tag{4.13}$$

Où :$M = \|uh(u)\|_\infty$. Maintenant,fixe θ avec $n(n+2)^{-1} < \theta < 1$ arbitrairemant. Ensuite,par l'inegalité de Gagliardo Nirenberg

$$\|f\|_2^2 \leq C\|f\|_{1,p}^{2\theta}\|f\|_1^{2(1-\theta)} \leq \varepsilon\|f\|_1^2 + C\varepsilon^{\theta(\theta-1)^{-1}}\|f\|_1^2,$$

Pour $\varepsilon > 0$ et $f \in W^{1,p}(\Omega)$ à la norme $\|f\|_{1,p}$.Ainsi,

$$\|\nabla f\|_2^2 \geq (1-\varepsilon)\varepsilon^{-1}\|f\|_2^2 + C\varepsilon^{(\theta-1)^{-1}}\|f\|_1^2 \tag{4.14}$$

Pour $0 < \varepsilon < 1$.On pose $f = v^{\frac{p}{2}}$ dans (4.14)

$$\|\nabla v^{\frac{p}{2}}\|_2^2 \geq (1-\varepsilon)\varepsilon^{-1}\|v^{\frac{p}{2}}\|_2^2 + C\varepsilon^{(\theta-1)^{-1}}\|v^{\frac{p}{2}}\|_1^2$$

En insérant cette inégalité dans (4.13) on obtient :

$$(d/dt)(\|v^{\frac{p}{2}}\|_2^2) + 4C_0(1-\varepsilon)\varepsilon^{-1}\|v^{\frac{p}{2}}\|_2^2 - 4C_0C\varepsilon^{(\theta-1)^{-1}}\|v^{\frac{p}{2}}\|_1^2 \leq Mp\|v^{\frac{p}{2}}\|_2^2. \tag{4.15}$$

Si on pose $\varepsilon = 4C_0/(Mp + 4C + 4C_0)$,Alors

$$4C_0(1-\varepsilon)\varepsilon^{-1}\|v^{\frac{p}{2}}\|_2^2 = 4C_0(1-\frac{4C_0}{Mp+4C+4C_0})\frac{Mp+4C+4C_0}{4C_0}\|v^{\frac{p}{2}}\|_2^2 = (4C+Mp)\|v^{\frac{p}{2}}\|_2^2 \tag{4.16}$$

et

$$4C_0C\varepsilon^{(\theta-1)^{-1}}\|v^{\frac{p}{2}}\|_1^2 \leq 4C_0C\|v^{\frac{p}{2}}\|_1^2 \tag{4.17}$$

on remplacé (4.16) et (4.17) dans (4.15),nous déduisons

$$(d/dt)(\|v^{\frac{p}{2}}\|_2^2) \leq 4C(-\|v^{\frac{p}{2}}\|_2^2 + C_0\|v^{\frac{p}{2}}\|_1^2).$$

Remarque 13 *Soit $f \in X$ telle que dim $X = n$*

$\|f\|_1 \leq C\|f\|_2$.

De la remarque précédente,nous obtenons

$$(d/dt)(\|v^{\frac{p}{2}}\|_2^2) \leq 0 \quad quand \quad \|v^{\frac{p}{2}}\|_2^2 \geq C_0\|v^{\frac{p}{2}}\|_1^2.$$

par intégration

$$\int_0^T (d/dt)(\|v^{\frac{p}{2}}\|_2^2) \leq 0$$

Donc

$$\|v^{\frac{p}{2}}\|_2^2 \leq \|\psi^{\frac{p}{2}}\|_2^2$$

d'où

$$\|v^p\|_1 \leq max(\|\psi^p\|_1, C_0\|v^{\frac{p}{2}}\|_1^2) \tag{4.18}$$

Maintenant,permettre à $M(k,t) = \|v(t)\|_l$, $(l = 2^k)$ pour $t \in I = [0, T_{max})$,$k = 0, 1, 2, ...$, Ensuite, laisser $p = l$ dans (4.18) et en prenant la racine l,et en déduire

$$M(k,t) \leq max(M(k,0), M(k-1,t))$$

c'est-à-dire $\|.\|_l \to \|.\|_\infty$ quand $k \to \infty$ on voit que $M(k,0) \leq C$ pour tous $k \geq 0$ et ainsi

$$M(k,t) \leq max(C, M(k-1,t)).$$

à partir de laquelle nous déduisons

$$M(k,t) \leq max(C, M(0,t)).$$

Comme $(d/dt)(\int_\Omega u+v)=-\lambda\int_\Omega v\leq 0$ On à :

$$(d/dt)(\int_\Omega u+v)\leq 0$$

On intégrer sur [0,T) on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^T(d/dt)(\int_\Omega u(t,x)+v(t,x) &= \int_\Omega u(t,x)+v(t,x)dx-\int_\Omega u(0,x)+v(0,x)dx\\ &\leq 0.\end{aligned}$$

Alors on à :

$$\begin{aligned}\int_\Omega u(t,x)+v(t,x)dx &\leq \int_\Omega u(0,x)+v(0,x)dx\\ &\leq C\end{aligned}$$

So :

$$\int_\Omega v(t,x)\leq C,$$

finalement on déduire que :$max_{t\in I}\|v\|_1\leq C$ et donc $M(k,t)\leq C$.Prendre $k\to\infty$ montre que pour toute $t\in I$

$$\|v\|_\infty\leq C. \tag{4.19}$$

Les estimation à priori (4.11)et (4.19) conduire à l'existence d'une solution globale et bornée de (4.1)-(4.4).

Conclusion

Avec les technique des région invariante,principe de maximun et autre on arrive à montrer l'existence globale et la positivité des solution de système (4.1)-(4.4)

Bibliographie

[1] Haïm Brézis,Analyse fonctionnelle, éditions Masson, 1983.

[2] Alain Haraux,Introduction aux problèmes d'évolution semi-linéaires,Thierry Cazenave, Ellipses, 1990.

[3] N. D. Alikakos . Lp-bound of solutions of reaction-diffusion equations, comm. Partial Differential Equations (1979), 827-868.

[4] N. T. J. Bailey, The Mathematical Theory of Infectious Diseases, 2nd ed., Griffin, London, 1975.

[5] V. Capasso, Global solution for a diffusive nonlinear deterministic epidemic model , SIAM J. Appl. Math. 35 (1978), 274–284.

[6] A. Haraux et M. Ki rane, Estimations C1 pour des probl'emes paraboliques semilin ´eaires, Ann. Fac. Sci. Toulouse 5 (1983), 265–280.

[7] A. Haraux and A.Youkana . On a result K. Masuda concerning reaction-diffusion equations, Tôhoku Math. J. 40(1988).159-163.

[8] Pazy A.Semigroupe of linear Operators and Applications to Partial Differential Equations.Applied Mathematical Sciences,vol 44.Springer : New York,1983.

[9] Kirane M Global bounds and asymptotics of reaction-diffusion equations.Journa of Mathematical Analysis and Applications 1989 ;138 :328-342.

[10] S. Kouachi and A. Youkana .Global existence for a class of reaction-diffusion systems. Vol.49, N 3 (2001).