



**UNIVERSITE KASDI MERBAH
OUARGLA**
Faculté des Mathématiques et des Sciences de la
Matière

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation et Analyse Numérique

Par :HADIA HADRI

Thème

Éléments finis discontinus pour des problèmes elliptiques d'ordre deux

Soutenu publiquement le : 10/06/2014

Devant le jury composé de :

Ghezal Abderrazek	M.A. Universié KASDI Merbah- Ouargla	Président
Bensayah Abdallah	M.A. Université KASDI Merbah- Ouargla	Examineur
Merabet Ismail	M.C. Université KASDI Merbah- Ouargla	Rapporteur

DÉDICACES

Je dédie ce modeste travail :

-Aux joyaux de ma vie "mes parents" qui sont la source de ma réussite, je souhaite qu'ils trouvent à travers ce mémoire le faible témoignage de leurs efforts et sacrifices.

-A mes frères

- A ma soeur

-A toute la famille et

- A mes chers amis

- Je tiens à remercier l'ensemble de tous les étudiants et étudiantes de ma promotion,
En fin je dédie cette mémoire à mes collègues et tous ceux qui me sont chers.

REMERCIEMENT

Avant toute considération, je remercie le Grand Dieu le tout puissant qui, m'a aidé pour achever ce travail.

Je tiens tout a remercier premier lieu mon encadreur Monsieur MERABET Ismail de m'avoir proposé un des plus importants thèmes et pour sa continuité à me soutenir et à m'encourager. Je voudrai aussi le remercier pour sa gentillesse, sa disponibilité et du temps consacré à mon travail.

Je remercie également les membres du département de Mathématique de m'avoir permis de travailler dans de bonnes conditions pendant la réalisation de mon travail. Merci également a tous les enseignants qui m'ont aidé pendant mon cursus, sans oublier leurs conseils précieux.

Je remercie aussi toute personne de près ou de loin a contribué à la finalisation de ce travail.

TABLE DES MATIÈRES

Dédication	i
Remerciement	ii
Notations	1
1 Introduction	2
1.1 Quelques exemples des équations aux dérivées partielles " EDP "	2
1.1.1 Equation de la chaleur	3
1.1.2 Equation des ondes	3
1.1.3 Le Laplacien	4
1.1.4 Equation de Schrödinger	4
1.1.5 Système de Lamé	4
1.1.6 Système de Stokes	5
2 Cadre abstrait de la méthode des éléments finis	7
2.1 La méthode de Galerkin	7
2.1.1 Le problème modèle est-il bien posé ?	8
2.1.2 Le lemme de Lax-Milgram	9

2.1.3	Le théorème de Banach-Necăs-Babuška (BNB)	9
2.1.4	Principe de la méthode de Galerkin	10
2.1.5	Le problème approché est-il bien posé?	12
2.1.6	Analyse d'erreur	14
3	Problème modèle en dimension deux	17
3.1	Un problème modèle	17
3.1.1	Le problème discret par (SIP)	19
3.2	Analyse <i>a priori</i>	21
3.2.1	L'orthogonalité de Galerkin pour la méthode SIP	23
3.2.2	Estimation d'erreur par dualité	26
3.3	Analyse intermédiaire	27
3.3.1	Premier outil : Un opérateur d'enrichissement E_h	28
3.3.2	Deuxième outil : Une estimation locale	30
3.3.3	Troisième outil : Formule d'intégration par parties	34
3.4	Analyse <i>a posteriori</i>	38
3.4.1	Estimation d'erreur par résidu	38
3.4.2	Efficacité de l'estimateur	41

NOTATIONS

- $\|v\|_{0,\Omega} = \|v\|_{L^2(\Omega)} = (\int_{\Omega} |v|^2 dx)^{1/2}$
- $|v|_{1,\Omega} = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = \|\nabla v\|_{0,\Omega}$
- $\nabla v = \text{grad}(v) = \begin{pmatrix} \partial_x v \\ \partial_y v \end{pmatrix}$: Le gradient d'un vecteur v .

- $H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega); \nabla v \in (L^2(\Omega))^2\}$
- $Osc(f) = (\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|f - \tilde{f}_T\|_{L^2(T)}^2)^{1/2}$
- $[[v]] = v_- n^- + v_+ n_+$
- $\{\{\nabla v\}\} = \frac{\nabla v_- + \nabla v_+}{2}$
- $\frac{\partial v}{\partial n} = \nabla v \cdot n$
- $\Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$
- SIP (système intriour bolide)
- P^k (polynôme de degré k)

INTRODUCTION

L'analyse mathématique de la méthode des éléments finis débute en 1968 avec des estimations a priori sur l'approximation pour un problème d'élasticité plane par [16].

1.1 QUELQUES EXEMPLES DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES " EDP "

Dans cette section nous donnons rapidement la forme de quelques modèles classiques. Le but de cette énumération est de dégager dès maintenant les principales classes d'équations aux dérivées partielles. Ces équations jouent un rôle important dans des domaines scientifiques très divers. Désormais nous adimensionnons toutes les variables, ce qui permet de fixer toutes les constantes des modèles égales à 1.

1.1.1 Equation de la chaleur

L'équation de la chaleur intervient comme modèle dans de nombreux problèmes des sciences de l'ingénieur. Elle s'écrit

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_*^+ \quad (1.1)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_*^+ \quad (1.2)$$

$$u(t = 0) = u_0 \quad \text{dans } \Omega \quad (1.3)$$

il s'agit d'une équation d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace (l'ordre est celui des dérivées partielles les plus élevées).

Cette équation a certaines propriétés notamment[5] :

- Irréversibilité en temps.
- Propagation à vitesse infinie.
- Principe du maximum.

1.1.2 Equation des ondes

L'équation des ondes modélise des phénomènes de propagation d'ondes ou de vibration. Par exemple, en deux dimensions d'espace elle est un modèle pour étudier les vibrations d'une membrane élastique tendue. En une dimension d'espace, elle est aussi appelée équation des cordes vibrantes. au repos, la membrane occupe un domaine plan Ω . On suppose qu'elle est fixée sur son bord, ce qui donne une condition aux limites de Dirichlet. L'équation des ondes dont u est solution est donnée par

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_*^+ \quad (1.4)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_*^+ \quad (1.5)$$

$$u(t = 0) = u_0 \quad \text{dans } \Omega \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t = 0) = u_1 \quad \text{dans } \Omega. \quad (1.7)$$

Nous remarquons qu'il s'agit d'une équation du deuxième ordre en temps et qu'il faut donc deux conditions initiales pour u .

1.1.3 Le Laplacien

Pour certains choix du terme source f , la solution de l'équation de la chaleur (1.4) atteint un état stationnaire, c'est à dire que $u(t, x)$ admet une limite $u_\infty(x)$ quand le temps t tend vers l'infini. Souvent, il est intéressant de calculer directement cet état stationnaire. Dans ce cas, pour un terme source $f(x)$ indépendant du temps, on résout une équation du ordre en espace

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.8)$$

que l'on appelle laplacien ou équation de Laplace. Laplacien intervient aussi dans de très nombreux domaines des sciences de l'ingénieur. Par exemple, (1.8) modélise le déplacement vertical d'une membrane élastique soumise à une force normale f et fixée sur son contour.

1.1.4 Equation de Schrödinger

L'équation de Schrodinger décrit l'évolution de la fonction d'onde u d'une particule soumise à un potentiel V . Rappelons que $u(t, x)$ est une fonction de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N$ à valeurs dans \mathbb{C} et que son module au carré $|u|^2$ s'interprète comme la densité de probabilité pour détecter que la particule se trouve au point (t, x) . Le potentiel $V(x)$ est une fonction à valeur réelles. La fonction d'onde u est solution de

$$\begin{cases} i \frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u - V u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_*^+ \\ u(t = 0) = u_0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \end{cases} \quad (1.9)$$

il n'y a pas de condition aux limites apparentes dans (1.9) puisque l'équation a lieu dans tout l'espace (qui n'a pas de bord). Néanmoins, nous verrons qu'un choix "raisonnable" d'espace fonctionnel dans lequel nous chercherons la solution entraîne de facto une condition de décroissance à l'infini de u qui peut s'interpréter comme une sorte de condition aux limites à l'infini.

1.1.5 Système de Lamé

Le système de lamé est une cas particulier des équations stationnaires de l'élasticité linéarisée qui modélisent les déformations d'un solide sous l'hypothèse de petites déformations.

Pour obtenir le système de Lamé, on suppose que le solide est homogène isotrope et qu'il est fixé sur son bord. La principale différence avec les modèles précédents est qu'il s'agit ici d'un système d'équations, c'est à dire de plusieurs équations couplées entre elles. Le solide au repos occupe un domaine Ω de l'espace \mathbb{R}^N . Sous l'action d'une force f il se déforme, et chaque point x se déplace en $x + u(x)$. La force $f(x)$ est une fonction vectorielle de Ω dans \mathbb{R}^N , comme le déplacement $u(x)$. Ce dernier est solution de

$$\begin{cases} -\mu\Delta u - (\mu + \lambda)\nabla(\operatorname{div} u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.10)$$

ou λ et μ sont deux constantes, dites de Lamé, caractéristiques du matériau homogène isotrope dont est constitué le solide.

Pour des raisons mécaniques ces constantes vérifient

$$\mu > 0 \text{ et } 2\mu + \lambda > 0.$$

La condition aux limites de Dirichlet pour u traduit le fait que le solide est supposé fixé et immobilisé sur son bord $\partial\Omega$.

Le système (1.10) a été écrit en notation vectorielle. Si on note f_i et u_i , pour $1 \leq i \leq N$, les composantes de f et u dans la base canonique de \mathbb{R}^N , (1.10) est équivalent à

$$\begin{cases} -\mu\Delta u_i - (\mu + \lambda)\frac{\partial(\operatorname{div} u)}{\partial x_i} = f_i & \text{dans } \Omega \\ u_i = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

pour $1 \leq i \leq N$, remarquons que, si $(\mu + \lambda) = 0$, alors les équations pour chaque composante u_i sont couplées par le terme de divergence.

Évidemment, en dimension $N = 1$, le système de Lamé n'a qu'une seule équation et se réduit au laplacien.

1.1.6 Système de Stokes

Le système de Stokes modélise l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible à petite vitesse. On suppose que le fluide occupe un domaine Ω et qu'il adhère à la paroi de celui-ci, c'est à dire que sa vitesse est nulle sur la paroi (ce qui conduit à une condition aux limites

de Dirichlet). Sous l'action d'une force $f(x)$ (une fonction de Ω dans \mathbb{R}^N), la vitesse $u(x)$ (un vecteur) et la pression $\rho(x)$ (un scalaire) sont solutions de

$$\begin{cases} \nabla \rho - \mu \Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.11)$$

ou $\mu \Delta u = f$ (correspondant à la conservation de la quantité de mouvement), il y a une autre équation $\operatorname{div} u = 0$ appelée condition d'incompressibilité (qui correspond à la conservation de la masse). Si la dimension d'espace est $N = 1$, le système de Stokes est sans intérêt car on voit facilement que la vitesse est nulle et que la pression est une primitive de la force. Par contre en dimension $N \geq 2$, le système de Stokes a bien un sens : en particulier, il existe des champs de vitesses incompressibles non triviaux (prendre, par exemple, un rotationnel).

Les modèles sont très importants, mais ils ont une propriété commune c'est qu'ils sont très difficile voir impossible de les résoudre analytiquement, c'est ce point qui rend l'approximation des ces modèles par des méthodes numériques très importante.

CADRE ABSTRAIT DE LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

L'analyse mathématique de la méthode des éléments finis débute en 1968 avec des estimations a priori sur l'approximation pour un problème d'élasticité plane par [16]. Dans ce chapitre est consacré à une description " mathématiques " de la méthode des éléments finis. Cette partie est basée essentiellement sur le livre : Aide-mémoire Eléments finis A. Ern [10]. Les démonstrations peuvent être se trouver par exemple dans [11].

2.1 LA MÉTHODE DE GALERKIN

La méthode de Galerkin permet d'approcher la solution de problèmes modèles dont la formulation abstraite est la suivante :

$$\begin{cases} \text{Chercher } u \in V & \text{tel que} \\ a(u, w) = f(w), & \forall w \in W \end{cases} \quad (2.1)$$

où V et W sont des espaces fonctionnels (des espaces vectoriels dont les éléments sont des fonctions), a est une forme bilinéaire définie sur $V \times W$ et f est une forme linéaire définie sur W . On dit que V est l'espace solution et que W est l'espace test. Les éléments de W

sont appelés des fonctions tests.

Les espaces fonctionnels V et W sont équipés de normes, notées $\|\cdot\|_V$ et $\|\cdot\|_W$ respectivement, qui leur confèrent une structure d'espace de Banach (V et W sont des espaces vectoriels normés où toute suite de Cauchy est convergente).

Dans de nombreuses applications, les normes $\|\cdot\|_V$ et $\|\cdot\|_W$ sont induites par des produits scalaires, notés $(\cdot, \cdot)_V$ et $(\cdot, \cdot)_W$ respectivement, si bien que V et W sont en fait des espaces de Hilbert. Pour simplifier, on conserve cette hypothèse par la suite.

On suppose que la forme bilinéaire a est continue sur $V \times W$, ce qu'on note $a \in (V \times W, \mathbb{R})$. On rappelle que cette hypothèse consiste à supposer qu'il existe une constante c_1 telle que pour tout $(v, w) \in V \times W$.

$$a(v, w) \leq c_1 \|v\|_V \|w\|_W. \quad (2.2)$$

De même, on suppose que la forme linéaire f est continue sur W , ce qu'on note $f \in L(W; \mathbb{R}) := W'$, c'est-à-dire qu'il existe une constante c_2 telle que pour tout $w \in W$,

$$f(w) \leq c_2 \|w\|_W. \quad (2.3)$$

On introduit les normes de a et f (dans $L(V \times W; \mathbb{R})$ et W' respectivement) définies par

$$\|a\|_{V,W} = \sup_{(v,w) \in V \times W} \frac{a(v,w)}{\|v\|_V \|w\|_W}, \|f\|_{W'} = \sup_{w \in W} \frac{f(w)}{\|w\|_W} \quad (2.4)$$

étant entendu que les arguments des suprema sont pris non-nuls. On renvoie à la section A.1 pour des compléments.

2.1.1 Le problème modèle est-il bien posé ?

L'objet de cette section est de rappeler brièvement les deux principaux résultats qui permettent d'étudier le caractère bien posé du problème (2.1). La notion de problème bien posé est entendue au sens de la définition suivante.

Définition 2.1.1 (*Hadamard*). *On dit que le problème (2.1) est bien posé s'il admet une et une seule solution.* [12]

Lorsque le problème (2.1) est bien posé, son unique solution u satisfait l'estimation a priori suivante : il existe une constante c tel que pour tout $f \in W'$.

$$\|u\|_V \leq c \|f\|_{W'}. \quad (2.5)$$

Cette estimation découle des propriétés générales des opérateurs bijectifs dans les espaces de Banach .

2.1.2 Le lemme de Lax-Milgram

On considère d'abord le cas particulier où l'espace solution et l'espace test dans (2.1) sont identiques : $V = W$. Le problème modèle consiste donc à

$$\begin{cases} \text{Chercher } u \in V \text{ tel que} \\ a(u, w) = f(w), \quad \forall w \in W \end{cases} \quad (2.6)$$

Définition 2.1.2 (*Coercivité*) Soit V un espace de Hilbert. On dit qu'une forme bilinéaire $a \in L(V \times V; \mathbb{R})$ est V -coercive, ou coercive sur V , si

$$\exists \alpha > 0, \forall v \in V, a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad (2.7)$$

Lemme 2.1.1 (*Lax-Milgram*) Soit V un espace de Hilbert $a \in L(V \times V, \mathbb{R})$ et $f \in V'$. On suppose que la forme bilinéaire a est V -coercive. Alors, le problème (2.6) est bien posé.

Lorsque la forme bilinéaire a n'est pas coercive sur V , peut-on en déduire que le problème (2.6) n'est pas bien posé ? La réponse est négative : le lemme de Lax-Milgram ne fournit que des conditions suffisantes pour analyser le caractère bien posé de (2.6).

2.1.3 Le théorème de Banach-Necăs-Babuška (BNB)

Le théorème BNB est le résultat fondamental pour analyser le caractère bien posé des problèmes (2.1) et (2.6). Contrairement au lemme de Lax-Milgram qui ne fournit que des conditions suffisantes, le théorème BNB fournit des conditions nécessaires et suffisantes pour que le problème modèle soit bien posé.

Théorème 2.1.3 (*Banach-Necăs-Babuška*). Soit V et W deux espaces de Hilbert, $a \in L(V \times W, \mathbb{R})$ et $f \in W'$. Alors, le problème (2.1) est bien posé si et seulement si

$$(BNB1) \quad \exists \alpha > 0, \inf_{v \in V} \sup_{w \in W} \frac{a(v, w)}{\|v\|_V \|w\|_W} \geq \alpha \quad (2.8)$$

$$(BNB2) \quad \forall w \in W, (\forall v, a(v, w) = 0) \implies (w = 0) \quad (2.9)$$

La terminologie adoptée pour ce théorème a été introduite par Ern et Guermond [38]. Elle fait référence au fait que le théorème BNB est une reformulation de deux résultats fondamentaux dus à Banach : le théorème de l'image fermée et le théorème de l'application ouverte. Le théorème BNB a été énoncé dans sa forme ci-dessous par Nec'as en 1962 [58]. Son importance pour l'analyse des méthodes d'éléments finis a été soulignée par Babus'ka en 1972 [9].

La condition inf-sup (BNB1) se reformule de la façon suivante : il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $v \in V$.

$$\alpha \|v\|_V \leq \sup_{w \in W} \frac{a(v, w)}{\|w\|_W} \quad (2.10)$$

Pour prouver la condition inf-sup, on peut procéder comme suit : on considère une fonction $v \in V$ et on construit une fonction $w_v \in W$ telle que $a(v, w_v) \geq \alpha_1 \|v\|_V^2$ et $\|w_v\|_W \leq \alpha_2 \|v\|_V$. Ceci permet de montrer que la condition (BNB1) est satisfaite avec $\alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$.

2.1.4 Principe de la méthode de Galerkin

On considère le problème modèle (2.1) et on suppose qu'il est bien posé. La méthode de Galerkin permet d'approcher la solution u de ce problème. L'idée consiste à remplacer dans (2.1) les espaces fonctionnels V et W par des espaces de dimension finie, notés V_h et W_h , ce qui conduit à

$$\begin{cases} \text{Chercher } u_h \in V_h & \text{tel que} \\ a_h(u_h, w_h) = f_h(w_h), & \forall w_h \in W_h \end{cases} \quad (2.11)$$

On dit que (2.11) est le problème approché ou le problème discret et que u_h est la solution approchée. On notera que sous sa forme la plus générale, le problème approché (2.11) fait intervenir une forme bilinéaire $a_h \in L(V_h \times W_h, \mathbb{R})$ qui est une approximation de la

forme bilinéaire a et une forme linéaire $f_h \in W_h'$ qui est une approximation de la forme linéaire f . L'espace V_h , qu'on appellera espace d'approximation, et l'espace W_h , qu'on appellera espace test discret, sont construits à l'aide de la méthode des éléments finis selon les techniques présentées dans le chapitre 1 pour les problèmes en dimension 1 et dans les chapitres 3 et 4 pour les problèmes en dimension supérieure. L'indice h fait référence à la finesse des maillages employés pour construire ces espaces. Les éléments de W_h sont appelés des fonctions tests discrètes.

Un choix particulier dans (2.11) consiste à utiliser le même espace V_h comme espace d'approximation et comme espace test discret, ce qui conduit au problème approché suivant :

$$\begin{cases} \text{Chercher } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ a_h(u_h, w_h) = f_h(w_h), \quad \forall w_h \in W_h \end{cases} \quad (2.12)$$

Dans ce cas, on parle de méthode de Galerkin standard, alors que si les espaces discrets V_h et W_h sont différents, on parle de méthode de Galerkin non-standard (dans la littérature, on rencontre également la terminologie « méthode de Petrov-Galerkin »).

Définition 2.1.4 (*Conformité*) *L'approximation (2.11) est dite conforme si $V_h \subset V$ et $W_h \subset W$; elle est dite non-conforme si $V_h \subset V$ ou $W_h \subset W$. On dit que l'espace V_h est V -conforme lorsque $V_h \subset V$ et que l'espace W_h est W -conforme lorsque $W_h \subset W$.*

Définition 2.1.5 (*Consistance*). *Soit u la solution unique de (2.1). On suppose que la forme bilinéaire a_h peut être étendue à $(V + V_h) \times W_h$. L'approximation (2.11) est dite consistante si*

$$\forall w_h \in W_h \quad a_h(u, w_h) = f_h(w_h) \quad (2.13)$$

Si tel n'est pas le cas, l'approximation est dite non-consistante.

En d'autres termes, l'approximation est consistante si la solution exacte satisfait les équations discrètes. La non-consistance de la méthode d'approximation peut, par exemple, provenir de l'utilisation de quadratures pour évaluer les intégrales dans la forme bilinéaire a et la forme linéaire f . Le problème approché (2.11) est un système linéaire. En effet, on pose

$$N = \dim V_h \text{ et } M = \dim W_h \quad (2.14)$$

Soit $\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$ une base de V_h et soit $\{\Psi_1, \dots, \Psi_M\}$ une base de W_h . On décompose la solution approchée u_h dans la base de V_h selon

$$u_h = \sum_{i=1}^N U_i \varphi_i \quad (2.15)$$

et on introduit le vecteur U de \mathbb{R}^N formé par les composantes de u_h dans et on introduit le vecteur U de \mathbb{R}^N formé par les composantes de u_h dans cette base, $U = (U_i)_{1 \leq i \leq N}$, soit

$$A_{ij} = a_h(\varphi_j, \Psi_i), i \in \{1, \dots, M\}, j \in \{1, \dots, N\} \quad (2.16)$$

et soit $F \in \mathbb{R}^M$ le vecteur de composantes

$$F_i = f_h(\Psi_i), i \in \{1, \dots, M\}$$

Il est clair que u_h est solution de (2.11) si et seulement si

$$AU = F \quad (2.17)$$

2.1.5 Le problème approché est-il bien posé ?

L'objet de cette section est d'analyser le caractère bien posé du problème approché (2.11). On retiendra les résultats suivants.

- Pour une approximation consistante et conforme d'un problème dont la forme bilinéaire est coercive, le problème approché est automatiquement bien posé. De plus, la matrice de rigidité est définie positive.
- Lorsque le caractère bien posé du problème modèle repose sur les conditions inf-sup (BNB1) et (BNB2), celles-ci ne sont pas transférées automatiquement au cadre discret. Pour montrer que le problème discret est bien posé, il faut (et il suffit de) prouver une condition inf-sup discrète et vérifier que l'espace d'approximation et l'espace test discret ont la même dimension

Approximation consistante et conforme d'un problème coercif

Soit V un espace de Hilbert, soit $a \in L(V \times V; \mathbb{R})$ une forme bilinéaire et V -coercive et soit $f \in V'$. Dans ce cadre, le problème modèle (2.6) admet une discret suivant :

$$\begin{cases} \text{Chercher } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ a_h(u_h, w_h) = f_h(w_h), \forall w_h \in W_h \end{cases} \quad (2.18)$$

et on suppose que $V_h \subset V$. On notera que le problème discret (2.16) fait intervenir la même forme bilinéaire a et la même forme linéaire f que le problème modèle (2.6).

Proposition 2.1.6 *Avec les hypothèses ci-dessus, la matrice de rigidité A est définie positive ; par conséquent, le problème discret (2.18) est bien posé.*

Le caractère défini positif de la matrice A résulte du fait que pour tout

$X = (X_i)_{1 \leq i \leq N} \in \mathbb{R}^N$ ou $N = \dim V_h$, on a

$$\sum_{1 \leq i, j \leq N} A_{ij} X_i X_j = a(\xi, \xi) \geq \alpha \|\xi\|_V^2 \quad (2.19)$$

avec $\xi = \sum_{i=1}^N X_i \varphi_i \in V_h$, $\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$ étant une base de V_h .

Par suite, $\sum_{1 \leq i, j \leq N} A_{ij} X_i X_j = 0$ implique $\xi = 0$ et donc $X = 0$.

Remarque 2.1.7 *Si la forme bilinéaire a est symétrique, la matrice de rigidité l'est également.*

Cas général

On considère maintenant le cas général, c'est-à-dire que l'on considère le problème modèle (2.1), que l'on suppose bien posé, et on souhaite utiliser le problème discret (2.11) pour obtenir une solution approchée u_h . On notera $\|\cdot\|_{V_h}$ et $\|\cdot\|_{W_h}$ les normes dont sont équipés les espaces discrets V_h et W_h , respectivement.

L'approximation pouvant être non-conforme, il n'est pas possible d'équiper a priori les espaces discrets V_h et W_h des normes induites par V et W , respectivement. Clairement, en vertu du théorème BNB, le caractère bien posé de (2.11) est équivalent aux deux conditions suivantes :

$$\exists \alpha_h > 0, \inf_{v_h \in V_h} \sup_{w_h \in W_h} \frac{a_h(v_h, w_h)}{\|v_h\|_{V_h} \|w_h\|_{W_h}} \geq \alpha_h \quad (2.20)$$

$$\forall w_h \in W_h, (\forall v_h \in V_h, a_h(v_h, w_h) = 0) \implies (w_h = 0). \quad (2.21)$$

La condition $(BNB1_h)$ est une condition inf-sup discrète. Même si l'approximation est conforme et consistante, rien ne garantit a priori que la condition inf-sup $(BNB1)$ implique la condition inf-sup discrète $(BNB1_h)$. La même difficulté se pose entre les conditions $(BNB2)$ et $(BNB2_h)$.

On constate que l'interprétation des conditions $(BNB1_h)$ et $(BNB2_h)$ en termes matriciels est la suivante :

1. $(BNB1_h)$ équivaut au fait que la matrice A est injective ;
 2. $(BNB2_h)$ équivaut au fait que la matrice A est de rang maximal. Par conséquent, les conditions $(BNB1_h)$ et $(BNB2_h)$ sont équivalentes à $(BNB1_h)$ et $\dim V_h = \dim W_h$.
- En résumé, on a le résultat suivant.

Théorème 2.1.8 *Le problème approché (2.11) est bien posé si et seulement si la condition inf-sup discrète $(BNB1_h)$ est satisfaite et si $\dim V_h = \dim W_h$.*

Remarque 2.1.9 *La constante a_h intervenant dans $(BNB1_h)$ est la plus petite valeur propre de $A^T A$.*

2.1.6 Analyse d'erreur

On considère le problème modèle (2.1) et son approximation (2.11) par la méthode de Galerkin. On suppose que ces deux problèmes sont bien posés, c'est-à-dire que :

1. la forme bilinéaire a est dans $L(V \times W; \mathbb{R})$ et elle satisfait les conditions inf-sup $(BNB1)$ et $(BNB2)$.
2. la forme bilinéaire a_h est dans $L(V_h \times W_h; \mathbb{R})$, elle satisfait la condition inf-sup discrète $(BNB1_h)$ et $\dim V_h = \dim W_h$.

On note u et u_h la solution unique de (2.1) et (2.11), respectivement.

L'objectif de cette section est d'estimer l'erreur $u - u_h$. Cette quantité est appelée l'erreur d'approximation. En particulier, on souhaite préciser sous quelles hypothèses l'erreur

d'approximation tend vers zéro lorsque h tend vers zéro (on rappelle que le paramètre h fait référence à la finesse du maillage qui est utilisé pour construire les espaces V_h et W_h). On s'intéresse donc à des familles d'espaces $\{V_h\}_{h>0}$ et $\{W_h\}_{h>0}$ obtenues en raffinant le maillage.

Approximation consistante et conforme

On suppose dans cette section que l'approximation est consistante et conforme. On a donc $V_h \subset V$ et $W_h \subset W$ et la relation (2.13) est satisfaite.

On considère le problème approché suivant :

$$\begin{cases} \text{Chercher } u_h \in V_h & \text{tel que} \\ a_h(u_h, w_h) = f_h(w_h), & \forall w_h \in W_h \end{cases} \quad (2.22)$$

L'hypothèse $V_h \subset V$ implique en particulier que l'erreur $u - u_h$ est dans V .

On peut donc utiliser la norme $\|\cdot\|_V$ pour la mesurer. Une conséquence immédiate de (2.13) est la suivante.

Lemme 2.1.2 (Orthogonalité de Galerkin) . Avec les hypothèses ci-dessus, on a la relation, dite d'orthogonalité de Galerkin,

$$\forall w_h \in W_h, \quad a_h(u - u_h, w_h) = 0 \quad (2.23)$$

On suppose en outre que $a_h = a$ et $f_h = f$. Le résultat suivant est connu sous le nom de lemme de Céa.

Lemme 2.1.3 (Céa) . Avec les hypothèses ci-dessus, on a

$$\|u - u_h\|_V \leq \left(1 + \frac{\|a\|_{V,W}}{\alpha_h}\right) \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V. \quad (2.24)$$

On suppose en outre que $V = W$, $V_h = W_h$ et que la forme bilinéaire a est V -coercitive. Dans ces conditions, on montre que l'estimation d'erreur devient

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{\|a\|_{V,V}}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V. \quad (2.25)$$

où α est la constante de coercitive de a . Si la forme bilinéaire a est de plus symétrique, cette estimation peut encore être améliorée en

$$\|u - u_h\|_V \leq \left(\frac{\|a\|_{V,V}}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V. \quad (2.26)$$

Afin d'établir la convergence de u_h vers u , on doit contrôler la quantité $\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V$. Il s'agit donc d'estimer la distance de u à V_h pour la norme $\|\cdot\|_V$.

PROBLÈME MODÈLE EN DIMENSION DEUX

3.1 UN PROBLÈME MODÈLE

Soit Ω un domaine polygonale de \mathbb{R}^2 et $f \in L^2(\Omega)$.

On considère à nouveau le problème :

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in \Omega \\ u = 0, & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.1)$$

Il est bien connu (en utilisant le théorème de Lax-Milgram) que u est l'unique solution du problème variationnel suivant :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \quad (3.2)$$

Donc le cadre fonctionnel dans lequel se trouve la solution u est l'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$.

Les méthodes **conformes** consistent à chercher une approximation $u_h \approx u$ dans un espace V_h de dimension finie qui satisfait $V_h \subset H_0^1(\Omega)$.

Notre objectif maintenant est d'approcher le problème par une méthode **non conforme**

i.e., $V_h \not\subset H_0^1(\Omega)$.

Soit \mathcal{T}_h une triangulation régulière de Ω . \mathcal{E}_h est l'ensemble des arrêtes, \mathcal{E}_h^i est l'ensemble des arrêtes intérieures, \mathcal{E}_h^b est l'ensemble des arrêtes du bord. \mathcal{N}_h est l'ensemble des noeuds.

On considère l'espace des éléments finis discontinus :

$$V_h = \{v \in L^2(\Omega); v|_T \in \mathbb{P}^k, \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\} \quad (3.3)$$

Soit $v \in V_h$ ou plus généralement une fonction H^2 - par morceaux.

Si e une arrête intérieure commune de T^\pm (voir la figure 3.1).

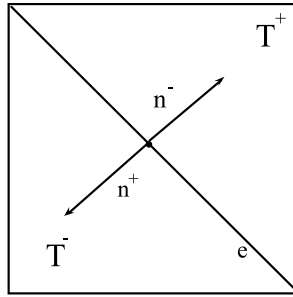


FIGURE 3.1 – deux triangles adjacents

Alors on définit le **saut** et la **moyenne** sur une arrête intérieure e par :

$$[[v]] = v_- \mathbf{n}^- + v_+ \mathbf{n}^+ \quad \text{et} \quad \{\{\nabla v\}\} = \frac{\nabla v_- + \nabla v_+}{2}.$$

Si e une arrête du bord (voir la figure 3.1) alors

$$[[v]] = v_T \mathbf{n} \quad \text{et} \quad \{\{\nabla v\}\} = \nabla v_T$$

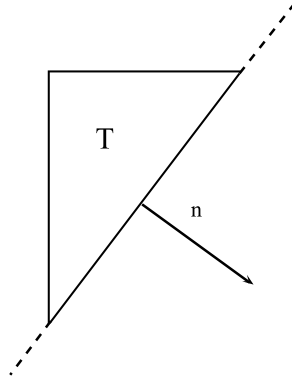


FIGURE 3.2 – Un triangle du bord.

3.1.1 Le problème discret par (SIP)

On considère le problème discret suivant :

$$\begin{cases} \text{trouver } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ a_h(u_h, v) = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx, \quad \forall v \in V_h \end{cases} \quad (3.4)$$

avec

$$a_h(v, w) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla v \nabla w dx - \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e (\{\{\nabla v\}\} [[w]] + [[v]] \{\{\nabla w\}\}) ds + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{\sigma}{|e|} \int_e [[v]] [[w]] ds$$

où :

- σ est un paramètre de **pénalisation** positif.
- \mathcal{T}_h une triangulation de Ω
- \mathcal{E}_h est l'ensemble des arêtes.

On Note que :

- $-\sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e ([[w]] \{\{\nabla v\}\}) ds$ vient de **l'intégration par parties** sur chaque triangle.

- Le terme $-\sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e (\llbracket v \rrbracket) \{\{\nabla w\}\} ds$ pour avoir une forme **symétrique**.
- Alors que le terme $+\sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{\sigma}{|e|} \int_e \llbracket v \rrbracket \llbracket w \rrbracket ds$ pour avoir la **stabilité** de la méthode.

Lemme 3.1.1 (Inégalité inverse) $\forall T \in \mathcal{T}_h, \forall v \in \mathcal{P}^k(T)$ il existe une constante C indépendante de h_T tel que

$$\|v\|_{1,T} \leq C \frac{\|v\|_{0,T}}{h_T}. \quad (3.5)$$

Preuve. Pour simplifier supposons que $h_T \leq h \leq 1$.

On passe au triangle de référence \hat{T} défini par

$$\hat{T} := \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \text{ et } x_1 + x_2 \leq 1\}.$$

Nous avons pour chaque triangle $T \in \mathcal{T}_h$ du maillage, il exist A_T matrice 2×2 et $b_T \in \mathbb{R}^2$ tels que $T = F_T(\hat{T}_0)$ où F_T est l'application affine définie par $F_T(\hat{x}) = A_T(\hat{x}) + b_T$.

Soit $v \in \mathbb{P}^k(T)$, et on pose $\hat{v}(\hat{x}) = (v \circ F)(\hat{x})$, on utilise le fait que en dimension finie les normes sont équivalentes, on déduit que $\|v\|_{1,T} \leq C_{\hat{T}} \|\hat{v}\|_{0,\hat{T}}$.

D'autre part on a

$$\begin{aligned} |v|_{1,T}^2 &= \int_T |\nabla_x v|^2 dx \leq \int_{\hat{T}} \|A_T^{-1}\|^2 |\nabla_{\hat{x}} \hat{v}|^2 |det(A_T)| d\hat{x} \quad (\text{puisque } \nabla_x v = A_T^{-1} \nabla_{\hat{x}} \hat{v}) \\ &= \|A_T^{-1}\|^2 |det(A_T)| \|\hat{v}\|_{1,\hat{T}}^2 \leq C \|A_T^{-1}\|^2 |det(A_T)| \|\hat{v}\|_{0,\hat{T}}^2. \\ &\leq C \|A_T^{-1}\|^2 \|v\|_{0,T}^2 \leq C h_T^{-2} \|v\|_{0,T}^2 \quad \text{puisque } \|A_T^{-1}\| \leq \frac{\rho_{\hat{T}}}{h_T}. \end{aligned}$$

■

Lemme 3.1.2 (Inégalité de trace discrète) $\forall T \in \mathcal{T}_h, e \in \partial T$ et $\forall v \in \mathcal{P}^k(T)$ il existe une constante C indépendante de h tel que

$$|e| \left\| \frac{\partial v}{\partial n} \right\|_{0,e}^2 \leq C \|\nabla v\|_{0,T}^2. \quad (3.6)$$

Preuve.

Nous passons au triangle de référence \hat{T} . On utilise le fait que les normes sont équivalente en dimension finie donc on

$$\|\partial \hat{v} / \partial n\|_{0,\hat{e}} \leq \|\nabla_{\hat{x}} \hat{v}\|_{0,\hat{T}}$$

On a d'une part

$$\|\partial\hat{v}/\partial n\|_{0,\hat{e}}^2 = |e|\|\partial v/\partial n\|_{0,e}^2$$

d'autre part on a ¹ :

$$\|\nabla_{\hat{x}}\hat{v}\|_{0,\hat{T}}^2 = \frac{\|A_T\|^2}{|\det(A_T)|}\|\nabla_x v\|_{0,T}^2 \sim \|\nabla_x v\|_{0,T}^2.$$

■

Du lemme 3.1.2 (puisque $\frac{\partial v}{\partial n} = \nabla v \cdot n$), on peut déduire facilement que :

$$\sum_{e \in \mathcal{E}_h} |e| \|\{\{\nabla v\}\}\|_{0,e}^2 \leq C \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |v|_{1,T}^2 \quad (3.7)$$

3.2 ANALYSE a priori

On définit les espaces de Sobolev suivants :

$$H^\ell(\Omega, \mathcal{T}_h) = \{v \in L^2(\Omega) : v|_T \in H^\ell(T), \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\}$$

Pour $v \in V_h$ nous définissons les deux quantités suivantes :

$$\|v\|_h = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} |\nabla v|_{0,T}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{\sigma}{|e|} \|[[v]]\|_{0,e}^2 \right)^{1/2} \quad (3.8)$$

$$\| |v| \|_h = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} |\nabla v|_{0,T}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{|e|}{\sigma} \|\{\{\nabla v\}\}\|_{0,e}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{\sigma}{|e|} \|[[v]]\|_{0,e}^2 \right)^{1/2} \quad (3.9)$$

Lemme 3.2.1 *Les quantités (3.8) et (3.9) définissent deux normes sur V_h .*

Preuve. Soit $v \in V_h$ tel que $\sum_{T \in \mathcal{T}_h} |\nabla v|_{0,T}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{\sigma}{|e|} \|[[v]]\|_{0,e}^2 = 0$, alors le premier terme de cette égalité implique que $v = Cte$ sur chaque triangle. Le deuxième terme, si l'on l'applique sur les arêtes intérieures \mathcal{E}_h^i implique que la constante est la même dans le domaine entier. Finalement, la nullité du deuxième terme pour les arêtes du bord \mathcal{E}_h^b signifie que cette constante égale à zéro. ■

¹si le maillage \mathcal{T}_h est régulier, i.e., $\exists \sigma_0$, tel que $\forall T \in \mathcal{T}_h, \frac{h_T}{\rho_T} \leq \sigma_0$

Remarque 3.2.1 .

La norme $\|\cdot\|_h$ est bien définie sur $H^1(\Omega, \mathcal{T}_h) \supset H^1(\Omega)$.

La norme $\|\|\cdot\|\|_h$ est bien définie sur $H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$.

Il est clair que :

$$\|v\|_h \leq \|\|v\|\|_h \quad \forall v \in H^2(\Omega, \mathcal{T}_h).$$

On utilise l'inégalité (3.7) on peut déduire que :

$$\|\|v\|\|_h \leq C\|v\|_h \quad \forall v \in V_h.$$

Proposition 3.2.2 La forme bilinéaire $a_h(\cdot, \cdot)$ est continue sur V_h et pour σ suffisamment grand elle est coercive sur V_h .

Par conséquent le problème discret (3.4) admet une solution unique.

Preuve.

$$a_h(v, v) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |v|_{H^1(T)}^2 - 2 \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \{\{\nabla v\}\} \llbracket v \rrbracket ds + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{\sigma}{|e|} \|\llbracket v \rrbracket\|_{L^2(e)}^2 \quad (3.10)$$

On a, $\forall \rho > 0$

$$\begin{aligned} \left| 2 \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \{\{\nabla v\}\} \llbracket v \rrbracket ds \right| &\leq 2 \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{|e|}{\rho} \|\{\{\nabla v\}\}\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{\rho}{|e|} \|\llbracket v \rrbracket\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{|e|}{\rho} \|\{\{\nabla v\}\}\|_{L^2(e)}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{\rho}{|e|} \|\llbracket v \rrbracket\|_{L^2(e)}^2 \\ &\leq \frac{C_*}{\rho} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |v|_{H^1(T)}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{\rho}{|e|} \|\llbracket v \rrbracket\|_{L^2(e)}^2. \end{aligned}$$

Dans l'inégalité précédente on a utilisé l'inégalité (3.7) et par conséquent,

$$a_h(v, v) \geq \left(1 - \frac{C_*}{\rho}\right) \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |v|_{H^1(T)}^2 + (\sigma - \rho) \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{|e|} \|\llbracket v \rrbracket\|_{L^2(e)}^2 \quad (3.11)$$

On choisit ρ suffisamment grand tel que

$$1 - \frac{C_*}{\rho} \geq \frac{1}{2}$$

Ensuite on choisit σ_* suffisamment grand tel que

$$\rho \leq \frac{\sigma_*}{2}$$

Alors nous choisissons dans (3.4)

$$\sigma \geq \sigma_* \implies \frac{\sigma}{2} \geq \rho \iff (\sigma - \rho) \geq \frac{\sigma}{2}$$

et donc

$$a_h(v, v) \geq \frac{1}{2} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |v|_{H^1(T)}^2 + \frac{\sigma}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{|e|} \|[[v]]\|_{L^2(e)}^2 = \frac{1}{2} \|v\|_h^2 \quad (3.12)$$

■

3.2.1 L'orthogonalité de Galerkin pour la méthode SIP

Proposition 3.2.3 *Si la solution u du problème (3.1) a la régularité $H^2(\Omega)$. Alors la méthode SIP est consistante et on a l'estimation d'erreur "abstraite" suivante :*

$$\| \|u - u_h\| \|_h \leq C \inf_{v \in V_h} \| \|u - v\| \|_h \quad (3.13)$$

où u_h est la solution de (3.4) et C une constante indépendante de h .

Preuve.

Nous montrons la consistance de la méthode sous l'hypothèse que $u \in H^2(\Omega)$, i.e

$$a_h(u, v) = \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in V_h \quad (3.14)$$

On a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f v dx &= \int_{\Omega} -\Delta u v dx = \sum_{T \in \mathcal{E}_h} \int_T (-\Delta u) v dx \quad (u \in H^2(\Omega), v \in V_h) \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla u \cdot \nabla v dx - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} \nabla u \cdot (vn) ds \end{aligned} \quad (3.15)$$

Puisque $u \in H^2(\Omega)$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ d'après les injections de Sobolev u est continue (voir par exemple Brézis [7]). De plus $\nabla u \in (H^1(\Omega))^2$ et donc d'après le théorème de trace, la trace

de ∇u est continue sur chaque arête $e \in \mathcal{E}_h$ (voir par exemple Alaire [5]), et donc on peut écrire :

$$\begin{aligned} & \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla u \cdot \nabla v dx - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} \nabla u \cdot (vn) ds = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla u \cdot \nabla v dx - \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \{\{\nabla u\}\} \cdot \llbracket v \rrbracket ds \\ & = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla u \cdot \nabla v dx - \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \{\{\nabla u\}\} \cdot \llbracket v \rrbracket ds - \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \{\{\nabla v\}\} \cdot \llbracket u \rrbracket ds + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{\sigma}{|e|} \int_e \llbracket u \rrbracket \cdot \llbracket v \rrbracket ds \end{aligned}$$

et donc

$$\int_{\Omega} f v dx = a_h(u, v), \quad \forall v \in V_h. \quad (3.16)$$

Ce qui montre la consistance de la méthode, si $u \in H^2(\Omega)$.

Pour l'estimation abstraite (3.13), il est clair que pour tout $v \in V_h$ on a :

$$\begin{aligned}
|||u - u_h|||_h &\leq |||u - v|||_h + |||v - u_h|||_h && \text{(l'inégalité triangulaire)} \\
&\leq |||u - v|||_h + C||v - u_h||_h && \text{(l'équivalence des normes)} \\
&\leq |||u - v|||_h + C \max_{w \in V_h/\{0\}} \frac{a_h(v - u_h, w)}{\|w\|_h} && \text{(la coercivité de } a_h) \\
&= |||u - v|||_h + C \max_{w \in V_h/\{0\}} \frac{a_h(v - u, w)}{\|w\|_h} && \text{(la consistance du SIP)} \\
&\leq |||u - v|||_h + C||v - u||_h \leq Cte |||u - v|||_h && \text{(la continuité de } a_h)
\end{aligned}$$

Finalement, puisque v est arbitraire dans les inégalités précédentes, ceci montre que :

$$|||u - u_h|||_h \leq Cte \inf_{v \in V_h} |||u - v|||_h.$$

■

Proposition 3.2.4 *Si la solution u du problème (3.1) a la régularité $H^2(\Omega)$. Alors on a l'estimation d'erreur "concrète" suivante :*

$$|||u - u_h|||_h \leq Ch^k |u|_{k+1, \Omega} \quad (3.17)$$

où u_h est la solution de (3.4) et C une constante indépendante de h .

Preuve.

Si $u \in H^2(\Omega)$ alors d'après les injections de Sobolev $u \in C^0(\bar{\Omega})$ donc l'interpolé de Lagrange $\Pi_h u$ de u est bien défini comme un élément de V_h et donc il suffit de prendre dans l'estimation (3.13) $v = \Pi_h u$. Nous obtenons donc

$$|||u - u_h|||_h \leq C|||u - \Pi_h(u)|||_h = C||u - \Pi_h(u)||_{1, \Omega} \leq Ch^k |u|_{k+1, \Omega}.$$

C.Q.F.D ■

3.2.2 Estimation d'erreur par dualité

Par des arguments de " dualité " nous pouvons démontrer la proposition suivante :

Proposition 3.2.5 *Supposons que, $u \in H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$ et que Ω est convexe alors l'estimation suivante :*

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} \leq C h \| |u - u_h| \|_h \quad (3.18)$$

Preuve. Nous définissons la fonction w comme solution du problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta w = u - u_h, & \text{si } x \in \Omega \\ w = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.19)$$

Alors on a :

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{0,\Omega}^2 &= \int_{\Omega} |u - u_h|^2 dx = (u - u_h, u - u_h) = (u - u_h, -\Delta w) \\ &= \int_{\Omega} (-\Delta w)(u - u_h) dx = a_h(u - u_h, w) = a_h(u - u_h, w - v_h), \quad \forall v_h \in \tilde{V}_h \subset (H_0^1(\Omega) \cap V_h) \end{aligned}$$

Alors on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwartz on obtient :

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} \leq \frac{\| |u - u_h| \|_h \| |w - v_h| \|_h}{\|u - u_h\|_{0,\Omega}} = \frac{\| |u - u_h| \|_h \| |w - v_h| \|_h}{\|\Delta w\|_{0,\Omega}}.$$

Ce qui implique

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} \leq \| |u - u_h| \|_h \inf_{v_h \in \tilde{V}_h \cap H_0^1} \frac{\| |w - v_h| \|_h}{\|\Delta w\|_{0,\Omega}}.$$

Rappelons que si on suppose que Ω est convexe alors $w \in H^2(\Omega)$.

On prend maintenant $v_h = \Pi_h w$ l'interpolé de Lagrange de w dans

$$\inf_{v_h \in \tilde{V}_h \cap H_0^1} \frac{\| |w - v_h| \|_h}{\|\Delta w\|_{0,\Omega}}$$

On obtient finalement l'estimation (3.18). ■

Remarque 3.2.6

► La formule d'intégration par parties (ou de Green)

$$\int_T (-\Delta u)v dx = \int_T \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\partial T} \nabla u \cdot (vn) ds \quad (3.20)$$

demande une justification si $u \notin H^2(\Omega)$.

► De la section précédente on tire que même si la méthode utilisée est non conforme l'estimation abstraite (3.13) est possible, si la solution u a la régularité H^2 .

► Par une estimation par dualité si le domaine Ω est convexe on peut démontrer l'estimation concrète (3.18) où seulement la régularité H^2 par morceaux de u est demandée.

► L'analyse *a priori* de la méthode SIP exige une régularité additionnelle de la solution exacte pour justifier la formule d'intégration par parties et aussi pour donner un sens la norme $|||\cdot|||_h$.

$$|||v|||_h^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |v|_{H^1(T)}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{|e|}{\sigma} \| \{\{ \nabla v \} \} \|_{L^2(e)}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{\sigma}{|e|} \| [v] \|_{L^2(e)}^2 \quad (3.21)$$

Question Est-il possible d'obtenir une estimation d'erreur abstraite (quasi-optimale) pour la méthode SIP en utilisant que la solution u a seulement la régularité $H_0^1(\Omega)$ du problème faible ?

3.3 ANALYSE INTERMÉDIAIRE

L'objectif de cette section est de répondre à la question évoquée à la fin de la section précédente. Le résultat principal de cette section est le suivant :

Théorème 3.3.1 *Soit u la solution du problème classique (3.1) et $u_h \in V_h$ la solution de problème discret (3.4). Alors*

$$\|u - u_h\|_h \leq C \left(\inf_{v \in V_h} \|u - v\|_h + \text{Osc}(f) \right) \quad (3.22)$$

où

$$\text{Osc}(f) = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|f - \tilde{f}_T\|_{L^2(T)}^2 \right)^{1/2} \quad (3.23)$$

et \tilde{f}_T est la projection- $L^2(T)$ de f dans $\mathbb{P}_{k-1}(T)$.

La démonstration du théorème précédent utilise une combinaison des techniques de l'analyse *a priori* et l'analyse *a posteriori*, elle ne nécessite que la régularité H^1 de la solution faible. La démonstration est basée sur les idées générales suivantes :

- Remplacer la norme $|||\cdot|||_h$ par norme $\|\cdot\|_h$ qui est bien définie sur $H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)$.

$$\|v\|_h^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |v|_{H^1(T)}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{\sigma}{|e|} \|[[v]]\|_{L^2(e)}^2 \quad (3.24)$$

- Remplacer la consistance (Galerkin orthogonality) par l'analogie de l'estimation locale de l'analyse a posteriori et donc on n'aura pas besoin de faire des intégration par parties que fait intervenir u .
- La démonstration du théorème 3.3.1 utilise principalement trois nouveaux outils.

3.3.1 Premier outil : Un opérateur d'enrichissement E_h

L'opérateur d'enrichissement E_h a été introduit pour la première fois dans le contexte de la méthode des décomposition des domaines pour les méthodes des éléments finis non conformes classiques. Les estimations concernant cet opérateur ont été obtenu par l'utilisation des estimations discrètes élémentaires. L'opérateur E_h a un grand avantage par rapport à l'interpolé de Lagrange et celui de Clément. En effet, l'opérateur de Lagrange d'une fonction ne peut être défini que si la fonction en considération est continue. Par contre l'opérateur de Lagrange a une propriété très importante ; c'est le fait qu'il présente une projection, i.e.,

$$\Pi_h(\Pi_h v) = \Pi_h v.$$

Alors que l'opérateur de Clément [9], est défini même pour une fonction dans $L^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$, mais cet opérateur n'est pas une projection.

L'opérateur d'enrichissement que nous sommes entrain de définir a les deux propriétés mentionnées précédemment.

Définition de l'opérateur E_h

Soient,

$$V_h^1 = \{v_h \in L^2(\Omega) : v_{h/T} \in \mathbb{P}^1(T), \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\},$$

$$\tilde{V}_h^1 = \{\tilde{v}_h \in C^0(\bar{\Omega}) : \tilde{v}_{h/T} \in \mathbb{P}^1(T), \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\},$$

Alors il existe un opérateur $E_h : V_h^1 \longrightarrow \tilde{V}_h^1$ cet opérateur est défini par :

$$E_h(v)(x) = \begin{cases} \frac{1}{|\mathcal{T}_x|} \sum_{T \in \mathcal{T}_x} v_{/T}(x) & \text{si } x \in \mathcal{N}_h/\Gamma \\ 0 & \text{si } x \in \mathcal{N}_h \cap \Gamma \end{cases} \quad (3.25)$$

où $\mathcal{T}_x = \{T \in \mathcal{T}_h \text{ tel que } x \text{ une arrête sur } \partial T\}$.

Proposition 3.3.2 *L'opérateur E_h satisfait les propriétés suivantes :*

$$\|E_h(v)\|_h = |E_h(v)|_{1,\Omega} \leq C\|v\|_h, \quad \forall v \in V_h \quad (3.26)$$

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-2} \|v - E_h(v)\|_{0,T}^2 \leq \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{|e|} \|[[v]]\|_{0,e}^2, \quad \forall v \in V_h \quad (3.27)$$

$$\leq C\|v\|_h^2, \quad \forall v \in V_h \quad (3.28)$$

Preuve. Nous remarquons tous d'abord que chaque triangle $T' \in \mathcal{T}_x$ peut être connecté à T par une chaîne de triangles $T_1, T_2, \dots, T_n \in \mathcal{T}_x$, alors

$$\begin{aligned} |v_{/T}(x) - v_{/T'}(x)|^2 &= \left| \sum_{j=1}^{n-1} [v_{/T_j}(x) - v_{/T_{j+1}}(x)] \right|^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^{n-1} |v_{/T_j}(x) - v_{/T_{j+1}}(x)|^2 = \sum_{j=1}^{n-1} |[v]_{e_j}(x)|^2 \leq C \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{|e_j|} \|[[v]]_{e_j}\|_{0,e}^2. \end{aligned}$$

La deuxième inégalité découle de cette observation :

$$|v(x) - E_h v(x)|^2 = \left| \frac{1}{|\mathcal{T}_x|} \sum_{T' \in \mathcal{T}_x} (v_{/T}(x) - v_{/T'}(x)) \right|^2 \leq C \sum_{e \in \mathcal{E}_h} |e|^{-1} \|[[v]]_e\|_{0,e}^2$$

Pour la première inégalité, nous rappelons que $\forall v \in V_h$, $E_h v$ est continue et donc :

$$\begin{aligned}
\|E_h v\|_h^2 &= |E_h v|_{H^1(\Omega)}^2 \\
&\leq 2\left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} |E_h v - v|_{H^1(T)}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |v|_{H^1(T)}^2\right) \\
&\leq C\left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-2} \|E_h v - v\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |v|_{H^1(T)}^2\right) \\
&\leq C\left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{|e|} \|\llbracket v \rrbracket\|_{L^2(e)}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |v|_{H^1(T)}^2\right) \leq C\|v\|_h^2.
\end{aligned}$$

■

3.3.2 Deuxième outil : Une estimation locale

Pour toute la suite, \mathcal{T}_e est l'ensemble de deux triangles qui considère e comme une arête commune. \tilde{f}_T est la projection de f suivant le produit scalaire de $L^2(T)$ dans $P_0(T)$.

Lemme 3.3.1 (Fonctions de bulle sur T)

Soit $b_T \in H_0^1(T)$ une fonction telle que :

1. $0 \leq b_T \leq 1$;
2. $\exists D \subset T$ tel que $\text{mes}(D) > 0$ et $b_{K|D} \geq 1/2$.

Soit $m \in \mathbb{N}$. Il existe $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$ telles que pour toute fonction $v \in \mathbb{P}^k(T)$ nous avons :

$$\|b_T v\|_{0,T} \leq \|v\|_{0,T} \leq c_1 \|b_T^{1/2} v\|_{0,T} \quad (3.29)$$

$$|b_T v|_{1,T} \leq c_2 h_T^{-1} \|v\|_{0,T} \quad (3.30)$$

Lemme 3.3.2 (Fonctions de bulle sur e)

Soit $b_e \in H_0^1(\mathcal{T}_e)$ telle que :

1. $0 \leq b_e \leq 1$;
2. $\exists D \subset \mathcal{T}_e$ tel que $\text{mes}(D') > 0$ et $b_{e|D'} \geq 1/2$.
3. $b_{e|e} \in H_0^1(e)$;

4. $\exists D' \subset e$ tel que $\text{mes}(D) > 0$ et $b_{e|D} \geq 1/2$.

Soit $m \in \mathbb{N}$. Il existe $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$ telles que pour toute fonction $v \in \mathbb{P}^k(e)$ nous avons :

$$\|b_e v\|_{0,e} \leq \|v\|_{0,e} \leq c_1 \|b_e^{1/2} v\|_{0,e} \quad (3.31)$$

$$c_2 h_e^{1/2} \|v\|_{0,e} \leq \|b_e P_e(v)\|_{0,\mathcal{T}_e} \leq c_3 h_e^{1/2} \|v\|_{0,e} \quad (3.32)$$

$$|b_e P_e(v)|_{1,\mathcal{T}_e} \leq c_4 h_T^{-\frac{1}{2}} \|v\|_{0,e} \quad (3.33)$$

où P_e est un opérateur de relèvement de $\mathbb{P}^k(e) \rightarrow \mathbb{P}^k(\mathcal{T}_e)$ défini par :

$$\forall v \in \mathbb{P}^k(e), P_e(v) = \begin{cases} P_{e,T}(v) & \text{sur } T, \\ P_{e,T'}(v) & \text{sur } T'. \end{cases}$$

Lemme 3.3.3 Pour tout $v \in V_h, T \in \mathcal{T}_h$ et $e \in \mathcal{E}_h^i$

$$h_T \|f + \Delta v\|_{0,T} \leq C(|u - v|_{H^1(T)} + h_T \|f - \tilde{f}_T\|_{L^2(T)}) \quad (3.34)$$

$$|e|^{\frac{1}{2}} \|[\partial v / \partial n]\|_{L^2(e)} \leq C\left(\sum_{T \in \mathcal{T}_e} |u - v|_{H^1(T)} + \sum_{T \in \mathcal{T}_e} h_T \|f - \tilde{f}_T\|_{L^2(T)}\right) \quad (3.35)$$

► Les démonstrations de ces estimées sont très similaires aux celles de l'efficacité de l'estimation *a posteriori* pour le cas des méthodes conformes, en remplaçant u_h par v_h quelconque dans V_h .

► Les démonstrations n'utilisent pas des intégrations par parties qui font intervenir u .

Preuve. On utilise l'inégalité triangulaire on obtient :

$$\|f + \Delta v\|_{0,T} \leq \|f - w\|_{0,T} + \|w + \Delta v\|_{0,T}.$$

On estime tous d'abord le terme $\|w + \Delta v\|_{0,T}$.

Soit b_T la fonction de " bulle " sur T écrite en fonction des coordonnées barycentriques, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et on pose

$$\phi(x) = b_T(x)(w + \Delta v).$$

D'après le lemme 3.3.1 nous avons :

$$\begin{aligned} \|w + \Delta v\|_{0,T}^2 &\leq \int_T (w + \Delta v) b_T(x) (w + \Delta v) dx \\ &= \int_T (w - f)(\phi(x)) dx + \int_T (f + \Delta v)\phi dx. \end{aligned}$$

Puisque ϕ s'annule sur la frontière de T on a

$$\int_T (f + \Delta v)\phi \, dx = \int_T \nabla(v - u)\nabla\phi \, dx,$$

et donc en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz on obtient :

$$\|w + \Delta v\|_{0,T}^2 \leq |v - u|_{1,T} |\phi|_{1,T} + \|w - f\|_{0,T} \|\phi\|_{0,T}$$

D'après le lemme 3.1.1 on a :

$$h_T^{-1} \|\phi\|_{0,T} \geq C |\phi|_{1,T}$$

ce qui implique que :

$$\|w + \Delta v\|_{0,T}^2 \leq C (h_T^{-1} |v - u|_{1,T} + \|w - f\|_{0,T}) \|\phi\|_{0,T}.$$

Rappelons que $\phi(x) = b_T(x)(w + \Delta v)$. On utilise à nouveau le lemme 3.3.1 on obtient :

$$\|w + \Delta v\|_{0,T} \leq C (h_T^{-1} |v - u|_{1,T} + \|w - f\|_{0,T}). \quad (3.36)$$

On multiplie l'inéquation (3.36) par h_T on obtient :

$$h_T \|w + \Delta v\|_{0,T} \leq C (|v - u|_{1,T} + h_T \|w - f\|_{0,T})$$

et par conséquent :

$$h_T \|f + \Delta v\|_{0,T} \leq C (|v - u|_{1,T} + h_T \|w - f\|_{0,T}).$$

Pour l'estimation (3.35), soit $e = \partial T^+ \cap \partial T^-$ une arête commune entre T^+ et T^- .

On prolonge $\left[\frac{\partial v}{\partial n} \right]$ à une fonction ϕ définie sur $\mathcal{T}_e = T^+ \cup T^-$ par constants suivant les lignes normales à e . Autrement dit, $\phi = P_e(\llbracket \partial v / \partial n \rrbracket_e)$ où P_e est l'opérateur de prolongement défini dans le lemme 3.3.2. Soit b une fonction de bulle sur $\mathcal{T}_e = T^+ \cup T^-$.

On remarque que :

$$\int_{\mathcal{T}_e} (f + \Delta v)\phi b \, dx - \int_{\mathcal{T}_e} \nabla(u - v) \cdot \nabla(\phi b) \, dx = \int_e \left[\left[\frac{\partial v}{\partial n} \right] \right] \phi b \, ds.$$

En effet,

$$\begin{aligned} \int_{T^+} ((f + \Delta v)\phi b - \nabla(u - v) \cdot \nabla(\phi b)) \, dx + \int_{T^-} ((f + \Delta v)\phi b - \nabla(u - v) \cdot \nabla(\phi b)) \, dx \\ = \int_e \frac{\partial v^+}{\partial n^+} \phi b \, ds - \int_e \frac{\partial v^-}{\partial n^+} \phi b \, ds \\ = \int_e \left(\frac{\partial v^+}{\partial n^+} - \frac{\partial v^-}{\partial n^+} \right) \phi b \, ds \\ = \int_e \left[\left[\frac{\partial v}{\partial n} \right] \right]^2 b \, ds. \end{aligned}$$

Alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz implique que :

$$\begin{aligned} \int_e \left[\left[\frac{\partial v}{\partial n} \right] \right]^2 b \, ds \leq (\|f + \Delta v\|_{0,T^+}) \|\phi b\|_{0,T^+} + (|u - v|_{1,T^+}) |\phi b|_{1,T^+} \\ + (\|f + \Delta v\|_{0,T^-}) \|\phi b\|_{0,T^-} + (|u - v|_{1,T^-}) |\phi b|_{1,T^-}. \end{aligned}$$

On utilise à nouveau le lemme (3.3.2) on a :

$$\begin{aligned} |\phi b|_{1,\mathcal{T}_e} &= |P_e \left(\left[\left[\frac{\partial v}{\partial n} \right] \right] \right) b|_{1,\mathcal{T}_e} \leq C |e|^{-\frac{1}{2}} \left\| \left[\left[\frac{\partial v}{\partial n} \right] \right] \right\|_{0,e}, \\ \|\phi b\|_{0,\mathcal{T}_e} &= \|P_e \left(\left[\left[\frac{\partial v}{\partial n} \right] \right] \right) b\|_{0,\mathcal{T}_e} \leq C |e|^{\frac{1}{2}} \left\| \left[\left[\frac{\partial v}{\partial n} \right] \right] \right\|_{0,e}, \\ \int_e \left[\left[\frac{\partial v}{\partial n} \right] \right]^2 ds &\leq C \int_e \left[\left[\frac{\partial v}{\partial n} \right] \right]^2 b \, ds. \end{aligned}$$

Alors on déduit que :

$$\begin{aligned} \left\| \left[\left[\frac{\partial v}{\partial n} \right] \right] \right\|_{L^2(e)} &\leq C (|e|^{-\frac{1}{2}} \sum_{T \in \mathcal{T}_e} |u - v|_{H^1(T)} + \sum_{T \in \mathcal{T}_e} |e|^{\frac{1}{2}} \|f - \tilde{f}_T\|_{L^2(T)}) \\ \Rightarrow |e|^{\frac{1}{2}} \left\| \left[\left[\frac{\partial v}{\partial n} \right] \right] \right\|_{L^2(e)} &\leq C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_e} |u - v|_{H^1(T)} + \sum_{T \in \mathcal{T}_e} h_T \|f - \tilde{f}_T\|_{L^2(T)} \right). \end{aligned}$$

■

Estimation d'erreur globale

Par une sommation sur tous les triangles et les arêtes du maillage on obtient l'estimation suivante :

Proposition 3.3.3 *Soit u la solution du problème (3.1) et $f \in L^2(\Omega)$. Alors il existe une constante C indépendante de h telle que :*

$$\begin{aligned} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|f + \Delta v\|_{L^2(T)}^2 &\leq C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} |u - v|_{H^1(T)}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|f - \tilde{f}_T\|_{L^2(T)}^2 \right) \\ &\leq C (\|u - v\|_h + \text{Osc}(f))^2. \\ \sum_{e \in \mathcal{E}_h} |e| \|[[\partial v / \partial n]]\|_{L^2(e)}^2 &\leq C \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (|u - v|_{H^1(T)}^2 + h_T^2 \|f - \tilde{f}_T\|_{L^2(T)}^2) \\ &\leq C (\|u - v\|_h + \text{Osc}(f))^2, \forall v \in V_h. \end{aligned}$$

3.3.3 Troisième outil : Formule d'intégration par parties

Lemme 3.3.4 *Soit $v, w \in V_h$ alors on a :*

$$-\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\Delta v) w \, dx = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla v \nabla w \, dx - \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \{\{\nabla w\}\} [[v]] \, ds - \sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} \int_e [[\partial v / \partial n]] \{\{w\}\} \, ds. \quad (3.37)$$

Preuve. Nous utilisons la formule de Green sur chaque triangle T on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla v \cdot \nabla w \, dx &= - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\Delta v) w \, dx + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} \nabla v \cdot (wn) \, ds \\ &= - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\Delta v) w \, dx + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \{\{\nabla v\}\} [[w]] \, ds \\ &\quad + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} \int_e [[\partial v / \partial n]] \{\{w\}\} \, ds \end{aligned}$$

Afin d'avoir l'inégalité précédente on a utilisé l'identité suivante :

$$ab - cd = \left(\frac{a+c}{2}\right)(b-d) + (a-c)\left(\frac{b+d}{2}\right).$$

Donc on obtient :

$$-\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\Delta v) w \, dx + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} \int_e [[\partial v / \partial n]] \{\{w\}\} \, ds = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla v \cdot \nabla w \, dx - \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \{\{\nabla w\}\} [[v]] \, ds$$

■

Démonstration du théorème 3.3.1

On utilise l'inégalité triangulaire et la coercivité de la forme a_h on obtient :

$$\|u - u_h\|_h \leq C(\|u - v\|_h + \sup_{w_h \in V_h / \{0\}} \frac{a_h(v - u_h, w)}{\|w\|_h}) \quad \forall v \in V_h.$$

Nous utilisons la formule (3.37) on obtient :

$$\begin{aligned} a_h(v - u_h, w) &= - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (f + \Delta v) w dx + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} \int_e \llbracket \partial v / \partial n \rrbracket \{w\} ds \\ &\quad + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{\sigma}{|e|} \int_e \llbracket v - u \rrbracket \cdot \llbracket w - E_h w \rrbracket - \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \{\{\nabla w\}\} \cdot \llbracket v - u \rrbracket ds \\ &= - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (f + \Delta v)(w - E_h w) dx \\ &\quad - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (f + \Delta v)(E_h w) dx + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} \int_e \llbracket \partial v / \partial n \rrbracket \{w\} ds \\ &\quad + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{\sigma}{|e|} \int_e \llbracket v - u \rrbracket \cdot \llbracket w - E_h w \rrbracket ds - \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \{\{\nabla w\}\} \cdot \llbracket v - u \rrbracket ds \end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned} a_h(v - u_h, w) &= - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (f + \Delta v)(w - E_h w) dx \\ &\quad - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla(u - v) \cdot \nabla(E_h w) dx + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} \int_e \llbracket \partial v / \partial n \rrbracket \{w - E_h w\} ds \\ &\quad + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{\sigma}{|e|} \int_e \llbracket v - u \rrbracket \cdot \llbracket w - E_h w \rrbracket ds - \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \{\{\nabla w\}\} \cdot \llbracket v - u \rrbracket ds \end{aligned}$$

Pour le premier terme on a :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} (f + \Delta v)(w - E_h w) dx \right| &\leq \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|f + \Delta v\|_{L_2(T)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-2} \|w - E_h w\|_{L_2(T)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C(\|u - v\|_h + \text{Osc}(f)) \|w\|_h. \end{aligned}$$

Pour le deuxième terme on a :

$$\left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla(v - u) \cdot \nabla(E_h w) dx \right| \leq \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|u - v\|_{H^1(T)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|E_h w\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|u - v\|_h \|w\|_h$$

Pour le troisième terme on a :

$$\begin{aligned}
|\sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} \int_e \llbracket \partial v / \partial n \rrbracket \{w - E_h w\} ds| &\leq \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} |e| \|\llbracket \partial v / \partial n \rrbracket\|_{L_2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} \frac{1}{|e|} \|\{w - E_h w\}\|_{L_2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C(\|u - v\|_h + Osc(f)) \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-2} \|w - E_h w\|_{L_2(T)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C(\|u - v\|_h + Osc(f)) \|w\|_h.
\end{aligned}$$

Pour le quatrième terme on a :

$$\begin{aligned}
|\sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{\sigma}{|e|} \int_e \llbracket v - u \rrbracket \cdot \llbracket w - E_h w \rrbracket ds| &\leq \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h} \|\llbracket u - v \rrbracket\|_{L_2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h} \|\llbracket w - E_h w \rrbracket\|_{L_2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\|u - v\|_h \left(\sigma \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-2} \|w - E_h w\|_{L_2(T)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\|u - v\|_h \left(\sigma \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{|e|} \|\llbracket w \rrbracket\|_{L_2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\|u - v\|_h \|w\|_h
\end{aligned}$$

Pour le cinquième terme :

$$\begin{aligned}
|\sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \{\{\nabla w\}\} \cdot \llbracket v - u \rrbracket ds| &\leq \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{\sigma}{|e|} \|\llbracket u - v \rrbracket\|_{L_2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{|e|}{\sigma} \|\{\{\nabla w\}\}\|_{L_2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\|u - v\|_h \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} |w|_{H^1(T)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C\|u - v\|_h \|w\|_h
\end{aligned}$$

Donc on peut déduire que :

$$\sup_{w \in V_h / \{0\}} \frac{a_h(v - u_h, w)}{\|w\|_h} \leq C(\|u - v\|_h + Osc(f))$$

Puisque on a $\forall v \in V_h$

$$\|u - u_h\|_h \leq C(\|u - v\|_h + \sup_{w \in V_h / \{0\}} \frac{a_h(v - u_h, w)}{\|w\|_h})$$

alors

$$\begin{aligned}
\|u - u_h\|_h &\leq C(\|u - v\|_h + Osc(f)) \\
\Rightarrow \|u - u_h\|_h &\leq C(\inf_{v \in V_h} \|u - v\|_h + Osc(f)).
\end{aligned}$$

■

Commentaire

Il convient de noter que la nouvelle forme de l'erreur (3.22) a été démontrée pour la première fois en 2010 par T. Gudi [13]. L'erreur se décompose en deux termes, le premier mesure l'erreur d'interpolation alors que le deuxième est dû à la non conformité de la méthode utilisée.

3.4 ANALYSE a posteriori

Les outils développés pour l'analyse intermédiaire peuvent aussi utilisés pour avoir une estimation d'erreur *a posteriori* de la méthode SIP.

3.4.1 Estimation d'erreur par résidu

Nous définissons d'abord l'indicateur d'erreur (par résidu) globale :

$$\eta_h = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|f + \Delta u_h\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |e| \|[\partial u_h / \partial n]\|_{L^2(e)} + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{\sigma}{|e|} \|[[u_h]]\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.38)$$

$$\eta_h = \eta_h^1 + \eta_h^2 + \eta_h^3.$$

Théorème 3.4.1 *Soit u la solution du problème (3.1) et u_h la solution du problème discret (3.4). Alors*

$$\|u - u_h\|_h \leq C \eta_h. \quad (3.39)$$

Preuve.

Par définition de la norme $\|\cdot\|_h$ (voir (3.8) si nécessaire) on a :

$$\|u - u_h\|_h^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |u - u_h|_{H^1(T)}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{\sigma}{|e|} \|[[u - u_h]]\|_{L^2(e)}^2. \quad (3.40)$$

Pour le deuxième terme dans (3.40) puisque $u \in H^1$ alors nous avons :

$$\sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{\sigma}{|e|} \|[[u - u_h]]\|_{L^2(e)}^2 = \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{\sigma}{|e|} \|[[u_h]]\|_{L^2(e)}^2 = \eta_h^3 \leq (\eta_h)^2.$$

Donc pour démontrer (3.39), il reste à démontrer l'estimation pour le premier terme dans (3.40). On utilise l'inégalité triangulaire on obtient :

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} |u - u_h|_{H^1(T)}^2 \leq 2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (|u - E_h u_h|_{H^1(T)}^2 + |E_h u_h - u_h|_{H^1(T)}^2) \quad (2ab \leq a^2 + b^2).$$

Les propriétés de l'opérateur E_h impliquent que

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} |E_h u_h - u_h|_{H^1(T)}^2 \leq C \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-2} \|E_h u_h - u_h\|_{L^2(T)}^2 \leq C \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{|e|} \|[[u_h]]\|_{L^2(e)}^2 \leq C \eta_h^2.$$

D'autre part on a

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} |u - E_h u_h|_{H^1(T)}^2 = |u - E_h u_h|_{H^1(\Omega)}^2,$$

puisque $u - E_h u_h \in H_0^1(\Omega)$ alors

$$|u - E_h u_h|_{H^1(\Omega)} = \sup_{\phi \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} \nabla(u - E_h u_h) \cdot \nabla \phi \, dx}{|\phi|_{H^1(\Omega)}}. \quad (3.41)$$

Soit $\phi_h \in H_0^1(\Omega)$ un quasi-interpolant de ϕ dans l'espace \tilde{V}_h^1 des éléments conformes de Lagrange tel que :

$$\begin{aligned} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-2} \|\phi - \phi_h\|_{L^2(T)}^2 + |\phi_h|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq C |\phi|_{H^1(\Omega)}^2 \\ \sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} \frac{1}{|e|} \|\phi - \phi_h\|_{L^2(e)}^2 &\leq C |\phi|_{H^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Rappelons que $\phi \in H_0^1(\Omega)$ et donc on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla(u - E_h u) \cdot \nabla \phi \, dx &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx - \int_{\Omega} \nabla(E_h u_h) \cdot \nabla \phi \, dx \\ &= \int_{\Omega} f \phi \, dx - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla(E_h u_h - u_h) \cdot \nabla \phi \, dx \\ &\quad - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla u_h \cdot \nabla(\phi - \phi_h) \, dx - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla u_h \cdot \nabla \phi_h \, dx \end{aligned}$$

On utilise la formule d'intégration par parties et le fait que ϕ et ϕ_h sont dans H^1 on obtient :

$$\begin{aligned} - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla u_h \cdot \nabla(\phi - \phi_h) \, dx &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\Delta u_h)(\phi - \phi_h) \, dx - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} \nabla u_h \cdot ((\phi - \phi_h)n) \, dx \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\Delta u_h)(\phi - \phi_h) \, dx - \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \llbracket \partial u_h / \partial n \rrbracket (\phi - \phi_h) \, ds. \end{aligned}$$

D'autre part, pour la méthode SIP on a :

$$\begin{aligned} a_h(u_h, \phi_h) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla u_h \cdot \nabla \phi_h \, dx - \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \{\{\nabla u_h\}\} \cdot \llbracket \phi_h \rrbracket \, ds \\ &\quad - \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \{\{\nabla \phi_h\}\} \cdot \llbracket u_h \rrbracket \, ds + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{\sigma}{|e|} \int_e \llbracket u_h \rrbracket \cdot \llbracket \phi_h \rrbracket \, ds = \int_{\Omega} f \phi_h \, dx. \end{aligned}$$

et donc on a :

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla u_h \cdot \nabla \phi_h dx = \int_{\Omega} f \phi_h dx + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \{ \nabla \phi_h \} \llbracket u_h \rrbracket ds. \quad (3.42)$$

Nous commençons par l'estimation de $\int_{\Omega} \nabla(u - E_h u_h) \cdot \nabla \phi dx$, on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla(u - E_h u_h) \cdot \nabla \phi dx &= \int_{\Omega} (f + \Delta u_h)(\phi - \phi_h) dx - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla(E_h u_h - u_h) \cdot \nabla \phi dx \\ &\quad - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_e \{ \nabla \phi_h \} \cdot \llbracket u_h \rrbracket ds - \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \llbracket \partial u_h / \partial n \rrbracket (\phi - \phi_h) ds \end{aligned}$$

Nous majorons le premier terme :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} (f + \Delta u_h)(\phi - \phi_h) dx \right| &\leq \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|f + \Delta u_h\|_{L^2(T)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|\phi - \phi_h\|_{L^2(T)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|f + \Delta u_h\|_{L^2(T)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} |\phi|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq C \eta_h |\phi|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Pour le deuxième terme on a d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla(E_h u_h - u_h) \cdot \nabla \phi dx \right| &\leq \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|E_h u_h - u_h\|_{H^1(T)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} |\phi|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq C \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{|e|} \|\llbracket u_h \rrbracket\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} |\phi|_{H^1(\Omega)} \leq C \eta_h |\phi|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Le troisième terme se majore en utilisant l'inégalité (3.7)

$$\begin{aligned} \left| \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \{ \nabla \phi_h \} \cdot \llbracket u_h \rrbracket ds \right| &\leq \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{|e|} \|\llbracket u_h \rrbracket\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h} |e| \|\{ \nabla \phi_h \}\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \eta_h |\phi|_{H^1(\Omega)} \leq C \eta_h |\phi|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

Pour le dernier terme on a :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} \int_e \llbracket \partial u_h / \partial n \rrbracket (\phi - \phi_h) ds \right| &\leq \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} |e| \|\llbracket \partial u_h / \partial n \rrbracket\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} \frac{1}{|e|} \|\phi - \phi_h\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \eta_h |\phi|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

De la majoration obtenue des quatre termes on déduit que :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla(u - E_h u_h) \cdot \nabla \phi dx &\leq C \eta_h |\phi|_{H^1(\Omega)} \\ |u - E_h u_h|_{H^1(\Omega)} &= \sup_{\phi \in H_0^1(\Omega) / \{0\}} \frac{\int_{\Omega} \nabla(u - E_h u_h) \cdot \nabla \phi dx}{|\phi|_{H^1(\Omega)}} \leq C \eta_h \end{aligned}$$

■

3.4.2 Efficacité de l'estimateur

L'inégalité (3.39) nous permet de majorer l'erreur induite par l'utilisation de la méthode des éléments finis. Cependant, il est naturel de se demander si la majoration obtenue n'est pas trop grossière.

Définition 3.4.2 *Une estimation a posteriori est dite efficace si l'erreur $\|u_h - u\|_h$ est du même ordre de grandeur que l'estimateur.*

Théorème 3.4.3 *Soit u la solution du problème (3.1), u_h la solution du problème discret (3.4) et η_h l'indicateur défini par (3.38). Alors*

$$\eta_h \leq C(\|u - u_h\|_h + \text{Osc}(f)) \quad (3.43)$$

Preuve.

L'estimateur d'erreur η_h défini par 3.38 est composé (la somme) de trois termes, grâce à la proposition 3.3.3, pour démontrer l'estimation (3.43) il suffit de démontrer une estimation pour le troisième terme dans (3.38), i.e.,

$$\left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{\sigma}{|e|} \|\llbracket u_h \rrbracket\|_{L^2(e)}^2 \right)^{1/2} \leq C(\|u - u_h\|_h + \text{Osc}(f)). \quad (3.44)$$

En effet, puisque $u \in H^1(\Omega)$

$$\sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{\sigma}{|e|} \|\llbracket u_h \rrbracket\|_{L^2(e)}^2 = \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{\sigma}{|e|} \|\llbracket u_h - u \rrbracket\|_{L^2(e)}^2 \leq \|u - u_h\|_h^2$$

par définition de la norme $\|\cdot\|_h$. ■

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Au cours de ce mémoire nous avons remarqué quelques remarques importantes concernant l'analyse par éléments discontinus en particulier la méthode SIP, et nous les résumons comme suit :

- Pour les problèmes d'ordre inférieurs la méthode SIP est une simple méthode non conforme.
- Si la solution exacte du problème est suffisamment régulière ($H^2(\Omega)$). Alors la méthode SIP donne les mêmes résultats que les méthodes conformes de classe C^1 de plus la méthode SIP est plus simple à implémentée (programmée).
- Contrairement au cas de la méthode mixte, la méthode SIP peut être étendue aux problèmes d'ordre supérieurs, 4, 6, 8 etc sans difficultés.
- Puisque les espaces des éléments finis utilisés sont des espaces standards l'utilisation de la méthode SIP conduit à un système linéaire dont le conditionnement est d'ordre $O(h^{-2})$ au lieu $O(h^{-4})$ pour d'autre méthode.
- Pour les problèmes d'ordre deux la méthode des éléments finis discontinus fait intervenir des systèmes linéaire de taille relativement grands par rapport aux méthodes continus. Alors que pour les problèmes d'ordre quatre c'est l'inverse qui apparaît.
- La méthode SIP peut être programmée sur un maillage non conforme. Alors que, pour les méthode continus nécessite un maillage conforme.

La convergence adaptative de maillage pour la méthode SIP est un problème ouvert.

Comme perspective de ce travail, nous pouvons citer essentiellement :

- L'application de la méthode SIP pour d'autres modèles mathématiques par exemple, l'équation de Cahn-Hillard, Stokes,

BIBLIOGRAPHIE

- [1] D. Arnold. An interior penalty finite element method with discontinuous elements, SIAM J. Numer. Anal., 1982.
- [2] D. N. Arnold and F. Brezzi, Locking-free finite element methods for shells, Math. Comp., 66 (1997), pp. 114.
- [3] D.N. Arnold, F. Brezzi and B. Cockburn and L.D. Marini, Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems, SIAM J. Numer. Anal., 2001/2002.
- [4] S. Anicic, H. Le Dret and A. Raoult, The infinitesimal rigid displacement lemma in Lipschitz coordinates and applications to shells with minimal regularity, Math. Methods Appl. Sci., 27, pp. 1283-1299, 2004.
- [5] G. Alaire Analyse numérique et optimisation. Les éditions de l'école polytechnique. 2006.
- [6] A. Bonito and R.H. Nochetto Quasi-optimal convergence rate of an interior penalty adaptive discontinuous Galerkin method , SIAM J. Numer. Anal., 2010.
- [7] H. Brezis Analyse Fonctionnel, théorie et applications Dunod. 1980.
- [8] I. Babuška. The finite element method. 1972

-
- [9] Ph. Clément. Approximation by finite elements functions using local regularization. M2AN 1975.
- [10] A. Ern. Aide-mémoire éléments finis. Dunod, Paris 2005.
- [11] A. Ern et J-L Guermond. Eléments finis : théorie, applications, mise en oeuvre. Springer 2002.
- [12] A. Ern et J-L Gurmond. Méthode des éléments finis
- [13] T. Gudi, A new error analysis for discontinuous finite element methods for linear elliptic problems, Math. Comp., 2010.
- [14] R.H.W. Hoppe and G. Kanschat and T. Warburton Convergence analysis of an adaptive interior penalty discontinuous Galerkin method, SIAM J. Numer. Anal., 2008/2009.
- [15] R.H.W. Hoppe and G. Kanschat and T. Warburton Convergence analysis of an adaptive interior penalty discontinuous Galerkin method, SIAM J. Numer. Anal., 2008/2009.
- [16] M.W. Johnson and R.W McLay. Convergence of finite element method in the theory of elasticity. J. Appl. Mech. E. 35,P. 274-278. 1969.
- [17] O.A. Karakashian and F. Pascal Convergence of adaptive discontinuous Galerkin approximations of second-order elliptic problems, SIAM J. Numer. Anal., 2007.
- [18] J. Nečas. Sur une méthode pour résoudre les équations aux dérivées partielles de types elliptiques. Ann. Scuola. Norm. Sup. 1962.
- [19] B. Rivière, M.F. Wheeler and V. Girault, A priori error estimates for finite element methods based on discontinuous approximation spaces for elliptic problems, SIAM J. Numer. Anal., 2001.

ملخص

في هذه المذكرة تطرقنا الى حل النموذج الرياضي للمعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية من النمط الناقص باستخدام طريقة العناصر المنتهية .

وقد تطرقنا الى تقدير الخطأ المركب بعدة طرق ونذكر حالة بينا تقارب الطريقة نحو الحل الصحيح في حالة تقارب خطوة التجزئة الى الصفر.

Abstract

In this work, we have studied a model problem of elliptic partial differential equations of order two by using the finite element methode. We have estimate the error between the exact solution and the approximte solution and we have prouved the convergeme of the methed when ($h \rightarrow 0$).