UNIVERSITE KASDI MERBAH
OUARGLA

Faculté des Mathématiques et des Sciences
de la Matière

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse

Par :Bekhouche Brahim

Thème

C_0semi-groupes et applications (Problème de Cauchy abstrait)

Soutenu publiquement le : 09/06/2014

Devant le jury composé de :

Merabet Ismaile	M.C.A. Université KASDI Merbah- Ouargla	Président
Meflah Mabrouk	M.C.A. Université KASDI Merbah- Ouargla	Exminateur
Agti Mohamed	M.A. Université KASDI Merbah- Ouargla	Rapporteur

l'année universitaire :2013/2014

Remerciements

Je remercie Dieu le tout puissant qui m'a guidé dans l'accomplissement de ce travail.

Ce travail à été réalisé sous l'encadrement de professeur "**Mohamed Agti** ", à l'université **Kasdi Merbah Ourgla**, a qui je voudrais exprimer mes profonde gratitude pour leurs disponibilités, leurs aides et leurs conseils pour réaliser ce travail.

ainsi qu'à tous les professeurs du département de Math de l'université **Kasdi Merbah Ourgla**.

Je remercie vivement ma famille surtouts mes parent pour l'aide et le soutient moral pendant tout mon parcours scolaire.

et je veux remercier aussi tous les étudiants de la promotion **2013/2014** de Math de l'université **Kasdi Merbah Ourgla.**

Résumé

Le but de ce mémoire est d'étudier d'une part la théorie des semi-groupes dans un espace de Banach, d'autre part d'étudier sous quelles conditions le problème de Cauchy abstrait homogène et non homogène admet une solution unique (l'existence et l'unicité de la solution).

Mots-clés: Semi-groupes, C_0 semi-groupes, problème de Cauchy abstrait.

Abstract

The main objectives of this research paper consist in part to study the theory of semigroups in Banach space, and another part to study under what conditions the abstract Cauchy problem homogeneous and inhomogeneous has unique solution (existence and uniqueness of solution)

Keywords: Semigroups, C_0 semigroups, abstract Cauchy problem.

الملخص

الهدف من هذه المذكرة هو من جهة دراسة نصف زمر المؤثرات الخطية على فضاء بناخ و من جهة اخرى ندرس تحت اي شروط تقبل مسالة كوشي المتجانسة و غير المتجانسة حلا وحيدا (وجود و وحدانية الحل)

الكلمات المفتاحية : نصف زمرة، C_0 نصف زمرة، مسالة كوشي

Table des matières

Notation

A: opérateur

X: espace de Banach

X^*: espace dual de X

X^{**}: espace bidual de X

$\mathcal{L}(X)$: l'espace des opérateurs linéaires bornés de X dans X

$\overline{B}_{X^*} = \{x^* \in X^*, \|x^*\|_{X^*} \leq 1\}$: la boule unité de X^*

$\partial\overline{B}_{X^*}$: la frontière de la boule unité de X^*

$C([0,+\infty[\,,\mathcal{L}(D(A),X))$: l'espace des fonctions continues de $[0,+\infty[$ dans $\mathcal{L}(D(A),X)$

$C^1([0,T];X)$: l'espace des fonction continûment différentiables de $[0,T]$ dans X

$D(A)$: domaine de définition de l'opérateur A

$L^1(0,T;X) = \left\{f \diagup f \text{ mesurable de } [0,T] \to X, \int_0^T \|f(T)\|_X < +\infty\right\}$

$\mathcal{L}(X,\mathbb{k})$: l'espace des formes linéaires continues sur X

$[a,b]$: interval fermé

$\rho(A) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \diagup (\lambda I - A)^{-1} \text{ est inversible dans } \mathcal{L}(X)\right\}$: l'ensemble résolvante de A

$\sigma(A) = \mathbb{C} - \rho(A)$: le spéctre de A

$R_\lambda = R(\lambda,A) = (\lambda I - A)^{-1}$: la résolvante de A

$\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_\omega}$: l'approximation généralisé de Yosida de l'opérateur A

$\Lambda_\omega = \{\lambda \in \mathbb{C} \diagup \operatorname{Re}\lambda > \omega\}$

$\Delta = \{z \in \mathbb{C} \diagup \operatorname{Re} z > 0 \text{ et } \varphi_1 < \arg z < \varphi_2, \varphi_1 < 0 < \varphi_2\}$

J: l'injection canonique

$G(A)$: graphe de A

$\sigma(X,X^*)$: la topologie faible sur X

$\sigma(X^*,X)$: la topologie faible* sur X^*

Introduction générale

Dans ce travail nous avons étudié dans la premiere partie la théorie des semi-groupes d'opérateurs linéaires bornés dans un espace de Banach, et dans la deuxième partie nous étidions des résultas d'éxistence et d'unicité de solution du problème de Cauchy abstrait homogène et non homogène.

Dans cet esprit le mémoire est divisé en trois chapitres:

-Premier chapitre

Ce chapitre est une présentation des notions qui seront utilisées dans cette recherche

-Deuxième chapitre

Ce chapitre étudie la théorie des semi-groupes d'opérateurs linéaires bornés dans un espace de Banach en particulier les C_0 semi-groupes où on expose les théorèmes de Hille-Yosida et Lumer-Philips.

-Troisième chapitre

Ce chapitre présente d'une part l'obtention d'unicité de la solution du problème de Cauchy abstrait homogène (ACP) , il n'est pas nécessaire de supposer que A est un générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe :

Théorème 3.1.1: Soit A un opérateur linéaire de domaine dense, si $R(\lambda, A)$ existe pour tout $\operatorname{Re} \lambda > 0$ et

$$\limsup \lambda^{-1} \log \|R(\lambda, A)\| = 0$$

Alors le problème (ACP) admet au plus une solution pour tout $x \in X$.

Et pour prouver l'existence, on a exposer le théorème 3.1.2:

Soit A un opérateur linéaire de domaine dense et de résolvente $\rho(A)$ non vide. Le problème (ACP) admet une solution unique $u(t)$ qui est continûment différentiable sur $[0, +\infty[$ pour tout valeur initiale $x \in D(A)$, si et seulement si A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $T(t)$.

D'autre part pour le problème de Cauchy abstrait non homogène $(iACP)$:

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = Au(t) + f(t) & t > 0 \\ u(0) = x \end{cases}$$

Où $f : [0, T[\to x$

Nous exposons le corollaire 3.2.1 qui donne l'unicité de la solution du problème $(iACP)$, et le théorème 3.2.1 qui assure l'existence de la solution du problème $(iACP)$.

Enfin, à titre d'application, nous exposons l'exemple 3.1.2

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0, t \geq 0 \ , x \in \mathbb{R} \\ u\left(x,0\right) = f \end{cases}$$

Chapitre 1

Théorie générale

1.1 Espace de Banach

Définition 1.1.1 *Un espace de Banach est un espace véctoriel normé, complet pour la distance associée à la norme*

Définition 1.1.2 *Soit X un espace normé sur $\mathbb{k} = (\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R})$. On appelle dual (topologique) de X et on note X^* l'espace de Banach $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{k})$, cet espace est complet.*

Définition 1.1.3 *Soit X un espace normé, le dual X^* de X s'appelle le bidual de X et se note X^{**} pour $x \in X$ notons $J_X(x) : X^* \to \mathbb{k}$ la forme linéaire sur X^* qui a $x^* \in X^*$ associe $x^*(x)$,*

$$\forall x^* \in X^*, J_X(x^*) = x^*(x)$$

Pour tout $x^* \in X^*$ on a

$$|J_X(x)| = |x^*(x)| \leq \|x^*\| \|x\|$$

Donc $J_X(x) \in X^{**}$ et $\|J_X(x)\| \leq \|x\|$

On dit que $J_X(x) \in \mathcal{L}(X, X^{**})$ est l'application canonique de X dans son bidual

Définition 1.1.4 *Soit X un espace de Banach et soit J l'injection canonique de X dans X^{**} on dit que X est réflexif si $J(X) = X^{**}$*

Définition 1.1.5 *Soit X un espace de Banach, on désigne par $L^1(0,T;X)$ l'espace des fonctions $t \to f(t)$ de $]0,T[\to X$ qui sont mesurables à valeurs dans X et telle que:*

$$\int_0^T \|f(t)\|_X \, dt = \|f\|_{L^1(0,T;X)} < \infty$$

1.2 Opérateur fermé

Définition 1.2.1 *On dit que l'opérateur A est fermé si toute suite x_n d'éléments de $D(A)$ converge vers x telle que la suite $A(x_n)$ soit convergente vers y alors, on a:*

$$x \in D(A) \text{ et } y = Ax$$

Définition 1.2.2 *Le graphe de A est le sous-espace véctoriel de $X \times Y$ noté $G(A)$ défini par: $G(A) = \{(x, Ax) ; x \in D(A)\}$*

Remarque 1.2.1 *Un opérateur A est fermé, si et seulement si son graphe $G(A)$ est fermé*

Remarque 1.2.2 *Tout opérateur continu A linéaire ou non linéaire a un graphe fermé*

1.3 Les Théorème fondamentaux

Théorème 1.3.1 *(Théorème de Banach-Steinhaus)*

Soient X et Y deux espaces de Banach, soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille (non nécessairement dénombrable) d'opérateur linéaire et continue de X dans Y. On suppose que

$$\sup_{i \in I} \|A_i x\| < \infty, \ \forall x \in X$$

Alors

$$\sup_{i \in I} \|A_i\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \infty$$

Autrement dit, il existe une constante C telle que

$$\|A_i x\| \leq C \|x\| \quad \forall x \in X, \ \forall i \in I$$

Définition 1.3.1 *On dit que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ de fonctions mesurables converge presque partout si l'ensemble S/C est négligeable: $m(S/C) = 0$*

Définition 1.3.2 *Soit $(S, \Im, m)$ un espace mesuré. On dit qu'une fonction f est définie presque partout sur S s'il existe une partie négligeable $N \subseteq S$ telle que f soit définie sur S/N*

Théorème 1.3.2 *(Théorème de convergence dominée de Lebsgue)*

Soit $(S, \Im, m)$ un espace mesuré et soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite d'applications mesurables $f_n : S \to \overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$ on suppose que:

i) La suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge presque partout vers une fonction mesurable $f : S \to \overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$ (définie presque partout);

ii) Il exisre une fonction intégrable $g : S \to \overline{\mathbb{R}}_+$ positive telle que l'on ait la condition de domination $|f_n| \leq g$ presque partout, $\forall n \geq 1$

Alors, les fonctions f_n et f sont intégrable et:

$$\int_S f dm = \lim_{n\to\infty} \int_S f_n dm$$

et même:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_S |f_n - f| \, dm = 0$$

1.3.1 Topologie faible

Soit X un espace de Banach et soit $f \in X^*$. On désigne par $\varphi_f : X \to \mathbb{R}$ lèapplication définie par $\varphi_f(x) = \langle f, x \rangle$. Lorsque f décrit X^* on obtient une famille d'application $\left(\varphi_f\right)_{f\in X^*}$.

Définition 1.3.3 *La topologie faible $\sigma(X, X^*)$ sur X est la topologie la moins fine sur X rendant continues toutes les application $\left(\varphi_f\right)_{f\in X^*}$*

1.3.2 Topologie faible *

Soit X un espace de Banach, soit X^* son dual et soit X^{**} son bidual, muni de la norme

$$\|\zeta\| = \sup_{f\in X^*, \|f\|\leq 1} |\langle \zeta, f \rangle|$$

Définition 1.3.4 *La topologie faible * désignée par $\sigma(X^*, X)$ est la topologie la moins fine sur X^* rendant continues toutes les application $(\varphi_x)_{x\in X}$*

Théorème 1.3.3 *(Théorème-Aloglu-Bourbaki)*

L'ensemble

$$\overline{B}_{X^*} = \{f \in X^*, \|f\| \leq 1\}$$

est compact pour la topologie faible $*\ \sigma(X^*, X)$

Théorème 1.3.4 *(Théorème de Graphe fermé)*

Soit A un opérateur linéaire défini sur un espace de Banach X à valeur dans un espace de Banach Y. Si le Graphe $G(A)$ est fermé dans $X \times Y$, alors A est continue

Lemme 1.3.1 *Soit $f : [a, b] \to X$ une fonction continue alors:*

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_a^{a+t} f(s)\, ds = f(a)$$

Preuve. Nous avons:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{t} \int_a^{a+t} f(s)\, ds - f(a) \right\| &= \left\| \frac{1}{t} \int_a^{a+t} (f(s) - f(a))\, ds \right\| \\ &\leq \sup_{s \in [a, a+t]} \|f(s) - f(a)\| \end{aligned}$$

L'égalité de l'enoncé résulte de la continuté de l'application f ∎

Chapitre 2

Semi-groupe de classe C_0

2.1 Définitions et propriétés de semi-groupe

Définition 2.1.1 *On appelle C_0 semi-groupe d'opérateur linéaire borné sur X une famille $\{T(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$ vérifiant les propriétés suivantes*

i)$T(0) = I$

ii) $T(t+s) = T(t)\,T(s)$, $\forall t, s \geq 0$

iii) $\lim_{t\to 0^+} T(t)\,x = x$, $\forall x \in X$

Définition 2.1.2 *On appelle semi-groupe uniformément continue d'opérateur linéaire borné sur X une famille$\{T(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$vérifiant les propriétés suivantes*

i) $T(0) = I$

ii) $T(t+s) = T(t)\,T(s)$, $\forall t, s \geq 0$

iii) $\lim_{t\to 0^+} \|T(t) - I\| = 0$

Remarque 2.1.1 *Puisque $\|T(t)\,x - x\| \leq \|T(t) - I\|\,\|x\|$ pour tout $x \in X$ et tout $t \geq 0$, il résulte que les semi-groupe uniformément continus sont C_0 semi-groupe, mais il existe des C_0 semi-groupe qui ne sont pas uniformément continus.*

Définition 2.1.3 *On dit que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0 semi-groupe différentiable (et notons $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in SGD(M,\omega)$) si l'application: $]0,+\infty[\, \ni t \to T(t)\,x \in X$ est différentiable quel que soit $x \in X$*

Définition 2.1.4 *Nous désignérons par* Δ *l'ensemble:* $\{z \in \mathbb{C} \diagup \operatorname{Re} z > 0 \text{ et } \varphi_1 < \arg z < \varphi_2, \varphi_1 < 0 < \varphi_2$

Définition 2.1.5 *On appelle* C_0 *semi-groupe analytique une famille* $\{T(z)\}_{z \in \Delta} \subset \mathcal{L}(X)$ *vérifiant les propriétés suivantes:*

i) $T(0) = I$

ii) $T(z_1 + z_2) = T(z_1) T(z_2)$, $\forall z_1, z_2 \in \Delta$

iii) $\lim_{z \to 0} T(z) x = x$, $\forall x \in X, z \in \Delta$

iv) L'application $\Delta \ni z \to T(z) \in \mathcal{L}(X)$ *est analytique dans le secteur* Δ

Définition 2.1.6 *On appelle générateur infinitésimal d'un* C_0 *semi-groupe* $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ *un opérateur* A *défini sur l'ensemble*

$$D(A) = \left\{ x \in X \diagup \lim_{t \to 0} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}$$

Par:

$$Ax = \lim_{t \to 0} \frac{T(t)x - x}{t}, \ \forall x \in D(A).$$

Théorème 2.1.1 *Soit* $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ *un* C_0 *semi-groupe alors:*

i) Il existe $\tau > 0$ *et* $M \geq 1$ *tel que*

$$\|T(t)\| \leq M, \ \forall t \in [0, \tau]$$

ii) Il existe $\omega \in \mathbb{R}$ *et* $M \geq 1$ *tel que*

$$\|T(t)\| \leq M e^{\omega t}, \ \forall t \geq 0$$

Preuve. $i)$ Supposons que pour tout $\tau > 0$ et tout $M \geq 1$ il existe $t \in [0, \tau]$ tel que $\|T(t)\| > M$. Pour $\tau = \frac{1}{n}$ et $M = n \in \mathbb{N}^*$, il existe $t_n \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$ tel que $\|T(t_n)\| > n$, donc la suite $(\|T(t_n)\|)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est non bornée. Si la suite $(\|T(t_n)\|)_{n \in \mathbb{N}^*}$ était bornée pour tout $x \in X$.

Alors compte tenu du théoreme de Banach-Stenhaus il en résultrait que $(\|T(t_n)\|)_{n \in \mathbb{N}^*}$ serait bornée mais cela conterdit l'affirmation précédent. Donc il existe $x_0 \in X$ tel que: $(\|T(t_n)\|)_{n \in \mathbb{N}^*}$ soit non borné, D'autre part, compte tenu de la définition $(2.1.1)\,(iii)$ il résulte que $\lim_{n \to \infty} \|T(t_n) x_0\| = x_0$ et cela est contradictoire.

ii) Pour $h > 0$ et $t > h$, nous noterons $m = \left(\frac{t}{h}\right) \in \mathbb{N}^*$ compte tenu du théorème de division avec reste, il existe $r \in [0, h]$ tel que $t = mh + r$, alors

$$\begin{aligned} \|T(t)\| &= \|T(mh)T(r)\| \leq \|T(h)\|^m \|T(r)\| \\ &\leq M^m M \leq M e^{\frac{t}{h}\ln M} \end{aligned}$$

L'inégalité de l'énoncé en résulte en prenant $\omega = \frac{1}{h}\ln M$ ■

Corollaire 2.1.1 *Si $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0 semi-groupe, alors l'application:*

$$[0, +\infty[\ \ni t \to T(t)x \in X$$

est continue sur $[0, +\infty[$, quel que soit $x \in X$

Preuve. Soient $t_0, h \in [0, +\infty[$ et $x \in X$.

Si $t_0 < h$, nous avons:

$$\begin{aligned} \|T(t_0 + h)x - T(t_0)x\| &\leq \|T(t_0)\| \|T(h)x - x\| \\ &\leq M e^{\omega t_0} \|T(h)x - x\| \end{aligned}$$

Si $t_0 > h$, nous obtenons:

$$\begin{aligned} \|T(t_0 - h)x - T(t_0)x\| &\leq \|T(t_0 - h)\| \|T(h)x - x\| \\ &\leq M e^{\omega(t_0 - h)} \|T(h)x - x\| \end{aligned}$$

La continuité forte en t_0 de l'application considérée dans l'énoncé est évidente. ■

Définition 2.1.7 *On dit que le C_0 semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est uniformément borné s'il existe $M \geq 1$ tel que:*

$$\|T(t)\| \leq M,\ \forall t \geq 0$$

Théorème 2.1.2 *Soient $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0 semi-groupe et A son générateur infinitésimal alors:*

i) Si $x \in X$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)xds = T(t)x.$$

ii) Si $x \in X$, *alors* $\int_0^t T(s)\,xds \in D(A)$ *et on a:*

$$A\int_0^t T(s)\,xds = T(t)\,x - x,\ \forall t \geq 0$$

iii) Si $x \in D(A)$ *,alors* $T(t)\,x \in D(A)$ *et on a:*

$$\frac{d}{dt}T(t)\,x = AT(t)\,x = T(t)\,Ax,\ \forall t \geq 0$$

iiii) Si $x \in D(A)$,

$$T(t)\,x - T(s)\,x = \int_s^t T(\tau)\,Axd\tau = \int_s^t AT(\tau)\,xd\tau$$

Preuve. $i)$ D'aprés le lemme (1.3.1) on a:

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(s)\,ds = f(x)$$

Comme l'application $t \to T(t)\,x \in X$, $t \geq 0$ continue on a:

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)\,xds = T(t)\,x$$

$ii)$ Soient $x \in X$ et $h > 0$ alors:

$$\begin{aligned}
\frac{T(h)-T(0)}{h}\int_0^t T(s)\,xds &= \frac{1}{h}\int_0^t T(s+h)\,xds - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)\,xds \\
&= \frac{1}{h}\int_h^{t+h} T(u)\,xdu - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)\,xds \\
&= \frac{1}{h}\int_0^{t+h} T(u)\,xdu - \frac{1}{h}\int_0^h T(u)\,xdu - \frac{1}{h}\int_0^t T(u)\,xdu \\
&= \frac{1}{h}\int_0^{t+h} T(u)\,xdu - \frac{1}{h}\int_0^h T(u)\,xdu
\end{aligned}$$

Si $h \to 0$ on a:

$$\begin{aligned}
A\int_0^t T(s)\,xds &= \lim_{h\to 0}\frac{T(h)-T(0)}{h}\int_0^t T(s)\,xds \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\int_0^{t+h} T(u)\,xdu - \int_0^h T(u)\,xdu\right] \\
&= T(t)\,x - T(0)\,x = T(t)\,x - x
\end{aligned}$$

et

$$\int_0^t T(s)\,xds \in D(A)$$

$iii)$ Soit $x \in D(A)$, pour tout $t \geq 0$ nous avons:

$$\begin{aligned} T(t)\,Ax &= T(t)\lim_{h\to 0}\frac{T(h)\,x - x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{T(h)\,T(t)\,x - T(t)\,x}{h} \end{aligned}$$

Donc $T(t)\,x \in D(A)$ et on a:

$$T(t)\,Ax = AT(t)\,x,\ \forall t \geq 0$$

Soient $x \in D(A)\,,\ t \geq 0$ et $h > 0$, alors:

$$\begin{aligned} \left\|\frac{T(t+h)\,x - T(t)\,x}{h} - T(t)\,Ax\right\| &\leq \|T(t)\|\left\|\frac{T(h)\,x - x}{h} - Ax\right\| \\ &\leq Me^{\omega t}\left\|\frac{T(h)\,x - x}{h} - Ax\right\| \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\lim_{h\to 0}\frac{T(t+h)\,x - T(t)\,x}{h} = T(t)\,Ax$$

D'où

$$\frac{d^+}{dt}T(t)\,x = T(t)\,Ax,\ \forall t \geq 0$$

Si $t - h > 0$ alors nous avons:

$$\begin{aligned} \left\|\frac{T(t-h)\,x - T(t)\,x}{-h} - T(t)\,Ax\right\| &\leq \|T(t-h)\|\left\|\frac{T(h)\,x - x}{h} - Ax + Ax - T(h)\,Ax\right\| \\ &\leq Me^{\omega(t-h)}\left[\left\|\frac{T(h)\,x - x}{h} - Ax\right\| + \|T(h)\,Ax - Ax\|\right] \end{aligned}$$

Par suite

$$\lim_{h\to 0}\frac{T(t-h)\,x - T(t)\,x}{-h} = T(t)\,Ax$$

et

$$\frac{d-}{dt}T(t)\,x = T(t)\,Ax,\ \forall t \geq 0$$

Il s'ensuit que l'application considéreé dans l'énoncé est dérivable sur $[0, +\infty[$, quel que soit $x \in D(A)$. De plus, on a l'égalité

$$\frac{d}{dt}T(t)\,x = T(t)\,Ax = AT(t)\,x$$

$iiii)$ Soit $x \in D(A)$ d'aprés (iii) on a:

$$\int_s^t T(\tau) Ax d\tau = \int_s^t AT(\tau) x d\tau = \int_s^t \frac{d}{d\tau} T(\tau) x d\tau = T(t) x - T(s) x$$

■

Remarque 2.1.2 *On voit que* $T(t) D(A) \subseteq D(A), \forall t \geq 0$

Définition 2.1.8 *Nous noterons par* $SG(M, \omega)$ *l'ensemble des* C_0 *semi-groupe* $\{T(t)\}_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$ *pour lequels il existe* $\omega \geq 0$ *et* $M \geq 1$ *tel que:*

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \ \forall t \geq 0$$

Théorème 2.1.3 *Soient* $\{T(t)\}_{t \geq 0} \in SG(M, \omega)$ *est* A *son générateur infinitésimal alors:*

i)$\overline{D(A)} = X$

ii) A *est un opérateur fermé*

Preuve. *i) Soient* $x \in X$ *et* $t_n > 0, n \in \mathbb{N}$*, tel que:*

$$\lim_{n \to +\infty} t_n = 0$$

On pose:

$$x_n = \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} T(s) x ds \in D(A), \ \forall n \in \mathbb{N}$$

D'où :

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} T(s) x ds = x$$

Par conséquent $\overline{D(A)} = X$

ii) Soit $(x_n)_{n \geq 0} \subset D(A)$ *tel que:*

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x \ et \ \lim_{n \to +\infty} Ax_n = y$$

Alors:

$$\|T(s) Ax_n - T(s) y\| \leq \|M\| e^{\omega t} \|Ax_n - y\|, \ \forall s \in [0, t]$$

Par suite $T(s) Ax_n \to T(s) y$ *pour* $n \to +\infty$ *uniformément par rapport à* $s \in [0, t]$

D'autre part, puisque $x_n \in D(A)$ *on a:*

$$T(t) x_n - x_n = \int_0^t T(s) Ax_n ds$$

D'où:

$$\lim_{n\to+\infty}\left[T(t)x_n - x_n\right] = \lim_{n\to+\infty}\int_0^t T(s)\,Ax_n ds$$

Ainsi

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)\,yds$$

Par suite:

$$\lim_{t\to 0}\frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t T(s)\,yds = y$$

Donc:

$$x \in D(A) \;\; et\; Ax = y$$

D'où A est un opérateur fermé ■

2.2 La transformé de Laplace d'un C_0 semi-groupe

Définition 2.2.1 *Nous désinérons par Λ_ω l'ensemble $\{\lambda \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}\lambda > \omega\}$ pour $\omega > 0$*

Définition 2.2.2 *L'application*

$$\begin{aligned} R(.,A) \;&:\; \rho(A) \to \mathcal{L}(X) \\ R_\lambda \;&=\; R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1},\ \forall\lambda \in \rho(A) \end{aligned}$$

S'appelle la résolvante de A

Définition 2.2.3 *L'ensemble*

$$\rho(A) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} / (\lambda I - A)^{-1} \;\; est\ inversible\ dans\ \mathcal{L}(X)\right\}$$

S'appelle l'ensemble résolvonte de $A \in \mathcal{L}(X)$

Définition 2.2.4 *L'ensemble*

$$\sigma(A) = \mathbb{C} - \rho(A)$$

s'appelle le spectre de $A \in \mathcal{L}(X)$

Théorème 2.2.1 *Soint* $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in SG(M,\omega)$ *et* A *son générateur infinitésimal, si* $\lambda \in \Lambda_\omega$*, alors l'application*

$$\begin{aligned} R_\lambda &: X \to X \\ R_\lambda x &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)\, x dt \end{aligned}$$

Définit un opérateur linéaire borné sur X, $\lambda \in \rho(A)$ et $R_\lambda x = R(\lambda, A)\, x$, pour tout $x \in X$

Preuve. Soit $\lambda \in \Lambda_\omega$ puisque $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in SG(M,\omega)$ nous avons:

$$\|T(t)\| \leq M e^{\omega t},\ \forall t \geq 0$$

et on voit que:

$$\begin{aligned} \left\| e^{-\lambda t} T(t)\, x \right\| &\leq e^{-\operatorname{Re}\lambda t} \|T(t)\| \|x\| \\ &\leq M e^{-(\operatorname{Re}\lambda - \omega)t} \|x\|,\ \forall x \in X \end{aligned}$$

Définit l'application:

$$R_\lambda : X \to X$$

Par:

$$R_\lambda x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)\, x dt$$

Il est clair que R_λ est un opérateur linéaire de plus on a:

$$\|R_\lambda x\| \leq \int_0^{+\infty} \left\| e^{-\lambda t} T(t)\, x \right\| dt \leq \frac{M}{\operatorname{Re}\lambda - \omega} \|x\|,\ \forall x \in X$$

D'où il résulte que R_λ est un opérateur linéaire borné, si $x \in X$ alors nous avons:

$$\begin{aligned} \frac{T(h) R_\lambda x - R_\lambda x}{h} &= \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t+h)\, x dt - \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)\, x dt \\ &= \frac{1}{h} \int_h^{+\infty} e^{-\lambda(s-h)} T(s)\, x ds - \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)\, x dt \\ &= \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_h^{+\infty} e^{-\lambda s} T(s)\, x ds - \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)\, x dt \\ &= \frac{e^{\lambda h}}{h} \left[\int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} T(s)\, x ds - \int_0^{h} e^{-\lambda s} T(s)\, x ds \right] - \frac{1}{h} \int_h^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)\, x dt \\ &= \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} T(s)\, x ds - \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^{h} e^{-\lambda s} T(s)\, x ds \end{aligned}$$

Par passage à limite on obtient:

$$\lim_{h\to 0}\frac{T(h)\,R_\lambda x - R_\lambda x}{h} = \lambda R_\lambda x - x$$

Il en résulte que:

$$R_\lambda x \in D(A) \text{ et } AR_\lambda x = \lambda R_\lambda x - x,\ \forall x \in X$$

Ou bien:

$$(\lambda I - A)\, R_\lambda x = x,\ \forall x \in X$$

Si $x \in D(A)$, alors nous obtenons:

$$\begin{aligned} R_\lambda Ax &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)\, Axdt = \int_h^{+\infty} e^{-\lambda t}\frac{d}{dt}T(t)\, xdt \\ &= \left[e^{-\lambda t}T(t)\, x\right]_0^{+\infty} + \lambda\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}T(t)\, xdt \\ &= x + \lambda R_\lambda x \end{aligned}$$

D'où:

$$R_\lambda(\lambda I - A)\, x = x,\ \forall x \in D(A)$$

Finalement, on voit que $\lambda \in \rho(A)$ et $R_\lambda x = R(\lambda, A)\, x$ pour tout $x \in X$ ∎

Définition 2.2.5 *L'opérateur*

$$\begin{aligned} R_\lambda x &: X \to X \\ R_\lambda x &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}T(t)\, xdt, \lambda \in \Lambda_\omega \end{aligned}$$

S'appelle la transformeé de Laplace du semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in SG(M, \omega)$

Théorème 2.2.2 *Soient* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *un* C_0 *semi-groupe et* A *son générateur infinitésimal, pour tout* $\lambda \in \Lambda_\omega$ *on a:*

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^n}, n \in \mathbb{N}$$

Preuve. *Soit* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *un* C_0 *semi-groue alors:*

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t},\ \forall t \geq 0$$

Compte tenu de théorème (2.2.1), si $\lambda \in \Lambda_\omega$ *nous avons:*

$$\lambda \in \rho(A) \quad et\; R(\lambda, A)x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)\, x dt,\ \forall x \in X$$

De plus:

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)}$$

Il est claire que:

$$\frac{d}{d\lambda} R(\lambda, A)\, x = -\int_0^{+\infty} t e^{-\lambda t} T(t)\, x dt,\ \forall x \in X$$

et par récurence on peut montre que:

$$\frac{d}{d\lambda^n} R(\lambda, A)\, x = (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n e^{-\lambda t} T(t)\, x dt,\ \forall x \in X \ \ et\ n \in \mathbb{N}^*$$

D'autre part nous avons:

$$\frac{d}{d\lambda^n} R(\lambda, A)\, x = (-1)^n\, n! R(\lambda, A)^{n+1}\, x,\ \forall x \in X \ \ et\ n \in \mathbb{N}^*$$

Par suit on a:

$$(-1)^n\, n! R(\lambda, A)^{n+1}\, x = (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n e^{-\lambda t} T(t)\, x dt,\ \forall x \in X, n \in \mathbb{N}^*$$

De plus:

$$\begin{aligned}
\|R(\lambda, A)^n\| &\leq \frac{M\|x\|}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-(\operatorname{Re}\lambda - \omega)t} dt \\
&\leq \frac{M\|x\|(n-1)}{(n-1)!(\operatorname{Re}\lambda - \omega)} \int_0^{+\infty} t^{n-2} e^{-(\operatorname{Re}\lambda - \omega)t} dt = \ldots \\
&= \frac{M\|x\|}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^n}
\end{aligned}$$

quel que soient $x \in X$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$, *par conséquent:*

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M\|x\|}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^n}, n \in \mathbb{N}^*$$

■

2.3 L'approximation généralisée de yosida

Lemme 2.3.1 *Soit $A : D(A) \subset X \to X$ un opérateur linéaire vérifiant les propriétés suivantes*

i) A est un opérateur fermé et $\overline{D(A)} = X$

ii) Il existe $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ tel que $\Lambda_\omega \subset \rho(A)$ et pour tout $\lambda \in \Lambda_\omega$ on a:

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^n}, n \in \mathbb{N}^*$$

Alors pour tout $\lambda \in \Lambda_\omega$ nons avons

$$\lim_{\operatorname{Re}\lambda \to +\infty} \lambda R(\lambda, A)x = x\ ,\ \forall x \in X$$

De plus:

$$\lambda AR(\lambda, A) \in \mathcal{L}(X) \text{ et } \lim_{\operatorname{Re}\lambda \to \infty} \lambda AR(\lambda, A)x = Ax\ ,\ \forall x \in D(A)$$

Preuve. Soient $x \in D(A)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}\lambda > \omega$ alors $R(\lambda, A)(\lambda I - A)x = x$, Si $\operatorname{Re}\lambda \to +\infty$ nous avons:

$$\|\lambda R(\lambda, A)x - x\| = \|R(\lambda, A)Ax\| \leq \|R(\lambda, A)\|\|Ax\| \leq \frac{M}{\operatorname{Re}\lambda - \omega}\|Ax\| \to 0$$

D'où il résulte que:

$$\lim_{\operatorname{Re}\lambda \to +\infty} \lambda R(\lambda, A)x = x,\ \forall x \in D(A)$$

Soit $x \in X$, puisque $\overline{D(A)} = X$, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ tel que $x_n \to x$ si $n \to +\infty$ nous avons:

$$\begin{aligned}
\|\lambda R(\lambda, A)x - x\| &\leq \|\lambda R(\lambda, A)Ax - \lambda R(\lambda, A)Ax_n\| + \|\lambda R(\lambda, A)Ax_n - x_n\| + \|x_n - x\| \\
&\leq \|\lambda R(\lambda, A)\|\|x_n - x\| + \|\lambda R(\lambda, A)x_n - x_n\| + \|x_n - x\| \\
&\leq \frac{|\lambda| M}{\operatorname{Re}\lambda - \omega}\|x_n - x\| + \frac{M}{\operatorname{Re}\lambda - \omega}\|Ax_n\| + \|x_n - x\| \\
&= \frac{|\lambda| M + \operatorname{Re}\lambda - \omega}{\operatorname{Re}\lambda - \omega}\|x_n - x\| + \frac{M}{\operatorname{Re}\lambda - \omega}\|Ax_n\|
\end{aligned}$$

Mais $x_n \to x$ si $n \to \infty$, donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que:

$$\|x_{n_\varepsilon} - x\| < \varepsilon\frac{\operatorname{Re}\lambda - \omega}{|\lambda| M + \operatorname{Re}\lambda - \omega}$$

Par conséquent

$$\|\lambda R(\lambda, A)x - x\| < \varepsilon \frac{M}{\operatorname{Re}\lambda - \omega} \|Ax_{n_\varepsilon}\|$$

D'où:

$$\lim_{\operatorname{Re}\lambda \to +\infty} \sup \|\lambda R(\lambda, A)x - x\| < \varepsilon \ , \ \forall x \in X$$

Ou bien

$$\lim_{\operatorname{Re}\lambda \to +\infty} \lambda R(\lambda, A)x = x, \ \forall x \in X$$

De plus:

$$\begin{aligned} \lambda AR(\lambda, A) &= \lambda [\lambda I - (\lambda I - A)] R(\lambda, A) \\ &= \lambda [\lambda R(\lambda, A) - I] \\ &= \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I \end{aligned}$$

Par suite on a:

$$\begin{aligned} \|\lambda AR(\lambda, A)x\| &= \|\lambda [\lambda R(\lambda, A) - I] x\| \\ &\leq |\lambda| \|\lambda R(\lambda, A)x - x\| \\ &\leq |\lambda| (\|\lambda R(\lambda, A)x\| + \|x\|) \\ &\leq |\lambda| \left(\frac{|\lambda| M}{\operatorname{Re}\lambda - \omega} + 1 \right) \ , \ \forall x \in X \end{aligned}$$

et on voit que $\lambda AR(\lambda, A) \in \mathcal{L}(X)$

Si $x \in D(A)$, alors nous avons:

$$\begin{aligned} \lambda R(\lambda, A) Ax &= \left[\lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I\right] x \\ &= \lambda AR(\lambda, A)x \end{aligned}$$

D'où il résulte que:

$$\begin{aligned} \lim_{\operatorname{Re}\lambda \to +\infty} \lambda AR(\lambda, A)x &= \lim_{\operatorname{Re}\lambda \to +\infty} \lambda R(\lambda, A) Ax \\ &= Ax, \ \forall x \in D(A) \end{aligned}$$

■

Remarque 2.3.1 *On peut dire que les opérateur bornés $\lambda AR(\lambda, A)$ sont des approximations pour l'opérateur non borné A.*

Définition 2.3.1 *La famille* $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_\omega} \subset \mathcal{L}(X)$, *où* $A_\lambda = \lambda AR(\lambda, A)$, *S'appelle l'approximation généraliseé de Yosida del'opérateur* A

Lemme 2.3.2 *Soit* $A : D(A) \subset X \to X$ *un opérateur linéaire vérifiant les propriétés suivantes:*

i) A est un opérateur fermé et $\overline{D(A)} = X$

ii) Il existe $\omega \geq 0$ *et* $M \geq 1$ *tel que* $\Lambda_\omega \subset \rho(A)$ *et pour* $\lambda \in \Lambda_\omega$ *on a:*

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^n},\ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Si $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_\omega}$ *est l'approximation généraliseé de Yosida de l'opérateur A, alors pour tout* $r > 0$ *et tous* $\alpha, \beta \in \Lambda_{\omega,r}$ *nous avons:*

$$\left\|e^{tA_\alpha}x - e^{tA_\beta}x\right\| \leq M^2 te^{\omega rt}\left\|A_\alpha x - A_\beta x\right\|,\ \forall x \in X \text{ et } t \geq 0$$

Preuve. Soient $\alpha, \beta \in \Lambda_\omega$, $v \in [0,1]$ et x$\in X$ alors:

$$\frac{d}{dv}\left(e^{vtA_\alpha}e^{(1-v)tA_\beta}x\right) = tA_\alpha e^{vtA_\alpha}e^{(1-v)tA_\beta}x - te^{vtA_\alpha}A_\beta e^{(1-v)tA_\beta}x$$

On peut facilement vérifier que $A_\alpha, A_\beta, e^{vtA_\alpha}$ et $e^{(1-v)tA_\beta}$ commutent quels que soit $\alpha, \beta \in \Lambda_\omega$ et $t \geq 0$ nous obtenons:

$$\int_0^1 \frac{d}{dv}\left(e^{vtA_\alpha}e^{(1-v)tA_\beta}x\right)dv = \int_0^1 \left(tA_\alpha e^{vtA_\alpha}e^{(1-v)tA_\beta}x - te^{vtA_\alpha}A_\beta e^{(1-v)tA_\beta}x\right)dv$$

D'où:

$$\left[e^{vtA_\alpha}e^{(1-v)tA_\beta}x\right]_0^1 = \int_0^1 \left(tA_\alpha e^{vtA_\alpha}e^{(1-v)tA_\beta}x - te^{vtA_\alpha}A_\beta e^{(1-v)tA_\beta}x\right)dv$$

Où bien:

$$e^{tA_\alpha}x - e^{tA_\beta}x = t\int_0^1 e^{vtA_\alpha}e^{(1-v)tA_\beta}\left(A_\alpha x - A_\beta x\right)dv$$

quels que soient $t \geq$ et $x \in X$ nous en déduisons que:

$$\left\|e^{tA_\alpha}x - e^{tA_\beta}x\right\| \leq t\int_0^1 \left\|e^{vtA_\alpha}\right\|\left\|e^{(1-v)tA_\beta}\right\|\left\|A_\alpha x - A_\beta x\right\|dv$$

D'autre part, nous avons:

$$\begin{aligned}
\left\|e^{tA_\alpha}\right\| &= \left\|e^{t\left(\alpha^2 R(\alpha,A)\alpha t - I\right)}\right\| = \left\|e^{\alpha t I}e^{\alpha^{2t}R(\alpha,A)}\right\| \\
&\leq e^{-\operatorname{Re}\alpha t}\left\|\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k\alpha^{2k}R(\alpha,A)^K}{k!}\right\| \\
&\leq e^{-\operatorname{Re}\alpha t}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k|\alpha|^{2k}\left\|R(\alpha,A)^K\right\|}{k!} \\
&\leq e^{-\operatorname{Re}\alpha t}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k|\alpha|^{2k}M}{k!(\operatorname{Re}\alpha-\omega)^k} \\
&= Me^{-\operatorname{Re}\alpha t}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{t|\alpha|^2}{\operatorname{Re}\alpha-\omega}\right)^k}{k!} \\
&= Me^{-\operatorname{Re}\alpha t}e^{\frac{t|\alpha|^2}{\operatorname{Re}\alpha-\omega}=Me^{\frac{\omega\operatorname{Re}\alpha+\operatorname{Im}^2\alpha}{\operatorname{Re}\alpha-\omega}}}
\end{aligned}$$

quel que soient $\alpha\in\Lambda_\omega$ et t≥ 0

Soit $r>0$ tel que:

$$\frac{\omega\operatorname{Re}\alpha+\operatorname{Im}^2\alpha}{\operatorname{Re}\alpha-\omega}<\omega r$$

Alors, nous avons:

$$\omega\operatorname{Re}\alpha+\operatorname{Im}^2\alpha<\omega r\operatorname{Re}\alpha-\omega^2 r$$

D'où:

$$\omega\operatorname{Re}\alpha<\omega r\operatorname{Re}\alpha-\omega^2 r$$

Où bien

$$\omega^2 r<\omega(r-1)\operatorname{Re}\alpha$$

Il on décole:

$$\operatorname{Re}\alpha>\frac{r}{r-1}\omega$$

Par conséquent, pour tout $r>1$ et tout $\alpha\in\Lambda_{\omega,r}$ on obtient:

$$\left\|e^{tA_\alpha}\right\|\leq Me^{r\omega t}\quad\forall t\geq 0$$

Par suite on a:

$$\begin{aligned}
\left\|e^{tA_\alpha}x-e^{tA_\beta}x\right\| &\leq t\int_0^1 Me^{\omega rvt}Me^{\omega r(1-v)t}\left\|A_\alpha x-A_\beta x\right\|dv \\
&= M^2te^{\omega rt}\left\|A_\alpha x-A_\beta x\right\|
\end{aligned}$$

quel que soient $x \in X$ et t≥ 0 ■

2.4 Théorème de HilleYosida

Théorème 2.4.1 *(L'unicité de L'engendrement)*

Soit deux C_0 semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ et $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ ayant pour générateur infinitésimal le meme opérateur A alors:

$$T(t) = S(t) \quad \forall t \geq 0$$

Preuve. Soient $X \in D(A)$ et $t \geq 0$, On définit l'application

$$s \in [0,t] \to U(s)x = S(t-s)T(s)x \in D(A)$$

Alors:

$$\begin{aligned} \frac{dU(s)x}{ds} &= \frac{d}{ds}S(t-s)T(s)x + S(t-s)\frac{d}{ds}T(s)x \\ &= -AS(t-s)T(s)x + S(t-s)AT(s)x \\ &= 0 \end{aligned}$$

quel que soit $x \in D(A)$, par suite

$$U(0)x = U(t)x \text{ , pour tout } x \in D(A)$$

D'où

$$S(t)x = T(t)x,\ \forall x \in D(A) \text{ et } t \geq 0$$

Puisque $\overline{D(A)} = X$ et $T(t), S(t) \in \mathcal{L}(X)$, pour tout $t \geq 0$, il résulte que

$$S(t)x = T(t)x, \forall t \geq 0 \text{ et } x \in X$$

Ainsi

$$S(t) = T(t),\ \forall t \geq 0$$

■

Théorème 2.4.2 *(Hill-Yosida)*

Un opérateur linéaire

$$A : D(A) \subset X \to X$$

est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0} \in SG(M, \omega)$ *si et seulement si:*

i) A *est un opérateur fermé et* $\overline{D(A)} = X$

ii) Il existe $\omega \geq 0$ *et* $M \geq 1$ *tel que* $\Lambda_\omega \subset \rho(A)$ *et pour* $\lambda \in \Lambda_\omega$ *on a:*

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^n}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Preuve. Si $\{T(t)\}_{t \geq 0} \in SG(M, \omega)$ et A son générateur infinitésimal alors d'aprés le théorème (2.1.3) on obtient (i) et d'aprés le théorème (2.2.2) on obtient (ii)

Réciproquement supposons que l'opérateur $A : D(A) \subset X \to X$ possède les propeiétés (i) et (ii)

Soit $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda_\omega}$ l'approscimation généraliseé de yosida de l'opérateur A. d'aprés le lemme (2.3.1) il résulte que

$$A_\lambda \in \mathcal{L}(X) \text{ et } \lim_{\operatorname{Re}\lambda \to +\infty} A_\lambda x = Ax, \ \forall x \in D(A)$$

Pour $\lambda \in \Lambda_\omega$, soit $\{T_\lambda(t)\}_{t \geq 0} = \left(e^{tA_\lambda}\right)_{t \geq 0}$ le semi-groupe uniformément continue engendré par A_λ, avec le lemme (2.3.2) on a:

$$\|T_\alpha(t)x - T_\beta(t)x\| \leq M^2 t e^{\omega t} \|A_\alpha x - A_\beta x\| \quad \forall \alpha, \beta \in \Lambda_\omega \text{ et } x \in D(A), \text{ et } \forall t \geq 0$$

Soient l'espace $(D(A))$ de Banach $D(A)$ avec la norme $\|.\|_{D(A)}$ et $\mathcal{L}(D(A), X)$ l'espace des opérateurs linéaires bornés définé sur $(D(A))$ avec valeur dans X, muni de la topoligie forte.

On note par $C([0, +\infty[, \mathcal{L}((D(A)), X))$ l'espace des fonctions continues définies sur $[0, +\infty[$ a valeur dans $\mathcal{L}((D(A)), X)$ muni de la topolpgie de la convergence uniforme sur les intervalles compacts de $[0, +\infty[$

Si $[a, b] \subset [0, +\infty[$, alors pour tout $x \in D(A)$ on a:

$$\sup_{t \in [a,b]} \|T_\alpha(t)x - T_\beta(t)x\| \leq M^2 b e^{\omega b} (\|A_\alpha x - Ax\| + \|A_\beta x - Ax\|)$$

et

$$(\|A_\alpha x - Ax\| + \|A_\beta x - Ax\|) \to 0 \text{ si } \operatorname{Re}\alpha, \operatorname{Re}\beta \to +\infty$$

D'où il résulte que $\left\{ \{T_\lambda(t)\}_{t\geq 0} \right\}_{\lambda\in\Lambda_\omega}$ est une suite de Cauchy dans l'espace $C\left([0,+\infty[\,,\mathcal{L}\left((D(A)),X\right)\right)$, donc il existe un unique $T_0 \in C\left([0,+\infty[\,,\mathcal{L}\left((D(A)),X\right)\right)$ tel que

$$T_\lambda(t)\,x \overset{C.U}{\to} T_0(t)\,x, \text{si } \operatorname{Re}\alpha \to +\infty,\ \forall x \in D(A)$$

Puisque

$$\|T_\lambda(t)\| \leq Me^{\omega t},\ \forall t \geq 0$$

Par suite

$$\|T_\lambda(t)\,x\| \leq Me^{\omega t}\ \|x\|,\ \forall t \geq 0 \text{ et } x \in D(A)$$

Soit l'application linéaire

$$\begin{aligned} \psi_0 &: D(A) \to C([a,b],X) \\ \psi_0 x &= T_0(.)\,x\ ,\ \forall a,b \in [a,b] \subset [0,+\infty[\end{aligned}$$

Comme on a:

$$\|\psi_0 x\|_{C([a,b],X)} \leq \sup_{t\in[a,b]} \|T_0(t)\,x\| \leq Me^{\omega b}\,\|x\|_{D(A)},\ \forall x \in D(A)$$

Donc ψ_0 est continue et puisque $\overline{D(A)} = X$, elle se prolonge de façon unique application linéaire continue $\psi : X \to C([a,b],X)$ tel que

$$\psi_{/_{D(A)}} = \psi_0$$

et

$$\|\psi x\|_{C([a,b],X)} \leq Me^{\omega b}\,\|x\|,\ \forall x \in X$$

Par conséquent, il existe un seul opérateur $T \in C([a,b],\mathcal{L}(X))$ tel que

$$\psi x = T(.)\,x,\ \forall x \in X$$

Ainsi quel que soit $[a,b] \subset [0,+\infty[$, il existe un seul opérateur noté $T \in C([a,b],\mathcal{L}(X))$ tel que pour tout $x \in X$ on a:

$$T_\lambda(t)\,x \to T(t)\,x,\ \text{si } \operatorname{Re}\lambda \to +\infty$$

Uniformément par rapport à t sur les intervalle compacts de $[0,+\infty[$ de plus

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t},\ \forall t \geq 0$$

D'autre part

$$T(0)\,x = \lim_{\operatorname{Re}\lambda\to+\infty} T_\lambda(t)\,x = x,\ \forall x\in X$$

et

$$\lim_{t\to0} T(t)\,x = \lim_{t\to0}\left(\lim_{\operatorname{Re}\lambda\to+\infty} T_\lambda(t)\,x\right) = \lim_{\operatorname{Re}\lambda\to+\infty}\left(\lim_{t\to0} T_\lambda(t)\,x\right) = x,\ \forall x\in X$$

Soient $t,s\in[0,+\infty[$ et $x\in X$, alors

$$\begin{aligned}\|T(t+s)\,x - T(t)\,T(s)\,x\| &\le \|T(t+s)\,x - T_\lambda(t+s)\,x\| + \|T_\lambda(t+s)\,x - T_\lambda(t)\,T(s)\,x\| + \|T_\lambda(t)\,T(s) \\ &\le \|T(t+s)\,x - T_\lambda(t+s)\,x\|\,\|T_\lambda(t)\|\,\|T_\lambda(s)\,x - T(s)\,x\| + \|T_\lambda(t)\,T(s)\,x -\end{aligned}$$

Puisque $T_\lambda(t)\to T(t)$ si $\operatorname{Re}\lambda\to+\infty$ pour la topologie forte de $\mathcal{L}(X)$, par suite $T(t+s)\,x = T(t)\,T(s)\,x$ pour tout $x\in X$, par conséquent $\{T(t)\}_{t\geq0}\in SG(M,\omega)$.

Montrons que A est le générateur infinitésimal du semi-groupe $(T(t))_{t\geq0}$. pour tout $x\in D(A)$ on a:

$$\begin{aligned}\|T_\lambda(s)\,A_\lambda x - T(s)\,Ax\| &\le \|T_\lambda(s)\|\,\|A_\lambda x - Ax\| + \|T_\lambda(s)\,Ax - T(s)\,Ax\| \\ &\le Me^{\omega t}\,\|A_\lambda x - Ax\| + \|T_\lambda(s)\,Ax - T(s)\,Ax\| \to 0 \text{ si } \operatorname{Re}\lambda\to+\infty\end{aligned}$$

uniformément par rapport à $s\in[0,t]$

D'où

$$\begin{aligned}T(t)\,x - x &= \lim_{\operatorname{Re}\lambda\to+\infty}\left[T_\lambda(t)\,x - x\right] \\ &= \lim_{\operatorname{Re}\lambda\to+\infty}\int_0^t T_\lambda(s)\,A_\lambda x ds \\ &= \int_0^t T(s)\,Axds\end{aligned}$$

quel que soient $x\in D(A)$ et $t\geq0$

Soit B le générateur infinitésimal du C_0 semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq0}$, si $x\in D(A)$ alors:

$$\lim_{t\to0}\frac{T(t)\,x - x}{t} = \lim_{t\to0}\frac{1}{t}\int_0^t T(s)\,Axds = Ax$$

Donc $x\in D(B)$, par conséquent $D(A)\subset D(B)$ et $B_{/_{D(A)}} = A$.

D'autre part on a l'inégalité

$$\|T(t)\| \le Me^{\omega t},\ \forall t\geq0$$

Si $\lambda \in \Lambda_\omega$ alors $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$

Soit $x \in D(B)$, on a donc $(\lambda I - B)x \in X$ et comme l'opérateur $(\lambda I - A) : D(A) \to X$ est bijectif, il existe que $x' \in D(A)$ tel que

$$(\lambda I - A)x' = (\lambda I - B)x$$

et comme $\lambda \in \rho(B)$ il en résulte que $x' = x$

Par suite $x \in D(A)$ et donc $D(B) \subset D(A)$

On a donc

$$D(B) = D(A) \text{ et } A = B$$

Ainsi A est le générateur infinitésimal du C_0 semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ et d'aprés le théorème (2.4.1) il résulte que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est l'unique C_0 semi-groupe engendré par A ■

2.5 Théoème de Lumer-Phillips

Définition 2.5.1 *Soit X espace be Banach muni de la norme $\|.\|$, et soit X^* l'espace dual du X posons:*

$$F(x) = \left\{x^* \in X^*,\ \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\right\}$$

On dit que l'opérateur $A : D(A) \subseteq X \to X$ est dissipatif si pour tout $x \in X$, il existe $x^* \in F(x)$ tel que

$$\operatorname{Re}\langle Ax, x^* \rangle \leq 0$$

Proposition 2.5.1 *Un opérateur linéaire $A : D(A) \subseteq X \to X$ est dissipatif si et seulement si pour tout $\alpha > 0$ on a:*

$$\|(\alpha I - A)x\| \geq \alpha \|x\| \ \ \forall x \in D(A)$$

Preuve. Supposons que l'opérateur $A : D(A) \subseteq X \to X$ est dissipatif donc pour tout $x \in X$, il existe $x^* \in F(x)$ tel que:

$$\operatorname{Re}\langle Ax, x^* \rangle \leq 0$$

Si $\alpha > 0$ alors on a:

$$\begin{aligned} \|(\alpha I - A)\,x\|\,\|x\| &= \|(\alpha I - A)\,x\|\,\|x^*\|_{X^*} \geq |\langle(\alpha I - A)\,x, x^*\rangle| \\ &\geq \operatorname{Re}\langle(\alpha I - A)\,x, x^*\rangle = \operatorname{Re}\langle\alpha x, x^*\rangle - \operatorname{Re}\langle Ax, x^*\rangle \\ &\geq \alpha\,\|x\|^2 \end{aligned}$$

Donc:

$$\|(\alpha I - A)\,x\| \geq \alpha\,\|x\|$$

D'autre part soit $A : D(A) \subseteq X \to X$ tel que pour tout $\alpha > 0$ et $x \in D(A)$ on a:

$$\|(\alpha I - A)\,x\| \geq \alpha\,\|x\|$$

Soit $y^*_\alpha \in F((\alpha I - A)\,x)$ donc:

$$\langle(\alpha I - A)\,x, y^*_\alpha\rangle = \|(\alpha I - A)\,x\|^2 = \|y^*_\alpha\|^2$$

D'où

$$\|y^*_\alpha\| = \|(\alpha I - A)\,x\| \geq \alpha\,\|x\|$$

Posons:

$$z^*_\alpha = \frac{y^*_\alpha}{\|y^*_\alpha\|_{X^*}}$$

Soit $\overline{B}_{X^*}$ la boule unité de X^* tel que

$$\overline{B}_{X^*} = \{x^* \in X^*, \|x^*\|_{X^*} \leq 1\}$$

et $\partial\overline{B}_{X^*}$ sa frontière, donc $z^*_\alpha \in \partial\overline{B}_{X^*}$

De plus

$$\begin{aligned} \alpha\,\|x\| &\leq \|(\alpha I - A)\,x\| = \frac{1}{\|y^*_\alpha\|}\langle(\alpha I - A)\,x, y^*_\alpha\rangle \\ &= \left\langle(\alpha I - A)\,x, \frac{y^*_\alpha}{\|y^*_\alpha\|}\right\rangle \\ &= \langle(\alpha I - A)\,x, z^*_\alpha\rangle = \operatorname{Re}\langle\alpha x, z^*_\alpha\rangle - \operatorname{Re}\langle Ax, z^*_\alpha\rangle \qquad (1) \\ &\leq |\langle\alpha x, z^*_\alpha\rangle| - \operatorname{Re}\langle Ax, z^*_\alpha\rangle \leq \alpha\,\|x\|\,\|z^*_\alpha\| - \operatorname{Re}\langle Ax, z^*_\alpha\rangle \end{aligned}$$

Donc:

$$\operatorname{Re}\langle Ax, z^*_\alpha\rangle \leq 0$$

D'où

$$-\operatorname{Re}\langle Ax, z_\alpha^*\rangle \leq |\langle Ax, z_\alpha^*\rangle| \leq \|Ax\|$$

et d'aprés (1) on a:

$$\alpha \|x\| \leq \alpha \operatorname{Re}\langle x, z_\alpha^*\rangle + \|Ax\|$$

Par suite

$$\operatorname{Re}\langle x, z_\alpha^*\rangle \geq \|x\| - \frac{1}{\alpha}\|Ax\|$$

et d'aprés le théorème (Banach-Aloglu-Bourbaki) la boule $\overline{B}_{X^*}$ est compact pour la topologie faible*, $\sigma(X^*, X)$ et puisque X^* est un espace de Banach donc de tout suite de $\overline{B}_{X^*}$ on peut éxtraire une sous suite convergente. par suite il existe une sous suite $\left(z_\beta^*\right)_{\beta>0} \subset (z_\alpha^*)_{\alpha>0}$ et il existe $z^* \in \overline{B}_{X^*}$ tel que : $z_\beta^* \to z^*$ si $\beta \to +\infty$ pour la topologie faible, car

$$\operatorname{Re}\left\langle Ax, z_\beta^*\right\rangle \leq 0$$

et

$$\operatorname{Re}\left\langle x, z_\beta^*\right\rangle \geq \|x\| - \frac{1}{\beta}\|Ax\|$$

On obtient par passage à limite pour $\beta \to +\infty$

$$\operatorname{Re}\langle Ax, z^*\rangle \leq 0 \text{ et } \operatorname{Re}\langle x, z^*\rangle \geq \|x\|$$

Mais comme

$$\operatorname{Re}\langle x, z^*\rangle \leq |\langle x, z^*\rangle| \leq \|x\|$$

Alors:

$$\langle x, z^*\rangle = \|x\|$$

On pose:

$$x^* = \|x\| z^*$$

Il vient

$$\langle x, x^*\rangle = \langle x, \|x\| z^*\rangle$$

Ainsi on a:

$$x^* \in F(x) \text{ et } \operatorname{Re}\langle Ax, x^*\rangle \leq 0$$

■

Proposition 2.5.2 *Soit $A : D(A) \subseteq X \to X$ un opérateur dissipatif s'il existe $\alpha_0 > 0$ tel que*

$$\operatorname{Im}(\alpha_0 I - A) = X$$

Alors, pour tout $\alpha > 0$ on a:

$$\operatorname{Im}(\alpha I - A) = X$$

Preuve. Soient $A : D(A) \subseteq X \to X$ un opérateur dissipatif et $\alpha_0 > 0$ tel que

$$\operatorname{Im}(\alpha_0 I - A) = X$$

D'aprés la proposition (2.5.1) on a:

$$\|(\alpha_0 I - A)x\| \geq \alpha_0 \|x\| \quad \forall x \in D(A)$$

et comme $\operatorname{Im}(\alpha_0 I - A) = X$ il résulte que $(\alpha_0 I - A) \in In\vartheta B_X$

Donc $\alpha_0 \in \rho(A)$

Soit $(x_n)_{n\geq 0} \subset D(A)$ tel que $x_n \to x$ et $Ax_n \to y$ si $n \to +\infty$ on a:

$$(\alpha_0 I - A)x_n \to \alpha_0 x - y \text{ si } n \to +\infty$$

Par suite

$$x_n = R(\alpha_0, A)(\alpha_0 I - A)x_n \to R(\alpha_0, A)(\alpha_0 x - y)$$

On obtient

$$R(\alpha_0, A)(\alpha_0 x - y) = x$$

Comme

$$\operatorname{Im} R(\alpha_0, A) \in D(A)$$

Donc $x \in D(A)$

De plus

$$(\alpha_0 I - A)x = \alpha_0 x - y$$

D'où

$$Ax = y$$

Par conséquent A est un opérateur fermé

D'autre part on pose $\Pi = \{\alpha \in [0, +\infty[\,, \mathrm{Im}\,(\alpha I - A) = X\}$

Soit $\alpha \in \Pi$, comme A est un opérateur dissipatif on a:

$$\|(\alpha I - A)\,x\| \geq \alpha \|x\| \quad \forall x \in D\,(A)$$

D'où il résulte que $\alpha \in \rho\,(A)$, et puisque $\rho\,(A)$ est une ensemble ouvert il existe un voisinage ϑ de α contenu dans $\rho\,(A)$, et comme

$$\vartheta \cap\,]0, +\infty[\, \subset \Pi$$

Donc: Π est un ensemble ouvert

Soit $(\alpha_n)_{n\geq 0} \subset \Pi$ tel que $\alpha_n \to \alpha$

Comme

$$\mathrm{Im}\,(\alpha_n I - A) = X \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Donc $\forall y \in X$, $\exists x_n \in D\,(A)$ tel que

$$(\alpha_n I - A)\,x_n = y \;\; \forall n \in \mathbb{N}$$

Par suite, il existe $C > 0$ tel que:

$$\|x_n\| \leq \frac{1}{\alpha_n} \|y\| \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\alpha_n \|x_n - x_m\| &\leq \|(\alpha_m I - A)\,(x_n - x_m)\| \\
&= \|(\alpha_m I - A)\,x_n - (\alpha_m I - A)\,x_m\| \\
&= \|\alpha_m x_n - A x_n - y\| \\
&= \|\alpha_m x_n - \alpha_n x_n + \alpha_n x_n - A x_n - y\| \\
&= \|(\alpha_m - \alpha_n)\,x_n + y - y\| \\
&= |\alpha_m - \alpha_n|\,\|x_n\| \\
&\leq C\,|\alpha_m - \alpha_n| \to 0
\end{aligned}$$

D'où il résulte que $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy car X est un espace de Banach.

Donc $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers un point $x \in X$. alors on en déduit que:

$$A x_n \to \alpha x - y \text{ si } n \to +\infty$$

et comme A est un opérateur fermé, on obtient $x \in D(A)$ et $\alpha x - Ax = y$

Par suite

$$\operatorname{Im}(\alpha I - A) = X \quad \text{et } \alpha \in \Pi$$

Donc Π est fermé dans $]0, +\infty[$ et puisque $\alpha \in \Pi$ on déduit que $\Pi =]0, +\infty[$ ■

Définition 2.5.2 *Un semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ de classe C_0 est appelle semi-groupe de contraction de classe C_0 si l'on a:*

$$\|T(t)\| \leq 1 \text{ pour tout } t \geq 0$$

Théorème 2.5.1 *(Lumer-Phillips)*

Soit $A : D(A) \subseteq X \to X$ un opérateur tel que $\overline{D(A)} = X$ alors A est le générater infinitésimal d'un C_0 semi-groupe de contraction si et seulement si:

i) A est dissipatif

ii) Il existe $\lambda > 0$ tel que $\lambda I - A$ est surjectif

Preuve. Si A est le générateur infinitésimal de C_0 semi-groupe de contraction$\{T(t)\}_{t \geq 0}$ d'aprés le théorème de Hille-Yosida on a: $]0, +\infty[\subseteq \rho(A)$. Par suite $\lambda I - A$ est surjectif pour tout $\lambda > 0$, si $x \in D(A)$ et $x^* \in F(x)$ on a:

$$|\langle T(t)x, x^* \rangle| \leq \|x\| \|T(t)x\| \leq \|x\|^2$$

Ainsi

$$\operatorname{Re}\langle T(t)x - x, x^* \rangle = \operatorname{Re}\langle T(t)x, x^* \rangle - \|x\|^2 \leq 0$$

Donc:

$$\lim_{t \to 0} \operatorname{Re}\left\langle \frac{T(t)x - x}{t}, x^* \right\rangle \leq 0$$

Par suite

$$\operatorname{Re}\langle Ax - x, x^* \rangle \leq 0$$

Réciproquement si A est dissipatif et pour un certaine $\lambda_0 > 0$ l'opérateur $\lambda I - A$ est surjectif

D'apeés la proposition (2.5.2) l'opérateur A est fermé et $\lambda I - A$ est dissipatif pour tout $\lambda > 0$, il resulte d'prés la proposition (2.5.1) que pour tout $x \in D(A)$ on a:

$$\|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda \|x\| \quad \forall \lambda > 0$$

Donc:

$$\left\|(\lambda I - A)^{-1} x\right\| \leq \frac{1}{\lambda} \quad \forall \lambda > 0$$

De plus:

$$]0, +\infty[\subset \rho\,(A)$$

Ainsi d'aprés le théorème de Hille-Yosida l'opérateur A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe de contraction ■

Chapitre 3

Le problème de Cauchy abstrait

3.1 Le problème homogène de valeur initiale

Soit X un espace de Banach est $A : D(A) \subset X \to X$ un opérateur linéaire. étant donne $x \in X$, le problème de Cauchy abstrait pour A est de la forme:

$$(ACP) \quad \begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = Au(t) \\ u(0) = x \end{cases}$$

3.1.1 L'unicité de la solution de (ACP)

Lemme 3.1.1 *Soit $u(t)$ une fonction continue sur $[0,T]$ si*

$$\left\| \int_0^T e^{ns} u(s)\, ds \right\| \leq M \qquad n = 1, 2, .. \tag{3.1}$$

Alors

$$u(t) \equiv 0 \;\; sur \;\; [0,T]$$

Preuve. Soit $x^* \in X^*$ on pose $\varphi(t) = \langle x^*, u(t) \rangle$, donc il est evident que φ est continu sur $[0,T]$ et

$$\left| \int_0^T e^{ns} \varphi(s)\, ds \right| = \left| \left\langle x^*, \int_0^T e^{ns} u(s)\, ds \right\rangle \right| \leq \|x^*\| M = M_1 \text{ pour } n = 1, 2.. \tag{3.2}$$

Ce qui implique que $\varphi(t) \equiv 0$ sur $[0,T]$ et car $x^* \in X^*$ est arbitraire, il s'ensuit que

$$u(t) \equiv 0 \text{ sur } [0,T]$$

Considérons la series

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} e^{kn\tau} = 1 - \exp\left(-e^{n\tau}\right)$$

Cette serie converge uniformement en τ sur un interval borné donc

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} e^{kn(t-T+s)} \varphi(s)\, ds \right| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} e^{kn(t-T)} \left| \int_0^T e^{kns} \varphi(s)\, ds \right| \\ &\leq M_1 \left(\exp\left(e^{n(t-T)}\right) - 1 \right) \end{aligned} \tag{3.3}$$

Pour $t < T$ le côté droit de (3.3) tend vers 0 si $n \to \infty$

D'autre part on a:

$$\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} e^{kn(t-T+s)} \varphi(s)\, ds = \int_0^T \left(1 - \exp\left(-e^{n(t-T+s)}\right) \varphi(s)\right) ds \tag{3.4}$$

D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue la côté droite de (3.4) converge vers

$$\int_{T-t}^{T} \varphi(s)\, ds \text{ si } n \to \infty$$

et avec (3.3) on trouve que, pour tout $0 \leq t \leq T$, $\int_{T-t}^{T} \varphi(s)\, ds = 0$

Ce qui implique $\varphi(s) \equiv 0$ sur $[0, T]$ ■

Théorème 3.1.1 *Soit A un opérateur linéaire de domaine dense, si $R(\lambda, A)$ existe pour tout $\operatorname{Re} \lambda > 0$ et*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \sup \lambda^{-1} \log \|R(\lambda, A)\| = 0 \tag{3.5}$$

Alors le problème (ACP) admet au plus une solution pour tout $x \in X$

Preuve. Notons d'abord que $u(t)$ est une solution de (ACP) si et seulement si $e^{zt}u(t)$ est une solution de problème de vleur initiale

$$\frac{dv}{dt} = (A + zI)\, v, v(0) = x$$

Ainsi, nous pouvons effectuer une translation sur A par une constante multiplier par l'identité I.

On suppose que $R(\lambda, A)$ existe pour tout $\operatorname{Re} \lambda$, $\lambda > 0$, et que (3.5) est vérifiée.

Soit $u(t)$ une solution de (ACP) satisfaisant $u(0) = 0$, nous montre que $u(t) \equiv 0$

Considérons la fonction $t \to R(\lambda, A)\, u(t)$ pour $\lambda > 0$, comme $u(t)$ est une solution de (ACP) on a:

$$\frac{d}{dt} R(\lambda, A)\, u(t) = R(\lambda, A)\, Au(t) = \lambda R(\lambda, A)\, u(t) - u(t)$$

Ce qui implique

$$R(\lambda, A)\, u(t) = -\int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} u(\tau)\, d\tau \tag{3.6}$$

De l'hypothèse (3.5) on déduit que pour tout $\theta > 0$

$$\lim e^{-\theta\lambda} \left\| R(\lambda, A) \right\| = 0$$

et par conséquent (3.6) il résulte que

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_0^{t-\theta} e^{\lambda(t-\theta-\tau)} u(\tau)\, d\tau = 0 \tag{3.7}$$

D'aprés le lemme (3.1.1) on déduit que $u(\tau) \equiv 0$ pour $0 \leq \theta \leq t - \theta$, puisque t et θ étaient arbitraire $u(\tau) \equiv 0$ pour $t \geq 0$. ■

3.1.2 L'existence de la solution de (ACP)

Théorème 3.1.2 *Soit A un opérateur linéaire de domaine dense et de résolvant $\rho(A)$ non vide. Le problème (ACP) admet une solution unique $u(t)$ qui est continûment différentiable sur $[0, +\infty[$ pour tout valeur initiale $x \in D(A)$, si est seulement si A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$*

Preuve. Si A est le générateur infiitésimal de C_0 semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, alors d'aprés le théorème (2.1.2), on résulte que pour tout $x \in X$, $T(t)\, x$ est l'unique solutions de (ACP) avec la valeur initiale $x \in D(A)$, de plus $T(t)\, x$ est continûment déffirentiable pour $0 \leq t \leq \infty$.

D'autre part, si le problème (ACP) admet une solution unique continûment différentiable sur $[0, +\infty[$, pour toutes les données initiales $x \in D(A)$, alors A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$.

On suppose maintenant que pour tout $x \in D(A)$ le problème (ACP) admet une unique solution $u(t)$ continûment différentiable sur $[0, +\infty[$.

Pour $x \in D(A)$ on définit la norme du graphe

$$\|x\|_G = \|x\| + \|Ax\|$$

Puisque $\rho(A) \neq \emptyset$ donc $D(A)$ muni de la norme du graphe est un espace de Banach notons par $[D(A)]$. Soit X_{t_0} l'espace de Banach des fonction continues de $[0, t_0]$ dans $[D(A)]$ muni de la norme usual.

Nous considérons l'application

$$S : [D(A)] \rightarrow X_{T_0}$$

Définie par

$$Sx = u(t, x) \text{ pour } 0 \leq t \leq t_0$$

D'aprés la linéairité de (ACP) et l'unicité de la solution, il est clair que S est un opérateur linéaire définie sur $[D(A)]$. L'opérateur S est fermé, en effet si $x_n \rightarrow x$ dans $[D(A)]$ et $Sx_n \rightarrow v$ dans X_{t_0},donc à partir de la fermeture de A et:

$$u(t, x_n) = x_n + \int_0^t Au(\tau, x_n)\, d\tau$$

Il s'ensuit que l'orsque $n \rightarrow \infty$

$$v(t) = x + \int_0^t Av(\tau)\, d\tau$$

Ce qui implique $v(t) = u(t, x)$ et S est fermé.

Donc d'aprés le théorème du graphe fermé S est borné, et

$$\sup_{0 \leq t \leq t_0} \|u(t, x)\|_G \leq C \|x\|_G \tag{3.8}$$

On définit maintenant l'application:

$$T(t) : [D(A)] \rightarrow [D(A)]$$

Par

$$T(t)\, x = u(t, x)$$

D'aprés (3.8) et pour $0 \leq t \leq t_0$ $T(t)$ est uniformément borné, et d'aprés le théorème (2.1.1) (ii)on peut prolonger

$$T(t)\, x = T(t - xt_0)\, T(t_0)^n\, x \text{ pour } nt_0 \leq t \leq (n_0 + 1)\, t$$

à un semi-groupe sur $[D(A)]$ satisfaisant:

$$\|T(t)x\|_G \leq Me^{\omega t}\|x\|_G$$

Ensuite, nous montrons que:

$$T(t)Ay = AT(t)y \text{ pour } y \in D\left(A^2\right) \tag{3.9}$$

posant

$$v(t) = y + \int_0^t u(s, Ay)\,ds \tag{3.10}$$

D'où

$$\begin{aligned} v'(t) = u(t, Ay) &= Ay + \int_0^t \frac{d}{ds}u(s, Ay)\,ds \\ &= A\left(y + \int_0^t u(s, Ay)\,ds\right) = Av(t) \end{aligned} \tag{3.11}$$

Car $v(0) = y$, nous avons d'aprés l'unicité de la solution de (ACP)

$$v(t) = u(t, y)$$

Donc

$$Au(t, y) = v'(t) = u(t, Ay)$$

Maintenant, puisque $D(A)$ est dense dans X, et d'aprés l'hypothèse $\rho(A) \neq \emptyset$, $D(A^2)$ est aussi dense dans X.

Soient $\lambda_0 \in \rho(A), \lambda_0 \neq 0$ et $y \in D(A^2)$ si $x = (\lambda_0 I - A)y$, et d'aprés (3.9) on a:

$$T(t)x = (\lambda_0 I - A)T(t)y$$

D'où

$$\begin{aligned} \|T(t)x\| &= \|(\lambda_0 I - A)T(t)y\| \\ &\leq C\|T(t)y\|_G \\ &\leq C_1 e^{\omega t}\|y\|_G \end{aligned} \tag{3.12}$$

Mais

$$\|y\|_G = \|y\| + \|Ay\| \leq C_2\|x\|$$

Ce qui implique

$$\|T(t)x\| \leq C_2 e^{\omega t} \|x\| \tag{3.13}$$

Donc $T(t)$ peut etre prolongé par la continuité a tout X, reste a montre que A est le générateur infinitésimal de $T(t)$.

Notons par A_1 le générateur infinitésimal de $T(t)$, si $x \in D(A)$ on a d'aprés la définition de $T(t)$

$$T(t)x = u(t,x)$$

Et par l'hypothèse il résulte que:

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x \text{ pour } t \geq 0$$

Ce qui implique en particulier que

$$\frac{d}{dt}T(t)x \mid_{t=0} = Ax$$

Alors $A \subset A_1$

Soient $\operatorname{Re}\lambda > \omega$ et $y \in D(A^2)$, à partire de (3.9) et $A \subset A_1$, on déduit que:

$$e^{-\lambda t}AT(t)y = e^{-\lambda t}T(t)Ay = e^{-\lambda t}T(t)A_1y \tag{3.14}$$

Et par d'intégration (3.14) de 0 a ∞ on trouve

$$AR(\lambda, A_1)y = R(\lambda, A_1)A_1y \tag{3.15}$$

Mais

$$A_1R(\lambda, A_1)y = R(\lambda, A_1)A_1y$$

Donc

$$AR(\lambda, A_1)y = A_1R(\lambda, A_1)y \text{ pour tout } y \in D\left(A^2\right)$$

Puisque $A_1R(\lambda, A_1)$ est uniformément borné, A est fermé et $D(A^2)$ est dense dans X, il s'ensuit que

$$AR(\lambda, A_1)y = A_1R(\lambda, A_1)y \text{ pour tout } y \in X$$

Ce qui implique $D(A) \supset \textit{Range } R(\lambda, A_1) = D(A_1)$ et $A_1 \subset A$. Alors $A = A_1$ ■

Théorème 3.1.3 *Si A est le générateure d'un semi-groupe différentiable, alors pour tout $x \in X$ le problème (ACP) admet une solution unique.*

Preuve. L'unicité résulte de théorème (3.1.1). Si $x \in D(A)$ l'existence résulte de théorème (3.1.2). Si $x \in X$, d'aprés la dérivabilité de $T(t)x$ et les résultas de chapitre 2, il s'ensuit que pour tout $x \in X$:

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x \text{ pour } t > 0$$

et $AT(t)x$ est lipschitz continue pour $t > 0$, donc $T(t)x$ est une solution de (ACP) ■

Définition 3.1.1 *On dit que la fonction continue $u : \mathbb{R}_+ \to X$ est solution mild du (ACP) si $\int_0^t u(s)\,ds \in D(A)$ pour tout $t \geq 0$ et $u(t) = A\int_0^t u(s)\,ds + x$*

Proposition 3.1.1 *Soit $(A, D(A))$ le générateur d'un semi-groupe fortement continu $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ alors pour tout $x \in X$, la fonction*

$$u : t \to u(t) = T(t)x$$

est l'unique solution mild du problème (ACP)

Preuve. Il suffit de montrer l'unicité de la solution zéro pour la valeur initiale $x = 0$, à cette fin

On suppose que u soit solution mild du problème (ACP) pour $x = 0$ et prennent $t > 0$ alors pour chaque $s \in [0, T]$, nous obtenons:

$$\frac{d}{ds}\left(T(t-s)\int_0^s u(\tau)\,d\tau\right) = T(t-s) - T(t-s)A\int_0^s u(\tau)\,d\tau = 0$$

L'intégration de cette égalité de 0 a t donne

$$\int_0^t u(\tau)\,d\tau = 0, \text{ d'ou } u(0) = 0$$

selon ■

Exemple 3.1.1 *Soit $(B, D(B))$ est un opérateur fermé et non borné sur X. Sur l'espace $\chi = X \times X$, on considère l'opérateur $(A, D(A))$ s'écrit a la forme d'une matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec le domaine $D(A) = X \times D(B)$*

Alors $t \to u(t) = \begin{pmatrix} x + tBy \\ y \end{pmatrix}$ *est l'unique solution du problème* (ACP) *associée a* A.

Toute fois l'opérateur A *ne génére pas un semi-groupe fortement continu, puisque pour tout* $\lambda \in \mathbb{C}$ *on a:*

$$(\lambda - A) D(A) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda x - By \\ \lambda y \end{pmatrix}; x \in X, y \in D(B) \right\} \subset X \times D(B) \neq \chi$$

Donc $\sigma(A) = \mathbb{C}$

Corollaire 3.1.1 *Si* A *est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique alors pour tout* $x \in X$ *le probléme* (ACP) *admet une solution unique*

Remarque 3.1.1 *Si* A *le générateur infinitésimal d'un* C_0 *semi-groupe qui n'est pas différentiable alors en général, si* $x \notin D(A)$ *le problème* (ACP) *n'admét pas une solution unique.*

Remarque 3.1.2 *La fonction* $t \to T(t)x$ *est appellé solution mild du problème* (ACP)

Définition 3.1.2 *Le problème de Cauchy* (ACP) *est dit uniformément bien posé sur* $E \subset X$ *(où* $\overline{E} = X$*) si*

i) Il existe une solution pour tout $x \in E$

ii) La solution est unique pour tout $T > 0$ *est uniformément stable pour* $t \in [0, T]$ *par rapport aux données initiales.*

Exemple 3.1.2 *On considère le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0, t \geq 0, x \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = f \end{cases} \tag{3.16}$$

Sur l'espace $X = L^2(\mathbb{R})$. *On peut l'écrire sous la forme suivante:*

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t), t \geq 0 \\ u(0) = f \end{cases}$$

avec $A = \frac{-d}{dx}$ *avec le domaine*

$$D(A) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}) \diagup u' \in L^2(\mathbb{R}) \right\}$$

Pour trouver la résolvante de A, *nous résolvons l'équation*

$$(\lambda I - A) g = \lambda g + g' = f, g \in D(A) \tag{3.17}$$

En supposant que f *donné dans l'espace* X *. Si* $\lambda > 0$*, alors la solution est*

$$g(s) = (R(\lambda, A) f)(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-\lambda(x-s)} f(s)\, ds, x \in \mathbb{R}$$

Utilison la transformation de Fourier, il n'est pas difficile de vérifier que l'état Hille-Yosida

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda}$$

est vérifiée pour $\lambda > 0$*. Ainsi* (3.16) *est uniformément bien posé sur* $D(A)$*. D'autre part* A *est le générateur d'un* C_0 *semi-groupe défini par*

$$(T(t) f)(x) = f(x-t), \; x \in \mathbb{R}, t \geq 0$$

et pour tout $f \in D(A)$*, la fonction*

$$u(x,t) = (T(t) f)(x), t \geq 0, x \in \mathbb{R}$$

est l'unique solution de (3.16)*, ce qui est stable par rapport à* f*.*

Maintenant, nous considérons le problème de Cauchy (3.16) *sur l'espace* $X = L^2 [0, +\infty[$*. Dans ce cas,*

$$D(A) = \left\{ u \in L^2 [0, +\infty[\diagup u' \in L^2 [0, +\infty[, u(0) = 0 \right\}$$

et

$$(R(\lambda, A) f)(x) = \int_{0}^{x} e^{-\lambda(x-s)} f(s)\, ds, \lambda > 0, x \in [0, +\infty[$$

Le C_0 *semi-groupe engendré par* A *est défini par*

$$(T(t) f)(x) = \begin{cases} f(x-t), \; x \geq t \\ \quad 0, \; 0 \leq x \leq t \end{cases}$$

Enfin, si $X = L^2 [0, +\infty[$ *et*

$$D(A) = \left\{ u \in L^2 [0, +\infty[\diagup u' \in L^2 [0, +\infty[, u(0) = 0 \right\}$$

alors pour tout $\lambda > 0$ *n'appartiennent pas à l'ensemble résolvante de* A*. Dans ce cas,* (3.16) *est résoluble que pour* $f \equiv 0$*.*

3.2 Le problème non homogène de valeur initiale

Nous considérons le prpblème de Cauchy non homogène de valeur initiale suivant:

$$(iACP)\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = Au(t) + f(t) & t > 0 \\ u(0) = x \end{cases}$$

Où $f : [0, T[\to X$

3.2.1 L'unicité de la solution de problème $(iACP)$

Définition 3.2.1 *Une fonction $u : [0, T[\to X$ est une solution classique de problème $(iACP)$ sur $[0, T[$ si:*

i) u est continue sur $[0, T[$

ii) u est continûment différentiable sur $]0, T[$

iii) $u(t) \in D(A)$ pour $0 < t < T$ et le problème $(iACP)$ est vérifié sur $[0, T[$

Proposition 3.2.1 *Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0 semi-groupe engendré par A et soit u une solution de problème $(iACP)$, alors la fonction $g(s) = T(t-s)u(s)$ est différentiable pour $0 < s < t$ et*

$$\begin{aligned} \frac{dg}{ds} &= -AT(t-s)u(s) + T(t-s)u'(s) \\ &= -AT(t-s)u(s) + T(t-s)Au(s) + T(t-s)f(s) \end{aligned}$$

$$= T(t-s)f(s) \tag{3.18}$$

Remarque 3.2.1 *Si $f \in L^1(0, T; X)$ alors $T(t-s)f(s)$ est intégrable et l'intégration (3.18) de 0 à t donne*

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)\,ds \tag{3.19}$$

Par conséquent on a le corollaire suivant

Corollaire 3.2.1 *Si $f \in L^1(0, T; X)$ alors pour tout $x \in X$ le problème $(iACP)$ admet au plus une solution, cette solution si elle existe s'ecrit sous la forme*

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)\,ds$$

Remarque 3.2.2 *Pour tout* $f \in L^1(0,T;X)$ *la côté droite de* (2.2) *est une fonction continue sur* $[0,T]$.

On peut le considérer comme solution généralisée du problème ($iACP$), *même si ce n'est pas différentiable et ne satisfait pas strictement l'equation dans le sens de la définition précédent*

Définition 3.2.2 *Soit* A *le générateur infinitésimal d'un* C_0 *semi-groupe* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, *soit* $x \in X$ *et* $f \in (0,T,X)$ *la fonction* $u \in C([0,T]:X)$ *donne par*

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s) f(s)\, ds, 0 \leq t \leq T$$

est la solution mild du problème ($iACP$) *sur* $[0,T]$.

Remarque 3.2.3 *La définition de la solution mild du problème de valeur initiale coincide quand* $f \equiv 0$ *à la définition de* $T(t)x$ *comme la solution mild de l'equation homogène correspondant.*

Il est clair que pas toute solution mild de ($iACP$) *est une solution classique, même dans le cas* $f \equiv 0$.

Pour $f \in L^1(0,T;X)$, *le problème* ($iACP$) *admet par la définition* (3.2.2) *une solution mild unique.*

Nous allons maintenant être intéressé à imposer autre condition sur f *de sorte que pour* $x \in D(A)$, *la solution mild devient une solution classique, et prouver que dans ces condition, l'existence d'une solution du problème* ($iACP$) *pour* $x \in D(A)$

Remarque 3.2.4 *Nous commençons par montrer que, la continuite de* f *en générale n'est pas suffisante pour assurer l'existence d'une solution du problème* ($iACP$)

Exemple 3.2.1 *Soit* A *le générateur infinitésimal d'un* C_0 *semi-groupe* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *et soit* $x \in X$ *tel que* $T(t)x \notin D(A)$ *pour tout* $t \geq 0$. *Soit* $f(s) = T(s)x$ *alors* $f(s)$ *est continue pour* $s \geq 0$

Considérons le problème de valeur initiale

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = Au(t) + T(t)x \\ u(0) = 0 \end{cases} \tag{3.20}$$

Le problème (3.20) *n'est pas de solution, même si* $u(t) = 0 \in D(A)$.

En effet la solution mild du problème (3.20) *est*

$$u(t) = \int_0^t T(t-s)\,T(s)\,x\,ds = tT(t)\,x$$

Mais $tT(t)\,x$ *n'est pas différentiable pour* $t > 0$ *donc ne peut pas être une solution du problème* (3.20).

3.2.2 L'existence de la solution de problème $(iACP)$

Théorème 3.2.1 *Soit* A *le générateur infinitésimal d'un* C_0 *semi-groupe* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, *soit* $f \in (0,T;X)$ *continue sur* $]0,T]$ *et soit*

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)\,f(s)\,ds \ ,0 \leq t \leq T \tag{3.21}$$

Le problème $(iACP)$ *admet une solution* u *sur* $[0,T[$ *pour tout* $x \in D(A)$, *si l'une des condition suivantes est satisfait*

i) $v(t)$ *est continûment différentiable sur* $]0,T[$

ii) $v(t) \in D(A)$ *pour* $0 < t < T$ *et* $Av(t)$ *est continue sur* $]0,T[$ *si le problème* $(iACP)$ *admet une solution* u *sur* $[0,T[$ *pour certains* $x \in D(A)$ *alors* v *satisfait à la fois (i) et (ii)*

Preuve. Si le problème $(iACP)$ admet une solution u pour certain $x \in D(A)$, alors cette solution est donne par (3.19), par conséquent:

$$v(t) = u(t) - T(t)\,x$$

est différentiable pour $t > 0$, (difference de deux fonctions différentiable) et

$$v'(t) = u'(t) - T(t)\,Ax$$

est continue sur $]0,T[$.

Donc (i) est vérifiée de plus si $x \in D(A)$, $T(t)\,x \in D(A)$ pour $t \geq 0$ alors

$$v(t) = u(t) - T(t)\,x \text{ pour } t > 0$$

et

$$Av(t) = Au(t) + AT(t)\,x = u'(t) - f(t) - T(t)\,Ax$$

est continue sur $]0,T[$ donc (ii) est vérifiée

D'autre part, pour $h>0$ on a:

$$\frac{T(h)-I}{h}v(t)=\frac{v(t+h)-v(t)}{h}-\frac{1}{h}\int_t^{t+h}T(t+h-s)f(s)\,ds \tag{3.22}$$

De la continuité de f, il zst claire que le second terme de la côté droite de (3.22) admet la limite $f(t)$ quand $h\to 0$.

Si $v(t)$ est continûment différentiable sur $]0,T[$, il résulte de (3.22) que $v(t)\in D(A)$ pour $0<t<T$ et $Av(t)=v'(t)-f(t)$.

Puisque $v(0)=0$, il en résulte que $u(t)=T(t)x+v(t)$ est une solution du problème $(iACP)$, pour $x\in D(A)$.

Si $v(t)\in D(A)$, il résulte de (3.22) que $v(t)$ est differentiable à de t et la dérivée droite $D^+v(t)$ de v vérifiant

$$D^+v(t)=Av(t)+f(t)$$

Puisque $D^+v(t)$ est continue, $v(t)$ est continûment différetiable et $v'(t)=Av(t)+f(t)$.

et car $v(0)\equiv 0$, $u(t)=T(t)x+v(t)$ est la solution de problème $(iACP)$ pour $x\in D(A)$

Les deux corollaire suivants sont des consiquence du théorème précédent ■

Corollaire 3.2.2 *Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. Si $f(s)$ est continûment différentiable sur $[0,T]$, alors le problème $(iACP)$ admet une solution u sur $[0,T[$, pour tout $x\in D(A)$.*

Preuve. On a:

$$v(t)=\int_0^t T(t-s)f(s)\,ds=\int_0^t T(t)f(t-s)\,ds \tag{3.23}$$

Donc $v(t)$ est différentiable pour $t>0$ et que sa dérivée

$$\begin{aligned} v'(t) &= T(t)f(0)+\int_0^t T(s)f'(t-s)\,ds \\ &= T(t)f(0)+\int_0^t T(t-s)f'(s)\,ds \end{aligned}$$

est continue sur $]0,T[$ .le résultat découle donc du théorème (3.2.1) (i) ■

Corollaire 3.2.3 *Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. Soit $f \in L^1(0,T;X)$ une fonction continue sur $]0,T[$.*

i) Si $f(s) \in D(A)$ pour $0 < t < T$ et $Af(s) \in L^1(0,T;X)$, alors pour tout $x \in D(A)$ le problème $(iACP)$ admet une solution sur $[0,T[$.

Preuve. D'aprés la condition (i) il en résulte que pour $s > 0$, $T(t-s)f(s) \in D(A)$ et que

$$AT(t-s)f(s) = T(t-s)Af(s)$$

est intégrable. par conséquent $v(t)$ définie par (3.21) vérifiant $v(t) \in D(A)$ pour $t > 0$ et

$$\begin{aligned} Av(t) &= A\int_0^t T(t-s)f(s)\,ds \\ &= \int_0^t T(t-s)Af(s)\,ds \end{aligned}$$

est continue d'aprés le théorème (3.2.1) (ii) ■

Théorème 3.2.2 *Soit $f \in L^1(0,T;X)$. Si u est la solution mild de problème $(iACP)$ sur $[0,T]$, alors pour tout $T' < T$, u est la limite uniforme sur $[0,T']$ de la solution du problème $(iACP)$*

Preuve. Supposons que $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$, soient $x_n \in D(A)$ satisfaite $x_n \to x$ et $f_n \in C^1([0,T];X)$ satisfaite $f_n \to f$ dans $L^1(0,T;X)$. D'aprés le corollaire (2.3.1) on a: pour chaque $n \geq 1$ le problème de la valeur initiale

$$\begin{cases} \frac{du_n(t)}{dt} = Au_n(t) + f_n(t) \\ u_n(0) = x_n \end{cases} \tag{3.24}$$

admet une solution $u_n(t)$ sur $[0,T]$ satisfaisant

$$u_n(t) = T(t)x_n + \int_0^t T(t-s)f_n(s)\,ds$$

Si u est la solution mild de problème $(iACP)$ sur $[0,T]$ alors

$$\begin{aligned} \|u_n(t) - u(t)\| &\leq Me^{\omega t}\|x_n - x\| + \int_0^t Me^{\omega(t-s)}\|f_n(s) - f(s)\|\,ds \\ &\leq Me^{\omega T}\left(\|x_n - x\| + \int_0^t \|f_n(s) - f(s)\|\,ds\right) \end{aligned} \tag{3.25}$$

Par suite u est une limite uniforme. ■

Définition 3.2.3 *Une fonction u qui est dérivable presque partout sur $[0,T]$ tel que $u' \in L^1(0,T;X)$ est appelée une solution forte du problème $(iACP)$ si $u(0) = x$ et $u'(t) = Au(t) + f(t)$ presque partout sur $[0,T]$.*

Théorème 3.2.3 *Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, soient $f \in L^1(0,T;X)$ et*

$$v(t) = \int_0^t T(t-s) f(s)\, ds \ , \ 0 \leq t \leq T$$

Le problème $(iACP)$ admet une solution forte u sur $[0,T]$ pour tout $x \in D(A)$, si l'une des condition suivantes est vérifiée.

i) $v(t)$ est différentiable sur $[0,T]$ et $v'(t) \in L^1(0,T;X)$

ii) $v(t) \in D(A)$ sur $[0,T]$ et $Av(t) \in L^1(0,T;X)$

Si le problème $(iACP)$ admet une solution forte u sur $[0,T]$ pour certain $x \in D(A)$ alors v vérifiant les deux condition (i) et (ii).

Un conséquent de théorème (3.2.3) on a:

Corollaire 3.2.4 *Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, si f est différentiable presque partout sur $[0,T]$ et $f' \in L^1(0,T;X)$ alors pour tout $x \in D(A)$, le problème $(iACP)$ admet une unique solution forte sur $[0,T]$.*

En général la continuté de lipschitz de f sur $[0,T]$ n'est pas suffisante pour asserer l'existence d'une solution forte de $(iACP)$ pour $x \in D(A)$, toute fois, si X est réflexif et f est Lipschitz continue sur $[0,T]$ c'est

$$\|f(t_1) - f(t_2)\| \leq C\|t_1 - t_2\| \ \text{pour}\ t_1, t_2 \in [0,T]$$

Par suite f est différentiable presque partout et $f' \in L^1(0,T;X)$

Donc le corolaire (3.2.4) implique

Corollaire 3.2.5 *Soit X un espace de Banach réflexif et A le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ sur X, si f est Lipschitz continue sur $[0,T]$ alors pour tout $x \in D(A)$, le problème $(iACP)$ admet une unique solution forte u sur $[0,T]$ donnée par*

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s) f(s)\, ds$$

Conclusion

La théorie spectrale des semigroupes est un domaine de recherche qui suscite depuis quelques années beaucoup d'intérêt, il a connu des développement et des applications très intéressants, en particulier dans les équations d'évolution (problème de Cauchy).

Notre étude à examiné la relation entre l'existence, l'unicité et la stabilité de la solution du problème de Cauchy abstrait et l'operateur associé a ce problème.

Bibliographie

[1] A. Pazy- semigroups of linear operators and applications to partial equations, Springer-Verlage, New York, 1983.

[2] D. Feyel-Résumé d'analyse fonctionnelle élémentaire, Université d'Evry-Val d'Essonne, M1, Année 2006-07

[3] D.Li-Le théorème de convergence dominée et ses conséquences, Université d'Artois, 2011.

[4] E. Hille and R.S. Phillips, Functional analysis and semigroups, American Mathematical Society, Providence, R.I,1974, third printing of the revised edition of 1957,American Mathematical Society Colloquim Publication, Vol XXXI.

[5] H. Brezis- Analyse fonctionnelle, Dunod. Paris, 1999.

[6] I. I- Vrabie- C_0-semigroups and applications, University of Rochester New York, 2003.

[7] K. J. Engel, R. Nagel- One parameter semigroups for linear evolution equations, Springer-Verlag, New York 2000.

[8] L. D. Lemle-La formule de Lie-Trotier pour les semi-groupes fortement continus, Université Claude Bernard Lyons 1, 2001.

[9] L. D. Lemle- Semi-groupes d'opérateurs, L'unicité des pre-generateurs et application, Universite Blaise Pascal Clermont-Ferrand, 2007.

[10] M. Agti- Explication des idempotents assosies au semi-groupe ne vérifiant pas certaines enigalité prés de l'origine, université de Laghouat, 2009.

[11] R. Dautray, Jacques, L.Lions- Analyse mathématique et calcul numérique, Masson, Paris, 1988.

[12] V. Irina, Melnicova, A. Filincov- Abstract Cauchy problem, Chapman & Hall / CRC, New York, 2001

[13] Z. Song-Mu- Nonlinear evolution equation, Chapman & Hall / CRC, Florida 2004.