UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matière

N° d'ordre :
N° de série :

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation et Analyse Numérique

Par :SAIDA BELLAKA

Thème

Étude de quelques problèmes aux limites de contact avec adhésion et endommagement.

Soutenu publiquement le : 05/06/2014

Devant le jury composé de :

Badidja Salim	M. A. université de KASDI Merbah - Ouargla	Président
Meflah Mabrouk	M. C. université de KASDI Merbah - Ouargla	Examinateur
Aissaoui Adel	M. A. université de KASDI Merbah - Ouargla	Rapporteur

Dédication

Je dédie ce modeste travail :

-Aux joyaux de ma vie "mes parents" qui sont la source de ma réussite, je souhaite qu'ils trouvent à travers ce mémoire le faible témoignage de leurs efforts et sacrifices.

-A mes frères,

- A ma sœur,

-A toute la famille et

- A mes chers amis,

- Je tiens à remercier l'ensemble de tous les étudiants et étudiantes de ma promotion,

En fin je dédie cette mémoire à mes collègues et tous ceux qui me sont chers.

Remerciement

Avant toute considération, je remercie le Grand Dieu le tout puissant qui, m'a aidé pour achever ce travail.

Je tiens tout a remercier premier lieu mon encadreur Monsieur AISSAOUI Adel de m'avoir proposé un des plus importants thèmes et pour sa continuité à me soutenir et à m'encourager. Je voudrai aussi le remercier pour sa gentillesse, sa disponibilité et du temps consacré à mon travail.

Je remercie également les membres du département de Mathématique de m'avoir permis de travailler dans de bonnes conditions pendant la réalisation de mon travail.

Merci également a tous les enseignants qui m'ont aidé pendant mon cursus, sans oublier leurs conseils précieux.

Je remercie aussi toute personne de prés ou de loin a contribué à la finalisation de ce travail.

Table des matières

Notations

Si Ω est un domaine de $\mathbb{R}^d (d = 2, 3)$ pour les applications.

$\overline{\Omega}$ l'adhérence de Ω.

Γ la fontière de Ω supposée régulière.

$\Gamma_i (i = 1, 2, 3)$ une partie mesurable de la frontière Γ.

$mes\Gamma_1$ la mesure de Lebesgue$(d-1)$ dimenstionnelle de Γ_1.

ν la normale unitaire soetante à Γ.

ϑ_υ, ϑ_τ les composante normale et tangentielle du champ vectoriel ϑ défini sur $\overline{\Omega}$.

$C^1(\overline{\Omega})$ l'espace des fonctions réel continument différentiables sur $\overline{\Omega}$.

$\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions réel indéfiniment différentiables et à support compact continu dans $\overline{\Omega}$.

$\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace des distribtions sur Ω.

H l'espace $L^2(\Omega)^N$.

H_1 l'espace $H^1(\Omega)^N$.

$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ l'espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Γ.

H_Γ l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$.

$H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ l'espace dual de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

H'_Γ l'espace dual de $H_\Gamma = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$.

$\mathcal{H}$ l'espace $L^2(\Omega)_s^{d\times d}$.

$\mathcal{H}_1$ l'espcae $\{\sigma \in \mathcal{H}/div\sigma = (\partial_j \sigma_{ij}) \in H\}$.

$\gamma : H \to H_\Gamma$ l'application trace puor les fonctions vectorielles.

Si H est un espace de Hilbert réel et $d \in \mathbb{N}^*$, on utilise les notations suivantes.

H^N l'espace $\{x \in (x_i)/x_i \in H, \quad i = \overline{1, N}\}$.

$H_s^{d\times d}$ l'espace $\{x \in (x_{ij})/x_{ij} = x_{ji} \in H, i, j = \overline{1, N}\}$.

$(\cdot\,,\cdot\,)_H$ le produit scalaire de H.

$\|\cdot\|_H$ la norme de H.

H' l'espace dual de H.

$\langle\cdot\,,\cdot\,\rangle_{H'\times H}$ le produit de entre H' et H.

(H) l'espace des applications linéaires et continues de H dans H.

Si de plus $[0,T]$ un intervalle de temps, $K \in \mathbb{N}$ et $1 \le p \le +\infty$, on note par.

$C([0,T];H)$ l'espace des fonctions continues de $[0,T]$ dans H.

$C^1([0,T];H)$ l'espace des fonctions continument dérivables de $[0,T]$ dans H.

$L^p(0,T;H)$ l'espace des fonctions f mesurables de $[0,T]$ dans H.

$W^{k,p}(0,T;H)$ l'espace de Sobolev de paramètres k et p.

Pour une fonctions f, on note

$\dot{f}, \ddot{f}$ les dérivées premiére et seconde de f par rapport au temps.

$\partial_i f$ la dérivée partielle de f par rapport à laième composante x_i.

∇f le gradient de f.

$\varepsilon(f)$ la partie symétrique du gradient de f qui vaut $\frac{1}{2}(\nabla f + \nabla^T f)$.

$Div f$ la divergence de f.

∂f le sous différentiel (classique)de f.

Si H^1 et H^2 sont deux espaces de Hilbert réels, on note par

(H^1, H^2) l'espace des applications linéaires et continues de H^2 dans H^2.

$\|\cdot\|_{(H^1,H^2)}$ la norme de (H^1, H^2)

Introduction

Introduction

Les problèmes de contact avec ou sans frottement entre corps déformables ou entre un corps et une fondation sont abondants en industrie et dans la vie de tous les jours. le simple contact entre une roue de voiture et une route, le piston avec la chemise, du train d'atterrissage avec le sol, ne sont que quelques exemples parmi bien d'autres.

Du fait de l'importance du phénomène, des études considérables ont été consacrées à ce sujet important qui est la modélisation mathématique en mécanique du contact.

Le but de ce mémoire est de fournir une contribution dans l'étude de quelques problèmes de contact sans frottement avec adhésion pour les matériaux viscoélastiques avec endommagement.

Partout dans ce manuscrit le comportement du matériau est modélisé à l'aide d'une équation constitutive viscoélastique de Kelvin-Voigt, le contact est décrit à l'aide de compliance normale ou bilatéral, avec adhésion et endommagement.

Chacun des problèmes est étudié selon le formalisme général suivant : nous commençons par décrire le problème mécanique de départ, et, après avoir précisé les hypothèses sur les données, nous présentons une formulation variationnelle du problème mécanique pour laquelle nous démontrons l'existence et l'unicité de la solution faible pour le modèle considéré.

Outre les problèmes cités ci-dessus, il y a d'autres phénomènes réels et qui sont très importants tels que l'endommagement du matériau et l'adhésion des corps. L'endommagement est un phénomène très important en ingénierie, car il affecte directement la structure des machines. Il existe une littérature abondante sur ce sujet. Des modèles introduisant l'influence de l'endommagement interne du matériau ont été investi mathématiquement. Des modèles de l'endommagement ont été développés dans [15, 16] à partir du principe de la puissance virtuelle. L'analyse mathématique des problèmes aux limites en dimension un peut être trouvée dans [17]. La fonction d'endommagement α varie entre 0 et 1. Quand $\alpha = 1$ il n'y a pas d'endommagement dans le matériau, quand $\alpha = 0$ le matériau est complètement endommagé, quand $0 < \alpha < 1$ l'endommagement est partiel. Les problèmes de contact quasistatiques ont été investi dans [16,19,20,32]. Dans ce mémoire la relation utilisée pour modéliser l'évolution du champ d'endommagement est la suivante

$$\dot{\alpha} - k\alpha + \partial\varphi_K(\alpha) \ni \phi(\varepsilon(\mathbf{u}), \alpha)$$

où K est l'ensemble des fonctions test admissibles d'endommagement, ϕ étant la fonction source de l'endommagement.

Un autre phénomène sera considéré dans ce mémoire, ce phénomène a reçu récemment une très grande attention dans la littérature mathématique. L'analyse des modèles de contact avec adhésion peut être trouvée dans [1,3,8,9,10,12,21,24].

Le processus d'adhésion est trés important dans le montage industriel où les parties non métalliques sont collées ensemble. Récemment les matériaux composites ont atteint une proéminence parce qu'ils sont trés solides et légers, et par conséquent, ils ont une importance considérable dans l'aviation, l'exploration spatiale et l'industrie de l'automobile. Cependant les matériaux composites peuvent subir une délamination sous l'effet des tensions, où les différentes couches se détachent et bougent réciproquement l'une par rapport à l'autre. Pour modéliser le processus quand l'assemblage n'est pas permanent et le détachement peut se produire, il est nécessaire d'ajouter le processus d'adhésion à la description du contact. La principale nouvelle idée est l'introduction d'une variable interne de surface appelée champ d'adhésion qui prend ses valeurs entre zéro et un et qui décrit la densité fractionnaire des liens actifs sur la surface de contact.

Ce mémoire est composé de deux chapitres.

Dans le premier chapitre, le but est d'introduire les éléments nécessaires pour une bonne compréhension de la suite des objets traités. Nous commençons par décrire les lois de comportement, les conditions aux limites et puis la formulation mécanique des deux problèmes à étudier. Ensuite nous rappelons les espaces fonctionnels et principales notations utilisées, puis nous décrivons le cadre physique des problèmes de contact étudiés. Ensuite nous passons en revue quelques résultats fondamentaux d'analyse fonctionnelle, enoncés de certains théorème. Enfin, nous terminons par rappeler les lemmes de Gronwall.

Dans le second chapitre on s'intéresse à l'étude d'un problème aux limites qui décrive l'évolution dynamique d'un corps viscoélastique avec endommagement de Kelvin-Voigt soumis à des forces surfaciques et des forces volumiques, en contact sans frottement. Le contact y est décrit par une condition de contact avec compliance normale et adhésion. L'évolution du champ d'adhésion est décrit par une équation différentielle ordinaire du premier ordre. Nous dérivons une formulation variationnelle du probléme mécanique une inéquation variationnelle du type parabolique par rapport au champ d'endommagement, une équation différentielle d'ordre un par rapport au champ d'adhésion et nous présentons un résultat d'existence et d'unicité de la solution faible, en utilisant des résultats sur les équations variationnelles d'évolution, suivis d'un argument de point fixe.

Enfin, le dernier chapitre du mémoire est consacré à l'étude d'un problème de contact bilatéral avec adhésion et endommagement dans un processus dynamique. Le problème se formule par un système qui comporte une équation varitionnelle par rapport au champ de déplacement, une inéquation variationnelle du type parabolique par rapport au champ d'endommagement, une équation différentielle d'ordre un par rapport au champ d'adhésion. On établit un résultat d'existence et d'unicité de la solution. La démonstration est basée sur des arguments d'équations variationnelles, un résultat classique concernant les inéquations paraboliques et des arguments de point fixe.

Chapitre 1

Requis et préliminaires

Afin de faciliter la lecture de ce manuscrit, il nous est paru utile de présenter dans cette première partie le cadre physique et fonctionnel dans lequel nous allons travailler. Nous allons commencer par une description de la loi constitutive des matériaux viscoélastique avec endommagement, ensuite nous présentons les diférents types de conditions aux limites avec compliance normale. Nous continuons avec la formulation mathématique des problèmes étudiés. A la fin de ce chapitre nous passons en revue quelques rappels d'analyse fonctionnelle non linéaire dans les espaces de Hilbert ainsi que les outil mathématiques que nous utilisons pour la réalisation de ce travail, notamment des résultat sur les espaces fonctionnels, les équations et les inéquations variationnelles elliptiques et paraboliques, les lemmes de Gronwall qui seront utiles dans les démonstrations et quelque théorèmes classiques qui seront d'une grande utilité pour la réalisation de ce travail.

1.1 Formulation mathématique des problèmes aux limites

Dans cette partie on commence par décrire les deux lois de comportement viscoélastique, puis on séresse aux diférentes conditions aux limites. Au début, on considère la loi de contact avec complience normale instantanée et frottement puis la loi de contact sans frottement avec compliance normale. Finalement, on donne la formulation mathématique des problèmes qui seront étudiés dans ce mémoire.

1.1.1 Lois de comportement

Nous considèrons un corps déformable occupant un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d (d = 2, 3)$, avec une surface frontière régulière et de Lipschitz Γ. Qui est divisé en trois disjoints mesurables parties Γ_1,Γ_2 et Γ_3 telles que le mesures $\Gamma_1 > 0$. Soit $T > 0$ et soit $[0, T]$. Nous étudions l'évolution du corps matériel du à l'application des forces extérieurs et de traction de surface dans l'intervalle de temps $[0, T]$ Dans ce qui suit pour simplifier les notations, nous n'indiquons pas explicitement la dépendance des fonctions par rapport à $x \in \Omega \cup \Gamma$ et $t \in [0, T]$. Nous qus le point au-dessus d'une fonction représente la dérivation par rapport au temp, i.e.

$$\dot{\mathbf{u}} = \frac{du}{dt} \quad \ddot{\mathbf{u}} = \frac{d^2u}{dt^2}. \tag{1.1.1}$$

Les lois de comportement caractérisent propriétés d'invariance, leur origine est souvent expérimentale. C'est toute une série d'essais qu'il faut imaginer et réaliser pour établir une loi de comportement.

Nous présentons dans la suite les lois de comportement qui interviennent dans ce mémoie, lois de matériaux viscoélastiques avce endommagement.

Lois de comportement des matériaux viscoélastique avce endommagement

Nous concidèrons ici une catégorie de matériaux où le tenseur des contraintes σ et le vecteur des déplacement u sont reliés par la loi de comportement

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}) + \mathcal{G}(\varepsilon(\mathbf{u}), \alpha), \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T). \tag{1.1.2}$$

Où $\mathcal{A}$ et $\mathcal{G}$ sont des fonction constitutives non linéaires. $\mathcal{A}$ repérateur de viscosité et $\mathcal{G}$ désigne l'opérateur d'élasticité. Où α est une variable inter représentant l'endommagement du matériau causé par des déformations élastiques.

L'inclusion diférentielle suivante sera utilisée pour décrire l'évolution du champ d'endommagement

$$\dot{\alpha} - k\Delta\alpha + \partial\varphi_K(\alpha) \ni \phi(\varepsilon(\mathbf{u}), \alpha) \tag{1.1.3}$$

l'ensemble des fonctions d'endommagement admissibles K défini par

$$K = \{\xi \in H_1(\Omega) \quad /0 \leq \xi \leq 1 \quad \text{dans} \quad \Omega\}, \tag{1.1.4}$$

k est un coefficient positif, $\partial\varphi_K$ représente le sous-diféentiel de la fonction indicatrice φ_K. Estϕ une fonction constitutive donnée qui représente la source d'endommagement dans le système.

Et pour un corps élastique lorsque $\mathcal{A} = 0$, la loi se réduit à

$$\sigma = \mathcal{G}(\varepsilon(\mathbf{u}), \alpha) \tag{1.1.5}$$

Nous rappelons qu'en viscoélasticité linéaire, le tenseur de contraintes $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij})$ est donné par

$$\sigma_{ij} = a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\dot{\mathbf{u}}) + g_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) \tag{1.1.6}$$

$\mathcal{A} = (a_{ijkl})$ est le tenseur de viscosité et $\mathcal{G} = (g_{ijkl})$ le tenseur d'élasticité, pour $i, j, k, l = 1, \cdots, d$ la loi de comportement (1.1.1) est une loi viscoélastique du type Kelvin-Voigt.

Nous étudions, dans un intervalle de temp $[0, T]$, l'évolution du corps matériel dûe à l'application de volume et de surface. Cette évolution est décrite par les équation deu movement.

Équation de mouvement et d'équilibre

$$\rho\ddot{\mathbf{u}} = Div\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0, \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T), \tag{1.1.7}$$

Dans cette équation, ρ désigne la densité de masse, $\ddot{u}$ est le champ des accélérations, $f_0 : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^d$ et champ des densités des forces volumiques appliquées sur le corps et qui sont des données du problème , $Div\sigma$ est l'divergence du champ des contreantes.

Ces processus d'évolution modélisée par l'équations (1.1.7) s'appellent processus dynamiques. Dans cetaines situations l'équation (1.1.7) peut se simplifier, par exemple dans le cas où $\dot{u} = 0$, il s'agit d'un processus d'équilibre (processus statiques), ou bien dans le cas où le champ des vitesses $\dot{u}$ varie trés lentement par rapport au temps, c'est-à-dire que le teme $\rho\ddot{u}$ peut etre neglige (processus quasistatiques). Dans ces deux cas l'équqtion (1.1.7) devient :

$$Div\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = 0, \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T), \tag{1.1.8}$$

Dans la suit, on va considérer des matériaux viscoélastiquas dans le cadre des transformations. Dans ce cas, on a besion du champ des déformations linéarisé $\varepsilon : \Omega \times [0, T] \longrightarrow S_d$ défini par

$$\varepsilon(u_{ij}), \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j), \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T). \tag{1.1.9}$$

Où ∂_k représente l'opérateur de dérivation partielle par rapport à la variable x_k. On précise en outre qu'on adopte convention la l'indice muet. Souvent, pour marquer la dépendance du champ des déformation ε par rapport au champ des déplacement u, on va le noter $\varepsilon(u)$.

Les équations précédentes sont insuffisantes à elles seules pour décrire les mouvements des milieux continus, elle doivent etre complétées par d'autres relations caractérisant le comportement de chaque matériau, ce sont les lois de comportement.

1.1.2 Conditions aux limites de contact avec adhésion.

Définissions maintenant les conditions aux limites sur chacune des trois parties de Γ.

La condition aux limites de déplacement.

Le corps est encastrè à la partie $\Gamma_1 \times (0, T)$, le champ des déplacements y est par conséquent nul

$$\mathbf{u} = 0, \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \times (0, T) \tag{1.1.10}$$

La condition aux limites de traction.

Une traction surfacique de densité f_2 agit sur la partie $\Gamma_2 \times (0, T)$, et par conséquent le vecteur des contraintes de Cauchy $\sigma\nu$ satisfait

$$\sigma\nu = f_2, \ \text{sur} \quad \Gamma_2 \times (0, T) \tag{1.1.11}$$

La condition aux limites de bilatéral

Le contact entre le corps et la fondation est bilatéral si le contact est maintenu pendant le mouvement. Cette propriété se traduit mathématiquement par

$$u_\nu = 0, \ \text{sur} \quad \Gamma_3 \times (0, T) \tag{1.1.12}$$

1.1.3 Condition de contact avec compliance normale et adhésion.

On va décrire les conditions de contact avec compliance normale et adhésion $\Gamma_3 \times (0,T)$, on introduit une variable interne d'état β définie sur $\Gamma_3 \times (0,T)$ qui représente l'intensité d'adhésion sur la surface de contact, telle que $0 \leq \beta \leq 1$. Quand $\beta = 1$ l'adhésion est compléte et tous les liens sont actifs, quand $\beta = 0$ tous les liens sont désactivés et il n'y a pas d'adhésion ; quand $0 < \beta < 1$ c'est le d'une adhésion partielle. On suppose que la contrainte normale satisfait la conditionde compliance normale et adhésion.

$$-\sigma_\nu = p_\nu(\mathbf{u}_\nu) - \gamma_\nu \beta^2(-R(\mathbf{u}_\nu))_+, \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times (0,T). \tag{1.1.13}$$

On suppose que la résistance au mouvement tangentiel est générée par la colle en comparaison à ce que la traction tangentielle soit négligeable. Ainsi, elle dépend seulement de l'intensité d'adhésion et du déplacement tangentiel.

$$-\boldsymbol{\sigma}_\tau = p_\tau(\beta, \mathbf{u}_\tau) \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times (0,T). \tag{1.1.14}$$

En particulier, on doit considérer le cas :

$$p_\tau(\beta, r) = \begin{cases} q_\tau(\beta) r & \text{si} \quad \|r\| < L_0, \\ q_\tau(\beta) \frac{r}{\|r\|} & \text{si} \quad r\| > L_0, \end{cases} \tag{1.1.15}$$

Où L_0 est la longueur limite liée, et p_τ est une fonction de raideur tangentielle non négative. Le processus est supposé être gouverné par l'équation différentielle

$$\dot{\beta} = H_{ad}(\beta, \zeta_\beta, R(|u|)) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0,T), \tag{1.1.16}$$

H_{ad} est une fonction générale qui s'annulle quand le premier de ses variables s'annulle.

La fonction $R : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une troncature définie par

$$R(s) = \begin{cases} L & \text{si} \quad s \geq L \\ s & \text{si} \quad |s| \leq L \\ -L & \text{si} \quad s \leq -L. \end{cases} \tag{1.1.17}$$

où $L > 0$ est la longueur caractéristique des liens.

On considère la possibilité d'une diminution de l'efficacité de collage quand les cycles de collage et de décollage continuent. Par conséquent, le processus est supposé dépendre de l'histoire d'adhésion note par

$$\zeta_\beta(x,t) = \int_0^t \beta(x,s)ds. \tag{1.1.18}$$

On donne quelques exemples de ce genre de fonctions

$$H_{ad}(\beta, r) = -\gamma_\nu \beta_+ r^2.$$

où γ_ν est la constante de l'énergie de collage.

Un autre exemple, dans lequel H_{ad} dépend de ses trois variables, est

$$H_{ad}(\beta, \zeta, r) = -\gamma\nu^- \beta_+ r^2 + \frac{\gamma_\nu^+ \beta_+ (1-\beta)_+}{1+\zeta^2} \tag{1.1.19}$$

où r_+ représente la partie positive de r.

1.1.4 Formulation des problèmes

L'évolution d'une corps déformable sous l'action des efforts extérieurs est modelisée mathématiquement par un systéme d'équations aux dérivées partielles conteant l'équation de mouvmement (ou d'équlibre) du corps la loi comportement du matériau ainsi que les condition initiales et au limites auxquelles il est soumis. On considère dans les chapitre 2 des matériaux avant des loi comportement viscoélastiques souis à des condition aux limites de contact avec adhésion citées dans la paragraphe, dans le cas qusistatique.

Nous allons introduire dans ce paragraphe les modéles gènèraux des problèmes de contact

Les cadre physique

Est le suivant. Nous envisageons un corps matériel qui occupe un domaine bornè $\Omega \subset \mathbb{R}^d (d = 2, 3)$ avec une surface frontière de Lipschitz Γ, partitionnée en trois parties mesurables Γ_1, Γ_2 et Γ_3,d'un part et de deux parties mesurables tels que $mes(\Gamma_1) > 0$, $mes(\Gamma_2) > 0$. Soit $T > 0$. Nous ètudions dans l'intervalle de temps$[0, T]$ l'évolution du corps sous l'application de forces de volume et de tractions de surface.

Nous notons par $u : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^d$ le champ de déplacements $\sigma : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{S}^d$ le champ des contraintes et $\varepsilon(u)$ le tenseur des déformation linèarisèe. Le corps est fixé sur $\Gamma_1 \times [0, T]$ le champ des déplacments u est par concèquent nul.Une traction surfacique de densitè f_2 agit sur $\Gamma_2 \times [0, T]$ et dans Ω agissent des force volumiques de densité f_0.

Les hypothéses physigue introduites pour la pièzoèlectricite consistent à nègliger les effets magnètigues et thermigue et à considérer l'interation mécanique uniquement. Cette hypothsèes est céramique, les polyméres et les composites.

Sous ces hypothèse, les problème mécanique que nous considérons peuvent être formulés de la foçon suivante :

Problème 1

Trouver le champ des déplacements $\mathbf{u} : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^d$, et le champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{S}^d$ le champ d'endommage $\alpha : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ et le champ d'adhésion $\beta : \Gamma_3 \times [0,T] \to [0,1]$ tels que

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)) + \mathcal{G}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t),\alpha) && \text{dans } \Omega \times (0,T),\\
&\dot{\alpha} - k\Delta\alpha + \partial\varphi_K(\alpha) \ni \phi(\varepsilon(\mathbf{u}),\alpha), && \\
&\rho\ddot{\mathbf{u}} = \operatorname{Div}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 && \text{dans } \Omega \times (0,T),\\
&\mathbf{u} = \mathbf{0} && \text{sur } \Gamma_1 \times (0,T),\\
&\boldsymbol{\sigma\nu} = \mathbf{f}_2 && \text{sur } \Gamma_2 \times (0,T),\\
&-\boldsymbol{\sigma}_\nu = p_\nu(u_\nu) - \gamma_\nu\beta^2(-R(u_\nu))_+ && \text{sur } \Gamma_3 \times (0,T),\\
&-\boldsymbol{\sigma}_\tau = p_\tau(\beta,\mathbf{u}_\tau) && \text{sur } \Gamma_3 \times (0,T),\\
&\dot{\beta} = H_{ad}(\beta,\zeta_\beta,R(|u|)) && \text{sur } \Gamma_3 \times (0,T),\\
&\frac{\partial\alpha}{\partial\nu} = 0 && \text{sur } \Gamma \times (0,T),\\
&\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{v}_0, \quad \alpha(0) = \alpha_0 && \text{dans } \Omega,\\
&\beta(0) = \beta_0 && \text{sur } \Gamma_3.
\end{aligned}
$$

Problème 2

Trouver le champ des déplacements $\mathbf{u} : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^d$, le champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{S}^d$, le champ de endommagement $\alpha : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ et le champ d'adhésion $\beta : \Gamma_3 \times [0,T] \to [0,1]$ tel que

$$\begin{aligned}
&\rho\ddot{\mathbf{u}} = \operatorname{Div}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 && \text{dans } \Omega \times (0,T),\\
&\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)) + \mathcal{G}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t),\alpha) && \text{dans } \Omega \times (0,T),\\
&\dot{\alpha} - k\Delta\alpha + \partial\varphi_K(\alpha) \ni \phi(\varepsilon(\mathbf{u}),\alpha), && \\
&\mathbf{u} = \mathbf{0} && \text{sur } \Gamma_1 \times (0,T),\\
&\boldsymbol{\sigma\nu} = \mathbf{f}_2 && \text{sur } \Gamma_2 \times (0,T),\\
&\mathbf{u}_\nu = \mathbf{0} && \text{sur } \Gamma_3 \times (0,T),\\
&-\boldsymbol{\sigma}_\tau = p_\tau(\beta,\mathbf{u}_\tau) && \text{sur } \Gamma_3 \times (0,T),\\
&\dot{\beta} = H_{ad}(\beta, R(|u_\tau|)) && \text{sur } \Gamma_3 \times (0,T),\\
&\frac{\partial\alpha}{\partial\nu} = 0 && \text{sur } \Gamma \times (0,T),\\
&\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{v}_0, \quad \alpha(0) = \alpha_0 && \text{dans } \Omega,\\
&\beta(0) = \beta_0 && \text{sur } \Gamma_3.
\end{aligned}$$

1.2 Rappels de la mécanique des milieux continus

Nons rappelons quelques définitions et résultats utiles dans l'étuds de ce problème mécanique de contact.

1.2.1 Espace fonctionnels

On introduit dans cette partie les espaces de type sobolev utilisés en mécanique de contact, àsavoir les espaces de Hilbert associés aux opérateurs divergence et déformation, ainsi que les espaces de fonction àvaleurs vectorielles. On présente en plus leurs principales propriétés, notamment les théorème de trace. On rappele aussi quelques espaces de fonction définies sur un intervalle réel et à valeurs dans un espace de Hilbert. Pour plus de details sur les espace de Sobolev et les espaces de distributions.

Espace de Hilbert associés aux opérateurs divergence et déformation. Nous désignons par $\mathbb{S}^d$ l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur $\mathbb{R}^d (d = 2, 3)$. Et $\|.\|$ représentent le produit scalaire et la norme Euclienne sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{S}^d$, repectivement. Ainisi,

$$\mathbf{u}.\mathbf{v} = u_i v_i, \quad \|v\| = (v, v^{\frac{1}{2}}), \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^d.$$

$$\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{\tau} = \sigma_{ij}.\tau_{ji}, \quad \|\tau\| = (\tau.\tau)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{S}^d.$$

Dans toute la suite, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est un domaine borné avec une frontiére de Lipschitz notée Γ. Pour le champ de déplacements et le champ des contraintes nous utilisons les espaces suivants :
On va utiliser les notations

$$H = \{\mathbf{u} = (u_i)/u_i \in L^2(\Omega), i = \overline{1, N}\} = L^2(\Omega)^N. \tag{1.2.1}$$

Où le espace $\mathcal{H}$ sont défini par

$$\mathcal{H} = \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij})/ \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij} \in L^2(\Omega), \quad i, j = \overline{1, N}\} = L^2(\Omega)_s^{N \times N}. \tag{1.2.2}$$

Les espaces H et $\mathcal{H}$ sont des espace Hilbert réels menus des produit scolaires canoniques

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_H = \int_\Omega u_i v_i dx \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H$$

$$(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} \sigma_{ij}\tau_{ji}dx, \quad \forall \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{H}.$$

Les normes associées à ces produits scalaires seront notées respéctivement par $\|\cdot\|_H$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$

Compte tenu de l'identification de $L^2(\Omega)$ à un sous-espace de distrubutions sur Ω. Par conséquant, les opérateurs déformation et divergence peuvent être définis respéctivement sur les H et $\mathcal{H}$. Pour l'instant, on rappelle la définition de l'espace de sobolev $H^1(\Omega)$ défini par

$$H^1(\Omega) = \{\mathbf{u} \in L^2(\Omega)/ \quad \partial_i u \in L^2(\Omega), \quad i = \overline{1, N}\}. \tag{1.2.3}$$

L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert réel pour le produit scalaire

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{H^1(\Omega)} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{L^2(\Omega)} + (\partial_i \mathbf{u}, \partial_i \mathbf{v})_{L^2(\Omega)} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H^1(\Omega). \tag{1.2.4}$$

On notera la norme associée par $\|.\|_{H^1(\Omega)}$. On note plue par $H_0^1(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$. L'espace $H_0^1(\Omega)$ est un espace férme de $H^1(\Omega)$.

Espace liés à l'opérateur déformation

Pour l'opérateur déformation défin par(1.1.9), il est naturel d'introduir l'espace

$$H_1 = \{\mathbf{u} \in H/\varepsilon(u) \in \mathcal{H}\} \tag{1.2.5}$$

On considère sur H_1 le produit scalaire

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{H_1} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})_H + (\varepsilon(\mathbf{u}), \varepsilon(\mathbf{v})_{\mathcal{H}} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H_1$$

et not la norme associée par $\|\cdot\|_{H_1}$. On obtientb ainsi que l'injection $H_1 \subset H$ et l'opérateur déformation $\varepsilon : H_1 \longrightarrow \mathcal{H}$ sont des opérateurs continus.

Théorème 1.2.1 *Muni du produit scalaire $(\cdot\,,\cdot)_{H_1}$ l'espace H_1 est espace Hilbert réel.*

On munit maintenant l'espace produit $H_1(\Omega)^N$ du produit scalaire canonique et de la norme associée respéctivement par $(\cdot\,,\cdot)_{H^1(\Omega)^N}$ et $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)^N}$. On a alors le résultat suivant :

Théorème 1.2.2 *On l'égalité algébrique $H_1 = H^1(\Omega)^N$ et $\|\cdot\|_{H_1}, \|\cdot\|_{H^1(\Omega)^N}$ sont les normes équivalentes sur H_1*

On suppose maintenant que dans toute la suite, la frontiére Γ de Ω est de classe $C^{1,1}$. Compte tenu du théorème précédent, toutes les propriétés de l'espace $H^1(\Omega)$ peuvent étre transportées sur l'espace H_1 par passage aux espaces produit. Plus précisément, on a les résultats suivants :

1. $C^1(\overline{\Omega})^N$ est dense dans H_1.

2. $H_1 \subset H$ avec injection compacte (Théorème de Rellich).

3. Il existe une application linéaire et continue $\gamma : H_1 \longrightarrow L^2(\Gamma)^N$ vérifiant l'égalité

$$\gamma u = u_{|\Gamma}, \quad \forall u \in C^1(\overline{\Omega})^N.$$

   Lapplication γ est appelée application trace. Elle est défine comme le prolongement par densité de l'applicatin $u \longrightarrow u_{|\Gamma}$ définie pour tout $u \in C^1(\overline{\Omega})^N$. L'application trace $\gamma : H_1 \longrightarrow L^2(\Gamma)^N$ n'est pas surjective. L'image de H_1 par cette application est notée par γ. On a en outre :

4. $H_\Gamma \subset L^2(\Gamma)^N$ avec injection et continue.

5. Il existe une application linéaire continue $z : H_\Gamma \longrightarrow H_1$ vérifiant l'égalité

$$\gamma(z(\xi)) = \xi \quad \forall \xi \in H_\Gamma. \tag{1.2.6}$$

6. Le noyau de l'application trace est $H_0^1(\Omega)^N$ i.e $H_0^1(\Omega)^N = \{u \in H_1/\gamma u = 0\}$.

   Soit maintenant et soit $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, et $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \varnothing$ pour $i \neq j$ et V est l'espace défini par

$$V = \{\mathbf{u} \in H_1/\gamma\mathbf{u} = 0 \quad p.p \quad \text{sur } \Gamma_1\}. \tag{1.2.7}$$

Théorème 1.2.3 *L'espace V est un sous-espace fermé de H_1.*

Théorème 1.2.4 (Inégalité de Korn) *. Soit* $mes(\Gamma_1) > 0$*. Alors il existe une constane* $C > 0$ *qui dépend de* Ω *et* Γ_1 *telle que*

$$\|\varepsilon(u)\|_{\mathcal{H}} \geq C\|u\|_{H_1} \quad \forall u \in V \tag{1.2.8}$$

En utilisant ce résultat, il vient.

Remarque 1.2.5 *Si* $mes(\Gamma_1) > 0$ *alors* $u \to \|\varepsilon(u)\|_{\mathcal{H}}$ *est une norme sur le sous-espace* V *défini par(1.2.8), équvalent à la norme canonique* $\|\cdot\|_{H_1}$.

Une preuve de cette inégalité peut être trouvée dane [9]. Sur V *nous considéros le produit scalaire par*

$$(u, v)_V = (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \quad \forall u, v \in V \tag{1.2.9}$$

et soit $\|\cdot\|_V$ *la norme associée, ie*

$$\|v\|_V = \|\varepsilon(v)\|_{\mathcal{H}} \quad \forall v \in V \tag{1.2.10}$$

Il résulte par l'inégalité de Korn, il vient qui $\|\cdot\|_{H_1}$ *et* $\|\cdot\|_V$ *sont des normes équivantentes sur* V *et ainsi* $(V, \|\cdot\|)$ *est un espace de Hilbert réel.. En outre, par le théorème de trace de Sobolev, il existe une constante* $C_0 > 0$ *dépendant uniquement de* Ω, Γ_1 *et* Γ_3 *telle que :*

$$\|v\|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq C_0\|v\|_V \quad \forall v \in V \tag{1.2.11}$$

Par l'inégalité de Korn que $(V, \|\cdot\|_V)$ *est un espace de Hilbert réel.*

Espace liés à l'opérateur divergence

Comme dans le cas l'opérateur déformation, il est naturel d'introduire l'espace $\mathcal{H}_1$ lié à l'oprateur divergenc et défini par

$$\mathcal{H}_1 = \{\sigma \in \mathcal{H}/ \quad Div\sigma \in H\} \tag{1.2.12}$$

sur lequel on considére le produit scalaire

$$\langle \sigma, \tau\rangle_{\mathcal{H}_1} = \langle \sigma, \tau\rangle_{\mathcal{H}} + \langle Div\sigma, Div\tau\rangle_H \quad \forall \sigma, \tau \in\in \mathcal{H}_1.$$

On note la norme associée par $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_1}$. On obtient ainsi que l'injection $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}$ et l'opérateur divergenc.

$Div\sigma : \mathcal{H}_1 \to H$ sont des opérateurs continus.

Théorème 1.2.6 *Muni du produit scalaire $(\cdot\,,\cdot)_{\mathcal{H}_1}$ l'espace $\mathcal{H}_1$ est un espace de Hilbert réel.*

On peut prouver que l'espace

$$C^1(\overline{\Omega})_s^{N\times N} = \{\sigma = (\sigma_{ij})/ \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in C^1(\overline{\Omega}), \quad i,j = \overline{1,N}\} \tag{1.2.13}$$

est dense dans $\mathcal{H}$. De plus, pour tout $\sigma \in C^1(\overline{\Omega})_s^{N\times N}$, on note par $\sigma\nu$ le vecteur de composantes $(\sigma_{ij}\nu_j)$, $\quad i = \overline{1,N}$. Comme dans le cas de l'espace H_1, on peut définir l'application trace pour l'espace $\mathcal{H}_1$ à l'aide de résultat suivant :

Théorème 1.2.7 *Il existe une application linéaire, continue et surjective $\bar{\gamma} : \mathcal{H}_1 \to H_\Gamma'$ telle que*

$$\langle \bar{\gamma}\sigma, \xi\rangle_{H_\Gamma' \times H_\Gamma} = \int_\Gamma \sigma\nu.\xi da \tag{1.2.14}$$

pour tout $\xi \in H_\Gamma$ et $\sigma \in C^1(\bar{\Omega})_s^{N\times}$. Pour tout $\sigma \in \mathcal{H}_1$, l'image $\bar{\gamma}\sigma \in H_\Gamma'$ est élément de H_Γ' vérifiant l'églité

$$\langle \bar{\gamma}\sigma, \gamma u\rangle_{H_\Gamma' \times H\Gamma} = (\sigma, \varepsilon(u))_{\mathcal{H}} + \langle Div\sigma, u\rangle_H \quad \forall H_1. \tag{1.2.15}$$

Rappelons aussi la formule de Green ci-dessous :

$$(\sigma, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (Div\sigma, v)_H = \int_\Gamma \sigma\nu.vda \quad \forall H_1 \tag{1.2.16}$$

On note par v_ν et v_τ la composante normale et respectivement tangentielle de tout champ vectoriel :

$$v_\nu = v.\nu \quad v = v_\nu\nu + v\tau \tag{1.2.17}$$

De meme, soit σ_ν et σ_τ la composante normale et respectivement tangentielle de tenseur des contraintes de Cauchy $\sigma\nu$. Il vient : $\sigma_\nu = (\sigma\nu)_\nu, \sigma_\tau = (\sigma\tau)_\tau$, c'est à dire :

$$\sigma_\nu = (\sigma\nu).\nu \quad \sigma_\tau = \sigma_\nu - \sigma_\nu\nu \tag{1.2.18}$$

1.2.2 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles

Soit H un espace de Hilbert. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq +\infty$ et $T > 0$. On rappele que $W^{k,p}(0,T;H)$ est l'espace des distributions vectorielles $u \in D'(0,T;H)$ telle que $D_j u \in L^p(0T,;H)$ pour $j = \overline{0,k}$, D_j désignant la dérivée d'ordre j au seus des distributions.

Si $1 \leq p \leq +\infty$, $W^{k,p}(0,T;H)$ est un espace de Banch réel pour la norme définie par

$$\|u\|_{W^{k,p}(0,T;H)} = (\sum_{j=0}^{k} \int_0^T |D_j u(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$$

$$\forall u \in W^{k,p}(0,T;H)$$

En particulier, $W^{k,2}(0,T;H)$ est un espace de Hilbert réel pour le produit scalaire définie par

$$(u,v)_{W^{k,2}(0,T;H)} = \sum_{0=j}^{k} \int_0^T (D_j u(t), D_j v(t))_H dt$$

$$\forall u,v \in W^{k,2}(0,T;H)$$

D'autre part, $W^{k,\infty}(0,T;H)$ est un espace de Banch réel pour la norme définie par

$$\|u\|_{W^{k,\infty}(0,T;H)} = \sum_{0=j}^{k} \sup_{[0,T]} |D_j u(t)|_H$$

$$\forall u \in W^{k,\infty}(0,T;H)$$

pour le cas particulier $k = 0$, on remarque que

$$W^{0,p}(0,T;H) = L^p(0,T;H)$$

et on note alors la norme $L^p(0,T;H)$ par $\|\cdot\|_{L^p(0,T;H)}$ pour tout $1 \leq p \leq +\infty$, on définit aussi, pour $k \in \mathbb{N}$, l'espace $C^k(0,T;H)$ des fonctions $u : [0,T] \to H$ telles que pour tout $j = \overline{0,k}$ les dérivées $\frac{d^j u}{dt^j}$ existe et sont continue sur $[0,T]$, on note, en particulier, $C^0(0,T;H)$ par $C(0,T;H)$. L'espace $C^k(0,T;H)$ est un espace de Banch pour la norme définie par

$$\|u\|_{C^k(0,T;H)} = \sum_{0=j}^{k} \max_{t\in[0,T]} |\frac{d^j u}{dt^j}(t)|_H$$

$$\forall u \in C^k(0,T;H)$$

En particulier, les normes sur les espaces $C(0,T;H)$ et $C^1(0,T;H)$ sant données par

$$\|u\|_{C(0,T;H)} = \max_{t\in[0,T]} |u(t)|_H$$

$$\|u\|_{C^1(0,T;H)} = \max_{t\in[0,T]} |u|_H + \max_{t\in[0,T]} |\dot{u}|_H$$
$$\forall u \in C^k(0,T;H)$$

On précise que le ponit au dessus d'une expression désgine la dérivée de cette expression par rapport au temp, représentée la varibale $t \in [0,T]$

1.2.3 Enoncés de certains théorèmes

Nous considérons maintenant quelques théorèmes importants qui sont utilisés le long de ce mémoire.

Définition 1.2.8 *L'inclusion de $(V, |\cdot|_V)$ dans $(H, \|\cdot\|_H)$ est continue et V est dense dans H. Nous notons par $V^{'}$ l'espace dual de V. V est identié avec H et avec son propre dual, le triplet*

$$V \subset H \subset V^{'}$$

S'appele le triplet de Gelfand.

Définition 1.2.9 *On dit qu'une forme bilinéaire $a(u,v) : H \times H \to \mathbb{R}$ est*
1) Continue s'il existe une constante C telle que

$$|a(u,v)| \leq \|u\|_H \|v\|_H \quad \forall u, v \in H. \tag{1.2.19}$$

2) Coercive s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$|a(v,v)| \geq \alpha \|v\|_H^2 \quad \forall v \in H \tag{1.2.20}$$

Théorème 1.2.10 (conséquence de Minty-Browder) *Soit $A : H \to H$un opérateur non linéaire, fortement monotone et de Lipschitz.*
Alors pour tout $f \in H$ il existe $u \in H$ unique solution de l'équation $Au = f$.

Sous différentiabilité

Nous considérons dans tout ce paragraphe que X est un espace de Hilbert et K un sous-ensemble de l'espace$X$

Définition 1.2.11 *On appelle fonction indicatrice de K, la fonction Ψ_K définie par*

$$\Psi_K(u) = \begin{cases} 0 \ si \ u \in K \\ +\infty \ si \ u \notin K \end{cases}$$

Définition 1.2.12 *Soit une fonction $j : X \to \mathbb{R}$ et u un élément de l'espace X tel que $j(u) \neq \pm\infty$. Le sous-différentiel de la fonction j en u, noté $\partial j(u)$ est l'ensemble défini par*

$$\partial j(u) = \{u^{'} \in X^{'} \mid j(v) \geq j(u) + (u^{'}, v - u) \forall v \in X\}.$$

Le crochet $(.,.)$ désignant la dualité entre $X^{'}$ et X.

Tout élément $u^{'}$ de l'ensemble $\partial j(u)$ est appelé sous-gradient de la fonction j en u. La fonction j est dite sous-différentiable en u si $\partial j(u) \neq 0$. Elle est dite sous-différentiable si elle l'est en tout point u de l'espace X.

Nous pouvons caractériser le sous-différentiel $\partial\Psi_K$ d'une fonction indicatrice Ψ_K d'un ensemble convexe non vide

$$\partial\Psi_K(u) = \{u^{'} \in X^{'} \mid (u^{'}, v - u) \leq 0 \quad \forall \in K\}.$$

Equations et inéquations variationnelles d'évolution Nous allons rappeler dans ce paragraphe deux résultats sur les équations d'évolution et un résultat sur les inéquations variationnelles d'évolution.

équation différentielle ordinaire

Théorème 1.2.13 ***(Cauchy-Lipschitz)*** *Soit $(X, \|.\|_X)$ un espace de Banach réel et soit $F(t,.) : X \to X$un opérateur défini p.p. sur $(0,T)$, qui satisfait les propriétés suivantes*

$$\begin{cases} \textit{il existe } L_F > 0 \textit{ tel que} \\ \|F(t,x_1) - F(t,x_2)\|_X \leq L_F\|x_1 - x_2\|_X \quad \forall x_1, x_2 \in X, p.p. \in (0,T), \end{cases}$$

il existe $1 \leq p < +\infty$ tel que $F(.,x) \in L^p(0,T;X) \quad \forall x \in X$.

Alors pour tout $x^{'} \in X$, il existe une fonction unique $x \in W^{1,p}(0,T;X)$ telle que

$$\begin{aligned}
&\dot{x}(t) = F(t, x(t)) \quad p.p.\ t \in (0,T),\\
&x(0) = x0.
\end{aligned}$$

Maintenant nous considérons V et H deux espaces de Hilbert réels tels que l'application d'inclusion de $(V, \|.\|_V)$ dans $(H, \|.\|_H)$ est continue et dense. Identifiant le dual de H avec lui-même, c'est-à-dire nous pouvons écrire le triplet de Gelfand $V \subset H \subset V^{'}$. Les notations $\|.\|_V$, $\|.\|_{V'}$ et $(.,.)_{V'\times V}$ représentent les normes sur V, $V^{'}$ et le produit de dualité entre $V^{'}$ et V respectivement.

Inéquation variationnelle d'évolution

Théorème 1.2.14 *Soit $V \subset H \subset V^{'}$ un triplet de Gelfand. Soit, K est un sous ensemble fermé non vide, et convexe de V, et soit $a(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire continue et symétrique qui satisfait*

il existe $c_1 > 0$ et C_0 la condition de coercivite $a(v,v) + C_0|v|_H^2 \geq \zeta |v|_V^2 \quad v \in V$

Alors pour tout $u_0 \in K$ et $f \in L^2(0,T;H)$, il existe unique fonction u qui satisfait

$$\begin{aligned}
&u \in H^1(0,T;H) \cap L^2(0,T;V),\\
&u(t) \in K \quad \forall t \in [0,T],\\
&(\dot{u}(t), v - u(t))_{V'\times V} + a(u(t), v - u(t)) \geq (f(t), v - u(t))_H \quad \forall v \in K,\\
&u(0) = 0
\end{aligned}$$

Équation aux dérivées pratielles d'évolution

Théorème 1.2.15 *Soit $V \subset H \subset V'$ un triplet de Gelfand. Soit $A : V \to V'$ un opérateur hemicontinu et monotone satisfaisant.*

$$\exists \omega > 0, \ \text{et } \lambda \in \mathbb{R} \quad (Av, v)_{V'\times V} \geq \omega \|v\|_V^2 + \lambda \quad \forall v \in V \tag{1.2.21}$$

$$\|Av\|_{V'} \leq C(\|v\|_V + 1) \quad \forall v \in V \tag{1.2.22}$$

pour des constantes $\omega > 0, C > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Etant donné $u_0 \in H$ et $f \in L^2(0,T;H)$, il existe une fonction unique u qui satisfait.

$$u \in L^2(0,T;V) \cap C(0,T;H), \ddot{u} \in L^2(0,T;V'),$$

$$\dot{u}(t) + Au(t) = f(t) \quad pp \quad t \in [0, T]$$

,

$$u(0) = u_0$$

Théorème 1.2.16 (de Banach (point fixe)) *Soit X un espace de Banach. K est un ensemble fermé et non vide de X. On suppose que $\Lambda : K \to K$:*
1- Λ est une contraction, i.e.,

$$\|\Lambda u - \Lambda v\| \leqslant \alpha \|u - v\| \forall u, v \in K \text{ avec } \quad \alpha \in [0, 1).$$

Donc il existe une solution unique $u \in K$ de l'equation $\Lambda u = u, i.e. \Lambda$ un point fixe unique dans K.
2- Λ^m est une contraction pour m un entier positif, donc Λ a un point fixe unique dans K.

1.2.4 Compléments divers

Nous rappelons ici les lemmes classiques du type Gronwall qui interviennent dans de nombreux problèmes de majoration, en particulier pour établir l'unicité de la solution. Nous citons certains théorèmes utilisés dans ce mémoire. Pour avoir plus de détails sur les rappels figurant dans cette section, nous proposons par exemple.

Lemmes de Gronwall

Lemme 1 *Soient $m, n \in C(0, T; \mathbb{R})$ telle que $m(t) \geqslant 0$ et $n(t) \geqslant 0$ pour tout $t \in [0, T]$ et soit $a \geqslant 0$. Si $\varphi \in C(0, T; \mathbb{R})$ est une fonction telle que*

$$\varphi(t) \leq a + \int_0^t m(s)ds + \int_0^t n(s)\varphi(s)ds \quad \forall t \in [0, T]$$

alors

$$\varphi(t) \leq (a + \int_0^t m(s)ds) \exp(\int_0^t n(s)ds) \quad \forall t \in [0, T]$$

Pour le cas particulier $m = 0$, ce lemme devient :

Corollaire 1.2.17 *Soit $n \in C(0,T,\mathbb{R})$ telle que $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0,T]$ et soit $a \geq 0$. Si $\varphi \in C(0,T;\mathbb{R})$ est une fonction telle que*

$$\varphi(t) \leq a + \int_0^t n(s)\varphi(s)ds \quad \forall t \in [0,T]$$

alors

$$\varphi(t) \leq a \exp(\int_0^t n(s)ds) \quad \forall t \in [0,T]$$

Lemme 2 *Soient $m, n \in C(0,T,\mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$ et $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0,T]$ et soit $a \geq 0$. Si $\varphi \in C(0,T;\mathbb{R})$ est une fonction telle que*

$$\frac{1}{2}\varphi^2(t) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^t m(s)\varphi(t)ds + \int_0^t n(s)\varphi^2(s)ds \quad \forall t \in [0,T]$$

alors

$$|\varphi(t)| \leq (a + \int_0^t m(s)ds) \exp(\int_0^t n(s)ds) \quad \forall t \in [0,T]$$

Lemme 3 *Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonction continues qui satifont*

$$f(t) \leq g(t) + c\int_a^b f(s)ds \quad \forall t \in [a,b],$$

pour une constante $c > 0$. Alors,

$$f(t) \leq g(t) + c\int_a^b g(s) \exp^{c(t-a)} ds \quad \forall t \in [a,b],$$

D'ailleurs, si g n'est pas décroissant, alors

$$f(t) \leq g(t) \exp^{c(t-a)} ds \quad \forall t \in [a,b],$$

Chapitre 2

Probème de contact avec compliance normale et adhésion en viscoélasticité avec endommagement

Nous considérons ici un problème dynamique de contact sans frottement avec compliance normale et adhésion entre un corps viscoélastique avec endommagement et une fondation déformable. Le processus d'adhésion sur la surface de contact est modélisé par une variable interne de surface, du champ d'adhésion. L'endommagement causé par les déformations élastiques du matériau estmodélisé par une variable interne du corps appellée champ d'endommagement.

Le problème est formulé comme un système d'équation et d'inéquation aux dérivées partielles contenant l'équation de mouvement ou d'équilibre du corps, la loi de comportement du matériau avec endommagement, une inclusion du type parabolique modélisant le champ d'endommagement, une équation différentielle modélisant le champ d'adhésion et les conditions aux limites auxquelles il est soumis.

Ce chapitre est divisée en trois sections. Dans la premiére section, nous commençons par formuler le problème mécanique, puis nous indiquons les hypothèses sur les données. Ensuite, dans la deuxiéme section nous donnons la formulation variationnelle du problème mécanique. Enfin, dans la troisième section, nous énonçons et démontrons un théorème d'existence et d'unicité de la solution faible pour ce problème en utilisant des arguments du point fixe de Banach, et des équations d'évolution non linéaires.

2.1 Formulation du problème mécanique-Hypothèses

Nous considérons un corps viscoélastiqu avec endomagement qui à l'instant $t = 0$ occupe un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = (2, 3)$ de frontière régulière, constitué de trois parties disjointes Γ_1, Γ_2 et,Γ_3 tel que $mes\Gamma_1 > 0$ Soit $T > 0$ et soit $[0, T]$ l'intervalle de temps en question.

Ce corps est encastré sur $\Gamma_1 \times (0, T)$, soumis à une densité de forces volumiques f_0 sur $\Omega \times [0, T]$, et des forces surfaciques de densité f_2 sur $\Gamma_1 \times (0, T)$ et en contact avec une fondation déformable le long de Γ_3. De plus le contact, avec cette fondation, est supposée avec adhésion et endommgement.

Le problème mécanique qu'on étudie est le premier problème du chapitre 1.

Problème P

Trouver le champ des déplacements $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^d$, et le champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{S}^d$ le champ d'endommagement $\alpha : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}$ et le champ d'adhésion $\beta : \Gamma_3 \times [0, T] \to [0, 1]$ tels que

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}) + \mathcal{G}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}, \alpha) \qquad \text{dans } \Omega \times (0, T), \tag{2.1.1}$$

$$\dot{\alpha} - k\Delta\alpha + \partial\varphi_K(\alpha) \ni \phi(\varepsilon(\mathbf{u}), \alpha), \qquad \text{dans } \Omega \times (0, T) \tag{2.1.2}$$

$$\rho\ddot{\mathbf{u}} = \operatorname{Div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 \qquad \text{dans } \Omega \times (0, T), \tag{2.1.3}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \qquad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \tag{2.1.4}$$

$$\boldsymbol{\sigma\nu} = \mathbf{f}_2 \qquad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T), \tag{2.1.5}$$

$$-\boldsymbol{\sigma}_\nu = p_\nu(u_\nu) - \gamma_\nu\beta^2(-R(u_\nu))_+ \qquad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \tag{2.1.6}$$

$$-\boldsymbol{\sigma}_\tau = p_\tau(\beta, \mathbf{u}_\tau) \qquad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \tag{2.1.7}$$

$$\dot{\beta} = H_{ad}(\beta, \zeta_\beta, R(|u|)) \qquad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \tag{2.1.8}$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\nu} = 0 \qquad \text{sur } \Gamma \times (0, T), \tag{2.1.9}$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{v}_0, \quad \alpha(0) = \alpha_0 \qquad \text{dans } \Omega, \tag{2.1.10}$$

$$\beta(0) = \beta_0 \qquad \text{sur } \Gamma_3. \tag{2.1.11}$$

L'équation (2.1.1) représente la loi de comportement viscoélastique non linéaire avec l'endommagement. L'évolution du champ d'endommagement est modelisée par l'inclusion du type parabolique donnée par la relation (2.1.2) où ϕ est la fonction source d'endommagement, supposé être une fonction générale radher des souches et se nuire, et $\partial\varphi_K$ est le sous-différentiel de la fonction indicatrice des fonctions d'endommagement admissibles fixé K. L'équation (2.1.3) représente l'équation du mouvement où ρ désigne la masse volumique matériau, (2.1.4)-(2.1.5) sont respectivement, des conditions aux limites de déplacement-traction. Les conditions (2.1.6)-(2.1.8) représentent les conditions de contact avec compliance normale et adhésion sur la partie Γ_3 de la frontière Ω. L'équation (2.1.9) représente une condition aux limites de Neumann homogène où $\dfrac{\partial\,\alpha}{\partial\,\nu}$ représente la dérivée normale de α. Dans (2.1.10) nous considérons les conditions initiales où $\mathbf{u}_0$ est le déplacement initial, $\mathbf{v}_0$ la vitesse initiale et α_0 le endommagement initial. Enfin, (2.1.11) est la condition initiale, dans laquelle β_0 désigne la liaison initiale.

Pour l'étude du problème mécanique (2.1.1)-(2.1.11) on considère les hypothèses suivantes :

Nous supposons que *l'opérateur de viscosité* $\mathcal{A} : \Omega\ \times \mathbb{S}^d \to \mathbb{S}^d$ satisfait

$$\left\{\begin{array}{l}
\text{(a) Il existe } L_{\mathcal{A}} > 0 \text{ tel que} \\
\qquad |\mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_1) - \mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_2)| \leq L_{\mathcal{A}} |\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2| \\
\qquad \forall \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\
\text{(b) Il existe } m_{\mathcal{A}} > 0 \text{ tel que} \\
\qquad (\mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_1) - \mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_2)) \cdot (\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2) \geq m_{\mathcal{A}} |\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2|^2 \\
\qquad \forall \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2 \in \mathbb{S}^d, \ \text{p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\
\text{(c) L'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \text{ est Lebesgue measurable sur } \Omega, \\
\qquad \text{pour tout } \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{S}^d. \\
\text{(d) L'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) \in \mathcal{H}.
\end{array}\right. \tag{2.1.12}$$

L'opérateur d'élasticité $\mathcal{G} : \Omega \times \mathbb{S}^d \to \mathbb{S}^d$ satisfait

$$\left\{\begin{array}{l}
\text{(a) Il existe } M_{\mathcal{G}} > 0 \text{ tel que} \\
\qquad |\mathcal{G}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_1, \alpha_1) - \mathcal{G}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_2, \alpha_2)| \leq M_{\mathcal{G}}(|\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2| + |\alpha_1 - \alpha_2|) \\
\qquad \forall \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2 \in \mathbb{S}^d, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \text{p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\
\text{(b) L'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{G}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \text{ est} \\
\qquad\qquad \text{Lebesgue measurable sur } \Omega \\
\qquad \text{pour tout } \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{S}^d, \ \alpha \in \mathbb{R}. \\
\text{(c) L'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{G}(\mathbf{x}, 0, 0) \ \in \mathcal{H}.
\end{array}\right. \tag{2.1.13}$$

La fonction de la source d'endommagement $S : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfait

$$\begin{cases} \text{(a) Il existe } M_S > 0 \text{ tel que} \\ \qquad |\phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_1, \alpha_1) - \phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_2, \alpha_2)| \leq M_\phi(|\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2| + |\alpha_1 - \alpha_2|). \\ \qquad \forall \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2 \in \mathbb{S}^d, \qquad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \text{p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(b) Pour tout } \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{S}^d,\ \alpha \in \mathbb{R},\ \mathbf{x} \to \phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \alpha) \text{ est} \\ \qquad\qquad \text{Lebesgue measurable sur } \Omega \\ \text{(c) L'application } \mathbf{x} \mapsto \phi(\mathbf{x}, 0, 0) \in L^2(\Omega). \end{cases} \tag{2.1.14}$$

La fonction de contact tangentiel $p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ satisfait

$$\begin{cases} \text{(a) Il existe } L_\nu > 0 \text{ tel que} \\ \qquad |p_\nu(\mathbf{x}, r_1) - p_\nu(\mathbf{x}, r_2)| \leq L_\nu |r_1 - r_2| \\ \qquad r_1, r_2 \in \mathbb{R}^d, \quad \text{p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3 \\ \text{(b) L'application } \mathbf{x} \mapsto p_\nu(\mathbf{x}, r) \text{ est Lebesgue measurable sur } \Gamma_3 \\ \qquad r \in \mathbb{R}^d \\ \text{(c) L'application } \mathbf{x} \mapsto p_\nu(\mathbf{x}, r) = 0 \text{ pour tout } r \leq 0 \end{cases} \tag{2.1.15}$$

La fonction de contact tangentiel $p_\tau : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ satisfait

$$\begin{cases} \text{(a) Il existe } L_\tau > 0 \text{ tel que} \\ \qquad |p_\tau(\mathbf{x}, \beta_1, r_1) - p_\tau(\mathbf{x}, \beta_2, r_2)| \leq L_\tau(|\beta_1 - \beta_2| + |r_1 - r_2|) \\ \qquad \forall \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}, \quad r_1, r_2 \in \mathbb{R}^d, \quad \text{p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3 \\ \text{(b) L'application } \mathbf{x} \mapsto p_\tau(\mathbf{x}, \beta, r) \text{ est Lebesgue measurable sur } \Gamma_3 \\ \qquad \forall \beta \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}^d \\ \text{(c) L'application } \mathbf{x} \mapsto p_\tau(\mathbf{x}, 0, 0) \in L^\infty(\Gamma_3)^d \\ \text{(d) } p_\tau(\mathbf{x}, \beta, r).\nu(\mathbf{x}) = 0, \quad \forall r \in \mathbb{R}^d \text{ tel que } r.\nu(\mathbf{x}) = 0, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \end{cases} \tag{2.1.16}$$

La fonction d'adhésion $H_{ad} : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [-L, L] \to \mathbb{R}$ satisfait

$$\begin{cases} \text{(a) Il existe } L_{Had} > 0 \text{ tel que} \\ \qquad |H_{ad}(\mathbf{x}, b_1, z, r) - H_{ad}(\mathbf{x}, b_2, z, r)| \leq L_{Had}|b_1 - b_2| \\ \qquad \forall b_1, b_2 \in \mathbb{R}, \quad z \in \mathbb{R}, \quad r \in [-L, L], \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3, \text{ et} \\ \qquad |H_{ad}(\mathbf{x}, b_1, z_1, r_1) - H_{ad}(\mathbf{x}, b_2, z_2, r_2)| \leq \\ \qquad L_{Had}(|b_1 - b_2| + |z_1 - z_2| + |r_1 - r_2|) \\ \qquad \forall b_1, b_2 \in [0, 1], \quad z_1, z_2 \in \mathbb{R}, \quad r_1, r_2 \in [-L, L], \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3, \\ \text{(b) L'application } \mathbf{x} \mapsto H_{ad}(\mathbf{x}, b, z, r) \text{ est Lebesgue measurable sur } \Gamma_3, \\ \qquad \forall b, z \in \mathbb{R}, \quad r \in [-L, L], \\ \text{(c) L'application } (b, z, r) \mapsto H_{ad}(\mathbf{x}, b, z, r) \text{ est continu sur} \\ \qquad \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [-L, L], \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3, \\ \text{(d) } H_{ad}(\mathbf{x}, 0, z, r) = 0, \quad \forall r \in [-L, L], \quad \text{p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3, \\ \text{(e) } H_{ad}(\mathbf{x}, b, z, r) \geq 0, \quad \forall b \leq 0, \ z \in \mathbb{R}, \quad r \in [-L, L], \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3 \\ \ \text{et} \\ \quad H_{ad}(\mathbf{x}, b, z, r) \leq 0 \quad \forall b \geq 1, \ z \in \mathbb{R}, \quad r \in [-L, L], \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \end{cases} \tag{2.1.17}$$

On note que si $\beta \in L^\infty(\Gamma_3)$, $z \in L^\infty(\Gamma_3)$ et $r : \Gamma_3 \to \mathbb{R}$ est une fonction mesurable, alors les conditions (2.1.17) impliquent que
$x \to H_{ad}(x, \beta(x), z(x), R\, r(x)) \in L^\infty(\Gamma_3)$.

Nous supposons que les satisfait de densité de masse

$$\rho \in L^\infty(\Omega), \text{ et il existe } \rho^* > 0, \text{ tel que } \rho(x) \geq \rho^*, \text{ p.p. } x \in \Omega. \tag{2.1.18}$$

Et on suppose que les forces volumiqes et la traction surfacique ont la régularité

$$\mathbf{f}_0 \in L^2(0, T; H), \qquad \mathbf{f}_2 \in L^2(0, T; L^\infty(\Gamma_2)^d). \tag{2.1.19}$$

Finallement, les conditions initiales suivantes

$$\mathbf{u}_0 \in V, \quad \mathbf{v}_0 \in H, \tag{2.1.20}$$

$$\alpha_0 \in K, \tag{2.1.21}$$

$$\beta_0 \in L^\infty(\Gamma_3) \text{ et } 0 \leq \beta_0 \leq 1 \text{ p.p. sur } \Gamma_3. \tag{2.1.22}$$

Nous définissons la forme bilinéaire $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ par

$$a(\zeta, \varphi) = k \int_\Omega \nabla\zeta \cdot \nabla\varphi dx. \tag{2.1.23}$$

Nous allons utiliser un produit intérieur modifié sur $H = L^2(\Omega)^d$, proposée par

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_H = (\rho\mathbf{u}, \mathbf{v})_H, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H,$$

autrement dit, pondérée avec ρ, et nous laissons $\| \cdot \|_H$ la norme associée, c'est-à-dire

$$|\mathbf{v}|_H = (\rho\mathbf{v}, \mathbf{v})_H^{\frac{1}{2}}, \quad \forall\, \mathbf{v} \in H.$$

En utilisant hypothèse (2.1.18), il s'ensuit que $\| \cdot \|_V$ and $\| \cdot \|_H$ sont les normes équivalentes sur H De plus, la cartographie par inclusion de $(V, \| \cdot \|_V)$ into $(H, \| \cdot \|_H)$ est continue et dense. On note V' l'espace dual de V. identifier H avec son propre double, nous pouvons écrire le Gelfand triple

$$V \subset H \subset V'.$$

Nous utilisons la notation $(\cdot,\cdot)_{V'\times V}$ pour représenter l'appariement de dualité entre V' et V. Nous avons

$$(\mathbf{u},\mathbf{v})_{V'\times V} = (\mathbf{u},\mathbf{v})_H, \quad \forall \mathbf{u} \in H, \forall \mathbf{v} \in V.$$

Enfin, on note $|\cdot|_{V'}$ la norme sur l'espace dual V'. Hypothèses (2.1.19) nous permettre, pour p.p. $t \in (0,T)$ à définir $f(t) \in V'$ par

$$(\mathbf{f}(t),\mathbf{v})_{V'\times V} = \int_\Omega \mathbf{f}_0(t)\cdot \mathbf{v}dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2(t)\cdot \mathbf{v}da, \quad \forall \mathbf{v} \in V, \tag{2.1.24}$$

et

$$\mathbf{f} \in L^2(0,T;V'). \tag{2.1.25}$$

Soit $j : L^\infty(\Gamma_3) \times V \times V \to \mathbb{R}$ la fonctionnelle

$$\begin{aligned} j(\beta,\mathbf{u},\mathbf{v}) = &\int_{\Gamma_3} p_\nu(\mathbf{u}_\nu)\mathbf{v}_\nu da - \int_{\Gamma_3} \gamma_\nu \beta^2(-R(\mathbf{u}_\nu))_+ \mathbf{v}_\nu da \\ &+ \int_{\Gamma_3} p_\tau(\beta,\mathbf{u}_\tau).\mathbf{v}_\tau da, \quad \forall \beta \in L^\infty(\Gamma_3), \quad \forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in V. \end{aligned} \tag{2.1.26}$$

Pour l'étude du problème P, on définit le sous-espace fermé V de H_1 par :

$$V = \{\mathbf{v} \in H_1 \quad \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_1\} \tag{2.1.27}$$

et on le munit du produit scalaire défini par (1.2.4),et de la norme définie par (1.2.5).

2.2 Formulation variationnelle

En utilisant la formule de Green

$$(\boldsymbol{\sigma},\varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (\mathrm{Div}\,\boldsymbol{\sigma},\mathbf{v})_H = \int_\Gamma \sigma\nu.\mathbf{v}d\Gamma, \quad \forall \mathbf{v} \in H_1$$

on a

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\varepsilon(\mathbf{v})dx + \int_\Omega \mathrm{Div}\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{v}dx = \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{\sigma}\nu\cdot\mathbf{v}d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \sigma\nu\cdot\mathbf{v}d\Gamma + \int_{\Gamma_3} \sigma\nu\cdot\mathbf{v}d\Gamma \quad \forall \mathbf{v} \in V$$

En utilisant (2.1.3),(2.1.4),(2.1.5) on obtient

$$\int_\Omega \sigma\varepsilon(v)dx - \int_\Omega \mathbf{f}_0\mathbf{v}dx = \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2(t)\cdot\mathbf{v}dx + \int_{\Gamma_3} \sigma\nu\cdot\mathbf{v}da \quad \forall \mathbf{v} \in V$$

et, puisque

$$\sigma\nu\cdot\mathbf{v}=\sigma_\nu\cdot v_\nu+\boldsymbol{\sigma}_\tau\cdot\mathbf{v}_\tau=-p_\nu(u_\nu)v_\nu+\gamma_\nu\beta^2(-R(u_\nu))_+v_\nu-p_\tau(\beta,\mathbf{u}_\tau)\cdot\mathbf{v}_\tau,$$

il vient

$$\int_\Omega\sigma\,\varepsilon(v)dx=\int_\Omega\mathbf{f}_0(t)\mathbf{v}dx+\int_{\Gamma_2}\mathbf{f}_2(t)\cdot\mathbf{v}dx-\int_{\Gamma_3}p_\nu(u_\nu)v_\nu d\Gamma+$$
$$+\int_{\Gamma_3}\gamma_\nu\beta^2(-R(u_\nu))_+v_\nu d\Gamma-\int_{\Gamma_3}p_\tau(\beta,\mathbf{u}_\tau)\cdot\mathbf{v}_\tau\,d\Gamma.$$

D'après (2.1.24) et (2.1.26) nous obtenons

$$(\sigma(t),\varepsilon(v))_{\mathcal{H}}+j(\beta(t),u(t),v)=(f(t),v)_V\quad\forall\mathbf{v}\in V,\quad\text{p.p. }t\in(0,T).\tag{2.2.1}$$

De (2.1.1), (2.1.8), (2.1.10)-(2.1.11) et (2.2.1), on obtient la formulation variationnelle du problème **P**.

Problème PV

Trouver le champ de déplacement $\mathbf{u}:[0,T]\to V$ à le champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma}:[0,T]\to\mathcal{H}$ le champ endommagement $\alpha:[0,T]\to H^1(\Omega)$ et le champ d'adhésion $\beta:[0,T]\to L^\infty(\Gamma_3)$ tel que

$$\boldsymbol{\sigma}(t)=\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t))+\mathcal{G}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t),\alpha(t))\quad\text{p.p. }t\in(0,T),\tag{2.2.2}$$

$$\begin{aligned}\alpha(t)\in K,\quad&(\dot\alpha(t),\zeta-\alpha(t))_{L^2(\Omega)}+a(\alpha(t),\zeta-\alpha(t))\\&\qquad\geq(\phi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)),\alpha(t)),\zeta-\alpha(t))_{L^2(\Omega)},\quad\forall\zeta\in K,\end{aligned}\tag{2.2.3}$$

p.p.$t\in[0,T]$,

$$(\ddot{\mathbf{u}}(t),\mathbf{v})_{V'\times V}+(\boldsymbol{\sigma}(t),\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}}+j(\beta(t),\mathbf{u}(t),\mathbf{v})=(\mathbf{f}(t),\mathbf{v})_{V'\times V},\quad\forall\mathbf{v}\in V,\tag{2.2.4}$$

p.p. $t\in[0,T]$,

$$\dot\beta(t)=H_{ad}(\beta(t),\zeta_\beta,R(|\mathbf{u}(t)|)),\quad 0\leq\beta(t)\leq1\quad\text{p.p. }t\in[0,T],\tag{2.2.5}$$

$$\mathbf{u}(0)=\mathbf{u}_0,\quad\dot{\mathbf{u}}(0)=\mathbf{v}_0,\quad\alpha(0)=\alpha_0,\quad\beta(0)=\beta_0.\tag{2.2.6}$$

Nous remarquons que le problème variationnel PV est formulée en termes de déplacement, champ de contrainte, terrain de endommages et champ d'adhérence. L'existence d'une solution unique de problème PV est déclaré et prouvé dans la section suivante.

Notre résultat principal concernant le bien posé du problème PV est la suivante.

Théorème 2.2.1 *Supposons que* (2.1.12)-(2.1.22) *détiennent. Alors il existe une solution unique* $\{\mathbf{u}, \sigma, \alpha, \beta\}$ *qui satisfait*

$$\mathbf{u} \in H^1(0,T;V) \cap C^1(0,T;H), \qquad \ddot{\mathbf{u}} \in L^2(0,T;V'), \tag{2.2.7}$$

$$\boldsymbol{\sigma} \in L^2(0,T;\mathcal{H}), \qquad \operatorname{Div} \boldsymbol{\sigma} \in L^2(0,T;V'), \tag{2.2.8}$$

$$\alpha \in W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega)), \tag{2.2.9}$$

$$\beta \in W^{1,\infty}(0,T;L^\infty(\Gamma_3)). \tag{2.2.10}$$

Un quadruplet $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \alpha, \beta\}$ qui satisfait (2.2.2)- (2.2.5) est appelé solution faible pour le problème P. Nous concluons que, dans les hypothèses énoncées , le problème (2.1.1)-(2.1.11) a une satisfaying unique solution (2.1.6)-(2.2.9). La preuve du théorème 2.2.1 sera réalisée en plusieurs étapes et est basé sur les équations d'évolution de la théorie avec des opérateurs monotones , un argument de point fixe et une existence classique et résultat d'unicité pour les inégalités paraboliques cette fin, nous supposons dans la suite que (2.1.12)-(2.1.22) tenir. Ci-dessous, C désigne une constante positive générique qui peut dépendre de Ω, Γ_1, Γ_2, Γ_3, $\mathcal{A}$, $\mathcal{G}$, p_ν, p_τ, L et T, mais ne dépend pas de t et sur le reste des données d'entrée, et dont la valeur peut changer d'un endroit à l'autre. En outre, pour des raisons de simplicité, nous supress, dans ce qui suit, la dépendance explicite des différentes fonctions sur $\mathbf{x} \in \Omega \cup \Gamma$.

La démonstration du théorème 2.2.1 sera fournie dans la section suivante.

2.3 Existence et unicité de la solution

Soit $\boldsymbol{\eta} \in L^2(0,T;V')$ sera proposée. Dans la première étape, nous considérons le problème variationnel suivant.

Problème P_V^η

Trouver le champ de déplacement $\mathbf{u}_\eta : [0,T] \to V$ tel que

$$\begin{aligned}(\ddot{\mathbf{u}}_\eta(t), \mathbf{v})_{V'\times V} + (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_\eta(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(v))_{\mathcal{H}} + (\boldsymbol{\eta}(t), \mathbf{v})_{V'\times V} = (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_{V'\times V},\\ \forall \mathbf{v} \in V,\ \text{p.p.}t \in (0,T),\end{aligned} \tag{2.3.1}$$

$$\mathbf{u}_\eta(0) = \mathbf{u}_0, \quad \dot{\mathbf{u}}_\eta(0) = \mathbf{v}_0. \tag{2.3.2}$$

Pour résoudre un problème P_V^η, nous appliquons une existence abstraite et le résultat unique contenue dans le théorème 2.29 ([27] page 48).

Lemme 4 *Il existe une solution unique au problème de P_V^η la régularité exprimé dans (2.2.7)*

Preuve. Nous définissons l'opérateur $A : V \to V'$ by

$$(A\mathbf{u}, \mathbf{v})_{V' \times V} = (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V. \tag{2.3.3}$$

il résulte de(2.3.3) et (2.1.12)(a) que

$$|A\mathbf{u} - A\mathbf{v}|_{V'} \leq L_{\mathcal{A}} |\mathbf{u} - \mathbf{v}|_V, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \tag{2.3.4}$$

ce qui montre que $A : V \to V'$ est continu, et ainsi de hemicontinuous. Maintenant, par (2.3.3) et (2.1.12) (b), nous trouvons

$$(A\mathbf{u} - A\mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v})_{V' \times V} \geq m_{\mathcal{A}} |\mathbf{u} - \mathbf{v}|_V^2, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \tag{2.3.5}$$

c'est à dire, $A : V \to V'$ est un opérateur monotone. Choisir $\mathbf{v} = \mathbf{0}_V$ dans (2.3.5) on obtient

$$\begin{aligned}(A\mathbf{u}, \mathbf{u})_{V' \times V} &\geq m_{\mathcal{A}} |\mathbf{u}|_V^2 - |A0_V|_{V'} \ |\mathbf{u}|_V, \\ &\geq \frac{1}{2} m_{\mathcal{A}} |\mathbf{u}|_V^2 - \frac{1}{2m_{\mathcal{A}}} |A0_V|_{V'} \quad \forall \mathbf{u} \in V.\end{aligned} \tag{2.3.6}$$

Ainsi, A satisfait la condition (1.2.22) avec $\omega = \dfrac{1}{2} m_{\mathcal{A}}$ et $\lambda = -\dfrac{1}{2m_{\mathcal{A}}} |A0_V|_{V'}$. Suivante (2.3.4) on en déduit que

$$|A\mathbf{u}|_{V'} \leq L_{\mathcal{A}} |\mathbf{u}|_V + |A0_V|_{V'}, \quad \forall \mathbf{u} \in \ V.$$

Cette inégalité implique que A satisfait la condition (2.2.5). Enfin, nous avons rappeler que par (2.1.25) et (2.3.2) nous avons $\mathbf{f} - \eta \in L^2(0, T; V')$ et $\mathbf{v}_0 \in H$. Il résulte alors du théorème (2.2.1) qu'il existe une fonction uniques $\mathbf{v}_\eta$ qui satisfait

$$\mathbf{v}_\eta \in L^2(0, T; V) \cap C([0, T]; H), \quad \frac{d\mathbf{v}_\eta}{dt} \in L^2(0, T; V'), \tag{2.3.7}$$

$$\frac{d\mathbf{v}_\eta}{dt} + A\mathbf{v}_\eta(t) + \eta(t) = \mathbf{f}(t), \quad \text{p.p.}\, t \in (0; T), \tag{2.3.8}$$

$$\mathbf{v}_\eta(0) = \mathbf{v}_0. \tag{2.3.9}$$

Soit $\mathbf{u}_\eta : [0;T] \to V$ définir par

$$\mathbf{u}_\eta(t) = \int_0^t \mathbf{v}_\eta(s)\, ds + \mathbf{u}_0, \qquad \forall t \in [0,T]. \tag{2.3.10}$$

Il résulte de (2.3.3) et (2.3.7) - (2.3.10) que $\mathbf{u}_\eta$ est une solution de l' problème variationnel P_V^η et il a la régularité exprimé dans (2.2.7). Ceci conclut la preuve de la partie de l'existence du lemme (4). Le caractère unique de la solution au problème (2.3.8) - (2.3.9), garanti par le théorème 2.2.1. ■

Dans la deuxième étape, nous utilisons le champ de déplacement $\mathbf{u}_\eta$ obtenu dans le lemme 4 et envisager le problème suivant la valeur initiale.

Problème P_V^β

Trouver le champ d'adhésion $\beta_\eta : [0,T] \to L^\infty(\Gamma_3)$ tel que

$$\dot{\beta}_\eta(t) = H_{ad}(\beta_\eta(t), \zeta_{\beta_\eta}(t), R(|\mathbf{u}_\eta(t)|)), \quad \text{p.p. } t \in (0,T), \tag{2.3.11}$$

$$\beta_\eta(0) = \beta_0. \tag{2.3.12}$$

En utilisant la version du théorème de Cauchy-Lipschitz et arguments signaler fixe de Banach. Nous avons le résultat suivant.

Lemme 5 *Il existe une solution unique β_η de problème P_V^β et it satisfait $\beta_\eta \in W^{1,\infty}(0,T; L^\infty(\Gamma_3)$. En outre*

$$0 \leq \beta_\eta(t) \leq 1, \quad \forall t \in [0,T], \quad \text{p.p. } sur\ \Gamma_3. \tag{2.3.13}$$

Preuve.

Soit $\zeta \in L^\infty(0,T; L^\infty(\Gamma_3)$ et l'application est $F_{\eta\zeta}(t,\cdot) : L^\infty(\Gamma_3) \to L^\infty(\Gamma_3)$ défine p.p. on $(0,T)$ par

$$F_{\eta\zeta}(t,\beta) = H_{ad}(\beta(t), \zeta(t), R(|\mathbf{u}_\eta(t)|))$$

L'opérateur $F_{\eta\zeta}$ est continue et Lipschitz par rapport au second argument. comme $\beta_0 \in L^\infty(\Gamma_3)$, $t \mapsto F_{\eta\zeta}(t,\beta)$ appartient à $L^\infty(0,T; L^\infty(\Gamma_3))$. Nous pouvons appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz et la preuve de ce théorème voir Suquet([?] page 60)ce qui nous donne l'existence et l'unicité d'une fonction $\beta_{\eta\zeta} \in W^{1,\infty}(0,T;L^\infty(\Gamma_3)$ tel que

$$\dot{\beta}_{\eta\zeta}(t) = H_{ad}(\beta_{\eta\zeta}(t), \zeta(t), R(|\mathbf{u}_\eta(t)|)), \quad \text{p.p. } t \in (0,T), \tag{2.3.14}$$

$$\beta_{\eta\zeta}(0) = \beta_0. \tag{2.3.15}$$

Cela prouve que $\beta_{\eta\zeta}$ satisfait la condition (2.3.13). Nous supposons que $\beta_{\eta\zeta}(t_0) < 0$ pour certains $t_0 \in [0,T]$. En vertu de la condition (2.1.22) nous avons $0 \leq \beta_{\eta\zeta}(0) \leq 1$ et donc $t_0 > 0$ de plus, depuis la cartographie $t \mapsto \beta(t) : [0,T] \to \mathbb{R}$ est continue, nous pouvons trouver $t_1 \in [0,t_0)$ tel que $\beta_{\eta\zeta}(t_1) = 0$.

Maintenant, laissez $t_2 = \sup\{t \in [t_1,t_0], \quad \beta_{\eta\zeta}(t) = 0\}$, alors $t_2 < t_0, \quad \beta_{\eta\zeta}(t_2) = 0$ et $\beta_{\eta\zeta}(t) < 0$ pour $t \in (t_2,t_0]$. Assomption (Had 5f) et l'équation (2.3.14) impliquent que $\dot{\beta}_\eta(t) \geq 0$ pour $t \in (t_2,t_0]$, et donc $\beta_\eta(t_0) \geq \beta_\eta(t_2) = 0$ qui est juin contradiction. Nous concluons qué $\beta_\eta(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0,T]$.

Un argument de Similaire Montre qué $\beta_{\eta\zeta}(t) \leq 1$ Aubaines pour tous $t \in [0,T]$.

$$0 \leq \beta_{\eta\zeta}(t) \leq 1, \quad \forall t \in [0,T], \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3. \tag{2.3.16}$$

La propriété $0 < \beta_{\eta\zeta}(t) \leq 1$ si on peut considérer l'opérateur $\Lambda_\eta : L^\infty(0,T;L^\infty(\Gamma_3) \to L^\infty(0,T;L^\infty(\Gamma_3)$ défine par

$$\Lambda_\eta\zeta(t) = \int_0^t \beta_{\eta\zeta}(s)ds \quad t \in [0,T], \tag{2.3.17}$$

pour laquelle nous prouvons que d'un seul point fixe.

Soit $\zeta_1, \zeta_2 \in L^\infty(0,T;L^\infty(\Gamma_3))$ et soit $s \in [0,T]$.

De (2.3.14), (2.3.15) pour $i = 1,2$ nous

$$\beta_{\eta\zeta_i}(s) = \beta_0 + \int_0^s H_{ad}(\beta_{\eta\zeta_i}(\theta), \zeta_i(\theta), R(|\mathbf{u}_\eta(\theta)|))d\theta,$$

et, en utilisant la dernière égalité et (2.1.17)(a), nous trouvons

$$|\beta_{\eta\zeta_1}(s) - \beta_{\eta\zeta_2}(s)| \leq L_{ad}\int_0^s |\beta_{\eta\zeta_1}(\theta) - \beta_{\eta\zeta_2}(\theta)|d\theta L_{ad}\int_0^s |\zeta_1(\theta) - \zeta_2(\theta)|d\theta.$$

Ici et dans la suite, C est une constante positive qui dépend des données, mais est indépendante du temps et les conditions initiales, et qui peuvent changer de ligne en ligne.

L'application de la Gronwall lemme nous trouvons

$$|\beta_{\eta\zeta_1}(s) - \beta_{\eta\zeta_2}(s)| \leq C \int_0^s |\zeta_1(\theta) - \zeta_2(\theta)| d\theta.$$

et en intégrant cette inégalité dans Γ_3 être

$$\|\beta_{\eta\zeta_1}(s) - \beta_{\eta\zeta_2}(s)\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \leq C \int_0^s \|\zeta_1(\theta) - \zeta_2(\theta)\|_{L^\infty(\Gamma_3)} d\theta. \tag{2.3.18}$$

From (2.3.17) et (2.3.18) nous trouvons

$$\|\Lambda_\eta \zeta_1(t) - \Lambda_\eta \zeta_2(t)\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \leq C \int_0^t \int_0^s \|\zeta_1(\theta) - \zeta_2(\theta)\|_{L^\infty(\Gamma_3)} d\theta ds, \quad t \in [0,T]. \tag{2.3.19}$$

Réitérant cette inégalité n fois, il vient

$$\|\Lambda_\eta^n \zeta_1 - \Lambda_\eta^n \zeta_2\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Gamma_3))} \leq \frac{(CT)^{2n}}{(2n)!} \|\zeta_1 - \zeta_2\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Gamma_3))}. \tag{2.3.20}$$

Il conclut que n assez grand, un itéréΛ_η^n de Λ_η est une contraction de l'espace de Banach $L^\infty(0,T;L^\infty(\Gamma_3))$. Ensuite, il existe un unique $\zeta_\eta^* :\in L^\infty(0,T;L^\infty(\Gamma_3))$ tel que $\Lambda_\eta^n \zeta_\eta^* = \zeta_\eta^*$ et en outre ζ_η^* est également l'unique point fixe Λ_η.

Soit $\beta_\eta = \beta_{\eta\zeta_\eta^*}$ la solution de (2.3.14), (2.3.15) pour $\zeta = \zeta_\eta^*$. En utilisant (2.3.17) et la relation (2.3.19), nous obtenons

$$\zeta_\eta^*(t) = \Lambda_\eta \zeta_\eta^*(t) = \int_0^t \beta_\eta \zeta_\eta^*(s) ds = \int_0^t \beta_\eta(s) ds = \zeta_{\beta_\eta} \quad t \in [0,T],$$

et en gardant à l'esprit (2.3.14)-(2.3.16) il s'ensuit que β_η est une solution au problème P_V^β et satisfait (2.2.10) et (2.3.13). Qui conclut la partie de l'existence du lemme 5. The uniqueness follows from the uniqueness of the fixed point of the operator Λ_η given by (2.3.17). ■

Problèm P_V^θ

Trouver le champ endommagement $\alpha_\theta : [0,T] \to H^1(\Omega)$ tel que

$$\begin{aligned} \alpha_\theta(t) \in K, \quad & (\dot{\alpha_\theta}(t), \zeta - \alpha_\theta(t))_{L^2(\Omega)} + a(\alpha_\theta(t), \zeta - \alpha_\theta(t)) \\ & \geq (\phi(t), \zeta - \alpha_\theta(t))_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \zeta \in K, \text{ p.p. } t \in (0,T), \end{aligned} \tag{2.3.21}$$

$$\alpha_\theta(0) = 0. \tag{2.3.22}$$

Dans l'étude du problème de P_V^θ, nous avons le résultat suivant.

Lemme 6 *Problème P_V^θ a une solution unique α_θ tel que*

$$\alpha_\theta \in H^1(0,T;L^2(\Omega) \cap \ L^2(0,T;H^1(\Omega)). \tag{2.3.23}$$

L'inclusion de $(H^1(\Omega), |\cdot|_{H^1(\Omega)})$ dans $(L^2(\Omega), |\cdot|_{L^2(\Omega)})$ est continue et sa gamme est dense. On note $(H^1(\Omega))'$ l'espace dual de $H^1(\Omega)$ et identifier le dual de $L^2(\Omega)$ avec lui-même, nous pouvons écrire le Guelfand triple

$$H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset (H^1(\Omega))'.$$

Nous utilisons la notation $(\alpha, \zeta)_{(H^1(\Omega))' \times H^1(\Omega)}$ pour l'appariement de la dualité entre $(H^1(\Omega))'$ et $H^1(\Omega)$. nous avons

$$(\alpha, \zeta)_{(H^1(\Omega))' \times H^1(\Omega)} = (\alpha, \zeta)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \alpha \in L^2(\Omega),\ \zeta \in H^1(\Omega),$$

et nous notons que K est fermé convexe définie dans $H^1(\Omega)$. Puis, en utilisant la définition (2.1.23) de la forme bilinéaire A et le fait que $\alpha_0 \in K$ dans (2.1.21), il est facile de voir que le lemme 6 est conséquence directement du théorème 1.2.14 dans [6] (page 47).

Enfin, à la suite de ces résultats et en utilisant les propriétés de l'opérateur $\mathcal{G}$ le fonctionnelle j et la fonction ϕ pour $t \in [0,T]$, nous considérons l'élément

$$\Lambda(\boldsymbol{\eta}, \theta)(t) = (\Lambda^1(\boldsymbol{\eta}, \theta)(t), \Lambda^2(\boldsymbol{\eta}, \theta)(t)) \in V' \times L^2(\Omega), \tag{2.3.24}$$

définis par les égalités

$$(\Lambda^1(\boldsymbol{\eta}, \theta)(t), \mathbf{v})_{V' \times V} = (\mathcal{G}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\eta(t), \alpha_\theta(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + j(\beta_\eta(t), \mathbf{u}_\eta(t), \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V, \tag{2.3.25}$$

$$(\Lambda^2(\boldsymbol{\eta}, \theta)(t), \mathbf{v})_{V' \times V} = \phi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\eta(t)), \alpha_\theta(t)), \quad \forall \mathbf{v} \in V. \tag{2.3.26}$$

Nous avons le résultat suivant.

Lemme 7 *Pour $(\boldsymbol{\eta}, \theta) \in L^2(0,T;V' \times L^2(\Omega))$, la fonction $\Lambda(\boldsymbol{\eta}, \theta) : [0,T] \to V' \times L^2(\Omega)$ est continue, et il existe un unique, élément $(\boldsymbol{\eta}^*, \theta^*) \in L^2(0,T;V' \times L^2(\Omega))$ tel que $\Lambda(\boldsymbol{\eta}^*, \theta^*) = (\boldsymbol{\eta}^*, \theta^*)$.*

Preuve. Soit $(\boldsymbol{\eta},\theta)\in L^2(0,T;V'\times L^2(\Omega))$ et $t_1,t_2\in[0,T]$. En utilisant (2.3.18),(2.1.26) et (1.2.6),nous avons

$$\begin{aligned}
&|\Lambda^1(\boldsymbol{\eta},\theta)(t_1)-\Lambda^1(\boldsymbol{\eta},\theta)(t_2)|_{V'}\le|\mathcal{G}\varepsilon(u_\eta(t_1),\alpha_\theta(t_1))-\mathcal{G}\varepsilon(u_\eta(t_2)-\alpha_\theta(t_2))|_{\mathcal{H}}\\
&+C_0|p_\nu(u_{\eta\nu}(t_1)-u_{\eta\nu}(t_1)|_{L^\infty(\Gamma_3)}\\
&+C_0|\gamma_\nu|_{L^\infty(\Gamma_3)}|\beta_\eta^2(t_1)(-R(u_{\eta\nu}(t_1))_+-\beta_\eta^2(t_2)(-R(u_{\eta\nu}(t_2))_+|_{L^\infty(\Gamma_3)}\\
&+C_0|p_\tau(\beta_\eta(t_1),u_{\eta\tau}(t_1))-p_\tau(\beta_\eta(t_2)u_{\eta\tau}(t_2))|_{L^\infty(\Gamma_3)}\\
&\le C(|u_\eta(t_1)-u_\eta(t_2)|_V+|\alpha_\theta(t_1)-\alpha_\theta(t_2)|_{L^2(\Omega)}+|\beta_\eta(t_1)-\beta_\eta(t_2)|_{L^\infty(\Gamma_3)}).
\end{aligned}\tag{2.3.27}$$

Rappelons que ci-dessus $u_{\eta\nu},\mathbf{u}_{\eta\tau}$ désignent les composantes normale et tangentielle de la fonction $\mathbf{u}_\eta$ respectivement. Ensuite, en raison des régularités de $\mathbf{u}_\eta$, α_θ et β_η exprimée en (2.2.7), (2.2.9) et (2.2.10) respectivement, on déduit de (2.3.27) que $\Lambda^1(\boldsymbol{\eta},\theta)\in C(0,T;V')$. Par un argument similaire, de (2.3.26) et (2.1.14) il s'ensuit que

$$|\Lambda^2(\boldsymbol{\eta_1},\theta_1)(t)-\Lambda^2(\boldsymbol{\eta_2},\theta_2)(t)|_{L^2(\Omega)}\le C(|\mathbf{u}_1(t)-\mathbf{u}_2(t)|_V+|\alpha_1(t)-\alpha_2(t)|_{L^2(\Omega)}).\tag{2.3.28}$$

par conséquent, $\Lambda^2(\boldsymbol{\eta},\theta)\in C(0,T;L^2(\Omega))$ et $\Lambda(\boldsymbol{\eta},\theta)\in C(0,T;V'\times L^2(\Omega))$

Soit maintenant $(\boldsymbol{\eta}_1,\theta_1),(\boldsymbol{\eta}_2,\theta_2)\in L^2(0,T;V'\times L^2(\Omega))$. Nous utilisons la notation $\mathbf{u}_{\eta_i}=\mathbf{u}_i,\dot{\mathbf{u}}_{\eta_i}=\mathbf{v}_{\eta_i}=\mathbf{v}_i,\ \alpha_{\theta_i}=\alpha_i$ et $\beta_{\eta_i}=\beta_i$ pour $i=1,2$ Des arguments similaires à ceux utilisés dans la preuve de (2.3.27) et (2.3.28)yield

$$\begin{aligned}|\Lambda(\boldsymbol{\eta}_1,\theta_1)(t)-\Lambda(\boldsymbol{\eta}_2,\theta_2)(t)|^2_{V'\times L^2(\Omega)}\le C(|\mathbf{u}_1(t)-\mathbf{u}_2(t)|^2_V\\
+|\alpha_1(t)-\alpha_2(t)|^2_{L^2(\Omega)}+|\beta_1(t)-\beta_2(t)|^2_{L^\infty(\Gamma_3)}).\end{aligned}\tag{2.3.29}$$

depuis

$$u_i(t)=\int_0^t v_i(s)ds+\mathbf{u}_0,\quad\forall t\in[0,T],$$

nous avons

$$|\mathbf{u}_1(t)-\mathbf{u}_2(t)|^2_V\le C\int_0^t|\mathbf{v}_1(s)-\mathbf{v}_2(s)|^2_V ds,\quad\forall t\in[0,T].\tag{2.3.30}$$

En outre, à partir de (2.3.1), nous en déduisons que p.p. sur $(0,T)$

$$(\dot{\mathbf{v}}_1-\dot{\mathbf{v}}_2,\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)_{V'\times V}+(\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1)-\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_2),\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2))_{\mathcal{H}}+(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2,\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)_{V'\times V}=0.$$

Nous intégrons cette égalité par rapport au temps. Nous utilisons les conditions initiales $\mathbf{v}_1(0)=\mathbf{v}_2(0)=\mathbf{v}_0$ et (2.1.12) pour constater que

$$m_{\mathcal{A}}\int_0^t|\mathbf{v}_1(s)-\mathbf{v}_2(s)|^2_V ds\le-\int_0^t(\boldsymbol{\eta}_1(s)-\boldsymbol{\eta}_2(s),\mathbf{v}_1(s)-\mathbf{v}_2(s))_{V'\times V}ds,\quad\forall t\in[0,T].$$

Puis, en utilisant l'inégalité $2ab \leq \frac{a^2}{\gamma} + \gamma b^2$ nous obtenons

$$\int_0^t |\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)|_V^2 ds \leq C \int_0^t |\boldsymbol{\eta}_1(s) - \boldsymbol{\eta}_2(s)|_{V'}^2 ds, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{2.3.31}$$

D'autre part, le problème de l'adhérence de Cauchy nous pouvons écrire

$$\beta_i(t) = \beta_0 + \int_0^t H_{ad}(\beta_i(s), \zeta_{\beta_i}(s), R(|\mathbf{u}_i(s)))ds, i = 1, 2 \tag{2.3.32}$$

En utilisant (2.3.32) et (2.1.17)(a) et R, nous obtenons

$$\begin{aligned}|\beta_1(t) - \beta_2(t)| \leq L_{Had} \int_0^t |\beta_1(s) - \beta_2(s)|ds + L_{Had} \int_0^t |\zeta_{\beta_1}(s) - \zeta_{\beta_2}(s)|ds \\ + L_{Had} \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|ds.\end{aligned}$$

En utilisant (2.3.19), nous avons

$$\int_0^t |\zeta_{\beta_1}(s) - \zeta_{\beta_2}(s)|ds \leq C \int_0^t |\beta_1(s) - \beta_2(s)|ds \tag{2.3.33}$$

Maintenant par (2.3.32) et (2.3.33) et l'inégalité de Gronwall nous

$$|\beta_1(t) - \beta_2(t)|^2 \leq C \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|^2 ds$$

L'intégration de cette inégalité Γ_3 et utiliser (2.3.17), nous obtenons

$$\|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^\infty(\Gamma_3)}^2 \leq C \int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_V^2 ds$$

De (2.3.15) on en déduit que

$$(\dot{\alpha}_1 - \dot{\alpha}_2, \alpha_1 - \alpha_2)_{L^2(\Omega)} + a(\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2) \leq (\theta_1 - \theta_2, \alpha_1 - \alpha_2)_{L^2(\Omega)}, \quad \text{a.e. } \in (0,T).$$

Intégrer l'inégalité par rapport au temps, en utilisant les conditions initiales $\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = \alpha_0$ et l'inégalité $a(\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2) \geq 0$ nous trouvons

$$\frac{1}{2}|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^t (\theta_1(s) - \theta_2(s), \alpha_1(s) - \alpha_2(s))_{L^2(\Omega)} ds,$$

ce qui implique que

$$|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^t |\theta_1(s) - \theta_2(s)|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \int_0^t |\alpha_1(s) - \alpha_2(s)|_{L^2(\Omega)}^2 ds, \tag{2.3.34}$$

Cette inégalité combinée avec l'inégalité de Gronwall conduit à

$$|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)|^2_{L^2(\Omega)} \leq C \int_0^t |\theta_1(s) - \theta_2(s)|^2_{L^2(\Omega)} ds, \quad \forall t \in [0, T]. \tag{2.3.35}$$

Nous remplaçons (2.3.28) dans (2.3.23) et nous utilisons (2.3.24) pour obtenir

$$\begin{aligned} |\Lambda(\boldsymbol{\eta}_1, \theta_1)(t) - \Lambda(\boldsymbol{\eta}_2, \theta_2)(t)|^2_{V' \times L^2(\Omega)} &\leq C(|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|^2_V + \\ &\int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|^2_V ds + |\alpha_1(t) - \alpha_2(t)|^2_{L^2(\Omega)}), \\ &\leq C(\int_0^t |\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)|^2_V ds + |\alpha_1(t) - \alpha_2(t)|^2_{L^2(\Omega)}). \end{aligned}$$

Il en résulte maintenant de ce qui précède et les estimations (2.3.25) et (2.3.30) que

$$|\Lambda(\boldsymbol{\eta}_1, \theta_1)(t) - \Lambda(\boldsymbol{\eta}_2, \theta_2)(t)|^2_{V' \times L^2(\Omega)} \leq C(\int_0^t |(\boldsymbol{\eta}_1, \theta_1)(s) - (\boldsymbol{\eta}_2, \theta_2)(s)|^2_{V' \times L^2(\Omega)} ds).$$

Réitérant cette inégalité m temps de conduit à

$$|\Lambda^m(\boldsymbol{\eta}_1, \theta_1) - \Lambda^m(\boldsymbol{\eta}_2, \theta_2)|^2_{L^2(0,T;V' \times L^2(\Omega))} \leq \frac{(CT)^m}{m!} |(\eta_1, \theta_1) - (\eta_2, \theta_2)|^2_{L^2(0,T;V' \times L^2(\Omega)}.$$

Ainsi, pour m assez grand, Λ^m est une contraction sur le Banach espace $L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))$ et ainsi de Λ a un unique point fixe. ■

Maintenant, nous avons tous les ingrédients nécessaires pour prouver le théorème (3.2.1)

Existence

Soit $(\boldsymbol{\eta}^*, \theta^*) \in L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))$Le point de fixe donnée par Λ donnée par(2.3.23). Notons $\mathbf{u}_{\eta^*}$ la solution du problème P_V^η pour $\boldsymbol{\eta} = \eta^*$ et soit α_{θ^*} la solution du problème P_V^θ pour $\theta = \theta^*$. Soit β_{η^*}la solution de problème P_V^β pour $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}^*$. On note $\boldsymbol{\sigma}_{\eta^*}$ la fonction donnée par $\boldsymbol{\sigma}_{\eta^*}(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_{\eta^*}(t)) + \mathcal{G}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{\eta^*}(t), \alpha_{\eta^*}(t))$.

Utilisation (2.3.25),(2.3.26) en gardant à l'esprit que $\Lambda^1(\boldsymbol{\eta}^*, \theta^*) = \boldsymbol{\eta}^*$; $\Lambda^2(\boldsymbol{\eta}^*, \theta^*) = \theta^*$ nous constatons que le quadruplet $\{\mathbf{u}_{\eta^*}, \boldsymbol{\sigma}_{\eta^*}, \alpha_{\theta^*}, \beta_{\eta^*}\}$ est une solution de problème PV.Cette solution a la régularité exprimé dans (2.2.7)-(2.2.10) ; cela découle des régularités des solutions aux problèmes P_V^η, P_V^θ et P_V^β.En outre, il résulte de (2.2.7), (2.1.12) et (2.1.13) qua $\boldsymbol{\sigma}_{\eta^*} \in L^2(0, T; \mathcal{H})$. Choisir maintenant $v = \varphi$ dans (2.2.4)où $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)^d$,et l'utilisation (2.1.18) rt (2.1.26) nous trouvons

$$\rho\ddot{\mathbf{u}}(t) = \operatorname{Div} \boldsymbol{\sigma}(t) + \mathbf{f}_0(t), \quad \text{p.p. } t \in (0, T).$$

Puis hypothèses (2.1.18) et (2.1.19),la régularité exprimée en (2.2.7) et l'égalité ci-dessus signifie que $\operatorname{Div} \boldsymbol{\sigma} \in L^2(0, T; V')$ ce qui montre que $\boldsymbol{\sigma} \in L^2(0, T; \mathcal{H})$.

Unicité

Soit $\{\mathbf{u}_{\eta^*}, \boldsymbol{\sigma}_{\eta^*}, \alpha_{\theta^*}, \beta_{\eta^*}\ \}$ être la solution de PV obtenu ci-dessus et laissez $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma},\ \alpha,\ \beta\}$ soit une autre solution qui satisfait (2.2.7)-(2.3.10).

On note $\boldsymbol{\eta} \in L^2(0,T;V')$ et $\theta \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ les fonctions

$$(\boldsymbol{\eta}(t), \mathbf{v})_{V'\times V} = (\mathcal{G}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t), \alpha(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + j(\beta(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}), \tag{2.3.36}$$

$$\theta(t) = \phi(\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{u}(t), \alpha(t)). \tag{2.3.37}$$

L'égalités (2.3.34), (2.3.36) et (2.3.37) qui la condition initiale $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$ signifie que $\mathbf{u}$ est une solution de P_V^{η} et comme il résulte du lemme 5 que ce problème a une solution unique, notée $\mathbf{u}_\eta$ nous concluons que

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_\eta. \tag{2.3.38}$$

Ensuite, (2.2.5), (2.3.37) et (2.3.38) et la condition initiale $\beta(0) = \beta_0$ implique que β est un solution de P_V^{β} depuis le lemme 6 montre que le problème a une solution unique, notée β_η, nous obtenons

$$\beta = \beta_\eta. \tag{2.3.39}$$

L'égalités (2.2.3), (2.3.37) et la condition initiale $\alpha(0) = \alpha_0$ impliquent maintenant que α est une solution de P_V^{θ} du lemme 7 problème P_V^{θ} a une solution unique, notée α_θ et il s'ensuit que

$$\alpha = \alpha_\theta. \tag{2.3.40}$$

En utilisant (2.3.24) et (2.3.36)-(2.3.40), nous concluons que $\Lambda(\boldsymbol{\eta}, \theta) = (\boldsymbol{\eta}, \theta)$ et par l'unicité du point de Λ fixe, il s'ensuit que

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}^*, \quad \theta = \theta^*. \tag{2.3.41}$$

L'unicité de la solution est maintenant une conséquence de (2.3.38)-(2.3.40) avec l'égalité $\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}) + \mathcal{G}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \alpha)$.

Chapitre 3

Problème de contact bilatéral avec adhésion et endommagement

Dans ce chapitre, on considère un problème de contact sans frottement avec adhésion dans un processus dynamique. Le matériau est viscoélastique avec endommagement. Le processus d'adhésion sur la surface de contact est modélisé par une variable interne de surface appellée champ d'adhésion. L'endommagement causé par les déformations élastiques du matériau est modélisé par une variable interne du corps appellée champ d'endommagement.

Le problème est formulé par un système d'équations et d'inéquations aux dérivées partielles contenant l'équation de mouvement ou d'équilibre du corps, la loi de comportement du matériau avec endommagement, une inclusion du type parabolique modélisant le champ d'endommagement, une équation différentielle modélisant le champ d'adhésion et les conditions aux limites auxquelles il est soumis.

Ce chapitre est divisé en trois sections. Dans la première section, nous présentons le problème mécanique, puis nous indiquons les hypothèses sur les données. Dans la deuxième section, nous décrivons la formulation variationnelle du problème mécanique. Enfin, dans la troisième section, nous étudions l'existence et l'unicité d'une solution faible du problème mécanique.

Les techniques employées sont basées sur les résultats des équations variationnelles et la théorie des opérateurs monotones, suivi par les arguments du point fixe. Les résultats de cette partie on fait l.objet de la communication [2].

3.1 Formulation du problème mécanique-Hypothèses

Nous considérons un corps viscoélastique qui à l'instant $t = 0$ occupe un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $(d = 2, 3)$ de frontière régulière, constitué de trois parties disjointes Γ_1, Γ_2 et Γ_3 tels que $mes\Gamma_1 > 0$. Soit $T > 0$ et soit $[0, T]$ l'intervalle de temps en question.

Ce corps est encastré sur $\Gamma_1 \times (0, T)$, dans une structure fixe. Sur $\Gamma_2 \times (0, T)$ agissent des tractions surfaciques de densité f_2, et dans $\Omega \times (0, T)$ agissent des forces volumiques de densité f_0 et en adhésion avec une base sur la partie Γ_3 de sa frontière. Avec ces considérations, on peut formuler

Le problème mécanique qu'on étudie qui est le problème **P2** du premier chapitre.

Problèm P

Trouver le champ des déplacements $\mathbf{u} : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^d$, le champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{S}^d$, le champ d'endommagement $\alpha : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ et le champ d'adhésion $\beta : \Gamma_3 \times [0,T] \to [0,1]$ tel que

$$\rho\ddot{\mathbf{u}} = \operatorname{Div}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 \quad \text{das } \Omega \times (0,T), \tag{3.1.1}$$

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)) + \mathcal{G}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t),\alpha) \quad \text{dans } \Omega \times (0,T), \tag{3.1.2}$$

$$\dot{\alpha} - k\Delta\alpha + \partial\varphi_K(\alpha) \ni \phi(\varepsilon(\mathbf{u}),\alpha), \tag{3.1.3}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0,T), \tag{3.1.4}$$

$$\boldsymbol{\sigma\nu} = \mathbf{f}_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0,T), \tag{3.1.5}$$

$$\mathbf{u}_\nu = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0,T), \tag{3.1.6}$$

$$-\boldsymbol{\sigma}_\tau = p_\tau(\beta, \mathbf{u}_\tau) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0,T), \tag{3.1.7}$$

$$\dot{\beta} = H_{ad}(\beta, R(|u_\tau|)) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0,T), \tag{3.1.8}$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\nu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times (0,T), \tag{3.1.9}$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{v}_0, \quad \alpha(0) = \alpha_0 \quad \text{dans } \Omega, \tag{3.1.10}$$

$$\beta(0) = \beta_0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \tag{3.1.11}$$

L'équation (3.1.1) représente l'équation du mouvement, où f_0 est la densité des forces volumiques agissant sur le corps déformable Ω et ρ désigne la densité de masse. la relation (3.1.2) représente la loi de comportement viscoélastique non linéaire avec endommagement introduit dans chapiter 1, l'évolution du champ d'endommagement est régie par l'inclusion (3.1.3), où ϕ est la fonction source d'endommagement, supposé être un rad sa fonction générale des souches et endommager lui-même, et $\partial\varphi_K$ est le sous-différentiel de la fonction indicatrice des endommages admissibles fonctions définies K. Les conditions (3.1.4)-(3.1.5) sont les conditions déplacement-traction. Les conditions (3.1.6)-(3.1.8) représentent les conditions de contact avec adhésion sur la partie Γ_3 de la frontière Ω. L'équation (3.1.9) représente un homogène condition limite Newmann où $\dfrac{\partial\alpha}{\partial\nu}$ représente la normale dérivé de α.

Dans (3.1.10) nous considérons les conditions initiales où $\mathbf{u}_0$ est le déplacement initial, $\mathbf{v}_0$ la vitesse initiale et α_0 l'endommagement initial. Enfin, (3.1.11) est la condition initiale, dans laquelle β_0 désigne l'adhésion initiale.

Pour l'étude du problème **P**, on considère les hypothèses suivantes :

L'opérateur de viscosité $\mathcal{A} : \Omega \times S^d \to \mathbb{S}^d$ satisfait

$$\left\{\begin{array}{l} \text{(a) Il existe } \mathcal{C}_1^{\mathcal{A}},\ \mathcal{C}_2^{\mathcal{A}} > 0 \ \text{ tel que} \\ \qquad \|\mathcal{A}(x,\zeta)\| \le \mathcal{C}_1^{\mathcal{A}}\|\zeta\| + \mathcal{C}_2^{\mathcal{A}} \quad \forall\zeta \in \mathbb{S}_d \text{ p.p. } x \in \Omega; \\ \text{(b) Il existe } m_{\mathcal{A}} > 0 \text{ tel que} \\ \qquad (\mathcal{A}(x,\zeta_1) - \mathcal{A}(x,\zeta_2)) \cdot (\zeta_1 - \zeta_2) \ge m_{\mathcal{A}}\|\zeta_1 - \zeta_2\|^2 \\ \qquad \forall\zeta_1,\zeta_2 \in \mathbb{S}_d,\ p.p. x \in \Omega; \\ \text{(c) L'application } x \to \mathcal{A}(x,\zeta) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega \\ \ \text{pour tout } \zeta \in \mathbb{S}_d; \\ \text{(d) l'application } \zeta \to \mathcal{A}(x,\zeta) \text{ est continue sur } \mathbb{S}_d, \text{ p.p. } x \in \Omega. \end{array}\right. \tag{3.1.12}$$

L'opérateur d'élasticité

$$\mathcal{G} : \Omega \times \mathbb{S}^d \to \mathbb{S}^d \text{ satisfait la condition (2.1.13).} \tag{3.1.13}$$

La fonction de la source d'endommagement

$$\phi : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \text{ satisfait la condition (2.1.14).} \tag{3.1.14}$$

La fonction de contact tangentiel

$$p_\tau : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, \text{ satisfait la condition (2.1.16).} \tag{3.1.15}$$

La fonction d'adhésion $H_{ad} : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \times [0, L] \to \mathbb{R}$ satisfait

$$\left\{\begin{array}{l}
\text{(a) Il existe } L_{Had} > 0 \text{ tel que} \\
\quad |H_{ad}(\mathbf{x}, b_1, r) - H_{ad}(\mathbf{x}, b_2, r)| \leq L_{Had}|b_1 - b_2| \\
\quad \forall b_1, b_2 \in \mathbb{R}, \quad r \in [0, L], \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3, \text{ et} \\
\quad |H_{ad}(\mathbf{x}, b_1, r_1) - H_{ad}(\mathbf{x}, b_2, r_2)| \leq L_{Had}(|b_1 - b_2| + |r_1 - r_2|) \\
\quad \forall b_1, b_2 \in [0, 1], \quad r_1, r_2 \in [0, L], \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3, \\
\text{(b) L'application } \mathbf{x} \mapsto H_{ad}(\mathbf{x}, b, r) \text{ est Lebesgue measurable sur } \Gamma_3, \\
\quad \forall b \in \mathbb{R}, \quad r \in [0, L], \\
\text{(c) L'application } (b, r) \mapsto H_{ad}(\mathbf{x}, b, r) \text{ est continu sur } \mathbb{R} \times [0, L], \\
\quad \text{p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3, \\
\text{(d) } H_{ad}(\mathbf{x}, 0, r) = 0, \quad \forall r \in [0, L], \quad \text{p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3, \\
\text{(e) } H_{ad}(\mathbf{x}, b, r) \geq 0, \quad \forall b \leq 0, \quad r \in [0, L], \quad \text{p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3 \text{ and} \\
\quad H_{ad}(\mathbf{x}, b, r) \leq 0 \quad \forall b \geq 1, \quad r \in [0, L], \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3.
\end{array}\right. \tag{3.1.16}$$

On note que si $\beta \in L^\infty(\Gamma_3)$et $r : \Gamma_3 \to \mathbb{R}$ est une fonction mesurable, alors les conditions (3.1.16) impliquent que $x \to H_{ad}(x, \beta(x), Rr(x)) \in L^\infty(\Gamma_3)$.

On suppose que la densité de masse satisfait

$$\rho \in L^\infty(\Omega) \text{ et qu'il existe } \rho^* > 0 \text{ tel que} \rho(x) \geq \rho^* \text{ p.p. } x \in \Omega, \tag{3.1.17}$$

et que les forces volumiques et de traction surfacique ont la régularité

$$\mathbf{f}_0 \in L^2(0, T; H), \qquad \mathbf{f}_2 \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_2)^d). \tag{3.1.18}$$

Finallement, nous supposons que les données initiales remplissent les conditions suivantes

$$\mathbf{u}_0 \in V, \quad \mathbf{v}_0 \in H, \tag{3.1.19}$$

$$\alpha_0 \in K, \tag{3.1.20}$$

$$\beta_0 \in L^\infty(\Gamma_3) \text{ et } 0 \leq \beta_0 \leq 1 \text{ p.p. on } \Gamma_3. \tag{3.1.21}$$

Nous définissons la forme bilinéaire $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ par la condition (2.1.23)

Pour l'étude du problème P, on définit le sous-espace fermé V de H_1 par

$$\mathbb{V} = \{\mathbf{v} \in H_1 \ \ | \quad \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_1, \quad \mathbf{v}_\nu = 0 \text{ sur } \Gamma_3\} \tag{3.1.22}$$

Dans la suite nous définissons sur l'espace $H = L^2(\Omega)^d$ un nouveau produit scalaire donné par

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_H = (\rho\mathbf{u}, \mathbf{v})_H, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H, \tag{3.1.23}$$

et soit $\| \cdot \|_H$ la norme associée i.e.

$$|\mathbf{v}|_H = (\rho\mathbf{v}, \mathbf{v})_H^{\frac{1}{2}}, \quad \forall\, \mathbf{v} \in H. \tag{3.1.24}$$

En utilisant l'hypothèse (3.1.17), il s'ensuit que $\|\cdot\|_H$ et $|\cdot|_H$ des normes équivalentes sur H. En outre, l'inclusion de $(V, |\cdot|_V)$ dans $(H, \|\cdot\|_H)$ est continue et dense. Nous notons dans la suite par V', l'espace dual de V. Identifiant H avec son propre dual nous pouvons écrire

$$V \subset H \subset V'. \tag{3.1.25}$$

Nous utilisons la notation $(\cdot,\cdot)_{V'\times V}$ pour représenter la dualité entre V' et V. Nous avons

$$(\mathbf{u},\mathbf{v})_{V'\times V} = (\mathbf{u},\mathbf{v})_H, \quad \forall \mathbf{u} \in H, \forall \mathbf{v} \in V. \tag{3.1.26}$$

Finallement, nous noterons par $|\cdot|_{V'}$ la norme sur l'espace dual V'.

Le théorème de représentation de Riesz, entraine l'existence d'un élément $\mathbf{f}(t) \in V'$ tel que

$$(\mathbf{f}(t),\mathbf{v})_{V'\times V} = \int_\Omega \mathbf{f}_0(t).\mathbf{v}dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2(t).\mathbf{v}d\Gamma, \quad \forall \mathbf{v} \in V, \text{ p.p. } t \in (0,T). \tag{3.1.27}$$

Soit$j : L^\infty(\Gamma_3) \times V \times V \to \mathbb{R}$ la fonctionnelle

$$j(\beta,\mathbf{u},\mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} p_\tau(\beta,\mathbf{u}_\tau).\mathbf{v}_\tau d\Gamma, \quad \forall \beta \in L^\infty(\Gamma_3), \quad \forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in V. \tag{3.1.28}$$

Gardant à l'esprit (3.1.17), on observe que l'intégrale (3.1.28) est bien définie et on note que la condition (3.1.18) implique

$$\mathbf{f} \in L^2(0,T;V'). \tag{3.1.29}$$

3.2 Formulation variationnelle

Retournons maintenant à la formulation variationnelle du problème mécanique **P**. Pour cela, nous supposons dans la suite que $\{\mathbf{u},\boldsymbol{\sigma},\alpha,\beta\}$ sont des fonctions régulières satisfaisant (3.1.1)-(3.1.11) et soit $\mathbf{v} \in V$, $t \in (0,T)$.

En utilisant la formule de Green et (3.1.1) nous avons

$$(\rho\ddot{\mathbf{u}}(t),\mathbf{v})_H + (\boldsymbol{\sigma}(t),\varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} = \int_\Omega \mathbf{f}_0(t)\cdot\mathbf{v}dx + \int_\Gamma \boldsymbol{\sigma}(t)\nu\cdot\mathbf{v}d\Gamma.$$

Ensuite, par (3.1.4), (3.1.5), (3.1.23), (3.1.26) et (3.1.27) nous trouvons

$$(\ddot{\mathbf{u}}(t),\mathbf{v})_{V'\times V} + (\boldsymbol{\sigma}(t),\varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} = (\mathbf{f}(t),\mathbf{v})_{V'\times V} + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}\nu\cdot\nu d\Gamma \quad \forall v \in H_1, \tag{3.2.1}$$

Il s'ensuit maintenant de (3.1.6) et (3.1.7) que

$$\boldsymbol{\sigma}\nu\cdot\mathbf{v} = \sigma_\nu\cdot\mathbf{v}_\nu + \sigma_\tau\cdot v_\tau = 0 - p_\tau(\beta,u_\tau)v_\tau \quad \text{sur } \Gamma_3\times(0,T),$$

et par conséquent, de (3.1.28) et de (3.2.1) nous trouvons

$$(\mathbf{u}(t),\mathbf{v})_{V'\times V} + (\boldsymbol{\sigma}(t),\varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + j(\beta(t),\mathbf{u}(t),\mathbf{v}) = (\mathbf{f}(t),\mathbf{v})_{V'\times V}. \tag{3.2.2}$$

Pour conclure, de (3.1.2), (2.2.9)-(3.1.11) et (3.2.2) nous obtenons la formulation variationnelle suivante du problème mécanique **P**.

Problème P_V : Trouver le champ des déplacements u : $[0,T] \to \mathbb{V}$, et le champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma} : [0,T] \to \mathcal{H}$ le champ endommagement $\alpha : [0,T] \to H^1(\Omega)$ et le champ d'adhésion $\beta : [0,T] \to L^\infty(\Gamma_3)$ tels que

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)) + \mathcal{G}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t), \alpha) \quad \text{p.p. } t \in (0,T), \tag{3.2.3}$$

$$\begin{aligned} \alpha(t) \in K, \quad & (\dot{\alpha}(t), \zeta - \alpha(t))_{L^2(\Omega)} + a(\alpha(t), \zeta - \alpha(t)) \\ & \geq (\phi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)), \alpha(t)), \zeta - \alpha(t))_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \zeta \in K, \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

p.p.$t \in [0,T]$,

$$(\ddot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{v})_{V' \times V} + (\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + j(\beta(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}) = (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_{V' \times V}, \quad \forall \mathbf{v} \in V, \tag{3.2.5}$$

p.p.$t \in [0,T]$,

$$\dot{\beta}(t) = H_{ad}(\beta(t), R(|\mathbf{u}_\tau(t)|)), \quad 0 \leq \beta(t) \leq 1 \quad \text{p.p. } t \in [0,T], \tag{3.2.6}$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{v}_0, \quad \alpha(0) = \alpha_0, \quad \beta(0) = \beta_0. \tag{3.2.7}$$

Nous remarquons que le problème variationnel PV est formulée en termes de déplacement, stressfield, terrain de endommagement et champ d'adhérence. L'existence d'une unique solution de problème PV est déclaré et prouvé dans la section suivante.

Le résultat principal, en ce qui concerne le problème bien posé le problème de PV est le suivant.

Théorème 3.2.1 *Supposons que* (3.1.12)-(3.1.21) *détiennent. Alors il existe une unique solution* $\{u, \sigma, \alpha, \beta\}$ *qui satisfait*

$$\mathbf{u} \in H^1(0,T;V) \cap C^1(0,T;H), \qquad \ddot{\mathbf{u}} \in L^2(0,T;V'), \tag{3.2.8}$$

$$\boldsymbol{\sigma} \in L^2(0,T;\mathcal{H}), \qquad \operatorname{Div} \boldsymbol{\sigma} \in L^2(0,T;V'), \tag{3.2.9}$$

$$\alpha \in W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1,(\Omega)) \tag{3.2.10}$$

$$\beta \in W^{1,\infty}(0,T;L^\infty(\Gamma_3)). \tag{3.2.11}$$

A quadruplet $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \alpha, \beta\}$ qui satisfait (3.2.3)-(3.2.7) est appelé solution faible pour le problème P . Nous concluons que, dans les hypothèses énoncées , le problème (3.1.1)-(3.1.11) a une satisfaying unique solution (3.2.8)-(3.2.11). La preuve du théorème 3.2.1 sera réalisée en plusieurs étapes et est basé sur les équations d'évolution de la théorie avec les opérateurs monotones , un argument de point fixe et une existence classique et résultat d'unicité pour les inégalités paraboliques . cette fin , nous supposons dans la suivant que (3.1.12)-(3.1.21) tenir. Ci-dessous, C désigne un positif générique constante qui peut dépendre de Ω, Γ_1, Γ_2, Γ_3, $\mathcal{A}$, $\mathcal{G}$, p_τ, L et T, mais ne dépend pas de t et sur le reste des données d'entrée , et dont la valeur peut changer de endroit à l'autre. De plus, pour des raisons de simplicité , nous Supress , dans ce qui suit, la dépendance explicite des différentes fonctions sur $\mathbf{x} \in \Omega \cup \Gamma$.

La preuve du théorème 3.2.1 sera fournie dans la section suivante.

3.3 Existence et unicité de la solution

Soit $\boldsymbol{\eta} \in L^2(0,T;V')$ être proposée. Dans la première étape, nous considérons le problème variationnel suivant.

Problème P_V^η

Trouver le champ déplacement $\mathbf{u}_\eta : [0,T] \to V$ tel que

$$(\ddot{\mathbf{u}}_\eta(t), \mathbf{v})_{V'\times V} + (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_\eta(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(v))_{\mathcal{H}} + (\boldsymbol{\eta}(t), \mathbf{v})_{V'\times V} = (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_{V'\times V}, \quad \forall \mathbf{v} \in V, \ \text{p.p.} t \in (0,T), \tag{3.3.1}$$

$$\mathbf{u}_\eta(0) = \mathbf{u}_0, \quad \dot{\mathbf{u}}_\eta(0) = \mathbf{v}_0. \tag{3.3.2}$$

Pour résoudre un problème P_V^η, nous appliquons une existence abstraite et résultat d'unicité qui rappellent pour la commodité du lecteur. Soit V et H la place des espaces de Hilbert réels tels que V est dense dans H et la inclusion carte est continue, H est identifié par son double et avec un sous-espace de V' ie, $V \subset H \subset V'$ nous dire que ces inclusions définissent un Gelfand triple. Les notations $|\cdot|_V$, $|\cdot|_{V'}$ et $(\cdot,\cdot)_{V'\times V}$ représenter les normes sur V et sur V' et la liaison de la dualité entre eux, respectivement.

Nous appliquons à problème P_V^η.

Lemme 8 *Il existe une unique solution du problème de P_V^η, et qui satisfait (3.2.8)*

Preuve.

Démonstration du lemme (8), en utilisant les memes argument du lemme (4).

On note par $\mathbf{u}_\eta$ la solution de problème P_V^η obtenue dans le lemme 8. ■

Dans la deuxième étape, nous utilisons le champ de déplacement $\mathbf{u}_\eta$ obtenu dans Lemme (8) et considérer le problème de valeur initiale suivant.

Problèm P_V^β

Trouver le domaine de adhésion $\beta_\eta : [0,T] \to L^\infty(\Gamma_3)$ tel que

$$\dot{\beta}_\eta(t) = H_{ad}(\beta_\eta(t), R(|\mathbf{u}_{\eta\tau}(t)|)), \quad \text{p.p. } t \in (0,T), \tag{3.3.3}$$

$$\beta_\eta(0) = \beta_0. \tag{3.3.4}$$

Nous avons le résultat suivant.

Lemme 9 *Il existe une uniques solution du problème P_V^β et qui satisfait* (3.2.11) *et verifie de plus,*

$$0 \leq \beta_\eta(t) \leq 1, \ \textit{pour tout } t \in [0,T], \textit{p.p. } t \in \Gamma_3, \tag{3.3.5}$$

et il existe une constante positive C telle que pour $\eta_1, \eta_2 \in C([0,T];V)$, on a

$$\|\beta_{\eta_1}(t) - \beta_{\eta_2}(t)\|^2_{L^2(\Gamma_3)} \leq C \int_0^t \|u_{\eta_1}(s) - u_{\eta_2}(s)\|^2_V ds \quad \forall t \in [0,T] \textit{p.p. sur } \Gamma_3 \tag{3.3.6}$$

Preuve.

Soit $\eta \in C([0,T];V)$ fixé, et pour la simplicité nous supprimons la dépendance de diverses fonctions de $x \in \Gamma_3$. Notons que les égalités et les inégalités ci-dessous restent valable p.p. sur Γ_3.

Considérons l'application $F : [0,T] \times L^\infty(\Gamma_3) to L^\infty(\Gamma_3)$ défini par

$$F(t,\beta) = H_{ad}(\beta, R(\|\mathbf{u}_\tau(t)\|),$$

pour $t \in [0,T]$ et$\beta \in L^\infty(\Gamma_3)$.

Il est facile de vérifier que F est de Lipschitz continue par rapport à la deuxième variable, uniformement en temps en outre, pour tout $\beta \in L^\infty(\Gamma_3)$, l'application $t \to F(t,\beta)$ appartient à $L^\infty(0,T;L^\infty(\Gamma_3))$.

Ainsi, l'existence et l'unicité de la solution β_η de (3.3.3) s'ensuit d'une version du théorème Cauchy-Lipschitz, voir chapitre 2 théorème (3.2.1).

Pour vérifier (3.3.5) supposons, que $\beta_\eta(t_0) < 0$ pour un certain $t_0 \in [0,T]$.

Sous la condition (3.1.21) on a $0 \leq \beta_\eta(0) \leq 1$ et, l'application $t \to \beta(t) : [0,T] \to \mathbb{R}$ est continue, on peut trouver $t_1 \in [0,t_0)$ tel que $\beta_\eta(t_1) = 0$.

Maintenant, soit $t_2 = \sup\{t \in [t_1,t_0], \quad \beta_\eta(t) = 0\}$ quand $t_2 < t_0, \quad \beta_\eta(t_2) = 0$ et $\beta_\eta(t) < 0$ pour $t \in (t_2,t_0]$.

La condition (3.1.16)(e) implique que $\dot{\beta}_\eta(t) \geq 0$ pour $t \in (t_2,t_0]$, donc $\beta_\eta(t_0) \geq \beta_\eta(t_2) = 0$, ce qui est une contradiction.

Par un argument semblable on montre que $\beta_\eta(t) \leq 1$ pour tout $t \in [0,T]$.

Soit $t \in [0,T]$ fixé et soit $\eta_i \in C([0,T];V)$ pour $i = 1,2$. Alors

$$\beta_i(t) = \beta_0 + \int_0^t H_{ad}(\beta_i(s), R(\|u_{i\tau}(s)\|))\, ds \quad i = 1,2 \tag{3.3.7}$$

où $\beta_i = \beta_{\eta_i}$ et $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_{\eta_i}$. En utilisant (3.3.7) et (3.1.13)(a) et la définition de l'opérateur R(**??**) on obtient

$$|\beta_1(t) - \beta_2(t)| \leq \int_0^t |H_{ad}(\beta_1(s), R(\|u_{1\tau}(s)\|) - H_{ad}(\beta_2(s), R(\|u_{2\tau}(s)\|)|ds$$

$$|\beta_1(t)-\beta_2(t)| \le L_{Had}\int_0^t |\beta_1(s)-\beta_2(s)|ds + L_{Had}\int_0^t |u_{1\tau}(s)-u_{2\tau}(s)t|ds$$

Nous appliquons maintenant l'inégalité de Gronwall de déduire que

$$|\beta_1(t)-\beta_2(t)|^2 \le C\int_0^t |u_{1\tau}(s)-u_{2\tau}(s)|^2 ds$$

Intégrant cette inégalité sur Γ_3 et utilisons (1.2.6) on obtient

$$\|\beta_1(t)-\beta_2(t)\|^2_{L^2(\Gamma_3)} \le C\int_0^t \|u_1(s)-u_2(s)\|^2_V ds, \quad \forall\, t\in[0,T], \tag{3.3.8}$$

■

Dans la troisième étape, nous laissons $\theta \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ accordée et considérer le problème variationnel suivant pour le champ d'endommagement.

Problèm P_V^θ

Trouver le champ d'endommagement $\alpha_\theta : [0,T] \to H^1(\Omega)$ tel que

$$\begin{aligned} \alpha_\theta(t)\in K, \quad & (\dot{\alpha_\theta}(t), \zeta-\alpha_\theta(t))_{L^2(\Omega)} + a(\alpha_\theta(t),\zeta-\alpha_\theta(t)) \\ & \ge (\phi(t),\zeta-\alpha_\theta(t))_{L^2(\Omega)}, \quad \forall\zeta\in K,\ \text{p.p. } t\in(0,T), \end{aligned} \tag{3.3.9}$$

$$\alpha_\theta(0)=0. \tag{3.3.10}$$

Pour résoudre P_V^θ nous rappelons le résultat standard suivant pour inégalités variationnelles paraboliques

Lemme 10 *Le problème R_V^θ a une solution unique α_θ tel que*

$$\alpha_\theta \in H^1(0,T;L^2(\Omega)\cap\ L^2(0,T;H^1(\Omega)). \tag{3.3.11}$$

Preuve. Démonstration du lemme 10, en utilisant les memes argument du lemme 6.

On note par α_θ la solution de problème P_V^θ obtenue dans le lemme 10. ■

Enfin, à la suite de ces résultats et d'utiliser les propriétés de l'opérateur $\mathcal{G}$ le fonctionnelle j et la fonction S pour $t\in[0,T]$, nous considérons l'élément

$$\Lambda(\boldsymbol{\eta},\theta)(t) = (\Lambda^1(\boldsymbol{\eta},\theta)(t), \Lambda^2(\boldsymbol{\eta},\theta)(t)) \in V'\times L^2(\Omega), \tag{3.3.12}$$

définis par les égalités

$$(\Lambda^1(\boldsymbol{\eta},\theta)(t),\mathbf{v})_{V'\times V} = (\mathcal{G}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\eta(t),\alpha_\theta(t)),\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + j(\beta_\eta(t),\mathbf{u}_\eta(t),\mathbf{v}), \quad \forall\mathbf{v}\in V, \tag{3.3.13}$$

$$(\Lambda^2(\boldsymbol{\eta},\theta)(t),\mathbf{v})_{V'\times V} = \phi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\eta(t)),\alpha_\theta(t)), \quad \forall\mathbf{v}\in V. \tag{3.3.14}$$

Nous avons le résultat suivant.

Lemme 11 *Pour* $(\boldsymbol{\eta},\theta)\in L^2(0,T;V'\times L^2(\Omega))$, *la fonction* $\Lambda(\boldsymbol{\eta},\theta):[0,T]\to V'\times L^2(\Omega)$ *est continue, et il existe un unique, élément* $(\boldsymbol{\eta}^*,\theta^*)\in L^2(0,T;V'\times L^2(\Omega))$ *tel que* $\Lambda(\boldsymbol{\eta}^*,\theta^*)=(\boldsymbol{\eta}^*,\theta^*)$.

Preuve. .

Soit $(\boldsymbol{\eta},\theta)\in L^2(0,T;V'\times L^2(\Omega))$ et $t_1,t_2\in[0,T]$. Utilisation (3.1.13),(3.1.14) et (3.1.15), nous avons

$$\begin{aligned}\|\Lambda^1(\boldsymbol{\eta},\theta)(t_1)-\Lambda^1(\boldsymbol{\eta},\theta)(t_2)\|_{V'} &\le \|\mathcal{G}\varepsilon(u_\eta(t_1),\alpha_\theta(t_1))-\mathcal{G}\varepsilon(u_\eta(t_2)-\alpha_\theta(t_2))\|_{\mathcal{H}}\\ &\quad + C_0|p_\tau(\beta_\eta(t_1),u_{\eta\tau}(t_1))-p_\tau(\beta_\eta(t_2),u_{\eta\tau}(t_2))\|_{L^2(\Gamma_3)}\end{aligned}$$

et gradant à l'esprit (3.1.13) et (3.1.15) nous trouveons

$$\begin{aligned}\|\Lambda^1(\boldsymbol{\eta},\theta)(t_1)-\Lambda^1(\boldsymbol{\eta},\theta)(t_2)\|_{V'} &\le C\|u_\eta(t_1)-u_\eta(t_2)\|_V\\ &+\|\alpha_\theta(t_1)-\alpha_\theta(t_1)\|_{L^2(\Omega)}+\|\beta_\eta(t_1)-\beta_\eta(t_1)\|_{L^2(\Gamma_3)}\end{aligned}\qquad(3.3.15)$$

Rappelons que ci-dessus $\mathbf{u}_{\eta\tau}$ désignent composantes tangentielles de la fonction $\mathbf{u}_\eta$. Ensuite, en raison les régularités de $\mathbf{u}_\eta$, α_θ et β_η exprimée dans (3.2.8), (3.2.10) et (3.2.11) respectivement, on déduit de (3.3.16) que $\Lambda^1(\boldsymbol{\eta},\theta)$ $C(0,T;V')$. Par un argument de similaire, à partir de (3.3.14) et (3.1.14) il s'ensuit que

$$\|\Lambda^2(\boldsymbol{\eta},\theta)(t_1)-\Lambda^2(\boldsymbol{\eta},\theta)(t_2)\|_{L^2(\Omega)}\le C(\|\mathbf{u}_\eta(t_1)-\mathbf{u}_\eta(t_2)\|_V+\|\alpha_\theta(t_1)-\alpha_\theta(t_2)\|_{L^2(\Omega)}).\quad(3.3.16)$$

Therefore, $\Lambda^2(\boldsymbol{\eta},\theta)\in C(0,T;L^2(\Omega))$ et $\Lambda(\boldsymbol{\eta},\theta)\in C(0,T;V'\times L^2(\Omega))$

Soit maintenant $(\boldsymbol{\eta}_1,\theta_1),(\boldsymbol{\eta}_2,\theta_2)\in L^2(0,T;V'\times L^2(\Omega))$. Nous utilisons la notation $\mathbf{u}_{\eta_i}=\mathbf{u}_i,\dot{\mathbf{u}}_{\eta_i}=\mathbf{v}_{\eta_i}=\mathbf{v}_i,\ \alpha_{\theta_i}=\alpha_i$ et $\beta_{\eta_i}=\beta_i$ for $i=1,2$ Des arguments similaires à ceux qui sont utilisés dans la preuve de (3.3.16) et (3.3.17)yield

$$\begin{aligned}\|\Lambda(\boldsymbol{\eta}_1,\theta_1)(t)-\Lambda(\boldsymbol{\eta}_2,\theta_2)(t)\|^2_{V'\times L^2(\Omega)} &\le C(|\mathbf{u}_1(t)-\mathbf{u}_2(t)|^2_V\\ &+\|\alpha_1(t)-\alpha_2(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\beta_1(t)-\beta_2(t)\|^2_{L^2(\Gamma_3)}).\end{aligned}\qquad(3.3.17)$$

Nous substitude (3.3.6) dans (3.3.17) et nous utilisons (2.3.30) pour obtenir

$$\begin{aligned}\|\Lambda(\boldsymbol{\eta}_1,\theta_1)(t)-\Lambda(\boldsymbol{\eta}_2,\theta_2)(t)\|^2_{V'\times L^2(\Omega)} &\le C(\|\mathbf{u}_1(t)-\mathbf{u}_2(t)\|^2_V\\ &+\int_0^t\|\mathbf{u}_1(s)-\mathbf{u}_2(s)\|^2_V ds+\|\alpha_1(t)-\alpha_2(t)\|^2_{L^2(\Omega)}),\\ &\le C(\int_0^t\|\mathbf{v}_1(s)-\mathbf{v}_2(s)\|^2_V ds+\|\alpha_1(t)-\alpha_2(t)\|^2_{L^2(\Omega)}).\end{aligned}$$

Il en résulte maintenant de ce qui précède et les estimations (2.3.31) et (2.3.35) que

$$\|\Lambda(\boldsymbol{\eta}_1,\theta_1)(t)-\Lambda(\boldsymbol{\eta}_2,\theta_2)(t)\|^2_{V'\times L^2(\Omega)}\le C(\int_0^t\|(\boldsymbol{\eta}_1,\theta_1)(s)-(\boldsymbol{\eta}_2,\theta_2)(s)\|^2_{V'\times L^2(\Omega)}ds).$$

Réitérant cette inégalité m temps de conduit à

$$|\Lambda^m(\boldsymbol{\eta}_1,\theta_1)-\Lambda^m(\boldsymbol{\eta}_2,\theta_2)|^2_{L^2(0,T;V'\times L^2(\Omega)}\le\frac{(CT)^m}{m!}|(\eta_1,\theta_1)-(\eta_2,\theta_2)|^2_{L^2(0,T;V'\times L^2(\Omega)}.$$

Ainsi, pour m assez grand, Λ^m est une contraction sur le Banach espace $L^2(0,T;V'\times L^2(\Omega))$ et donc Λ a un unique point fixe. ■

Maintenant, nous avons tous les ingrédients nécessaires pour démontrer le théorème (3.2.1)

Existence

Soit $(\boldsymbol{\eta}^*, \theta^*) \in L^2(0,T; V' \times L^2(\Omega))$ être le point de fixe Λ donnée par (3.3.12). notons $\mathbf{u}_{\eta^*}$ la solution de problème P_V^η pour $\boldsymbol{\eta} = \eta^*$ et soit α_{θ^*} la solution du problème P_V^θ pour $\theta = \theta^*$.

Soit β_{η^*} la solution de problème P_V^β pour $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}^*$. On note $\boldsymbol{\sigma}_{\eta^*}$ la fonction donnée par $\boldsymbol{\sigma}_{\eta^*}(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_{\eta^*}(t)) + \mathcal{G}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{\eta^*}(t), \alpha_{\eta^*}(t))$.

Utilisation (3.1.24),(3.1.25) keeping in mind that $\Lambda^1(\boldsymbol{\eta}^*, \theta^*) = \boldsymbol{\eta}^*$; $\Lambda^2(\boldsymbol{\eta}^*, \theta^*) = \theta^*$ nous constatons que le quadruplet $\{\mathbf{u}_{\eta^*}, \boldsymbol{\sigma}_{\eta^*}, \alpha_{\theta^*}, \beta_{\eta^*}\}$ est une solution de problème PV. Cette solution a la régularité exprimé dans (3.2.8)-(3.2.11) ; cela découle des régularités des solutions aux problèmes P_V^η, P_V^θ et P_V^β. En outre, il s'ensuit from (3.2.11), (3.1.12) et (3.1.13) that $\boldsymbol{\sigma}_{\eta^*} \in L^2(0,T; \mathcal{H})$. Choisir maintenant $v = \varphi$ dans (3.2.5) où $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)^d$, et l'utilisation (3.1.17) et (3.1.28)nous trouvons

$$\rho\ddot{\mathbf{u}}(t) = \operatorname{Div}\boldsymbol{\sigma}(t) + \mathbf{f}_0(t), \quad \text{p.p. } t \in (0,T).$$

Puis hypothèses (3.1.17) et (3.1.18), la régularité exprimé dans (3.2.8) et l'égalité ci-dessus signifie que $\operatorname{Div}\boldsymbol{\sigma} \in L^2(0,T; V')$ ce qui montre que $\boldsymbol{\sigma} \in L^2(0,T; \mathcal{H})$.

Unicité

Soit $\{\mathbf{u}_{\eta^*}, \boldsymbol{\sigma}_{\eta^*}, \alpha_{\theta^*}, \beta_{\eta^*}\}$ le solution de PV obtenu ci-dessus et laissez $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \alpha, \beta\}$ une autre solution qui satisfait (3.2.8)-(3.2.11).

On note $\boldsymbol{\eta} \in L^2(0,T; V')$ et $\theta \in L^2(0,T; L^2(\Omega))$ les fonctions

$$(\boldsymbol{\eta}(t), \mathbf{v})_{V' \times V} = (\mathcal{G}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t), \alpha(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + j(\beta(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}), \tag{3.3.18}$$

$$\theta(t) = \phi(\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{u}(t), \alpha(t)). \tag{3.3.19}$$

Les égalités (3.2.3), (3.2.5) et (3.2.7) qui la condition initiale $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$ signifie que $\mathbf{u}$ est une solution de P_V^η et depuis il suit du lemme (9) que ce problème a une solution unique, notée $\mathbf{u}_\eta$ nous concluons que

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_\eta. \tag{3.3.20}$$

Ensuite, (3.2.6), (3.3.20) et (3.3.19) et la condition initiale $\beta(0) = \beta_0$ implique que β est un solution de P_V^β depuis le lemme (10) montre que le problème a une solution unique, notée β_η, nous obtenons

$$\beta = \beta_\eta. \tag{3.3.21}$$

Les égalités (3.2.4), (3.3.19) et la condition initiale $\alpha(0) = \alpha_0$ impliquent maintenant que α est une solution de P_V^θ du lemme (11) problème P_V^θ a une solution unique, notée α_θ et il s'ensuit que

$$\alpha = \alpha_\theta. \tag{3.3.22}$$

Utilisation (3.3.22) et (3.3.18)-(3.3.22), nous concluons que $\Lambda(\boldsymbol{\eta}, \theta) = (\boldsymbol{\eta}, \theta)$ et par l'unicité du point fixe de Λ, il s'ensuit que

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}^*, \quad \theta = \theta^*. \tag{3.3.23}$$

L'unicité de la solution est maintenant une conséquence de (3.3.20)-(3.3.23) ainsi avec l'égalité $\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}) + \mathcal{G}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \alpha)$.

Conclusion

Dans ce mémoire, on a étudié l'existence et l'unicité de la solution de deux problèmes dynamique aux limites de contact en viscoélasticité, le premier est un problème mécanique de contact avec adhésion entre un corps viscoélastique avec endommagement et une base, le second est un problème bilatéral de contact avec adhésion et endommagement entre un corps viscoélastique et une base.

On a utilisé la formule de Green pour obtenir la formulation variationnelle de ces problèmes. Comme la frontière des corps et les données des problèmes ont des bonnes régularitées ; donc, la solution du problème mécanique et du problème variationnelle est la même.

On a montré l'existence et l'unicité de la solution des problèmes précédents par l'utilisation des arguments suivants équation variationnelle dépendant du temps, équation variationnelle d'évolution, inéquation variationnelle d'évolution du type parabolique, équation différentielle et point fixe.

Bibliographie

[1] R. S. Adams, *Sobolev spaces, Academic press*, New York(1975).

[2] A. Aissaoui, N. Hemici, *Bilateral contact problem with adhesion and damage*, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations No. 18, 1-16, (2014).

[3] M. Campo, J.R. Fernández,W. Han, M. Sofonea, *A dynamic viscoelastic contact problem with normal compliance and damage*, Finite Elem. Anal. Des. 42, (2005), pp.1-24.

[4] P. G. Ciarlet, *Elasticté Tridimensionnelle*, Masson, Paris (1986)

[5] O. Chau, M. Shillor M. Sofonea, *Dynamic frictionless contact with adhesion*, J. of Appl. Math. and Phys. (ZAMP), 55, (2004), pp.32-47.

[6] O. Chau, M. Shillor, M. Sofonea, *Dynamic Frictionless Contact with adhesion*, J. Appl. Meth. Phys. (ZAMP), 55, (2004), pp.431-465.

[7] O. Chau, J.R. Fernández, M. Shillor, M. Sofonea, *Variational and numerical analysis of a quasistatic viscoelastic contact problem with adhesion*, J. Comput. Appl. Math, 159 ,(2003), pp.431-465.

[8] M. Cocu, R. Rocca, *Existence Results for Unilateral Quasistatic Contact Problems with Friction and Adhesion*, Math. Model. and Numer. Anal. 34, (2000), pp.981-1001.

[9] A.Curien and C. *A model of adhesion added to contact with friction*, in contact Martine and MDP Monteiro Marques (Eds.),Kluwer Dordreht,2002,161-168.

[10] G. Duvaut, J. L. Lions, Inequalities in Mechanics and Physics, Springer-Verlag, Berlin, (1976).

[11] J.R. Fernandez, M. Shillor and M. Sofonea, Analysis and numerical simulations of a dynamic contact problem with adhesion, Math. Comput. Modelling, 37, (2003), pp.1317-1333.

[12] M. Frémond, *Adhérence des solides*, J Mécanique Théorique et appliquée, 6, (1987), pp.383-407.

[13] M. Frémond, *Equilibre des structures qui adhèrent à leur support*, C.R. Acad. Sci. Paris, Sér.II.295,(1982), pp.913-916.

[14] M. Frémond, B. Nedjar, *Damage in concrete : The unilateral phenomenon*, Nucl. Eng. Des. 155,(1995), pp.323-335.

[15] M. Frémond, B. Nedjar ; *Damage in gradient of damage and principle of virrtual work* , Int. J. Solids. Stuct.,33(8), pp. 1083-1103, (1996).

[16] M. Frémond, KL. Kuttler, B. Nedjar, M. Shillor, *One-dimensional models of damage*, Adv. Math. Sci. Appl. 8(2),155,(1998), pp.541-570.

[17] W. Han, M. Sofonea ; *Quasistatic Contact Problems in Viscoelasticity and Viscoplasticity*, Studies in Advanced Mathematics 30, Americal Mathematical Society, Providence, RI-Intl.Press, Sommerville, MA, (2002).

[18] W. Han, M. Sofonea ; *Numerical Analysis of a Frictionless Contact Problem for Elastic-Viscoplastic Materials*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng 190, (2000), 179-191.

[19] N. Hemici, B. Awbi,M. Sofonea ; *Viscoelastic problem contact with compliance normal and adhesion*, Annals of University of Bucarest 51 (2002) 131-142.

[20] N. Hemici, M. Sofonea ; *Analysis of dynamic bilateral contact problem with adhesion*, Proceedings of the Fourth International Conference on Applied Mathematics and Engineering Sciences, (CIMASI 2002), Casablanca (2002), CD-ROM.

[21] L. Jianu, M. Shillor, M.Sofonea ; *A viscoelastic bilateral frictionless contact problem with*, Applic.Anal 80 (2001), 233-255.

[22] L.Schwartz, *Théorie des Distributions*,Hermann,paris(1967).

[23] M. Raous, L. Cangémi, M. Cocu ; *A consistent model coupling adhesion, friction, and unilateral contact*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 177, pp. 383-399, (1999).

[24] M. Rochdi, M. Shillor, M. Sofonea ; *Analysis of a quasistatic viscoelastic problem with friction and damage*, Adv. Math. Sci. Appl., 10, pp. 173-189, (2002).

[25] L. Selmani, L. Chouchane ; *A frictionless contact problem with adhesion and damage*, Annals of University of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser. Volume 33, pp. 94-107, (2006).

[26] M. Selmani, L. Selmani ; *A Dynamic Frictionless Contact Problem with Adhesion and Damage*, Bull. Pol. Acad. Sci., Math., 55, pp. 17-34, (2007).

[27] M. Sofonea, W. Han, M. Shillor ; *Analysis and Approximation of Contact Problems with Adhesion or Damage*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 276, Chapman Hall/CRC Press, New york, (2006).

[28] W. Han, M. Sofonea, *Quasistatic Contact Problems in Viscoelasticity and Viscoplasticity*, Studies in Advanced Mathematics 30, Americal Mathematical Society, Providence, RIIntl.Press, Sommerville, MA, (2002)

[29] W. Han, M. Sofonea, *Numerical Analysis of a Frictionless Contact Problem for ElasticViscoplastic Materials*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng 190, (2000), pp.179-191.

[30] N. Kikuchi, T.J. Oden, *Contact Problems Elasticity*, A Study of varitional Inequalitties and Finite Element MethodsSIAM, Philadelphia,(1988).