UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA
Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matière

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse

Par : MENASRIA HADDA

Thème

Existence globale d'une solution d'un système de réaction-diffusion à matrice triangulaire.

Soutenu publiquement le : 12/06/2014

Devant le jury composé de :

Yassine Gurboussa	M.A. Universié KASDI Merbah- Ouargla	Président
Salim Badija	M.A. Université KASDI Merbah- Ouargla	Examinateur
Med Tayeb Ben Moussa	M.A. Université KASDI Merbah- Ouargla	Rapporteur

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

-Aux joyaux de ma vie "mes parents" qui sont la source de ma réussite, je souhaite qu'ils trouvent à travers ce mémoire le faible témoignage de leurs efforts et sacrifices.

-A mes frères,

-A toute la famille

- A mes chers amis,

- Je tiens à remercier l'ensemble de tous les étudiants et étudiantes de ma promotion,

En fin je dédie cette mémoire à mes collègues et tous ceux qui me sont chers.

Remerciement

Tout d'abord, je remercie Dieu qui nous guident pour terminer ce travail humble. Je tiens à remercier le professeur **Ben Moussa Memed Tayeb** qui portons en nous la sourance de ce travail, Je le souhaite la réussite dans son doctorat Je tiens également à remercier les enseignants Guerboussa Yassine et Badija Salim et Assila, Gherfi et Saide de toute l'aide donnée par nous. Je tiens à remercier tous les collègues qui m'ont accompagné pendant les années de l'étude , Gazal, yous, Rahmani, Badwi,, Nser, Achor, diyab, Mansour, Soilah, Mnasar, et Ben edab,...... Je tiens à remercier tous les collègues chers Mohammed, Ismail, Houdaifa, Haccen, Abd elmalek, Abd ejjabar, Abd elbaki, abd elkarim et bachire..... Je tiens à remercier la famille de U.G.E.L et rectorat

Table des matières

Notations

- Si Ω est un domaine de $\mathbb{R}^d (d = 1, 2, 3)$ pour les applications.
- $\overline{\Omega}$ l'adhérence de Ω.
- $\|\cdot\|_H$ la norme de H.
- $\|\cdot\|_\infty$ la norme de ∞.
- $L(H)$ l'espace des applications linéaires et continues de H dans H.
- Si de plus $[0, T]$ un intervalle de temps, $K \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq +\infty$, on note par.
- $C([0, T]; H)$ l'espace des fonctions continues de $[0, T]$ dans H.
- $\|\cdot\|_{0,H}$ la norme de $C^0([0, T]; H)$.
- $C^1([0, T]; H)$ l'espace des fonctions continument dérivables de $[0, T]$ dans H.
- $\|\cdot\|_{1,H}$ la norme de $C^1([0, T]; H)$.
- $L^p(0, T; H)$ l'espace des fonctions f mesurables de $[0, T]$ dans H.
- $\|\cdot\|_{0,p,H}$ la norme de $L^2(0, T; H)$, telles que $\int_0^T |f(t)|_H^p dt < +\infty$ avec les modifications usuelles si $p = +\infty$.
- $W^{k,p}(0, T; H)$ l'espace de Sobolev de paramètres k et p.
- $\|\cdot\|_{k,p,H}$ la norme de $W^{k,p}(0, T; H)$.
- Δf le delta de f.

- ∇f le gradient de f.
- Si H^1 et H^2 sont deux espaces de Hilbert réels, on note par
- (H^1, H^2) l'espace des applications linéaires et continues de H^2 dans H^2.
- $\|\cdot\|_{\pounds(H^1,H^2)}$ la norme de $\pounds(H^1, H^2)$

Chapitre 1

Introduction

Les systèmes de reaction-diffusion jouent un role très important dans les domaines de médecine et l'envirnoment, chime, puisque la modilisation montre que plusieurs des maladies, épidimie, polution par exemple SIDA, ont des modèles mathématiques sous forme de reaction-diffusion .
Ce travail est une contribution à l'étude de l'existence globale et du comportement asymptotique des solutions de systémes de réaction-diffusion du type suivant :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = f(u) \quad t > 0 \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases}$$

$f : X \longrightarrow X$ est une application appelée terme réactif et u_0 la donnée initiale.
Dans ce travail on a suit les pas de Kiran Mokhtar dans son article publié en(1986) ,(paris) on a choisi une autre méthode pour arriver à du méme résultat de Kiran.
Nous essayons de refaire les calculs, montrer les pasages de plus nous ajoutons à l'aide de proposition (8), la démonstration de la positivité des solutions qui est une étape essentielle dans ce genre de système.

Dans le cadre de cette problématique, notre travail consiste à l'étude de l'existence globale et du comportement asymptotique des solutions d'un système de réaction diffusion à matrice triangulaire .

Comme les équations de réaction-diffusion font partie du domaine des équations d'évolution ce travail est organisé de la façon suivante :

Dans le premier chapitre, nous commençons par rappeler brièvement quelques notions générales.

Dans le deuxième chapitre nous avons abordé la théorie des équations d'évolution non homogènes

Le troisième chapitre constitue l'objet principal de notre mémoire à l'étude d'un système de réaction diffusion à matrice de diffusion triangulaire .
Ce système entre dans le cadre des travaux réalisés par$Alikakos$[1], $Masuda$([6]), $Haraux$ $etYoukana$,.etc.

Nous avons mis en évidence une extension de résultats d'existence globale de solutions pour cette classe de systèmes en utilisant des techniques de régions invariantes et des techniques de la fonctionnelle de Lyapounov établie par Haraux et Youkana.

1.1 Modéle Mathématique :

A ce titre on peut citer un exemple d'un phénomène épidémiologique :

On considére une population d'individus "diploïdes", c'est-à-dire chez qui l'information génétique est dédoublée. On suppose qu'un certain géne sur une certaine paire de chromosomes se présente sous deux formes possibles, ou alléles, que l'on notera a et A. La population se subdivise alors en individus "homozygotes" de type aa ou AA, et "hétérozygotes" de type aA. Notons $\rho_1(t,x), \rho_2(t,x), \rho_3(t,x)$ la densité d'individus de type aa, aA, AA respectivement, au point x et à l'instant t. Supposons que les individus constituant la population se reproduisent avec un taux r (indépendant du génotype), et se déplacent aléatoirement dans l'espace suivant un mouvement brownien de constante d (également indépendante du génotype). On suppose en revanche que les taux de décés τ_1, τ_2, τ_3 des trois populations peuvent légérement différer. Alors les densités ρ_1, ρ_2, ρ_3 sont solution du systéme suivant :

$$\left\{\begin{array}{c} \dfrac{\partial \rho_1}{\partial t} - d\Delta\rho_1 = -\tau_1\rho_1 + \dfrac{r}{\rho}(\rho_1 + \dfrac{1}{2}\rho_2)^2 \quad sur(0,+\infty)\times\Omega \\ \dfrac{\partial \rho_2}{\partial t} - d\Delta\rho_2 = -\tau_2\rho_2 + \dfrac{2r}{\rho}(\rho_1 + \dfrac{1}{2}\rho_2)(\rho_3 + \dfrac{1}{2}\rho_2) \quad sur(0,+\infty)\times\Omega \\ \dfrac{\partial \rho_3}{\partial t} - d\Delta\rho_3 = -\tau_3\rho_3 + \dfrac{r}{\rho}(\rho_3 + \dfrac{1}{2}\rho_2)^2 \quad sur(0,+\infty)\times\Omega \end{array}\right.$$

ou $\rho(t,x) = \rho_1(t,x) + \rho_2(t,x) + \rho_3(t,x)$

Le facteur principal favorisant la diffusion de cette épidémie est le contact sexuel.

L'objectif primordial est d'étudier la propagation de l'épidémie Ainsi nous avons à résoudre d'abord les questions relatives à l'existence et l'unicité des solutions puis à étudier leur comportement à l'infini quand ces solutions sont partout définies.

Chapitre 2

Notation et notion générales

L'objectif de ce chapitre est de rappeler quelque notions et résultats préliminaires qui sont utiles dans les chapitres suivantes.

2.1 Opérateurs Différentiels :

Soit n un entier, on note $x = x_1....x_2$ un point(ou vecteur) de $\mathbb{R}^n$.

On appelle champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$ ube application: $V : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ qui à $x(x_1, ...x_n)$ associé $v(x) = (v_1(x), ...v_n(x))$

Pour une fonction $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, son gradient est le champ de vecteurs définie par : $gradu(x) = \nabla u(x) = (\dfrac{\partial u}{\partial x_1}(x), ..., \dfrac{\partial u}{\partial x_n}(x))$

Pour une fonction $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ on appelle divergence de V la fonction définie par $\mathrm{div}V(x) = \dfrac{\partial V}{\partial x_1}(x) + ... + \dfrac{\partial V}{\partial x_n}(x)$

On appele laplacien d'une fonction $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $\Delta u(x) = div(\nabla u)(x) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x) + ... + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}(x)$.

2.2 Espace Fonctionnels :

$C(\Omega)$ designe l'espace des fonctions continues et bornées sur Ω muni de la norme $\|u\|_{c(\Omega)} = \underset{x\in\Omega}{max}|u(x)|$

$C^k(\Omega), k \in \mathbb{N}$ désigne l'espace des fonction k fois continument différentiables sur Ω et on écrit : $C^\infty(\Omega) = \bigcap\limits_{k\geqslant 0} C^k(\Omega)$

$C^0(\Omega)$ l'espace des fonctions de $C(\overline{\Omega})$.

$L^p(\Omega)$ designe l'espace de fonctions u mesurables sur Ω $1 \leq p \leq \infty$ telle que : $\int\limits_\Omega |u|^p dx < \infty$.. muni de la norme :

$$\|u\|^p_{L^p(\Omega)} = \int\limits_\Omega |u|^p dx \qquad .u \in L^P(\Omega)$$

$L^\infty(\Omega)$ désigne l'espace de fonctions u mesurables et vérifient

$|u| \leq C$ pp(presque partout) sur Ω.ou s'est une constante positive muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty}(\Omega) = suppss|u(x)| = inf\{c, |u| < c \;\; pp \;\; sur \;\; \Omega\}$$

on définit les espace $L^p(0,T,X)$,$1 \leq p \leq \infty$ comme sur $L^p(0,T,X) = \{u : [0,T] \longrightarrow X$ mesurable,$\int_0^T \|U\|^p_x dt < \infty\}$ muni de la norme $\|u\|^P_{L^p(0,T,X)} dt = \int_0^T \|u\|^P_X dt$.

$L^\infty(0,T,X) = \{u : [0,T] \longrightarrow X$ mesurable $\underset{t\in(0,T)}{supess}\|u\|_X < \infty\}$, muni de la norme $\|u\|^p_{L^\infty(0,T,X)} = \underset{t\in(0,T)}{supess}\|u\|_X$ Naturellement on a :

$$L^P(0,T,L^P(\Omega)) = L^P((0,T)\times\Omega) \quad 1 \leq p \leq \infty$$

$\overline{H}^1$ c'est l'espace de sobolev définie par :

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \quad ,1 \leq i \leq n\}$$

muni de la norme :

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \int\limits_\Omega |u|^2 dx + \int\limits_\Omega \sum_{i=0}^n |\frac{\partial u}{\partial x_i}|^2 dx = \int\limits_\Omega |u|^2 dx + \int\limits_\Omega |\nabla u|^2 dx$$

pour $m \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq p \leq \infty$, les espace de sobolev $H^n(\Omega)$ et $W^{n,p}(\Omega)$ sont définie comme suite :

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), D^\alpha u \in L^2(\Omega) \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ vérifiant } |\alpha| \leq m\}$$

muni de la norme :

$$\|u\|^2_{H^n(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq n} \int_\Omega |D^\alpha u|^2 dx = \sum_{|\alpha|\leq n} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$W^{n,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega), D^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq m\}$

muni de la norme :

$$\|u\|^p_{n,p} = \sum_{\alpha \leq n} \|D^\alpha u\|^P_{L^P(\Omega)}$$

OU $D^\alpha = \dfrac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+....+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} .... \partial x_n^{\alpha_n}}, |\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ est la dérivée au sens des distribution.

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega), u' \in L^p(\Omega)\}$$

muni de la norme $\|u\|_{1,p} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^P}, u \in W^{1,p}(\Omega)$

$D(\Omega)$ désigne l'espace des fonction de C^∞ qui a support compact sur Ω.

$W_0^{n,p}$

$H^m(\Omega) = W^{n,2}(\Omega)$ $\qquad$ $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$.

$H_0^m = H_0^{n,2}$.

2.3 Formule de Green :

Soit Ω un ouvert borné de fontière régulière $\partial\Omega$, $V(x)$

la normale extérieure au point x, soient u une fonction de $H^2(\Omega)$ et V une fonction de $H^1(\Omega)$ Alors la formule de Green s'écrit :.

$$\int\limits_{\Omega}(\Delta u)vdx = \int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial v}vd\sigma - \int\limits_{\Omega}\nabla u\cdot\nabla vdx$$

2.4 Inégalité de Gronwall :

Soient u,v,w des fonctions continues sur un intervalle $[t_0, t_1]$

Soit $\varphi \in L^{\infty}(0,T), \varphi > 0$ et $\lambda \in L^1(0,T)$, $\lambda \geq 0$

$\exists c_1, c_2 \geq 0$ tels que $\varphi(t) \leq c_1 + c_2\int\limits_0^t \lambda(s)\varphi(s)ds$ pp sur $[0,T]$.

Alors :

$$\varphi(t) \leqslant c_1 exp(c_2\int\limits_0^t \lambda(s)ds \qquad pp\, sur\, [0,T]$$

Démonstration : $\psi(t) = c_1 + c_2\int\limits_0^t \lambda(s)\varphi(s)ds = c_1 + c_2(F(t) - F(0))$

$\Rightarrow \psi\text{'}(t) = c_2\varphi(t)\lambda(t)$ D'aprés (1) on aurait

$\psi\text{'}(t) \leqslant c_2\psi(t)\lambda(t) \Rightarrow \dfrac{\psi\text{'}(t)}{\psi(t)} \leqslant c_2\lambda(t)$

$\Rightarrow ln\psi(t) - ln\psi(0) \leqslant c_2\int\limits_0^t \lambda(s)ds$

$\Rightarrow \psi(t) \leqslant exp(c_2\int\limits_0^t \lambda(s)ds\psi(0))$

avec $ln\psi(0) = c_1$ D'ou $\psi(t) \leqslant c_1(c_2\int\limits_0^t \lambda(s)ds)$

comme $\varphi(T) \leqslant \psi(t)$.

Chapitre 3

Equations d'évolution

3.1 Semi-groupes de contractions

Définition 1 .

Un semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ fortement continu sur X est un semi-groupe de contractions si

$$\|S(t)\| \leq 1 \qquad pour\, tout \quad t \geq 0$$

Théorème 2 *Un opérateur linéaire non borné $(A, D(A))$ dans X est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions sur X si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) A est fermé,

(ii) $D(A)$ est dense dans X,

(iii) pour tout $\lambda > 0$, $(\lambda I - A)$ est une application bijective de $D(A)$ sur X, et est $(\lambda I - A)^{-1}$ est un opérateur borné sur X vérifiant

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda} \tag{3.1}$$

Définition 3 *Soit A un opérateur linéaire de X dans X .*
On dit que A est accrétif si $Re < Au, u > \geq 0, \quad pour \quad tout \quad u \in D(A)$.
De plus si $\forall f \in X, \exists u \in D(A)$, telque $u + \lambda Au = f$, i.e . $R(I + \lambda A) = H$, $\forall \lambda > 0$, alors on dit que A est maximal accrétif .

Définition 4 *Soit A un opérateur linéaire de $D(A) \subset X$ dans X.On d i t q ue A est m accréatif s'il est accréatif et si $I + A$ est surjectif.*

3.2 Théorème Hille-Yosida(homogènes) :

Théorème 5 *Soit A un opérateur maximal monotone dans un espace de Hilbert H. Alors pour tout* $u_0 \in D(A)$ *il existe une fonction* $u \in C^1([0,+\infty];X)\bigcap C([0,+\infty[;D(A))$ *unique telle que :*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = 0 \qquad sur\ [0,+\infty[\\ u(0) = u_0 \qquad (donne \quad initiale) \end{cases} \tag{3.2}$$

De plus on a :

$$|u(t)| \leq |u_0| \ et\ |\frac{du}{dt}(t)| = |Au(t)| \leq |Au_0| \ \forall t \geq 0.$$

Remarque 6 *L'intérêt principal du théorème 5 réside dans le fait que pour résoudre le problème d'évolution (3.2) on se ramène à vérifier que A est maximal monotone, c'est-à-dire, à étudier l'équation stationnaire* $u + \lambda Au = f$.

Preuve. Nous la décomposerons en 6 étapes.

1^{re} étape : Unicité.

Soient $u \quad et \quad \overline{u}$ deux solutions de probléme (3.2). On a

$$\left(\frac{d}{dt}(u-\overline{u}), u-\overline{u}\right) = -\ (A(u-\overline{u}), u-\overline{u}) \leq 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)-\overline{u}(t)|^2 = \left(\frac{d}{dt}(\mathrm{u(t)} - \overline{u}(t)), u(t)-\overline{u}(t)\right)$$

Donc la fonction $\mathrm{t} \longmapsto |u(t)-\overline{u}(t)|$ est décroissante sur $[0,+\infty[$ Comme $|u(0)-\overline{u}(0)| = 0$ on en déduit que

$$|u(t)-\overline{u}(t)| = 0 \quad \forall t \geq 0$$

Pour prouver l'existence de u, on remplace A par sa régularisée Yosida A_λ, on établit diverses estimations indépendantes de λ et on passe à la limite quand $\lambda \longrightarrow 0$.

Soit u_λ la solution du problème .

$$\begin{cases} \dfrac{du_\lambda}{dt} + A_\lambda u_\lambda = 0 \quad sur \quad [0,+\infty[\\ u_\lambda(0) = u_0 \in D(A). \end{cases} (3.3)$$

Noter que u_λ existe grâce au théorème de Cauchy-Lipschitz-Picard appliqué avec $F = -A_\lambda$.

2^e étape. - On a l'estimation

$$|\frac{du_\lambda}{dt}(t)| = |A_\lambda u_\lambda(t)| \leq |Au_0| \quad \forall t \geq 0 \quad \forall \lambda > 0. \tag{3.4}$$

Cette inégalité est une conséquence immédiate du

Lemme 1 *Soit* $w \in C^1([0, +\infty[; H) unefonction \quad vrifiant$
$\dfrac{dw}{dt} + A_\lambda w = 0 \quad sur[0, +\infty[(3.5)$
Alors les fonctions $t \longrightarrow |w(t)|$ et $t \longrightarrow |\dfrac{dw}{dt}(t)| = |A_\lambda w(t)|$ sont décroissantes sur $[0, +\infty[$.
Preuve. On a $(\dfrac{dw}{dt}, w) + (A_\lambda w, w) = 0$
On $(propositionVII.2)[5]$ $(A_\lambda w, w) \geq 0$ et par suite $\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}|w|^2 \leq 0$.
D'autre part, comme A_λ est un opérateur linéaire borné, on déduit de (3.5) que w est C^∞ et que.

$$\frac{d}{dt}(\frac{dw}{dt}) + A_\lambda \frac{dw}{dt} = 0.$$

On applique alors ce qui précède à $\dfrac{dw}{dt}$.
■ 3^e étape. - On va montrer que, pour tout $t \geq 0, u_\lambda(t)$ converge, quand $\lambda \longrightarrow 0$, vers une limite notée u(t) ; de plus cette convergence est uniforme en t sur chaque intervalle borné [0, T].

En effet soient $\lambda, \mu > 0$. On a

$$\frac{du_\lambda}{dt} - \frac{du_\mu}{dt} + A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu = 0.$$

et par suite

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_\lambda - u_\mu|^2 + (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu) = 0. \tag{3.6}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu) = (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - J_\lambda u_\lambda + J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu + J_\mu u_\mu - u_\mu) \\ = (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu) + (A(J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu), J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu) \\ \geq (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu). \end{array} \right. \tag{3.7}$$

On déduit alors de (3.4), (3.6) et (3.7) que :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_\lambda - u_\mu|^2 \leq 2(\lambda + \mu)|Au_0|^2$$

et par intégration

$$|u_\lambda(t) - u_\mu(t)|^2 \leq 4(\lambda + \mu)t|Au_0|^2$$

i.e.

$$|u_\lambda(t) - u_\mu(t)| \leq 2\sqrt{(\lambda + \mu)t}|Au_0| \tag{3.8}$$

Il en résulte que, pour chaque $t \geq 0$, $(u_\lambda(t))$ est de Cauchy, et donc converge quand $\lambda \longrightarrow 0$ vers une limite notée u(t). Passant à la limite dans (3.8) quand $\mu \longrightarrow 0$ il vient

$$|u_\lambda(t) - u(t)| \leq 2\sqrt{(\lambda)t}|Au_0|$$

Par conséquent la convergence est uniforme en t sur chaque intervalle borné [0, T] et $u \in C([0, +\infty[; H)$.

4^e étape : On suppose de plus que $u_0 \in$ D(A^2) i.e.

$u_0 \in D(A)$ et $Au_0 \in$ D(A)

alors $\dfrac{du_\lambda}{dt}(t)$ converge quand $\lambda \rightarrow$ pour tout $t \geqslant 0$,et uniformément en t sur chaque intervalle borné $[0, T]$

En effet posons $v_\lambda = \dfrac{du_\lambda}{dt}$ de sorte que $\dfrac{du_\lambda}{dt} + A_\lambda v_\lambda = 0$.
Procédant comme à la 3^e étape on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v_\lambda - v_\mu|^2 \leqslant (|A_\lambda v_\lambda| + |A_\mu v_\mu|)(\lambda|A_\lambda v_\lambda| + \mu|A_\mu v_\mu|) \tag{3.9}$$

d'apérs le lemme 1

on a

$$|A_\lambda v_\lambda| \leqslant |A_\lambda v_\lambda(0)| = |A_\lambda A_\lambda u_0| \tag{3.10}$$

et de même

$$|A_\mu v_\mu| \leqslant |A_\mu v_\mu(0)| = |A_\mu A_\mu u_0| \tag{3.11}$$

Enfin puisque $Au_0 \in D(A)$ il vient

$$A_\lambda A_\lambda u_0 = J_\lambda A J_\lambda A u_0 = J_\lambda^2 A^2 u_0$$

et donc

$$|A_\lambda A_\lambda u_0| \leqslant |A^2 u_0| \quad |A_\mu A_\mu u_0| \leqslant |A^2 u_0| \tag{3.12}$$

Combinant (3.9), (3.10), (3.11) et (3.12) il vient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v_\lambda - v_\mu|^2 \leqslant 2(\lambda + \mu)|A^2 u_0|^2.$$

On conclut comme à la 3^e étape que $v_\lambda(t) = \dfrac{du_\lambda}{dt}(t)$ converge quand $\lambda \to 0$ pour tout $t \geqslant 0$ et uniformément en t sur chaque intervalle borné.

5^{re} étape .Il existe une solution de (3.2) si l'on suppose de plus que $u_0 \in D(A^2)$
En effet, d'après ce qui précède, on sait que pour tout $T < \infty$:

$$\begin{cases} u_\lambda(t) \to u(t) \quad uniformment \quad \text{sur}[0,T] \\ \dfrac{du_\lambda}{dt}(t) \quad converge, \quad quand \quad \lambda \to 0 \quad uniformment \quad \text{sur}[0,T] \end{cases}$$

Il en résulte que $u \in C^1([0,\infty[;H)$ et que $\dfrac{du_\lambda}{dt}(t) \to \dfrac{du}{dt}$ quand $\lambda \to 0$ uniformément sur $[0,T]$ On écrit (3.3) sous la forme

$$\frac{du_\lambda}{dt}(t) + A(J_\lambda u_\lambda(t)) = 0 \tag{3.13}$$

Notons que $J_\lambda u_\lambda(t) \to u(t)$ pour $\to 0$ car

$$|J_\lambda u_\lambda(t) - u(t)| \leqslant |J_\lambda u_\lambda(t) - J_\lambda u(t)| + |J_\lambda u(t) - u(t)| \tag{3.14}$$

$$\leqslant |u_\lambda(t) - u(t)| + |J_\lambda u(t) - u(t)| \qquad \to 0 \quad pour \lambda \to 0$$

En appliquant le fait que le graphe de A est fermé on déduit de (3.13) que
$u(t) \in D(A) \forall t \geqslant 0$ et que

$$\frac{du}{dt}(t) + Au(t) = 0$$

Enfin comme $u \in C^1([O,\infty[;H)$ la fonction $t \to Au(t)$ est continue de $[0,\infty[$ dans H et donc $u \in C([0,\infty[;D(A))$.

Par conséquent, on a obtenu une solution de (3.2) vérifiant $|u(t)| \leqslant |u_0(t)|, t \geqslant 0$ et $|\dfrac{du}{dt}(t)| \leqslant |Au_0|, \forall t \geqslant 0$
Pour conclure on aura besoin du

Lemme 2 *Soit $u_0 \in D(A)$ Alors*

$$\forall \varepsilon \geqslant 0 \quad , \quad \exists \overline{u}_0 \in D(A^2) \quad telque |u_0 - \overline{u}_0| < \varepsilon \quad et |Au_0 - A\overline{u}_0| < \varepsilon$$

Autrement dit $D(A^2)$ est dense dans $D(A)$ (pour la norme du graphe).

Preuve. Soit $\overline{u}_0 = J_\lambda u_0$, de sorte que $\overline{u}_0 \in D(A)$ et $\overline{u}_0 + \lambda A\overline{u}_0 = u_0$.

Donc $A\overline{u}_0 \in D(A)$, i.e. $\overline{u}_0 \in D(A^2)$.

D'autre part, on sait (proposition VII)[5] que

$$A\overline{u}_0 = A_\lambda u_0 = J_\lambda A u_0$$

et

$$\lim_{\lambda\to 0} |J_\lambda u_0 - u_0| = 0 \quad , \quad \lim_{\lambda\to 0} |J_\lambda A u_0 - A u_0| = 0$$

On choisit alors $\lambda > 0$ assez petit et on obtient le résultat désiré.

■ 6^e étape : : conclusion. Soit $u_0 \in D(A)$. Grâce au lemme précédent il existe une suite $u_{0n} \in D(A^2)$ telle que $u_{0n} \to u_0$ et $Au_{0n} \to Au_0$. D'après la 5^e étape on sait qu'il existe une solution u_n du problème

$$\begin{cases} \dfrac{du_n}{dt} + Au_n = 0 \quad sur[0,\infty], \\ u_n(0) = u_{0n} \end{cases} \quad (3.15)$$

De plus on a

$$|u_n(t) - u_m(t)| \leqslant |u_{0n}(t) - u_{0m}(t)| \to 0 \quad pour \quad m,n\to\infty$$
$$|\frac{du_n}{dt}(t) - \frac{du_m}{dt}(t)| \leqslant |Au_{0n}(t) - Au_{0m}(t)| \to 0 \quad pour \quad m,n\to\infty$$

Par conséquent

$$u_n(t) \to u(t) uniformment \quad sur[0,\infty[$$

$$\frac{du_n}{dt}(t) \to \frac{du}{dt}(t) \quad uniformment \quad \text{sur}[0,\infty[$$

Avec $u \in C^1([0,\infty[; H)$. Passant à la limite dans (3.15), grâce au fait que A est fermé, on voit que $u \in C([0,\infty[; D(A))$ et que u vérifie (3.2).

■

3.3 Théorème Hille-Yosida(non homogènes) :

Introduction :

Les équations d'évolution non homogènes sont de la forme :

$$\frac{du}{dt} + Au = f \qquad sur[0, T[\tag{3.16}$$

$$u(0, x) = u_0(x) \tag{3.17}$$

où A est un opérateur de X dans X et f est une application de X dans X.

Le théorème suivant permet d'assurer l'existence de la solution de ce type d'équations([2]).

Théorème 7 *So it X un espace de Banach et A un opérateur de $D(A) \subset X$ dans X. On suppose que A est m-accrétif dans X. Alors pour tout $u_0 \in D(A)$ et tout $f \in C^1(0, T; X)$*

$$u \in C^1(0, T; X) \cap C(0, T; D(A))$$

unique solution de (3.16),(3.17). De plus u est donnée par la formule :

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds$$

Où $T(t)$ désigne le semi groupe engendré par $-A$.

Preuve.

1-Existence :

On va montrer que :

$$u(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds$$

Puisque $T(t)u_0$ est une solution de l'équation homogène, on montre seulement que :

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds$$

est une solution de (3.16),(3.17).

Soit $t \in [0,T]$ alors la fonction :$s \to T(t-s)f(s)$ est dans $C^1([0,t], D(A))$ par suite

$$v(t) \in D(A) et Av(t) = \int_0^t T(t-s)Af(s)ds$$

D'ou : $v \in C([0,T], D(A))$. de plus, on a pour $t \in [0,T]$ et $h \in [0, T-t]$

$$\frac{v(t+h)-v(t)}{h} = \frac{T(h)-I}{h}v(t) + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s).$$

Par le passage à la limite on a : $v \in C^1([0,t], X)$ et

$$\frac{du}{dt} = -Av + f \quad sur\,[0,T]$$

2-Unicité

Posons :

$$\varphi(s) = T(t-s)u(s)ds \quad t \in [0,T], s \in [0,t], h \in [0, t-s]$$

où $T(t)$ désigne le semi groupe engendré par $-A$.

$$\frac{\varphi(s+h)-\varphi(s)}{h} = T(t-s-h)\{\frac{u(s+h)-u(s)}{h} - \frac{T(h)-I}{h}u(s)\}$$

qui tend vers

$$T(t-s)(\frac{du}{dt} + Au) = T(t-s)f(s)$$

quand $h \to 0$ ce qui implique que $\varphi \in C^1([0,t], X)$, et :

$$\frac{d\varphi}{dt}(s) = T(t-s)f(s)$$

on a donc :

$$\varphi(\tau) = \varphi(0) + \int_0^\tau \varphi'(s)ds \quad pour\, \tau \in [0,t]$$

D'ou :

$$T(t-\tau)u(\tau) = T(t)u_0 + \int_0^{\tau} T(t-s)f(s).$$

Lorsque $\tau \to t$ on obtient :$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds$

Comme opérateurs particuliers nous allons considérer le Laplacien pour donner quelques résultats concernant les estimations et les régularités des solutions.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et soit l'équation semi linéaire

$$\frac{du}{dt} - \Delta u = f$$

$$u(0,x) = u_0(x) \quad x \in \Omega$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \quad sur \quad \partial\Omega$$

■

Chapitre 4

Existence globale des solutions d'un système de réaction-diffusion équation

Introduction :

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de l'existence globale des solutions d'un système de réaction-diffusion et qui est l'objet principal de notre travail dans de le cadre de ce mémoire.

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} - a\Delta u = -u\psi(v) \quad sur\, \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ \dfrac{dv}{dt} - c\Delta u - d\Delta v = u\psi(v) \quad sur\, \mathbb{R}^+ \times \Omega \end{cases} \tag{4.1}$$

avec les condition limite :

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \quad sur\, \mathbb{R}^+ \times \Omega \tag{4.2}$$

et les condition initiale :

$$u(0,x) = u_0(x)\, , v(0,x) = v_0(x) \quad sur \Omega \tag{4.3}$$

Où Δ est le Laplacien sur$\mathbb{R}^n$,Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière régulière $\Gamma = \partial\Omega$ a, b, c des coefficients de diffusion vérifiant la condition suivante : $a > 0, d > 0, c \geq 0$ et $c^2 < 4ad$, $a > d$

$\psi(s)$ une fonction de classe C^1 $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ vérifiant :

$$\lim_{v \to \infty} \frac{log(1 + u\psi(v))}{v} = 0 \tag{4.4}$$

Ces résultats étaient généralisés par M. Kirane (1988) ([3]) , S. Kouachi et A. Youkana (2001) ([5]) pour des matrices de diffusion triangulaires.
Eneffet on cherche une transformation linéaire T qui fait correspondre (u, v) l'élément (w,z).

on pose

$$\begin{cases} w = u \\ z = \frac{-c}{a-d}u + v \end{cases} (4.5)$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{du}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{-c}{a-d}\frac{du}{dt} + \frac{dv}{dt} = \frac{-c}{a-d}(a\varDelta u - u\psi(v)) + d\varDelta v + u\psi(v))$$

$$\frac{-ca}{a-d}\varDelta u + \frac{c}{a-d}u\psi(v) + c\varDelta u + d\varDelta v + u\psi(v)$$

$$\frac{dz}{dt} - d\varDelta z = (\frac{-ca}{a-d} + c)\varDelta u + d\varDelta v + (\frac{c}{a-d} + 1)u\psi(v) - d(\frac{c}{a-d}\Delta u + \Delta v)$$

Donc le systéme réduit obtenu est :

$$\begin{cases} \frac{dw}{dt} - a\Delta w = -u\psi(v) \\ \frac{dz}{dt} - d\Delta z = (\frac{c}{a-d} + 1)u\psi(v) \end{cases} (4.6)$$

avec les condition limite :

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial \eta} = 0 \quad sur\, \mathbb{R}^+ \times \Omega \tag{4.7}$$

et les condition initiale :

$$w(0,x) = w_0(x) \qquad z(0,x) = z_0(x) \quad sur\Omega \tag{4.8}$$

4.1 Existence globale des solutions

4.1.1 Positivité des solutions

Proposition 8 *: Soit (w,z) les solutions de (4 .6) - (4.8) alors l'ensemble*

$$\sum = \{\ (w,z) \in IR^2 \diagup w_0 \geqslant 0, z_0 \geqslant 0\}$$

est une région invariante.

Preuve.

On a

$$\begin{cases} w = u \\ z = \frac{-c}{a-d}u + v \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dw}{dt} - a\Delta w = -w\psi(v) \\ \frac{dz}{dt} - d\Delta z = (\frac{c}{a-d} + 1)w\psi(v) \end{cases}$$

En appliquant le principe du maximum à (4.6) et en utilisant la formule de Green on obtient

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega w dx = a\int_\Omega \Delta w dx - \int_\Omega w\psi(v)dx \tag{4.9}$$

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega ww^- dx = a\int_\Omega \Delta w w^- dx - \int_\Omega ww^-\psi(v)dx$$

$$(w^+ - w^-)w^- = -w^{-2}$$

$$\int_\Omega \Delta w w^- dx = -\int_\Omega \nabla w \nabla w^- dx = \int_\Omega |\nabla w^-|^2 dx$$

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega (w^-)^2 dx = -a\int_\Omega |\nabla w^-|^2 dx + \int_\Omega ww^-\psi(v)dx$$

$$\leqslant C(T)\int_\Omega (w^-)^2 dx$$

De la même manière on obtient :

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega z dx = d\int_\Omega \Delta z dx + (\frac{C}{a-d} + 1)\int_\Omega w\psi(v)dx \tag{4.10}$$

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega (z^-)^2 dx = -d\int_\Omega |\nabla z^-|^2 dx + (\frac{C}{a-d} + 1)\int_\Omega wz^-\psi(v)dx$$

$$\leqslant C(T)\int_\Omega (z^-)^2 dx$$

En additionnant ces deux dernières inégalités on obtient

$$\frac{d}{dt}[\int_\Omega (w^-)^2 dx + \int_\Omega (z^-)^2 dx] \leqslant C(T)[\int_\Omega (w^-)^2 dx + \int_\Omega (z^-)^2 dx] \quad sur(0,T^*)\times\Omega \tag{4.11}$$

et donc de (4.11) on déduit que :$w \geqslant 0$ et $z \geqslant 0 sur(0,T^*)\times\Omega$ ■

4.1.2 Bornage des solutions :

Multiplions la première équation (4.6) du système par$(w+M)^+$ où

$M=\|w_0\|_\infty$ et appliquons la formule de Green alors
$\frac{d}{dt}\int_\Omega((w-M)^+)^2dx=\int_\Omega \frac{d}{dt}((w-M)^+)^2dx$

$$= \int_\Omega (w-M)^+ \frac{d}{dx}(w-M)^+dx$$

$$= 2\int_\Omega (w+M)^+ \frac{dw^+}{dt}dx$$

$$= 2\int_\Omega (w+M)^+[a\Delta w^+ - w^+\psi(v)]dx$$

$$= 2a\int_\Omega w^+\Delta w^+ - 2a\int_\Omega M\Delta w^+dx - \int_\Omega (w+M)^+w^+\psi(v)dx$$

$$\leq -2a\int_\Omega |\nabla w^+|^2dx - \int_\Omega (w+M)^+w^+\psi(v)dx$$

$$\leq 0 \qquad sur(0,T^*)\times\Omega$$

Ce qui implique que :

$$\|w(t,.)\|_\infty \leq M \qquad sur(0,T^*)\times\Omega. \tag{4.12}$$

Pour montrer que l'existence est globale on aura à utiliser le résultat suivant établi par Haraux et Youkana([4]).

Théorème 9 *Pour toute solution u de (4.1) et (4.3) il existe deux nombres réels positifs ε et δ ne dépendant que de $\|w_0\|_\infty$ telles que :*

$$t \longmapsto A(t) = \int\limits_\Omega \{(1+\delta(w+w^2)\}e^{\varepsilon z}dx$$

est non croissante $]0, T_{max}[$.

Preuve. Appliquons maintenant la fonctionnelle de Lyapounov établie par Haraux et Youkana à l'équation (3.7) .

On a :

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega (1+\delta(w+w^2))e^{\varepsilon z}dx = \frac{d}{dt}\int_\Omega e^{\varepsilon z}dx + \frac{d}{dt}\int_\Omega \delta(w+w^2)e^{\varepsilon z}dx$$

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \delta(w+w^2)e^{\varepsilon z}dx = \delta\frac{d}{dt}\int_\Omega (w+w^2)e^{\varepsilon z}dx$$

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega (w+w^2)e^{\varepsilon z}dx = \int_\Omega \frac{d}{dt}(w+w^2)e^{\varepsilon z}dx + \int_\Omega \frac{de^{\varepsilon z}}{dt}(w+w^2)dx$$

$$= \int (\frac{dw}{dt} + 2w\frac{dw}{d}t)e^{\varepsilon z}dx + \int \varepsilon\frac{dz}{dt}(w+w^2)e^{\varepsilon z}dx)$$

$$= \int_\Omega (a\Delta w - u\psi(v) + 2w(a\Delta w - u\psi(v))e^{\varepsilon z}dx + \int_\Omega \varepsilon(d\Delta z + (\frac{c}{a-d}+1)u\psi(v))(w+w^2)e^{\varepsilon z}dx$$

$$= \int_\Omega (a(1+2w)\Delta - (1+2w)u\psi(v))e^{\varepsilon z}dx +$$

$$\varepsilon\int_\Omega (d\Delta z(w+w^2) + (\frac{c}{a-d}+1)(w+w^2)u\psi(v))e^{\varepsilon z}dx$$

$$= a\int_\Omega (1+2w)\Delta w e^{\varepsilon z}dx +$$

$$\int_\Omega (\frac{c}{a-d}+1)(w+w^2) - (1+2w))u\psi(v)e^{\varepsilon z}dx + \varepsilon d\int_\Omega (w+w^2)e^{\varepsilon z}dx$$

$$= -a\int_\Omega \nabla w\nabla((1+2w)e^{\varepsilon z})dx$$

$$-\varepsilon d\int_\Omega \nabla z\nabla((w+w^2)e^{\varepsilon z})dx + \int_\Omega ((\frac{c}{a-d}+1)(w+w^2) - (1+2w))u\psi(v)e^{\varepsilon z}dx$$

$$-a\int_\Omega \nabla w\nabla((1+2w)e^{\varepsilon z})dx = -a\int_\Omega \nabla w(2\nabla w+\varepsilon\nabla z(1+2w))e^{\varepsilon z})dx$$

$$= -2a\int_\Omega |\nabla w|^2 e^{\varepsilon z}dx - \varepsilon a\int_\Omega |\nabla w||\nabla z|(1+2w)e^{\varepsilon z}dx$$

$$-\varepsilon d\int_\Omega \nabla z\nabla((w+w^2)e^{\varepsilon z})dx = -\varepsilon d\int_\Omega \nabla z(\nabla w+2w\nabla w+\varepsilon\nabla z(w+w^2))e^{\varepsilon z}dx)$$

$$= -\varepsilon d\int_\Omega |\nabla z||\nabla w|e^{\varepsilon z}dx - \varepsilon d\int_\Omega 2w|\nabla w||\nabla z|e^{\varepsilon z}dx - \varepsilon^2 d\int_\Omega |\nabla z|^2(w+w^2)e^{\varepsilon z}dx$$

$$= -\varepsilon d\int_\Omega (1+2w)|\nabla z||\nabla w|e^{\varepsilon z}dx - \varepsilon^2 d\int_\Omega |\nabla z|^2(w+w^2)e^{\varepsilon z}dx$$

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega (w+w^2)e^{\varepsilon z}dx = -2a\int_\Omega |\nabla w|^2 e^{\varepsilon z}dx - a\varepsilon\int_\Omega |\nabla w||\nabla z|(1+2w)e^{\varepsilon z}dx$$

$$-\varepsilon d\int_\Omega |\nabla w||\nabla z|(1+2w)e^{\varepsilon z}dx - \varepsilon^2 d\int_\Omega |\nabla z|^2(w+w^2)e^{\varepsilon z}dx + \int_\Omega ((\frac{c}{a-d}+1)(w+w^2)-(1+2w))u\psi(v)e^{\varepsilon z}dx$$

$$= -2a\int_\Omega |\nabla w|^2 e^{\varepsilon z}dx - \varepsilon^2 d\int_\Omega |\nabla z|^2(w+w^2)e^{\varepsilon z}dx$$

$$-(a+d)\varepsilon\int_\Omega |\nabla w||\nabla z|(1+2w)e^{\varepsilon z}dx + \int_\Omega ((\frac{c}{a-d}+1)(w+w^2)-(1+2w))u\psi(v)e^{\varepsilon z}dx$$

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega e^{\varepsilon z}dx = \int_\Omega \frac{d}{dt}e^{\varepsilon z}dx = \int_\Omega \frac{dz}{dt}\varepsilon e^{\varepsilon z}dx = \varepsilon\int_\Omega (d\Delta z + (\frac{c}{a-d}+1)u\psi(v)e^{\varepsilon z}dx)$$

$$= \varepsilon d\int_\Omega \Delta z e^{\varepsilon z}dx + \varepsilon\int_\Omega (\frac{c}{a-d}+1)u\psi(v)e^{\varepsilon z}dx)$$

$$-\varepsilon d\int_\Omega \nabla z\nabla(e^{\varepsilon z})dx + \varepsilon\int_\Omega (\frac{c}{a-d}+1)u\psi(v)e^{\varepsilon z}dx$$

$$= -\varepsilon^2 d\int_\Omega |\nabla z|^2 e^{\varepsilon z}dx + \varepsilon\int_\Omega (\frac{c}{a-d}+1)u\psi(v)e^{\varepsilon z}dx$$

par l'inégalité de cauchy-shwarz :

$$-(a+d)\varepsilon\int\limits_{\Omega}|\nabla w||\nabla z|(1+2w)e^{\varepsilon z}dx \leq (a+d)\varepsilon\int\limits_{\Omega}|\nabla w||\nabla z|(1+2w)e^{\varepsilon z}dx$$

$$\leq \int\limits_{\Omega}\varepsilon(a+d)(1+2w)|\nabla z|e^{\frac{1}{2}\varepsilon z}|\nabla w|e^{\frac{1}{2}\varepsilon z}dx$$

$$\leq \int\limits_{\Omega}\varepsilon^2(a+d)^2(1+2w)^2|\nabla z|^2e^{\varepsilon z}dx\int\limits_{\Omega}|\nabla w|^2e^{\varepsilon z}dx$$

$$\leq \frac{\alpha}{2}\varepsilon^2(a+d)^2\int\limits_{\Omega}(1+2w)^2|\nabla z|^2e^{\varepsilon z}dx + \frac{1}{2\alpha}\int\limits_{\Omega}|\nabla w|^2e^{\varepsilon z}dx$$

on pose

$$\alpha = \frac{1}{4a}$$

$$(a+d)\varepsilon\int\limits_{\Omega}|\nabla w||\nabla z|(1+2w)e^{\varepsilon z}dx \leq \varepsilon^2\frac{(a+d)^2}{8a}\int\limits_{\Omega}|\nabla z|^2(1+2w)^2e^{\varepsilon z}dx + 2a\int\limits_{\Omega}|\nabla w|^2e^{\varepsilon z}dx$$

alors

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}(w+w^2)e^{\varepsilon z}dx = -2a\int\limits_{\Omega}|\nabla w|^2e^{\varepsilon z}x - \varepsilon^2 d\int\limits_{\Omega}|\nabla z|^2(w+w^2)e^{\varepsilon z}dx$$

$$-(a+d)\varepsilon\int\limits_{\Omega} \mid \nabla z \mid\mid \nabla w|(1+2w)e^{\varepsilon z}dx + \int\limits_{\Omega}((\frac{c}{a-d}+1)(w+w^2)-(1+2w))u\psi(v)e^{\varepsilon z}dx$$

$$\leq \varepsilon^2\frac{(a+d)^2}{8a}\int\limits_{\Omega}(1+2w)^2e^{\varepsilon z}dx + \int\limits_{\Omega}((\frac{c}{a-d}+1)(w+w^2)-(1+2w))u\psi(v)e^{\varepsilon z}dx$$

alors

$$\tfrac{d}{dt}\textstyle\int_\Omega[1+\delta(\omega+\omega^2)]e^{\varepsilon z}dx = \tfrac{d}{dt}\textstyle\int_\Omega e^{\varepsilon z}dx + \delta\tfrac{d}{dt}\textstyle\int_\Omega(\omega+\omega^2)e^{\varepsilon z}dx$$

$$\leqslant -\varepsilon^2 d\textstyle\int_\Omega \mid \nabla z \mid^2 e^{\varepsilon z}dx + \varepsilon\textstyle\int_\Omega(\tfrac{c}{a-d}+1)ue^{\varepsilon z}\psi(v)dx + \delta\varepsilon^2\tfrac{(a+d)^2}{8a}\textstyle\int_\Omega(1+2w)^2 \mid \nabla z \mid^2 e^{\varepsilon z}dx$$

$$+\delta\int_\Omega[(\frac{c}{a+d}+1)(w+w^2)-(1+2w)]e^{\varepsilon z}u\psi(v)dx$$

on pose

$$\delta = \frac{8a}{(a+d)^2}(1+2\|u_0\|_\propto)^{-2}$$

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega [1+\delta(w+w^2)]e^{\varepsilon z}dx \leq -\varepsilon^2 d\int_\Omega \mid \nabla z\mid^2 e^{\varepsilon z}dx$$

$$+\varepsilon^2 d(1+2\|u_0\|_\propto)^{-2}(1+2\|u_0\|_\propto)^2\int_\Omega \mid \nabla z\mid^2 e^{\varepsilon z}dx$$

$$+\delta\int_\Omega [(\frac{c}{a+d}+1)(w+w^2)-(1+2w)]e^{\varepsilon z}u\psi(v)dx+\varepsilon\int_\Omega (\frac{c}{a+d}+1)e^{\varepsilon z}u\psi(v)dx$$

$$\leq \int_\Omega \varepsilon(\frac{c}{a-d}+1)-\delta(1+2w)+\varepsilon\delta(\frac{c}{a+d}+1)(w+w^2)dx$$

$$\leq \int_\Omega \varepsilon(\frac{c}{a+d}+1)-\delta(1+2w)+\varepsilon\delta(\frac{c}{a+d}+1)(\|w_0\|_\propto+\|w_0\|_\propto^2)dx$$

alors

$$\varepsilon(\frac{c}{a+d}+1)+\varepsilon\delta(\frac{c}{a+d}+1)(\|w_0\|_\propto+\|w_0\|_\propto^2)dx \leq \delta\|(1+2w_0)\|_\infty$$

$$\varepsilon(\frac{c}{a+d}+1)+\delta(\frac{c}{a+d}+1)(\|w_0\|_\propto+\|w_0\|_\propto^2)dx \leq \delta\|(1+2w_0)\|_\infty$$

$$\varepsilon \leq \frac{\delta\|(1+2w_0)\|_\infty}{(\frac{c}{a+d}+1)+\delta(\frac{c}{a+d}+1)(\|w_0\|_\propto+\|w_0\|_\propto^2)dx}$$

alors :

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega [1+\delta(w+w^2)]e^{\varepsilon z}dx \leq 0 sur (0,T^*)\times\Omega$$

donc

$$t \longmapsto A(t) = \int_\Omega \{(1+\delta(w+w^2)\}e^{\varepsilon z}dx$$

est non croissante $]0, T_{max}[$.

■

Comme w est uniformément bornée sur $(0,T^*)\times\Omega$ alors de l'hypothèse

$$\lim_{v\to\infty}\frac{log(1+u\psi(v))}{v}=0$$

on déduit que

$$\forall B>0\exists A>0 \quad v<0\Longrightarrow\frac{log(1+(\frac{c}{a-d}+1)w\psi(v))}{z}<B$$
$$\Longrightarrow log(1+(\tfrac{c}{a-d}+1)w\psi(v))<Bz\Longrightarrow 1+(\tfrac{c}{a-d}+1)w\psi(v)\leq e^{Bz}$$

si on pose : $B=\frac{\varepsilon}{n}$ alors :

$$\begin{aligned}1+(\frac{c}{a-d}+1)w\psi(v)&\leq e^{\frac{\varepsilon}{n}z}\\ \Longrightarrow(\frac{c}{a-d}+1)w\psi(v)&\leq e^{\frac{\varepsilon}{n}z}\\ \Longrightarrow\int_\Omega((\frac{c}{a-d}+1)w\psi(v))^n&\leq\int_\Omega e^{(Bn)z}\leq C\end{aligned}$$

où C est une constante indépendante de t (supposée la même partout). De l'effet régularisant de l'équation de la chaleur appliqué à la deuxième équation de (4.6)
on déduit que

$\|z(t,.)\|_{L^\infty(\Omega)}\leq C \quad \forall t\epsilon(0,T^*)$ (4.13)

et donc la solution du système $(4.1)-(4.3)$est globale et bornée sur $(0,+\infty)\times\Omega$

Conclusion

Avec les techniques des regions invariantes et la fonctionnelle de HARAUX - YOUKANA on demontre l'existence global de solution d'un système à reaction- diffusion triangulaire .

Bibliographie

[1] N. D. Alikakos . Lp-bound of solutions of reaction-diffusion equations, comm. Partial Differential Equations (1979), 827-868.

[2] H. Brézis . Analyse Fonctionnelle : Théorie et Application. Dunod 1983

[3] A. Haraux and M.Kirane . Estimation C^1 pour des problemes paraboliques semilinéaires,Ann.Fac.Sci.Toulouse Math.5 (1988),265-280.

[4] A. Haraux and A.Youkana . On a result K. Masuda concerning reaction-diffusion equations, Tôhoku Math. J. 40(1988).159-163.

[5] S. Kouachi and A. Youkana .Global existence for a class of reaction-diffusion systems. Vol.49, N 3 (2001)

[6] Masuda .On th global existence and asymptotique behavior of reaction-diffusion equations, Hokkaido Math. J.12(1983),360-370.

[7] A.Youkana .Thèse de 3 ème cycle , Université Paris 6, 1986.