N° d'ordre :

N° de série :

UNIVERSITE KASDI MERBAH
OUARGLA

FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIE
ET SCIENCE DE LA MATIÈRE
DEPARTEMENT DES
MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

MAGISTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse numérique et E. D. P

Par

MEDEKHEL Hamza

THÈME

Rôle des Fonctions Poids Dans L'étude D'un Problème De Diffusion Perturbée Dans Un Domaine Plan Non Régulier

Soutenu publiquement le : 11/06/2009 , le devant le jury composé de :

Mr.	**D. A. CHACHA**	M. C à l'université de KASDI MERBAH – Ouargla	Président.
Mr.	**A.AYADI**	Pr. à l'université Larbi BEN M'HIDI – Oum Bouaghi	Examinateur
Mr.	**A.GUERFI**	M. C à l'université de KASDI MERBAH – Ouargla	Examinateur
Mr.	**S. M.SAID**	M. C à l'université de KASDI MERBAH – Ouargla	Rapporteur

Remerciements

Je tiens à remercier, en premier lieu, les membres du jury qui ont bien voulu lire mon travail.

Je remercie Monsieur le docteur SAID Mohamed Saïd, directeur de mon mémoire, pour sa disponibilité et ses conseils judicieux tout au long de ce travail .

Je remercie Monsieur le docteur GUERFI Amara pour sa disponibilité et je le remercie aussi d'avoir accepté d'être membre de mon jury.

Je remercie également les Messieurs: le professeur AYADI Abdelhamid et le docteur CHACHA Ahmed Djamel, qui ont accepté d'être membres de mon jury.

Je remercie Monsieur: BOUDJEDA Bader-eddine et Bahayou Med Amine, qui ont aide pour donner un bon travail.

Je Salue l'ensemble des membres du département de mathématique de l'université de KASDI MERBAH – Ouargla, en particulier: Monsieur ASSILA Moustafa, MEFLAH Mebrouk, Ali ELMECHE, Abdellah BENSAYEH, et Hermasse Nadji.

Table des matières

Principales notations utilisées

Notions géométriques:

Ω est un ouvert plan de frontière polygonale notée Γ .

ω la mesure de surface sur $\Gamma, Q =]0, T[\times \Omega$, $T > 0$ un corps polygonal .

$\sum$ la frontière de Q, γ la mesure de surface sur $\sum$, $t \in]0, T[$ (t désigne le temps).

$$\sum =]0, T[\times \Gamma.$$

Ω_φ un secteur plan infini d'ouverture φ, (φ étant un angle de Ω_φ).

O un ouvert régulier à l'intérieur du polygone, $O = \Omega \backslash \cup_{j=1}^{N} \Omega_{\varphi_j}$.

$N =$ le nombre de sommets du polygone.

S_j : les sommets du polygone $j = 1, 2, ...N$.

φ : angle du secteur plan, telle que $0 < \theta < \varphi < 2\pi$.

Γ_φ : la frontière du secteur plan.

Espaces fonctionnels:

$C_0^\infty(\Omega)$:l'espace des fonctions indéfiniment différentiables et nulles à l'infini dans Ω.

$\overline{\Omega}$: l'adhérence de Ω.

$C_0^\infty(\overline{\Omega})$:l'espace des restrictions à Ω des fonctions de $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$.

$L^2(\Omega)$: l'espace des classes de fonctions de carré intégrable pour la mesure dx.

Si Ω_φ un secteur plan d'ouverture φ pour la mesure $dx = \rho d\rho d\theta$

(ρ, θ) désigne les coordonnes polaires .

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega_\varphi)} = \int_{\Omega_\varphi} |u|^2 \, dx.$$

$H^1(\Omega)$:l'espace de Sobolev d'ordre 1.

$H_0^1(\Omega)$: l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.

$H^m(\Omega)$: l'espace de Sobolev d'ordre m (défini ici pour $m \in \mathbb{N}$, par convention d'écriture on a $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$).

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \backslash \;\; D^\beta u \in L^2(\Omega), |\beta| \leq m \right\},$$

tel que $D^\beta = \dfrac{\partial^{|\beta|}}{\partial x_1^{\beta_1} .... \partial x_m^{\beta_m}}$, désigne la dérivé d'ordre β au sens des distributions

avec $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) \in \mathbb{N}^*$, $|\beta| = \sum\limits_{i=1}^{m} \boldsymbol{\beta}_i$.

On munit l'espace $H^m(\Omega)$ du produit scalaire :

$(u,v)_{H^m(\Omega)} = \sum\limits_{|\beta|\leq m} (D^2u, D^2v)_{L^2(\Omega)}$, $\forall u,v \in H^m(\Omega)$ et la norme associé étant donné par:

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\beta|\leq m} \left\|D^\beta u\right\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} , \forall u \in H^m(\Omega)$$

$H^1(\overline{\Omega})$: l'espace des restrictions à Ω des fonctions de $H^1(\mathbb{R}^2)$.

$H_0^m(\Omega)$: l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $H^m(\Omega), m \in \mathbb{N}$.

$E_\alpha(\Omega_\varphi)$:l'espace de Sobolev avec poids d'ordre 2 défini par :

$$E_\alpha(\Omega_\varphi) = \left\{ u \in H^1(\Omega_\varphi) \ / \ \rho^\alpha D^2 u \in L^2(\Omega_\varphi) \right\}$$

où, les fonctions u sont à support compact dans $\overline{\Omega_\varphi}$.

le symbole D^2 désigne les dérivées partielles d'ordre 2 par rapport aux variables ρ et η où $\dfrac{\partial}{\partial \eta} = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial \theta}$.

$E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi) = E_\alpha(\Omega_\varphi) \cap H_0^1(\Omega)$.

$E_{\alpha,m}(\Omega_\varphi)$ désigne l'espace de Sobolev avec poids d'ordre m défini par :

$E_{\alpha,m}(\Omega_\varphi) = \left\{ u \in H^1(\Omega_\varphi) \ / \ \rho^\alpha D^{|\beta|} u \in L^2(\Omega_\varphi), 2 \leq |\beta| \leq m \right\}$.

où, les fonctions u sont à support compact dans $\overline{\Omega_\varphi}$.

$E_{\alpha,m,0}(\Omega_\varphi) = E_{\alpha,m}(\Omega_\varphi) \cap H_0^{m-1}(\Omega)$.

H^{-m} : l'espace dual de l'espace $H_0^m(\Omega), m \in \mathbb{N}$.

$E_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$ désigne l'espace dual de l'espace $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$.

$C^1(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions continues et dérivables dans Ω.

$C_0^\infty(Q_\varphi)$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment différentiables et nulle à l'infini dans Q_φ telle que $Q_\varphi = \sum_\varphi \times]0, T[$.

Liste des symboles :

$V(S_j)$: une voisinage du sommet S_j pour $j = 1, 2, 3, ..., N$, (S_j désignera l'origine de la frontière Γ_j).

$\lambda(\rho)$: une fonction poids qui est une fonction indéfiniment différentiable à l'intérieur de Ω_φ.

$\dfrac{\partial}{\partial\eta}$: la dérivée normale par rapport η, et égalité à $\dfrac{\partial}{\rho\partial\theta}$.

$(\widetilde{P_\varphi})$: le problème obtenu de (P_φ) après transformation de Mellin.

$\widetilde{u}(\sigma, \theta)$: la transformation de Mellin de $u(\rho, \theta)$ par rapport à ρ.

$\mathbb{R}$: corps des réels.

$\mathbb{R}_+^*$: espaces des réels strictement positif.

$\mathbb{R}_-^*$: espaces des réels strictement négatif.

$\mathbb{R}_+$: espaces des réels positif.

σ : une nombre complexe telle que $\sigma = \epsilon + i\nu; \epsilon, \nu \in \mathbb{R}$.

L^* : un opérateur adjoint de L.

$v(\rho, \theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(\rho) \exp(\frac{in\pi}{\varphi}\theta)$: une série de Fourier de v par rapport à ρ et θ.

$\mathrm{Im}\, A$: l'image de l'opérateur $A : D(A) \to F$; I l'application de identité sur $D(A)$, l'application A est dit surjective, ou encore une surjection si $A(D(A)) = F$.

$\overline{\mathrm{Im}\, A}$: l'adhérence de l'image A.

$\mathrm{Re}\, \langle Au, u \rangle$: la partie réelle de produit scalaire $\langle Au, u \rangle$.

$J_n(x)$: une fonction de Bessel d'ordre n.

$E\,[x]$ = désigne la partie entière de x.

Δu : le Laplacien de u, telle que $\Delta = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.

$\Longrightarrow$: signe "entraîne ", ou d'implication .

$\overline{u}$: désigne conjugue (complexe) de u

Introduction

Il est bien connu, qu'un grand nombre de problèmes de la physique mathématique peuvent être modélisés par des équations aux dérivées partielles .

Un système d'équations aux dérivées partielles, joint à des conditions aux limites, et lorsque le phénomène est d'évolution, à des conditions initiales constitue ce qu'on appelle modèle mathématique .

L'étude de l'équation de Laplace dans un polygone ou un polyèdre, et généralement l'étude des problèmes elliptiques dans des domaines non réguliers n'est entamée que depuis une date relativement récente; d'une part Grisvard [5] montre que la formule de Green construite pour le Laplacien dans le cas classique c'est à dire dans des domaines réguliers est encore valable dans les domaines non réguliers tels que les polygones ou polyèdres, par exemple, et en utilisant l'alternative de Fredholm, il retrouve des résultats analogues à ceux du cas classique, ces résultats ne sont pas encore généralisés à des opérateurs elliptiques aux dérivées partielles d'ordre plus élevé dans des domaines de $\mathbb{R}^n$, et ceci à cause de la complexité des calculs.

Le but de notre travail est d'étudier le rôle que jouent les fonctions poids dans l'étude du problème suivant :

$$(P) \begin{cases} \Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ Bu = g & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Où Ω est un ouvert plan de frontière polygonale notée Γ, et B étant un opérateur différentiel aux dérivées partielles, d'ordre 0 ou 1 défini sur la frontière Γ, on ne considérera ici que les deux cas : la condition de Dirichlet, et celle de Neumann. f donnée dans $L^2(\Omega)$.

La transformation de Mellin, est bien adaptée à la géométrie du domaine, le noyau de Green aussi bien adaptée à la résolution de l'équation différentielle explicite, et de mettre en évidence d'inégalité à priori.

Ces résultats étaient connus en norme L^2 dans certains cas particuliers voir Kondratiev [18] cette étude conduit naturellement à des espaces avec poids, toutefois l'auteur en déduit certains résultats dans H^s.

Avec la transformation de Mellin on peut aussi aboutir au même types de résultats dans les mêmes espaces voir Merigot [19] .

Les espaces avec poids cachent en fait les singularités qui peuvent apparaître aux points singuliers.

Grisvard [5] précise la régularité des solutions du problème de Dirichlet ou Neumann dans un polygone plan en norme L^2, En utilisant l'alternative de Fredholm, il a généralisé les résultats de Hanna-Smith [11] grâce à une méthode très particulière.

On établira une formule de Green adaptée au problème et des résultats pour les espaces avec poids duals et les simplifier par mise en évidence des inégalités à priori .

Soit $F(u)$ cette perturbation composée, d'une équation différentielle semi linéaire du second ordre.

Une condition au limite de Dirichlet $u = 0$ et de Neumann $\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0$ sur le bord de Ω et la condition initiale $u(0) = u_0$.

Dans ce travail on étudie le rôle que joue la fonction poids dans le type parabolique l'équation de diffusion perturbée dans un domaine plan polygonal .

Nous commençons par établir le rôle de fonction poids et du type elliptique dans un polygone plan dans le cas perturbé et non perturbé et ensuite la mise en évidence d'une inégalité à priori et enfin établir l'existence de la solution, et par la suite l'étude de l'unicité par la technique des noyaux pour le deux cas de problème de Dirichlet et du problème de Neumann.

Dans la dernière partie, une application à un système d'évolution et du type parabolique dans le cas perturbé et non perturbé et on appliquera le théorème de Hille-Yosida voir Brezis[13] , et l'autre d'un semi groupe de contraction dans l'espace de Sobolev avec poids.

Dans ce travail on suivra le plan suivant :

Chapitre 1:

Dans ce chapitre, on donne quelques notations générales, solution sur un domaine non régulier et le comportement des solutions dans ce domaine, et le choix d'une fonction poids convenable et notion de la transformation de Mellin adaptée au domaine et notion de noyau de Green adaptée à la résolution de l'équation différentielle explicite.

On donne une notion les problèmes de diffusion perturbée et non perturbée.

Chapitre 2:

Dans ce chapitre on a posé le problème de Poisson dans le polygone, les résultats de Grisvard précisent que les calculs n'existent dans l'espace $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ que si le polygone Ω est convexe c'est à dire que tous les angles sont saillants.

On fait le choix d'une fonction de poids convenable pour alléger les calculs aux voisinages des points singuliers et après un bon choix de l'espace du travail qui traite le problème .

Chapitre 3:

Dans ce chapitre on a étudié que l'existence et l'unicité de la solution du problème de deux cas la condition de Dirichlet et la condition de Neumann et étudié facilement par utilisation du lemme de Peetre pour l'existences et par suite par utilisation des technique des noyaux et on étudiera l'unicité de la solution.

Chapitre 4:

On rappellera la formule de Green adaptée au problème, et on étudiera le problème adjoint associé, et en plus on va étudier l'espace dual.

Chapitre 5:

Dans ce chapitre on va étudier l'existence et l'unicité de la solution, et nous étudierons l'existence en utilisant le lemme de Peetre, on mettra en évidence une inégalité à priori et pour ceci on définira une nouvelle norme dans H^{-2} à partir de la transformation de Mellin et les fonctions développables en série de Fourier, et par la technique des noyaux qui dépend de m et φ (ouverture de Ω_φ) en condition dans l'espace dual H^{-m} pour m entier positif, on étudiera des exemples sur l'unicité des solutions dans H^{-m} pour m entier positif.

Chapitre 6:

On fera l'application à un système d'équations d'évolution parmi des équations de diffusion non perturbée et perturbée, et on étudiera le rôle que jouent les fonctions poids dans ces problèmes et on déduira les solutions dans les espaces avec poids convenables .

On appliquera le théorème de Hille-Yosida et à l'autre un semi groupe de contraction dans l'espace avec poids convenable.

Chapitre 1

Notions préliminaires

Dans ce chapitre on va donner quelques définitions principales qui seront utiles pour la résolution de quelques problèmes physiques dans des domaines plan non réguliers.

Dans ce paragraphe, on donnera le comportement de la solution au voisinage d'une frontière non régulière tels que les polygones ou polyèdres, et on a montré que l'utilisation d'une fonction de poids allège les calculs surtout aux voisinages des points singuliers.

La géométrique est adaptée au domaine après la transformation de Mellin, le noyau de Green est aussi adaptée à la résolution d'équation différentielle explicite.

On donnera la définition d'un problème de diffusion et de diffusion perturbée avec la condition de Dirichlet et de Neumann .

1.1 Notion de la solution au voisinage d'une frontière non régulière

On sait d'après la théorie des équations elliptiques que la solution est une fonction indéfiniment différentiable en tous les points intérieurs du domaine. bien plus si l'exige que la surface frontière elle-même soit indéfiniment différentiable.

Les conditions aux limites possédant une régularité suffisante et ce qui est très important, que leur caractère ne soit pas différent en différentes parties de la surface, alors la solution sera indéfiniment différentiable jusqu'à la surface frontière. En général, il y a tout lieu de s'étendre que la solution admette aux points frontière une singularité (sa dérivée peut s'avérer illimitée) si les conditions mentionnées ne sont pas respectées .

ou plus simplement, dans le cas où la singularité de la solution provient de la structure des conditions aux limites quand par exemple une courbe quelconque est une courbe de discontinuité des conditions aux limites en contraintes, ou quand sur la surface il y a une force concentrée ou un moment concentré .

Nous admettons que dans le cas plan, au voisinage d'un certain point, le contour frontière est formé par deux arcs qui se coupent sous angle droit, une contrainte tangentielle constante non nulle, est donnée sur l'un des arcs, sur l'autre elle est identiquement nulle.

Les singularités de ce genre peuvent en général, être éliminées par la superposition de certaines solutions données sous forme explicite, appliquée en un point de la partie régulière de la frontière une force concentrée.

Après avoir effectué les transformations proposées il ne restera dans la solution que des singularités proposées aux points non réguliers de la frontière (points anguleux, points coniques, angles polyèdre, arêtes, polygone, ...) parmi les points non réguliers de la solution les points en lesquels les conditions aux limites changent de caractère (même si la frontière est régulière).

Ces singularités ne peuvent être mises en évidence d'avance mais certaines indications précieuses peuvent tout de même être obtenues .

1.1.1 comportement de la solution au voisinage d'une frontière non régulière

Le comportement de la solution d'un problème aux limites elliptiques généraux au voisinage des points non réguliers de la frontière .

Il est montré que la solution au voisinage de ces points se laisse représenter sous la forme d'une série asymptotique et d'une fonction indéfiniment différentiable .

Les termes de cette série continûment les solution spéciales des problèmes aux limites homogènes formulés pour des domaines: (un cône si on a à la surface un point conique, et pour le coin si on a une arête).
cette solution dépend uniquement des caractéristiques locales (de l'angle ou plan et du type de conditions aux limites), on remarque qu'il convient d'exclure de l'ensemble des solutions, obtenues pour les problèmes aux limites homogènes, celles qui conduisent à une énergie illimitée.

En effet, si l'on procède à une "régularisation" de la singularité c'est-à-dire au remplacement de la partie non régulière de la frontière par une surface régulière .

L'énergie est finie, de sorte que lors du passage à une surface non régulière seuls auront une signification physique, les solutions pour les quelles l'énergie reste limitée. Après élimination des solutions à énergie illimitée.

On cherche à mettre en évidence le terme qui contient les dérivées présentant la plus forte singularité et par conséquent complique, le plus la réalisation du schéma de calcul. les termes différentiables plus d'une fois ne posent pratiquement pas des problèmes de calcul et leur mise en évidence préliminaire n'est pas nécessaire .

Et ce qui concerne le calcul des facteurs constants, il sera considéré un peu plus loin .

1.2 Notion sur le domaine de travail

Nous commençons par les notations suivantes :

Soit Ω est un ouvert plan de $\mathbb{R}^2$,borné et à frontière polygonale Γ.

Γ sera donc la réunion d'un nombre fini de segments linéaires Γ_j, pour $j = 1, 2, 3, ..., N$.

S_j désignera l'origine de la frontière Γ_j pour $j = 1, 2, 3, ..., N$ étant orientée dans le sens direct φ_j désignera la mesure de l'angle formé par Γ_j et Γ_{j-1} vers l'intérieur de Ω .

On notera ν_j le vecteur normal à Γ_j orientée vers l'extérieurs de Ω, et τ_j le vecteur unitaire tangent à Γ_j et orientée dans le sens de Γ_j.

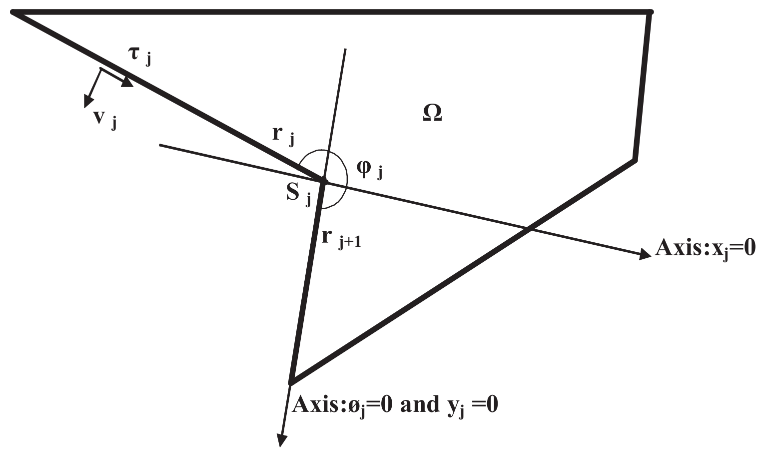

Fig 1 Notion sur la polygone

Soit M un point et on note la distance entre de M à S_j par l'angle θ_j entre Γ_{j+1} à $S_j(M)$ au de trigonométrique Γ_j est semi axe $\theta_j = \varphi_j$ avec Γ_{j+1} est semi axe $\theta_j = 0$.En compote de coordonnée polaire pour S_j coin définie par: $x_j = \rho_j \cos\theta_j$ et $y_j = \rho_j \sin\theta_j$.

Par plus on a détail voir Grisvard [9] et anisi Grisvard[8].

1.2.1 Partition de l'unité dans le polygone

Soit Ω un ouvert plan de sommet S_j et à frontière polygonale Γ_j pour $j = 1, 2, 3, ..., N$.

N étant le nombre des sommets du polygone Ω.

On définit un domaine Ω_{φ_j} pour $j = 1, 2, 3, ..., N$ un secteur plan infini d'ouverture φ_j.

Soit donc w_j pour $j = 0, 1, 2, 3, ..., N$ une partition de l'unité de classe $C^{\infty}(\Omega)$ du polygone qui isole chacun de sommet S_j pour $j = 1, 2, 3, ..., N$.

S_j étant le sommet de l'angle de l'ouverture φ_j pour $j = 1, 2, 3, ..., N$.

Soit la fonction de troncature w_j qui définie comme suite :

$$w_j = \begin{cases} 1 & \text{dans } V(S_j) \cap \Omega_{\varphi_j}, j = 1, 2, 3, ..., N \\ 0 & \text{dans } \Omega \backslash V(S_j) \cap \Omega_{\varphi_j} \end{cases}$$

où,$V(S_j)$ un voisinage du sommet S_j, $j = 1, 2, 3, ..., N$.

Soit $X + \sum\limits_{j=1}^{N} w_j = 1_{\Omega}$, X est une fonction troncature sur Ω,et comme $\sum\limits_{j=1}^{N} w_j = 1$,alors la fonction troncature donnée par :

$$X = \begin{cases} 0 & \text{dans } V(S_j) \cap \Omega_{\varphi_j}, j = 1, 2, 3, ..., N \\ 1 & \text{dans } \Omega \backslash V(S_j) \cap \Omega_{\varphi_j} \end{cases}$$

X est une fonction définie sur un ouvert O (qui est en fait le polygone privés des voisinages des ses sommets).

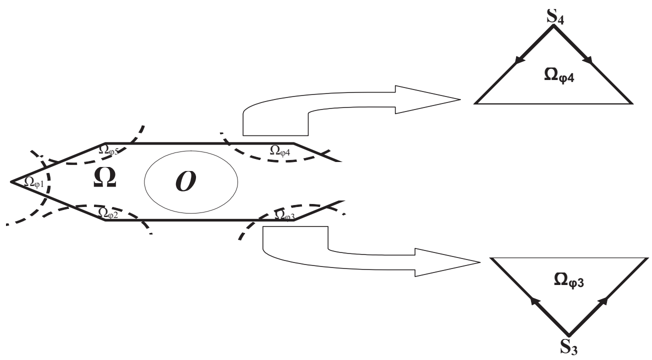

Fig 2 L'angle du polygone à chaque secteur plan

φ_j est l'ouverture de secteur plan infini on a pour chaque Ω_{φ_j} du Ω_{φ} .

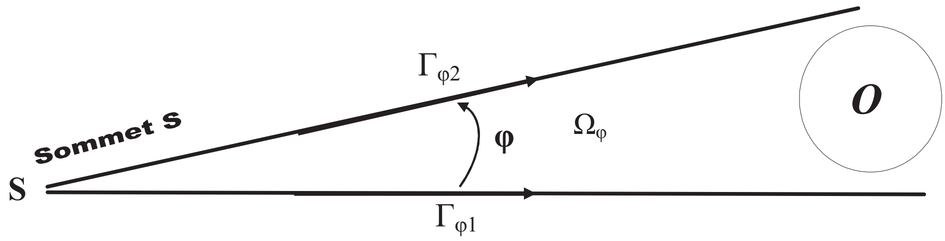

Fig 3 Partition de l'unité du polygone

en évidence par rotation et par translation on peut toujours ramener le sommet de Ω_{φ_j} à l'origine en coordonnés locales.

Nous étudions le problème dans un secteur plan infini d'ouverture φ qu'on note Ω_φ,

défini par:

$$\Omega_\varphi = \{(\rho, \theta) \backslash \ \ \rho > 0, 0 < \theta < \varphi < 2\pi\} \tag{1.1}$$

On désigne par Γ_φ la frontière du secteur Ω_φ qui est la réunion de deux demi droites issues de l'origine et d'équation respective $\theta = 0$ et $\theta = \varphi$.

les coordonnées polaires sont adaptées plus à la géométrique du domaine Ω_φ.

1.3 Définition d'une fonction poids

On introduit une fonction $\lambda(\rho)$:

$\lambda(\rho)$ est une fonction indéfiniment différentiable à l'intérieur de Ω_φ (resp $\overline{\Omega_\varphi}$) et positive dans Ω_φ et de frontière Γ_φ (ne s'annule pas dans Ω_φ), qui assure le recordement de classe $C^\infty(\Omega_\varphi)$, la formule donnée par :

$$\lambda(\rho) = \begin{cases} \rho^\alpha & \text{si } 0 < \rho < \rho_1, 0 < \alpha \leq 1 \\ \delta(\rho) & \text{si } \rho_1 \leq \rho < \rho_2 \\ 1 & \text{si } \rho \geq \rho_2 \end{cases} \tag{1.2}$$

ρ_1 suffisamment petit, ρ_2 suffisamment grand .

1.4 Notion du problème de diffusion perturbée

1.4.1 Définition du problème de diffusion

Soit Ω un ouvert plan et à frontière polygonale Γ, Q désigne l'ouvert de $]0, T[\ \times \Omega$, $T > 0$ et de frontière $\sum$.

Etant donné f .On cherche une fonction u, de la solution avec la condition de Dirichlet et de la condition de Neumann suivant:

Cas du problème avec la condition de Dirichlet

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{dans } Q \\ u = 0 & \text{sur } \sum \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) \end{cases} \tag{1.3}$$

Cas du problème avec la condition de Neumann

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{dans } Q \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{sur } \sum \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) \end{cases} \tag{1.4}$$

Ce problème intervient dans le plusieurs applications, comme la théorie de la chaleur, la diffusion des gaz, etc...

Pour des applications physiques, il convient de se donner en plus de l'équation principale, la température à l'instant $t = 0$ et le régime thermique au bord ,ce qui manifeste dans ce problème la condition au limite $u = \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0$ sur $\sum$.

1.4.2 Définition du problème de diffusion perturbée

Soit $F(u)$ une perturbation composée des équations différentielles semi linéaires du second ordre et du type parabolique, on cherche une fonction u solution du problème suivant :

Cas du problème avec la condition de Dirichlet

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + F(u) + f & \text{dans } Q \\ u = 0 & \text{sur } \sum \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) \end{cases} \tag{1.5}$$

Cas du problème avec la condition de Neumann

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + F(u) + f & \text{dans } Q \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{sur } \sum \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) \end{cases} \tag{1.6}$$

1.5 Principe du noyau de Green

Dans l'étude de comportement d'un fluide incompressible dans un tube de longueur l, on est ramené à un problème aux dérivées partielles.

c'est la recherche d'une fonction u telle que :$\dfrac{d^2u(x)}{dx^2} + \kappa^2 u(x) = p(x)$, pour $0 \leq x \leq l$ avec la condition frontière pour $x = 0$, et $x = l$.

une façon de résoudre ce problème est de déterminer un noyau de Green $G(x, y)$ de deux variables. La fonction u est alors définie par : $u(x) = \int\limits_0^l G(x, y)p(x)dy.$

1.6 Transformation de Mellin et ses propriétés

La transformation de Mellin est très bien adaptée aux domaines qui présentent des angles (des polygone, des cônes ou des polyèdre), le passage en coordonnées polaires, (sphériques ou cylindriques, pour les cônes et les polyèdres), allége les calculs, la transformation de Mellin joue le même rôle que celui joué par la transformation de Fourier dans le cas classique où on utilise les coordonnées cartésiennes .

Définition 1.6.1:

Si $f(x)$ est définie sur $\mathbb{R}_+$, on appelle transformation de Mellin de f la fonction $\widetilde{f}$ définie par : $\widetilde{f}(\sigma) = \int\limits_0^\infty f(x)x^\sigma \frac{dx}{x}$, $\sigma \in \mathbb{C}$ lorsque cette intégrale est converge.

Quelques propriétés:

1. $\widetilde{\left(\frac{df}{dx}\right)}(\sigma) = -(\sigma-1)\widetilde{f}\ (\sigma-1)$.
2. $\widetilde{(x^\alpha f)}(\sigma) = \widetilde{f}(\sigma+\alpha)$.
3. $\widetilde{\left(x\frac{df}{dx}\right)}(\sigma) = -\sigma\widetilde{f}(\sigma)$.
4. $\widetilde{\left(\frac{d^n f}{dx^n}\right)}(\sigma) = (-1)^n(\sigma-1)(\sigma-2).......(\sigma-n)\widetilde{f}\ (\sigma-n)$.

Si $\widetilde{f}(\sigma)$ est définie pour $\epsilon_1 < \operatorname{Re}\sigma < \epsilon_2$, alors $f(x) = \lim\limits_{\nu\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\epsilon-i\nu}^{\epsilon+i\nu} \widetilde{f}(\sigma)\ x^{-\sigma}d\sigma$, pour tout ε fixe telle que $\epsilon_1 < \epsilon < \epsilon_2$.

1.6.1 Problème obtenu après Transformation de Mellin

On considère, pour simplifier, le problème modèle pour des opérateurs homogènes à coefficients constants.

$$\begin{cases} L(D)u = f & \text{dans} \quad \Omega \\ B_j(D)u = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_j \text{ , pour } 1 \leq j \leq m \end{cases} \tag{1.7}$$

Où, L un opérateur différentiel homogène à coefficients constants d'ordre $2m$, B est un opérateur différentiel d'ordre m_j pour $0 \leq m_j \leq 2m-1$.

On suppose que (L, B_j) est un opérateur au sens de "Shapiro-Lopatinski " [3] page 10.

Proposition 1.6.1:

Soit L un opérateur différentiel homogène à coefficients constants d'ordre $2m$ par rapport aux variable x et y . Alors en coordonnées polaires ρ^{2m} L est un polynôme de degré $2m$ par rapport à la variable $\rho\dfrac{\partial}{\partial\rho}$.

Démonstration: voir Mérigot [3] .

Conséquence 1.6.2:

Nous utiliserons cette proposition pour le cas particulier où $m = 1$ et $L = \Delta$. l'opérateur $\rho^2\ \Delta$ est donc un polynôme du second degré par rapport à $\rho\dfrac{\partial}{\partial\rho}$ s'écrit :

$$\rho^2\ \Delta = \left[\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right]^2 + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}.$$

cette formule est très utile sur tout pour établir une formule de Green adaptée à notre problème précédent et pour mettre en évidence des inégalités à priori .

Remarque 1.6.3 :

Il y a une certaine analogie entre la transformation de Mellin et celle de Fourier, on peut passer de l'une à l'autre en effectuant un changement de variable convenable comme par exemple: $\rho = e^{-t}$.

Si l'on pose $\sigma = i\xi$, on aura : $\widetilde{f}(\sigma) = \int\limits_0^\infty f(\rho)\rho^\sigma \frac{d\rho}{\rho}$.

et en posant $\rho = e^{-t}$,il vient : $\widetilde{f}(\sigma) = \int\limits_0^\infty f(e^{-t})e^{-it\xi}dt = \int\limits_0^\infty F(t)e^{-it\xi}dt = \widehat{F}(\xi)$.

qui n'est autre que la transformée de Fourier de $F(t) = f(\rho)$.

En utilisant cette analogie on peut appliquer le théorème de Plancheral[28] ,relatif à la transformation de Fourier et faire le changement de variable ci-dessus pour obtenir l'équivalent du théorème de Plancheral pour la transformation de Mellin .

Chapitre 2

Position du problème

Dans ce chapitre on va étudier le problème de Poisson dans un domaine plan du polygone, on a montré que l'utilisation d'une fonction de poids convenable allège les calculs surtout aux voisinages des points singuliers, et par conséquent le bon choix de l'espace du travail qui traite la solution du problème dans un secteur plan Ω_φ du polygone (φ ouverture du Ω_φ).

2.1 Principe du problème

Soit Ω un ouvert plan à frontière polygonale Γ telle que :

$$\Omega = \left(\cup_{j=1}^{N} \Omega_{\varphi_j} \right) \cup O$$

On considère le problème suivant :

$$(P) \quad \begin{cases} \Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ Bu = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \tag{2.1}$$

où, Δ est l'opérateur de Laplace, et B est un opérateur différentiel aux dérivées partielles d'ordre 0 ou 1, défini sur la frontière Γ, on ne considérera ici que les deux cas de la condition de Dirichlet et celle de Neumann et f étant donnée dans $L^2(\Omega)$.

2.2 Résultats de Grisvard

La solution du problème suivant :

$$(P)\quad \begin{cases} \Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \tag{2.2}$$

Il n'existe dans $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ que si le polygone Ω est convexe c'est à dire que tout les angles sont saillants, cela découle du fait que la solution de ce problème est de la forme $u_j = u_0 + a\rho^{\frac{j\pi}{\varphi}} \sin \frac{j\pi}{\varphi}\theta$ telle que a est constante, cette solution n'est pas nécessaire dans $H^2(\Omega)$ lorsque $\varphi > \pi$. Car $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \notin L^2(\Omega)$.

Tandis que l'unicité de la solution est toujours assurée, il suffit de considérer l'unicité variationnelle, pour plus de détail voir Grisvard [5].

Le Laplacien est donc un isomorphisme de $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ lorsque le polygone Ω convexe .

Ce résultat est encore valable lorsque Ω est un polyèdre voir Grisvard [6].

2.3 Le problème dans un secteur plan

Nous étudierons le problème dans un secteur plan infini d'ouverture φ qu'on note Ω_φ c'est dire : $\Omega_\varphi = \{(\rho, \theta)\backslash\ \rho > 0, 0 < \theta < \varphi < 2\pi\}$, on désigne Γ_φ la frontière de Ω_φ.

La frontière de Ω_φ désigne la réunion de deux demi droites issues de l'origine et d'équation respectives $\theta = 0$ et $\theta = \varphi$.

Le problème (P) sur Ω équivaut au cas le problème classique dans un ouvert plan régulier O et au cas le problème dans le secteur plan Ω_φ d'ouverture φ telle que O est un ouvert plan régulier de la classe $C^1(\Omega)$.

Les coordonnées polaires sont mieux adaptées à la géométrie du domaine Ω_φ.

Pour étudier ce type de problème sur Ω_φ, on affecte l'opérateur de Laplace Δ d'une fonction poids $\lambda(\rho)$ qui est une fonction indéfiniment différentiable à l'intérieur de Ω_φ et qui ne s'annule pas dans Ω_φ.

En passant en coordonnées polaires dans le problème (2.1) ceci s'écrit dans le secteur Ω_φ sous la forme :

$$(P_\varphi) \begin{cases} \lambda(\rho)\Delta u = \lambda(\rho) f & \text{dans } \Omega_\varphi \\ Bu = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi \end{cases} \tag{2.3}$$

2.4 Définition de l'espace de travail $E_\alpha(\Omega_\varphi)$

Nous étudierons les problèmes elliptiques définis dans un polygone plan et nous essayerons d'établir une théorie analogue à celle des problèmes elliptiques définis dans un ouvert régulière.

Alors l'étude d'un bon choix d'espace du travail du problème direct dans un secteur plan, c'est pourquoi on étudie le problème suivant :

$$(P_\varphi) \begin{cases} \lambda(\rho)\Delta u = \lambda(\rho) f = h & \text{dans } \Omega_\varphi \\ Bu = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi \end{cases} \tag{2.4}$$

$h = \lambda(\rho) f$ étant donnée dans $L^2(\Omega_\varphi), h$ désigne ici la restriction de la fonction $\lambda(\rho) f$ au secteur Ω_φ.

Supposons que le sommet de Ω_φ se situé à l'origine et soit $\lambda(\rho)$ la fonction poids définie par (1.2).On va étudier ce problème au voisinage de l'origine dans un secteur plan Ω_φ, car le seul problème qui se pose quant à la régularité des solutions du problème (2.4) se situé au voisinage de l'origine et d'après (1.2), on va donc étudier le problème suivant:

$$(P_\varphi) \quad \begin{cases} \rho^\alpha \Delta u = \rho^\alpha f = h & \text{dans } \Omega_\varphi \\ Bu = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi \end{cases} \tag{2.5}$$

On va commencer en utilisant comme conditions aux limites celles de Dirichlet (le cas où B est l'opérateur identité), c'est à dire qu'on va d'abord étudier le problème suivant:

$$(P_\varphi) \quad \begin{cases} \rho^\alpha \Delta u = \rho^\alpha f = h & \text{dans } \Omega_\varphi \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi \end{cases} \tag{2.6}$$

de même pour la condition de Neumann (le cas où $B = \dfrac{\partial}{\partial \eta}$) suivant:

$$(P_\varphi) \quad \begin{cases} \rho^\alpha \Delta u = \rho^\alpha f = h & \text{dans } \Omega_\varphi \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi \end{cases} \tag{2.7}$$

on a l'opérateur s'écrit en coordonné polaire: $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \rho} + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$

la solution de ce problème (2.5) est de la forme $u_j = u_0 + a\rho^{\frac{j\pi}{\varphi}} \sin \frac{j\pi}{\varphi}\theta$, a est constante, il est commandé de chercher la solution du problème(2.5) dans un espace fonctionnel, on constate que $\rho^\alpha \dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \in L^2(\Omega_\varphi)$ ce qui nous donne l'idée d'affecter le Laplacien d'une fonction poids qui dépend de ρ.

On choisit donc un espace fonctionnel avec poids qu'on défini par :

$$E_\alpha(\Omega_\varphi) = \left\{ u \in H^1(\Omega_\varphi) \setminus \rho^\alpha D^2 u \in L^2(\Omega_\varphi) \right\}. \tag{2.8}$$

où, les fonctions u sont à support compact dans $\overline{\Omega_\varphi}$,et le symbole D^2 désigne les dérivées partielles d'ordre 2 par rapport aux variables ρ et η où $\dfrac{\partial}{\partial \eta} = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial \theta}$.

On cherchera la solution de notre problème, si elle existe dans ce espace .

on verra plus loin que E_α est un espace intermédiaire entre H^1 et H^2 .

On munira l'espace $E_\alpha(\Omega_\varphi)$, de la norme suivante (dite norme du graphe):

$$\|u\|_{E_\alpha} = \|u\|_{H^1} + \sum_{|\beta|=2} \left\|\rho^\alpha D^\beta u\right\|. \tag{2.9}$$

Il est plus commandé de chercher la solution du problème (2.6) dans l'espace fonctionnel qu'on note par $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$ et qu'on défini par : $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi) =$ $E_\alpha(\Omega_\varphi) \cap$ $H_0^1(\Omega_\varphi)$ car on a une condition de Dirichlet homogène.

Où l'espace $E_\alpha(\Omega_\varphi)$ est défini par la formule (2.8), on muni l'espace $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$ par la norme induite par (2.9) qui en fait un espace de Banach.

Proposition 1:

Muni de la norme du graphe défini par (2.9), l'espace $E_\alpha(\Omega_\varphi)$ est un espace de Hilbert.

Preuve. *L'espace $E_\alpha(\Omega_\varphi)$ est un espace de Banach d'après sa définition et en le munissante la norme(2.9), il reste à définir un produit scalaire, on défini ce produit scalaire par:*

$$\langle u, v\rangle_{E_\alpha} = \langle u, v\rangle_{H^1} + \sum_{|\beta|=2} \left\langle \rho^\alpha D^\beta u, \rho^\alpha D^\beta v\right\rangle_{L^2}$$

où l'opérateur D désigne les dérivées partielles par rapport aux variables ρ et η respectivement, et $\dfrac{\partial}{\partial\eta} = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\theta}$. ■

2.5 Propriété de l'espace $E_\alpha(\Omega_\varphi)$

Définition 2.5.1: On pose pour $\alpha = 0$, $E_0 = H^2_{\rho,\eta}(\Omega_\varphi)$, et pour $\alpha = 1$, $E_1 = E$.

On pose : $$H^1_{x,y}(\Omega_\varphi) = \left\{u \in L^2(\Omega_\varphi), \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \text{ sont dans } L^2(\Omega_\varphi)\right\}.$$

$$H^1_{\rho,\eta}(\Omega_\varphi) = \left\{u \in L^2(\Omega_\varphi), \frac{\partial u}{\partial \rho}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \text{ sont dans } L^2(\Omega_\varphi)\right\}.$$

Proposition 2.5.2:

L'espace $H^1_{x,y}(\Omega_\varphi)$ coïncide avec l'espace $H^1_{\rho,\eta}(\Omega_\varphi)$.

Preuve : *On a :*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos\theta \frac{\partial u}{\partial \rho} - \sin\theta \frac{\partial u}{\partial \eta} \ \ , \ \frac{\partial u}{\partial y} = \cos\theta \frac{\partial u}{\partial \eta} + \sin\theta \frac{\partial u}{\partial \rho} \tag{2.10}$$

Il est clair que si $u, \dfrac{\partial u}{\partial \rho}, \dfrac{\partial u}{\partial \eta}$ sont dans $L^2(\Omega_\varphi)$ alors $u, \dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}$ sont dans $L^2(\Omega_\varphi)$. De même on a :

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \cos\theta \frac{\partial u}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial u}{\partial y} \ , \ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \cos\theta \frac{\partial u}{\partial y} - \sin\theta \frac{\partial u}{\partial x} \tag{2.11}$$

d'où si $u, \dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}$ sont dans $L^2(\Omega_\varphi)$ alors $u, \dfrac{\partial u}{\partial \rho}, \dfrac{\partial u}{\partial \eta}$ sont dans $L^2(\Omega_\varphi)$.D'où le résultat.

Remarque 2.5.3:

On déduit que cette proposition n'est pas vraie pour les espaces d'ordre supérieurs on a par exemple $H^2_{x,y}(\Omega_\varphi) \subset H^2_{\rho,\eta}(\Omega_\varphi)$.

cette inclusion est évidente, mais la réciproque n'est pas nécessairement varie .

Proposition 2.5.4:

si u est dans $E_\alpha(\Omega_\varphi)$, alors $\rho^{\alpha-1}\dfrac{\partial u}{\partial \rho}$ est dans $L^2(\Omega_\varphi)$.

Preuve:

On sait que si $u \in E_\alpha(\Omega_\varphi)$ alors u est à support compact dans $\overline{\Omega_\varphi}$, et $u \in H^1(\Omega_\varphi)$ donc $\dfrac{\partial u}{\partial \rho}$ est dans $L^2(\Omega_\varphi)$.

Montrons que $\rho^{\alpha-1}\dfrac{\partial u}{\partial \rho}$est dans $L^2(\Omega_\varphi)$ .On a donc $\left\|\rho^{\alpha-1}\dfrac{\partial u}{\partial \rho}\right\|^2 = \displaystyle\int_0^\varphi\int_0^\infty \rho^{2\alpha-2}\left|\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|^2 \rho d\rho d\theta.$

$$Si \quad \rho \geq 1, \quad et\ comme\ 0 < \alpha < 1\ alors\ \left\| \frac{\partial u}{\partial \rho} \right\|^2 \geq \left\| \rho^{\alpha-1} \frac{\partial u}{\partial \rho} \right\|^2,\ car\ \rho^{2\alpha-2} \leq 1.$$

pour $\rho \geq 1$ *la proposition est vérifiée, il reste le cas* $\rho < 1$.

Pour $\rho < 1$, *on a :*

$$\int_0^{\varphi}\int_0^{1} \rho^{2\alpha-2} \left| \frac{\partial u}{\partial \rho} \right|^2 \rho d\rho d\theta = \int_0^{\varphi}\int_0^{\varepsilon} \rho^{2\alpha-2} \left| \frac{\partial u}{\partial \rho} \right|^2 \rho d\rho d\theta + \int_0^{\varphi}\int_{\varepsilon}^{1} \rho^{2\alpha-2} \left| \frac{\partial u}{\partial \rho} \right|^2 \rho d\rho d\theta.$$

Comme la fonction $\rho \to \rho^{2\alpha-2}$ *est décroissante et continue sur le compact* $[\varepsilon, 1]$ *,donc elle est bornée et atteint ses bornes sur ce compact .Donc,*

$$\int_0^{\varphi}\int_0^{1} \rho^{2\alpha-2} \left| \frac{\partial u}{\partial \rho} \right|^2 \rho d\rho d\theta \quad \leq \int_0^{\varphi}\int_0^{\varepsilon} \rho^{2\alpha-2} \left| \frac{\partial u}{\partial \rho} \right|^2 \rho d\rho d\theta + \varepsilon^{2\alpha-2} \int_0^{\varphi}\int_{\varepsilon}^{1} \left| \frac{\partial u}{\partial \rho} \right|^2 \rho d\rho d\theta$$

Pour étudier l'intégrale $\int_0^{\varphi}\int_0^{\varepsilon} \rho^{2\alpha-2} \left| \frac{\partial u}{\partial \rho} \right|^2 \rho d\rho d\theta$, *pour* ε *suffisamment petit non nul, la fonction* $\rho \to \rho^{2\alpha-2}$ *admet de développement en série entier .En utiliser la fonction suivant:*

$$\rho \to \rho^{2\alpha-2} = (1 + \rho - 1)^{2\alpha-2}.$$

On a pour $|X| = |\rho - 1| < 1$ *alors* $(1+X)^\beta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \beta(\beta-1)(\beta-2)....(\beta-n+1)X^n$

et on a $|\rho - 1| < 1$ *car* $0 < \rho < \varepsilon < 1$

Posons donc $X = \rho - 1$ *et* $\beta = 2\alpha - 2$, *et appliquant le développement en série entier, on aura donc*

$$\int_0^{\varphi}\int_0^{\varepsilon} \rho^{2\alpha-2} \left| \frac{\partial u}{\partial \rho} \right|^2 \rho d\rho d\theta = \int_0^{\varphi}\int_0^{\varepsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (2\alpha - 2)(2\alpha - 3)....(2\alpha - n - 1)(\rho - 1)^n \left| \frac{\partial u}{\partial \rho} \right|^2 \rho d\rho d\theta$$

D'où,

$$0 < \left| \int_0^\varphi \int_0^\varepsilon \rho^{2\alpha-2} \left| \frac{\partial u}{\partial \rho} \right|^2 \rho d\rho d\theta \right| = \left| \int_0^\varphi \int_0^\varepsilon (1+\rho-1)^{2\alpha-2} \left| \frac{\partial u}{\partial \rho} \right|^2 \rho d\rho d\theta \right|$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(2\alpha-2)(2\alpha-3)....(2\alpha-n-1) \int_0^\varphi \int_0^\varepsilon |\rho-1|^n \left| \frac{\partial u}{\partial \rho} \right|^2 \rho d\rho d\theta$$

$$\leq S \int_0^\varphi \int_0^\varepsilon \left| \frac{\partial u}{\partial \rho} \right|^2 \rho d\rho d\theta$$

où S est la somme de la série entier de coefficient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(2\alpha-2)(2\alpha-3)....(2\alpha-n-1)$$

Alors on a :

$$0 < \left| \int_0^\varphi \int_0^\varepsilon \rho^{2\alpha-2} \left| \frac{\partial u}{\partial \rho} \right|^2 \rho d\rho d\theta \right| \leq S \int_0^\varphi \int_0^\varepsilon \left| \frac{\partial u}{\partial \rho} \right|^2 \rho d\rho d\theta,$$

et comme $\dfrac{\partial u}{\partial \rho} \in L^2$, on a le résultat désiré.

Proposition 2.5.5:

Si α et β deux réel pris dans l'intervalle $[0,1]$, et tels que $\alpha < \beta$ Alors $E_\alpha \subset E_\beta$.

Preuve:

Soient α et β deux réels tels que $0 < \alpha < \beta < 1$, monterons que $E_\alpha \subset E_\beta$ (sont espaces définis par (2.8)).

Si $u \in E_\alpha$, alors $\rho^\alpha D^2 u \in L^2(\Omega_\varphi)$.Alors on a si $\rho^{2\beta} \leq \rho^{2\alpha}$ l'inégalité suivante:

$$\left\| \rho^\beta D^2 u \right\|^2 \leq \left\| \rho^\alpha D^2 u \right\|^2$$

ce qui implique que $\beta \log \rho \leq \alpha \log \rho$, d'où $(\beta - \alpha)\log \rho \leq 0$, et comme $(\beta - \alpha) \geq 0$, alors la proposition est vérifiée pour $\rho < 1$.

Il reste à vérifier le résultat pour le cas $\rho \geq 1$, *on a par hypothèse* $\rho^\alpha \dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \in L^2(\Omega_\varphi)$, *car* $u \in E_\alpha$, alors on a:

$$\left\| \rho^\beta \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \right\|^2 = \int_0^\varphi \int_1^\infty \rho^{2(\beta-\alpha)} \rho^{2\alpha} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \right|^2 \rho d\rho d\theta = \int_0^\varphi \int_1^\infty \rho^{2(\beta-\alpha)} \rho^{2\alpha} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \right|^2 \rho d\rho d\theta.$$

Posons $w = \rho^{2\alpha} \dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}$ *alors on a:* $\left\| \rho^\beta \dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \right\|^2 = \displaystyle\int_0^\varphi \int_1^\infty \rho^{2(\beta-\alpha)} |w|^2 \rho d\rho d\theta$

d'autre part:

$$\int_0^\varphi \int_1^\infty \rho^{2(\beta-\alpha)} |w|^2 \rho d\rho d\theta = \int_0^\varphi \int_1^A \rho^{2(\beta-\alpha)} |w|^2 \rho d\rho d\theta + \int_0^\varphi \int_A^\infty \rho^{2(\beta-\alpha)} |w|^2 \rho d\rho d\theta.$$

Comme la fonction $\rho \rightarrow \rho^{2(\beta-\alpha)}$ *est continue et croissante sur le compact* $[1, A]$ *(A fini) on a donc :*

$$\int_0^\varphi \int_A^\infty \rho^{2(\beta-\alpha)} |w|^2 \rho d\rho d\theta \leq A^{2(\beta-\alpha)} \int_0^\varphi \int_A^\infty |w|^2 \rho d\rho d\theta.$$

Pour l'étude de l'intégrale $\displaystyle\int_0^\varphi \int_A^\infty \rho^{2(\beta-\alpha)} |w|^2 \rho d\rho d\theta$, *comme la fonction* u *est à support compact entraîne que la fonction* w *l'est aussi, donc il suffit de choisir* A suffisamment grand, *et* $Supp w \subset [1, A] \times [0, \varphi]$ *. D'où,*

$$\int_0^\varphi \int_A^\infty \rho^{2(\beta-\alpha)} |w|^2 \rho d\rho d\theta = 0.$$

la proposition est aussi vérifiée pour $\rho \geq 1$.

Remarque 2.5.6 :

On a bien entendu l'espace $E_\alpha(\Omega_\varphi)$ peut s'écrire sous la forme :

$$E_\alpha(\Omega_\varphi) = \{u \in H^1(\Omega_\varphi), \text{telle que } \rho^\alpha u \in H^2(\Omega_\varphi)\}.$$

les fonctions sont à support compact dans $\overline{\Omega_\varphi}$.

Proposition 2.5.7:

l'espace $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$ peut s'écrire sous la forme suivante:

$$E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi) = \{u \in H_0^1(\Omega_\varphi), \text{ telle que } \rho^\alpha u \in H_0^2(\Omega_\varphi)\}.$$

où u les fonctions sont à support compact dans $\overline{\Omega_\varphi}$.

Preuve:

Posons $G_{\alpha,0}(\Omega_\varphi) = \{u \in H_0^1(\Omega_\varphi), \text{ telle que } \rho^\alpha u \in H_0^2(\Omega_\varphi)\}$, *monterons que par double inclusion ces deux espaces coïncident.*

Soit $u \in G_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$, on a donc $u \in H_0^1(\Omega_\varphi)$ et $\rho^\alpha u \in H_0^2(\Omega_\varphi)$ alors on a :

$\rho^\alpha \dfrac{\partial u}{\partial \rho} + \alpha\rho^{\alpha-1}u \in H_0^1(\Omega_\varphi)$ *et donc* $\rho^\alpha \dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + 2\rho^{\alpha-1}\dfrac{\partial u}{\partial \rho} \in L^2(\Omega_\varphi)$ *et comme d'après la proposition (2.5.4) où* $\rho^{\alpha-1}\dfrac{\partial u}{\partial \rho} \in L^2(\Omega_\varphi)$ *on a donc* $\rho^\alpha \dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \in L^2(\Omega_\varphi)$.

De même, on a $\rho^\alpha u \in H_0^2(\Omega_\varphi)$ implique que $\rho^\alpha \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \theta} \in H_0^1(\Omega_\varphi)$ *d'où* $\rho^{\alpha-2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \in L^2(\Omega_\varphi)$.

On a aussi $\rho^\alpha u \in H_0^2(\Omega_\varphi)$ implique que $\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial^2}{\partial\rho\partial\theta}(\rho^\alpha u) \in L^2(\Omega_\varphi)$, comme $\rho^\alpha \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \theta} \in H_0^1(\Omega_\varphi)$ et $H_0^1(\Omega_\varphi) \subset L^2(\Omega_\varphi)$ donc $\rho^{\alpha-1}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\theta} \in L^2(\Omega_\varphi)$ et on a donc le résultat.

D'où, $G_{\alpha,0}(\Omega_\varphi) \subset E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$, et on vérifie aisément et par le même procédé l'inclusion dans l'autre sens.

Proposition 2.5.8 :

L'espace $E_\alpha(\Omega_\varphi)$ est un espace intermédiaire entre les espaces $H^1(\Omega_\varphi)$ et $H^2(\Omega_\varphi)$.

Preuve :

il suffit de montrer que $H^2(\Omega_\varphi) \subset E_\alpha(\Omega_\varphi)$ car l'inclusion, $E_\alpha(\Omega_\varphi) \subset H^1(\Omega_\varphi)$, découle de la définition même de l'espace $E_\alpha(\Omega_\varphi)$.

Soit u une fonction à support compact dans $\overline{\Omega_\varphi}$, si $u \in H^2(\Omega_\varphi)$, alors $u \in H^2_{\rho,\eta}(\Omega_\varphi)$ car $H^2(\Omega_\varphi) \subset H^2_{\rho,\eta}(\Omega_\varphi)$, donc $u \in H^1_{\rho,\eta}(\Omega_\varphi)$ et $D^2u \in L^2(\Omega_\varphi)$, l'opérateur D^2 désigne de *dérivation d'ordre* 2 *par rapport aux variables ρ et η, on a d'après la proposition(2.5.2), on a:*

$$H^1_{\rho,\eta}(\Omega_\varphi) = H^1_{x,y}(\Omega_\varphi)$$

Pour $0 < \alpha < 1$, et comme les fonctions sont à support compact dans $\overline{\Omega_\varphi}$, il existe r_0 une constante finie, telle que:

$$\int_{\Omega_\varphi} \left|\rho^\alpha D^2u\right|^2 dxdy = \int_0^\varphi\int_0^{r_0} \left|\rho^\alpha D^2u\right|^2 dxdy \leq r_0^\alpha \int_0^\varphi\int_0^{r_0} \left|D^2u\right|^2 dxdy \leq \int_0^\varphi\int_0^{\infty} \left|D^2u\right|^2 dxdy$$

et comme $D^2u \in L^2(\Omega_\varphi)$ on a donc $\rho^\alpha D^2u \in L^2(\Omega_\varphi)$ d'où $u \in E_\alpha(\Omega_\varphi)$.

Remarque 2.5.9 :

L'espace $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$ est un espace intermédiaire entre les espaces $H^1_0(\Omega_\varphi)$ et $H^2_0(\Omega_\varphi)$.

Proposition 2.5.10 :

L'espace $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$ est un espace de Banach réflexif .

Preuve:

Il suffit démontrer que l'espace $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$ est fermée dans $H^1_0(\Omega_\varphi)$, pour ceci considère une suite de Cauchy $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$ qui converge vers U dans $H^1_0(\Omega_\varphi)$, monterons que $U \in E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$.

Comme $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers U dans $H_0^1(\Omega_\varphi)$, la suite $(U_n, \dfrac{\partial U_n}{\partial \rho}, \dfrac{\partial U_n}{\partial \eta})$ converge vers $(U, \dfrac{\partial U}{\partial \rho}, \dfrac{\partial U}{\partial \eta})$ dans l'espace $L^2(\Omega_\varphi)$, et comme $L^2(\Omega_\varphi)$ s'injecte continument dans D', donc la convergence est aussi valable dans D', et comme l'opérateur de dérivation est continu [16], on a donc $(U_n, \dfrac{\partial U_n}{\partial \rho}, \dfrac{\partial U_n}{\partial \eta})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $(U, \dfrac{\partial U}{\partial \rho}, \dfrac{\partial U}{\partial \eta})$ dans $D'(\Omega_\varphi)$, et comme la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$ donc les suites $(\dfrac{\partial^2 U_n}{\partial \rho^2}, \dfrac{\partial^2 U_n}{\partial \rho \partial \eta}, \dfrac{\partial^2 U_n}{\partial \eta^2})$ *sont dans* $L^2(\Omega_\varphi)$ qui est complet, d'où la convergence de ces suites dans $L^2(\Omega_\varphi)$, et donc on a la fermeture de l'espace $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$ dans $H_0^1(\Omega_\varphi)$, d'où le résultat.

Proposition 2.5.11:

L'injection de l'espace $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$ dans $H_0^1(\Omega_\varphi)$ est compacte.

Preuve :

Il suffit de montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$ qui converge faiblement vers u dans $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$converge fortement vers u dans $H_0^1(\Omega_\varphi)$, est relativement compacte. ce résultat démontrée pour $\alpha = 1$.

Par plus détail voir [14], la démonstration est exactement la même pour $0 < \alpha \leq 1$.

Chapitre 3

Etude de l'existence et de l'unicité de la solution

Pour étudier l'existence de la solution dans l'espace $E_\alpha(\Omega_\varphi)$ du problème (2.6),on va montrer que l'opérateur $\rho^\alpha\Delta$ est fermé dans cet espace fermé, on va montrer aussi que la noyau du problème est de dimension finie et ceci en utilisant une inégalité de priori qui découle le lemme de Peetre voir Lions- Magenes[4] page136, et en évidence le noyau de la solution du problème dans le secteur plan polygone.

3.1 Inégalité à priori

3.1.1 Cas du problème non perturbé

On va étudier l'existence du problème non perturbé c'est à dire le terme $F(u) = 0$

suivant:

$$(P_\varphi) \quad \begin{cases} \rho^\alpha \Delta u = \rho^\alpha f = h & \text{dans } \Omega_\varphi \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi \end{cases} \tag{3.1}$$

dans l'espace $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$ pour ceci on utilisera le lemme suivant:

Lemme de Peetre:

Soient E, F, G trois espaces de Banach réflexifs, tel que E s'injecte dans G et cette injection est compacte, et soit L un opérateur linéaire continu de E dans F .

Alors les conditions suivantes sont équivalents :

1)$-$L'image de L est fermée dans F, et L a un noyau de dimension finie.

2)$-$Il existe une constante $K > 0$ telle que :

$$\|u\|_E \leq K \left\{ \|Lu\|_F + \|u\|_G \right\}. \tag{3.2}$$

On va appliquer ce lemme aux espaces :

$$E = E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi);\ F = L^2(\Omega_\varphi); G = H_0^1(\Omega_\varphi).$$

il est clair que F et G sont des espaces de Banach réflexifs car ce sont des espaces de Hilbert et E est un espace de Hilbert et on a :$H_0^2(\Omega_\varphi) \subset E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi) \subset H_0^1(\Omega_\varphi) \subset L^2(\Omega_\varphi)$.

et, il est évident que l'opérateur $\rho^\alpha \Delta$ est linéaire continu de $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$ dans $L^2(\Omega_\varphi)$.Donc toutes les hypothèses du lemme, sont vérifiées voir [14].

Pour montrer que l'image de l'opérateur $L = \rho^\alpha \Delta$ est fermée dans $L^2(\Omega_\varphi)$ et que son noyau est de dimension finie, on établira une inégalité (3.2) qui devient :

$$\|u\|_{E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)} \leq K \left\{ \|Lu\|_{L^2(\Omega_\varphi)} + \|u\|_{H_0^1(\Omega_\varphi)} \right\} \tag{3.3}$$

Pour établir l'inégalité (3.3), on a besoin de l'inégalité suivante:

$$\|u\|_{E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)} \leq K \left\{ \|\rho^\alpha \Delta u\|_{L^2(\Omega_\varphi)} + \|u\|_{H_0^1(\Omega_\varphi)} \right\} \tag{3.4}$$

Pour montrer que l'inégalité (3.4),on commence par l'"utilisation de la transformation de Mellin qui est bien adaptée au domaine dans Ω_φ après la transformation de Mellin au problème suivant:

$$(\widetilde{P_\varphi}) \quad \begin{cases} \widetilde{\rho^\alpha \Delta u} = \widetilde{\rho^\alpha f} = \widetilde{h} & \text{dans } \Omega_\varphi \\ \widetilde{u} = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi \end{cases} \tag{3.5}$$

avec $\widetilde{\rho^\alpha \Delta u}(\sigma, \theta) = \widetilde{\rho^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}}(\sigma, \theta) + \widetilde{\rho^{\alpha-1} \frac{\partial u}{\partial \rho}}(\sigma, \theta) + \widetilde{\rho^{\alpha-2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}}(\sigma, \theta)$ et on obtient :

$\widetilde{\rho^\alpha \Delta u}(\sigma, \theta) = \dfrac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial \theta^2}(\sigma + \alpha - 2, \theta) + (\sigma + \alpha - 2)^2 \widetilde{u}(\sigma + \alpha - 2, \theta) = \widetilde{h}$ et $\widetilde{h} \in L^2(\Omega_\varphi)$.

il vient : $\quad \dfrac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial \theta^2}(\sigma, \theta) + (\sigma + \alpha)^2 \widetilde{u}(\sigma, \theta) = \widetilde{h}(\sigma + 2, \theta)$.

Par résolution explicite, La solution de cette équation est donnée par :

$$\widetilde{u}(\sigma, \theta) = \int_0^\varphi \widetilde{G}(\sigma, \theta, \lambda) \widetilde{h}(\sigma + 2, \theta) d\lambda.$$

$\widetilde{G}(\sigma, \theta, \lambda)$ est la transformée de Mellin de $G(\rho, \theta, \lambda)$.

$\widetilde{G}(\sigma, \theta, \lambda)$ donné par : $\quad \widetilde{G}(\sigma, \theta, \lambda) = \begin{cases} \dfrac{\sin \sigma(\varphi - \theta) \sin \sigma\lambda}{\sigma \sin \sigma\varphi} & , \ 0 \leq \lambda \leq \theta \\ \dfrac{\sin \sigma\theta \sin \sigma(\varphi - \lambda)}{\sigma \sin \sigma\varphi} & , \ \theta \leq \lambda \leq \varphi \end{cases}$

Le noyau de Green étant bornée [1] , on utilise la transformation de Mellin inverse on aura directement l'inégalité suivante, il existe une constante $M > 0$ telle que :

$$\|\widetilde{u}\|_{\widetilde{H_0^2}} \leq M \left\| \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial \theta^2}(\sigma, \theta) + (\sigma + \alpha)^2 \widetilde{u}(\sigma, \theta) \right\|_{\widetilde{L^2}}.$$

comme l'injection de H_0^2 dans $E_{\alpha,0}$ est continue, il existe une constante $N > 0$ telle que:

$$\|\widetilde{u}\|_{\widetilde{E_{\alpha,0}}} \leq N \|\widetilde{u}\|_{\widetilde{H_0^2}}.$$

et on en déduit que : $\quad \|\widetilde{u}\|_{\widetilde{E_{\alpha,0}}} \leq K \left\| \widetilde{h}(\sigma + 2, \theta) \right\|_{\widetilde{L^2}}$ *ou* $K = MN$.

on a l'inégalité souhaitée vérifiée d'où, $\|u\|_{E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)} \leq K\left\{\|\rho^\alpha \Delta u\|_{L^2(\Omega_\varphi)} + \|u\|_{H_0^1(\Omega_\varphi)}\right\}$.

On remarque qu'on obtient des résultats analogues en utilisant la condition de Neumann dans l'espace $E_\alpha(\Omega_\varphi)$ par application du lemme de Peetre voir [14] .

D'après le lemme de Peetre on a l'image de l'opérateur $L = \rho^\alpha \Delta$ est fermée dans $L^2(\Omega_\varphi)$ et que son noyau de dimension finie dans $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$.

On déduit que le problème (3.1) admet au moins une solution dans l'espace $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$ le condition de Dirichlet, (et dans $E_\alpha(\Omega_\varphi)$ lorsqu'on utilise la condition de Neumann $\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0$ au lieu $u = 0$ sur Γ_φ).

Remarque 3.1.1:

Pour montrer l'inégalité (3.4), on commence par calculer $\|\rho^\alpha \Delta u\|^2$.

on a donc:
$$\|\rho^\alpha \Delta u\|^2 = \left\langle \rho^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \rho^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right\rangle$$

$$\|\rho^\alpha \Delta u\|^2 = \left\langle \rho^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \rho^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\rangle + 2\left\langle \rho^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \rho^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right\rangle + \left\langle \rho^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \rho^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right\rangle$$

$$\|\rho^\alpha \Delta u\|^2 = \left\|\rho^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\|^2 + \left\|\rho^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right\|^2 + 2\left\langle \rho^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \rho^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right\rangle.$$

ce qui implique suivant la méthode de Grisvard voir [5] *ou* [8] *on a :*

$$\langle D_x v, D_y w\rangle = \langle D_y v, D_x w\rangle .$$

Posons $v = D_x u$, $w = D_y u$ *on obtient:* $\langle D_x v, D_y w\rangle = \langle D_y D_x u, D_x D_y u\rangle = \left\langle D_x^2 u, D_y^2 u\right\rangle$

$$\langle D_x v, D_y w\rangle = \langle D_y D_x u, D_x D_y u\rangle = \left\langle D_x^2 u, D_y^2 u\right\rangle$$

$$\left\langle D_x^2 u, D_y^2 u\right\rangle = \int_{\Omega_\varphi} |D_x u D_y u|^2 \, d\Omega_\varphi = \|D_x u D_y u\|^2 .$$

Il s'en suit :

$\|\rho^\alpha \Delta u\|^2 = \|\rho^\alpha D_x^2 u\|^2 + \left\|\rho^\alpha D_y^2 u\right\|^2 + 2\left\|\rho^{2\alpha} D_x u D_y u\right\|^2.$

et comme $\|\rho^{2\alpha} D_x u D_y u\|^2 \geq 0$ *alors* $\|\rho^\alpha \Delta u\|_{L^2}^2 \geq \|\rho^\alpha D_x^2 u\|^2 + \left\|\rho^\alpha D_y^2 u\right\|^2$.

et en ajoutant par $\|u\|_{H_0^1}^2$ *nous avons :*

$$\|\rho^\alpha \Delta u\|_{L^2}^2 + \|u\|_{H_0^1}^2 \geq \left\|\rho^\alpha D_x^2 u\right\|_{L^2}^2 + \left\|\rho^\alpha D_y^2 u\right\|_{L^2}^2 + \|u\|_{H_0^1}^2 \tag{3.6}$$

D'après la norme du graphe de l'espace $E_{\alpha,0}$ *on ait:* $\|u\|_{E_{\alpha,0}}^2 = \|u\|_{H_0^1}^2 + \sum_{|\beta|=2} \left\|\rho^\alpha D^\beta u\right\|_{L^2}^2.$

On déduit que l'inégalité (3.6), on a $\|\rho^\alpha \Delta u\|_{L^2}^2 + \|u\|_{H_0^1}^2 \geq \|u\|_{E_{\alpha,0}}^2$ *où* $K_0 = K = 1$

tels que K_0 *et* K *sont constants, d'où le résultat de l'inégalité (3.4).*

3.1.2 Cas du problème perturbé

On va étudier l'existence du problème perturbé c'est à dire le terme $F(u) = \lambda u$ telle que $\lambda \neq 0$, le problème perturbé est comme suite:

$$(P_\varphi) \quad \begin{cases} \rho^\alpha(\Delta u + \lambda u) = \rho^\alpha f = h & \text{dans } \Omega_\varphi \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi \end{cases} \tag{3.7}$$

on va étudier l'existence du problème perturbé pour l'opérateur $L = \rho^\alpha(\Delta + \lambda)$ et on applique le lemme précédent (lemme de Peetre).

On va montrer que l'image de l'opérateur $L = \rho^\alpha(\Delta + \lambda)$ est fermée dans $L^2(\Omega_\varphi)$ et son noyau est de dimension finie.

On va étudier l'existence de la solution en utilisant du lemme de Peetre, on a déjà $u = 0$ sur Γ_φ de problème (3.7).

Comme l'opérateur $L = \rho^\alpha(\Delta + \lambda)$ est linéaire continu de $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$ dans $L^2(\Omega_\varphi)$.

On va établira une inégalité du type :

$$\|u\|_{E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)} \leq K \left\{ \|Lu\|_{L^2(\Omega_\varphi)} + \|u\|_{H_0^1(\Omega_\varphi)} \right\}.$$

Pour $\lambda = 0$ on a $\rho^\alpha \Delta u + \rho^\alpha \lambda u = \rho^\alpha \Delta u$

Pour $\lambda \neq 0$, *on pose* $\rho^\alpha \Delta u + \rho^\alpha \lambda u = Lu$ *et nous avons :*

$$\|\rho^\alpha \Delta u\| = \|\rho^\alpha \Delta u + \rho^\alpha \lambda u - \rho^\alpha \lambda u\| \leq \|Lu\| + \|\rho^\alpha \lambda u\|$$

ce qui implique $\|\rho^\alpha \Delta u\|^2 \leq (\|Lu\| + \|\rho^\alpha \lambda u\|)^2$

$$\|\rho^\alpha \Delta u\|^2 \leq \|Lu\|^2 + \|\rho^\alpha \lambda u\|^2 + 2\|Lu\| \|\rho^\alpha \lambda u\|$$

on prend que $X = \|Lu\|, Y = \|\rho^\alpha \lambda u\|$ *d'après la formule élémentaire on a:*

$$(X - Y)^2 = X^2 + Y^2 - 2XY \geq 0 \qquad \textit{et} \;\; X^2 + Y^2 \geq 2XY.$$

en appliquant cette formule on a: $\|\rho^\alpha \Delta u\|^2 \leq \|Lu\|^2 + \|\rho^\alpha \lambda u\|^2 + 2\|Lu\| \|\rho^\alpha \lambda u\|$

et nous aurons : $\|\rho^\alpha \Delta u\|^2 \leq 2(\|Lu\|^2 + \|\rho^\alpha \lambda u\|^2).$

donc, $\|\rho^\alpha \Delta u\|^2_{L^2(\Omega_\varphi)} + \|u\|^2_{H_0^1} \leq 2(\|Lu\|^2_{L^2} + \|\rho^\alpha \lambda u\|^2_{L^2}) + \|u\|^2_{H_0^1}$

d'où

$$\|\rho^\alpha \Delta u\|^2_{L^2(\Omega_\varphi)} + \|u\|^2_{H_0^1} \leq 2(\|Lu\|^2_{L^2} + \|u\|^2_{H_0^1}) + 2\|\rho^\alpha \lambda u\|^2_{L^2} \tag{3.8}$$

On a la fonction u *est à support compact dans* $\overline{\Omega_\varphi}$ *alors il existe* $\rho_0 > 0$ *telle que :*

$$\|\rho^{\alpha}\lambda u\|^2_{L^2} = \int_0^{\varphi}\int_0^{\rho_0} \rho^{2\alpha}|\lambda|^2|u|^2 \rho d\rho d\theta \leq |\lambda|^2 \rho_0^{2\alpha} \int_0^{\varphi}\int_0^{\rho_0} |u|^2 \rho d\rho d\theta.$$

et

$$\|\rho^{\alpha}\lambda u\|^2_{L^2} \leq |\lambda|^2 \rho_0^{2\alpha} \|u\|^2_{L^2}$$

et comme l'injection de H_0^1 dans L^2 est continue, donc l'inégalité est vérifié :

$$\|\rho^{\alpha}\lambda u\|^2_{L^2} \leq |\lambda|^2 \rho_0^{2\alpha} \|u\|^2_{H_0^1}.$$

de (3.8) on a donc :

$$\|\rho^{\alpha}\Delta u\|^2_{L^2(\Omega_\varphi)} + \|u\|^2_{H_0^1} \leq 2(\|Lu\|^2_{L^2} + \|u\|^2_{H_0^1}) + 2|\lambda|^2 \rho_0^{2\alpha} \|u\|^2_{H_0^1} \tag{3.9}$$

d'après, les inégalités (3.3) et (3.9) on déduit :

$$\frac{1}{K}\|u\|^2_{E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)} \leq 2\|Lu\|^2_{L^2(\Omega_\varphi)} + 2\|u\|^2_{H_0^1} + 2|\lambda|^2 \rho_0^{2\alpha} \|u\|^2_{H_0^1}$$

$$\frac{1}{K}\|u\|^2_{E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)} \leq 2\|Lu\|^2_{L^2(\Omega_\varphi)} + (2 + 2|\lambda|^2 \rho_0^{2\alpha})\|u\|^2_{H_0^1} \tag{3.10}$$

où, λ est une constante quelconque non nulle.

Si on prend une constante $C_1 = \max(2, 2 + 2|\lambda|^2 \rho_0^{2\alpha})$, on a donc l'inégalité (3.10) suivante:

Il existe une constante $K_1 = KC_1 > 0$ telle que :

$$\|u\|^2_{E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)} \leq K_1 \left\{\|Lu\|^2_{L^2(\Omega_\varphi)} + \|u\|^2_{H_0^1}\right\}. \qquad C.Q.F.D$$

On obtient des résultats analogues en utilisant la condition de Neumann .

Par application du lemme de Peetre, on en déduit que le problème (3.7) admet au moins une solution dans l'espace $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$ pour la condition de Dirichlet et par la même technique dans l'espace $E_\alpha(\Omega_\varphi)$ pour la condition de Neumann.

3.2 Etude de l'unicité de la solution

Pour ceci on va étudier le noyau du problème (3.1) dans l'espace $E_\alpha(\Omega_\varphi)$.

3.2.1 Cas du problème non perturbé

Cas de la condition de Dirichlet

Les éléments du noyau du problème (3.1) sont solution du problème suivant :

$$(P_\varphi) \quad \begin{cases} \rho^\alpha \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega_\varphi \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi \end{cases} \tag{3.11}$$

comme le facteur ρ^α ne s'annule pas à l'intérieur de Ω_φ, le problème (3.11) est donc

donc équivalent au problème: $(P_\varphi) \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega_\varphi \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi \end{cases}$

Il suffit de remarquer que comme $\Delta u = 0$ et on a $\langle \Delta u, u \rangle = 0$ d'où,

$$\langle \Delta u, u \rangle = -\left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 - \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|^2 = 0.$$

où, le crochet $\langle ., . \rangle$ désignent le produit scalaire dans $L^2(\Omega_\varphi)$ et les normes son indice sont celles de $L^2(\Omega_\varphi)$.

Donc $\Delta u = 0$ implique $\langle \Delta u, u \rangle = -\left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 - \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|^2 = 0$ on déduit que :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow u \ est \ constante.$$

et comme $u = 0$ sur Γ_φ, donc $u = 0$ dans $H^1(\Omega_\varphi)$,et donc $u = 0$ dans $E_\alpha(\Omega_\varphi)$ donc $u = 0$ dans $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$.

Cas de la condition de Neumann

Les éléments du noyau du problème avec la condition de Neumann sont solution du problème suivants:

$$(P_\varphi) \quad \begin{cases} \rho^\alpha \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega_\varphi \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi \end{cases} \tag{3.12}$$

avec la même méthode que celle du problème de Dirichlet dans le cas où on remarque que les constantes sont solution de (3.12) et comme le noyau de (3.12) est de dimension finie donc la dimension du noyau est au moins de dimension un .

Ce qui veut dire que pour la condition de Neumann cette solution du problème (3.12) n'est pas unique dans l'espace $E_\alpha(\Omega_\varphi)$.

3.2.2 Cas du problème perturbé

Cas de la condition de Dirichlet

Les éléments du noyau du problème sont solution de problème perturbé (3.7) suivant:

$$(P_\varphi) \quad \begin{cases} \rho^\alpha(\Delta u + \lambda u) = 0 & \text{dans } \Omega_\varphi \\ u(\rho, 0) = 0 & \text{sur } \Gamma_{\varphi_1} \\ u(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) = 0 & \text{sur } \Gamma_{\varphi_2} \end{cases} \tag{3.13}$$

comme le facteur ρ^{α} ne s'annule pas à l'intérieur de Ω_{φ}, le problème suivant (3.13) est équivalent au problème:

$$(P_{\varphi}) \quad \begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 & \text{dans } \Omega_{\varphi} \\ u(x,0) = 0 & \text{sur } \Gamma_{\varphi_1} \\ u(x, x\tan\varphi) = 0 & \text{sur } \Gamma_{\varphi_2} \end{cases} \tag{3.14}$$

La fonction u vérifie une nouvelle équation aux dérivées partielles linéaires du second ordre la manière de traiter cette équation dépend beaucoup des conditions aux limites.

Nous allons chercher des solutions élémentaires de l'équation:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda u = 0 \tag{3.15}$$

qui peut l'équation (3.15) s'écrit :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu^2 u = 0 \tag{3.16}$$

sous de la forme: $u(x,y) = z(x)v(y)$ (méthodes des séparations variables) voir Reinhard [1] . On a :

$$z''v + zv'' + \mu^2 zv = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{z''}{z} = -\frac{v''}{v} - \mu^2$$

la valeur commue des deux membres est une constante $-k = -\dfrac{n^2\pi^2}{(x\tan\varphi)^2}$.
(car chaque membre dépend d'une variable indépendant de celle de deuxième membre).

d'où,

$$\begin{cases} z'' + \dfrac{n^2\pi^2}{(x\tan\varphi)^2} z = 0 \\ v'' + (\mu^2 - \dfrac{n^2\pi^2}{(x\tan\varphi)^2})v = 0 \end{cases}$$

Puisque dans le cas des $\frac{z''}{z}$ et $\frac{v''}{v}$ doivent être négative, on a donc : $0 < \frac{n^2\pi^2}{(x\tan\varphi)^2} < \mu^2$. on en déduit :

$$\begin{cases} z = M\cos\frac{n\pi}{(x\tan\varphi)}x \ + N\sin\frac{n\pi}{(x\tan\varphi)}x \\ v = M'\cos\sqrt{\mu^2 - \frac{n^2\pi^2}{(x\tan\varphi)^2}}y + N'\sin\sqrt{\mu^2 - \frac{n^2\pi^2}{(x\tan\varphi)^2}}y \end{cases}$$

tels que M, N, M', N' sont des constantes arbitraires.

Écrivons maintenant les conditions aux limites :

$v = 0$ pour $y = 0$ Donc $M' = 0$.

$v = 0$ pour $y = x\tan\varphi$ Donc $\sin\sqrt{\mu^2 - \frac{n^2\pi^2}{(x\tan\varphi)^2}}x\tan\varphi = 0$.

Or , $$\sqrt{\mu^2 - \frac{n^2\pi^2}{(x\tan\varphi)^2}}x\tan\varphi = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

ce qui implique: $$(\mu^2 - \frac{n^2\pi^2}{(x\tan\varphi)^2})(x\tan\varphi)^2 = k^2\pi^2$$

d'où $$\tan^2\varphi = \frac{(k^2+n^2)\pi^2}{\mu^2x^2}$$

et comme $x, \mu \in \mathbb{R}_+^*$ on a donc $\tan\varphi = \frac{\sqrt{k^2+n^2}}{\mu x}\pi$ c'est à dire $\varphi = \arctan\frac{\sqrt{k^2+n^2}}{\mu x}\pi$

Donc la solution $u(x, y)$ est identiquement nulle si et seulement si $\varphi = \arctan\frac{\sqrt{k^2+n^2}}{\mu x}\pi$ et sinon, si et seulement si $u(x, y) \neq 0$.

on en déduit que $u(x, y) = 0$ pour $\varphi = \arctan\frac{\sqrt{k^2+n^2}}{\mu x}\pi$ est dans $H^1(\Omega_\varphi)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{Z}$, et par suite $u(x, y) = 0$ dans $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$.

Cas de la condition de Neumann

Les éléments du noyau du problème perturbé (3.7) avec la condition de Neumann sont solution du problème suivants :

$$(P_\varphi) \quad \begin{cases} \rho^\alpha(\Delta u + \lambda u) = 0 & \text{dans } \Omega_\varphi \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta}(\rho, 0) = 0 & \text{sur } \Gamma_{\varphi_1} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta}(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) = 0 & \text{sur } \Gamma_{\varphi_2} \end{cases} \tag{3.17}$$

comme le facteur ρ^α ne s'annule pas à l'intérieur de Ω_φ, le problème (3.17) est équivalent au problème:

$$(P_\varphi) \quad \begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 & \text{dans } \Omega_\varphi \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0 & \text{sur } \Gamma_{\varphi_1} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x, x\tan\varphi) = 0 & \text{sur } \Gamma_{\varphi_2} \end{cases} \tag{3.18}$$

Par un même travail que le précédent pour la condition de Dirichlet, en utilisant la même méthode que celle de problème de Dirichlet, on déduit que la résolution de l'équation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu^2 u = 0 \tag{3.19}$$

est comme suit :

$$\begin{cases} z = M\cos\dfrac{n\pi}{(x\tan\varphi)}x \; + N\sin\dfrac{n\pi}{(x\tan\varphi)}x \\ v = M'\cos\sqrt{\mu^2 - \dfrac{n^2\pi^2}{(x\tan\varphi)^2}}y + N'\sin\sqrt{\mu^2 - \dfrac{n^2\pi^2}{(x\tan\varphi)^2}}y \end{cases}$$

tels que M, N, M', N' sont des constantes arbitraires.

Écrivons maintenant les conditions aux limites :

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{pour} \quad y = 0 \quad \text{Donc} \quad N' = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{pour} \quad y = x\tan\varphi \quad \text{Donc} \quad \sin(\sqrt{\mu^2 - \frac{n^2\pi^2}{(x\tan\varphi)^2}}x\tan\varphi + \pi) = 0.$$

or, $\sqrt{\mu^2 - \frac{n^2\pi^2}{(x\tan\varphi)^2}}x\tan\varphi + \pi = k\pi$ d'où, $\sqrt{\mu^2 - \frac{n^2\pi^2}{(x\tan\varphi)^2}}x\tan\varphi = (k-1)\pi; k \in \mathbb{Z}$

ce qui implique: $(\mu^2 - \frac{n^2\pi^2}{(x\tan\varphi)^2})(x\tan\varphi)^2 = (k-1)^2\pi^2$ d'où, $\tan^2\varphi = \frac{((k-1)^2 + n^2)\pi^2}{\mu^2 x^2}$

pour $k \in \mathbb{Z}$, et comme $x, \mu \in \mathbb{R}_+^*$ $\tan\varphi = \frac{\sqrt{(k-1)^2 + n^2}}{\mu x}\pi$ c'est à dire:

$$\varphi = \arctan \frac{\sqrt{(k-1)^2 + n^2}}{\mu x}\pi, \text{pour } k \in \mathbb{Z}.$$

Donc la solution $u(x, y)$ n'est pas unique dans l'espace $E_\alpha(\Omega_\varphi)$ si et seulement si

$$\varphi = \arctan \frac{\sqrt{(k-1)^2 + n^2}}{\mu x}\pi; k \in \mathbb{Z}$$

Cas de la condition de Dirichlet

Pour $\lambda = -\mu^2 < 0$ $(\lambda \in \mathbb{R}_-^*)$ l'équation (3.15) dévient:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \mu^2 u = 0 \tag{3.20}$$

soient de la forme : $u(x, y) = z(x)v(y)$ on a : $z''v + zv'' - \mu^2 zv = 0$ ou

$$\frac{z''}{z} = -\frac{v''}{v} + \mu^2$$

la valeur commue des deux membres est une constante que nous posons $-k = -\frac{n^2\pi^2}{(x\tan\varphi)^2}$.

$$\begin{cases} z'' + \frac{n^2\pi^2}{(x\tan\varphi)^2}z = 0 \\ v'' - (\mu^2 + \frac{n^2\pi^2}{(x\tan\varphi)^2})v = 0 \end{cases}$$

et par conséquent,

$$\begin{cases} z = M\cos\dfrac{n\pi}{(x\tan\varphi)}x \ + N\sin\dfrac{n\pi}{(x\tan\varphi)}x \\ v = M'\exp(\sqrt{\mu^2+\dfrac{n^2\pi^2}{(x\tan\varphi)^2}})y + N'\exp(-\sqrt{\mu^2+\dfrac{n^2\pi^2}{(x\tan\varphi)^2}})y \end{cases}$$

tels que M, N, M', N' sont des constantes arbitraires.

Écrivons maintenant les conditions aux limites :

$v = 0$ pour $y = 0$ Donc $M' = -N'$.

$v = 0$ pour $y = x\tan\varphi$ Donc

$$M'\left[\exp(\sqrt{\mu^2+\frac{n^2\pi^2}{(x\tan\varphi)^2}})x\tan\varphi - \exp(-\sqrt{\mu^2+\frac{n^2\pi^2}{(x\tan\varphi)^2}})x\tan\varphi\right] = 0$$

or, $\exp(\sqrt{\mu^2+\frac{n^2\pi^2}{(x\tan\varphi)^2}})x\tan\varphi = \exp(-\sqrt{\mu^2+\frac{n^2\pi^2}{(x\tan\varphi)^2}})x\tan\varphi$ et $M' \neq 0$.

d'où,

$$\exp 2(\sqrt{\mu^2+\frac{n^2\pi^2}{(x\tan\varphi)^2}})x\tan\varphi = \exp(2ik\pi) \text{ d'où } (\mu^2+\frac{n^2\pi^2}{(x\tan\varphi)^2})(x\tan\varphi)^2 = -k^2\pi^2$$

on a donc :

$$\tan^2\varphi = -\frac{(k^2+n^2)\pi^2}{\mu^2x^2} \tag{3.21}$$

on a $\tan\varphi = \dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \dfrac{\dfrac{\exp(i\varphi)-\exp(-i\varphi)}{i}}{\exp(i\varphi)+\exp(-i\varphi)}$ d'où $\tan^2\varphi = -\dfrac{\exp(2i\varphi)+\exp(-2i\varphi)-2}{\exp(2i\varphi)+\exp(-2i\varphi)+2}$

où i est le nombre complexe de module égale un et l'argument est $\dfrac{\pi}{2}$.

donc de (3.21) on déduit que : $\exp(2i\varphi) + \exp(-2i\varphi) = 2\dfrac{\dfrac{(k^2+n^2)\pi^2}{\mu^2x^2}+1}{1-\dfrac{(k^2+n^2)\pi^2}{\mu^2x^2}}$

et $$\frac{\exp(2i\varphi)+\exp(-2i\varphi)}{2} = \frac{(k^2+n^2)\pi^2+\mu^2x^2}{\mu^2x^2-(k^2+n^2)\pi^2} \quad \text{pour} \quad n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{Z}.$$

ce qui implique: $\cos 2\varphi = \dfrac{(k^2+n^2)\pi^2+\mu^2x^2}{\mu^2x^2-(k^2+n^2)\pi^2}$ c'est à dire

$$\varphi = \frac{1}{2}\arccos\frac{(k^2+n^2)\pi^2+\mu^2x^2}{\mu^2x^2-(k^2+n^2)\pi^2} \quad \text{et } x>0, \mu \in \mathbb{R}_+^*.$$

Donc, la solution $u(x,y)$ est identiquement nulle si et seulement si

$$\varphi = \frac{1}{2}\arccos\frac{(k^2+n^2)\pi^2+\mu^2x^2}{\mu^2x^2-(k^2+n^2)\pi^2}, \qquad n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{Z}$$

et sinon, si et seulement si $u(x,y) \neq 0$.

on en déduit que $u(x,y)=0$ pour $\varphi = \dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{(k^2+n^2)\pi^2+\mu^2x^2}{\mu^2x^2-(k^2+n^2)\pi^2}$ est dans $H^1(\Omega_\varphi)$,

pour $n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{Z}$ or $u(x,y)=0$ dans $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$.

Cas de la condition de Neumann

Pour $\lambda = -\mu^2 < 0$ $(\lambda \in \mathbb{R}_-^*)$ l'équation (3.20) est : $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \mu^2 u = 0.$

avec la même méthode que celle du problème de Dirichlet, on en déduit la solution :

$$\begin{cases} z = M\cos\dfrac{n\pi}{(x\tan\varphi)}x + N\sin\dfrac{n\pi}{(x\tan\varphi)}x \\ v = M'\exp(\sqrt{\mu^2+\dfrac{n^2\pi^2}{(x\tan\varphi)^2}})y + N'\exp(-\sqrt{\mu^2+\dfrac{n^2\pi^2}{(x\tan\varphi)^2}})y \end{cases}$$

tels que M, N, M', N' sont des constantes arbitraires.

Écrivons maintenant les conditions aux limites :

$\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$ pour $y=0$ Donc $N' = M'$

$\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$ pour $y = x\tan\varphi$ on a donc $M'\sqrt{\mu^2+\dfrac{n^2\pi^2}{(x\tan\varphi)^2}} = 0$ ou

$$\left[\exp(\sqrt{\mu^2 + \frac{n^2\pi^2}{(x\tan\varphi)^2}})x\tan\varphi - \exp(-\sqrt{\mu^2 + \frac{n^2\pi^2}{(x\tan\varphi)^2}})x\tan\varphi\right] = 0$$

Or, $\sqrt{\mu^2 + \frac{n^2\pi^2}{(x\tan\varphi)^2}} = 0$ ce qui implique $\tan^2\varphi = -\frac{n^2\pi^2}{\mu^2 x^2}$, $x > 0, \mu \in \mathbb{R}_+^*$

et donc : $\frac{\exp(2i\varphi) + \exp(-2i\varphi)}{2} = \frac{n^2\pi^2 + \mu^2 x^2}{\mu^2 x^2 - n^2\pi^2}$ c'est à dire:

$$\varphi = \frac{1}{2}\arccos\frac{n^2\pi^2 + \mu^2 x^2}{\mu^2 x^2 - n^2\pi^2}, \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*.$$

et d'autre part, on a $\exp(\sqrt{\mu^2 + \frac{n^2\pi^2}{(x\tan\varphi)^2}})x\tan\varphi = \exp(-\sqrt{\mu^2 + \frac{n^2\pi^2}{(x\tan\varphi)^2}})x\tan\varphi$

Avec le même travail précédent (cas de la condition de Dirichlet) on a donc :

$$\varphi = \frac{1}{2}\arccos\frac{(k^2+n^2)\pi^2 + \mu^2 x^2}{\mu^2 x^2 - (k^2+n^2)\pi^2}, \qquad n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{Z}$$

Donc la solution $u(x, y)$ n'est pas unique dans l'espace $E_\alpha(\Omega_\varphi)$ si et seulement si

$\varphi = \frac{1}{2}\arccos\frac{n^2\pi^2 + \mu^2 x^2}{\mu^2 x^2 - n^2\pi^2}$ ou $\varphi = \frac{1}{2}\arccos\frac{(k^2+n^2)\pi^2 + \mu^2 x^2}{\mu^2 x^2 - (k^2+n^2)\pi^2}$, pour $n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{Z}$ et

$x > 0, \mu \in \mathbb{R}_+^*$.

Chapitre 4

La Formule de Green et Les problèmes Adjoints Formels

Dans ce chapitre, on va rappeller la formule de Green adaptée au problème, et par conséquent on aura la formulation de l'opérateur adjoint $\rho^\alpha\Delta$ au voisinage de l'origine, et par suite on va donner la formulation du problème adjoint dans l'espace dual de l'espace $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$.

4.1 Formule de Green

4.1.1 Le théorème de la formule de Green

Soit $\{B_i\}_{i=0}^{n-1}$ un système de n opérateurs différentiels frontière donnés par :

$$B_i\varphi = \sum_{|h|\leq m_i} a_{ih}(x)D^h\varphi \quad \text{avec} \quad a_{ih}(x) \in C_0^\infty(\Gamma).$$

Définition 4.1.1.1 :

Le système $\{B_i\}_{i=0}^{n-1}$ est un système de Dirichlet d'ordre n sur Γ_i (partie de Γ) s'il est normal sur Γ_i et si les ordres m_i parcourent exactement l'ensemble $0, 1, 2, ...n-1$, lorsque i de 0 à $n-1$.

Théorème 4.1.1.2 :

On a la formule de Green suivant:

$$\int\limits_{\Omega} Lu\overline{v}dx - \int\limits_{\Omega} u\overline{L^{*}v}dx = \sum_{j=0}^{m-1}\int\limits_{\Gamma} S_j u\overline{C_j v}d\sigma + \sum_{j=0}^{m-1}\int\limits_{\Gamma} B_j u\overline{T_j v}d\omega \text{ pour tout } u, v \in C_0^{\infty}(\overline{\Omega}).$$

ayant les propriétés suivants :

1)$-$les système $\{B_0, ..., B_m, C_0, ..., C_m\}$ soit un système de Dirichlet d'ordre $2m$ sur Γ.

2)$-$ les coefficients des C_j et T_j sont dans $C_0^{\infty}(\overline{\Omega})$.

3)$-$ l'ordre C_j est $2m-1-\mu_j$ et celui de T_j est $2m-1-m_j$.

4)$-$le système $\{C_0, ..., C_{m-1}, T_0, ..., T_{m-1}\}$ est système de Dirichlet d'ordre $2m$ sur Γ.

Preuve : voir Lions- Magenes [4] page 127 .

Proposition4.1.1.3:

Si u, v sont deux fonctions de $C_0^{\infty}(\overline{\Omega_{\varphi}})$, on a la formule de Green suivante:

$$\langle \rho^{\alpha}\Delta u, v\rangle - \langle u, (\rho^{\alpha}\Delta)^{*}v\rangle = \int\limits_{\Gamma_{\varphi}} SuCvd\sigma + \int\limits_{\Gamma_{\varphi}} BuTvd\omega \tag{4.1}$$

telle que: S, T, B, C sont des opérateurs différentiel d'ordre 1 définie sur la bord Γ_{φ} (frontière de Ω_{φ}), l'opérateur $(\rho^{\alpha}\Delta)^{*}$ est l'opérateur l'adjoint de $\rho^{\alpha}\Delta$.

où les crochet $\langle ., .\rangle$ désigne le produit scalaire dans $L^2(\Omega_{\varphi})$.

Preuve :

On a : $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial\rho} + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}$ d'où, $\rho^{\alpha}\Delta u = \rho^{\alpha}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + \rho^{\alpha-1}\dfrac{\partial u}{\partial\rho} + \rho^{\alpha-2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}$,

en intégrant dans le secteur plan Ω_{φ}, pour $v \in C_0^{\infty}(\overline{\Omega_{\varphi}})$ alors :

$$\int_{\Omega_\varphi} \rho^\alpha \Delta u v \rho d\rho d\theta = \int_0^\varphi \int_0^\infty \rho^{\alpha+1} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right] v d\rho d\theta =$$

$$= \int_0^\varphi \int_0^\infty (\rho^{\alpha+1}\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \quad \rho^\alpha \frac{\partial u}{\partial \rho} + \rho^{\alpha-1}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}) v d\rho d\theta$$

$$= \int_0^\varphi \int_0^\infty \rho^{\alpha+1}\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} v d\rho d\theta + \int_0^\varphi \int_0^\infty \quad \rho^\alpha \frac{\partial u}{\partial \rho} v d\rho d\theta + \int_0^\varphi \int_0^\infty \rho^{\alpha-1}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} v d\rho d\theta$$

Si cette intégrale existe, on peut ainsi formuler le problème adjoint, on calcule cette intégrale en utilisant une intégration par parties:

$$\int_0^\varphi \int_0^\infty \rho^{\alpha+1}\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} v d\rho d\theta = \int_0^\varphi \int_0^\infty \rho^{\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} v \rho d\rho d\theta$$

$$= \int_0^\varphi \frac{\partial u}{\partial \rho}(\rho^\alpha \rho v) d\theta \,|_0^\infty - \int_0^\varphi \int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^\alpha \rho v) d\rho d\theta$$

$$= - \int_0^\varphi \int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^\alpha \rho v) d\rho d\theta \qquad (\text{car } v \in C_0^\infty(\overline{\Omega_\varphi}) \ )$$

$$= \int_0^\varphi u \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^\alpha \rho v) d\theta \,|_0^\infty + \int_0^\varphi \int_0^\infty u \frac{\partial^2}{\partial \rho^2}(\rho^\alpha \rho v) d\rho d\theta$$

$$= \int_0^\varphi \int_0^\infty u \frac{\partial^2}{\partial \rho^2}(\rho^\alpha \rho v) d\rho d\theta \qquad (\text{car } v \in C_0^\infty(\overline{\Omega_\varphi}) \ )$$

$$\int_0^\varphi \int_0^\infty \rho^{\alpha+1}\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} v d\rho d\theta = \int_0^\varphi \int_0^\infty u \left[\alpha(\alpha+1)\rho^{\alpha-1} v + 2(\alpha+1)\rho^\alpha \frac{\partial v}{\partial \rho} + \rho^{\alpha+1}\frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} \right] d\rho d\theta \tag{4.2}$$

$$\int_0^\varphi \int_0^\infty \quad \rho^\alpha \frac{\partial u}{\partial \rho} v d\rho d\theta = \int_0^\varphi \int_0^\infty \quad \rho^{\alpha-1} \frac{\partial u}{\partial \rho} v \rho d\rho d\theta$$

$$= \int_0^\varphi u \rho^{\alpha-1} v \rho d\theta \,|_0^\infty - \int_0^\varphi \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^{\alpha-1}\rho v) u d\rho d\theta$$

$$= -\int_0^{\varphi}\int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^{\alpha-1}\rho v)u d\rho d\theta \qquad (\text{car } v \in C_0^{\infty}(\overline{\Omega_{\varphi}}))$$

$$\int_0^{\varphi}\int_0^{\infty} \rho^{\alpha}\frac{\partial u}{\partial\rho} v d\rho d\theta = -\int_0^{\varphi}\int_0^{\infty} u\left[\rho^{\alpha}\frac{\partial v}{\partial\rho} + \alpha\rho^{\alpha-1}v\right] d\rho d\theta \tag{4.3}$$

$$\int_0^{\varphi}\int_0^{\infty} \rho^{\alpha-1}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} v d\rho d\theta = \int_0^{\varphi}\int_0^{\infty} \rho^{\alpha-2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} v\rho d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{\partial u}{\partial\theta}(\rho^{\alpha-1}v)d\rho \,|_0^{\varphi} - \int_0^{\varphi}\int_0^{\infty} \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\rho^{\alpha-1}v)d\rho d\theta$$

$$= \int_{\Gamma_{\varphi}} \frac{\partial u}{\partial\theta}(\rho^{\alpha-1}v)d\rho - \int_{\Gamma_{\varphi}} u\rho^{\alpha-1}\frac{\partial v}{\partial\theta}d\rho + \int_0^{\varphi}\int_0^{\infty} u\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(\rho^{\alpha-1}v)d\rho d\theta$$

$$\int_0^{\varphi}\int_0^{\infty} \rho^{\alpha-1}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} v d\rho d\theta = \int_{\Gamma_{\varphi}} \rho^{\alpha-1}\frac{\partial u}{\partial\theta} v d\rho - \int_{\Gamma_{\varphi}} u\rho^{\alpha-1}\frac{\partial v}{\partial\theta}d\rho + \int_0^{\varphi}\int_0^{\infty} u\rho^{\alpha-1}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}d\rho d\theta \tag{4.4}$$

De (4.2), (4.3) et (4.4) nous avons :

$$\int_0^{\varphi}\int_0^{\infty} \rho^{\alpha}\Delta u v\rho d\rho d\theta - \int_0^{\varphi}\int_0^{\infty} u[\rho^{\alpha}\frac{\partial^2 v}{\partial\rho^2} + (2\alpha+1)\rho^{\alpha-1}\frac{\partial v}{\partial\rho} + \rho^{\alpha-2}(\alpha^2 v + \frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2})\rho d\rho d\theta = \int_{\Gamma_{\varphi}} \frac{\partial u}{\partial\theta}\rho^{\alpha-1}v d\rho - \int_{\Gamma_{\varphi}} u\rho^{\alpha-1}\frac{\partial v}{\partial\theta}d\rho$$

d'où la relation suivante : $\langle\rho^{\alpha}\Delta u, v\rangle - \langle u, (\rho^{\alpha}\Delta)^* v\rangle = \int_{\Gamma_{\varphi}} SuCv d\sigma + \int_{\Gamma_{\varphi}} BuTv d\sigma$ telle que:

$$\langle u, (\rho^{\alpha}\Delta)^* v\rangle = \int_0^{\varphi}\int_0^{\infty} u[\rho^{\alpha}\frac{\partial^2 v}{\partial\rho^2} + (2\alpha+1)\rho^{\alpha-1}\frac{\partial v}{\partial\rho} + \rho^{\alpha-2}(\alpha^2 v + \frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2})]\rho d\rho d\theta$$

et $$\int_{\Gamma_{\varphi}} SuCv d\sigma + \int_{\Gamma_{\varphi}} BuTv d\sigma = \int_{\Gamma_{\varphi}} \frac{\partial u}{\partial\theta}\rho^{\alpha-1}v d\rho - \int_{\Gamma_{\varphi}} u\rho^{\alpha-1}\frac{\partial v}{\partial\theta}d\rho.$$

Donc l'opérateur adjoint de $\rho^\alpha \Delta$ noté $(\rho^\alpha \Delta)^*$ est donnée par :

$$(\rho^\alpha \Delta)^* = \rho^\alpha \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + (2\alpha + 1)\rho^{\alpha-1} \frac{\partial}{\partial \rho} + \rho^{\alpha-2}(\alpha^2 + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}).$$

c'est à dire, $(\rho^\alpha \Delta)^* = \rho^\alpha \Delta + 2\alpha\rho^{\alpha-1} \frac{\partial}{\partial \rho} + \alpha^2 \ \rho^{\alpha-2}.$ *C.Q.F.D*

Par la même technique on établit une formule de Green adaptée au problème (P_φ) *perturbé sur le terme* $F(u) = \lambda u$ *on en déduit:*

$$\langle \rho^\alpha(\Delta + \lambda)u, v\rangle - \langle u, (\rho^\alpha(\Delta + \lambda))^* v\rangle = \int_{\Gamma_\varphi} SuCvd\sigma + \int_{\Gamma_\varphi} BuTvd\omega.$$

on sait que $\langle \rho^\alpha(\Delta + \lambda)u, v\rangle = \langle \rho^\alpha \Delta u, v\rangle + \langle \rho^\alpha \lambda u, v\rangle$ alors on a:

$$\langle \rho^\alpha \lambda u, v\rangle = \int_0^\varphi \int_0^\infty \rho^\alpha \lambda uv\rho d\rho d\theta = \int_0^\varphi \int_0^\infty u\rho^\alpha \lambda v\rho d\rho d\theta = \langle u, \rho^\alpha \lambda v\rangle$$

Puisque $(\rho^\alpha \lambda)^* = \rho^\alpha \lambda$ *et par consequent:* $\langle u, (\rho^\alpha(\Delta + \lambda))^* v\rangle = \langle u, (\rho^\alpha \Delta + \rho^\alpha \lambda)^* v\rangle$.

$\langle u, (\rho^\alpha \Delta + \rho^\alpha \lambda)^* v\rangle = \langle u, (\rho^\alpha \Delta)^* v\rangle + \langle u, \rho^\alpha \lambda v\rangle$ *on a donc:*

$$\langle u, (\rho^\alpha \Delta + \rho^\alpha \lambda)^* v\rangle = \int_0^\varphi \int_0^\infty u[\rho^\alpha \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + (2\alpha + 1)\rho^{\alpha-1} \frac{\partial v}{\partial \rho} + \rho^{\alpha-2}(\alpha^2 v + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}) + \rho^\alpha \lambda v]\rho d\rho d\theta$$

d'où,

$$(\rho^\alpha \Delta + \rho^\alpha \lambda)^* = \rho^\alpha \Delta + 2\alpha\rho^{\alpha-1} \frac{\partial}{\partial \rho} + \alpha^2 \ \rho^{\alpha-2} + \rho^\alpha \lambda.$$

On utilise les propriétés extérieurs et intérieurs du cône respective voir [5] .

Nous obtenons que l'espace $C_0^\infty(\Omega_\varphi)$ est dense dans $H_0^m(\Omega_\varphi)$ et $C_0^\infty(\overline{\Omega_\varphi})$ est dense dans $H^m(\Omega_\varphi)$ et puisque, $H^m(\Omega_\varphi) \subset E_m(\Omega_\varphi) \subset H^1(\Omega_\varphi)$ (voir Saïd [14]).

Alors $C_0^\infty(\overline{\Omega_\varphi})$ est dense dans $E_{m,0}(\Omega_\varphi) = E_m(\Omega_\varphi) \cap H_0^{m-1}(\Omega_\varphi)$, et $C_0^\infty(\overline{\Omega_\varphi})$ est dense dans $E_m(\Omega_\varphi)$, dans ce cas $C_0^\infty(\Omega_\varphi)$ est dense dans$E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi) = E_\alpha(\Omega_\varphi) \cap H_0^1(\Omega_\varphi)$ et $C_0^\infty(\overline{\Omega_\varphi})$ est dense dans $E_\alpha(\Omega_\varphi)$.

Donc, par densité la formule de Green définie dans (4.1) est valable dans l'espace $E_\alpha(\Omega_\varphi)$. (voir Saïd [15]).

4.2 Etude de l'espace dual et formulation du problème adjoint

4.2.1 Formulation du problème adjoint

Cette partie est consacrée à l'étude de l'existence et de l'unicité de la solution du problème adjoint du problème (P_φ) définie par (2.4).

On va utiliser la même technique que celle utilisée dans (P_φ) définie par (2.4) .

On considère le problème suivant :

$$(P_\varphi^*) \quad \begin{cases} Qu = h & \text{dans } \Omega_\varphi \\ Bu = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi \end{cases} \tag{4.5}$$

On dit que (P_φ^*) le problème adjoint du (P_φ), et l'opérateur $Q = (\lambda(\rho)\Delta)^*$adjoint de $\lambda(\rho)\Delta$ pour $\lambda = 0$ et de $Q = (\lambda(\rho)(\Delta + \lambda))^*$ adjoint de $\lambda(\rho)(\Delta + \lambda)$ pour $\lambda \neq 0$, telle que $\lambda(\rho)$ une fonction de poids définie par (1.2).

Au voisinage de l'origine, le problème (P_φ^*) s'écrit :

$$(P_\varphi^*) \quad \begin{cases} Pu = h & \text{dans } \Omega_\varphi \\ Bu = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi \end{cases} \tag{4.6}$$

où $P = (\rho^\alpha \Delta)^*$ adjoint de $\rho^\alpha\Delta$ pour $\lambda = 0$ et de $P = (\rho^\alpha(\Delta + \lambda))^*$ adjoint de $\rho^\alpha(\Delta + \lambda)$ pour $\lambda \neq 0$.

4.2.2 Etude de l'espace dual

Cas du problème de Dirichlet

On se propose dans cette section de trouver dans le cas du problème de Dirichlet l'espace dual de $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$ définie par :

$$E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi) = \left\{u \in H_0^1(\Omega_\varphi) \backslash \ \rho^\alpha u \in H_0^2(\Omega_\varphi) \ \right\} \quad .$$

Alors l'espace $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$ s'identifie à l'espace de $G_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$ définie par :

$$G_{\alpha,0}(\Omega_\varphi) = \left\{u \in H_0^1(\Omega_\varphi), \text{ telle que } \rho^\alpha u \in H_0^2(\Omega_\varphi) \ \right\}.$$

Proposition 4.2.2.1:
Le dual de l'espace $G_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$ qu'on note par $G_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$ s'écrit de la manière suivante:

$$G_{-\alpha}(\mathit{\Omega}_{\varphi}) = \{u \in H^{-1}(\Omega_\varphi) \ \ \backslash \ \rho^{-\alpha} u \in H^{-2}(\Omega_\varphi) \ \}.$$

on a vu que $\rho^\alpha \Delta : E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi) \longrightarrow L^2(\Omega_\varphi)$

d'où son adjoint $(\rho^\alpha \Delta)^* : L^2(\Omega_\varphi) \longrightarrow (E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi))^* = E_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$

ainsi l'opérateur perturbé

$\rho^\alpha(\Delta + \lambda) : E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi) \longrightarrow L^2(\Omega_\varphi)$ *et de la forme dual d'où*

$$(\rho^\alpha(\Delta + \lambda))^* : L^2(\Omega_\varphi) \longrightarrow (E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi))^* = E_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$$

ce qui veut dire que l'espace $G_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$ s'identifie à $E_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$.

Preuve :

On a d'après la définition de l'espace $G_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$, et comme le dual de $H_0^1(\Omega_\varphi)$ est l'espace $H^{-1}(\Omega_\varphi)$, et celui de l'espace $H_0^2(\Omega_\varphi)$ est l'espace $H^{-2}(\Omega_\varphi)$,on peut s'écrire:

$$\langle u, v\rangle = \int_{\Omega_\varphi} uvdxdy = \int_{\Omega_\varphi} uv\rho d\rho d\theta = \int_{\Omega_\varphi} \rho^\alpha u\rho^{-\alpha} v\rho d\rho d\theta.$$

On voit clairement la mise en dualité des espaces $H_0^1(\Omega_\varphi)$, $H^{-1}(\Omega_\varphi)$ et $H_0^2(\Omega_\varphi)$, $H^{-2}(\Omega_\varphi)$ respectivement, comme $u \in H_0^1(\Omega_\varphi)$ on a $v \in H^{-1}(\Omega_\varphi)$ et comme on a aussi $\rho^\alpha u \in H_0^2(\Omega_\varphi)$ donc $\rho^{-\alpha} v \in H^{-2}(\Omega_\varphi)$.

Proposition 4.2.2.2:

Muni de la norme du graphe suivante :

$$\|u\|_{E_{-\alpha}(\Omega_\varphi)} = \|u\|_{H^{-1}(\Omega_\varphi)} + \|\rho^{-\alpha} u\|_{H^{-2}(\Omega_\varphi)}$$

L'espace $E_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$ est un espace de Hilbert .

Preuve :

Il est clair, d'après la définition même de $E_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$, que l'espace $E_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$ est un espace de Banach, il reste à définir dessus un produit scalaire et ceci est simple, il suffit de poser:

$$\langle u, v\rangle_{E_{-\alpha}(\Omega_\varphi)} = \langle u, v\rangle_{H^{-1}(\Omega_\varphi)} + \left\langle \rho^{-\alpha} u, \rho^{-\alpha} v\right\rangle_{H^{-2}(\Omega_\varphi)}$$

ceci défini un produit scalaire dans $E_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$.

Remarques 4.2.2.3:

1- l'injection de l'espace $L^2(\Omega_\varphi)$ dans l'espace $H^{-1}(\Omega_\varphi)$ est compact, et plus généralement, l'injection de l'espace $L^2(\Omega_\varphi)$ dans l'espace $H^{-m}(\Omega_\varphi)$ est compact, pour $m \in \mathbb{N}$ [4] .

2- Tout espace de Hilbert est réflexif, les espaces de Sobolev $H^s(\Omega_\varphi)$ avec s réel sont des espaces de Hilbert, ils sont donc réflexifs [13].

3- l'espace $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$ était un sous espace fermé de $H_0^1(\Omega_\varphi)$, c'est à dire que l'espace intermédiaire entre $H_0^1(\Omega_\varphi)$ et $H_0^2(\Omega_\varphi)$, cette propriété s'étend aux espaces duals, on a donc $E_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$ est un espace intermédiaire entre $H^{-1}(\Omega_\varphi)$ et $H^{-2}(\Omega_\varphi)$, c'est à dire :

$$H^{-1}(\Omega_\varphi) \quad \subset E_{-\alpha}(\Omega_\varphi) \subset H^{-2}(\Omega_\varphi) \tag{4.7}$$

Cas du problème de Neumann

Dans ce paragraphe, on se propose d'expliciter le dual de l'espace $E_\alpha(\Omega_\varphi)$, comme il s'agit d'un problème de Neumanns (on a ici des conditions de Neumann homogènes), les fonctions ne sont pas forcément nulles au bord de Ω_φ, on ne peut pas donc travailler avec l'espace $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$.

Proposition 4.2.2.4:

Le dual de l'espace $E_\alpha(\Omega_\varphi)$ qu'on note $[E_\alpha(\Omega_\varphi)]'$ s'identifie à l'espace $E_{-\alpha,\overline{\Omega_\varphi}}(\mathbb{R}^2)$ à support dans $\overline{\Omega_\varphi}$, telle que $E_{-\alpha,\overline{\Omega_\varphi}}(\mathbb{R}^2) = \left\{g \setminus g \in E_{-\alpha}(\mathbb{R}^2) \text{ et } g \text{ à support dans } \overline{\Omega_\varphi}\right\}$.

On prolongera les fonctions par 0 hors de Ω_φ, et posons $F_{-\alpha}(\Omega_\varphi) = E_{-\alpha,\overline{\Omega_\varphi}}(\mathbb{R}^2)$.

Preuve : voir détail [14] .

Remarques 4.2.2.5 :

1-L'espace $E_\alpha(\Omega_\varphi)$ est réflexif donc $F_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$, car le dual d'un espace réflexif est réflexif [13] .

2- On a vu que l'espace $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$ vérifie les immertions suivantes:

$H_0^2(\Omega_\varphi) \subset E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi) \subset H_0^1(\Omega_\varphi)$ et que cette propriété s'étend aux espaces duals on a donc:

$$H^{-1}(\Omega_\varphi) \quad \subset F_{-\alpha}(\Omega_\varphi) \subset H^{-2}(\Omega_\varphi) \tag{4.8}$$

l'espace $F_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$ est donc un sous espace de $H^{-2}(\Omega_\varphi)$.Donc on muni l'espace $F_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$ de la norme suivante:

$$\|u\|_{F_{-\alpha}(\Omega_\varphi)} = \|u\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^2)} + \left\|\rho^{-\alpha}u\right\|_{H^{-2}(\mathbb{R}^2)}.$$

qui en fait un espace de Banach, et en définissant le produit scalaire suivant:

$$\langle u, v\rangle_{F_{-\alpha}(\Omega_\varphi)} = \langle u, v\rangle_{H^{-1}(\Omega_\varphi)} + \left\langle \rho^{-\alpha}u, \rho^{-\alpha}v\right\rangle_{H^{-2}(\Omega_\varphi)}$$

l'espace $F_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$ est un espace de Hilbert.

Chapitre 5

Existence et unicité de la solution du problème adjoint

Dans ce chapitre, on va étudier l'existence et l'unicité de la solution du problème adjoint dans l'espace $E_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$.En utilisant une nouvelle norme de H^{-2}, nous mettons en évidence une inégalité à priori, et par la technique des noyaux, on étudiera l'unicité de la solution, et par suite on fera l'extension de l'étude du problème et son adjoint au polygone tout entier.

5.1 Définition d'une nouvelle norme dans H^{-2}

On va étudier l'existence de la solution du problème adjoint non perturbé avec la condition de Dirichlet et celle de Neumann suivant :

$$(P_\varphi^*) \quad \begin{cases} Pu = h & \text{dans } \Omega_\varphi \\ Bu = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi \end{cases} \tag{5.1}$$

où, P est l'opérateur adjoint de $\rho^\alpha \Delta$ c'est à dire $P = (\rho^\alpha \Delta)^*$et $h \in E_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$ pour la condition de Dirichlet ou la condition de Neumann.

On sait que l'espace $E_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$ est un sous espace de H^{-2} d'après le proposition (4.2.2.2) on a donc: $\|\rho^{-\alpha} Pu\|_{H^{-2}} \leq \|Pu\|_{E_{-\alpha}}$, l'utilisation de l'espace $H^{-2}(\Omega_\varphi)$ est plus facile que d'utiliser l'espace $E_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$,on établit l'inégalité en utilisant $H^{-2}(\Omega_\varphi)$, c'est pourquoi qu'on définit une nouvelle norme dans H^{-2}.

Les coordonnées polaires sont mieux adaptées à la géométrie du domaine Ω_φ on va définir une norme de H^{-2} en utilisant la transformation de Mellin et les fonctions développables en série de Fourier.

On rappelle que l'ensemble des fonctions développement en série de Fourier est dense dans $L^2(\Omega_\varphi)$, et comme l'espace $L^2(\Omega_\varphi)$ est dense dans $H^{-2}(\Omega_\varphi)$ [4] , alors l'ensemble des fonctions développement en série de Fourier est dense dans $H^{-2}(\Omega_\varphi)$ [14], donc on va construire à partir de la transformation de Mellin et le fonction en série de Fourier, la norme de $H^{-2}(\Omega_\varphi)$ qu'on définit par :

si la fonction v développement en série de Fourier et donc :

$$v(\rho,\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(\rho)\exp(\frac{in\pi}{\varphi}\theta).$$

On définit une nouvelle norme de v, dans $H^{-2}(\Omega_\varphi)$ par la formule

$$\|v\|^2_{H^{-2}(\Omega_\varphi)} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\varphi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\frac{\widetilde{c_n}(\sigma+2)\exp(\frac{in\pi}{\varphi}\theta)}{1+|\sigma+2|^2+\left[\frac{n\pi}{\varphi}\right]^2}\right|^2 d\theta d\xi \tag{5.2}$$

avec $\boldsymbol{\sigma = 1 + i\xi}$.

Remarque 5.1.1:

1-Dans la définition (5.2), le facteur $\sigma+2$ découle de la dérivée seconde de la transformée de Mellin de la fonction v, et la relation suivant :

$$\|u\|_{H^m} = \left\|(1+\xi^2+\zeta^2)^m\widehat{u}\right\|_{L^2} \tag{5.3}$$

où

$$\widehat{u}(\xi,\zeta) = \int_{\mathbb{R}^2} u(x,y)e^{-i\xi\zeta xy}dxdy \tag{5.4}$$

On voit d'ailleurs ceci dans la relation (5.3), en remplaçant $m = 2$.

2- le théorème de Plancheral, qui affirme que la transformation de Fourier envoie l'espace $L^2(\mathbb{R}^2)$ sur lui même, de plus c'est une isométrie c'est à dire $\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \|\widehat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$, [28] et en utilisant l'analogie entre la transformation de Mellin et celle de Fourier, on aura:

$$\|u\|_{L^2(\Omega_\varphi)} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\varphi} |\widetilde{u}(1+i\nu,\theta)|^2 \, d\nu d\theta = \int_0^{\varphi} \|\widetilde{u}(.,\theta)\|_{L^2(\mathbb{R})} \, d\theta \ , \ \sigma = 1 + i\nu \tag{5.5}$$

où $\widetilde{u}$ est la transformée de Mellin de la fonction u.

La relation (5.5) est en quelque sorte l'équivalent du théorème de Plancherel pour la transformation de Mellin .

5.2 Démonstration de l'équivalence de cette norme avec la norme uselle de H^{-2}

Soient v et w deux fonctions développables en série de Fourier :
si $v(\rho,\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(\rho)\exp(\frac{in\pi}{\varphi}\theta)$ et telle que : $v = (1+\xi^2+\kappa^2)^{-1}\widehat{u}$ ($\widehat{u}$ désigne la transformation de Fourier de u) et $w = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left[1 + |\sigma+2|^2 + \left[\frac{n\pi}{\varphi}\right]^2\right]^{-1} \widetilde{c_n}(\sigma+2)\exp(\frac{in\pi}{\varphi}\theta)$ on a d'aprés une proposition 4.2.2.1, v et w sont dans $L^2(\Omega_\varphi)$ et u est dans $H^{-2}(\Omega_\varphi)$, et donc d'après le théorème de Plancherel [28], et la proposition 4.2.2.1, on a :

$$\|v\|_{L^2}^2 = \|\ \widehat{v}\|_{L^2}^2 = \|u\|_{H^{-2}}^2 .$$

La transformation de Mellin de v s'écrit : $\widetilde{v}(\sigma,\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widetilde{c_n}(\sigma)\ \exp(\frac{in\pi}{\varphi}\theta)$.

Calculons maintenant la norme dans L^2de la transformée de Mellin de la fonction v, on aura en utilisant la formule (5.5), la relation suivante:

$$\|v\|_{L^2}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\varphi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\widetilde{c_n}(\sigma)\exp(\frac{in\pi}{\varphi}\theta)\right|^2 d\theta d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\varphi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\widetilde{c_n}(\sigma)\right|^2 d\theta d\nu, \sigma = 1 + i\nu$$

On a la série de Fourier de la fonction v converge uniformément vers v, on applique alors le théorème de Fubini, d'où on obtient la formule suivante:

$$\|v\|_{L^2}^2 = \varphi \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\widetilde{c_n}(\sigma)\right|^2 d\nu, \sigma = 1 + i\nu \tag{5.7}$$

On a :

$$w = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left[1 + |\sigma+2|^2 + \left[\frac{n\pi}{\varphi}\right]^2\right]^{-1} \widetilde{c_n}(\sigma+2)\exp(\frac{in\pi}{\varphi}\theta) \tag{5.8}$$

d'où $\|w\|_{L^2}^2 = \|u\|_{H^{-2}}^2$. La fonction w peut s'écrire de la manière suivante:

$$w = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\left[P_2(\sigma) - (\frac{n\pi}{\varphi})^2\right]}{1 + |\sigma+2|^2 + \left[\frac{n\pi}{\varphi}\right]^2} \widetilde{c_n}(\sigma+2)\exp(\frac{in\pi}{\varphi}\theta)$$

Avec $P_2(\sigma)$ est un polynôme du second degré de la variable σ, ce polynôme découle de la dérivation deux fois par rapport à la variable σ.

L'expression: $A(\sigma) = \dfrac{\left[P_2(\sigma) - (\frac{n\pi}{\varphi})^2\right]}{1 + |\sigma+2|^2 + \left[\frac{n\pi}{\varphi}\right]^2}$ *est bornée par rapport aux variables σ et θ; posons alors $K_1 = \sup|A(\sigma)|$, on aura alors:*

$$\|\widetilde{w}\|_{\widetilde{L^2}}^2 \leq K_1^2 \|\widetilde{v}\|_{\widetilde{L^2}}^2 \tag{5.9}$$

où $\widetilde{L^2}$ désigne l'espace transformé par la transformation de Mellin de l'espace L^2.Et comme $\|\widetilde{w}\|_{\widetilde{L^2}}^2 = \|u\|_{H^{-2}}^2$, on a donc finalement:

$$\|u\|_{H^{-2}}^2 \leq K_1^2 \ \|v\|_{L^2}^2 \tag{5.10}$$

5.3 Inégalité à priori et existence de la solution du problème adjoint

5.3.1 Cas du problème non perturbé

Cas de la condition de Dirichlet

Pour étudier l'existence de la solution du problème adjoint non perturbé (cas $F(u) = 0$) le problème suivant:

$$(P_\varphi^*) \quad \begin{cases} Pu = h & \text{dans } \Omega_\varphi \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi \end{cases} \tag{5.11}$$

où, P est l'opérateur adjoint de $\rho^\alpha \Delta$ c'est à dire $P = (\rho^\alpha \Delta)^*$ et $h \in E_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$.

On étudie l'existence de la solution dans l'espace $E_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$ en utilisant le lemme de Peetre voir (chapitre 3), donc pour montrer que l'image de P est fermée dans $E_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$ on établira une inégalité à priori de type: il existe une constante $K > 0$ telle que:

$$\|u\|_E \leq K \left\{ \|Pu\|_F + \|u\|_G \right\} \tag{5.12}$$

On va appliquer le lemme de Peetre aux espaces:

$$E = L^2(\Omega_\varphi) \text{ et } F = E_{-\alpha}(\Omega_\varphi) \text{ et } G = H^{-1}(\Omega_\varphi);$$

Donc toutes les hypothèses du lemme de Peetre sont vérifiées .

D'après la proposition (4.2.2.2) l'espaces $E_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$ muni la norme du graphe suivante :

$$\|Pu\|_{E_{-\alpha}(\Omega_\varphi)} = \|Pu\|_{H^{-1}(\Omega_\varphi)} + \left\|\rho^{-\alpha} Pu\right\|_{H^{-2}(\Omega_\varphi)} \tag{5.13}$$

Donc pour montrer que l'inégalité (5.12), il suffit compte tenu de l'inégalité (5.13), d'établir l'inégalité suivante: Il existe une constante $K_1 > 0$ telle que :

$$\|u\|_{L^2(\Omega_\varphi)} \leq K_1 \left\{ \left\|\rho^{-\alpha} P u\right\|_{H^{-2}(\Omega_\varphi)} + \|u\|_{H^{-1}(\Omega_\varphi)} \right\} \tag{5.14}$$

Démonstration de l'inégalité:

Pour établir l'inégalité (5.12), on va utiliser la norme de $H^{-2}(\Omega_\varphi)$ définie par la relation (5.2) et on aura :

si $\quad u = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(\rho)\exp(\dfrac{in\pi}{\varphi}\theta)$ alors $\|\rho^{-\alpha}Pu\|^2_{H^{-2}(\Omega_\varphi)} = \|\rho^{-\alpha}(\rho^\alpha\Delta)^* u\|^2_{H^{-2}(\Omega_\varphi)}$

$$\left\|\rho^{-\alpha}Pu\right\|^2_{H^{-2}(\Omega_\varphi)} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\varphi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left| \frac{\left[(\sigma-\alpha)^2 - (\frac{n\pi}{\varphi})^2\right]}{1+|\sigma+2|^2 + \left[\frac{n\pi}{\varphi}\right]^2} \right|^2 \left|\widetilde{c_n}(\sigma)\right|^2 d\nu d\theta$$

avec $\quad \sigma = 1 + i\nu$

Posons: $B(\sigma,n) = \left| \dfrac{\left[(\sigma-\alpha)^2 - (\frac{n\pi}{\varphi})^2\right]}{1+|\sigma+2|^2 + \left[\frac{n\pi}{\varphi}\right]^2} \right|.$

On vérifie que le terme $B(\sigma,n)$ est borné par rapport à σ et n, sauf pour le cas particulier $\nu = 0$ où ce terme s'annule, ce cas sera étudié à part, on a donc:

$\|\rho^{-\alpha}Pu\|^2_{H^{-2}} =$

$$\int_0^{\varphi}\int_{|\nu|>1} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left| \frac{\left[(\sigma-\alpha)^2 - (\frac{n\pi}{\varphi})^2\right]}{1+|\sigma+2|^2 + \left[\frac{n\pi}{\varphi}\right]^2} \right|^2 \left|\widetilde{c_n}(\sigma)\right|^2 d\nu d\theta + \int_0^{\varphi}\int_{|\nu|<1} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left| \frac{\left[(\sigma-\alpha)^2 - (\frac{n\pi}{\varphi})^2\right]}{1+|\sigma+2|^2 + \left[\frac{n\pi}{\varphi}\right]^2} \right|^2 \left|\widetilde{c_n}(\sigma)\right|^2 d\nu d\theta$$

<u>**Pour le cas** $|\nu| > 1$ **:**</u>

on a $B(\sigma,n)$ est borné, donc il existe une constante $C_1 > 0$ telle que :

$$\int_0^{\varphi}\int_{|\nu|>1} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left| \frac{\left[(\sigma-\alpha)^2 - (\frac{n\pi}{\varphi})^2\right]}{1+|\sigma+2|^2 + \left[\frac{n\pi}{\varphi}\right]^2} \right|^2 \left|\widetilde{c_n}(\sigma)\right|^2 d\nu d\theta \ \geq C_1 \int_0^{\varphi}\int_{|\nu|>1} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\widetilde{c_n}(\sigma)\right|^2 d\nu d\theta$$

D'où : $\quad \|\rho^{-\alpha}Pu\|^2_{H^{-2}(\Omega_\varphi)} \geq C_1 \int\limits_0^\varphi \int\limits_{|\nu|>1} \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |\widetilde{c_n}(\sigma)|^2 \, d\nu d\theta.$

on applique la transformation de Mellin à l'opérateur $\rho^{-\alpha}P$ on aura :

$\widetilde{\rho^{-\alpha}Pu}(\sigma+2,\theta) = \widetilde{h}(\sigma+2,\theta)$ et nous avons obtenu l'inégalité suivante :

$$\left\|\widetilde{h}(\sigma+2,\theta)\right\|^2_{\mathbf{E}_A} \geq C_1 \left\|\widetilde{u}(\sigma,\theta)\right\|^2_{\widetilde{\mathbf{L}^2_A}} \tag{5.15}$$

Où, $\mathbf{E}_A$ est l'espace transformée de Mellin de $H^{-2}(\Omega_\varphi)$, où la variable σ est dans l'ensemble $A = \{\sigma \in \mathbb{C} \text{ avec } \operatorname{Re}\sigma = 1 \text{ et } |\operatorname{Im}\sigma| > 1\}$, et $\widetilde{\mathbf{L}^2_A}$ est l'espace transformée de Mellin de $L^2(\Omega_\varphi)$ avec la variable σ est dans A.

<u>**Pour le cas $|\nu| \leq 1$:**</u>

on va raisonner directement sur $\widetilde{\rho^{-\alpha}Pu}(\sigma+2,\theta) = \widetilde{h}(\sigma+2,\theta)$ on obtient donc :

$$\widetilde{h}(\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{2},\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial^2\widetilde{u}}{\partial\theta^2}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\theta}) + (\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\alpha})^2\widetilde{u}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\theta}) \tag{5.16}$$

où, $\qquad \sigma = 1 + i\nu \quad$ avec $\quad -1 \leq \nu \leq 1.$

il s'agit donc d'une équation différentielle ordonnaire du second ordre par rapport à la variable θ, et dépendant d'un paramètre complexe $\sigma = 1 + i\nu$, avec $-1 \leq \nu \leq 1$, on a donc: $\quad (\nu,\theta) \in [-1,1] \times [0,\varphi]$.

en posant $\omega = \sigma - \alpha$ et on obtient $\dfrac{\partial^2\widetilde{u}}{\partial\theta^2}(\sigma,\theta) + \omega^2\widetilde{u}(\sigma,\theta) = \widetilde{h}$.

On utilise la théorie élémentaire des équations différentielles, voir par exemple Reinhard [1].Par résolution explicite, il existe une constante $C_2 > 0$ telle que :

$$\|\widetilde{u}\|^2_{\widetilde{\mathbf{L}^2_B}} \leq C_2 \left\| \frac{\partial^2\widetilde{u}}{\partial\theta^2}(\sigma,\theta) + \omega^2\widetilde{u}(\sigma,\theta) \right\|^2_{\mathbf{E}_B}$$

on a le résultat désiré par résolution explicité de l'équation (5.16), d'où on a :

$\exists\ C_2 > 0$ qui vérifie :

$$\left\|\widetilde{h}(\sigma+2,\theta)\right\|^2_{\mathbf{E}_B} \geq \mathbf{C}_2 \left\|\widetilde{u}(\sigma,\theta)\right\|^2_{\widetilde{\mathbf{L}^2_B}} \tag{5.17}$$

Où, E_B est l'espace transformée de Mellin de $H^{-2}(\Omega_\varphi)$, où la variable σ est dans la bande $B = \{\sigma \in \mathbb{C} \text{ avec } \operatorname{Re}\sigma = 1 \text{ et } \operatorname{Im}\sigma \in [-1,1]\}$, et $\widetilde{\mathbf{L}^2_B}$ est l'espace transformée de Mellin de $L^2(\Omega_\varphi)$ avec la variable σ est dans la bande B.

En ajoutant (5.15) et (5.17), on obtient l'inégalité désirée. Par l'utilisation de la transformation de Mellin inverse, on a donc l'inégalité souhaitée vérifiée, donc $\exists K > 0$ telle que:

$$\|u\|_{L^2(\Omega_\varphi)} \leq K\left\{\|Pu\|_{\mathbf{E}_{-\alpha}(\Omega_\varphi)} + \|u\|_{H^{-1}(\Omega_\varphi)}\right\}$$

Par application du lemme de Peetre, l'image de l'opérateur P est fermée dans $E_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$ et son noyau est de dimension finie dans $L^2(\Omega_\varphi)$.

on en déduit que le problème(5.11) avec la condition de Dirichlet homogène admet au moins une solution dans l'espace $L^2(\Omega_\varphi)$.

Cas de la condition de Neumann

Pour étudier l'existence de la solution du problème adjoint non perturbé (le cas où $F(u) = 0$) le problème adjoint suivante :

$$(P^*_\varphi) \quad \begin{cases} Pu = h & \text{dans } \Omega_\varphi \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi \end{cases} \tag{5.18}$$

où P est un opérateur adjoint de $\rho^\alpha\Delta$, c'est à dire $P = (\rho^\alpha\Delta)^*$ et $h \in F_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$, on va étudier de l'existence de la solution dans l'espace $F_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$, on utilise le lemme de Peetre voir chapitre 3, donc pour montrer que l'image de P est fermée dans $F_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$, on établira une inégalité à priori du type, il existe une constante $Y > 0$ telle que:

$$\|u\|_E \leq Y \{\|Pu\|_F + \|u\|_G\} \tag{5.19}$$

On va appliquer le lemme de Peetre aux espaces:

$$E = L^2(\Omega_\varphi) \ ; F = F_{-\alpha}(\Omega_\varphi) \ ; \ G = H^{-1}(\Omega_\varphi).$$

On remarque là aussi que toutes les hypothèses du lemme de Peetre (comme le cas de condition de Dirichlet) sont vérifiées, avec la même démarche que celle suivi pour la condition de Dirichlet, on établit une inégalité à priori relative au problème avec la condition de Neumann d'où le problème avec la condition de Neumann homogène admet au moins une solution dans l'espace $L^2(\Omega_\varphi)$.

5.3.2 Cas du problème perturbé

Cas de la condition de Dirichlet

Pour étudier l'existence de la solution du problème adjoint perturbé (le cas où, $F(u) = \lambda u \quad \lambda \neq 0)$. Le problème suivant:

$$(P_\varphi^*) \quad \begin{cases} Pu = (\rho^\alpha \Delta + \rho^\alpha \lambda)^* u = h & \text{dans } \Omega_\varphi \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi \end{cases} \tag{5.20}$$

On va montrer que l'image de l'opérateur P est fermée dans $E_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$ et que son noyau est de dimension finie dans $L^2(\Omega_\varphi)$, on va appliquer le lemme de Peetre on a donc :

$\rho^{-\alpha} P = \rho^{-\alpha}(\rho^\alpha \Delta + \rho^\alpha \lambda)^*$ et comme l'opérateur $\rho^{-\alpha} P = \rho^{-\alpha}(\rho^\alpha \Delta + \rho^\alpha \lambda)^*$est linéaire continu de $L^2(\Omega_\varphi)$ dans $H^{-2}(\Omega_\varphi)$.

On va établir une inégalité du type, il existe une constante $K_2 > 0$ telle que:

$$\|u\|_{L^2(\Omega_\varphi)} \leq K_2 \left\{ \left\|\rho^{-\alpha} P u\right\|_{H^{-2}(\Omega_\varphi)} + \|u\|_{H^{-1}} \right\}$$

Pour $\lambda = 0$, on a $\rho^{-\alpha}(\rho^\alpha \Delta + \rho^\alpha \lambda)^* = \rho^{-\alpha}(\rho^\alpha \Delta)^* u$, ce qui est montré l'inégalité suivante:

$$\|u\|_{L^2(\Omega_\varphi)} \leq K \left\{ \left\|\rho^{-\alpha}(\rho^\alpha \Delta)^* u\right\|_{H^{-2}(\Omega_\varphi)} + \|u\|_{H^{-1}} \right\}$$

le résultat est varié pour la condition de Dirichlet.

Pour $\lambda \neq 0$, on a $\rho^{-\alpha}(\rho^\alpha \Delta + \rho^\alpha \lambda)^* u = \rho^{-\alpha}(\rho^\alpha \Delta)^* u + \lambda u = \rho^{-\alpha} P u$

on utilise toujours la norme de H^{-2} donnée par (5.2), on aura :

$$\|\rho^{-\alpha}(\rho^\alpha \Delta)^* u\|_{H^{-2}} = \|\rho^{-\alpha}(\rho^\alpha \Delta)^* u + \lambda u - \lambda u\|_{H^{-2}} \quad \leq \|\rho^{-\alpha} P u\|_{H^{-2}} + \|\lambda u\|_{H^{-2}}$$

d'où,
$$\|\rho^{-\alpha}(\rho^\alpha \Delta)^* u\|^2_{H^{-2}} \leq (\|\rho^{-\alpha} P u\|_{H^{-2}} + \|\lambda u\|_{H^{-2}})^2$$

donc
$$\|\rho^{-\alpha}(\rho^\alpha \Delta)^* u\|^2_{H^{-2}} \leq \|\rho^{-\alpha} P u\|^2_{H^{-2}} + \|\lambda u\|^2_{H^{-2}} + 2\|\rho^{-\alpha} P u\|_{H^{-2}} \|\lambda u\|_{H^{-2}}.$$

Posons : $X = \|\rho^{-\alpha} P u\|, Y = \|\lambda u\|$ et comme $(X - Y)^2 \geq 0$ donc $2XY \leq X^2 + Y^2$, on en déduit que $\|\rho^{-\alpha}(\rho^\alpha \Delta)^* u\|^2_{H^{-2}} \quad \leq 2(\|\rho^{-\alpha} P u\|^2_{H^{-2}} + \|\lambda u\|^2_{H^{-2}})$.

Donc $\|\rho^{-\alpha}(\rho^\alpha \Delta)^* u\|^2_{H^{-2}} + \|u\|^2_{H^{-1}} \leq 2(\|\rho^{-\alpha} P u\|^2_{H^{-2}} + \|\lambda u\|^2_{H^{-2}}) + \|u\|^2_{H^{-1}}$

et
$$\|\rho^{-\alpha}(\rho^\alpha \Delta)^* u\|^2_{H^{-2}} + \|u\|^2_{H^{-1}} \leq 2(\|\rho^{-\alpha} P u\|^2_{H^{-2}} + \|u\|^2_{H^{-1}}) + 2\|\lambda u\|^2_{H^{-2}}$$
où, λ est une constante quelconque non nulle.

comme l'injection de H^{-1} dans H^{-2} est continue, on a donc $2|\lambda|^2 \|u\|^2_{H^{-2}} \leq 2|\lambda|^2 \|u\|^2_{H^{-1}}$
et

$$\left\|\rho^{-\alpha}(\rho^\alpha \Delta)^* u\right\|^2_{H^{-2}} + \|u\|^2_{H^{-1}} \leq 2(\left\|\rho^{-\alpha} P u\right\|^2_{H^{-2}} + \|u\|^2_{H^{-1}}) + 2|\lambda|^2 \|u\|^2_{H^{-1}}.$$

D'après l'inègalité **(5.14)** on en déduit :

$$\frac{1}{K_2}\|u\|^2_{L^2(\Omega_\varphi)} \leq \; 2(\left\|\rho^{-\alpha} P u\right\|^2_{H^{-2}} + \|u\|^2_{H^{-1}}) + 2|\lambda|^2 \|u\|^2_{H^{-1}}$$

d'où,

$$\frac{1}{K_2}\|u\|^2_{L^2(\Omega_\varphi)} \leq\ 2\left\|\rho^{-\alpha}Pu\right\|^2_{H^{-2}} +\ (2+2\,|\lambda|^2)\,\|u\|^2_{H^{-1}}\,.$$

Si on prend une constante $C_2 = \max(2, 2+2\,|\lambda|^2)$, et on a donc l'inégalité suivante :

Il existe une constante $K_3 = K_2C_2 > 0$ telle que:

$$\|u\|_{L^2(\Omega_\varphi)} \leq K_3\left\{\left\|\rho^{-\alpha}Pu\right\|_{H^{-2}(\Omega_\varphi)} + \|u\|_{H^{-1}}\right\} \qquad C.Q.F.D$$

Donc, l'image de l'opérateur adjoint perturbé $P = (\rho^{\alpha}(\Delta+\lambda))^*$ est fermée dans $E_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$ et son noyau est de dimension finie dans $L^2(\Omega_\varphi)$.

Le problème adjoint perturbé avec la condition de Dirichlet homogène admet au moins une solution dans l'espace $L^2(\Omega_\varphi)$.

Cas de la condition de Neumann

Pour étudier l'existence de la solution du problème adjoint perturbé (le cas où, $F(u) = \lambda u$, $\lambda \neq 0$) c'est à dire le problème suivant:

$$(P^*_\varphi)\quad \begin{cases} Pu = (\rho^{\alpha}\Delta + \rho^{\alpha}\lambda)^*u = h & \text{dans } \Omega_\varphi \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi \end{cases} \tag{5.21}$$

On va monter que l'image de P est fermée dans $F_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$ pour ceci on établira une inégalité à priori de type, il existe une constante $M_1 > 0$ telle que :

$$\|u\|_{L^2(\Omega_\varphi)} \leq M_1\left\{\|Pu\|_{F_{-\alpha}(\Omega_\varphi)} + \|u\|_{H^{-1}}\right\}$$

On remarque là aussi que toutes les hypothèses du lemme de Peetre, sont vérifiées avec la même technique que celle utilisée pour la condition de Dirichlet .

On en conclut que le problème avec condition de Neumann homogène admet au moins une solution dans l'espace $L^2(\Omega_\varphi)$.

5.4 Etude de l'unicité de la solution

On va étudier l'unicité de la solution du problème (5.1), et pour ceci étudie le noyau du problème perturbé puis non perturbé respectivement.

5.4.1 Cas du problème non perturbé

Cas de la condition de Dirichlet

Dans ce paragraphe, on se propose de calculer le noyau du problème (5.11) avec la condition de Dirichlet homogène dans l'espace $L^2(\Omega_\varphi)$.

Les éléments du noyau du problème **(5.11)**, sont la solution du problème suivant:

$$(P_\varphi^*) \quad \begin{cases} Pu = (\rho^\alpha \Delta)^* u = 0 & \text{dans } \Omega_\varphi \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi \end{cases} \tag{5.22}$$

On va traiter le cas général, on démontera la proposition suivante:

Proposition 5.4.1.1:

le noyau du problème (5.11) dans $H^{-m}(\Omega_\varphi)$ avec m entier positif, dépend de m et de φ (ouverture de Ω_φ).

Preuve:

Cherchons noyau problème (5.11) dans $H^{-m}(\Omega_\varphi)$ avec m entier positif, il s'agit donc de résoudre dans $H^{-m}(\Omega_\varphi)$, le problème (5.22).

Pour simplifier les calculs, faisons le changement de variable suivant:

$$u = \rho^{-\alpha} w \in H^{-m}(\Omega_\varphi)$$

On a : $Pu = (\rho^{\alpha}\Delta + 2\alpha\rho^{\alpha-1}\dfrac{\partial}{\partial\rho} + \alpha^2\ \rho^{\alpha-2})(\rho^{-\alpha}w)$

$$Pu\ = \left[\rho^{\alpha}\frac{\partial^2(\rho^{-\alpha}w)}{\partial\rho^2} + \rho^{\alpha-1}\frac{\partial(\rho^{-\alpha}w)}{\partial\rho} + \rho^{\alpha-2}\frac{\partial^2(\rho^{-\alpha}w)}{\partial\theta^2}\right] + 2\alpha\rho^{\alpha-1}\frac{\partial(\rho^{-\alpha}w)}{\partial\rho} + \alpha^2\rho^{\alpha-2}\rho^{-\alpha}w$$

$$= 2\alpha\rho^{\alpha-1}\left[-\alpha\rho^{-\alpha-1}w + \rho^{-\alpha}\frac{\partial w}{\partial\rho}\right] + \alpha^2\rho^{-2}w + \frac{\partial^2 w}{\partial\rho^2} + (1-2\alpha)\rho^{-1}\frac{\partial w}{\partial\rho} + \rho^{-2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2} + \alpha^2\rho^{-2}w$$

$$= \frac{\partial^2 w}{\partial\rho^2} + \rho^{-1}\frac{\partial w}{\partial\rho} + \rho^{-2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2} = \Delta w.$$

Donc $Pu = \Delta w$, *avec* $\rho^{-\alpha}w \in H^{-m}(\Omega_\varphi), m \in \mathbb{N}$, *le problème (5.22) se réduit à :*

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{dans } \Omega_\varphi \\ w = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi \end{cases} \tag{5.23}$$

On a $w \in C^{\infty}(\Omega_\varphi)$ soit $0 < \rho < \rho_0$,

Pour résoudre le problème (5.23) on utilisera la méthode de séparations de variables.

On pose $w(\rho,\theta) = z(\rho)v(\theta)$ donc l'équation $\Delta w = 0$ dans (5.23) s'écrit:

$$\frac{\rho^2 z'' + \rho z'}{z} = -\frac{v''}{v}$$

la valeur commune des deux membres est une constante et on prend la constante égale à $(\dfrac{n\pi}{\varphi})^2$ et on en déduit que :

$$\begin{cases} v'' + (\dfrac{n\pi}{\varphi})^2 v = 0 & (1) \\ \rho^2 z'' + \rho z' - (\dfrac{n\pi}{\varphi})^2 z = 0 & (2) \end{cases}$$

la solution de l'équation différentielle (1) $v(\theta) = C_1 \cos \frac{n\pi}{\varphi}\theta + C_2 \sin \frac{n\pi}{\varphi}\theta$ telle que C_1, C_2 sont des constantes arbitraires.

l'équation différentielle (2) est dite "équation d'Euler".

On cherche directement pour la résoudre, ses solutions sont sous la forme $z = \rho^k$, donc(2) vérifie l'équation déterminante $\left[k(k-1) + k - (\frac{n\pi}{\varphi})^2\right]\rho^k = 0$ (3) voir [12].

L'équation (3) admet comme racines $k_1 = \dfrac{n\pi}{\varphi}$ ou $k_2 = -\dfrac{n\pi}{\varphi}$, donc la solution générale de l'équation d'Euler est $z(\rho) = \lambda^{'} \rho^{\frac{n\pi}{\varphi}} + \mu^{'} \rho^{-\frac{n\pi}{\varphi}}$,telle que $\lambda^{'}, \mu^{'}$sont constantes arbitraires.

Alors la solution est $w(\rho, \theta) = (\lambda^{'} \rho^{\frac{n\pi}{\varphi}} + \mu^{'} \rho^{-\frac{n\pi}{\varphi}})(C_1 \cos \frac{n\pi}{\varphi}\theta + C_2 \sin \frac{n\pi}{\varphi}\theta)$ (4)

lorsque $w(\rho, 0) = 0$ on a donc $C_1 = 0$.
l'équation (4) donnée par :

$$w(\rho, \theta) = C_2(\lambda^{'} \rho^{\frac{n\pi}{\varphi}} + \mu^{'} \rho^{-\frac{n\pi}{\varphi}}) \sin \frac{n\pi}{\varphi}\theta \tag{5}$$

Posons: $\lambda = C_2 \lambda^{'}$, et $\mu = C_2 \mu^{'}$, l'équation (5) doivent :

$$w(\rho, \theta) = (\lambda \rho^{\frac{n\pi}{\varphi}} + \mu \rho^{-\frac{n\pi}{\varphi}}) \sin \frac{n\pi}{\varphi}\theta$$

et par superposition voir [1] ou [27] et on a donc :

$$w(\rho, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left[\boldsymbol{\lambda}_n \rho^{\frac{n\pi}{\varphi}} + \boldsymbol{\mu}_n \rho^{-\frac{n\pi}{\varphi}}\right] \sin \frac{n\pi}{\varphi}\theta$$

Donc la solution générale du problème (5.23) est de la forme :

$$w(\rho, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left[\boldsymbol{\lambda}_n \rho^{\frac{n\pi}{\varphi}} + \boldsymbol{\mu}_n \rho^{-\frac{n\pi}{\varphi}}\right] \sin \frac{n\pi}{\varphi}\theta \tag{6}$$

puisque $u = \rho^{-\alpha} w$, la solution générale u du problème (5.22) s'écrit :

$$u(\rho,\theta)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\left[\boldsymbol{\lambda}_n\rho^{-\alpha+\frac{n\pi}{\varphi}}+\boldsymbol{\mu}_n\rho^{-\alpha-\frac{n\pi}{\varphi}}\right]\sin\frac{n\pi}{\varphi}\theta$$

où, $u=\rho^{-\alpha}w,\ 0<\alpha<1.$

Si, on fait tendre ρ vers 0 en tenant compte du fait que $u=\rho^{-\alpha}w$ dans $H^{-m}(\Omega_\varphi), m\in\mathbb{N}$,

la solution générale u du problème (5.22) s'écrit :

$$u(\rho,\theta)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\lambda_n\rho^{-\alpha+\frac{n\pi}{\varphi}}\sin\frac{n\pi}{\varphi}\theta+\sum_{n\in\mathbb{N}}\mu_n\rho^{-\alpha-\frac{n\pi}{\varphi}}\sin\frac{n\pi}{\varphi}\theta$$

la solution régulière est $\sum_{n\in\mathbb{N}}\lambda_n\rho^{-\alpha+\frac{n\pi}{\varphi}}\sin\frac{n\pi}{\varphi}\theta$ et la solution singulière est $\sum_{n\in\mathbb{N}}\mu_n\rho^{-\alpha-\frac{n\pi}{\varphi}}\sin\frac{n\pi}{\varphi}\theta.$

on constate que les coefficients μ_n s'annulent à partir d'un certain rang $n_0=n_0(m)$ qui dépend de m et de φ (car la solution générale (5.22) dépend de φ).

Cas de la condition de Neumann

Les éléments du noyau de problème (5.18) sont solution du problème suivant :

$$(P_\varphi^*)\quad\begin{cases}Pu=0 & \text{dans } \Omega_\varphi\\ \dfrac{\partial u}{\partial\eta}=0 & \text{sur } \Gamma_\varphi\end{cases}\tag{5.24}$$

D'après le lemme de Peetre, et l'inégalité (5.19), le noyau du problème (5.18) est de dimension finie dans $L^2(\Omega_\varphi)$.

Faisons le changement de variable $u=\rho^{-\alpha}w$, alors le problème (5.24), s'écrit :

$$\begin{cases}\Delta w=0 & \text{dans } \Omega_\varphi\\ \rho^{-\alpha}\dfrac{\partial w}{\partial\eta}=0 & \text{sur } \Gamma_\varphi\end{cases}\tag{5.25}$$

ce problème s'écrit encore :

$$\begin{cases} \Delta w = 0 \quad \text{dans } \Omega_\varphi \\ \dfrac{\partial w}{\partial \eta} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_\varphi \backslash \{0\} \end{cases} \tag{5.26}$$

On remarque que toute fonction constante est solution de (5.26), il en même pour le problème (5.24), le noyau n'est pas réduit à $\{0\}$ dans $L^2(\Omega_\varphi)$, comme la dimension du noyau est finie (d'après le lemme de Peetre), donc la dimension de ce noyau (5.18) est au moins égale à un, donc la solution du problème (5.18) avec la condition de Neumann n'est pas unique dans l'espace $L^2(\Omega_\varphi)$.

5.4.2 Cas du problème perturbé

Cas de la condition de Dirichlet

On va calculer le noyau du problème perturbé avec la condition de Dirichlet homogène dans l'espace $L^2(\Omega_\varphi)$ donc les éléments du noyau du problème (5.20), sont solution du problème suivant:

$$(P_\varphi^*) \quad \begin{cases} Pu = (\rho^\alpha \Delta + \rho^\alpha \lambda)^* u = 0 & \text{dans } \Omega_\varphi \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi \end{cases} \tag{5.27}$$

On va traiter le cas général, on démontera la proposition suivante, analogue à la proposition (5.4.1.1).

Proposition 5.4.2.1:

le noyau du problème (5.20) dans $H^{-m}(\Omega_\varphi)$ avec m entier positif, dépend de m et φ (ouverture de Ω_φ).

Preuve:

cherchons le noyau du problème (5.20) dans $H^{-m}(\Omega_\varphi)$ avec m entier positif, il s'agit donc de résoudre dans $H^{-m}(\Omega_\varphi)$, le problème (5.27).

Pour simplifier les calculs, en faisons (comme pour le cas du problème non perturbé) le changement de variable suivant:

$$u = \rho^{-\alpha} w \in H^{-m}(\Omega_\varphi).$$

On va de même que le travail précédent on obtient le problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta w + \lambda w = 0 & \text{dans } \Omega_\varphi \\ w = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi \end{cases} \tag{5.28}$$

On a $w \in C^\infty(\Omega_\varphi)$ et soit $0 < \rho < \rho_0$, pour résoudre le problème (5.28) on utilise la méthode de séparations des variables.

On pose $w(\rho, \theta) = z(\rho)v(\theta)$ et on a donc l'équation $\Delta w + \lambda w = 0$ dans le problème (5.28)

s'écrit:

$$\frac{\rho^2 z'' + \rho z'}{z} + \rho^2 \lambda = -\frac{v''}{v}$$

la valeur commune des deux membres est une constante, soit $\omega^2 = (\frac{n\pi}{\varphi})^2$ et on a

$$\begin{cases} v'' + (\frac{n\pi}{\varphi})^2 v = 0 & (7) \\ \rho^2 z'' + \rho z' + (\rho^2 \lambda - (\frac{n\pi}{\varphi})^2) z = 0 & (8) \end{cases}$$

la solution de l'équation différentielle (7) est donnée par : $v(\theta) = C_1 \cos \frac{n\pi}{\varphi}\theta + C_2 \sin \frac{n\pi}{\varphi}\theta$.

telle que C_1, C_2 sont des constantes arbitraires .

l'équation différentielle (8) est dite "'équation différentielle de Bessel".

<u>**Cas** $\lambda = \mu^2 \in \mathbb{R}_+^*$</u>

l'équation différentielle de Bessel donné par : $\rho^2 z'' + \rho z' + (\rho^2 \mu^2 - (\frac{n\pi}{\varphi})^2) z = 0$ (9).

Pour cherchera la solution de cette équation, on va traiter deux cas :

Si $\dfrac{n\pi}{\varphi} \notin \mathbb{N}$ c'est à dire $\dfrac{n\pi}{\varphi}$ n'est pas entier, alors la solution générale de l'équation de Bessel (9) est : $z(\rho) = \lambda J_{\frac{n\pi}{\varphi}}(\rho\mu) + \mu J_{-\frac{n\pi}{\varphi}}(\rho\mu)$ telle que λ, μ sont des constantes arbitraires et

$$J_{\frac{n\pi}{\varphi}}(\rho\mu) = \quad (\frac{\rho\mu}{2})^{\frac{n\pi}{\varphi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}(\frac{\rho\mu}{2})^{2k} \frac{1}{\Gamma(\frac{n\pi}{\varphi}+k+1)}$$

$$J_{\frac{-n\pi}{\varphi}}(\rho\mu) = (\frac{\rho\mu}{2})^{-\frac{n\pi}{\varphi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{n!}(\frac{\rho\mu}{2})^{2k} \frac{1}{\Gamma(\frac{-n\pi}{\varphi}+k+1)}$$

$J_{\frac{-n\pi}{\varphi}}(\rho\mu)$ est aussi solution de l'équation de Bessel (9).

$J_{\frac{-n\pi}{\varphi}}(\rho\mu)$ est linéairement independent de $J_{\frac{n\pi}{\varphi}}(\rho\mu)$ voir J.Bass [12] ,en particulier, on verifier que $J_{\frac{1}{2}}(\rho\mu) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi\rho\mu}}\sin\rho\mu,\ J_{\frac{-1}{2}}(\rho\mu) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi\rho\mu}}\cos\rho\mu.$

Donc la solution générale du problème (5.28) avec la condition de Dirichlet homogène est donnée par: $w(\rho,\theta) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left[\boldsymbol{\lambda}_n J_{\frac{n\pi}{\varphi}}(\rho\mu) + \boldsymbol{\mu}_n J_{\frac{-n\pi}{\varphi}}(\rho\mu)\right] \sin\frac{n\pi}{\varphi}\theta.$

D'où, la solution générale de (5.27) est : $u(\rho,\theta) = G^1_{n,k} + G^2_{n,k}$ telle que :

$$G^1_{n,k} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left[\lambda_n(\frac{\mu^{\frac{n\pi}{\varphi}}}{2^{\frac{n\pi}{\varphi}}}\rho^{\frac{n\pi}{\varphi}-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\rho^{2k-\alpha}(\frac{\mu}{2})^{2k}\frac{1}{\Gamma(\frac{n\pi}{\varphi}+k+1)})\right] \sin\frac{n\pi}{\varphi}\theta$$

$$G^2_{n,k} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left[\mu_n(\frac{\mu^{\frac{n\pi}{\varphi}}}{2^{\frac{n\pi}{\varphi}}}\rho^{-\frac{n\pi}{\varphi}-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\rho^{2k-\alpha}(\frac{\mu}{2})^{2k}\frac{1}{\Gamma(\frac{-n\pi}{\varphi}+k+1)})\right] \sin\frac{n\pi}{\varphi}\boldsymbol{\theta}$$

en tenant compte du fait que $u = \rho^{-\alpha} w$ dans $H^{-m}(\Omega_\varphi), m \in \mathbb{N}$.

On constate que les coefficients μ_n s'annulent à partir d'un certain rang $n_0 = n_0(m)$ qui dépend de m et de φ.

Si $\frac{n\pi}{\varphi} \in \mathbb{N}$ c'est à dire tout entier, $\Gamma(\frac{n\pi}{\varphi}+n+1) = (\frac{n\pi}{\varphi}+n)!$ on a donc :

$$J_{\frac{n\pi}{\varphi}}(\rho\mu) = (\frac{\rho\mu}{2})^{\frac{n\pi}{\varphi}} \left[\frac{1}{\frac{n\pi}{\varphi}!} + ... + \frac{(-1)^n}{n!(\frac{n\pi}{\varphi}+n)!}(\frac{\rho\mu}{2})^{2n} + ... \right]$$

Donc, la solution générale donnée par: $z(\rho) = \lambda J_{\frac{n\pi}{\varphi}}(\rho\mu) + \mu Y_{\frac{n\pi}{\varphi}}(\rho\mu)$,telle que

$Y_{\frac{n\pi}{\varphi}}(\rho\mu) = \dfrac{J_{\frac{n\pi}{\varphi}}(\rho\mu)\cos\pi\frac{n\pi}{\varphi} - J_{\frac{-n\pi}{\varphi}}(\rho\mu)}{\sin\pi\frac{n\pi}{\varphi}}$ est une solution de l'équation de Bessel voir J.Bass [12] .

Donc de même que le travail précédent, on constate que les coefficients μ_n s'annulent à partir d'un certain rang $n_0 = n_0(m)$ qui dépend de m et de φ.

<u>**Cas** $\lambda = -\mu^2 \in \mathbb{R}_-^*$</u>

l'équation différentielle donné par : $\rho^2 z'' + \rho z' - (\rho^2\mu^2 + (\frac{n\pi}{\varphi})^2)z = 0$ (10) est dite "équation de Bessel modifiée".

la solution de l'équation de Bessel modifiée (10) voir [26] que donnée dans deux cas:

Si $\frac{n\pi}{\varphi} \notin \mathbb{N}$ c'est à dire $\frac{n\pi}{\varphi}$ n'est pas entier, alors la solution générale de (10) est donnée par:

$$z(\rho\mu) = AI_{\frac{n\pi}{\varphi}}(\rho\mu) + BI_{-\frac{n\pi}{\varphi}}(\rho\mu)$$

telle que $I_{\frac{n\pi}{\varphi}}(\rho\mu) = J_{\frac{n\pi}{\varphi}}(i\rho\mu)$ est une solution de l'équation différentielle

$$\rho^2 z'' + \rho z' - (\rho^2\mu^2 + (\frac{n\pi}{\varphi})^2)z = 0$$

et A, B sont des constantes arbitraires.

Donc, on a de même que le travail précédent on aura :

$$u(\rho,\theta) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left[A_n\rho^{-\alpha} I_{\frac{n\pi}{\varphi}}(\rho\mu) + B_n\rho^{-\alpha} I_{-\frac{n\pi}{\varphi}}(\rho\mu) \right] \sin\frac{n\pi}{\varphi}\theta.$$

On constate que les coefficients B_n s'annulent à partir d'un certain rang $n_0 = n_0(m)$ qui dépend de m et de φ.

Si $\frac{n\pi}{\varphi} \in \mathbb{N}$, c'est à dire tout entier est aussi la solution de l'équation de Bessel modifiée

$$z(\rho) = AI_{\frac{n\pi}{\varphi}}(\rho\mu) + BK_{\frac{n\pi}{\varphi}}(\rho\mu)$$

telle que $K_{\frac{n\pi}{\varphi}}(\rho\mu) = \dfrac{\pi}{2\sin\pi\frac{n\pi}{\varphi}}\left\{I_{-\frac{n\pi}{\varphi}}(\rho\mu) - I_{\frac{n\pi}{\varphi}}(\rho\mu)\right\}$,et donc la solution générale est

$$u(\rho,\theta) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\left[A_n\rho^{-\alpha}I_{\frac{n\pi}{\varphi}}(\rho\mu) + B_n\rho^{-\alpha}K_{\frac{n\pi}{\varphi}}(\rho\mu)\right]\sin\frac{n\pi}{\varphi}\theta$$

On constate que les coefficients B_n s'annulent à partir d'un certain rang $n_0 = n_0(m)$ qui dépend de m et de φ.

Cas de la condition de Neumann

Les éléments du noyau de problème (5.21) sont solution du problème suivant:

$$(P_\varphi^*) \quad \begin{cases} Pu = 0 & \text{dans } \Omega_\varphi \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi \end{cases} \tag{5.29}$$

de même que le travail de problème de Dirichlet perturbé **(5.18),** on a :

$$\begin{cases} \Delta w + \lambda w = 0 & \text{dans } \Omega_\varphi \\ \dfrac{\partial w}{\partial \eta} = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi \backslash \{0\} \end{cases} \tag{5.30}$$

Dans le cas de même travail précédent lorsque $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}_-^*$.

on recuppère le problème (3.18) d'où la solution n'est pas unique, car les constantes ne sont pas solution du problème (5.30) pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}_-^*$.

Pour illustrer tout ceci simple on prend quelques exemples.

Exemples :

1- Pour $m = 2$ c'est à dire le cas de $H^{-2}(\Omega_\varphi)$.donc Multiplions la fonction $\rho^{-\alpha-\frac{n\pi}{\varphi}} \sin \frac{n\pi}{\varphi}\boldsymbol{\theta}$ par une fonction $f(\rho,\theta) \in H_0^2(\Omega_\varphi)$ et intégrons deux fois par parties par rapport à la variable ρ, on sait que $\rho^{-\alpha}w \in H^{-2}(\Omega_\varphi)$, donc $\rho^{-\alpha-\frac{n\pi}{\varphi}} \sin \frac{n\pi}{\varphi}\boldsymbol{\theta} \in H^{-2}(\Omega_\varphi)$.

on obtient alors :

$$\int_0^{\varphi}\int_0^{\rho_0} \rho^{-\alpha-\frac{n\pi}{\varphi}} \sin \tfrac{n\pi}{\varphi}\boldsymbol{\theta} f(\rho,\theta)\rho d\rho d\theta =$$

$$D_1\int_0^{\varphi} \sin \tfrac{n\pi}{\varphi}\boldsymbol{\theta} f(\rho_0,\theta)d\theta + D_2\int_0^{\varphi} \sin \tfrac{n\pi}{\varphi}\boldsymbol{\theta}\frac{\partial f(\rho,\theta)}{\partial\rho}d\theta + D_3\int_0^{\varphi}\int_0^{\rho_0} \rho^{2-\alpha-\frac{n\pi}{\varphi}} \sin \tfrac{n\pi}{\varphi}\boldsymbol{\theta}\frac{\partial^2 f(\rho,\theta)}{\partial\rho^2}\rho d\rho d\theta$$

ce pour que l'intégral $\int_0^{\varphi}\int_0^{\rho_0} \rho^{-\alpha-\frac{n\pi}{\varphi}} \sin \frac{n\pi}{\varphi}\boldsymbol{\theta}\, f(\rho,\theta)\rho d\rho d\theta$ existe, il faut que $\rho^{2-\alpha-\frac{n\pi}{\varphi}} \sin \frac{n\pi}{\varphi}\boldsymbol{\theta}$ appartient de $L^2(\Omega_\varphi)$, car $\dfrac{\partial^2 f(\rho,\theta)}{\partial\rho^2} \in L^2(\Omega_\varphi)$, et ceci est réalisé si la condition suivante:

Si $\mathbf{n} < \dfrac{2\varphi}{\pi}$, on a donc les trois cas suivant:

a) si $\varphi \leq \dfrac{\pi}{2}$ on a $n<$ **1**, donc il n'y a pas de solution singulière du problème (5.22) dans $H^{-2}(\Omega_\varphi)$.

b) si $\dfrac{\pi}{2} < \boldsymbol{\varphi} < \boldsymbol{\pi}$ on a $n<$ **2**, donc il y a une seule solution singulière du problème (5.22) dans $H^{-2}(\Omega_\varphi)$.

c) si $\pi \leq \boldsymbol{\varphi} < \mathbf{2}\boldsymbol{\pi}$ on a $n<$ **4**, donc il y a trois solution singulière du problème (5.22) dans $H^{-2}(\Omega_\varphi)$.

2- Pour $m = 1$, c'est à dire le cas de $H^{-1}(\Omega_\varphi)$.

Par le même procédé que pour le cas où $m = 2$, la condition $\mathbf{n} < \dfrac{2\varphi}{\pi}$ s'écrit $\mathbf{n} < \dfrac{\varphi}{\pi}$.

On distingue ici deux cas :

a) si $\boldsymbol{\varphi} < \boldsymbol{\pi}$ on a $n<$ **1**, donc il n'y a pas de solution singulière du problème (5.22) dans $H^{-1}(\Omega_\varphi)$.

b) si $\pi \leq \boldsymbol{\varphi} < \mathbf{2\pi}$, donc il n'y a une seule solution singulière du problème (5.22) dans $H^{-1}(\Omega_\varphi)$.

3- $m = 0$, c'est à dire le cas de $L^2(\Omega_\varphi)$.

Par le même procédé que pour le cas où $m = 2$ et $m = 1$ la condition $\mathbf{n} < \dfrac{2\varphi}{\pi}$.

s'écrit $\dfrac{n\pi}{\varphi} < \mathbf{-1}$ ce impossible, donc pour que u soit solution du problème (5.22), il faut que les coefficients $\boldsymbol{\mu}_n$ soit nuls.

Cas général:

Etude du noyau dans $H^{-m}(\Omega_\varphi)$, avec m entier positif c'est à dire $m \geq 2$ la condition $\mathbf{n} < \dfrac{2\varphi}{\pi}$ généralisée s'écrit: $n < \dfrac{\varphi}{\pi}(m + 1 - \alpha)$, d'où il existe un rang $\mathbf{n}_{\varphi,m,\alpha} = E\left[\dfrac{\varphi}{\pi}(m + 1 - \alpha)\right] + 1$ et telle qu'à partir de ce rang, les coefficients $\boldsymbol{\mu}_n$ sont identiquement nuls .

5.5 Extension de l'étude du problème et de son adjoint dans le polygone plan

Dans ce paragraphe, on se propose d'étendre l'étude de problème (2.4) au polygone tout entier ce problème s'écrit :

$$(P) \quad \begin{cases} \lambda(\rho)\Delta u = \lambda(\rho)f = h & \text{dans } \Omega \\ Bu = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \tag{5.31}$$

B est opérateur d'ordre 0 ou 1, qui représente la condition de Dirichlet ou celle de Neumann.

On étudie ce problème dans un secteur cette étude sont de modèle et elle valable sur tout secteur Ω_{φ_j} d'ouverture φ_j qui est un des angles de Ω, pour étudier cette étude à Ω, on utilise une partition de l'unité de celui ci :

Soit Ω_{φ_j} un secteur plan infini d'ouverture φ_j, $j = 1, 2, ...N$ telle que N est le nombre des sommets de Ω.

Soit (w_j) $j = 1, 2, ..., N$, une partition de l'unité de la classe $C^\infty(\Omega)$ du polygone qui isole chacun des sommets S_j pour $j = 1, 2, ..., N$.

S_j étant le sommet de l'angle d'ouverture φ_j, $j = 1, 2, ..., N$.

Soit w_j une fonction de troncature qui est définie de telle sorte qu'au voisinage du sommet S_j, $j = 1, 2, ..., N$ elle vaut 1, et est nulle ailleurs, c'est à dire:

$$w_j = \begin{cases} 1 \text{ dans } V(S_j) \cap \Omega_{\varphi_j} \\ 0 \text{ dans } \Omega \backslash V(S_j) \cap \Omega_{\varphi_j} \end{cases}$$

Soit $X + \sum\limits_{j=1}^{N} w_j = 1_\Omega$, X est une fonction troncature sur Ω et comme $\sum\limits_{j=1}^{N} w_j = 1$, alors la fonction troncature X est définie par:

$$X = \begin{cases} 0 \quad \text{sur } V(S_j) \cap \Omega_{\varphi_j} \\ 1 \quad \text{sur } \Omega \backslash V(S_j) \cap \Omega_{\varphi_j} \end{cases}$$

alors on a $u = Xu + \sum\limits_{j=1}^{N} u_j$ car $\sum\limits_{j=0}^{N} w_j = 1$ et $u = \sum\limits_{j=0}^{N} w_j u = \sum\limits_{j=0}^{N} u_j$ telle que $u_j = w_j u$ pour $j = 0, 1, 2, ..., N$.

Les fonctions u_j sont à support compact, en chaque sommet S_j.

On a dans le cas du problème direct, respectivement défini dans Ω par :

$$(P) \begin{cases} \lambda(\rho)\Delta(Xu + \sum\limits_{j=1}^{N} u_j) = \lambda(\rho) f \quad \text{dans } \Omega \\ B(Xu + \sum\limits_{j=1}^{N} u_j) = 0 \quad \text{sur } \Gamma \end{cases} \tag{5.32}$$

respectivement,

$$(P) \begin{cases} \lambda(\rho)\Delta(Xu) + \lambda(\rho)\Delta(\sum\limits_{j=1}^{N} u_j) = \lambda(\rho) f \quad \text{dans } \Omega \\ B(Xu) + B(\sum\limits_{j=1}^{N} u_j) = 0 \quad \text{sur } \Gamma \end{cases} \tag{5.33}$$

Posons : $\Psi = Xu$ on a le problème suivant :

$$(P)\quad \begin{cases} \lambda(\rho)\Delta\Psi + \lambda(\rho)\Delta(\sum_{j=1}^{N} u_j) = \lambda(\rho) f & \text{dans } \Omega \\ B\Psi + B(\sum_{j=1}^{N} u_j) = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \tag{5.34}$$

Aux voisinages des sommets S_j, le problème (5.34) s'écrit :

$$(P_\varphi)\begin{cases} \rho^\alpha \Delta(\sum_{j=1}^{N} u_j) = \rho^\alpha f = h & \text{dans} \cup_{j=1}^{N} (\Omega_{\varphi_j} \cap V(S_j)) \\ B(\sum_{j=1}^{N} u_j) = 0 & \text{sur } \cup_{j=1}^{N} \Gamma_{\varphi_j} \end{cases} \tag{5.35}$$

En isolant chaque sommet S_j du polygone on obtient le problème défini au voisinage de chaque sommet S_j , $j = 1, 2, ..., N$ comme suit:

$$(P_\varphi)\begin{cases} \rho^\alpha \Delta u_j = \rho^\alpha f = h & \text{dans } \Omega_{\varphi_j} \\ Bu_j = 0 & \text{sur } \Gamma_{\varphi_j} \end{cases} \tag{5.36}$$

Les fonctions u_j sont à support compact dans Ω_{φ_j}.

Ψ est une fonction définie dans un ouvert régulier O (qui est en fait le polygone privés des voisinages de ses sommets) telle que:

$O_1 = \Omega \backslash \cup_{j=1}^{N} \Omega_{\varphi_j} \cap \{\rho \backslash \rho_1 \leq \rho \leq \rho_1\}$ et $O_2 = \Omega \backslash \cup_{j=1}^{N} \Omega_{\varphi_j} \cap \{\rho \backslash \rho \geq \rho_2\}$.

Ici la fonction Ψ est définie par : $\Psi = \begin{cases} \Psi_1 & \text{sur } O_1 \\ \Psi_2 & \text{sur } O_2 \end{cases}$

on a donc :

$$\begin{cases} \delta(\rho)\Delta\Psi_1 &= \delta(\rho)f \quad \text{dans } O_1 \\ B\Psi_1 &= 0 \qquad\qquad \text{sur } \Gamma_{O_1} \end{cases} \tag{5.37}$$

et

$$\begin{cases} \Delta\Psi_2 &= f \quad \text{dans } O_2 \\ B\Psi_2 &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_{O_2} \end{cases} \tag{5.38}$$

posons :

$$\Omega^1_\varphi = \{(\rho,\theta)\backslash 0 < \rho < \rho_1, 0 < \theta < \varphi < 2\pi\}.$$

$$\Omega^2_\varphi = \{(\rho,\theta)\backslash \rho_1 \leq \rho < \rho_2, 0 < \theta < \varphi < 2\pi\}$$

$$\Omega^3_\varphi = \{(\rho,\theta)\backslash \rho > \rho_2, 0 < \theta < \varphi < 2\pi\}$$

telle que ρ_1 assez petit avec ρ_2 assez grand .

Or,
$$\Omega = \Omega^1_\varphi \cup \Omega^2_\varphi \cup \Omega^3_\varphi \quad .$$

les problèmes (5.37) et (5.38) sont définis dans un domaine régulier, de plus c'est un problème auto- adjoint, son étude est totalement classique et ses résultats son connus donc les inégalités à priori relatives à les problèmes sont vérifiées.

ll existe une constante K_0 strictement positive telle que les inégalités suivantes :

$$\forall\Psi \in H^2 \cap H^1_0 \ , \quad \|\Psi\|_{H^2} \leq K_0 \left\{ \|\lambda(\rho)\Delta\Psi\|_{L^2} + \|\Psi\|_{H^1_0} \right\}. \tag{5.39}$$

sont vérifiées.

Au voisinage de chaque sommet de S_j de Ω , $j = 1, 2, ..., N$, on a étudié au voisinage de chaque sommet de S_j dans le chapitre 3.

pour $j = 1, ..., N$,

$$\|u\|_{E_\alpha(\Omega_{\varphi_j})} \leq K_{\varphi_j} \left\{ \|\rho^\alpha \Delta u_j\|_{L^2(\Omega_{\varphi_j})} + \|u_j\|_{H^1(\Omega_{\varphi_j})} \right\}. \tag{5.40}$$

Donc, de (5.39) et (5.40) on déduit que pour $j = 0, 1, ..., N.$ on a :

$$\|u\|_{A(\Omega_{\varphi_j})} \leq K_{\varphi_j} \left\{ \|\lambda(\rho) \Delta u_j\|_{L^2(\Omega_{\varphi_j})} + \|u_j\|_{B(\Omega_{\varphi_j})} \right\} \tag{5.41}$$

où ,

$$A = \begin{cases} E_{\alpha,0} \text{ pour la condition de Dirichlet} \\ E_\alpha \ \text{ pour la condition de Neumann} \end{cases}$$

et $$B = \begin{cases} H_0^1 \text{ pour la condition de Dirichlet} \\ H^1 \ \text{ pour la condition de Neumann} \end{cases}$$

telle que A pour E_α au voisinage de chaque sommet, et pour H^2 par ailleurs de les sommets (l'ouvert de régulière).

En ajoutant toutes ces inégalités, (la sommation se fait sur j, ($j = 0, 1, 2, ..., N$) et l'inégalité relative à l'ouvert O, et en prenant la maximum de toutes les constantes, on obtient une inégalité valable sur tout le polygone Ω c'est à dire on obtient l'inégalité suivante:

$$\|Z\|_{E_\alpha(\Omega)} \leq D_{\max} \left\{ \|\lambda(\rho) \Delta Z\|_{L^2(\Omega)} + \|Z\|_{H^1(\Omega)} \right\}. \tag{5.42}$$

avec:

$$\lambda(\rho) = \begin{cases} \rho^{\alpha} & \text{si} \quad 0 < \rho < \rho_1, 0 < \alpha \leq 1 \\ \delta(\rho) & \text{si} \quad \rho_1 \leq \rho < \rho_2 \\ 1 & \text{si} \quad \rho \geq \rho_2 \end{cases}$$

et

$$Z = \begin{cases} u & \text{dans } \Omega \backslash O \\ \Psi & \text{dans } O \end{cases}$$

telle que $D_{\max}$ est le maximum de toutes les constantes.

La même démarche sera suivie pour le problème adjoint.

Chapitre 6

Application à un système d'évolution et conclusion

Dans ce chapitre, on va essayer de montrer que cette méthode est applicable à d'autres types de problèmes tels que le problème d'évolution pour les systèmes non stationnaires, le problème relatif à la variable du temps.

On appliquera le théorème de Hille-Yosida et la théorie des semi groupe de contraction,en fin on donne une conclusion générale à notre étude.

6.1 Etude de l'équation d'évolution

Soit $Q = \Omega \times]0, T[$ un domaine plan de $\mathbb{R}^2$, telle que Ω une polygone et $T > 0$, la frontière de Ω est notée Γ telle que $\Gamma = \cup_{j=1}^{N} \Gamma_j$ et le côté $]S_{j-1}, S_j[$ est noté Γ_{j-1} où, S_j sont les sommet de Ω.

On considère alors le problème de diffusion suivant :

$$(P) \begin{cases} Lu = \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{dans} \quad \Omega \times]0, T[= Q \\ Bu = 0 & \text{sur } \sum \\ u(0) = u_0 & \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{6.1}$$

$f \in L^2(Q)$ étant donnée et B est un opérateur différentiel aux dérivées partielles d'ordre 0 ou 1, définie sur la frontière Γ, (on ne considérera ici que les deux cas, la condition de Dirichlet, et celle de Neumann), et la condition initiale $u(0)$ donnée par :

$$u(0) = u_0 = u(x, y, 0) = u_0(x, y)$$

On commence par l'étude du problème (6.1) dans un secteur plan infinis Ω_φ d'ouverture φ alors on multiplie l'opérateur L par une fonction poids $\lambda(\rho) = \lambda_1(\rho)$ qui est une fonction de la classe $C^\infty(Q_\varphi)$ et ne s'annule pas dans Q_φ, la fonction que vaut $\lambda_1(\rho) = \rho^\alpha$ au voisinage de l'origine (voir chapitre1).

Au voisinage de l'origine, le problème avec la condition de Dirichlet s'écrit:

$$(P_\varphi) \begin{cases} \rho^\alpha \dfrac{\partial u}{\partial t} - \rho^\alpha \Delta u = \rho^\alpha f \quad \text{dans } \Omega_\varphi \times]0, T[= Q_\varphi \\ u(\rho, 0, t) = u(\rho, \varphi, t) = 0 \text{ sur } \sum_\varphi = \Gamma_\varphi \times]0, T[\\ u(0) = u_0 = u(\rho, \theta, 0) = u_0(\rho, \theta) \quad \text{dans} \quad \Omega_\varphi \end{cases} \tag{6.2}$$

Ainsi avec la condition de Neumann le problème s'écrit :

$$(P_\varphi) \begin{cases} \rho^\alpha \dfrac{\partial u}{\partial t} - \rho^\alpha \Delta u = \rho^\alpha f \quad \text{dans} \quad \Omega_\varphi \times]0, T[= Q_\varphi \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta}(\rho, 0, t) = \dfrac{\partial u}{\partial \eta}(\rho, \varphi, t) = 0 \quad \text{sur} \quad \sum_\varphi = \Gamma_\varphi \times]0, T[\\ u(0) = u_0 = u(\rho, \theta, 0) = u_0(\rho, \theta) \quad \text{dans} \quad \Omega_\varphi \end{cases} \tag{6.3}$$

6.2 Définition d'un espace fonctionnel

On se propose de chercher la solution du problème (6.2) et (6.3) dans un l'espace fonctionnel $E_\alpha(\Omega_\varphi)$ si on pose $A = -\rho^\alpha \Delta$ sur le domaine $D(A) = E_\alpha(\Omega_\varphi)$ pour $\alpha \in]0, 1[$, tels que l'espace $E_\alpha(\Omega_\varphi)$ est définie par :

$$E_\alpha(\Omega_\varphi) = \left\{ u \in H^1(\Omega_\varphi) \ / \ \rho^\alpha D^2 u \in L^2(\Omega_\varphi) \right\}$$

Pour le cas de la condition de Dirichlet homogène, il est commandé de travailler dans l'espace fonctionnel $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$ tels que $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi) = E_\alpha(\Omega_\varphi) \cap H_0^1(\Omega_\varphi)$, et pour la condition de Neumann il est commandé de travailler l'espace $E_\alpha(\Omega_\varphi)$.

6.3 Formule de Green

Soient u et v deux fonctions de classe $C_0^\infty(\overline{Q_\varphi})$,on a alors une formule de Green adaptée au problème (6.1) qui s'écrit:

$$\int\limits_{Q_\varphi} (\rho^\alpha \frac{\partial u}{\partial t} - \rho^\alpha \Delta u) v \rho d\rho d\theta dt - \int\limits_{Q_\varphi} \left[(\rho^\alpha \Delta)^* v - \rho^\alpha \frac{\partial v}{\partial t} \right] u \rho d\rho d\theta dt = \sum_{j=0}^{m-1} \int\limits_{\sum_\varphi} S_j u v d\gamma - \sum_{j=0}^{m-1} \int\limits_{\sum_\varphi} u T_j v d\gamma.$$

où $d\gamma$ est un élément de la surface de $\sum_\varphi$.

S_j et T_j sont des opérateurs différentiels linéaires d'ordre $2m - j - 1$ et à coefficients indéfiniment différentiables en (ρ, θ, t) sur $\sum_\varphi$ analytique pour (ρ, θ) sur Γ_φ pour t fixé.

Les système $\{S_{m-1}, S_{m-2}, ...S_0\}$ et $\{T_{m-1}, T_{m-2}, ...T_0\}$ sont normaux de Dirichlet et celle de Neumann.

D'après le chapitre 4 la formule de Green adaptée au problème de diffusion et de diffusion perturbé respectivement est donnée par:

$$\int_0^T \int_0^\varphi \int_0^\infty (\rho^\alpha \frac{\partial u}{\partial t} - \rho^\alpha \Delta u) v \rho d\rho d\theta dt - \int_0^T \int_0^\varphi \int_0^\infty \left[(\rho^\alpha \Delta)^* v - \rho^\alpha \frac{\partial v}{\partial t} \right] u \rho d\rho d\theta dt$$

$$= \int_0^T \int\limits_{\Gamma_\varphi} \frac{\partial u}{\partial \theta} \rho^{\alpha-1} v d\rho dt - \int_0^T \int\limits_{\Gamma_\varphi} u \rho^{\alpha-1} \frac{\partial v}{\partial \theta} d\rho dt$$

telle que $(\rho^\alpha \Delta)^* v = \rho^\alpha \Delta v + 2\alpha \rho^{\alpha-1} \frac{\partial v}{\partial \rho} + \alpha^2\ \rho^{\alpha-2} v$ et aussi pour $\lambda \neq 0$

$$(\rho^\alpha \Delta + \rho^\alpha \lambda)^* v = \rho^\alpha \Delta v + 2\alpha \rho^{\alpha-1} \frac{\partial v}{\partial \rho} + \ \alpha^2 \ \rho^{\alpha-2} v \ + \rho^\alpha \lambda v$$

les opérateurs différentiels S et T sont définis sur Γ_φ par :

$$Suv = \frac{\partial u}{\partial \theta} \rho^{\alpha-1} v \quad \text{et} \quad uTv = u\rho^{\alpha-1} \frac{\partial v}{\partial \theta}.$$

6.4 Etude de l'existence et l'unicité de la solution

Définition 1: On dit que l'opérateur A est dissipatif pour le produit scalaire $(.\ ,.)_H$ si :

$$\text{Re}(\ Ax, x) \leq 0 \ \ , \text{pour tout } x \in D(A).$$

Définition 2: Un semi -groupe est dit dissipatif si son générateur infinitésimal l'est.

Théorème : (Hill-Phillips): voir Lions [17]

Soit A un opérateur non borné de domaine $D(A)$ dense dans l'espace de Hilbert H. alors A est le générateur infinitésimal d'un semi groupe de contraction de classe C^0

si et seulement si : $\begin{cases} i) A \text{ est dissipatif} \\ \text{et} \\ ii) \text{l'image de } D(A) \text{ par } I - A \text{ est égal } H \end{cases}$

Corollaire : *un semi groupe de contraction de classe C^0 est dissipatif .*

Preuve: voir [17]

6.4.1 Cas du problème avec la condition de Dirichlet homogène

On va appliquer ceci au problème de diffusion, étant donnée $f \in L^2(Q_\varphi)$, le problème est le suivant:

$$(P_\varphi) \begin{cases} \rho^\alpha \dfrac{\partial u}{\partial t} - \rho^\alpha \Delta u = \rho^\alpha f = h & \text{dans } \Omega_\varphi \times]0, T[= Q_\varphi \\ u = 0 & \text{sur } \sum_\varphi = \Gamma_\varphi \times]0, T[\\ u(0) = u_0 & \text{dans } \quad \Omega_\varphi \end{cases} \tag{6.4}$$

Pour les conditions au bord $u(\rho,0)=u(\rho,\varphi)=0$ sur Γ_φ et l'opérateur $A=-\rho^\alpha\Delta$, donc on peut prendre $f=0$ et l'espace suivant $H=L^2(\Omega_\varphi)$, et le domaine $D(A)$ telle que:

$$D(A)=E_\alpha(\Omega_\varphi)\cap H_0^1(\Omega_\varphi)=E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi).$$

Il est clair que l'espace $D(A)=E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$ est dense dans $L^2(\Omega_\varphi)$.

On va montrer que l'opérateur A est monotone c'est à dire: $\langle Au,u\rangle\geq 0$

$$\langle Au,u\rangle=-\int_{\Omega_\varphi}u\rho^\alpha\Delta u d\Omega_\varphi=-\int_0^\varphi\int_0^\infty\overline{u}(\rho^\alpha\frac{\partial^2u}{\partial\rho^2}+\rho^{\alpha-1}\frac{\partial u}{\partial\rho}+\rho^{\alpha-2}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2})\rho d\rho d\theta$$

$$=-\int_0^\varphi\int_0^\infty\rho^\alpha\frac{\partial^2u}{\partial\rho^2}\overline{u}\rho d\rho d\theta-\int_0^\varphi\int_0^\infty\rho^{\alpha-1}\frac{\partial u}{\partial\rho}\overline{u}\rho d\rho d\theta-\int_0^\varphi\int_0^\infty\rho^{\alpha-2}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}\overline{u}\rho d\rho d\theta$$

on calcule l'intégrale: $-\int_0^\varphi\int_0^\infty\rho^\alpha\frac{\partial^2u}{\partial\rho^2}\overline{u}\rho d\rho d\theta$

$$-\int_0^\varphi\int_0^\infty\rho^\alpha\frac{\partial^2u}{\partial\rho^2}\overline{u}\rho d\rho d\theta=\alpha\int_0^\varphi\int_0^\infty\rho^{\alpha-1}\frac{\partial u}{\partial\rho}\overline{u}\rho d\rho d\theta+\int_0^\varphi\int_0^\infty\rho^{\alpha-1}\frac{\partial u}{\partial\rho}\overline{u}\rho d\rho d\theta+\int_0^\varphi\int_0^\infty\rho^\alpha\left|\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|^2\rho d\rho d\theta$$

on a : $\alpha\int_0^\varphi\int_0^\infty\rho^{\alpha-1}\frac{\partial u}{\partial\rho}\overline{u}\rho d\rho d\theta=-\frac{\alpha^2}{2}\int_0^\varphi\int_0^\infty\rho^{\alpha-2}|u|^2\rho d\rho d\theta$ donc :

$$-\int_0^\varphi\int_0^\infty\rho^\alpha\frac{\partial^2u}{\partial\rho^2}\overline{u}\rho d\rho d\theta=\frac{-\alpha^2}{2}\int_0^\varphi\int_0^\infty\rho^{\alpha-2}|u|^2\rho d\rho d\theta+\int_0^\varphi\int_0^\infty\rho^{\alpha-1}\frac{\partial u}{\partial\rho}\overline{u}\rho d\rho d\theta+\int_0^\varphi\int_0^\infty\rho^\alpha\left|\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|^2\rho d\rho d\theta \tag{1}$$

$$-\int_0^\varphi\int_0^\infty\rho^{\alpha-2}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}\overline{u}\rho d\rho d\theta=\int_0^\varphi\int_0^\infty\rho^\alpha\left|\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right|^2\rho d\rho d\theta \tag{2}$$

$$-\int_0^\varphi\int_0^\infty\rho^{\alpha-1}\frac{\partial u}{\partial\rho}\overline{u}\rho d\rho d\theta=-\int_0^\varphi\int_0^\infty\rho^{\alpha-1}\frac{\partial u}{\partial\rho}\overline{u}\rho d\rho d\theta \tag{3}$$

de (1) et (2) et (3) nous avons :

$$\langle Au,u\rangle = \int_0^{\varphi}\int_0^{\infty}\rho^{\alpha}\left|\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right|^2\rho d\rho d\theta + \int_0^{\varphi}\int_0^{\infty}\rho^{\alpha}\left|\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|^2\rho d\rho d\theta - \frac{\alpha^2}{2}\int_0^{\varphi}\int_0^{\infty}\rho^{\alpha-2}\left|u\right|^2\rho d\rho d\theta.$$

D'après Grisvard [10] on a:

si $\alpha < p-1$ alors $\left(\int_0^{\infty}\left|u(x)\right|^p x^{\alpha-p}dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{p}{p-\alpha-1}\left(\int_0^{\infty}\left|\frac{\partial u(x)}{\partial x}\right|^p x^{\alpha}dx\right)^{\frac{1}{p}}$

on a donc $\left(\int_0^{\varphi}\int_0^{\infty}\rho^{\alpha-2}\left|u\right|^2\rho d\rho d\theta\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{2}{2-\alpha-1}\left(\int_0^{\varphi}\int_0^{\infty}\left|\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|^2\rho^{\alpha}\rho d\rho d\theta\right)^{\frac{1}{2}}$

d'où $\int_0^{\varphi}\int_0^{\infty}\rho^{\alpha-2}\left|u\right|^2\rho d\rho d\theta \leq \frac{4}{(1-\alpha)^2}\int_0^{\varphi}\int_0^{\infty}\left|\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|^2\rho^{\alpha}\rho d\rho d\theta$ et on tire :

$$-\frac{\alpha^2}{2}\int_0^{\varphi}\int_0^{\infty}\rho^{\alpha-2}\left|u\right|^2\rho d\rho d\theta \geq -\frac{2\alpha^2}{(1-\alpha)^2}\int_0^{\varphi}\int_0^{\infty}\left|\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|^2\rho^{\alpha}\rho d\rho d\theta$$

on a donc : $\langle Au,u\rangle \geq \left(1-\frac{2\alpha^2}{(1-\alpha)^2}\right)\int_0^{\varphi}\int_0^{\infty}\rho^{\alpha}\left|\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|^2\rho d\rho d\theta + \int_0^{\varphi}\int_0^{\infty}\rho^{\alpha}\left|\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right|^2\rho d\rho d\theta$

on déduit que $\langle Au,u\rangle \geq \left(1-\frac{2\alpha^2}{(1-\alpha)^2}\right)\int_0^{\varphi}\int_0^{\infty}\rho^{\alpha}\left|\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|^2\rho d\rho d\theta$

l'expression $\langle Au,u\rangle$ est positive si et seulement si $\left(1-\frac{2\alpha^2}{(1-\alpha)^2}\right) \geq 0$ ce qui implique que $\alpha \in \left]0,\sqrt{2}-1\right]$ c'est à dire $0< \boldsymbol{\alpha} \leq\sqrt{2}-1$.

Donc l'opérateur A est monotone pour $0< \boldsymbol{\alpha} \leq\sqrt{2}-1$

monterons que l'opérateur $A=-\rho^{\alpha}\Delta$ est maximal.

$\forall l \in L^2(\Omega_{\varphi}), \exists u \in D(A)$, alors $l = Au+u$, on a donc: $-\rho^{\alpha}\Delta u + u = l \in L^2(\Omega_{\varphi})$.

L'opérateur $\rho^{\alpha}\Delta$ est linéaire continu et surjectif de $D(A)$ dans $L^2(\Omega_{\varphi})$.

Il suffit de montrer que l'image de $\rho^\alpha\Delta$ est fermée dans $L^2(\Omega_\varphi)$ et son noyau est de dimension finie et que $R(A+I)=\overline{\operatorname{Im} A}$.

D'après le lemme de Peetre voir chapitre (3) on a montre que l'inégalité suivant : $\exists K>0$ telle que:

$$\|u\|_{E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)} \leq K\left\{\|\rho^\alpha\Delta u\|_{L^2(\Omega_\varphi)} + \|u\|_{H_0^1(\Omega_\varphi)}\right\} \tag{6.5}$$

est verifiée, on en déduit que l'équation $l=Au+u$ admet au moins une solution dans l'espace $D(A)=E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$.

On remarque d'aprés la formule Green appliquée au problème de diffusion (6.4) que $\rho^\alpha\Delta \neq (\rho^\alpha\Delta)^*$ c'est à dire c'est un opérateur non auto -adjoint.

Selon le théorème de "Hille -Yosida" voir Brezis[13], A est maximal monotone.

On en déduit que le problème (6.4) admet une solution dans $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$ et on prend $u_0\in D(A)$ c'est à dire : $u\in C^1(]0,T[\,,L^2(\Omega_\varphi))\cap C(]0,T[\,,E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi))$.

Pour $\sqrt{2}-1\leq\alpha<1$ l'opérateur A non monotone on aura donc :

$\langle-\rho^\alpha\Delta u,u\rangle \leq (1-\dfrac{2\alpha^2}{(1-\alpha)^2})\int\limits_0^\varphi\int\limits_0^\infty \rho^\alpha\left|\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right|^2\rho d\rho d\theta$, l'expression $\langle-\rho^\alpha\Delta u,u\rangle$ est négative si et seulement si $(1-\dfrac{2\alpha^2}{(1-\alpha)^2})\leq 0$ et $\operatorname{Re}\langle-\rho^\alpha\Delta u,u\rangle\leq 0$

Ce qui implique que $\alpha\in\left]\sqrt{2}-1,1\right[$ c'est à dire $\sqrt{2}-1<\boldsymbol{\alpha}<1$.

Donc l'opérateur A est dissipatif pour $\sqrt{2}-1<\boldsymbol{\alpha}<1$ d'où l'opérateur A engendre d'un semi groupe de contraction, voir [17].

6.4.2 Cas du problème perturbé avec la condition de Dirichlet homogène

$$(P_\varphi)\begin{cases} \rho^\alpha \dfrac{\partial u}{\partial t} - \rho^\alpha \Delta u + \rho^\alpha \lambda u = \rho^\alpha f = h & \text{dans } \Omega_\varphi \times]0,T[= Q_\varphi \\ u = 0 & \text{sur } \sum_\varphi = \Gamma_\varphi \times]0,T[\\ u(0) = u_0 = u(\rho,\theta,0) = u_0(\rho,\theta) & \text{dans } \quad \Omega_\varphi \end{cases} \tag{6.6}$$

On va montrer que l'opérateur $A = -\rho^\alpha \Delta + \rho^\alpha \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ est monotone et maximal et engendre un semi groupe de contraction.

Pour les conditions au bord $u(\rho,0) = u(\rho,\varphi) = 0$ sur Γ_φ.

On peut prendre $f = 0$, on répète le même travail dans l'espace $H = L^2(\Omega_\varphi)$, et le domaine $D(A)$ telle que: $D(A) = E_\alpha(\Omega_\varphi) \cap H_0^1(\Omega_\varphi) = E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$ est dense dans $L^2(\Omega_\varphi)$.

$$\langle Au, u\rangle = \langle -\rho^\alpha \Delta u, u\rangle + \langle \rho^\alpha \lambda u, u\rangle = \langle -\rho^\alpha \Delta u, u\rangle + \lambda \int_0^\varphi \int_0^\infty \rho^\alpha |u|^2 \rho d\rho d\theta$$

$$\langle Au, u\rangle = (1 - \frac{2\alpha^2}{(1-\alpha)^2}) \int_0^\varphi \int_0^\infty \rho^\alpha \left|\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|^2 \rho d\rho d\theta + \int_0^\varphi \int_0^\infty \rho^\alpha \left|\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right|^2 \rho d\rho d\theta + \lambda \int_0^\varphi \int_0^\infty \rho^\alpha |u|^2 \rho d\rho d\theta.$$

Comme $\langle -\rho^\alpha \Delta u, u\rangle \geq 0$ pour $0< \boldsymbol{\alpha} \leq \sqrt{2} - 1$, donc l'opérateur $A = -\rho^\alpha \Delta + \rho^\alpha \lambda$ est monotone pour $0< \boldsymbol{\alpha} \leq \sqrt{2} - 1$ et $\lambda > 0$,

montrons que l'opérateur $A = -\rho^\alpha \Delta + \rho^\alpha \lambda$ est maximal

$\forall l \in L^2(\Omega_\varphi), \exists u \in D(A)$, alors $l = Au + u$, on aura $-\rho^\alpha \Delta u + \rho^\alpha \lambda u + u = l \in L^2(\Omega_\varphi)$ et l'opérateur $-\rho^\alpha \Delta + \rho^\alpha \lambda$ est linéaire continu surjectif telle que :

$$A : D(A) \to L^2(\Omega_\varphi)$$

est linéaire continu.

Il suffit de montrer que l'image de l'opérateur perturbé $\rho^{\alpha}(\Delta+\lambda)$ est fermée dans $L^2(\Omega_\varphi)$ et son noyau est de dimension finie c'est à dire $R(A+I)=\overline{\operatorname{Im} A}$.

D'après le lemme de Peetre voir chapitre 3, on a montré l'inègalité suivante :
$\exists K>0$ telle que

$$\|u\|_{E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)} \leq K\left\{\|\rho^{\alpha}(\Delta+\lambda)u\|_{L^2(\Omega_\varphi)}+\|u\|_{H_0^1(\Omega_\varphi)}\right\} \tag{6.7}$$

est vérifiée cette inégalité a été déjà étudiée au chapitre 3, on en déduit que l'équation $l=Au+u$ admet au moins une solution dans l'espace $D(A)=E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$.

D'après la formule de Green appliqué au problème de diffusion (6.6), on en déduit que $\rho^{\alpha}(\Delta+\lambda)\neq(\rho^{\alpha}(\Delta+\lambda))^*$ c'est à dire que c'est un opérateur n'est pas auto -adjoint.

A est maximal monotone, selon le théorème de "Hille -Yosida" voir Brezis[13], on en déduit que le problème (6.6) admet une solution dans l'espace $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$, on prend $u_0\in D(A)$ c'est à dire : $u\in C^1(]0,T[\,,L^2(\Omega_\varphi))\cap C(]0,T[\,,E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi))$.

Pour $\sqrt{2}-1<\alpha<1$ et $\lambda>0$ on a :

$$\langle Au,u\rangle=(1-\frac{2\alpha^2}{(1-\alpha)^2})\int_0^{\varphi}\int_0^{\infty}\rho^{\alpha}\left|\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|^2\rho d\rho d\theta+\int_0^{\varphi}\int_0^{\infty}\rho^{\alpha}\left|\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right|^2\rho d\rho d\theta+\lambda\int_0^{\varphi}\int_0^{\infty}\rho^{\alpha}|u|^2\rho d\rho d\theta$$

d'où ,

$$\operatorname{Re}\langle Au,u\rangle\leq(1-\frac{2\alpha^2}{(1-\alpha)^2})\int_0^{\varphi}\int_0^{\infty}\rho^{\alpha}\left|\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|^2\rho d\rho d\theta \text{ , et } A \text{ est dissipatif.}$$

Alors A engendre un semi groupe de contraction.

6.4.3 Cas du problème avec la condition de Neumann homogène

L'application au problème de diffusion avec la condition de Neumann homogène, étant donnée $f \in L^2(Q_\varphi)$, suit le problème:

$$(P_\varphi) \begin{cases} \rho^\alpha \dfrac{\partial u}{\partial t} - \rho^\alpha \Delta u = \rho^\alpha f = h & \text{dans } \ \Omega_\varphi \times]0,T[= Q_\varphi \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{sur } \ \sum_\varphi = \Gamma_\varphi \times]0,T[\\ u(0) = u_0 = u(\rho,\theta,0) = u_0(\rho,\theta) & \text{dans } \ \Omega_\varphi \end{cases} \tag{6.8}$$

On va étudier ce problème en lui appliquant exactement la méthode que celle utilisée au paragraphe précédent.

A est monotone, on reprend le même procédure que celle du paragraphe avec la condition au bord $\dfrac{\partial u}{\partial \eta}(\rho,0) = \dfrac{\partial u}{\partial \eta}(\rho,\varphi) = 0$ sur Γ_φ et l'opérateur $A = -\rho^\alpha \Delta$, donc on peut prendre $f = 0$, l'espace suivant $H = L^2(\Omega_\varphi)$,et le domaine $D(A) = E_\alpha(\Omega_\varphi)$.

Il est clair que l'espace $D(A) = E_\alpha(\Omega_\varphi)$ est dense dans $L^2(\Omega_\varphi)$.

On va montrer que l'opérateur A est monotone c'est à dire: $\langle Au, u \rangle \geq 0$, on a donc

$$\langle Au, u \rangle \geq \left(1 - \frac{2\alpha^2}{(1-\alpha)^2}\right) \int_0^\varphi \int_0^\infty \rho^\alpha \left| \frac{\partial u}{\partial \rho} \right|^2 \rho d\rho d\theta.$$

Donc l'opérateur A est monotone pour $0 < \boldsymbol{\alpha} \leq \sqrt{2} - 1$.

On utilisera aussi le lemme de Peetre, et on obtiendra un résultat analogue, le seul changement est qu'on travaille dans l'espace $E_\alpha(\Omega_\varphi)$ au lieu de $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$.

Donc A est maximal.

D'après la formule Green appliqué au problème de diffusion (6.8), on en déduit que $\rho^\alpha\Delta \neq (\rho^\alpha\Delta)^*$c'est à dire que c'est un opérateur non auto -adjoint.

A est monotone maximal selon le théorème de "Hille -Yosida" voir Brezis[13].

Le problème (6.8) admet une solution dans $E_\alpha(\Omega_\varphi)$, on prend $u_0 \in D(A)$.

c'est à dire: $u \in C^1(]0,T[\,,L^2(\Omega_\varphi)) \cap C(]0,T[\,,E_\alpha(\Omega_\varphi))$.

6.4.4 Cas du problème perturbé avec la condition de Neumann homogène

Une application au problème de diffusion perturbé avec la condition de Neumann homogène, étant donnée $f \in L^2(Q_\varphi)$, le problème suivant:

$$(P_\varphi)\begin{cases} \rho^\alpha \dfrac{\partial u}{\partial t} - \rho^\alpha \Delta u + \rho^\alpha \lambda u = \rho^\alpha f = h & \text{dans } \Omega_\varphi \times]0,T[= Q_\varphi \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{sur } \sum_\varphi = \Gamma_\varphi \times]0,T[\\ u(0) = u_0 = u(\rho,\theta,0) = u_0(\rho,\theta) & \text{dans } \quad \Omega_\varphi \end{cases} \tag{6.9}$$

On va montrer que l'opérateur $A = -\rho^\alpha\Delta + \rho^\alpha\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ est monotone c'est à dire $\langle Au, u\rangle \geq 0$.

Pour les conditions au bord $\dfrac{\partial u}{\partial \eta}(\rho,0) = \dfrac{\partial u}{\partial \eta}(\rho,\varphi) = 0$ sur Γ_φ et l'opérateur $A = -\rho^\alpha\Delta + \rho^\alpha\lambda$, et on peut prendre $f = 0$, et l'espace suivant: $H = L^2(\Omega_\varphi)$, et le domaine $D(A) = E_\alpha(\Omega_\varphi)$

$$\langle Au, u\rangle = \langle -\rho^\alpha\Delta u, u\rangle + \langle \rho^\alpha\lambda u, u\rangle = \langle -\rho^\alpha\Delta u, u\rangle + \lambda \int_0^\varphi\int_0^\infty \rho^\alpha |u|^2 \rho d\rho d\theta.$$

et comme $\langle -\rho^\alpha\Delta u + \rho^\alpha\lambda u, u\rangle \geq 0$ pour $0 < \boldsymbol{\alpha} \leq \sqrt{2} - 1$, et on a donc $\langle -\rho^\alpha\Delta + \rho^\alpha\lambda u, u\rangle \geq 0$ si et seulement si $\lambda > 0$.

Donc l'opérateur $-\rho^\alpha\Delta + \rho^\alpha\lambda = A$ est monotone pour $0 < \boldsymbol{\alpha} \leq \sqrt{2} - 1$.

On utilisera aussi le lemme de Peetre pour l'opérateur perturbé, et on obtiendra un résultat analogue, le seul changement est qu'on travaille dans l'espace $E_\alpha(\Omega_\varphi)$ au lieu de $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$.

D'après la formule de Green appliquée au problème de diffusion (6.9), on en déduit que $\rho^\alpha\Delta + \rho^\alpha\lambda \neq (\rho^\alpha\Delta + \rho^\alpha\lambda)^*$ c'est à dire que c'est un opérateur non auto -adjoint.

Donc $A = -\rho^\alpha\Delta + \rho^\alpha\lambda$ est maximal.

D'après le théorème de "Hille -Yosida" voir Brezis[13], le problème (6.9) admet une solution dans $E_\alpha(\Omega_\varphi)$ et on prend $u_0 \in D(A)$.

c'est à dire: $$u \in C^1(]0,T[\,, L^2(\Omega_\varphi)) \cap C(]0,T[\,, E_\alpha(\Omega_\varphi)).$$

Pour $\sqrt{2}-1 < \alpha < 1,\ \ \lambda > 0$ on aura :

$$\langle Au, u\rangle = (1-\frac{2\alpha^2}{(1-\alpha)^2})\int_0^\varphi\int_0^\infty \rho^\alpha \left|\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|^2 \rho d\rho d\theta + \int_0^\varphi\int_0^\infty \rho^\alpha \left|\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right|^2 \rho d\rho d\theta + \lambda\int_0^\varphi\int_0^\infty \rho^\alpha \left|u\right|^2 \rho d\rho d\theta.$$

d'où,

$$\operatorname{Re}\langle Au, u\rangle \leq (1-\frac{2\alpha^2}{(1-\alpha)^2})\int_0^\varphi\int_0^\infty \rho^\alpha \left|\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|^2 \rho d\rho d\theta.$$

Donc l'opérateur A est dissipatif pour $\sqrt{2}-1< \boldsymbol{\alpha} <1$ d'où l'opérateur A engendre d'un semi groupe de contraction .

Conclusion générale

Nous avons procédé à l'étude de quelques problèmes limités pour les équations aux dérivées partielles semi -linéaire et du problème dynamique de la diffusion et de diffusion perturbée.

Dans ce mémoire, nous avons étudié pour chaque cas le problème direct et son adjoint Enfin, nous avons appliqué cette méthode sur un système d'évolution dans un polygone plan.

Dans la première partie on a étudié le problème de Poisson avec la condition de Dirichlet et la condition de Neumann dans un secteur plan infini, d'ouverture φ qui est un des angles du polygone.

On a montré que l'utilisation de la fonction de poids convenable allège plus les calculs surtout aux voisinages des points singuliers, et par conséquent après un bon choix de l'espace de travail et le traitement du problème. Nous avons mis en évidence une inégalité à priori et par utilisation du lemme de Peetre, nous avons établi l'existence de la solution dans l'espace ainsi choisi.

On a appliqué la méthode au cas de changement de perturbation du phénomène de problème c'est à dire $F(u) = \lambda u$, telle que $\lambda \neq 0$ est une constante quelconque, et en utilisant le lemme de Peetre nous avons démontré simplement l'existence de la solution dans l'espace choisi.

En suite on a étudié les unicités des solutions par la technique des noyaux pour les deux cas $F(u) = \lambda u$, ou $F(u) = 0$.

Dans la deuxième partie on a établi une formule de Green adaptée à chaque problème et on a déduit la formule de l'opérateur adjoint, et par conséquent après un calcul de l'espace dual de travail et le traitement du problème, on a utilisé une nouvelle normes dans H^{-2}, on a mis en évidence une inégalité à priori et par utilisation le lemme de Peetre, nous avons démontré l'existence de la solution dans L^2.

On a appliqué la méthode au cas de changement de perturbation du phénomène de problèmes c'est à dire $F(u) = \lambda u$, $\lambda \neq 0$ en utilisant la nouvelle norme H^{-2} et nous avons

simplement démontré l'existence de la solution dans L^2.

On a étudié l'unicité des solutions du problème adjoint en utilisant la technique des noyaux de deux cas $F(u) = \lambda u$ et $F(u) = 0$.

Dans la dernière partie, on a fait une application dans un système d'évolution, est celui de la diffusion et du type parabolique. Ce genre de problèmes intervient dans plusieurs applications, comme la théorie de la chaleur, la diffusion des gaz, etc.

Par une application de la fonction de poids dans un système d'évolution et du type parabolique dans le deux cas perturbé et non perturbé, on a étudié le problème de diffusion dans le corps plan du polygone $Q = \Omega \times]0, T[$, $T > 0$ avec T de temps et Ω polygone.

On a utilisé la même fonction poids choisie convenablement dans le chapitre 1 pour chaque problème, pour rendre les calculs aux voisinages des points singuliers plus aisé, et par conséquent, d'après Brezis [13]on a montré que l'opérateur de Laplace avec poids est monotone et maximal.

On a utilisé le lemme de Peetre pour l'inégalité à priori en mettant en évidence que l'opérateur est maximal.

On a appliqué la méthode au cas de changement de perturbation pour montrer que l'opérateur est monotone, et maximal.

D'après le théorème de Hille -Yosida, on établit l'existence et unicité de solutions de problèmes dans les espaces choisis, et même application pour le système qui engendre un semi groupe de contraction.

Bibliographie

[1] **H.Reinhard ,** Equations aux dérivées partielles , Dunod , Paris , 1991.

[2] **M.Merigot ,** Etude du problème de $\Delta u = f$ dans un polygone plan ,Inégalités à priori, Boll .Un .Mat .Italie (4) .10, pp. 577-597,1974.

[3] **M.Merigot ,**Solutions en normes L^p, des problèmes aux limites dans des polygônes-plan, Thèse de Doctorat d'état , IREM,Université de Nice 1974.

[4] **Lions,J.L.et Magenes,** Problèmes aux limites non homogènes et Applications,Tome1, Dunod , Paris 1968.

[5] **P.Grisvard ,** Alternative de Fredholm relative au problème de Dirichlet dans un polygône ou un polyèdre , Boll .Un .Mat .Italie (4) .5 1972 p. 132-164.

[6] **P.Grisvard ,** Alternative de Fredholm relative au problème de Dirichlet dans un polyèdre, Annali S.N.S .Pisa ,séries 4,**2** (3) **,**359-388 ,1975.

[7] **P.Grisvard ,** Singularités des solutions du problèmes des stokes dans un polygone, Séminaire d'analyse fonctionnelle , IREM, Nice ,1979.

[8] **P.Grisvard ,** Elliptic problems in non smooth domains, Monographs and studies in Mathematics,24,Pitman ,London ,1985

[9] **P.Grisvard ,** Singularities in Boundary value Problems ,Masson ,1992.

[10] **P.Grisvard ,**Espaces intermédiaires entre espaces de sobolev avec poids , Annali S.N.S. Pisa ,séries 3,**tome17** N^{0}3 **,p.**255-296 ,1963.

[11] **Hanna , M. and Smith,T,** Some remarks on the Dirichlet problem in piecewise smooth domains, Comm.Pure and Apllied Math, **20** , p.575-593.

[12] **J.Bass ,** Cours De Mathématiques , **tome 2** ,Masson ,1978.

[13] **H.Brezis ,** Analyse Fonctionnelle , Dunod 1999.

[14] **MS.Said,** Etude du problème adjoint du Problème de Laplace avec poids dans un polygone Plan , Thèse De Magister , Université de Constantine, 1993.

[15] **MS.Said,** study of the biharmonic problems disturbs by weights in a polygons, Far East, Journ of Mathematics and sciences , FJMS, 16 (1) (2005) p.121-136.

[16] **P.A.Raviart et J.M.Thomas,** Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles, Masson,1992 .

[17] **J.L.Lions,** Analyse mathématique et calcul numérique,Volume 8, Paris 1984.

[18] **V.A.Koundratiev,**Boundary problems for elliptic equations with conical or angular points ,Trudy Moskov Mat .Obsc 16, 1967.

[19] **M.Merigot ,**Régularité des solutions du problème de stockes dans un secteur plan, Boll .Un .Mat .Italie (4).6, 1972.

[20] **R.Temam,** On the theory and numerical analysis of the Navier stockes equations, lecture note ♯9 ,University of Maryland,1973.

[21] **MS.Said,**Study of the adjoin problem controlled by the system of lamé affected by weigh in a polygon, Far East Journal of math and Sci , FJMS, Vol 17-1,avril 2005,pp.121-135

[22] **MS.Said,B.Merouani,**Rôle des poids dans l'étude de quelques problèmes aux limites gouvernés par le système de Lamé dans un polygone , Roum.Sci.Techn-Méc. Appl.Bucaest 2002 (à paraitre).

[23] **S.Agmon,** Lectures on elliptic boundary value problems , Van Naostrand Mathematical studies , n .2 , Princeton , 1965.

[24] **M.Dauge ,** Problème de Dirichlet Pour le Laplacien, séminaire des EDP, Nantes,1982.

[25] **MS.Said,B.Merouani,** Etude des problèmes adjoint du problème de Dirichlet pour l'équation de Laplace perturbé dans un polygone plan, Rev -Roum.Sci, Techn.Mec.Appl,**Tome 47** , $N^0$16 p.57-78, Buccarest (2002).

[26] **A.C. King, J. Billingham and S.R. Otto ,** Differential Equations ,Linear, Nonlinear, Ordinary, Partial , Combridge University Press ,2003.

[27] **MURRAY R.SPEIGEL,** FOURIER ANALYSIS, with applications to boundary value problems , Schaum's outline series , Mc Graw-Hill, 1974.

[28] **Yosida ,K ,** Functional Analysis .Springer-Verlag, Berlin, 1966.

[29] **TITCHMARSH .E.C**, Introduction to the Theory of Fourier Integrals . Oxford univ. Press, 1937.

[30] **Walter Rudin,** Real and complex Analysis,International Student Edition**, McGRAW-HILL ,1970.**

[31] **Marie-Thérèse**, Distributions Espaces de Sobolev Applications, Lacroix-Sonrier, ellipses, édition marketing S.A , Paris ,1998.

RÔLE DES FONCTIONS POIDS DANS L'ÉTUDE D'UN PROBLÈME DE DIFFUSION PERTURBÉ DANS UN DOMAINE PLAN NON RÉGULIER

Résumé

Fonction de Poids visant à examiner le Problème de diffusion perturbé dans un domaine plan polygone, qui traite de la présente mémoire.
Au cours du premier partie: nous avons étudié le Rôle de la fonction de poids dans le cas ou on aborde le problème de Laplace et Laplace perturbé, et nous avons constaté que la formule de Green appliquée aux problèmes de Laplace et Laplace perturbé être déduit de les problèmes de Laplace et Laplace perturbé qui son adjoint .
La méthode de cette étude est la façon dont l'existence, L'unicité et régularité de la solution des problèmes.
Dans le dernier tiers de la mémoire, Nous appliquons le rôle de la fonction de poids dans le problème de la diffusion perturbé dans un domaine plan non régulier qui a été contrôlé par l'opérateur de la fonction de poids de Laplace perturbé, avec la preuve de l'existence et L'unicité du solution à ce problème.

Mots clefs

Problème de diffusion - fonction de poids - formule de Green - existence - unicité - régularité- formule adjoint - l'opérateur de la fonction de poids Laplace - perturbé.

Introduction

L'étude de l'équation de Laplace dans un polygone ou un polyèdre, et généralement l'étude des problèmes elliptiques dans des domaines non réguliers n'est entamée que depuis une date relativement récente; d'une part Grisvard montre que la formule de Green construite pour le Laplacien dans le cas classique c'est à dire dans des domaines réguliers est encore valable dans les domaines non réguliers tels que les polygones ou polyèdres par exemple, et en utilisant l'alternative de Fredholm, il retrouve des résultats analogues à ceux du cas classique, ces résultats ne sont pas encore généralisées à des opérateurs elliptiques aux dérivées partielles d'ordre plus élevé dans des domaines de $\mathbb{R}^n$, et ceci à cause de la complexité des calculs.
Le but de notre travail est d'étudier le rôle que jouent les fonctions poids dans l'étude du problème générale suivant

$$(P)\begin{cases} Au = f & \text{dans } \Omega \\ Bu = g & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Où Ω est un ouvert plan de frontière polygonale notée Γ, et B étant un opérateur différentiel aux dérivées partielles, d'ordre 0 ou 1 défini sur la frontière Γ, on ne considèrera ici que les deux cas: la condition de Dirichlet, et celle de Neumann. f donnée dans $L^2(\Omega)$.

La transformation de Mellin, est bien adaptée à la géométrie du domaine, le noyau de Green aussi bien adaptée à la résolution de l'équation différentielle explicite, et de en évidence d'inégalité à priori.

Ces résultats étaient connus en norme L^2 dans certains cas particuliers voir Kondaratiev ⇐8- cette étude conduit naturellement à des espace avec poids, toutefois l'auteur en déduit certains résultats dans H^s.

Avec la transformation de Mellin on peut aussi aboutir au même types des résultats dans les mêmes espace voir Mérigot $[19]$.

Les espaces avec poids cachent en fait les singularités qui peuvent apparaître aux points singuliers.

Grisvard $[5]$ précise la régularité des solutions du problème de Dirichlet ou Neumann dans un polygone plan en norme L^2 , En utilisant l'alternative de Fredholm, il a généralisé les résultats de Hanna-Smith $[11]$ grâce à une méthode très particulière.

On établira une formule de Green adaptée au problème et des résultats pour les espaces avec poids duals et les simplifier par mise en évidence des inégalité à priori .

Soit $F(u)$ cette perturbation composée, d'une équation différentielle semi linéaire du second ordre.

Une condition au limite de Dirichlet $u = 0$ et de Neumann $\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0$ sur le bord de Ω et le condition initial $U(0) = U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$.

Dans ce travail on étudie le rôle que jouent la fonction poids dans le type parabolique l'équation de diffusion perturbée dans un domaine plan polygonal .

Nous commençons par établir le rôle de fonction poids et du type elliptique dans un polygone plan dans le cas perturbé et non perturbé et ensuite la mise en évidence d'une inégalité à priori et enfin établir l'existence de la solution, et par la suite l'étude de l'unicité par la technique des noyaux pour le deux cas de problème de Dirichlet et de problème de Neumann .

Dans la dernière partie, une application à un système d'évolution et du type parabolique dans le cas perturbé et non perturbé et on appliquera le théorème de Hill-Yosida voir Brezis $[13]$, et l'autre d'un semi groupe de contraction dans l'espace de Sobolev avec poids.

Notion préliminaire

Partition de l'unité dans le polygone :

Soit Ω un ouvert plan de sommet S_j et à frontière polygonale Γ_j pour $j = 1, 2, 3, \dots\dots, N$
On définit un domaine Ω_{φ_j} pour $j = 1, 2, 3, \dots\dots, N$ un secteur plan infini d'ouverture φ_j la famille Ω_{φ_j} pour $j = 1, 2, 3, \dots\dots, N$ telle que N est le nombre des sommets du polygone Ω.

Soit donc w_j pour $j = 0, 1, 2, 3, \dots\dots, N$ une partition de l'unité de classe $C^{\infty}(\Omega)$ du polygone qui isolé chacun de sommet S_j pour $j = 1, 2, 3, \dots\dots, N$.

Soit la fonction de troncature w_j est définie de telle que sorte de voisinage du sommet S_j
pour $j = 1, 2, 3, \dots\dots, N$.

$$w_j = \begin{cases} 1 & \text{dans}\, V(S_j) \cap \Omega_{\varphi_j},\ j = 1, 2, 3, \dots\dots, N \\ 0 & \text{dans}\ \ \Omega \setminus V(\varphi j) \cap \Omega_{\varphi_j} \end{cases}$$

Soit X est une fonction troncature sur Ω. et comme $\sum_{j=1}^{N} w_j = 1$ alors la fonction troncature donnée par:

$$X = \begin{cases} 0 & \text{dans}\, V(S_j) \cap \Omega_{\varphi_j},\ j = 1, 2, 3, \dots\dots, N \\ 1 & \text{dans}\ \ \Omega \setminus V(\varphi j) \cap \Omega_{\varphi_j} \end{cases}$$

est une fonction définie sur un ouvert O (Qui est en fait le polygone privés des voisinages des ses sommets) . En évidence par rotation et par translation et on peut toujours ramènes le sommet de Ω_{φ} à l'origine .

Nous étudions le problème dans un secteur plan infini d'ouverture e qu'on noté Ω_{φ}, défini par:

$$\Omega_{\varphi} = \{(\rho, \theta) \setminus \rho > 0, 0 < \theta < \varphi < 2\pi\} \tag{1}$$

On désigne par Γ_{φ} la frontière du secteur Ω_{φ}, on désigne la réunion de deux demi droites issues de l'origine et de l'équation respective sont $\theta = 0$ et $\theta = \varphi$.
On adaptées donc de coordonnées polaire à la géométrique du domaine Ω_{φ}.

Construction d'une fonction poids $\lambda(\rho)$

On introduit une fonction $\lambda(\rho)$ qui est une fonction indéfiniment différentiable à l'intérieur de Ω_φ (resp. $\overline{\Omega_\varphi}$) et positive dans Ω_φ de la frontière Γ_φ.
On a au voisinage à chaque sommet du polygone Ω définie par :

$$\lambda(\rho) = \begin{cases} \rho^\alpha & \text{si } 0 < \rho < \rho_1, 0 < \alpha \leq 1 \\ \delta(\rho) & \text{si } \rho_1 \leq \rho < \rho_2 \\ 1 & \text{si } \rho \geq \rho_2 \end{cases} \tag{2}$$

et ne s'annule pas dans Ω_φ (resp. $\overline{\Omega_\varphi}$).

Noyau de Green

On cherche d'une fonction u de l'équation différentielle :

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} + \kappa^2 u(x) = g(x) \quad \text{, pour } \; 0 \leq x \leq L.$$

avec la conditions frontière pour $x = 0$, et $x = L$. résoudre ce problème est de déterminer de noyau du Green $G(x, y)$ de deux variable .

la fonction u est alors définie par : $u(x) = \int_0^L G(x, y) g(x) dy.$

La transformation de Mellin

La transformation de Mellin est très bien adaptée aux domaines qui présent est des angles (des polygone , des cônes ou des polyèdre), le passage en coordonnées polaires, (sphériques ou cylindriques, pour les cônes et les polyèdres) allége les calculs, la transformation de Mellin joue le même rôle que celui joué par la transformation de Fourier dans le cas classique où on utilise les coordonnées cartésiennes .

Si $f(x)$ est définie sur ▪ ⊡ on appelle la transformation de Mellin de f la fonction $\vec{f}$ définie par : $\vec{f}(\sigma) = \int_0^\infty f(x) x^\sigma \frac{dx}{x}$ $\sigma \in \mathrm{C}$ lorsque cette intégrale converge.

Cas du problème direct

Position du problème

Soit ✋ un ouvert plan et à frontière polygonale Γ telle que :

$$\Omega = \left(\cup_{j=1}^{N} \Omega_{\varphi_j}\right) \cup O$$

On considérons le problème suivant :

$$(P) \quad \begin{cases} \Delta u = f & \text{dans}\,\Omega \\ Bu = 0 & \text{sur}\,\Gamma \end{cases} \qquad (3)$$

Où, B est un opérateur différentiel aux dérivées partielles, d'ordre 0 ou 1, définie sur la frontière Γ, on ne considérera ici que les deux cas la condition de Dirichlet et celle de Neumann et f étant donnée dans $L^2(\Omega)$.

Résultats de Grisvard

La solution du problème suivant:

$$(P) \quad \begin{cases} \Delta u = f & \text{dans}\,\Omega \\ u = 0 & \text{sur}\,\Gamma \end{cases} \qquad (4)$$

Il n'existe dans $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ que si le polygone Ω est convexe c'est à dire que tout les angles sont saillants, cela découle du fait que la solution de ce problème est de la forme: $u_j = u_0 + a\rho^{\frac{j\pi}{\varphi}} \sin\frac{j\pi}{\varphi}\theta$ telle que a est constante, cette solution n'est pas nécessaire dans $H^2(\Omega)$ lorsque $\varphi > \pi$. Car $\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \notin L^2(\Omega)$.

Le problème dans un secteur plan

Nous étudierons le problème dans un secteur plan infini d'ouverture e qu'on note ✋e, c'est à dire: $\Omega_\varphi = \{(\rho,\theta) \setminus \rho > 0, 0 < \theta < \varphi < 2\pi\}$, et on désigne ✎e la frontière de ✋e la frontière de ✋e désigne la réunion des deux demi droites issues de l'origine et d'équation respectives $\theta = 0$ et $\theta = \varphi$. le problème ◑P◖ sur ✋ équivaut au cas le problème classique dans un ouvert plan régulier O et au cas le problème dans le secteur

plan Ω_φ d'ouverture φ. telle que O est un ouvert plan régulier de la classe $C^1(\Omega)$. les coordonnées polaires sont mieux adaptées à la géométrie du domaine Ω_φ.
Pour étudier ce type de problème suivant sur Ω_φ , on affecte l'opérateur de Laplace Δ d'une fonction poids $\lambda(\rho)$ qui est une fonction indéfiniment différentiable à l'intérieur de Ω_φ et que ne s'annule pas dans Ω_φ, et définie par :

$$(P_\varphi)\begin{cases}\lambda(\rho)\Delta u = \lambda(\rho) f & \text{dans } \Omega_\varphi \\ Bu = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi\end{cases} \tag{5}$$

Définition de l'espace de travail $E_\alpha(\Omega_\varphi)$

Pour étudier ce type de problème suivant:

$$(P_\varphi)\ \begin{cases}\lambda(\rho)\Delta u = \lambda(\rho) f = h & \text{dans } \Omega_\varphi \\ Bu = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi\end{cases} \tag{6}$$

avec $h = \lambda(\rho) f \in L^2(\Omega_\varphi)$.

Supposons que le sommet de Ω_φ se situé à l'origine et soit $\lambda(\rho)$ la fonction poids définis par (2).
On va étudier ce problème au voisinage de l'origine dans un secteur plan Ω_φ, car le seul problème qui se pose quant à la régularité des solution du problème (6) se situé au voisinage de l'origine et d'après (2), on va donc étudier le problème suivant :

$$(P_\varphi)\quad \begin{cases}\rho^\alpha \Delta u = \rho^\alpha f = h & \text{dans } \Omega_\varphi \\ Bu = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi\end{cases} \tag{7}$$

On va commencer en utilisant comme conditions aux limites celles de Dirichlet (le cas où B est l'opérateur identité), c'est à dire qu'on va d'abord étudier le problème suivant :

$$(P_\varphi)\ \begin{cases}\rho^\alpha \Delta u = \rho^\alpha f = h & \text{dans } \Omega_\varphi \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi\end{cases} \tag{8}$$

de même pour la condition de Neumann (le cas où $B = \dfrac{\partial}{\partial \eta}$) suivant:

$$(P_\varphi)\ \begin{cases}\rho^\alpha \Delta u = \rho^\alpha f = h & \text{dans } \Omega_\varphi \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi\end{cases} \tag{9}$$

on a l'opérateur s'écrit en coordonné polaire: $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \rho} + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$.

la solution de ce problème (7) est de la forme $u_j = u_0 + a\rho^{\frac{j\pi}{\varphi}} \sin\frac{j\pi\theta}{\varphi}$, a est constante, il est commandé de chercher la solution du problème (7) dans un espace fonctionnel, on constate que $\rho^{\alpha}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \in L^2(\Omega_\varphi)$, ce qui nous donne l'idée d'affecter le Laplacien d'une fonction poids qui dépend de ρ

On choisit donc un espace fonctionnel avec poids qu'on défini par :

$$E_\alpha(\Omega_\varphi) = \left\{ u \in H^1(\Omega_\varphi),\ \rho^\alpha D^2 u \in L^2(\Omega_\varphi) \right\} \qquad (10)$$

Où, les fonctions u sont à support compact dans $\overline{\Omega_\varphi}$, et le symbole D^2 désigne les dérivées partielles d'ordre 2 par rapport aux variables ρ et η où $\dfrac{\partial}{\partial \eta} = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial \theta}$.

On cherchera la solution de notre problème, si elle existe dans ce espace . Il est plus commandé de chercher la solution du problème (8) dans l'espace fonctionnel qu'on note par $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$ et qu'on défini par : $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi) = E_\alpha(\Omega_\varphi) \cap H_0^1(\Omega_\varphi)$ car on a une condition de Dirichilet homogène. on vérifie aisément que E_α est un espace intermédiaire entre H^1 et H^2.On munira l'espace $E_\alpha(\Omega_\varphi)$ de la norme du graphe suivante:

$$\|u\|_{E_\alpha} = \|u\|_{H^1} + \sum_{|\alpha|=2} \|\rho^\alpha D^\alpha u\|$$

Propriété de l'espace $E_\alpha(\Omega_\varphi)$

on rappels des quelques définitions on pose :

$$H^1_{x,y}(\Omega_\varphi) = \left\{ u \in L^2(\Omega_\varphi), \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \text{ sont dans } L^2(\Omega_\varphi) \right\}.$$

$$H^1_{\rho,\eta}(\Omega_\varphi) = \left\{ u \in L^2(\Omega_\varphi), \frac{\partial u}{\partial \rho}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \text{ sont dans } L^2(\Omega_\varphi) \right\}.$$

L'espace $H^1_{x,y}(\Omega_\varphi)$ coïncide avec l'espace $H^1_{\rho,\eta}(\Omega_\varphi)$. Donc on utilisé définition l'espace de travail, l'espace $E_\alpha(\Omega_\varphi)$ définie par l'expression (10).

Proposition 1 : si u est dans $E_\alpha(\Omega_\varphi)$, alors $\rho^{\alpha-1}\dfrac{\partial u}{\partial \rho}$ est dans $L^2(\Omega_\varphi)$.

Proposition 2 : Si α et β deux réel pris dans l'intervalle $[0,1]$, et tels que $\alpha < \beta$, Alors $E_\alpha \subset E_\beta$.

Proposition 3 :

l'espace $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$ peut s'écrite sous la forme suivante:.

$$E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi) = \{u \in H_0^1(\Omega_\varphi), \rho^\alpha u \in H_0^2(\Omega_\varphi)\}.$$

Où u les fonctions sont à support compact dans $\overline{\Omega_\varphi}$.

Proposition 4 : l'espace $E_\alpha(\Omega_\varphi)$ est espace de Banach réflexifs.

Etude de l'existence et de l'unicité de solution

Inégalité à priori et l'existence des solutions

Cas du problème non perturbé

On va étudier l'existence du problème non perturbé suivant:

$$(P_\varphi)\begin{cases} \rho^\alpha \Delta u = \rho^\alpha f = h & \text{dans } \Omega_\varphi \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega_\varphi \end{cases} \qquad (11)$$

Lemme de Peetre: Soient E, F, G trois espaces de Banach réflexifs, tel que E s'injecte dans G et cette injection est compacte, et soit L un opérateur linéaire continu de E dans F .Alors les conditions suivantes sont équivalents :

1) L'image de L est fermée dans F et L a un noyau de dimension finie.

2) Il existe une constante $K > 0,$ telle que :

$$\|u\|_E \le K(\|Lu\|_F + \|u\|_G) \qquad (12)$$

On va appliquée ce lemme voir Saïd [14] aux espaces : $E = E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi); F = L^2(\Omega_\varphi);$ $G = H_0^1(\Omega_\varphi)$; il est clair que F et G sont espace de Banach réflexifs, car ce sont des espaces de Hilbert et E est un espace de Hilbert, donc toutes les hypothèses du lemme voir Saïd [14] ,sont vérifiées.

Il est évident que l'opérateur $\rho^\alpha\Delta$ est linéaire continu de $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$ dans $L^2(\Omega_\varphi)$. Pour montrer que l'image de l'opérateur $L = \rho^\alpha\Delta$ est fermée dans $L^2(\Omega_\varphi)$, et que son noyau est de dimension finie, on établira une inégalité (12) du type:

$$\|u\|_{E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)} \le K\left\{\|Lu\|_{L^2(\Omega_\varphi)} + \|u\|_{H_0^1(\Omega_\varphi)}\right\} \qquad (13)$$

Pour établir l'inégalité (13), on a besoin de l'inégalité :

$$\|u\|_{E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)} \le K\left\{\|\rho^\alpha\Delta u\|_{L^2(\Omega_\varphi)} + \|u\|_{H_0^1(\Omega_\varphi)}\right\} \qquad (14)$$

Pour montrer que l'inégalité (14), on commence par calcul $\|\rho^\alpha\Delta u\|^2$.

$$\|\rho^\alpha\Delta u\|^2 = \|\rho^\alpha D_x^2 u\|^2 + \|\rho^\alpha D_y^2 u\|^2 + 2(\rho^{2\alpha} D_x^2 u, D_y^2 u).$$

et on a :

$$\|\rho^{\alpha}\Delta u\|^2_{L^2}+\|u\|^2_{H^1_0} \le \|\rho^{\alpha}D_x^2 u\|^2_{L^2}+\|\rho^{\alpha}D_y^2 u\|^2_{L^2}+\|u\|^2_{H^1_0} \qquad (15)$$

Puisque l'injection de L^2 dans E_α est continue, on a l'inégalité souhaitée vérifiée d'où,

$$\|u\|_{E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)} \le K\left\{\|\rho^{\alpha}\Delta u\|_{L^2(\Omega_\varphi)}+\|u\|_{H^1_0(\Omega_\varphi)}\right\}.$$

On remarque qu'on obtient des résultats analogues en utilisant la condition de Neumann dans l'espace $E_\alpha(\Omega_\varphi)$ par application du lemme voir Saïd $[14]$.

D'après le lemme de Peetre qui dépend un image de l'opérateur $L=\rho^{\alpha}\Delta$ est fermé dans $L^2(\Omega_\varphi)$ et que son noyau de dimension finie.

On en déduit que le problème (11) admet au moins une solution dans l'espace $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$ pour le condition de Dirichlet, et dans $E_\alpha(\Omega_\varphi)$ pour la condition de Neumann.

Cas du problème perturbé

On va montrer que l'image de l'opérateur $L=\rho^{\alpha}\Delta+\rho^{\alpha}\lambda$ est fermée dans $L^2(\Omega_\varphi)$ et que son noyau est de dimension finie, on établira une inégalité du type :

$$\|u\|_{E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)} \le K\left\{\|Lu\|_{L^2(\Omega_\varphi)}+\|u\|_{H^1_0(\Omega_\varphi)}\right\} .$$

on commence par calcul $\|\rho^{\alpha}\Delta u\|^2$ et nous avons :

$$\|\rho^{\alpha}\Delta u\|^2 \le (\|Lu\|+\|\rho^{\alpha}\lambda u\|)^2$$

on prend que: $X=\|Lu\|, Y=\|\rho^{\alpha}\lambda u\|$ d'après la formule élémentaire d'où,

$$\|\rho^{\alpha}\Delta u\|^2_{L^2(\Omega_\varphi)}+\|u\|^2_{H^1_0} \le 2(\|Lu\|^2_{L^2}+\|u\|^2_{H^1_0})+2\|\rho^{\alpha}\lambda u\|^2_{L^2} \qquad (16)$$

On a les fonction u sont à support compact dans $\overline{\Omega_\varphi}$ alors il existe $\rho_0>0$ telle que :

$$\|\rho^{\alpha}\lambda u\|^2_{L^2} \le |\lambda|^2\rho_0^{2\alpha}\|u\|^2_{H^1_0}$$

(car l'injection de H^1_0 dans L^2 est continue).

D'après , le lemme précédent les inégalités (14) et (16) on en déduit :

$$\frac{1}{K}\|u\|^2_{E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)} \le 2\|Lu\|^2_{L^2(\Omega_\varphi)}+(2+2|\lambda|^2\rho_0^{2\alpha})\|u\|^2_{H^1_0} \qquad (17)$$

où, λ est une constante quelconque non nul.et on prend $C_1=\max(2,2+2|\lambda|^2\rho_0^{2\alpha}),$

on a donc l'inégalité (17) suivant :

$\exists K_1=KC_1>0$ telle que $\|u\|^2_{E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)} \le K_1\left\{\|Lu\|^2_{L^2(\Omega_\varphi)}+\|u\|^2_{H^1_0}\right\}$

On obtient des résultat analogues en utilisant la condition de Neumann sont varié valable. Par application du lemme voir Saïd $[14]$. On en déduit que le problème perturbé admet au moins une solution dans l'espace $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$ pour la condition de Dirichlet et de même travail dans $E_\alpha(\Omega_\varphi)$ pour la condition de Neumann.

Etude de l'unicité de la solution

Cas du problème non perturbé

Cas de la condition de Dirichlet

Les élément du noyau sont solution du problème suivants :

$$(P_\varphi)\ \begin{cases} \rho^\alpha \Delta u = 0 & \text{dans}\,\Omega_\varphi \\ u = 0 & \text{sur}\,\Gamma_\varphi \end{cases} \qquad (18)$$

comme le facteur ρ^α ne s'annule pas à l'intérieur de Ω_φ; Il suffit de remarque que multiple par u dans $\Delta u = 0$ et on obtient : $\langle \Delta u, u \rangle = 0$ d'où, u est constante et comme $u = 0$ sur Γ_φ donc $u = 0$ dans $H^1(\Omega_\varphi)$, et par suite $u = 0$ dans $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$.

Où , le crochet désignent le produit scalaire dans $L^2(\Omega_\varphi)$, et les normes sont celles de $L^2(\Omega_\varphi)$.

Cas de la condition de Neumann

La même méthode que celle du problème de Dirichlet dans le cas où on remarque que les constantes sont solution du problème de Neumann, et comme le noyau est de dimension finie donc la dimension du noyau est au moins de dimension un .

ce qui veut dire que pour la condition de Neumann cette solution n'est pas unique dans l'espace $E_\alpha(\Omega_\varphi)$.

Cas du problème perturbé

Cas de la condition de Dirichlet

Les élément du noyau de problème perturbé $(\lambda = \mu^2 \in \mathbb{R}_+)$ suivants :

$$(P_\varphi)\ \begin{cases} \rho^\alpha(\Delta u + \lambda u) = 0 & \text{dans}\,\Omega_\varphi \\ u(\rho, 0) = 0 & \text{sur}\,\Gamma_{\varphi_1} \\ u(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) = 0 & \text{sur}\,\Gamma_{\varphi_2} \end{cases} \qquad (19)$$

La résolution de problème par la méthode de séparation variable voir Reinhard [1].

écrivons de la condition au limite et par conséquent, on a :

$$\varphi = \arctan\tfrac{\sqrt{k^2+n^2}}{\mu x}\pi;\, x, \mu \in \mathbb{R}_+$$

on en déduit que $u(x, y) = 0$ pour $\varphi = \arctan\tfrac{\sqrt{k^2+n^2}}{\mu x}\pi$ est dans $H^1(\Omega_\varphi)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$; $k \in \mathbb{Z}$ et par suite $u(x, y) = 0$ dans $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$.

Cas de la condition de Neumann

Les éléments du noyau de problème perturbé .

Le problème avec la condition de Neumann, de même travail précédent pour la condition de Dirichlet , écrivons de la condition au limite et de la par conséquence on a:

$$\varphi = \arctan \frac{\sqrt{(k-1)^2+n^2}}{\mu x}\pi \quad \text{pour} \quad k \in \mathbb{Z} \ , \ x, \mu \in \mathbb{R}_+^*.$$

Donc la solution $u(x, y)$ n'est pas unique dans l'espace $E_\alpha(\Omega_\varphi)$ si et seulement si

$$\varphi = \arctan \frac{\sqrt{(k-1)^2+n^2}}{\mu x}\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}$$

Cas de la condition de Dirichlet

Pour $\lambda = -\mu^2 < 0$ $(\mu \in \mathbb{R}_+^*)$ de même méthode que le travail précédent, voir Reinhard[1], écrivons de la condition au limite, et par conséquent on a: $\varphi = \frac{1}{2}\arccos\frac{(k^2+n^2)\pi^2+\mu^2x^2}{\mu^2x^2-(k^2+n^2)\pi^2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{Z}$. La solution u(x,y) est identiquement nulle si et seulement si $\varphi = \frac{1}{2}\arccos\frac{(k^2+n^2)\pi^2+\mu^2x^2}{\mu^2x^2-(k^2+n^2)\pi^2}$.

Cas de la condition de Neumann

Pour $\lambda = -\mu^2 < 0$ $(\mu \in \mathbb{R}_+^*)$,et écrivons de la condition au limite et par conséquent ,on a

$$\varphi = \frac{1}{2}\arccos\frac{n^2\pi^2+\mu^2x^2}{\mu^2x^2-n^2\pi^2} \quad \text{ou} \quad \varphi = \frac{1}{2}\arccos\frac{(k^2+n^2)\pi^2+\mu^2x^2}{\mu^2x^2-(k^2+n^2)\pi^2}, \quad \text{pour} \quad n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{Z}$$

et $x \neq 0, \mu \in \mathbb{R}_+^*$. Donc la solution $u(x, y)$ n'est pas unique dans l'espace $E_\alpha(\Omega_\varphi)$.

Cas du problème adjoint

Formule de Green et Les problèmes Adjoints Formels

Formule de Green

L'on ait la formule de Green suivant :

Si u, v sont deux fonctions de $C_0^\infty(\overline{\Omega_\varphi})$, on a la formule de Green suivante:

$$\langle \rho^\alpha \Delta u, v \rangle - \langle u, (\rho^\alpha \Delta)^* v \rangle = \int_{\partial\Omega_\varphi} \rho^\alpha \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\gamma - \int_{\partial\Omega_\varphi} u \rho^\alpha \frac{\partial v}{\partial n} d\gamma \tag{20}$$

où les crochet $\langle . , . \rangle$ désigne le produit scalaire dans $L^2(\Omega_\varphi)$.

l'opérateur $(\rho^\alpha\Delta)^*$ est l'opérateur l'adjoint de $\rho^\alpha\Delta$, il est donnée par l'expression :

$$(\rho^\alpha \Delta)^* = \rho^\alpha \Delta + 2\alpha\rho^{\alpha-1}\frac{\partial}{\partial \rho} + \alpha^2 \rho^{\alpha-2}.$$

Dans le problème perturbé on aura :

$$\left\langle \rho^{\alpha}(\Delta+\lambda)u,v\right\rangle - \left\langle u,(\rho^{\alpha}(\Delta+\lambda))^{*}v\right\rangle = \int_{\Gamma_\varphi} \frac{\partial u}{\partial \theta}\rho^{\alpha-1} v d\rho - \int_{\Gamma_\varphi} u\rho^{\alpha-1}\frac{\partial v}{\partial \theta} d\rho.$$

où, $\quad (\rho^{\alpha}\Delta+\rho^{\alpha}\lambda)^{*} = \rho^{\alpha}\Delta + 2\alpha\rho^{\alpha-1}\frac{\partial}{\partial\rho} + \alpha^{2}\ \rho^{\alpha-2} + \rho^{\alpha}\lambda.$

Formulation du problème adjoint

On consacrée à l'étude de l'existence et de l'unicité de la solution du problème adjoint de problème (P_φ) définie par (7),On va utiliser le même travail que celui de l'étude du problème (P_φ) définie par (7), le problème adjoint suivant :

$$(P^{*}_{\varphi})\begin{cases} Qu = h & \text{dans } \Omega_\varphi \\ Bu = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi \end{cases} \tag{21}$$

On dit que (P^{*}_{φ}) le problème adjoint du (P_φ) , et l'opérateur $Q=(\lambda(\rho)\Delta)^{*}$ adjoint de $\lambda(\rho)\Delta$ pour $\lambda=0$ et de $Q=(\lambda(\rho)(\Delta+\lambda))^{*}$ adjoint de $\lambda(\rho)(\Delta+\lambda)$ pour $\lambda\neq 0$, telle que $\lambda(\rho)$ une fonction de poids définie par (2).Au voisinage de l'origine le problème (P^{*}_{φ}) s'écrit :

$$(P^{*}_{\varphi})\begin{cases} Pu = h & \text{dans } \Omega_\varphi \\ Bu = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi \end{cases} \tag{22}$$

où $P=(\rho^{\alpha}\Delta)^{*}$ adjoint de $\rho^{\alpha}\Delta$ pour $\lambda=0$ et de $P=(\rho^{\alpha}(\Delta+\lambda))^{*}$ adjoint de $\rho^{\alpha}(\Delta+\lambda)$ pour $\lambda\neq 0.$

$$(P^{*}_{\varphi})\begin{cases} Pu = h & \text{dans } \Omega_\varphi \\ Bu = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi \end{cases} \tag{23}$$

où P est l'opérateur adjoint de $\rho^{\alpha}\Delta$ et celle l'opérateur adjoint perturbé de $\rho^{\alpha}(\Delta+\lambda)$

Etude de l'espace dual

trouver dans le cas du problème de Dirichlet l'espace dual de $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$ définie par :

$$E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi) = \left\{u\in H^{1}_{0}(\Omega_\varphi) \backslash \rho^{\alpha}u\in H^{2}_{0}(\Omega_\varphi)\right\} \ .$$

Alors l'espace $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$ s'identifie à l'espace de $G_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$ c'est à dire $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$ $\equiv G_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$ définie par : $G_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)=\left\{u\in H^{1}_{0}(\Omega_\varphi),\ \text{telle que}\ \rho^{\alpha}u\in H^{2}_{0}(\Omega_\varphi)\right\}.$

Proposition 4:

Le dual de l'espace $G_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$ qu'on note par $G_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$ s'écrit de la manière suivant :

$$G_{-\alpha}(\Omega_\varphi) = \left\{u \in H^{-1}(\Omega_\varphi) \backslash \rho^{\alpha}u \in H^{-2}(\Omega_\varphi)\right\}.$$

Donc s'identifié $E_{-\alpha}(\Omega_\varphi)\equiv G_{-\alpha}(\Omega_\varphi).$

Muni de la norme du graphe suivante : $\|u\|_{E_{-\alpha}(\Omega_\varphi)} = \|u\|_{H^{-1}(\Omega_\varphi)} + \|\rho^{-\alpha}u\|_{H^{-2}(\Omega_\varphi)}$.

on vérifie évidement que : $H^{-1}(\Omega_\varphi) \subset E_{-\alpha}(\Omega_\varphi) \subset H^{-2}(\Omega_\varphi)$.

Proposition 5:

Le dual de l'espace $E_\alpha(\Omega_\varphi)$ qu'on note $[E_\alpha(\Omega_\varphi)]'$ s'identifie à l'espace $E_{-\alpha,\overline{\Omega_\varphi}}(\mathbb{R}^2)$ à support dans $\overline{\Omega_\varphi}$.

Posons $F_{-\alpha}(\Omega_\varphi) = E_{-\alpha,\overline{\Omega_\varphi}}(\mathbb{R}^2)$, l'espace $F_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$ est donc un sous espace de $H^{-2}(\Omega_\varphi)$.

Donc on muni l'espace $F_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$ de la norme suivante:

$$\|u\|_{F_{-\alpha}(\Omega_\varphi)} = \|u\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^2)} + \|\rho^{-\alpha}u\|_{H^{-2}(\mathbb{R}^2)} .$$

Preuve : voir détail [14].

Définition d'une nouvelle norme dans H^{-2}

On définit une nouvel norme dans $H^{-2}(\Omega_\varphi)$ de la fonction v, et si $v = \sum_{n\in \mathbb{Z}} c_n(\rho)\exp(\frac{in\pi}{\varphi}\theta)$ on a la formule suivante :

$$\|v\|^2_{H^{-2}(\Omega_\varphi)} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\varphi}\sum_{n\in \mathbb{Z}}\left|\frac{\tilde{c}_n(\sigma-2)\exp(\frac{in\pi}{\varphi}\theta)}{1+|\sigma-2|^2+(\frac{n\pi}{\varphi})^2}\right|^2 d\theta\, d\xi \qquad (24)$$

avec $\sigma = 1 + i\xi$.

Inégalité à priori et l'existence du problème adjoint

Cas du problème non perturbé

Cas de la condition de Dirichlet

Pour étudier l'existence de la solution du problème adjoint non perturbé suivant:

$$(P_\varphi)\begin{cases} Pu = h & \text{dans } \Omega_\varphi \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega_\varphi \end{cases} \qquad (25)$$

où, P est l'opérateur adjoint de $\rho^\alpha\Delta$ c'est à dire $P = (\rho^\alpha\Delta)^*$ et $h \in E_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$.

en étudier de l'existence de la solution dans l'espace $E_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$, on utilise le lemme de Peetre, donc pour montrer que l'image de P est fermée dans $E_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$, on établira une inégalité à priori de type, il existe une constant $K > 0$ telle que:

$$\|u\|_E \le K(\|Pu\|_F + \|u\|_G) \qquad (26)$$

On va appliquée le lemme de Peetre voir [14] aux espaces:

$$E = L^2(\Omega_\varphi), F = E_{-\alpha}(\Omega_\varphi), G = H^{-1}(\Omega_\varphi)$$

Donc toutes les hypothèses du lemme de Peetre [14] sont vérifiées .

on muni la norme suivant :

$$\|u\|_{E_\alpha(\Omega_\varphi)} = \|u\|_{H^{1}(\Omega_\varphi)} + \|\rho^{-\alpha}Pu\|_{H^{-2}(\Omega_\varphi)} \tag{27}$$

Donc pour montrer l'inégalité (25) , il suffit compte tenu de l'inégalité (26) d'établir l'inégalité suivante : Il existe une constante $K_1 > 0$ telle que:

$$\|u\|_{L^2(\Omega_\varphi)} \le K_1 \left\{ \|\rho^{-\alpha}Pu\|_{H^{-2}(\Omega_\varphi)} + \|u\|_{H^{-1}(\Omega_\varphi)} \right\} \tag{28}$$

Pour établir l'inégalité (28) , on va utiliser la norme de $H^{-2}(\Omega_\varphi)$ définie par la relation on aura :

$$\|\rho^{-\alpha}Pu\|^2_{H^{-2}(\Omega_\varphi)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n\in\mathbb{N}} \left| \frac{\left[(\sigma-\alpha)^2 - (\frac{n\pi}{\varphi})^2\right]}{1+|\sigma+2|^2 + \left[\frac{n\pi}{\varphi}\right]^2} \right|^2 |\tilde{c}_n(\sigma)|^2 \, d\nu,$$

avec $\sigma = 1 + i\nu$

Posons : $B(\sigma, n) = \left| \dfrac{\left[(\sigma-\alpha)^2 - (\frac{n\pi}{\varphi})^2\right]}{1+|\sigma+2|^2 + \left[\frac{n\pi}{\varphi}\right]^2} \right|$

On vérifie que le terme $B(\sigma, n)$ est borné par rapport à σ et n .Dans le cas particulier $\nu = 0$ où ce terme s'annule, on va décomposer l'intégrale dans la formule (23), en deux parties:

$$\|\rho^{-\alpha}Pu\|^2_{H^{-2}(\Omega_\varphi)} =$$

$$\int_{0\le|\nu|\le 1} \sum_{n\in\mathbb{N}} \left| \frac{\left[(\sigma-\alpha)^2 - (\frac{n\pi}{\varphi})^2\right]}{1+|\sigma+2|^2 + \left[\frac{n\pi}{\varphi}\right]^2} \right|^2 |\tilde{c}_n(\sigma)|^2 \, d\nu + \int_{|\nu|>1} \sum_{n\in\mathbb{N}} \left| \frac{\left[(\sigma-\alpha)^2 - (\frac{n\pi}{\varphi})^2\right]}{1+|\sigma+2|^2 + \left[\frac{n\pi}{\varphi}\right]^2} \right|^2 |\tilde{c}_n(\sigma)|^2 \, d\nu.$$

Pour le cas $|\nu| > 1$, on peut considère la transformation de Mellin de l'opérateur $\rho^{-\alpha}P$

$\widetilde{\rho^{-\alpha}Pu}(\sigma-2,\theta) = \tilde{g}(\sigma-2,\theta)$, on a donc il existe une constante $C_1 > 0$ telle que:

$$\|\tilde{g}(\sigma-2,\theta)\|^2_{\mathbf{E}_A} \le C_1 \|\tilde{u}(\sigma,\theta)\|^2_{\widetilde{\mathbf{L}}^2_A} \tag{29}$$

Où, $\mathbf{E}_A$ est l'espace transformée de Mellin de $H^{-2}(\Omega_\varphi)$, où la variable σ est dans l'ensemble $A = \{\sigma \in \mathbb{C} \text{ avec } \operatorname{Re}\sigma = 1 \text{ et } |\operatorname{Im}\sigma| > 1\}$, et $\widetilde{\mathbf{L}^2_A}$ est l'espace transformée de Mellin de $L^2(\Omega_\varphi)$ avec la variable σ est dans A.

Pour le cas $|\nu| < 1$, on va raisonner directement sur $\widetilde{\rho^{-\alpha}Pu}(\sigma-2,\theta) = \tilde{g}(\sigma-2,\theta)$ on obtient par rapport θ,

$$\tilde{g}(\sigma-2,\theta) = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial\theta^2}(\sigma,\theta) + (\sigma-\alpha)^2\,\tilde{u}(\sigma,\theta) \tag{30}$$

où, $\sigma = 1 + i\nu$ avec $-1 \le \nu \le 1$.

il s'agit donc d'une équation différentielle ordonna ire du second ordre par rapport à la variable θ, et dépendant d'un paramètre complexe et $(\nu,\theta)\in[-1,1]\times[0,\varphi]$.
le résultat désiré par résolution explicité de l'équation (30),on a il existe une constante $C_2>0$ qui verifier :

$$\|\vec{g}(\sigma,\cdot)\|^2_{\mathbf{E}_B} \le C_2 \|\vec{u}(\sigma,\cdot)\|^2_{\widetilde{\mathbf{L}}^2_B} \tag{31}$$

Où, $\mathbf{E}_B$ est l'espace transformée de Mellin de $H^{-2}(\Omega_\varphi)$,où la variable σ est dans la bande $B=\{\sigma\in \mathrm{C} \text{ avec } \mathrm{Re}\,\sigma=1 \text{ et } \mathrm{Im}\,\sigma\in[-1,1]\}$, et $\widetilde{\mathbf{L}}^2_B$ est l'espace transformée de Mellin de $L^2(\Omega_\varphi)$ avec la variable σ est dans la bande B.

en ajoutant (29) et (31) , on obtient l'inégalité désirée .
Et par l'utilisation de la transformation de Mellin inverse, donc l'image de l'opérateur P est fermée dans $E_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$ et son noyau est de dimension finie dans $L^2(\Omega_\varphi)$.
On en déduit que la condition de Dirichlet homogène admet au moins une solution dans l'espace $L^2(\Omega_\varphi)$.

Cas de la condition de Neumann

On utilise le lemme de Peetre, et par conséquence l'image de l'opérateur P est fermée dans $F_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$, on établira une inégalité à priori du type ,il existe une constante $Y>0$ telle que:

$$\|u\|_E \le Y\{\|Pu\|_F + \|u\|_G\} \tag{32}$$

On appliquée le lemme précèdent aux espaces:

$$E = L^2(\Omega_\varphi),\ F = F_{-\alpha}(\Omega_\varphi),\ G = H^{-1}(\Omega_\varphi)$$

On remarque là aussi que toutes les hypothèses du lemme de Peetre que de même travail de la condition de Dirichlet, et sont vérifiées. pour l'espace $F=F_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$ .Ainsi que la condition de Neumann homogène admet au moins une solution dans l'espace $L^2(\Omega_\varphi)$.

Cas du problème perturbé

Cas de la condition de Dirichlet

Pour étudier l'existence de la solution du problème adjoint perturbé ($\lambda\neq 0$).

On va étudier de l'existence de la solution du problème adjoint perturbé pour opérateur $\rho^{-\alpha}P=\rho^{-\alpha}(\rho^\alpha\Delta+\rho^\alpha\lambda)^*$, et on établira une inégalité du type :

$$\exists K_2>0\,,\ \|u\|_{L^2(\Omega_\varphi)} \le K_2\left\{\|\rho^{-\alpha}Pu\|_{H^{-2}(\Omega_\varphi)} + \|u\|_{H^{-1}}\right\} \ .$$

on a $\rho^{-\alpha}(\rho^\alpha\Delta+\rho^\alpha\lambda)^*u=\rho^{-\alpha}(\rho^\alpha\Delta)^*u+\lambda u=\rho^{-\alpha}Pu$, en utiliser pour la norme H^{-2} on aura:

$$\left\|\rho^{-\alpha}(\rho^{\alpha}\Delta)^{*}u\right\|_{H^{-2}} = \left\|\rho^{-\alpha}(\rho^{\alpha}\Delta)^{*}u + \lambda u - \lambda u\right\|_{H^{-2}} \leq \left\|\rho^{-\alpha}Pu\right\|_{H^{-2}} + \left\|\lambda u\right\|_{H^{-2}}.$$

et nous avons : $\left\|\rho^{-\alpha}(\rho^{\alpha}\Delta)^{*}u\right\|^2_{H^{-2}} \leq (\left\|\rho^{-\alpha}Pu\right\|_{H^{-2}} + \left\|\lambda u\right\|_{H^{-2}})^2$, d'après la formule élémentaire on a : $\left\|\rho^{-\alpha}(\rho^{\alpha}\Delta)^{*}u\right\|^2_{H^{-2}} \leq 2(\left\|\rho^{-\alpha}Pu\right\|^2_{H^{-2}} + \left\|\lambda u\right\|^2_{H^{-2}})$.

et $\qquad \left\|\rho^{-\alpha}(\rho^{\alpha}\Delta)^{*}u\right\|^2_{H^{-2}} + \left\|u\right\|^2_{H^{-1}} \leq 2(\left\|\rho^{-\alpha}Pu\right\|^2_{H^{-2}} + \left\|u\right\|^2_{H^{-1}}) + 2\left\|\lambda u\right\|^2_{H^{-2}}$.

Puisque l'injection de H^{-1} dans H^{-2} est continue ,l'inégalité précédent vérifiée que

$$\frac{1}{K_2}\left\|u\right\|^2_{L^2(\Omega_\varphi)} \leq 2\left\|\rho^{-\alpha}Pu\right\|^2_{H^{-2}} + (2+2|\lambda|^2)\left\|u\right\|^2_{H^{-1}}.$$

Donc l'inégalité suivant : $\exists\ K_3 = K_2 c_2 > 0$ telle que:

$$\left\|u\right\|_{L^2(\Omega_\varphi)} \leq K_3\left\{\left\|\rho^{-\alpha}Pu\right\|_{H^{-2}(\Omega_\varphi)} + \left\|u\right\|_{H^{-1}}\right\}$$

avec $C_2 = \max(2, 2+2|\lambda|^2)$.

Donc, l'image de l'opérateur adjoint perturbé P est fermée dans $E_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$, et son noyau est de dimension finie dans $L^2(\Omega_\varphi)$. Le problème perturbé avec la condition de Dirichlet homogène admet au moins une solution dans l'espace $L^2(\Omega_\varphi)$.

Cas de la condition de Neumann

On va montré que l'image de P est fermée dans $F_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$, on établira une inégalité à priori de type , il existe une constante $Y_1 > 0$ telle que:

$$\left\|u\right\|_{L^2(\Omega_\varphi)} \leq Y_1\left\{\left\|Pu\right\|_{F_{-\alpha}(\Omega_\varphi)} + \left\|u\right\|_{H^{-1}}\right\}$$

On remarque là aussi que toutes les hypothèses du lemme de peetre et de même travail de problème de Dirichlet perturbé ,et sont vérifiées pour l'espace $F = F_{-\alpha}(\Omega_\varphi)$ ainsi que la condition de Neumann homogène admet au moins une solution dans l'espace $L^2(\Omega_\varphi)$.

Etude de l'unicité de la solution

ceci étudie le noyau du problème perturbé et non perturbé.

Cas du problème non perturbé

Cas de la condition de Dirichlet

on se propose de calcul le noyau du problème de Dirichlet homogène dans l'espace $L^2(\Omega_\varphi)$.

Les élément du noyau du problème suivant:

$$(P_\varphi)\begin{cases} Pu = (\rho^{\alpha}\Delta)u = 0 & \text{dans } \Omega_\varphi \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega_\varphi \end{cases} \qquad (33)$$

On va traiter le cas général , le noyau du problème (25) dans $H^{-m}(\Omega_\varphi)$ avec m entier positif , dépend de m et de φ (d'ouverture de Ω_φ).

Cherchons le noyau du problème (25) dans $H^{-m}(\Omega_\varphi)$ avec m entier positif ,il s'agit donc de résoudre dans $H^{-m}(\Omega_\varphi)$, pour simplifier les calculs, en faisons le changement de variable suivant: $u = \rho^{-\alpha} w \in H^{-m}(\Omega_\varphi), w \in C^\infty(\Omega_\varphi)$

On a :
$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{dans } \Omega_\varphi \\ w = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi \end{cases} \qquad (34)$$

soit $0 < \rho < \rho_0$, la solution du problème (34) en utilisé la méthode de séparations de variables, donc la solution de problème (34) est de la forme:
$$\mathbf{w}(\rho,\theta) = \sum_{n\in \mathbb{N}} \left[\lambda_n \rho^{\frac{n\pi}{\varphi}} + \mu_n \rho^{-\frac{n\pi}{\varphi}} \right] \sin \tfrac{n\pi}{\varphi} \theta.$$

la solution u du problème suivant : $\mathbf{u}(\rho,\theta) = \sum_{n\in \mathbb{N}} \left[\lambda_n \rho^{-\alpha+\frac{n\pi}{\varphi}} + \mu_n \rho^{-\alpha-\frac{n\pi}{\varphi}} \right] \sin \tfrac{n\pi}{\varphi} \theta.$ dans $H^{-m}(\Omega_\varphi), m \in \mathbb{N}.$

On constate que le coefficient μ_n s'annulent à partir d'un rang $n_0 = n_0(m)$ qui dépend de m et de φ.

Cas de la condition de Neumann

on remarque que la solution u est constantes du problème (34) ce qui veut dire que la solution du problème (34) avec la condition de Neumann n'est pas unique dans l'espace $L^2(\Omega_\varphi)$

<u>Cas du problème perturbé</u>

Cas de la condition de Dirichlet

le calcul de noyau du problème de Dirichlet perturbé homogène dans l'espace $L^2(\Omega_\varphi)$ suivant:
$$(P_\varphi)\begin{cases} Pu = (\Delta + \lambda) u = 0 & \text{dans } \Omega_\varphi \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi \end{cases} \qquad (35)$$

De même si travail précédent dans le cas général, il s'agit donc de résoudre dans $H^{-m}(\Omega_\varphi)$ Pour simplifier les calculs on pose : $u = \rho^{-\alpha} w \in H^{-m}(\Omega_\varphi), w \in C^\infty(\Omega_\varphi)$

on a:
$$\begin{cases} \Delta w + \lambda w = 0 & \text{dans } \Omega_\varphi \\ w = 0 & \text{sur } \Gamma_\varphi \end{cases} \qquad (36)$$

soit $0 < \rho < \rho_0$, la solution du problème (36) perturbé on utilisé la méthode de séparations des variables on a donc la solution suivant:

<u>Cas</u> <u>$\lambda = \mu^2 \in \mathbb{R}_+^*$</u>

l'équation différentielle donné : $\rho^2 z'' + \rho z' + (\rho^2\mu^2 - (\frac{n\pi}{\varphi})^2)z = 0$ la solution de l'équation de Bessel que donné deux cas :

Si $\frac{n\pi}{\varphi} \notin \mathrm{N}$ c'est à dire n'est pas entier, alors la solution générale de l'équation de Bessel on a:

$z(\rho) = \lambda J_{\frac{n\pi}{\varphi}}(\rho\mu) + \mu J_{-\frac{n\pi}{\varphi}}(\rho\mu)$. telle que: $J_{\frac{n\pi}{\varphi}}(\rho\mu), J_{-\frac{n\pi}{\varphi}}(\rho\mu)$ fonctions des Bessel, donc la solution avec la condition de Dirichlet on aura:

$$\mathbf{w}(\rho,\theta) = \sum_{n\in\mathrm{N}}\left[\lambda_n J_{\frac{n\pi}{\varphi}}(\rho\mu) + \mu_n J_{\frac{-n\pi}{\varphi}}(\rho\mu)\right]\sin\tfrac{n\pi}{\varphi}\theta.$$

d'où , la solution général $\mathbf{u}(\rho,\theta) = G^1_{n,k} + G^2_{n,k}$ telle que :

$$G^1_{n,k} = \sum_{n\in\mathrm{N}}\left[\lambda_n\left(\frac{\mu^{\frac{n\pi}{\varphi}}}{2^{\frac{n\pi}{\varphi}}}\rho^{\frac{n\pi}{\varphi}-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\tfrac{(-1)^k}{k!}\rho^{2k-\alpha}(\frac{\mu}{2})^{2k}\frac{1}{\Gamma(\frac{n\pi}{\varphi}+k+1)}\right)\right]\sin\tfrac{n\pi}{\varphi}\theta.$$

$$G^2_{n,k} = \sum_{n\in\mathrm{N}}\left[\mu_n\left(\frac{\mu^{\frac{n\pi}{\varphi}}}{2^{\frac{n\pi}{\varphi}}}\rho^{-\frac{n\pi}{\varphi}-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\tfrac{(-1)^k}{k!}\rho^{2k-\alpha}(\frac{\mu}{2})^{2k}\frac{1}{\Gamma(\frac{-n\pi}{\varphi}+k+1)}\right)\right]\sin\tfrac{n\pi}{\varphi}\theta$$

On constate que les coefficients μ_n s'annulent à partir d'un certain rang $n_0 = n_0(m)$ qui dépend de m.

Si $\frac{n\pi}{\varphi} \in \mathrm{N}$ c'est à dire tout entier, on a donc la solution générale donnée par :

$$z(\rho) = \lambda J_{\frac{n\pi}{\varphi}}(\rho\mu) + \mu Y_{\frac{n\pi}{\varphi}}(\rho\mu).$$

$Y_{\frac{n\pi}{\varphi}}(\rho\mu) = \frac{J_{\frac{n\pi}{\varphi}}(\rho\mu)\cos\pi\frac{n\pi}{\varphi} - J_{\frac{-n\pi}{\varphi}}(\rho\mu)}{\sin\pi\frac{n\pi}{\varphi}}$ est une solution de l'équation de Bessel voir plus détail dans J.Bass [12]., on constate que les coefficients μ_n s'annulent à partir rang $n_0 = n_0(m)$ qui dépend de m et de φ

Cas $\lambda = -\mu^2 \in \mathrm{R}^*_-$

l'équation différentielle donné par : $\rho^2 z'' + \rho z' - (\rho^2\mu^2 + (\frac{n\pi}{\varphi})^2)z = 0$ est dit "l'équation de Bessel modifier .la solution l'équation de Bessel modifier que donnée de deux cas:

Si $\frac{n\pi}{\varphi} \notin \mathrm{N}$ c'est à dire n'est pas entier, alors la solution générale est donnée par:

$$z(\rho\mu) = AI_{\frac{n\pi}{\varphi}}(\rho\mu) + BI_{-\frac{n\pi}{\varphi}}(\rho\mu).$$

telle que $I_{\frac{n\pi}{\varphi}}(\rho\mu) = J_{\frac{n\pi}{\varphi}}(i\rho\mu)$ est une solution de l'équation différentielle :

$$\rho^2 z'' + \rho z' - (\rho^2\mu^2 + (\frac{n\pi}{\varphi})^2)z = 0.$$

la solution de l'équation précédent on ait:

$$\mathbf{u}(\rho,\theta) = \sum_{n\in\mathrm{N}}\left[A_n\rho^{-\alpha}I_{\frac{n\pi}{\varphi}}(\rho\mu) + B_n\rho^{-\alpha}I_{-\frac{n\pi}{\varphi}}(\rho\mu)\right]\sin\tfrac{n\pi}{\varphi}\theta.$$

On constate que les coefficients B_n s'annulent à partir d'un certain rang $n_0 = n_0(m)$ qui dépend de m et de φ

Si $\frac{n\gamma}{\varphi} \notin \mathbb{N}$,c'est à dire tout entier est aussi la solution de l'équation modifier de Bessel

$$Z(\rho) = A I_{\frac{n\gamma}{\varphi}}(\rho\mu) + B K_{\frac{n\gamma}{\varphi}}(\rho\mu)$$

$$K_{\frac{n\gamma}{\varphi}}(\rho\mu) = \left\{ \frac{\gamma}{2\sin\frac{n\gamma}{\varphi}} \left[I_{-\frac{n\gamma}{\varphi}}(\rho\mu) - I_{\frac{n\gamma}{\varphi}}(\rho\mu) \right] \right\},$$

la solution générale est : $\mathbf{u}(\rho,\theta) = \sum_{n\in \mathrm{N}} \left[A_n \rho^{-\alpha} I_{\frac{n\pi}{\varphi}}(\rho\mu) + B_n \rho^{-\alpha} K_{\frac{n\pi}{\varphi}}(\rho\mu) \right] \sin\frac{n\pi}{\varphi}\theta.$

On constate que les coefficients B_n s'annulent à partir d'un certain rang $n_0 = n_0(m)$ qui dépend de m et de φ.

Cas de la condition de Neumann

Les élément du noyau de problème perturbé ,dans le cas de même travail précédent lorsque $\lambda \in \mathrm{R}_+^*$ et $\lambda \in \mathrm{R}_-^*$, on remarque que dans deux cas la solution u en fonction de Bessel est constante du problème perturbé, ce qui veut dire que la solution du problème avec la condition de Neumann n'est pas unique dans l'espace $L^2(\Omega_\varphi)$.

Cas général:

L'étude du noyau dans $H^{-m}(\Omega_\varphi)$, avec m entier positif c'est à dire $m \geq 2$ la condition $\mathbf{n} < \frac{2\varphi}{\pi}$ généralisée s'écrit : $n < \frac{\varphi}{\pi}(m+1-\alpha)$.

d'où il existe un rang $\mathbf{n}_{\varphi,m,\alpha} = E\left[\frac{\varphi}{\pi}(m+1-\alpha)\right]+1$ et telle qu'à partir de ce rang, les coefficients μ_n sont identiquement nuls .

$E[x]$ = désigne la partie entier de x.

Extension du problème et de son adjoint dans le polygone plan

On proposé de extension du problème suivante défini dans Ω s'écrit : (37)

$$(P)\begin{cases} (L-\lambda)u = (L-\lambda)h & \text{dans } \Omega \\ Bu = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Où , B est opérateur d'ordre 0 ou 1 , qui représente la condition de Dirichlet ou celle de Neumann, on utiliser une partition de l'unité sur le polygone .

Soit (w_j) pour $j = 1,2,.....,N$ une partition de l'unité de la classe $C^\infty(\Omega)$ de polygone qui isolé chacun de sommets S_j ,pour $j = 1,2,.....,N$.

Soit la fonction de troncature w_j est définie de telle que sorte de voisinage au sommet S_j pour $j = 1,2,.....,N$. elle vaut 1 , et est nulle par ailleurs, c'est à dire:

$$w_j = \begin{cases} 1 \text{ dans } V(S_j) \cap \Omega_{\varphi_j} \\ 0 \text{ dans } \Omega \setminus V(S_j) \cap \Omega_{\varphi_j} \end{cases}$$

Soit : $X + \sum_{j=1}^{N} w_j = 1_{\Omega}$, X est une fonction troncature sur Ω et comme $\sum_{j=1}^{N} w_j = 1$ alors on a $u = \sum_{j=0}^{N} w_j u = \sum_{j=0}^{N} u_j$ telle que : $u_j = w_j u$,pour $j = 0,1,2,.....,N$. Aux voisinages des sommets S_j le problème (37) s'écrit : (38)

$$(P_{\varphi}) \begin{cases} \rho^{\alpha}\Delta(\sum_{j=1}^{N} u_j) = \rho^{\alpha} f = h & \text{dans} \cup_{j=1}^{N} (\Omega_{\varphi_j} \cap V(S_j)) \\ B(\sum_{j=1}^{N} u_j) = 0 & \text{sur} \cup_{j=1}^{N} \Gamma_{\varphi_j} \end{cases}$$

En isolant chaque sommet S_j du polygone, on obtient le problème défini au voisinage de (39) chaque sommet S_j ,pour $j = 1,2,.....,N.$ comme suit :

$$(P_{\varphi_j}) \begin{cases} \rho^{\alpha}\Delta u_j = \rho^{\alpha} f = h & \text{dans } \Omega_{\varphi_j} \\ B u_j = 0 & \text{sur } \Gamma_{\varphi_j} \end{cases}$$

Les fonctions u_j sont à support compact , en chaque sommet S_j .

$\Psi = Xu$ est une fonction définie dans un ouvert régulier O (qui est en fait le polygone privés des voisinages de ses sommets) .

Ici la fonction Ψ définie par : $\Psi = \begin{cases} \Psi_1 & \text{sur } O_1 \\ \Psi_2 & \text{sur } O_2 \end{cases}$ (40)

on a donc :

$$\begin{cases} [illegible]\,\Psi_1 = [illegible] & \text{dans } O_1 \\ B\Psi_1 = 0 & \text{sur } \partial O_1 \end{cases} \quad (41)$$

et

$$\begin{cases} [illegible]\,\Psi_2 = f & \text{dans } O_2 \\ B\Psi_2 = 0 & \text{sur } \partial O_2 \end{cases} \quad (42)$$

les problèmes sont définis dans un domaine régulier , .son étude est totalement classique et ses résultats son connus, les inégalités à priori que données :il existe une constante K_0 strictement positive telle que les inégalités donnée:

$$\Psi \in H^2 \cap H_0^1 , \ \|\Psi\|_{H^2} \le K_0 \left\{ \|[illegible]\,\Psi\|_{L^2} + \|\Psi\|_{H_0^1} \right\}$$

au voisinage à chaque sommet de S_j pour $j = 1,2,.....,N$ c'est à dire N est le nombre de sommets du polygone Ω , l'études au déjà vu précédent de l'existence et nous avons l'inégalité à priori, pour $j = 1,....,N$.

$$\|u\|_{E_\alpha(e_j)} \leq K_{e_j}\left\{\|\lambda(\rho)\Delta u_j\|_{L^2(e_j)} + \|u_j\|_{H^1(e_j)}\right\}$$ (44)

Donc, de (5.30) et (5.31) on en déduit que pour $j = 0,1,....,N$ on a :

$$\|u\|_{A(e_j)} \leq K_{e_j}\left\{\|\lambda(\rho)\Delta u_j\|_{L^2(e_j)} + \|u_j\|_{B(e_j)}\right\}$$

où ,

$$A = \begin{cases} E_{\alpha,0} \text{ pour la condition de Dirichlet} \\ E_\alpha \text{ pour la condition de Neumann} \end{cases}$$

et

$$B = \begin{cases} H_0^1 \text{ pour la condition de Dirichlet} \\ H^1 \text{ pour la condition de Neumann} \end{cases}$$

En ajoutant toutes ces inégalités, (la sommation se fait sur j , ($j = 0,1,2,.....,N$). et l'inégalité relative à l'ouvert O, et en prenant la maximum de toutes les constantes. on obtient une inégalité valable sur tout le polygone Ω. c'est à dire on obtient l'inégalité suivant: $\|Z\|_{E_\alpha(\Omega)} \leq D_{\max}\left\{\|\lambda(\rho)\Delta Z\|_{L^2(\Omega)} + \|Z\|_{H^1(\Omega)}\right\}$

et $Z = \begin{cases} u & \text{dans } \Omega \setminus O \\ \Psi & \text{dans } O \end{cases}$

telle que $D_{\max}$ est de large constantes par rapport tout inégalités.
La même démarche sera suivi pour le problème adjoint.

Application à un système d'évolution

Soit $Q = \Omega \times]0,T[$ un domaine plan de $\mathbb{R}^2$, telle que Ω une polygone et $T > 0$ de la frontière polygonale Γ telle que $\Gamma = \cup_{j=1}^{N}\Gamma_j$ et le côté $]S_{j-1},S_j[$ est noté Γ_{j-1}. où , S_j sont les sommet de Ω, on considère alors le problème de diffusion suivant : (45)

$$(P)\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \lambda(\rho)\Delta u = f \text{ dans } \Omega \times]0,T[= Q \\ Bu = 0 \quad \text{sur } \Sigma \\ U(0) = U_0 \quad \text{sur } \Omega \end{cases}$$

$f \in L^2(Q)$ étant donnée, et B est un opérateur différentiel aux dérivées partielles d'ordre 0 ou 1 , définie sur la frontière Σ ,et le condition initial $U(0)$ donnée par :
(43)

$$U(0)=U_0=\begin{cases} u(x,y,0)=u_0(x,y) \\ u(x,y,T)=u_1(x,y) \end{cases}$$

Alors on multiplie l'opérateur L par la fonction de poids $\lambda(\rho)=\lambda_1(\rho)$ qui est une fonction de classe $C^\infty(Q_\varphi)$ et ne s'annule pas dans Q_φ la fonction que vaut $\lambda_1(\rho)=\rho^\alpha$ au voisinage de l'origine. Au voisinage de l'origine ,ce le problème avec la condition de Dirichlet s'écrit: (46)

$$(P_\varphi)\begin{cases} \rho^\alpha \dfrac{\partial u}{\partial t} - \rho^\alpha \Delta u = \rho^\alpha f \text{ dans } \Omega_\varphi \times]0,T[= Q_\varphi \\ u(\sigma,0,t) = u(\sigma,\varphi,t) = 0 \text{ sur } \Sigma_\varphi = \Gamma_\varphi \times]0,T[\\ U(0)=U_0=\begin{cases} u(\sigma,\theta,0)=u_0(\sigma,\theta) \\ u(\sigma,\theta,T)=u_1(\sigma,\theta) \end{cases} \text{ sur } \Omega_\varphi \end{cases}$$

Ainsi , des résultats analogues en utilisant la condition de Neumann .

Définition d'un espace fonctionnelle

On se propose de chercher la solution du problème dans l'espace fonctionnelle donnée par l'opérateur $A=-\rho^\alpha\Delta$ sur le domaine $D(A)=E_\alpha(\Omega_\varphi)$ pour $\alpha\in]0,1[$ tels que l'espace $E_\alpha(\Omega_\varphi)$ définie par : $E_\alpha(\Omega_\varphi)=\{u\in H^1(\Omega_\varphi) \,/\, \rho^\alpha D^2 u\in L^2(\Omega_\varphi)\}$.

Pour le cas de la condition de Dirichlet homogène ,il est commode de travailler dans l'espace fonctionnelle $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)$ tels que $E_{\alpha,0}(\Omega_\varphi)=E_\alpha(\Omega_\varphi)\cap H_0^1(\Omega_\varphi)$. et de même si pour la condition de Neumann il est commande de travailler l'espace $E_\alpha(\Omega_\varphi)$.

Etude de l'existence et l'unicité de la solution

Définition 1: On dit que l'opérateur A est dissipatif pour le produit scalaire $(.\ ,.)_H$ si :
Re($Ax,x)\leq 0$, pour tout $x\in D(A)$.

Définition 2: Un semi -groupe est dit dissipatif si son générateur infinitésimal l'est.
un semi groupe de contraction de la classe C^0 est dissipatif .

Cas du problème avec la condition de Dirichlet homogène

Pour ceci application du problème de diffusion, étant donnée $f\in L^2(Q_\varphi)$, le problème suivant:

$$
(P_{\varphi})\begin{cases} \rho^{-\alpha}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\Delta u = f = h & \text{dans } \Omega_{\varphi}\times]0,T[=Q_{\varphi} \\ u=0 & \text{sur } \Gamma_{\varphi}=\partial\Omega_{\varphi}\times]0,T[\\ U(0)=U_0 & \text{sur } \Omega_{\varphi} \end{cases}
$$

Pour les conditions au bord $u(\rho,0)=u(\rho,\varphi)=0$ sur Γ_{φ} et l'opérateur $A=-\rho^{\alpha}\Delta.$ Donc on peut prendre $f=0$ et l'espace suivant $H=L^2(\Omega_{\varphi}),$ et le domaine $D(A)$ telle que: $D(A)=E_{\alpha}(\Omega_{\varphi})\cap H_0^1(\Omega_{\varphi})=E_{\alpha,0}(\Omega_{\varphi}).$ et l'espace $D(A)=E_{\alpha,0}(\Omega_{\varphi})$ est dense dans $L^2(\Omega_{\varphi}).$ L'opérateur A est monotone c'est à dire: $\langle Au,u\rangle\geq 0.$

$$
\langle Au,u\rangle=\int_0^{\varphi}\int_0^{\infty}\rho^{\alpha}\left|\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right|^2\rho d\rho d\theta+\int_0^{\varphi}\int_0^{\infty}\rho^{\alpha}\left|\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|^2\rho d\rho d\theta-\frac{\alpha}{2}\int_0^{\varphi}\int_0^{\infty}\rho^{\alpha-2}|u|^2\rho d\rho d\theta
$$

D'après Grisvard $[10]$ le lemme de inégalité résultat on a :

$$
\left(\int_0^{\infty}|u(x)|^p x^{\alpha-p}dx\right)^{\frac{1}{p}}\leq\frac{p}{p-\alpha-1}\left(\int_0^{\infty}\left|\frac{\partial u(x)}{\partial x}\right|^p x^{\alpha}dx\right)^{\frac{1}{p}}.
$$
si $\alpha<p-1.$ donc l'inégalité suivant on a :

$$
\langle Au,u\rangle\geq(1-\frac{2\alpha^2}{(1-\alpha)^2})\int_0^{\varphi}\int_0^{\infty}\rho^{\alpha}\left|\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|^2\rho d\rho d\theta+\int_0^{\varphi}\int_0^{\infty}\rho^{\alpha}\left|\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right|^2\rho d\rho d\theta \qquad \text{d'où,}
$$

$$
\langle Au,u\rangle\geq(1-\frac{2\alpha^2}{(1-\alpha)^2})\int_0^{\varphi}\int_0^{\infty}\rho^{\alpha}\left|\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|^2\rho d\rho d\theta.
$$

l'opérateur A est monotone pour $0<\alpha\leq\sqrt{2}-1.$

L'opérateur $A=-\rho^{\alpha}\Delta$ est maximal; $\forall l\in L^2(\Omega_{\varphi}),\exists u\in D(A),$ alors $l=Au+u$,on a

$$
-\rho^{\alpha}\Delta u+u=l\in L^2(\Omega_{\varphi}).
$$

l'image de $\rho^{\alpha}\Delta$ est fermée dans $L^2(\Omega_{\varphi})$ et son noyau de dimension finie ,d'après le lemme de Peetre et nous avons de l'équation $l=Au+u$ admet au moins une solution dans l'espace $D(A)=E_{\alpha,0}(\Omega_{\varphi}).$

La formule de Green on a $\rho^{\alpha}\Delta\neq(\rho^{\alpha}\Delta)^*$ c'est un opérateur non auto -adjoint.

Selon, le théorème de "Hill -Yosida" voir Brezis $[13]$, puisque A est maximal monotone le problème admet une solution et si on prend $\begin{pmatrix}u_0\\u_1\end{pmatrix}\in D(A).$ C'est à dire

$$
u\in C^1(]0,T[,L^2(\Omega_{\varphi}))\cap C(]0,T[,E_{\alpha,0}(\Omega_{\varphi})).
$$

Pour $\sqrt{2}-1\leq\alpha<1$ l'opérateur A non monotone on aura donc :

$$
\langle-\rho^{\alpha}\Delta u,u\rangle\leq(1-\frac{2\alpha^2}{(1-\alpha)^2})\int_0^{\varphi}\int_0^{\infty}\rho^{\alpha}\left|\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|^2\rho d\rho d\theta \text{ , et } \mathrm{Re}\langle-\rho^{\alpha}\Delta u,u\rangle\leq 0. \tag{47}
$$

Donc l'opérateur A est dissipatif pour $\sqrt{2}-1<\alpha<1$ d'où l'opérateur A engendre d'un semi groupe de contraction voir $[17]$.

Cas du problème perturbé avec la condition de Dirichlet homogène

l'opérateur $A=-\rho^{\alpha}\Delta+\rho^{\alpha}\lambda,\ \lambda\in \mathbb{R}$ est monotone maximal et engendre d'un semi groupe de contraction .De même si de travail et on prend $H=L^2(\Omega_{\varphi}),$ et le domaine $D(A)$ telle que $D(A)=E_{\alpha,0}(\Omega_{\varphi})$ est dense dans $L^2(\Omega_{\varphi}).$ on a donc :

$$\langle Au,u\rangle=(1-\frac{2\alpha^2}{(1-\alpha)^2})\int_0^{\varphi}\int_0^{\infty}\rho^{\alpha}\left|\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|^2\rho d\rho d\theta+\int_0^{\varphi}\int_0^{\infty}\rho^{\alpha}\left|\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right|^2\rho d\rho d\theta+\lambda\int_0^{\varphi}\int_0^{\infty}\rho^{\alpha}|u|^2\rho d\rho d\theta.$$

L'opérateur $-\rho^{\alpha}\Delta+\rho^{\alpha}\lambda=A$ est monotone pour $0<\alpha\leq\sqrt{2}-1$ et $\lambda>0.$

L'opérateur $A=-\rho^{\alpha}\Delta+\rho^{\alpha}\lambda$ est maximal $\forall l\in L^2(\Omega_{\varphi}),\exists u\in D(A),$ alors $l=Au+u$,on aura: $-\rho^{\alpha}\Delta u+\rho^{\alpha}\lambda u+u=l\in L^2(\Omega_{\varphi}).$

L'image de l'opérateur perturbé $\rho^{\alpha}(\Delta+\lambda)$ est fermé dans $L^2(\Omega_{\varphi})$ et son un noyau de dimension finie, d'après le lemme de Peetre l'équation $l=Au+u$ admet au moins une solution dans l'espace $D(A)=E_{\alpha,0}(\Omega_{\varphi}).$ La formule de Green on a :

$\rho^{\alpha}(\Delta+\lambda)\neq(\rho^{\alpha}(\Delta+\lambda))^{*}$ c'est un opérateur non auto -adjoint.

Selon, le théorème de "Hill -Yosida" voir Brezis $[13]$, puisque A est maximal monotone.

Le problème admet une solution et si on prend $\begin{pmatrix}u_0\\u_1\end{pmatrix}\in D(A)$ .C'est à dire:

$$u\in C^1(0,T;L^2(\Omega_{\varphi}))\cap C(0,T;E_{\alpha,0}(\Omega_{\varphi}))$$

Pour $\sqrt{2}-1<\alpha<1$ et $\lambda>0$ on a :

$$\langle Au,u\rangle=(1-\frac{2\alpha^2}{(1-\alpha)^2})\int_0^{\varphi}\int_0^{\infty}\rho^{\alpha}\left|\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|^2\rho d\rho d\theta+\int_0^{\varphi}\int_0^{\infty}\rho^{\alpha}\left|\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right|^2\rho d\rho d\theta+\lambda\int_0^{\varphi}\int_0^{\infty}\rho^{\alpha}|u|^2\rho d\rho d\theta.$$

d'où,

$\mathrm{Re}\langle Au,u\rangle\leq(1-\frac{2\alpha^2}{(1-\alpha)^2})\int_0^{\varphi}\int_0^{\infty}\rho^{\alpha}\left|\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|^2\rho d\rho d\theta$, et A est dissipatif, alors A engendre d'un semi groupe de contraction.

Cas du problème avec la condition de Neumann homogène

L'étude de ce problème on suit exactement la méthode que celle utilisée dans le paragraphe précédent .

A est monotone, on répétée de même si paragraphe avec la condition au bord $\frac{\partial u}{\partial\eta}(\rho,0)=\frac{\partial u}{\partial\eta}(\rho,\varphi)=0$ sur Γ_{φ} et l'opérateur $A=-\rho^{\alpha}\Delta$ et prend l'espace $H=L^2(\Omega_{\varphi}),$ et le domaine $D(A)=E_{\alpha}(\Omega_{\varphi})$ est dense dans $L^2(\Omega_{\varphi}).$

L'opérateur A est monotone : $\langle Au,u\rangle \geq 0$ pour $0 < \alpha \leq \sqrt{2}-1$

$$\langle Au;u\rangle \geq (1-\frac{2\alpha^2}{(1-\alpha)^2})\int_0^{\varphi}\int_0^{\infty}\rho^{\alpha}\left|\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|^2 \rho d\rho d\theta.$$

Il reste, on utilisera aussi le lemme de Peetre, et on obtiendra un résultat analogue le seul changement est qu'on travaille dans l'espace $E_{\alpha}(\Omega_{\varphi})$ au lieu de $E_{\alpha,0}(\Omega_{\varphi})$. Donc est A est maximal. On adaptée la formule de Green ,le résultat analogue c'est un opérateur non auto -adjoint. Selon, le théorème de "Hill Yosida" voir Brezis [13], puisque A est monotone maximal. le problème admet une solution et si on prend $\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \in D(A)$.

C'est à dire: $u \in C^1(]0,T[,L^2(\Omega_{\varphi})) \cap C(]0,T[,E_{\alpha}(\Omega_{\varphi}))$.

Pour $\sqrt{2}$ ✍1 ✧☺🖫**1** l'opérateur A dissipatif on aura donc :

$$\langle -\rho^{\alpha}\Delta u,u\rangle \leq (1-\frac{2\alpha^2}{(1-\alpha)^2})\int_0^{\varphi}\int_0^{\infty}\rho^{\alpha}\left|\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|^2 \rho d\rho d\theta$$, et Re⌧✌✋ u, u⋖✧0.

Alors, A engendre d'un semi groupe de contraction .

Cas du problème perturbé avec la condition de Neumann homogène

L'opérateur $A = -\rho^{\alpha}\Delta + \rho^{\alpha}\lambda$, $\lambda \in \mathrm{R}$. est monotone et maximale et engendre d'un semi groupe de contraction .De même si de travail et on obtiendra un résultat analogue le seul changement est qu'on travaille dans l'espace $E_{\alpha}(\Omega_{\varphi})$ au lieu de $E_{\alpha,0}(\Omega_{\varphi})$.

On prend $\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \in D(A)$. C'est à dire: $u \in C^1(]0,T[,L^2(\Omega_{\varphi})) \cap C(]0,T[,E_{\alpha}(\Omega_{\varphi}))$.

Pour $0 < \alpha \leq \sqrt{2}-1$ **et** $\lambda > 0$.

Pour $\sqrt{2}-1 < \alpha < 1$ et $\lambda > 0$ on aura : $\mathrm{Re}\langle Au,u\rangle \leq (1-\frac{2\alpha^2}{(1-\alpha)^2})\int_0^{\varphi}\int_0^{\infty}\rho^{\alpha}\left|\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|^2 \rho d\rho d\theta.$

Donc l'opérateur A est dissipatif pour $\sqrt{2}$ ✍1🖫☺🖫 d'où l'opérateur A engendre d'un semi groupe de contraction .

Conclusion générale

Nous étudions de quelques problèmes limités pour les équations aux dérivées partielles semi -linéaire et de le problème dynamique de la diffusion et de diffusion perturbée.

Dans ce mémoire, nous avons étudié pour chaque cas le problème direct et son adjoint Enfin, nous avons appliqué cette méthode sur un système d'évolution dans un polygone plan.

Dans la première partie on a étudié le problème de Poisson avec la condition de Dirichlet et la condition de Neumann dans un secteur plan infini, d'ouverture φ qui est un des angles du polygone.

On a montré que l'utilisation de la fonction de poids convenable allège plus les calculs sur tout aux voisinages des points singuliers, et par conséquent après un bon choix de l'espace de travail et le traitement du problème. Nous avons mis en évidence une inégalité à priori et par utilisation de lemme de Peetre, nous avons établi l'existence de la solution dans l'espace ainsi choisi.

On a appliqué la méthode au cas de changement de perturbation du phénomène de problème c'est à dire $F(u) = \lambda u,$ telle que $\lambda \neq 0$ est une constante quelconque, et en utilisant le lemme de Peetre nous avons démontré simplement l'existence de la solution dans l'espace choisi.

En suite on a étudié les unicités des solutions par la technique des noyaux pour les deux cas $F(u) = \lambda u$ et $F(u) = 0$.

Dans la deuxième partie on a établi une formule de Green adaptée à chaque problème et on a déduit la formule de l'opérateur adjoint, et par conséquent après un calcul de l'espace dual de travail et le traitement du problème, on a utilisé une nouvelle normes dans H^{-2} , on a mis en évidence une inégalité à priori et par utilisation le lemme de Peetre, nous avons démontré l'existence de la solution dans L^2 .

On a appliqué la méthode au cas de changement de perturbation du phénomène de problèmes c'est à dire $F(u) = \lambda u,\ \lambda \neq 0$ en utilisant la nouvelle norme H^{-2} et nous avons simplement démontré l'existence de la solution dans L^2 .

On a étudié l'unicités des solutions du problème adjoint en utilisant la technique des noyaux de deux cas $F(u) = \lambda u$ et $F(u) = 0$.

Dans la dernière partie, on a fait une application dans un système d'évolution, est celui de la diffusion et du type parabolique. Ce genre de problèmes intervient dans plusieurs applications, comme la théorie de la chaleur ,la diffusion des gaz, etc.

Par une application de la fonction de poids dans un système d'évolution et du type parabolique dans le deux cas perturbé et non perturbé, on a étudié le problème de diffusion dans le corps plan du polygone $Q = \Omega \times]0,T[\ , T > 0$ avec T de temps et Ω polygone.

On a utilisé la même fonction poids choisie convenablement dans le chapitre 1 pour chaque problème, pour rendre les calculs aux voisinages des points singuliers plus aise et par conséquent, d'après Brezis [13] on a montré que l'opérateur de Laplace avec poids est monotone et maximal.

On a utilisé le lemme de Peetre pour l'inégalité à priori en mettant en évidence que l'opérateur est maximal.

On a appliqué la méthode au cas de changement de perturbation pour montrer que l'opérateur est monotone, et maximal.

D'après le théorème de Hille Yosida, on établit l'existence et unicité de solutions de problèmes dans les espaces choisis, et même application pour le système qui engendre un semi groupe de contraction.

Bibliographie

[1] **H.Reinhard ,** Equations aux dérivées partielles , Dunod , Paris , 1991.

[2] **M.Merigot ,** Etude du problème de $\Delta u = f$ dans un polygone plan ,Inégalités à priori, Boll .Un .Mat .Italie (4) .10, pp. 577-597,1974.

[3] **M.Merigot ,**Solutions en normes L^p, des problèmes aux limites dans des polygones plan, Thèse de Doctorat d'état , IREM,Université de Nice 1974.

[4] **Lions,J.L.et Magenes,** Problèmes aux limites non homogènes et Applications, Tome1 , Dunod , Paris 1968.

[5] **P.Grisvard ,** Alternative de Fredholm relative au problème de Dirichlet dans un polygône ou un polyèdre , Boll .Un .Mat .Italie (4) .5 1972 p. 132-164.

[6] **P.Grisvard ,** Alternative de Fredholm relative au problème de Dirichlet dans un polyèdre ,Annali S.N.S .Pisa ,séries 4,**2** (3) **,**359-388 ,1975.

[7] **P.Grisvard ,** Singularites des solutions du problèmes des stokes dans un polygone, Seminaire d'analyse fonctionnelle , IREM, Nice ,1979.

[8] **P.Grisvard ,** Elliptic problems in non smooth domains, Monographs and studies in Mathematics,24,Pitman ,London ,1985.

[9] **P.Grisvard ,** Singularities in Boundary value Problems ,Masson ,1992.

[10] **P.Grisvard ,**Espaces intermédiaires entre espaces de Sobolev avec poids , Annali S.N.S .Pisa ,séries 3,**tome17** N $^{0}3$ **,p.**255-296 ,1963.

[11] **Hanna , M. and Smith,T,** Some remarks on the Dirichlet problem in piecewise smooths domains, Comm. Pure and Applied Math, **20** , p.575-593.

[12] **J.Bass ,** Cours De Mathématiques , **tome 2** ,Masson ,1978.

[13] **H.Brezis ,** Analyse Fonctionnelle , Dunod 1999.

[14] **MS.Said,** Etude du problème adjoint du Problème de Laplace avec poids dans un polygône Plan , Thèse De Magister , Université de Constantine, 1993.

[15] **MS.Said,** study of the biharmonic problems disturbs by weights in a polygons , Far East , Journ of Mathematics and sciences , FJMS, 16 (1) (2005) p.121-136.

[16] **P.A.Raviart et J.M.Thomas,** Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles , Masson ,1992 .

[17] **J.L.Lions ,**Analyse mathématique et calcul numérique ,Volume 8 , Paris 1984.

[18] **V.A.Koundratiev,**Boundary problems for elliptic equations with conical or angular points ,Trudy Moskov Mat .Obsc 16 ,1967.

[19] **M.Merigot ,**Régularité des solutions du problème de stockes dans un secteur plan,

Boll .Un .Mat .Italie (4) .6, 1972.
[20] **R.Temam,** On the theory and numerical analysis of the Navier stockes equations, lecture note #9 ,University of Maryland,1973.
[21] **MS.Said,**Study of the adjoint problem controlled by the system of lamé affected by weith in a polygon, Far East Journal of math and Sci , FJMS, Vol 17-1,avril 2005,pp.121-135.
[22] **MS.Said,B.Merouani,**Rôle des poids dans l'étude de quelques problèmes aux limites gouvernés par le système de Lamé dans un polygone , Roum.Sci.Techn-Méc. Appl.Bucaest 2002 (à paraitre).
[23] **S.Agmon ,**Lectures on elliptic boundary value problems , Van Naostrand Mathematical studies , L .2 , Princeton , 1965.
[24] **M.Dauge ,** Problème de Drichilet Pour le Laplacien , séminaire des EDP , Nantes ,1982.
[25] **MS.Said,B.Merouani,** Etude des problèmes adjoint du problème de Dirichlet pour l'équation de Laplace perturbé dans un polygone plan, Rev -Roum.Sci, Techn.Mec.Appl,**Tome 47** , N^0 16 p.57-78, Buccarest (2002).
[26] **A.C. King, J. Billingham and S.R. Otto ,** Differential Equations ,Linear, Nonlinear, Ordinary, Partial , Cambridge University Press ,2003.
[27] **MURRAY R.SPEIGEL,** FOURIER ANALYSIS , with applications to boundary value problems , Schaum's outline series , Mc Graw-Hill, 1974.
[28] **Yosida ,K ,** Functional Analysis .Springer-Verlag, Berlin, 1966.
[29] **TITCHMARSH .E.C.** , Introduction to the Theory of Fourier Integrals. Oxford univ. Press, 1937.
[30] **Walter Rudin,** Real and complex Analysis, International Student Edition**, McGRAW-HILL ,1970.**
[31] **Marie-Thérèse**, Distributions Espaces de Sobolev Applications, Lacroix-Sonrier, ellipses, édition marketing S.A , Paris ,1998.