

UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des Sciences Appliquées
Département de Génie Electrique



Mémoire

MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Sciences et technologies

Filière : Electrotechnique

Spécialité : machine électrique et électronique de puissance

Présenté par :

ABDESSAMAD Tadjine

AHMED Slammat

Thème:

Commande Robuste d'Ordre Non Entier d'une Machine Asynchrone à Double Alimentation

Soutenu publiquement

Le 08/06/2014

Devant le jury :

M^{elle}. ZIDANI Ghania

M^r. AMIEUR Toufik

M^{elle}. ZAHANI Sorya

M^r. RAZOUG Mohamed Redha

M^r. DJEDDI Abdelghani

MA (A) Président

MA (A) Encadreur

MA (A) Examineur

MA (A) Examineur

MA (A) Co-Encadreur

UKM Ouargla

UKM Ouargla

UKM Ouargla

UKM Ouargla

UKM Ouargla

Année universitaire 2013/2014

Dédicace

Je tiens à dédier ce modeste travail :

A ma très chère Mère et à mon cher Père, en témoignage et en gratitude de leurs dévouement, de leurs soutien permanent durant toutes mes années d'études, leurs sacrifices illimités, leurs réconfort moral, eux qui ont consenti tant d'effort pour mon éducation, mon instruction et pour me voir atteindre ce but, pour tout cela et pour ce qui ne peut être dit, mes affectations sans limite.

A ceux qui sont la source de mon inspiration et mon courage, à qui je dois de l'amour et de la reconnaissance.

A mes chers Frères et mes Sœurs et à toute ma famille.

A mes chers Amies,

A ceux qui ont cru à moi,

A ceux qui croient à moi,

Et à ceux qui croiront toujours en moi.

A vous tous un grand merci.

Slamat Ahmed

&

Tadjine Abdessamade

Remerciements

Nous remercions Allah, le tout puissant, le miséricordieux, de m'avoir appris ce que nous ignorais, de m'avoir donné la santé et tout dont nous avions besoin pour l'accomplissement de ce mémoire.

Egalement, nous remercions notre encadreur monsieur **AMIEUR Toufik** et notre Co-Encadreur monsieur **DJEDDI Abdelghani**, enseignants à l'Université KASDI Merbah- Ouargla pour leur prise en charge, ses remarques et orientation qui ont aidé à la concrétisation de ce travail.

Mon gratitude s'exprime pareillement pour **M^{elle}. ZIDANI Ghania**, également président des jurys. Egalement, nous remercions les autres membres du jury **M^{elle}. ZAHANI Sorya** et **M^r. RAZOUG Mohamed Redha** pour la pertinence de leurs remarques avisées, qui vont permettre l'amélioration de la qualité du manuscrit et l'essor vers de nouvelles perspectives.

Nous remercions également nos enseignants du département et tout le personnel administratif et toute personne qui a contribué de loin ou de près à la réussite de notre formation pendant le long de notre parcours universitaire.

Enfin, nous adressons nos plus sincères remerciements à tous nos proches et amis, qui nous ont toujours encouragés au cours de la réalisation de ce mémoire.

Sommaire

Introduction Générale	1
Chapitre I Description de la machine asynchrone à double alimentation	
I.1 Introduction	2
I.2 Etat de l'art de la Machine Asynchrone à Double Alimentation	2
I.3 Classification des machines à double alimentation	3
I.4 Domaine d'application de la MADA	5
I.4.1 Fonctionnement moteur dans les applications industrielles	5
I.4.1.1 Fonctionnement en moteur avec deux convertisseurs	6
I.4.1.2 Fonctionnement en moteur avec un seul convertisseur	7
I.4.2 Systèmes de génération éolienne à vitesse variable	7
I.4.3 Fonctionnement de la MADA en mode génératrice	8
I.5 Avantages et inconvénients de la MADA	9
I.5.1 Avantages de la MADA	9
I.5.2 Inconvénients de la MADA	10
I.6 Modélisation de la machine à double alimentation (MADA)	10
I.6.1 Changement de repère	10
I.6.1.1 La transformation de Park	10
I.6.1.2 Passage du système triphasé vers le système biphasé et inversement	11
I.6.2 Equations électriques et magnétiques dans le système d'axes (d, q)	13
I.7 Conclusion	16
Chapitre II Notion et analyse des systèmes d'ordre fractionnaire	
II.1 Introduction	17
II.2 Représentation d'un système d'ordre fractionnaire	17
II.2.1 Equation différentielle généralisée	17
II.2.2 Fonction de transfert fractionnaire	18
II.2.2.1 Fonction de transfert d'ordre fractionnaire explicite	18
II.2.2.2 Fonction de transfert d'ordre fractionnaire implicite	18
II.2.3 Représentation d'états système fractionnaires	19
II.2.3.1 Réalisation du modèle d'état fractionnaire	20
II.2.3.1.1 Cas des systèmes commensurables	20
II.2.3.1.2 Cas des systèmes d'ordre non entier généralisés	21
II.2.3.2 Passage du modèle d'état ou modèle fonction de transfert	23
II.3 Stabilité des systèmes fractionnaires	24
II.3.1 Construction du système d'état généralisé	26
II.4 Commandabilité et observabilité des systèmes fractionnaires	27
II.5 Analyse des dérivateurs (Intégrateurs) d'ordre fractionnaire	28
II.5.1 Transmittance d'un Dérivateur (Intégrateur) d'ordre fractionnaire	28
II.5.2 Réponse en fréquences d'un dérivateur non entier réel	29

II.6 Conclusion	30
------------------------	----

Chapitre III Commande Robuste d'Ordre Entier

III.1 Introduction	31
III.2 Principe de la contre-réaction	31
III.3 Caractérisation des systèmes de commande à contre-réaction	32
III.4 Analyse en performance des systèmes bouclés	35
III.5 Spécifications fréquentielles de performance : systèmes mono-variables	35
III.5.1 Rappels sur les relations de bouclage	35
III.5.2 Rejet de perturbation b	36
III.5.3 Réduction du bruit de mesure w	36
III.5.4 Suivi de référence r	37
III.6 Modelage des fonctions de sensibilité	38
III.7 Spécifications de performance en sensibilités mixtes	42
III.7.1 Spécifications fréquentielles de performance : systèmes multi variables	42
III.7.1.1 Règles d'association dans les schémas-blocs	42
III.7.1.2 Les fonctions de sensibilités en entrée et en sortie	43
III.7.1.3 Spécifications de performance	44
III.8 Conclusion	47

Chapitre IV Commande du système multi-variable par régulateur PID fractionnaire

IV.1 Introduction	48
IV.2 Commande d'un système multi-variable incertain par un PID fractionnaire	48
IV.2.1 Exemple 1	48
IV.3 Proposition d'une structure fractale basée sur les gains principaux	52
IV.3.1 Exemple 2	56
IV.4 Comparaison des résultats	60
IV.5 Conclusion	64
Conclusion Générale	65
Bibliographie	
Résumé	

Tableau des figures

Chapitre I

Fig.I.1 Représentation de la machine asynchrone à double alimentation	2
Fig.I.2 schéma de principe de cette catégorie de MADA	3
Fig I.3 schéma de principe de deux machines asynchrones à rotor bobiné	4
Fig.I.4 schéma de principe de ce type de machine	4
Fig I.5 Schéma d'un système utilisant une MADA en moteur alimenté par deux convertisseurs	6
Fig I.6 présente le schéma de principe de cette catégorie	7
Fig I.7 consiste à alimenter le rotor par un convertisseur et à lier le stator directement au réseau	8
Fig I.8 Schéma synoptique pour un fonctionnement en génératrice de la MADA	9
Fig I.9 Représentation de la MADA dans le repère de Park	11
Fig I.10 Passage du système triphasé au système biphasé	13

Chapitre II

Fig II.1 Région de stabilité des systèmes d'ordre fractionnaire avec $0 < \alpha < 1$	25
Fig II.2 Région de stabilités des systèmes d'ordre fractionnaire avec $1 < \alpha < 2$	26
Fig.II.3 Diagrammes de Bode d'un dérivateur (intégrateur) non entier	30

Chapitre III

Fig III.1 Schéma de principe d'un asservissement	31
Fig III.2 Schéma bloc avec perturbation et bruit	32
Fig III.3 Plan de Nyquis	40
Fig III.4 Fonction de pondération w_p	40
Fig III.5 Fonction de pondération	41
Fig III.6 Asservissement et fonctions de sensibilités	43
Fig III.7 Valeurs singulières typiques du gain de boucle	46

Chapitre IV

Fig IV.1 Robustesse en performances du système bouclé par les deux versions de PID	50
Fig IV.2 Robustesse de stabilité du système bouclé par les deux versions de PID	51
Fig IV.3 Dynamiques de poursuite et d'interaction du système bouclé par les deux PID	52
Fig IV.4 système augmenté	56
Fig.VI.5 Structure d'un contrôleur fractionnaire	60
Fig IV.6 Dynamique de poursuite du système corrigé	61
Fig.IV.7 dynamique de rejection de perturbation du système corrigé	62
Fig IV.8 dynamique de rejection de perturbation et de bruite du système corrigé	63

Introduction Générale

La commande de certains processus industriels issus d'une modélisation mathématique, pose de sérieux problèmes dans la mesure des processus toujours un écart entre le comportement du système physique réel, et le système modélisé.

La théorie de la commande robuste, regroupe plusieurs méthodes d'analyse et de conception de contrôleurs réduisant l'écart entre le système réel et le modèle identifié.

Parmi ces méthodes nous allons synthétiser un contrôleur robuste par la méthode des gains principaux fractionnaires pour des systèmes (Mono et Multi-variables), et vérifier la satisfaction des conditions de robustesse de la stabilité et des performances.

La problématique traitée dans ce mémoire est le suivant : Comment optimiser les paramètres d'un contrôleur fractionnaire obtenu via la minimisation d'un critère de sensibilité mixte en utilisant l'algorithme d'optimisation non linéaire de type Min-Max sous contraintes?

Pour répondre à cette problématique, notre mémoire est organisé comme suit :

Le premier chapitre sera destiné à la description de la machine asynchrone à double alimentation.

Dans le deuxième chapitre, on va étudier des notions avec l'analyse des systèmes d'ordre fractionnaire.

Le troisième chapitre sera consacré à l'étude de la Commande Robuste d'Ordre Entier (CRONE) des systèmes linéaire mon-variables et multi-variables.

Le quatrième chapitre présentera l'application de la commande robuste d'ordre entier pour la commande de la machine asynchrone à double alimentation (MADA).

On terminera par une conclusion générale et des perspectives.

I.1. Introduction :

L'objectif de ce chapitre est de mener une étude théorique sur la machine asynchrone à double alimentation (MADA) concernant son principe de fonctionnement, les différentes stratégies de commande. Nous avons présenté aussi sa modélisation dans le repère de Park avec ses deux alimentations, une alimente le stator avec un couplage direct au réseau et l'autre alimente le rotor à fréquences variables.

I.2. Etat de l'art de la Machine Asynchrone à Double Alimentation :

La première apparition de cette machine date de l'année 1899; il ne s'agit pas d'une nouvelle structure mais d'un nouveau mode d'alimentation [1]. La MADA est une machine asynchrone triphasée à rotor bobiné alimentée par ses deux armatures; elle présente un stator analogue à celui des machines triphasées classiques (asynchrone ou synchrone). Son rotor n'est plus une cage d'écureuil coulée dans les encoches d'un empilement de tôles, mais, il est constitué de trois bobinages connectés en étoile dont les extrémités sont reliées à des bagues conductrices sur lesquelles viennent frotter des balais lorsque la machine tourne [2]. La figure suivante (I.1) représente la structure de la machine asynchrone à double alimentation.

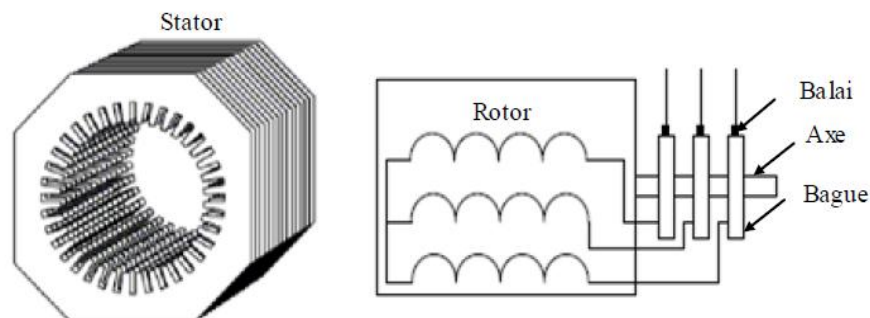


Fig I.1 Représentation de la machine asynchrone à double alimentation.

Dans cette machine, les enroulements statoriques sont alimentés par le réseau et les enroulements rotoriques sont alimentés à travers un convertisseur de fréquence, ou bien les deux enroulements sont alimentés par deux onduleurs autonomes en général.

La littérature atteste du grand intérêt accordé à la Machine Asynchrone Doublement Alimentée. En tant que génératrice, dans le domaine des énergies renouvelables, la MADA présente bien des avantages : le convertisseur lié à l'armature rotoriques pourra être, et sera, dimensionné au tiers de la puissance nominale du rotor, les pertes dans les semi conducteur sont faibles...etc. Pour l'application motrice, la MADA alimentée par deux convertisseurs présente pour certaines applications de grandes puissances de bonnes performances : fonctionnement en survitesse sans démagnétisation, bonnes performances à très basse vitesse pour un fonctionnement sans capteur de vitesse...etc.

I.3. Classification des machines à double alimentation :

En effet, la dénomination Machine à double alimentation concerne aussi bien le fonctionnement en mode générateur que le fonctionnement en mode moteur et peut s'adresser à une multitude de configurations. Nous pourrions trouver un recensement de certains travaux où les MADA sont classées suivant leur architecture. Dans chacune des classes, les auteurs rappellent les équations fondamentales, et les principales applications. On ne citera ici que les six grandes classes qu'ils distinguent [3].

- MADA simple dont les enroulements statoriques sont connectés à un réseau triphasé, le rotor est relié à son propre onduleur (Single Doubly Fed Induction Machine). La figure (I.2) présente un schéma de principe de cette catégorie de MADA.

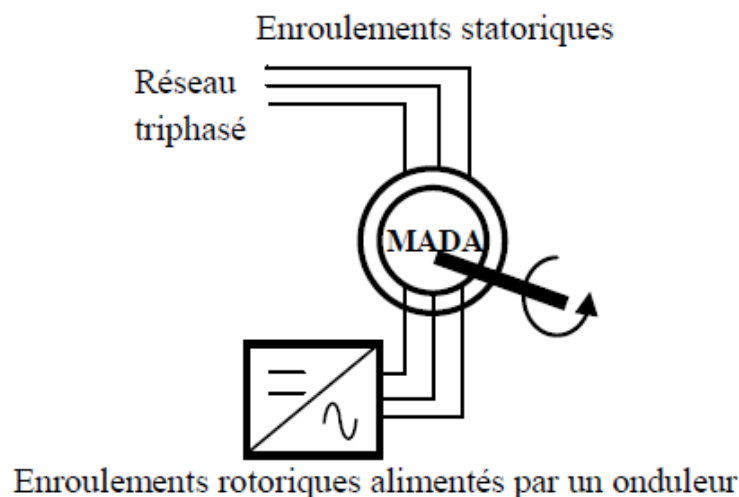


Fig I.2 schéma de principe de cette catégorie de MADA.

- MADA en "cascade" (Cascaded Doubly Fed Induction Machine), deux MADA dont les rotors sont couplés électriquement et mécaniquement, la figure (I.3) présente le schéma de principe de deux machines asynchrones à rotor bobiné permettant d'obtenir un système à double alimentation. Les enroulements statoriques sont reliés à deux sources de tensions triphasées.

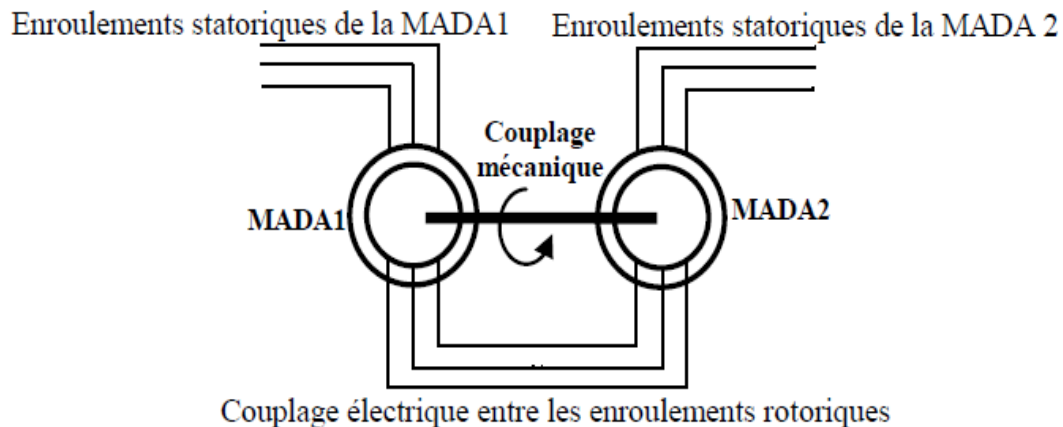


Fig I.3 schéma de principe de deux MADA en cascade

- MADA cascadée à un repère, il s'agit de deux machines à cage dont l'axe rotorique est identique. Les barres rotoriques sont croisées entre les deux machines. Une machine a son stator relié au réseau, l'autre à un onduleur. (Single Frame Cascaded Doubly Fed Induction Machine).
- MADA sans balai, machine très proche de la précédente sauf que cette fois ci, les deux enroulements statoriques appartiennent à un circuit magnétique commun. Le rotor est commun et à cage d'écureuil. (Brushless Doubly Fed Machine). Nous présentons sur la figure (I.4) un schéma de principe de ce type de machine.

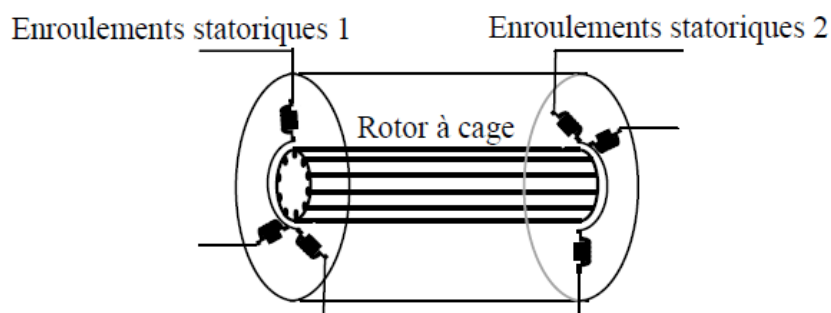


Fig.I.4 schéma de principe de ce type de machine

- MADA à réluctance, machine utilisant le principe d'un rotor de moteur à réluctance variable. Elle est nommée « Doubly Fed Reluctance Machine ».
- MADA "tandem" (Tandem Induction Machine), machine possédant un rotor à cage et deux enroulements statoriques. Un stator est fixe tandis que l'autre peut être tournant.

I.4. Domaine d'application de la MADA :

Actuellement la machine asynchrone à double alimentation occupe une large place dans les applications industrielles, grâce à ces nombreux avantages. En effet, la MADA est très utilisée en mode générateur dans les applications d'énergie renouvelable notamment dans les systèmes éoliens. De plus, le fonctionnement en générateur présente la MADA comme une alternative sérieuse aux machines synchrones classiques dans de nombreux systèmes de production d'énergie décentralisée telles que [4].

- Les générateurs des réseaux de bord des navires ou des avions ;
- Les centrales hydrauliques à débit et vitesse variable ;
- Les groupes électrogènes pour lesquels la réduction de vitesse pendant les périodes de faible consommation permet de réduire sensiblement la consommation de carburant.

La MADA peut être utilisée aussi dans d'autres applications importantes nécessitant un fort couple de démarrage, telles que [5].

- La métallurgie avec les enrouleuses et les dérouleuses de bobines.
- La traction, avec notamment des applications de type transport urbain ou propulsion maritime.
- Et enfin l'application de levage, les ascenseurs, les monte-charges etc... .

On note que les applications de la MADA en moteur sont relativement très limitées, parmi celles-ci on trouve principalement, la traction électrique et les systèmes de pompage [4].

I.4.1. Fonctionnement moteur dans les applications industrielles :

La machine asynchrone à double alimentation a été conçue pour fonctionner en moteur sur une grande plage de variation de vitesse comme première application. L'utilisation d'une MADA permet de varier la vitesse par action sur la fréquence d'alimentation des

enroulements rotoriques, ce dispositif sera donc économique quand on place les convertisseurs entre le rotor et le réseau en réduisant leurs tailles d'environ 70% [6].

La MADA peut être utilisée aussi dans d'autres applications importantes nécessitant un fort couple de démarrage, telles que [7].

*La métallurgie avec les enrouleuses et les dérouleuses de bobines.

*La traction, avec notamment des applications de type transport urbain ou propulsion maritime.

*Et enfin l'application de levage, les ascenseurs, les monte-charges etc...

On note que les applications de la MADA en moteur sont relativement très limitées, parmi celles-ci on trouve principalement, la traction électrique et les systèmes de pompage.

I.4.1.1.Fonctionnement en moteur avec deux convertisseurs :

Ce type d'alimentation peut prendre différentes formes :

- * Deux onduleurs alimentés par leurs propres redresseurs conformément à la figure.
- * Deux onduleurs alimentés en parallèle par un redresseur commun.
- * Deux cyclo-convertisseurs.

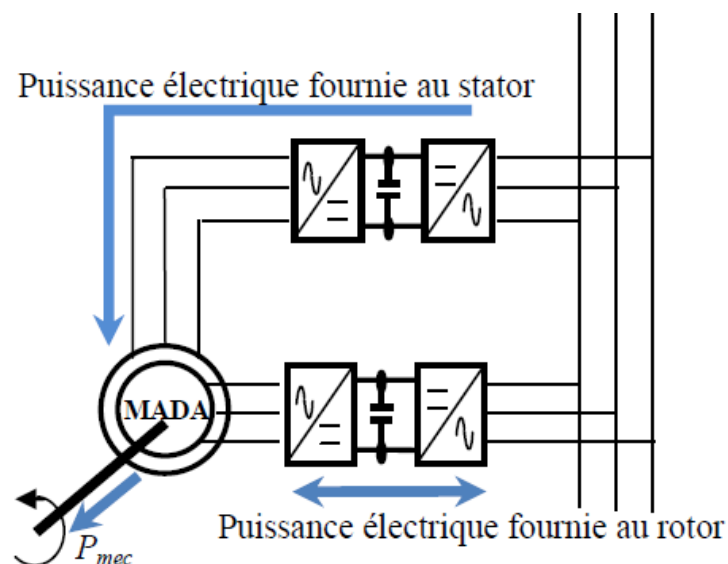
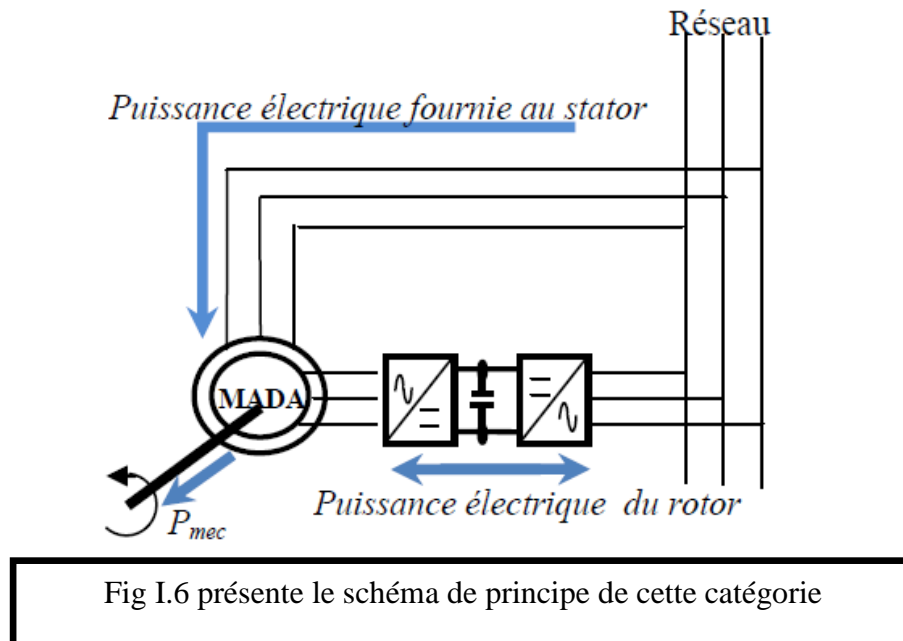


Fig I.5 schéma d'un système utilisant une MADA en moteur alimenté par deux convertisseurs

I.4.1.2. Fonctionnement en moteur avec un seul convertisseur :

Dans ce type de fonctionnement, le stator est relié au réseau à fréquence et tension constantes, tandis que le rotor est relié à son propre convertisseur qui peut être un cyclo-convertisseur ou une association redresseur-onduleur. Cette solution permet de réduire fortement la puissance du convertisseur. La figure (I.6) présente le schéma de principe de cette catégorie [8].



I.4.2. Systèmes de génération éolienne à vitesse variable :

Une éolienne à vitesse variable a pour rôle de convertir l'énergie cinétique du vent en énergie électrique avec un rendement optimisé. Par conséquent les différents éléments du système éolien sont conçus pour maximiser cette conversion énergétique et d'une manière générale une bonne adéquation entre les caractéristiques couple/vitesse de la turbine et de la génératrice électrique est indispensable.

Dans les systèmes éoliens de production de l'énergie électrique à vitesse variable, il existe une solution nouvelle et originale, utilisant la machine asynchrone à rotor bobiné. Cette solution est plus attractive pour toutes les applications où les variations de vitesse sont limitées autour de celle de synchronisme dont l'objectif d'avoir un convertisseur de puissance dimensionné à une fraction de 20-30 % de toute la puissance du système, et qui permet de minimiser les pertes et réduire le coût de celui-ci [8].

La configuration, largement répandue dans les systèmes éoliens à vitesse variable avec MADA, est représentée par la figure (I.7). Elle consiste à alimenter le rotor par un convertisseur et à lier le stator directement au réseau [4].

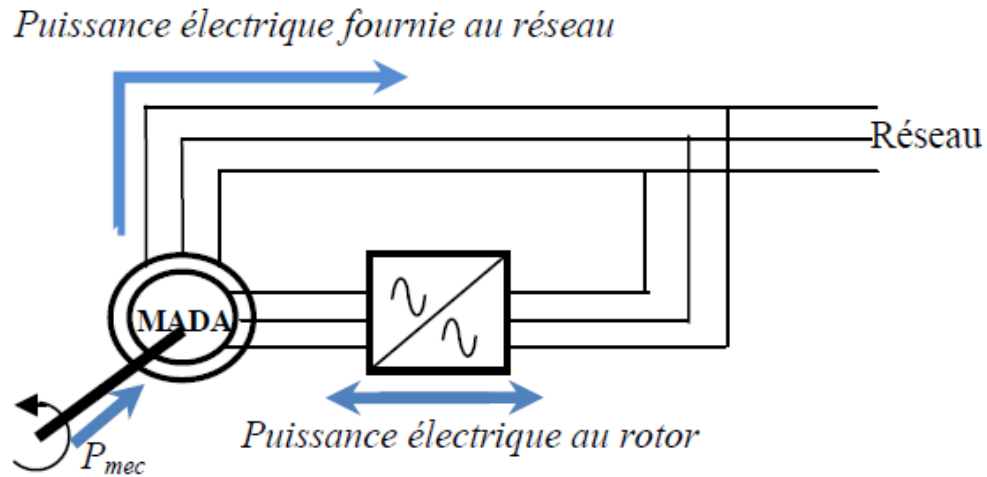


Fig I.7 consiste à alimenter le rotor par un convertisseur et à lier le stator directement au réseau.

I.5. Fonctionnement de la MADA en mode génératrice :

Avec le regain d'intérêt pour les énergies renouvelables, les systèmes éoliens à vitesse variable avec MADA connaissent un grand essor et un grand nombre de publications accompagne ce développement. La littérature est abondante dans ce domaine et les thèmes abordés sont très variés :

- Modélisation, zones limites de fonctionnement et stabilité de la MADA.
- Qualité de l'énergie fournie et qualité des courants et tensions notamment en présence des défauts au niveau du réseau.
- Stratégies de commande de la MADA avec ou sans capteur de vitesse et de position.
- Dimensionnement du convertisseur au rotor.
- Un stator relié au réseau ou sur charge indépendante.

Dans cet état, et sauf contre indication, nous nous limitons au stator connecté directement au réseau. Le schéma de principe pour une telle application est donné par la figure(I.8)

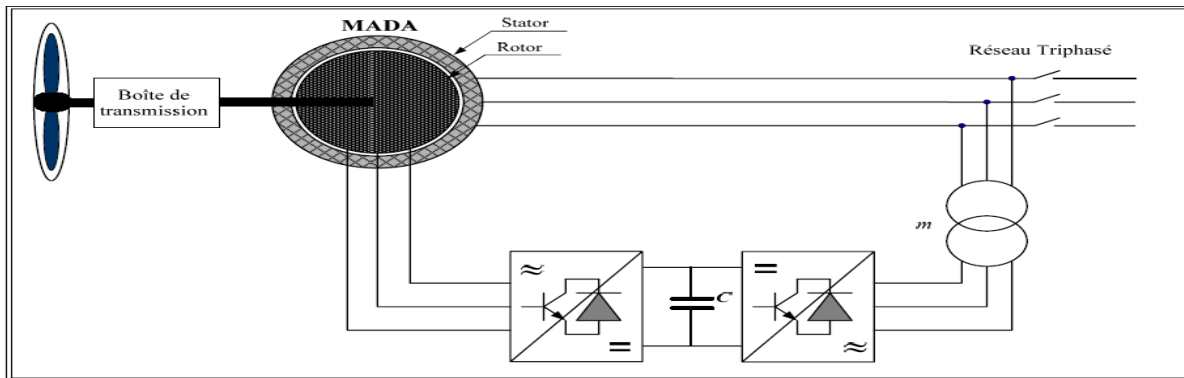


Fig I.8 Schéma synoptique pour un fonctionnement en génératrice de la MADA.

I.6. Avantages et inconvénients de la MADA :

Nous introduisons succinctement dans ce paragraphe les avantages et les quelques Inconvénients de la Machine Asynchrone à double alimentation lors de son fonctionnement à vitesse variable.

I.6.1. Avantages de la MADA :

Parmi des nombreux avantages, nous citons :

- * La mesure des courants au stator et rotor, contrairement à la machine à cage, donnant ainsi une plus grande flexibilité et précision au contrôle du flux et du couple électromagnétique.

- * La partage des fréquences entre le stator et le rotor : en effet, dans le cas d'une double alimentation, il est possible et recommandé de partager la fréquence de rotation du rotor entre les deux convertisseurs alimentant la machine, réduisant ainsi les pertes fer de la machine et augmentant son rendement. Une loi de répartition des fréquences est donnée dans [9] [10]. De plus, l'alimentation de la machine par deux onduleurs va nous permettre de travailler autour de l'arrêt à des fréquences relativement élevées évitant ainsi un déclassement des convertisseurs tout en maintenant un couple à l'arrêt. Cette même propriété nous assure un contrôle quasi insensible aux variations résistives de la machine.

- * La solution avec deux convertisseurs alimentant la machine nous permet d'assurer un partage du courant magnétisant entre les deux armatures ainsi que la puissance mécanique fournie à la charge.

* La MADA présente une puissance massique légèrement plus élevée que les autres machines à grandes puissances. Le lecteur pourra se référer à [10] pour des amples informations.

I.6.2. Inconvénients de la MADA :

* Machine plus volumineuse que celle à cage, généralement elle est plus longue à causes des balais.

* Nous utilisons un nombre des convertisseurs (deux redresseurs et deux onduleur sou un redresseur et deux onduleurs) plus importants que la machine à cage (un redresseur et un onduleur).

* Le coût total de la machine asservie est plus important que celui de la machine à cage. Nous soulignons que des études récentes, tenant compte de la chute du prix du silicium, donnent maintenant un petit avantage à la MADA.

I.7. Modélisation de la machine à double alimentation (MADA) :

I.7.1. Changement de repère :

I.7.1.1. La transformation de Park :

Afin de rechercher les lois de contrôle d'une machine à courant alternatif, nous pouvons la modéliser dans un repère (d, q) tournant dont l'orientation est à priori arbitraire. Ce modèle est obtenu après transformation virtuelle de la machine triphasée en une machine diphasée équivalente.

Cette transformation qui permet le passage du système triphasé au système biphasé s'effectue en faisant correspondre aux variables réelles leurs composantes homopolaires, directes et en quadrature, figure (I.9).

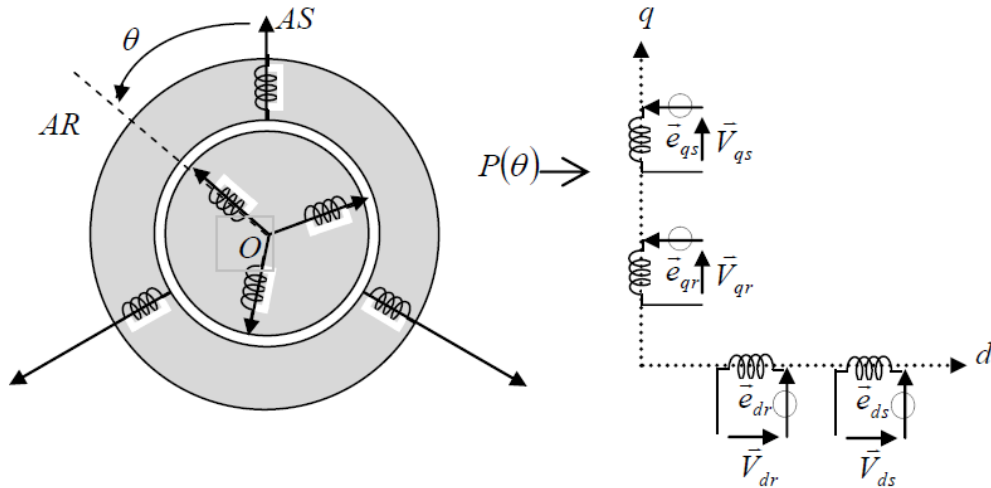


fig I.9 Représentation de la MADA dans le repère de Park

I.7.1.2. Passage du système triphasé vers le système biphasé et inversement :

La condition de passage du système triphasé au système biphasé et la création d'un champ

Électromagnétique tournant avec des forces magnétomotrices égales Prenons le vecteur X qui peut être une tension, courant, flux.

Admettons que les axes biphasés tournent avec la vitesse ω_c par rapport au système d'axes triphasé, projetons du vecteur X sur les axes triphasés (A, B, C) et sur les axes biphasés (U, V), comme dans la figure (I-10).

$$(I.11)$$

X_A, X_B, X_C , les projections du vecteur X sur les axes triphasés (statoriques)

X_{SU}, X_{SV} , les projections du vecteur X sur les axes biphasés

$$\theta_c = \int_0^t \omega_c dt : \text{L'angle entre les systèmes d'axes biphasé et triphasé}$$

à partir de la figure (I-10), les projections sur les axes donne

$$\begin{cases} X_{SU} = \frac{2}{3} \left[X_A \cos \theta_c + X_B \cos(\theta_c - \frac{2\pi}{3}) + X_C \cos(\theta_c - \frac{4\pi}{3}) \right] \\ X_{SV} = -\frac{2}{3} \left[X_A \sin \theta_c + X_B \sin(\theta_c - \frac{2\pi}{3}) + X_C \sin(\theta_c - \frac{4\pi}{3}) \right] \end{cases} \quad (I.1)$$

Il faut ajouter à (I-1) l'expression de la composante de la composante homopolaire X_{SO}

$$X_{SO} = \frac{1}{3}(X_A + X_B + X_C) \quad (I.2)$$

Les formules (I-1) et (I-2) sont utilisés pour le passage du système triphasé au système biphasé pour le stator, sous forme matricielle on peut écrire :

$$\begin{bmatrix} X_{SU} \\ X_{SV} \\ X_{SO} \end{bmatrix} = A_s(\theta_C) \begin{bmatrix} X_A \\ X_B \\ X_C \end{bmatrix} \quad (I.3)$$

La matrice $A_s(\theta_C)$ appelée Matrice de "Park"

$$A_s(\theta_C) = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos \theta_C & \cos\left(\theta_C - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_C - \frac{4\pi}{3}\right) \\ -\sin \theta_C & -\sin\left(\theta_C - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta_C - \frac{4\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (I.4)$$

La matrice $A_s^{-1}(\theta_C)$ est donnée par :

$$A_s^{-1}(\theta_C) = \begin{bmatrix} \cos \theta_C & -\sin \theta_C & 1 \\ \cos\left(\theta_C - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta_C - \frac{2\pi}{3}\right) & 1 \\ \cos\left(\theta_C - \frac{4\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta_C - \frac{4\pi}{3}\right) & 1 \end{bmatrix} \quad (I.5)$$

D'où

$$\begin{bmatrix} X_A \\ X_B \\ X_C \end{bmatrix} = A_s^{-1}(\theta_C) \begin{bmatrix} X_{SU} \\ X_{SV} \\ X_{SO} \end{bmatrix} \quad (I.6)$$

De même pour la relation qui relie les composantes rotorique biphasé (X_{rU} , X_{rV}) et la composante homopolaire rotorique X_{rO} , avec les composantes triphasé rotorique (X_a , X_b , X_c) est :

$$\begin{bmatrix} X_{rU} \\ X_{rV} \\ X_{rO} \end{bmatrix} = A_r(\theta_r) \begin{bmatrix} X_a \\ X_b \\ X_c \end{bmatrix} \tag{I.7}$$

Telle que :

$$A_r(\theta_r) = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos \theta_r & \cos\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_r - \frac{4\pi}{3}\right) \\ -\sin \theta_r & -\sin\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta_r - \frac{4\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{I.8}$$

Avec : $\theta_r = \theta_c - \theta$ (I.9)

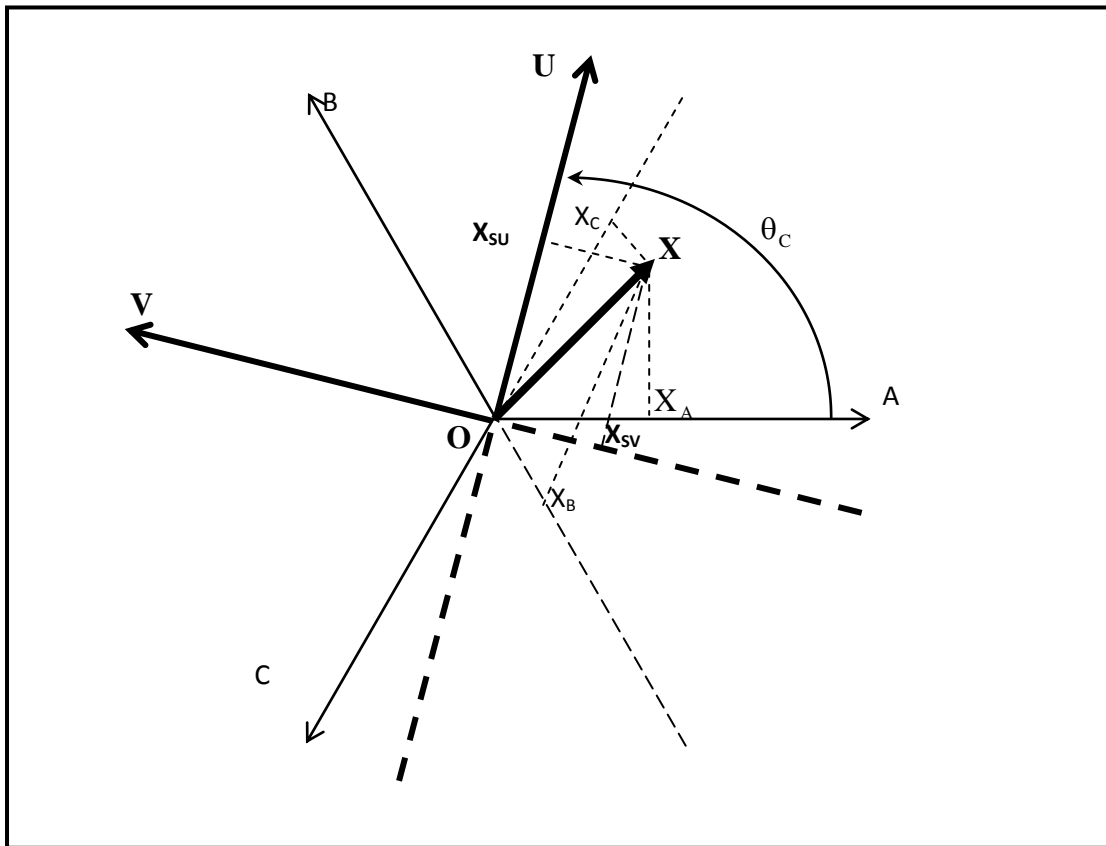


Fig I.10 Passage du système triphasé au système biphasé

I.7.2. Equations électriques et magnétiques dans le système d'axes (d,q) :

La dynamique du système à commander est décrite par les équations différentielles suivantes :

Les équations des composantes du vecteur de tension statorique:

$$V_{ds} = R_{ds} \cdot I_{ds} + \frac{d}{dt} \Phi_{ds} - \omega_s \cdot \Phi_{qs} \quad (\text{I.10})$$

$$V_{qs} = R_s \cdot I_{qs} + \frac{d}{dt} \Phi_{qs} + \omega_s \cdot \Phi_{ds} \quad (\text{I.11})$$

Les équations des composantes du vecteur tension rotorique :

$$V_{dr} = R_r \cdot I_{dr} + \frac{d}{dt} \Phi_{dr} - \omega_r \cdot \Phi_{qr} \quad (\text{I.12})$$

$$V_{qr} = R_r \cdot I_{qr} + \frac{d\Phi_{qr}}{dt} + \omega_r \cdot \Phi_{dr} \quad (\text{I.13})$$

Les équations des composantes du vecteur flux statorique :

$$\Phi_{ds} = L_s \cdot I_{ds} + M \cdot I_{dr} \quad (\text{I.14})$$

$$\Phi_{qs} = L_s \cdot I_{qs} + M \cdot I_{qr} \quad (\text{I.15})$$

Les équations des composantes du vecteur flux rotorique :

$$\Phi_{dr} = L_r \cdot I_{dr} + M \cdot I_{ds} \quad (\text{I.16})$$

$$\Phi_{qr} = L_r \cdot I_{qr} + M \cdot I_{qs} \quad (\text{I.17})$$

L'équation du couple électromagnétique :

$$C_{em} = p \cdot \frac{M}{L_s} (\Phi_{ds} \cdot I_{qr} - \Phi_{qs} \cdot I_{dr}) \quad (I.18)$$

L'équation mécanique :

$$C_{em} = C_r + J \frac{d\Omega}{dt} + f \cdot \Omega \quad (I.19)$$

Où :

V_{ds}, V_{qs} : Vecteur tension statorique selon l'axe 'd' et 'q',

V_{dr}, V_{qr} : Vecteur tension rotorique selon l'axe 'd' et 'q'.

I_{ds}, I_{qs} : Vecteur courant statorique selon l'axe 'd' et 'q'.

I_{dr}, I_{qr} : Vecteur courant rotorique selon l'axe 'd' et 'q',

Φ_{ds}, Φ_{qs} : Vecteur flux statorique selon l'axe 'd' et 'q',

Φ_{dr}, Φ_{qr} : Vecteur flux rotorique selon l'axe 'd' et 'q',

R_s, R_r : L'enroulement statorique et rotorique,

L_s, L_r : s les inductances cycliques du stator et du rotor.

M : est l'inductance mutuelle cyclique.

p : est le nombre de paires de pôles de la machine.

C_r : est le couple résistant.

f : est le coefficient du frottement visqueux.

J : est le moment d'inertie.

Représentation d'état du système :

Avant de passer à l'étape d'optimisation pour trouver le contrôleur robuste, il est nécessaire de mettre le système à commander sous forme d'état, la forme générale d'un système décrit en espace d'état est comme indique l'équation (I.20)

$$\begin{cases} \dot{x} = A \cdot x + B \cdot u \\ y = C \cdot x + D \cdot u \end{cases} \quad (\text{I.20})$$

I.8.Conclusion :

Dans ce chapitre, vous avons présenté une brève étude sur la machine asynchrone à double alimentation (MADA), sa structure, son principe de fonctionnement et les différentes stratégies de sa commande ainsi que ses domaines d'application. Et aussi présenté le modèle de la machine dans le repère (a,b,c) auquel et appliqué la transformation de Park pour le rendre linéaire et plus adapté à la commande.

II.1.Introduction :

Dans ce chapitre, nous allons présenter les formes usuelles de représentation et quelques méthodes couramment utilisées pour l'analyse et la simulation d'une classe de systèmes d'ordre fractionnaire. Une analyse comparative des performances caractéristiques de ce type de systèmes avec celles des systèmes d'ordre entier est présentée.

II.2.Représentation d'un système d'ordre fractionnaire :

Les systèmes fractionnaires sont en général représentés par des équations différentielles non entières, mais d'autres descriptions peuvent être utilisées, telle que la représentation diffusive. Dans notre cas nous considérons un système d'ordre non entier, linéaire à temps continu causal et invariant dans le temps décrit par l'approche classique, et représenté comme dans le cas entier par trois modèles [11]:

- Equation différentielle généralisée.
- Fonction de transfert fractionnaire.
- Représentation d'état fractionnaire.

II.2.1.Equation différentielle généralisée :

De manière générale, un système d'ordre non entier mono -variables, linéaire à temps invariant est décrit par une équation différentielle généralisée de la forme :

$$y(t) + \sum_{i=1}^n a_i D^{a_i} y(t) = \sum_{j=1}^m b_j D^{B_j} u(t) \quad (\text{II. 1})$$

Où $u(t) \in R$ et $y(t) \in R$ désignent respectivement l'entrée et le sortir du système, $a_i, B_j \in R$,

Lorsque les ordres de dérivation a_i, B_j sont tous multiples d'un même nombre réel à tel que $a_i = i a, B_j = j a$, le système non entier est dit d'ordre commensurable.

II.2.2.Fonction de transfert fractionnaire :

II.2.2.1.Fonction de transfert d'ordre fractionnaire explicite :

Dans le domaine temporel, un système est dit d'ordre fractionnaire explicite lorsqu'il est fondé sur une représentation par une équation différentielle de la forme [12].

$$\sum_{l=0}^L a_l D^{n_{a_l}} y(t) = \sum_{m=0}^M b_m D^{n_{b_m}} u(t) \quad , \quad \{a_l, n_{a_l}, b_m, n_{b_m}\} \in \mathbb{R} \quad , \quad n_{a_L} \geq n_{b_M} \quad (\text{II.2})$$

$u(t)$ et $y(t)$ désignent respectivement l'entrée et la sortie du système.

La fonction de transfert du système (II.2) est donnée par un rapport de deux polynômes à puissances fractionnaires.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^{n_{b_0}} + \dots + b_M s^{n_{b_M}}}{a_0 s^{n_{a_0}} + \dots + a_L s^{n_{a_L}}} \quad (\text{II.3})$$

Dans le cas où tous les exposants de s sont multiples d'une certaine valeur réelle q (ordres commensurables), la fonction de transfert (II.3) peut être réécrite sous la forme :

$$G(s) = \frac{\sum_{m=0}^M (b_m s^{mq})}{\sum_{l=0}^L (a_l s^{lq})} \quad (\text{II.4})$$

où q est un nombre réel, M et L sont des entiers tel que $M \leq L$.

Un système d'ordre fractionnaire décrit par une fonction de transfert de la forme (II.4) est appelé **système commensurable** [12].

Bien que n'importe quelle valeur réelle q suffise pour que le système soit commensurable, la valeur de q est généralement prise comme étant un nombre rationnel $1/Q$ avec $Q \in \mathbb{N}$ soit :

$$G(s) = \frac{\sum_{m=0}^M (b_m s^{\frac{m}{Q}})}{\sum_{l=0}^L (a_l s^{\frac{l}{Q}})} \quad (\text{II.5})$$

II.2.2.2.Fonction de transfert d'ordre fractionnaire implicite :

La dérivée d'ordre fractionnaire d'une fonction $g(t)$ est dite implicite lorsqu'elle ne porte pas directement sur $g(t)$ mais sur le produit de $g(t)$ par une exponentielle croissante de constante du temps τ [13].

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_{\text{imp}}^{\alpha} g(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^{\alpha} (g(t)e^{t/\tau}) \quad (\text{II. 6})$$

La relation (II.6) définit ce que nous appelons la dérivée implicite d'ordre α de $g(t)$. La transformée de Laplace de cette équation donne [14].

$$G(s) = \frac{1}{(1 + \tau s)^{\alpha}} \quad \text{avec } \tau \in R^+ \text{ et } R(\alpha) > 0 \quad (\text{II. 7})$$

Dans le cas général, un système est dit à dérivée d'ordre fractionnaire implicite lorsqu'il est fondé sur le produit de pôles et de zéros d'ordre fractionnaire, soit :

$$G(s) = \prod_{i=1}^N (1 + \tau_i s)^{\alpha_i} \quad , \quad \text{avec } \tau_i \in R^+ \text{ et } \alpha_i (i = 1, \dots, N) \in \mathbb{R} \quad (\text{II. 8})$$

II.2.3.Représentation d'états système fractionnaires :

Le modèle d'état d'un système d'ordre fractionnaire est défini comme dans le cas entier par deux équations :

- Une équation d'état : dans laquelle chaque variable d'état $x_i(t)$ est dérivée à un ordre non entier α_i . Dans ce cas parle de la représentation d'état généralisée. Dans le cas des systèmes commensurable ; tous les états $x_i(t)$ sont dérivé à un même ordre non entier α .
- Une équation de sortie : qui est une combinaison linéaire des états, comme dans le cas entier.

Il en résulte un modèle d'état, écrit sous la forme compacte suivante :

$$\begin{cases} D^{\alpha}x = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (\text{II. 9})$$

Ou :

u : est le vecteur des entrées de dimension $n_u \times 1$;

x : est le vecteur d'état d'ordre fractionnaire de dimension $n_x \times 1$;

y : est le vecteur des sorties de dimension $n_y \times 1$;

α : est l'ordre de dérivation tel que $0 < \alpha < 1$;

A, B, C et D sont tous des matrices ou des vecteurs à éléments constants et de dimension appropriée.

Remarque 1: Comme pour les représentations d'état d'ordre entier, les représentations d'état d'ordre fractionnaire ne sont pas uniques. Les systèmes d'ordre fractionnaire réel commensurable, permettent aussi une représentation dans l'espace d'état [15].

$$\begin{cases} D^{(\frac{1}{Q})}x = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (\text{II. 10})$$

II.2.3.1. Réalisation du modèle d'état fractionnaire :

II.2.3.1.1. Cas des systèmes commensurables :

Etant donné un système non entier mono variable linéaire invariant représenté par sa fonction de transfert $G(s)$, donnée sous forme :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m p^{m\alpha} + b_{m-1} p^{(m-1)\alpha} + \dots + b_1 s^\alpha + b_0}{p^{n\alpha} + a_{n-1} p^{(m-1)\alpha} + \dots + a_1 s^\alpha + a_0} \quad (\text{II. 11})$$

Pour calculer le modèle d'état qui lui correspond, on procède en trois étapes :

Étapes 1 : grâce au changement de variable s^α , le modèle non entier $G(s)$ peut être remplacé par un modèle entier $G(s)$, qui s'écrit sous la forme :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{(m-1)} + \dots + b_1 p + b_0}{p^n + a_{n-1} p^{(m-1)} + \dots + a_1 p + a_0} \quad (\text{II. 12})$$

Étapes 2 : calculer le modèle d'état entier correspond à $G(s)$ on peut obtenir toutes les formes particulières utilisées dans la théorie des systèmes d'ordre entier (forme commandable, observable, jordan). On obtient, le modèle de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (\text{II. 13})$$

Étapes 3 : remplace dans le modèle d'état (II.13) la dérivée entière d'ordre un par la dérivée non entière d'ordre α , ainsi le modèle d'état correspondant à la forme de transfert (II.7) obtenu est de la forme [16].

$$\begin{cases} D^\alpha x = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (\text{II. 14})$$

La méthode reste applicable dans le cas du système commensurable multi-variables.

II2.3.1.2.Cas des systèmes d'ordre non entier généralisés :

- **Cas ou G(s) a un numérateur constant :**

La fonction de transfert G(s) s'écrit sous la forme :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Z(s)}{U(s)} * \frac{Y(s)}{Z(s)} = \frac{1}{s^{a_n} + a_{n-1}s^{a_n-1} + \dots + a_1s^{a_n} + a_0} * b_0 \quad (II. 15)$$

On suppose, sans perte de généralité, que : $a_n > a_{n-1} > \dots > a_2 > a_1$.

L'équation différentielle associée à $\frac{z(s)}{u(s)}$ est donnée par (la variable t est omise pour ne pas surcharger les expressions).

$$D^{a_n}Z = -a_{n-1}D^{a_n-1}Z - \dots - a_1D^{a_1}Z + u \quad (II. 16)$$

Faisons le changement de variable pour obtenir le vecteur d'état :

$$\begin{cases} x_1 = z \\ x_2 = D^{a_1}x_1 = D^{a_1}z \\ x_3 = D^{a_2-a_1}x_2 = D^{a_2-a_1}(D^{a_1}z) = D^{a_2}z \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n = D^{a_{n-1}-a_{n-2}}x_{n-1} = D^{a_{n-1}}z \end{cases} \quad (II. 17)$$

$$D^{(\omega)}(x) = \begin{cases} D^{a_1}x_1 = x_2 \\ D^{a_2-a_1}x_2 = x_3 \\ D^{a_3-a_2}x_3 = x_4 \\ \vdots \\ \vdots \\ D^{a_n-a_{n-1}}x_n = D^{a_n-a_{n-1}}(D^{a_{n-1}-a_{n-2}}) = \dots D^{a_n}z \end{cases} \quad (II. 18)$$

La dernière composant du dérivé du vecteur d'état $D^{(\omega)}(x)$ ($D^{(a_n)}(x)$) s'écrit en fonction d'autre dérivé de z (t) et s'exprime comme suit :

$$D^{a_n-a_{n-1}}x_n = -a_0x_1 - a_1x_2 - \dots - a_{n-2}x_{n-1} - a_{n-1} - x_n + u \quad (II. 19)$$

La modèle d'état correspondant au modèle fonction de transfert est finalement donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} D^{(a)}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [b_0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0] x \end{array} \right. \quad (II. 20)$$

Avec :

$$x = [x_1, x_2 \dots \dots x_n]^t \quad (II. 21)$$

$$D^{(a)}(x) = [D^{a_1}x_1, D^{(a_2-a_1)}x_2 \dots \dots D^{(a_n-a_{n-1})}x_n]^t \quad (II. 22)$$

De la même manière, on peut obtenir une forme similaire à la forme canonique observable des systèmes entiers.

• **Cas ou le numérateur de G(s) a un polynôme :**

La fonction de transfert G(s) supposée propre s'écrit dans ce cas sous la forme :

$$G(s) = \frac{b_m s^{\beta_m} + b_{m-1} s^{(\beta_{m-1})} + \dots + b_1 s^{\beta_1} + b_0}{s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_1 s^{\alpha_1} + a_0} \quad (II. 23)$$

Supposant que : $a_n > a_{n-1} > \dots > a_2 > a_1$ et $\beta_m > \beta_{m-1} > \dots > \beta_2 > \beta_1$

La méthode générale permettant de calculer la représentation d'état de la fonction de transfert G(s) (II.23) est présentée dans ce que ce qui suit :

Soit le vecteur constitue de la concaténation des ordres non entiers a_i et β_i de G(s) :

$$\tilde{a} = [\tilde{a}_{n+m} \tilde{a}_{n+m-1} \tilde{a}_{n+m-2} \dots \tilde{a}_3 \tilde{a}_2 \tilde{a}_1] \quad (II. 24)$$

Tel que : $\tilde{a}_{n+m} > \tilde{a}_{n+m-1} > \tilde{a}_{n+m-2} \dots \tilde{a}_3 > \tilde{a}_2 > \tilde{a}_1$

L'ordre a_i étant quelconque, par analogie à la section précédente pour le choix des variables d'état, nous obtenant le modèle d'état suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} D^{(\tilde{a})}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ -\tilde{a}_1 & -\tilde{a}_2 & -\tilde{a}_3 & \dots & -\tilde{a}_{n+m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [\tilde{c}_1 \quad \tilde{c}_2 \quad \tilde{c}_3 \quad \dots \quad \tilde{c}_{n+m-1} \quad \tilde{c}_{n+m}] x \end{array} \right. \quad (II. 25)$$

Avec :
$$D^{(\tilde{a})}(x) = D^{\tilde{a}_1}x_1, D^{(\tilde{a}_2-\tilde{a}_1)}x_2, \dots \dots D^{(\tilde{a}_{n+m}-\tilde{a}_{n+m-1})}x_{n+m} \tag{II. 26}$$

La fonction de transfert $G(s)$ contient $(m + 1)$ termes au numérateur et $(n + 1)$ termes au dénominateur. En tenant compte que le nombre de variable d'état du système non entier est égal à la somme de la dimension du polynôme du numérateur et celle du polynôme dénominateur, nous obtenons donc un vecteur d'état augmenté de dimension $(n + m)$, contrairement aux systèmes entiers, où le nombre de variable de leur modèle d'état est fixé par la dimension du polynôme du dénominateur de sa fonction de transfert.

Les éléments de la matrice A non nuls sont les coefficients correspondant à l'ordre du dénominateur et les éléments non nuls du vecteur C sont ceux du numérateur de $G(s)$.

Il suffit donc de la sorte à faire ressortir (m) termes pour lesquels les ordres non entiers correspondent à ceux des numérateurs de $G(s)$ et n termes pour lesquels les ordres non entiers correspondent à ceux du dénominateur de $G(s)$. La procédure de sélection des éléments \tilde{a}_i et \tilde{c}_i s'effectue comme suite :

$$\begin{cases} \tilde{a}_{n+m} = a_n \\ \text{si } \tilde{a}_i = \tilde{\beta}_j & \text{alors } \tilde{c}_{i+1} = b_j & \text{et } \tilde{a}_{n+m-i} = 0 & i = 1, \dots, n + m - 1 \\ \text{si } \tilde{a}_i = \tilde{a}_j & \text{alors } \tilde{c}_{i+1} = 0 & \text{et } \tilde{a}_{n+m-i} = a_{n-j} & i = 1, \dots, n + m - 1 \end{cases} \tag{II. 27}$$

II.2.3.2. Passage du modèle d'état ou modèle fonction de transfert :

Le passage du modèle d'état fractionnaire ou modèle fonction de transfert se fait de façon analogue au cas entier en utilisant la formule suivante :

$$G(s) = (C(s^{(a)}I - A)^{-1}B + D) \tag{II. 28}$$

Avec :

$$s^{(a)}I_n = \text{diag}[s^{a_1}, s^{a_2} \dots \dots s^{a_n}] \tag{II. 29}$$

Dans le cas particulier d'une forme canonique commandable, la fonction de transfert obtenue s'écrit sous la forme :

$$G(s) = \frac{c_1S^{\beta_1} + c_2S^{\beta_2} + \dots + c_nS^{\beta_n}}{a_1s^{\tilde{a}_1} + a_2s^{\tilde{a}_2} + \dots + a_n s^{\tilde{a}_n} + a_n s^{\tilde{a}_{n+1}}} \tag{II. 30}$$

Avec :

$$\beta_1 = 0, \beta_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_j \quad \text{pour } i = 2 \dots n \quad (\text{II. 31})$$

Et

$$\tilde{a}_1 = 0 \quad \tilde{a}_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_j \quad \text{pour } i = 2 \dots n \quad (\text{II. 32})$$

Comme dans les cas entier, les éléments des matrices C et A constituent respectivement les coefficients du numérateur et dénominateur de la fonction de transfert correspondante.

Les ordres de dérivation du numérateur et dénominateur sont des combinaisons linéaires des ordres de dérivation des vecteurs d'état.

$$G(s) = \frac{c_1 + c_2 S^{\beta_2} + \dots + c_n S^{\beta_n}}{a_1 + a_2 s^{\tilde{a}_2} + \dots + a_n s^{\tilde{a}_n} + a_n s^{\tilde{a}_{n+1}}} \quad (\text{II. 33})$$

L'équation caractéristique du système, correspond comme dans le cas entier ou polynôme du dénominateur de la fonction de transfert et elle est donnée par :

$$s^{(a)}I_n - A = 0 \quad (\text{II. 34})$$

II.3.Stabilité des systèmes fractionnaires :

Dans la théorie de la stabilité des systèmes linéaires à temps invariant et à dérivée d'ordre entier, nous savons bien qu'un système est stable si les racines du polynôme caractéristique sont à parties réelles strictement négatives, donc situées dans la moitié gauche du plan complexe.

Par ailleurs, dans le cas des systèmes fractionnaires linéaires à temps invariant, la définition de la stabilité est différente de celle des systèmes d'ordre entier. En effet, les systèmes fractionnaires ou d'ordre non entier peuvent bien avoir des racines dans la moitié droite du plan complexe et être stables [17].

La stabilité des systèmes fractionnaire commensurables a été étudiée dans [18] [19], ou des conditions nécessaires et suffisantes ont été obtenues donnant lieu ou théorème suivante :

Théorème [18] [20] considérons le système linéaire fractionnaire d'ordre commensurable suivan :

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad 0 < \alpha < 2 \quad (\text{II. 35})$$

$x(t) \in IR^n, u(t) \in IR^m$ Soit $\sigma(A) = \{\lambda_1 \dots \lambda_n\}$ le système avec comme entrée $u(t) = 0$ est stable

si et seulement si

$$|\text{Arg}(\lambda_i)| > \frac{\alpha\pi}{2} \quad \lambda_i \in \sigma(A), \quad i = 1 \dots n \quad (\text{II.36})$$

D'après ce théorème de la stabilité, il en découle les différentes régions de stabilité illustrées par les figures (II.1) et (II.2).

Si $1 < \sigma < 2$ alors la relation (II.36) décrit une région convexe du plan complexe comme le montre la figure (II.2)

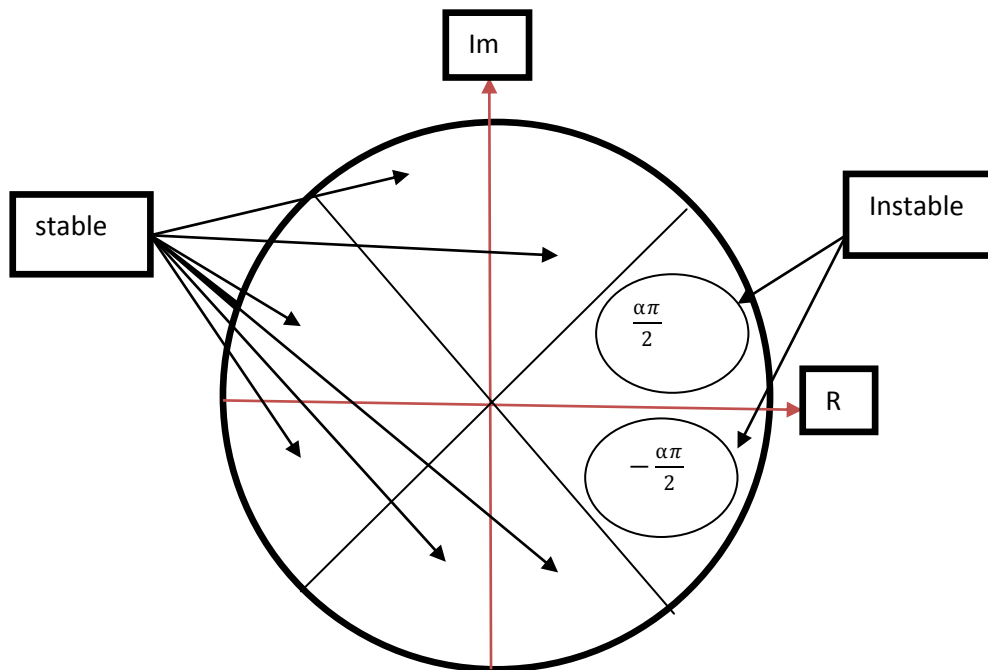


Fig II.1 Région de stabilité des systèmes d'ordre fractionnaire avec $0 < \alpha < 1$

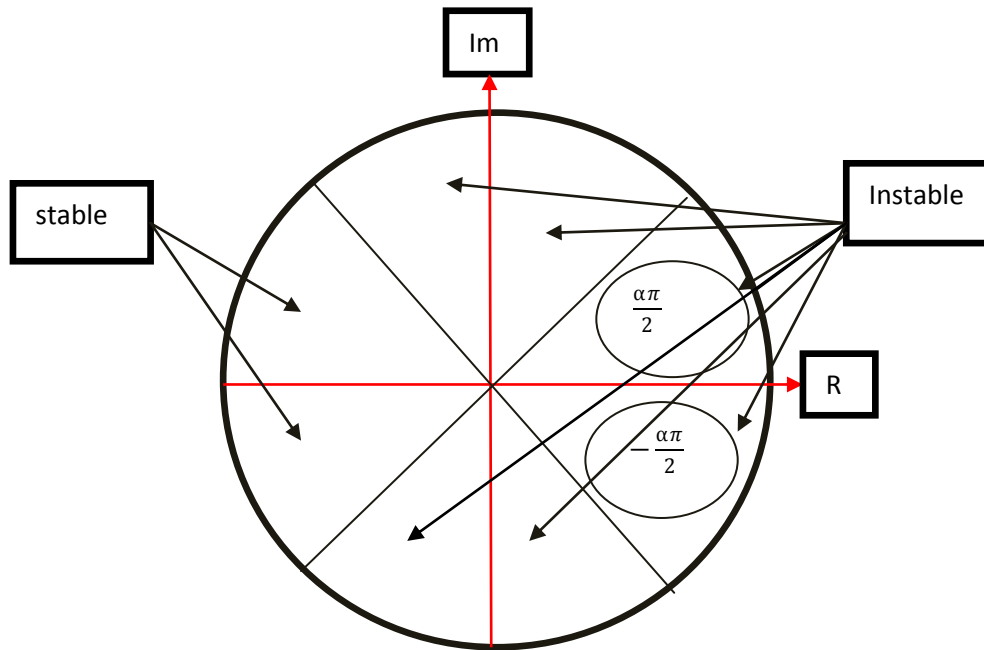


Fig II.2 Région de stabilités des systèmes d'ordre fractionnaire avec $1 < \alpha < 2$

II.3.1. Construction du système d'état généralisé :

Nous pouvons écrire le système d'état reliant le vecteur d'état $x(t)$ à N composantes et le vecteur d'entrée $u(t)$ à M composantes sous la forme :

$$\begin{bmatrix} x_1^{(\alpha_1 - \alpha_0)}(t) \\ x_2^{(\alpha_2 - \alpha_1)}(t) \\ \vdots \\ x_{N-1}^{(\alpha_{N-1} - \alpha_{N-2})}(t) \\ x_N^{(\alpha_N - \alpha_{N-1})}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_N} & -\frac{a_1}{a_N} & \dots & \dots & -\frac{a_{N-1}}{a_N} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{N-1}(t) \\ x_N(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 \\ \frac{b_1}{a_N} \dots \frac{b_M}{a_N} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u^{(\beta_1)}(t) \\ \vdots \\ u^{(\beta_M)}(t) \end{bmatrix} \tag{II.37}$$

Ainsi, le système (II.37) peut s'écrire plus généralement sous la forme :

$$\begin{cases} \bar{x}^{(\bar{n})}(t) = A \cdot \bar{x}(t) + B \cdot \bar{u}(t) \\ \bar{y}(t) = C \cdot \bar{x}(t) + D \cdot \bar{u}(t) \end{cases} \tag{II.38}$$

Ainsi, comme dans le cas entier, une représentation d'état d'ordre non entier comporte deux équations :

- * Une équation d'état généralisée dans laquelle le vecteur d'état ne fait plus l'objet d'une dérivation unitaire mais d'une dérivation d'ordre non entier réel.

- * Une équation d'observation.

Les vecteurs intervenant dans l'équation (II.23) sont :

* Le vecteur d'état : $\bar{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_N(t)]^T$ (II.39)

* Le vecteur d'entrée (ou de commande) :

$$\bar{u}(t) = [u^{(\beta_1)}(t) \ u^{(\beta_2)}(t) \ \dots \ u^{(\beta_M)}(t)]^T \quad (II.38)$$

* Le vecteur de sortie (ou d'observation) $\bar{y}(t) = [y_1(t) \ y_2(t) \ \dots \ y_p(t)]^T$ (II.39)

On voit également apparaître l'opérateur vectoriel $(\bar{n}) = (\alpha_1 - \alpha_0, \dots, \alpha_N - \alpha_{N-1})$ appliqué au vecteur d'état. Ainsi, ce vecteur n'est pas forcément composé de termes identiques. Néanmoins, dans les études de stabilité, on cherchera systématiquement un arrangement des variables d'état pour que les composants de ce vecteur (n) soient les mêmes. Il pourra alors être assimilé à un nombre n réel.

Pour un système d'ordre $\frac{1}{2}$ ($n = 0.5$). Le système d'état s'écrit alors :

$$\begin{cases} \bar{x}^{(0.5)}(t) = A. \bar{x}(t) + B. \bar{u}(t) \\ \bar{y}(t) = C. \bar{x}(t) + D. \bar{u}(t) \end{cases} \quad (II.40)$$

Pour $n = 1$, nous retrouvons la représentation d'état classique d'un système d'ordre entier [21] [22].

$$\begin{cases} \bar{x}^{(1)}(t) = A. \bar{x}(t) + B. \bar{u}(t) \\ \bar{y}(t) = C. \bar{x}(t) + D. \bar{u}(t) \end{cases} \quad (II.41)$$

II.4.Commandabilité et observabilité des systèmes fractionnaires :

Afin d'étudier la commandabilité, observabilité, nous considérons le système linéaire fractionnaire décrite par l'équation suivante :

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad 0 < \alpha < 2 \quad (II.42)$$

$x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m, y(t) \in \mathbb{R}^p$

Pour vérifier si le système linéaire (II.42) est commandabilité ou observabilité, il existe deux critères dits de Kalman et d'Hautus.

Définition : [18] [23] [24] [25].

Le système fractionnaire (II.42) d'ordre $0 < \alpha < 2$, est commandable (ou la plan (A, B) est commandable) si seulement si l'une des deux conditions équivalentes suivantes suit vérifiée.

- Critère de Kalman $\text{rang}[B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B] = n = \dim(x)$ (II.43)

- Critère de d'Hautus $\text{rang}[\sigma I_n - A \ B] = n = \dim(x) \quad \forall \sigma \in \mathbb{C}$ (II.44)

Définition : [18] [23] [24] [27].

Le système fractionnaire (II.42) d'ordre $0 < \alpha < 2$, est observable (ou la plan (A, C) est observable) si et seulement si l'une des deux conditions équivalentes suivantes suit vérifiées.

- Critère de Kalman $\text{rang} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{2-1} \end{pmatrix} = n = \dim(x)$ (II.45)

- Critère de d'Hautus $\text{rang} \begin{pmatrix} \sigma I_n - A \\ C \end{pmatrix} = n = \dim(x) \quad \forall \sigma \in \mathbb{C}$ (II.46)

II.5. Analyse des dérivateurs (Intégrateurs) d'ordre fractionnaire :

II.5.1. Transmittance d'un Dérivateur (Intégrateur) d'ordre fractionnaire :

Un dérivateur non entier est tel que sa grandeur de sortie $y(t)$ s'identifie, à un facteur près, à la dérivée non entière de sa grandeur d'entrée $u(t)$ [26].

$$y(t) = \tau^n D^n u(t) \tag{II.47}$$

Où τ désignent la constante de temps de différentiation et $n \in \mathbb{R}$, l'ordre de dérivation réelle ($\text{Re}(n)$ pouvant être supérieur ou inférieur à 0, l'opérateur considéré étant alors soit un dérivateur, soit un intégrateur).

à l'aide de la transformation de Laplace d'une fonction temporelle et sous l'hypothèse de conditions initiales nulles, la traduction opérationnelle de l'équation (II.47) détermine l'équation symbolique :

$$Y(s) = (\tau s)^n U(s) \tag{II.48}$$

Soit, en posant $\omega_u = \frac{1}{\tau}$, appelé fréquence au gain unité ou fréquence de transition :

$$Y(s) = \left(\frac{s}{\omega_u}\right)^n U(s) \tag{II.49}$$

D'où l'on tire la transmittance :

$$D(s) = \left(\frac{s}{\omega_u}\right)^n \tag{II.50}$$

II.5.2. Réponse en fréquences d'un dérivateur non entier réel :

La réponse en fréquences d'un dérivateur non entier réel se déduit de sa transmittance en faisant $s = j\omega$ soit :

$$D(j\omega) = \left(\frac{j\omega}{\omega_u}\right)^n \quad (\text{II.51})$$

Définissons comme le module et l'argument de $D(j\omega)$, le gain et la phase du dérivateur admettent des expressions de la forme :

$$\begin{cases} |D(j\omega)| = \left(\frac{\omega}{\omega_u}\right)^n \\ \text{Arg}(D(j\omega)) = n\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (\text{II.52})$$

L'analyse d'un tel système d'équations révèle une propriété remarquable de ce type de dérivateur en ce sens que :

* Le diagramme de gain est caractérisé par une droite figurée de pente 6 dB par octave.

* Le diagramme de phase est caractérisé par une droite horizontale d'ordonnée $\rho = n\frac{\pi}{2}$ rad.

La figure (II-2) représente les diagrammes de Bode d'un dérivateur (ou intégrateur) non entier réel pour $\omega_u = 1 \text{ rad/s}$ et pour des ordres de dérivateur compris entre $[-1 \text{ et } 1]$

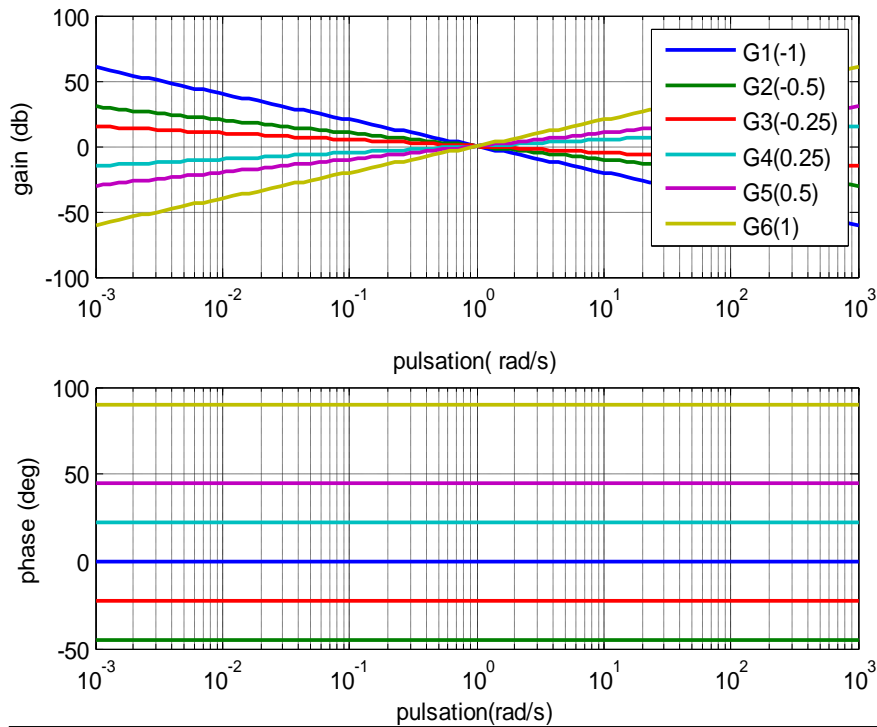


Fig II.3 Diagrammes de Bode d'un dérivateur (intégrateur) non entier

Le caractère non entier réel de l'ordre de dérivation n , permet ainsi d'assurer, tant au niveau du diagramme de gain que du diagramme de phase, une variation de la pente :

- De la pente de la droite de gain.
- De l'ordonnée de la droite de phase.

II.6.Conclusion :

Ce chapitre nous a permis de représenter un tel système d'ordre non entier par une fonction de transfert d'ordre fractionnaire ou par une forme d'état généralisée. Nous avons également montré la condition de stabilité de ces systèmes.

Dans le chapitre suivant, nous allons synthétiser une loi de commande robuste pour évoquer l'impact des bruits de mesure, les perturbations extérieures qui affectent la sortie d'ordre entier et d'ordre non entier pour la commande des systèmes linéaires invariants dans le temps.

III.1 Introduction :

Dans le chapitre précédent, nous sommes essentiellement attachés à l'étape de modélisation et d'analyse des propriétés des systèmes linéaires dynamiques d'ordre fractionnaire.

Dans ce chapitre, la théorie des systèmes de commande à contre-réaction est introduite pour tout ce qui concerne les aspects d'analyse. Dans un premier temps, seuls les systèmes mono variables sont traités. Une extension au cas des systèmes multi variables est succinctement présentée.

III.2.Principe de la contre-réaction :

Un système de commande automatique à contre-réaction compare la valeur réelle de la sortie du système avec l'entrée de référence (la valeur souhaitée), détermine l'écart entre les deux et produit un signal de commande dont le but est de réduire cet écart à 0 ou de le rendre très faible. Le principe fondamental consiste à observer les effets des actions que l'on produit et de les corriger en fonction des résultats observés. Cette structure est illustrée figure (III.1). Adopter une telle structure de commande induit bien entendu un certain nombre d'avantages mais aussi quelques inconvénients que nous allons détailler à travers un exemple simple emprunté à [28][34].

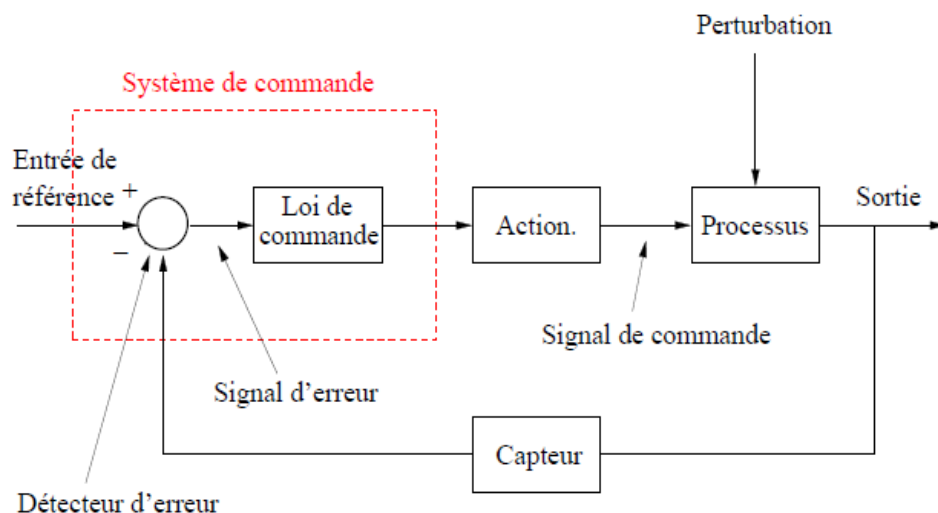


Fig III.1 Schéma de principe d'un asservissement

III.3. Caractérisation des systèmes de commande à contre-réaction :

Jusqu'à présent, nous avons principalement défini les transferts en boucle ouverte et en boucle fermée. L'exemple de la section précédente induit, à travers l'introduction de la perturbation, que d'autres transferts peuvent être intéressants à considérer afin d'avoir une vision plus complète des problèmes posés par la structure de commande à contre-réaction.

Nous définissons ainsi un schéma fonctionnel plus complet incluant un signal de perturbation b et un signal de bruit de mesure w [29][34].

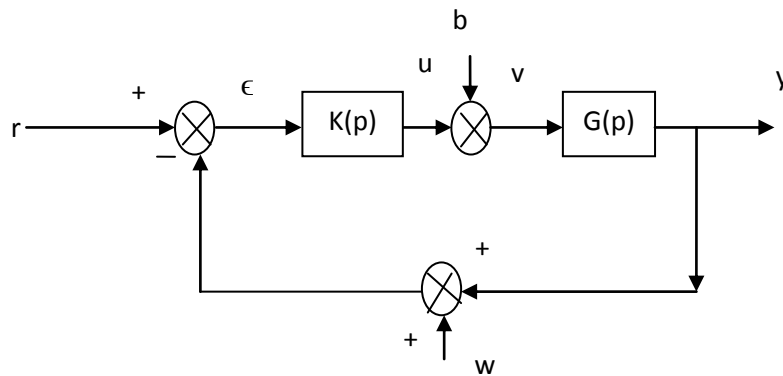


Fig III.2 Schéma bloc avec perturbation et bruit

Ou :

- r est le signal de référence que doit suivre la sortie
- y est la sortie du système
- u est la commande issue du correcteur $K(p)$
- v est le signal de commande entrant réellement dans le système
- b est le signal des perturbations
- $\epsilon = r - (y + w)$ est le signal d'erreur
- w est le signal des bruits de mesure

A partir de ce schéma fonctionnel, différents transferts entre les entrées et les signaux de sortie intéressants vont être considérés.

Les fonctions de sensibilité :

Les relations algébriques élémentaires définies dans le schéma fonctionnel (III.1) s'écrivent [30].

$$y(p) = G(p) * v(p) \quad (\text{III. 1})$$

$$v(p) = b(p) + u(p) \quad (\text{III. 2})$$

$$u(p) = K(p) * \varepsilon(p) \quad (\text{III. 3})$$

$$\varepsilon(p) = r(p) - w(p) - y(p) \quad (\text{III. 4})$$

Cela permet de déterminer les relations en boucle fermée entre la sortie exogène et les entrées exogènes :

$$y(p) = \underbrace{(1 + G(p)K(p))^{-1}G(p)}_{S(p)} b(p) + \underbrace{(1 + G(p)K(p))^{-1}G(p)K(p)}_{T(p)} (r(p) - w(p)) \quad (\text{III. 5})$$

Définition : (Sensibilité et sensibilité complémentaire)

Les fonctions de transfert $S(p)$ et $T(p)$ sont appelées respectivement fonction de sensibilité et fonction de sensibilité complémentaire.

La fonction de sensibilité complémentaire est en fait la fonction de transfert en boucle fermée usuelle.

$$S(p) = \frac{1}{1 + G(p)K(p)} \quad T(p) = \frac{G(p)K(p)}{1 + G(p)K(p)} \quad (\text{III. 6})$$

Il est à noter que $T(p) = G(p) K(p) S(p)$ et donc :

$$S(p) + T(p) = 1 \quad (\text{III. 7})$$

Un signal permettant d'analyser la précision du système est celui de l'erreur $\varepsilon(p)$:

$$\varepsilon(p) = S(p)r(p) - S(p)G(p)b(p) + T(p)w(p) \quad (\text{III. 8})$$

Afin de conserver un certain contrôle sur l'amplitude de la commande délivrée et de la commande reçue, il est également nécessaire de connaître les transferts de ces commandes aux entrées exogènes :

$$u(p) = K(p)S(p)(r(p) - w(p)) - T(p)b(p) \quad (\text{III. 9})$$

$$v(p) = K(p)S(p)(r(p) - w(p)) + S(p)b(p) \quad (\text{III. 10})$$

Le schéma fonctionnel précédent fait donc apparaître quatre fonctions de transfert importantes appelées fonctions de sensibilité :

$$S(p) \quad S(p)G(p) \quad T(p) \quad S(p)K(p)$$

Ou :

- * **S(p)** représente le transfert entre la référence et l'erreur et entre la perturbation et la commande délivrée.
- * **T(p)** représente l'influence des bruits de mesure sur la sortie et l'erreur et l'influence de la perturbation sur la commande délivrée.
- * **S(p)G(p)** représente l'influence de la perturbation sur la sortie et l'erreur.
- * **S(p)K(p)** représente l'influence de la référence et des bruits de mesure sur les commandes.

Objectifs de commande :

Compte tenu des relations établies précédemment et de l'analyse qui les suit, la synthèse du correcteur K doit obéir aux différents objectifs suivants :

- * Un bon suivi du signal de référence implique une fonction de sensibilité S(p) faible en amplitude.
- * Une bonne rejection des perturbations sera obtenue pour S(p)G(p) faible.
- * Les bruits de mesure seront atténués si l'amplitude de T(p) est faible sur la plage de fréquence concernée.
- * L'effort de commande est faible si l'amplitude de S(p)K(p) et de T(p) est faible.
- * La commande délivrée au système est faible si S(p) et S(p)K(p) sont d'amplitude faible.

Ces objectifs de commande sont contradictoires et devront faire l'objet de compromis lors de la synthèse du système de commande [34].

III.4. Analyse en performance des systèmes bouclés :

Un système de commande est calculé afin de modifier les caractéristiques du régime transitoire et celles du régime permanent du système original et ceci dans le cadre d'une structure de commande à contre-réaction. Ces caractéristiques sont regroupées sous le terme générique de performances dynamiques du système. Les performances d'un système dynamique doivent donc être définies et spécifiées précisément afin de faire une analyse et une synthèse adéquates du système de commande. Les spécifications de performance pour un système de commande peuvent être constituées de critères temporels relatifs au régime transitoire, de critères fréquentiels en relations plus ou moins étroites avec ces derniers et de critères de précision sur le régime permanent.

Ces spécifications de nature différente ne vont pas s'en s'opposer parfois les unes aux autres conduisant le concepteur du système de commande à adopter un compromis entre ces différentes exigences contradictoires. Les spécifications de performance ne forment donc pas un ensemble rigide d'exigences mais doivent plutôt être vues comme un moyen d'établir une liste de performances souhaitées. Cela est d'autant plus vrai que le concepteur devra nécessairement tenir compte, dans son étape de synthèse, des propriétés du système à corriger et particulièrement des limitations de performance inhérentes à ce système. L'objet de ce chapitre est donc de fournir des méthodes permettant de manière systématique la génération de spécifications de performance [34].

III.5. Spécifications fréquentielles de performance: systèmes mono-variables

III.5.1 Rappels sur les relations de bouclage :

Dans le cadre de ce chapitre, nous travaillerons comme dans le chapitre précédent à partir du schéma fonctionnel complet de la figure (III.2).

Nous rappelons les relations importantes intervenant dans ce type de bouclage :

$$\text{-Relation 1 : } y(p) = S(p)G(p)b(p) + T(p)(r(p) - w(p)) \quad (\text{III. 11})$$

$$\text{- Relation 2 : } \epsilon(p) = S(p)r(p) - S(p)G(p)b(p) + T(p)w(p) \quad (\text{III. 12})$$

$$\text{- Relation 3: } u(p) = K(p)S(p)(r(p) - w(p)) - T(p)b(p) \quad (\text{III. 13})$$

$$\text{- Relation 4 : } v(p) = K(p)S(p)(r(p) - w(p)) + S(p)b(p) \quad (\text{III. 14})$$

Les quatre relations précédentes permettent de définir les quatre fonctions de sensibilité $S(p)$, $T(p)$, $S(p)G(p)$, $S(p)K(p)$ et d'illustrer les bénéfices que l'on peut attendre de ce type de structure.

III.5.2. Rejet de perturbation b :

On souhaite généralement que la boucle d'asservissement soit insensible et rejette la perturbation modélisée par le signal $b(p)$. Ceci est impératif en règle générale aux basses fréquences : $w < w_b$

- Pour que b ait peu d'influence sur y :

$$|G(jw)S(jw)| \ll 1 \quad (III. 15)$$

- Pour que b ait peu d'influence sur v :

$$|S(jw)| \ll 1 \quad (III. 16)$$

Comme $G(jw)$ est donnée et ne peut être modifiée qu'à travers le compensateur $K(jw)$, on en déduit la règle générale en basses fréquences pour le rejet de perturbations :

$$|S(jw)| \ll 1 \quad w < w_b \quad (III. 17)$$

Du fait que $T + S = 1$ et $S = (1 + KG)^{-1}$. On en déduit que :

$$|S(jw)| \ll 1 \quad w < w_b \Rightarrow |T(jw)| \sim 1 \quad \text{et} \quad |K(jw)G(jw)| \gg 1 \quad \text{pour} \quad w < w_b \quad (III. 18)$$

La spécification de rejet de perturbation peut donc s'exprimer en sensibilité, en boucle fermée ou en boucle ouverte.

Si ces spécifications sont vérifiées alors nécessairement :

$$y \sim (r - w) \quad \text{et} \quad \epsilon \sim w \quad (III. 19)$$

Cela implique de choisir la pulsation w_b inférieure à la pulsation w_h définissant les bruits en hautes fréquences.

$$w_b < w_h \quad (III. 20)$$

$$u \sim G^{-1}(r - w) - b \quad \text{et} \quad v \sim G^{-1}(r - w) \quad (III. 21)$$

Cela implique de choisir également la pulsation w_b inférieure à la pulsation w_{co} définissant la bande passante de G .

$$w_b < w_{co} \quad (III. 22)$$

III.5.3. Réduction du bruit de mesure w :

Les bruits sont usuellement modélisés comme opérant en hautes fréquences : $w > w_h$

- Pour que w ait peu d'influence sur y :

$$|T(jw)| \ll 1 \quad (III. 23)$$

- Pour que w ait peu d'influence sur v :

$$|K(jw)S(jw)| \ll 1 \quad (III. 24)$$

Une analyse identique à la précédente utilisant les relations algébriques sur les fonctions de sensibilité conduit à écrire la spécification en hautes fréquences :

Si ces spécifications sont vérifiées alors nécessairement :

$$y \sim Gb \text{ et } \epsilon \sim r - Gb \quad (\text{III. 25})$$

Cela implique de choisir la pulsation w_h supérieure à la pulsation w_{co} .

$$u \sim K(r - w) - b \quad \text{et} \quad v \sim b + K(r - w) \quad (\text{III. 26})$$

Cela implique de choisir également la pulsation w_b inférieure à la pulsation w_h comme il a été vu précédemment.

III.5.4. Suivi de référence r : précision

Cette spécification est généralement une spécification pour les basses fréquences :

$$w < w_b \quad (\text{III. 27})$$

L'on retrouve exactement les spécifications données pour le rejet de perturbation :

$$w < w_b \quad |S(jw)| \ll 1 \quad |K(jw)G(jw)| \gg 1 \quad |T(jw)| \sim 1 \quad (\text{III. 28})$$

Le suivi de référence pose le problème plus spécifique de la précision du système en régime permanent. On souhaite en effet que le système bouclé réponde sans erreur ou avec une erreur donnée à des entrées types telles que celles qui ont été définies pour l'analyse temporelle transitoire (échelon, rampe...) il est donc souhaitable que l'erreur s'annule ou prenne une valeur finie en régime permanent pour des entrées de référence types. L'erreur comme fonction du signal de référence s'écrit :

$$\epsilon(p) = S(p)r(p) = \frac{r(p)}{1 + K(p)G(p)} \quad (\text{III. 29})$$

On en déduit la règle des intégrateurs.

Théorème : (Règle des intégrateurs)

Afin d'annuler l'erreur en régime permanent à une entrée transitoire $r(p)$, la boucle ouverte doit comprendre au moins autant d'intégrateurs que le signal $r(p)$ en contient.

III.6. Modelage des fonctions de sensibilité:

Une stratégie différente de celle du Loopshaping est de définir les spécifications directement sur les fonctions de sensibilité S et T et de reformuler le problème de synthèse en un problème d'optimisation. En effet, la sensibilité S est en particulier un bon indicateur des performances du système.

Critères de performance On définit deux indicateurs de performance à partir de la norme H_∞ sur les fonctions de sensibilité et sensibilité complémentaires [31][34].

$$M_S = \|S\|_\infty = \sup_w |S(j\omega)| \quad (\text{III.30})$$

$$M_T = \|T\|_\infty = \sup_w |T(j\omega)| \quad (\text{III.31})$$

M_S et M_T correspondent à un pic de la courbe de gain de chacun des transferts considérés. Des valeurs de M_S et de M_T grands indiquent une faible performance du système ainsi qu'une faible robustesse vis à vis des perturbations pouvant l'affecter. Des valeurs typiques correctes sont données par :

$$M_S < 2 \quad (6 \text{ db}) \quad (\text{III.32})$$

$$M_T < 1.25 \quad (2 \text{ db}) \quad (\text{III.33})$$

Ces deux grandeurs ne sont évidemment pas indépendantes et doivent vérifier :

$$||S| - |T|| < |S + T| = 1 \quad \forall \omega \quad (\text{III.34})$$

Remarque :

La marge de module définie dans le chapitre précédent se définit également comme,

$$\Delta M = \frac{1}{M_S} \quad (\text{III.35})$$

Un lien entre ces grandeurs et la marge de phase et de gain peut également être établi.

$$K_G \geq \frac{M_S}{M_S - 1} M_\phi \geq 2 \sin^{-1} \left(\frac{1}{2M_S} \right) \geq \frac{1}{M_S} \text{ rad} \quad (\text{III.36})$$

$$K_G \geq 1 + \frac{1}{M_T} M_\phi \geq 2 \sin^{-1} \left(\frac{1}{2M_T} \right) > \frac{1}{M_T} \text{ rad} \quad (\text{III.37})$$

Spécifications de performance en sensibilité

Elles sont données sous la forme suivante :

1- une bande passante minimale ω_B à -3 dB

$$|S(j\omega_B)| = 0.707 \quad (\text{III. 38})$$

2- une erreur maximale de position en régime permanent A

3- le modelage de S sur certaines plages de fréquences

4- l'amplitude maximale du module de S :

$$\|S\|_{\infty} < M_s \quad (\text{III. 39})$$

Remarque :

La dernière spécification permet d'éviter l'amplification du bruit aux hautes fréquences et introduit une marge de robustesse. Un choix usuel est $M_s = 2$.

L'ensemble de ces spécifications peut être traduit en une spécification unique faisant intervenir une borne supérieure $\frac{1}{w_p(j\omega)}$ sur l'amplitude de S.

$$\forall \omega \quad |S(j\omega)| < \frac{1}{|w_p(j\omega)|} \quad \Leftrightarrow \quad \left| |w_p(j\omega)S(j\omega)| \right| < 1 \quad (\text{III. 40})$$

$$\|w_p S\|_{\infty} < 1 \quad (\text{III. 41})$$

Définition :(Fonction de pondération)

$w_p(p)$ Est appelée fonction de pondération de S .

La spécification de pondération signifie donc que la norme H_{∞} (la valeur maximale du gain) de S pondérée par la fonction $w_p(p)$ doit être inférieure à 1. L'interprétation graphique de la condition sur la sensibilité s'obtient en montrant que :

$$\|w_p S\|_{\infty} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \forall \omega \quad |w_p(j\omega)| < |L(j\omega) + 1| \quad (\text{III. 42})$$

Cela signifie donc que le lieu de transfert en boucle ouverte $|L(j\omega)|$ tracé dans le plan de Nyquist n'entre pas dans le disque de centre $(-1, 0)$ et de rayon $|w_p(j\omega)|$.

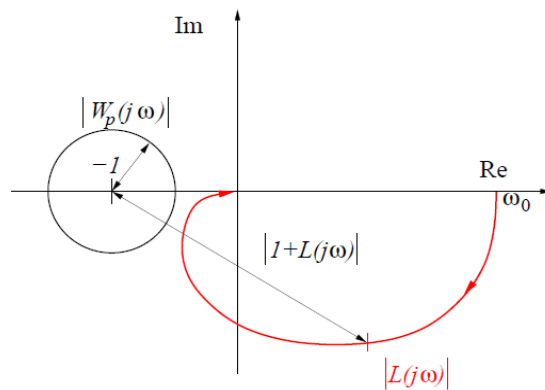


Fig III.3 plan de Nyquist

Un choix classique pour la fonction de pondération est :

$$w_p(p) = \frac{p/M + w_B}{p + w_B A} \tag{III.43}$$

Le tracé asymptotique dans Bode de $\frac{1}{w_p(p)}$ est donné par :

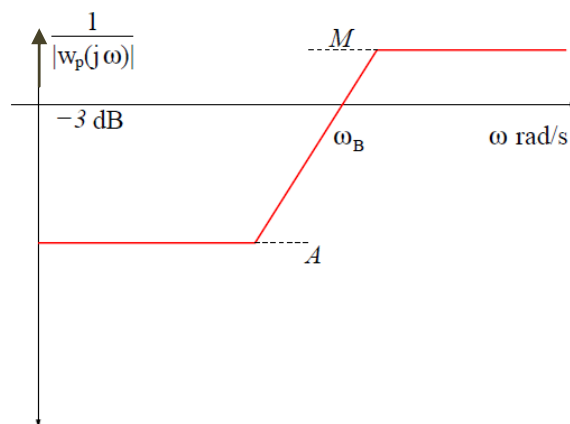


Fig III.4 Fonction de pondération w_p

La borne supérieure de $|S|$, $\frac{1}{w_p}$ vérifie :

- aux basses fréquences, elle est égale à $A \leq 1$ (action intégrale)
- aux hautes fréquences, elle est égale à $M \geq 1$
- w_B est la pulsation de coupure à -3 dB

Remarque :

Afin d'améliorer les performances, on choisit parfois une fonction de pondération plus complexe :

$$w_p(p) = \frac{(P/M^{1/2} + w_B)^2}{(P + w_B A^{1/2})^2} \quad (\text{III. 44})$$

Exemple :

On reprend l'exemple utilisé pour le loopshaping de la section suivante. Après loopshaping, la boucle ouverte vaut :

$$L(p) = \frac{0.15(-2p + 1)}{p(2p + 1)(0.33p + 1)} \quad (\text{III. 45})$$

Un choix de filtre de pondération cohérent avec les spécifications imposées est donné par :

$$M = 1.8 \text{ et } A = 0 \quad w_B = 0.05 \text{ rad/S}$$

Le choix de ($A = 0$) correspond bien à la nécessité d'inclure une action intégrale dans la boucle pour annuler l'erreur en régime permanent en réponse à un échelon de position.

Il est à noter sur la figure que la pulsation à partir de laquelle $S \sim 1$ (le correcteur n'est plus effectif) est 1 rad/s [34].

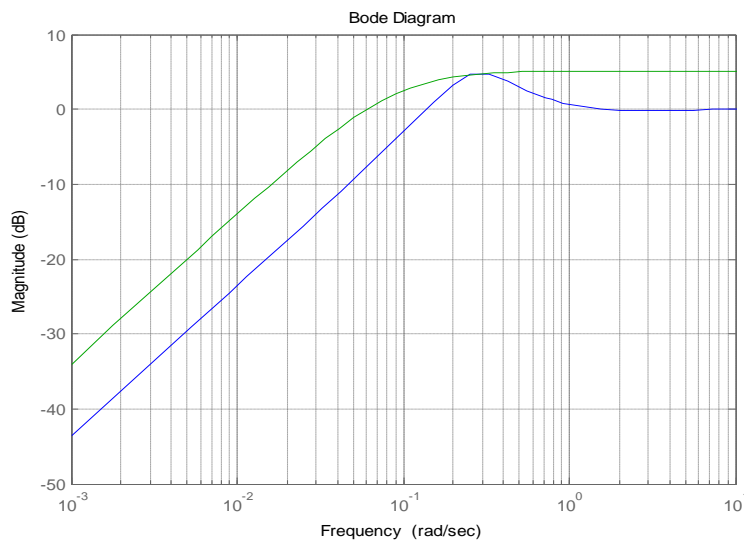


Fig III.5 fonction de pondération

III.7. Spécifications de performance en sensibilités mixtes :

La spécification $\|w_p S\|_\infty < 1$ permet d'avoir une borne inférieure sur la bande passante mais pas de borne supérieure. En particulier, elle ne permet pas de spécifier le roll-off de la boucle ouverte $L(p)$ au-dessus de la bande passante. Un moyen de garantir des spécifications complémentaires consiste à introduire des spécifications de type norme sur d'autres fonctions de sensibilité.

Afin de garantir un roll-off suffisant aux hautes fréquences, on peut spécifier une borne supérieure $\frac{1}{|w_t|}$ sur l'amplitude de T . De plus, afin de réduire l'amplitude des signaux de commande, il est également possible de définir une borne supérieure $\frac{1}{|w_u|}$ sur l'amplitude du transfert KS . Tenir compte de l'ensemble de ces spécifications revient à définir une spécification globale :

$$\left\| \begin{bmatrix} w_p S \\ w_T S \\ w_u KS \end{bmatrix} \right\|_\infty < 1 \quad (\text{III.46})$$

$$\left\| \begin{bmatrix} w_p S \\ w_T T \\ w_u KS \end{bmatrix} \right\| = \underset{w}{MAX} \sqrt{|w_p S|^2 + |w_T T|^2 + |w_u KS|^2} \quad (\text{III.47})$$

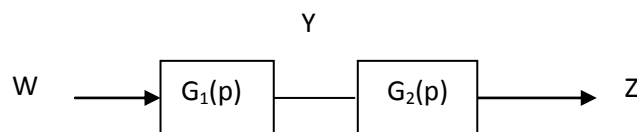
III.7.1. Spécifications fréquentielles de performance : systèmes multi-variables :

III.7.1.1. Règles d'association dans les schémas-blocs :

Cette partie est consacrée à l'extension des caractérisations en performance pour les systèmes multi variables bouclés. Pour cela, il est important de rappeler les règles de composition des opérateurs de transfert dans le cas multi variable [32] [33][34].

- règle 1 : cascade

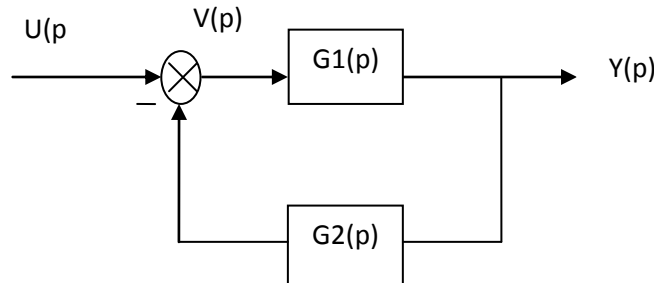
$$z(p) = G(p)w(p) = G_2(p)G_1(p)w(p) \quad (\text{III.48})$$



- règle 2 : bouclage

$$v(p) = (1 + L(p))^{-1} u(p) \tag{III.49}$$

$$L(p) = G_2(p)G_1(p) \tag{III.50}$$



- règle 3 : push and pull

$$G_1(p)(1 - G_2(p)G_1(p))^{-1} = (1 - G_1(p)G_2(p))^{-1} G_1(p) \tag{III.51}$$

III.7.1.2. Les fonctions de sensibilités en entrée et en sortie :

Il est tout d'abord nécessaire de définir les relations de bouclage associées au schéma d'asservissement suivant où $G(p) \in C^{r \times m}$ et $K(p) \in C^{m \times r}$ sont des modèles LTI multi variables.

En effet, du fait du non commutativité du produit matriciel, il est nécessaire de différencier les fonctions de sensibilité en entrée et en sortie [32][34].

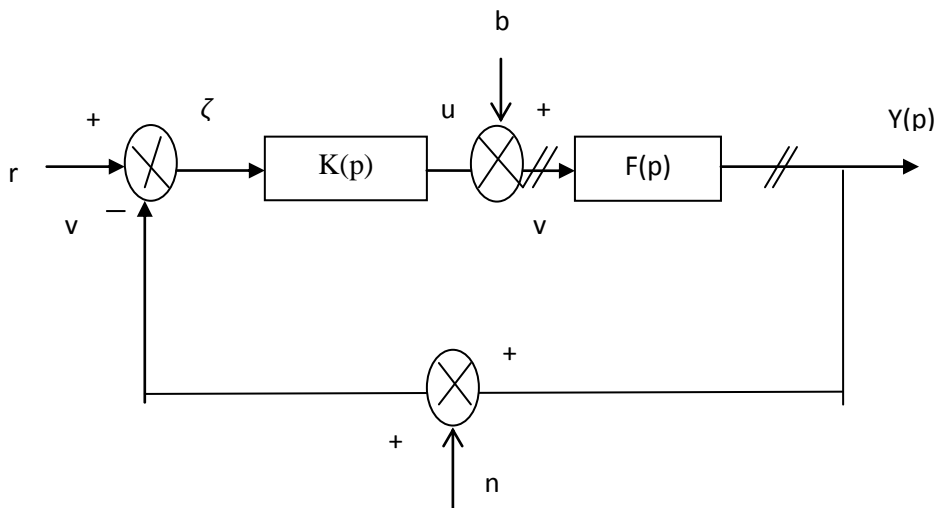


Fig III.6 Asservissement et fonctions de sensibilités

$$s(p) = (1 - GK)^{-1}Gb(p) + (1 - GK)^{-1}KG(r(p) - n(p)) \quad (\text{III. 52})$$

$$\zeta(p) = (1 - GK)^{-1}r(p) - (1 - GK)^{-1}Gb(p) + (1 - GK)^{-1}GKn(p) \quad (\text{III. 53})$$

$$u(p) = K(1 - GK)^{-1}(r(p) - n(p)) - K(1 - GK)^{-1}Gb(p) \quad (\text{III. 54})$$

Les relations de bouclage précédent permettent de définir les 6 transferts caractérisant l'asservissement

Définition :(Sensibilités en entrée et en sortie)

Le schéma d'asservissement suivant est complètement caractérisé par les fonctions de Transfert :

$$S_y = (1 - GK)^{-1}T_y = (1 - GK)^{-1}GK \quad (\text{III. 55})$$

$$S_u = (1 - KG)^{-1}T_u = (1 - KG)^{-1}KG \quad (\text{III. 56})$$

$$KS_y = K(1 - KG)^{-1}S_yG = (1 - KG)^{-1}G \quad (\text{III. 57})$$

Il est à noter que la différence fondamentale avec les asservissements mono variables vient du non identité des sensibilités et sensibilités complémentaires en entrée et en sortie $S_y \neq S_u$ et $T_y \neq T_u$.

Propriétés :

$$S_y + T_y = 1 \quad S_u + T_u = 1 \quad (\text{III. 58})$$

$$KS_y = S_yK \quad S_yG = GS_u \quad (\text{III. 59})$$

III.7.1.3.Spécifications de performance :

Les spécifications de performance sont établies très sensiblement de façon identique pour les systèmes multi variables et pour les systèmes mono variables. En fait, seul l'outil mathématique est réellement différent. On doit substituer les valeurs singulières au module pour évaluer la "taille" des transferts considérés. Afin de ne pas alourdir ce document, nous n'établissons précisément qu'une spécification : suivi de référence [32][34].

Suivi de référence

En reprenant, les relations de l'asservissement, l'erreur s'exprime comme suit :

$$\epsilon = s + r = S_y(d - r) - T_y n + S_y Gb \quad (\text{III. 60})$$

Pour que le suivi de référence soit bon, il est donc indispensable que l'influence de r sur ϵ Soit la plus faible possible. En rappelant que :

$$\underline{\sigma}(S_y(w)) \leq \frac{\|\epsilon(w)\|_2}{\|r(w)\|_2} \leq \bar{\sigma}(S_y(w)) \quad (\text{III. 61})$$

Cela peut s'exprimer par la relation suivante.

$$\bar{\sigma}(w_p S_y(w)) < 1 \quad \forall w \quad (\text{III. 62})$$

Ou :

$$w_p = \text{diag}(w_{Bi}) \quad \text{et} \quad w_{pi} = \frac{S/M_i + w_{Bi}}{S + w_{Bi}A_i} \quad (\text{III. 63})$$

Avec

- $A_i \ll 1$ pour une action intégrale

- $M_i \simeq 2$

- w_{Bi} bande passante à -3 dB

Remarque :

Pour les systèmes MIMO, la bande passante dépend des directions. On définit donc une région de bande passante

$$w\bar{\sigma}(s) = 0.7 \leq w_B \leq w\bar{\sigma}(s) = 0.7 \quad (\text{III. 64})$$

Si l'on souhaite associer un unique indicateur pour la bande passante, la pire direction est choisie $w\bar{\sigma}(s) = 0$.

Pour un bon suivi de référence, étant donné le filtre choisi, le tracé des valeurs singulières min et max de S doit donc suivre un gabarit :

- faible à basses fréquences

$$w < w_B \quad \text{et} \quad \bar{\sigma}(S) \ll 1 \quad (\text{III. 65})$$

- ~ 1 aux hautes fréquences

$$w > w_B \quad \text{et} \quad \bar{\sigma}(S) \sim 1 \quad (\text{III. 66})$$

- un pic supérieur à 1 autour de la pulsation de coupure w_B .

$$w \sim w_B \quad 0.41 \leq \bar{\sigma}(S) \leq 2.41 \quad (\text{III. 67})$$

Spécifications de performance

Nous résumons maintenant l'ensemble des spécifications que l'on peut exprimer à l'aide des valeurs singulières. Celles-ci sont indifféremment exprimées en boucle fermée (fonctions de sensibilité) ou en boucle ouverte (gain de boucle). En effet :

$$\underline{\sigma}(L) - 1 \leq \frac{1}{\underline{\sigma}(S_y)} \leq \underline{\sigma}(L) + 1 \quad (\text{III. 68})$$

- Suivi de référence et réjection de perturbations : S_y et $S_y G$ faibles ou L grande

$$\overline{\sigma}(w_p S_y(w)) < 1 \quad \forall w \Leftrightarrow \|w_p S_y\|_{\infty} < 1 \quad (\text{III. 69})$$

Ou :

$$\underline{\sigma}(L) \text{ grand } 0 \leq w \leq w_B \quad (\text{III. 70})$$

- Réduction d'énergie de commande u et v faibles : $K S_y$, T_u et S_u faibles

$$\overline{\sigma}(w_u K S_y(w)) < 1 \quad \forall w \Leftrightarrow \|w_u K S_y\|_{\infty} < 1 \quad (\text{III. 71})$$

Ou :

$$\overline{\sigma}(K) \text{ faible } 0 \leq w_B \leq w \quad (\text{III. 72})$$

- Filtrage des bruits de mesure : T_y faible ou L faible

$$\overline{\sigma}(w_T T_y(w)) < 1 \quad \forall w \Leftrightarrow \|w_T T_y\|_{\infty} < 1 \quad (\text{III. 73})$$

Ou :

$$\overline{\sigma}(L) \text{ faible } 0 \leq w_B \leq w \quad (\text{III. 74})$$

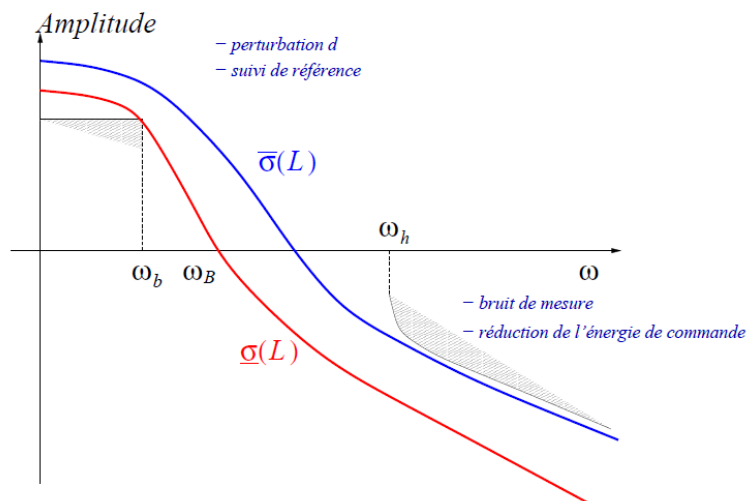


Fig III.7 Valeurs singulières typiques du gain de boucle

Remarques :(contraintes algébriques sur les spécifications)

Les spécifications précédentes sont contraintes par les relations algébriques inhérentes à la définition de S et de T.

$$|1 - \bar{\sigma}(S)| \leq \bar{\sigma}(T) \leq |1 + \bar{\sigma}(S)| |1 - \bar{\sigma}(T)| \leq \bar{\sigma}(S) \leq |1 + \bar{\sigma}(T)| \quad (\text{III.75})$$

III.8.Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons présenté les détails et les notions de bases pour synthétiser des contrôleurs d'ordre entier des systèmes linéaires mono-variables multi-variables et robustes par les deux versions de la méthode H_∞ , et étudié sensibilité direct et sensibilité complémentaire, fonction de pondération. Ces contrôleurs sont utilisés pour commander des systèmes multi-variables incertains dans le chapitre suivant mais par des contrôleurs d'ordre non entier (fractionnaires).

IV.1 Introduction :

La commande robuste est un domaine vaste. Dont les chercheurs ne cessent de développer des nouvelles outils pour la synthèse de contrôleurs dans le plan fréquentiel, ces techniques peuvent pratiquement traiter tous les systèmes soumis à des perturbations causées par les erreurs de modélisation.

Dans ce chapitre, nous allons présenter une variété des contrôleurs synthétisés par la méthode des gains principaux, ces contrôleurs sont les suivants :

- Contrôleur standards PID.
- Contrôleur avec l'action intégrale fractionnaire $PI^\lambda D$.
- Contrôleur avec l'action dérivée fractionnaire $PI D^\mu$.
- Contrôleur avec l'action intégrale et dérivée fractionnaire $PI^\lambda D^\mu$.

Nous allons également procéder à fin de ce chapitre à une étude comparative entre les différents résultats obtenus par ces contrôleurs pour vérifier:

- La satisfaction de la robustesse de stabilité et des performances.
- La bonne dynamique de poursuite obtenue.

IV.2 Commande d'un système multi-variable incertain par un PID fractionnaire :

IV.2.1. Exemple 1 :

Le système à commander représente ici un procédé thermique multi-variable, dans l'objectif de faire la régulation de température ambiante. Dans le système de commande, les températures ambiantes sont affinées par la régulation de la position de deux volumes d'air variables dans la salle du système de commande.

Il y a deux capteurs de température se situant à gauche et à droite respectivement. Aussi, il y a deux amortisseurs (gauche et droit) sur le plafond de la salle. Le changement de n'importe quelle position va provoquer un amortissement ce qui implique un changement de la lecture des deux capteurs.

Le système à commander comporte deux entrées et deux sorties avec la matrice de transfert suivante [35].

$$G(s) = \begin{pmatrix} \frac{e^{-23.2s}}{-2680.4s - 22.4} & \frac{e^{-63.3s}}{-7697.2s - 70.6} \\ \frac{e^{-15s}}{-7059.8s - 51.5} & \frac{e^{-14.0s}}{-1902.6s - 19.8} \end{pmatrix} \quad (IV.1)$$

Modélisation des incertitudes $\Delta(j\omega)$ est définie par :

$$\sigma_{\max} [\Delta(j\omega)] < \left| \frac{10^5 j\omega + 1}{2500(10j\omega + 1)} \right|; \forall \omega \in \mathfrak{R} \quad (IV.2)$$

Les spécifications fréquentielles exigées par le cahier de charges sont résumées par les deux pondérations suivantes [35] :

1. Spécifications sur les performances du système bouclé :

$$W_3 = \begin{pmatrix} \frac{2500(100s + 1)}{s + 10^5} & 0 \\ 0 & \frac{2500(100s + 1)}{s + 10^5} \end{pmatrix} \quad (IV.3)$$

2. Spécifications sur la robustesse en stabilité :

$$W_1 = \begin{pmatrix} \frac{100(100s + 1)}{10^4 s + 1} & 0 \\ 0 & \frac{100(100s + 1)}{10^4 s + 1} \end{pmatrix} \quad (IV.4)$$

La matrice de transfert du contrôleur PI D d'ordre entier proposée par [35] :

$$K_0 = \begin{bmatrix} -43.36 - \frac{0.42}{s} + 293.23s & -43.36 - \frac{0.42}{s} + 293.23s \\ 11.25 + \frac{0.16}{s} - 75.44s & -46.69 - \frac{0.58}{s} + 212.73s \end{bmatrix} \quad (IV.5)$$

Minimisant le critère de sensibilité mixte, en utilisant l'algorithme d'optimisation proposée nous a permis d'obtenir la structure du contrôleur fractionnaire suivante :

$$K_{fra} = \begin{bmatrix} -74.73 - \frac{0.67}{s^{0.1}} - 69.44^{0.39} s & -9.55 + \frac{1.59}{s^{0.78}} - 9.60^{0.26} s \\ -4.02 + \frac{2.94}{s^{0.53}} - 69.447^{0.39} s & -55.05 - \frac{2.57}{s^{0.88}} - 51.94^{0.38} s \end{bmatrix} \quad (IV.6)$$

La structure (IV.6), équivalente à la structure générale donnée ci-dessous, est approximée par un transfert d'ordre entier $K(s)$, en utilisant l'approche d'identification fréquentielle.

$$\tilde{K}(s) = \begin{pmatrix} PID^\mu & PI^\lambda D^\lambda \\ PI^\lambda & PI^\lambda D^\mu \end{pmatrix} \quad (IV.7)$$

Les réponses fréquentielles ainsi que celles du système bouclé obtenus par les deux PID (standard et fractionnaire) sont présentés par la figure.(IV.1) et la figure (IV.2).

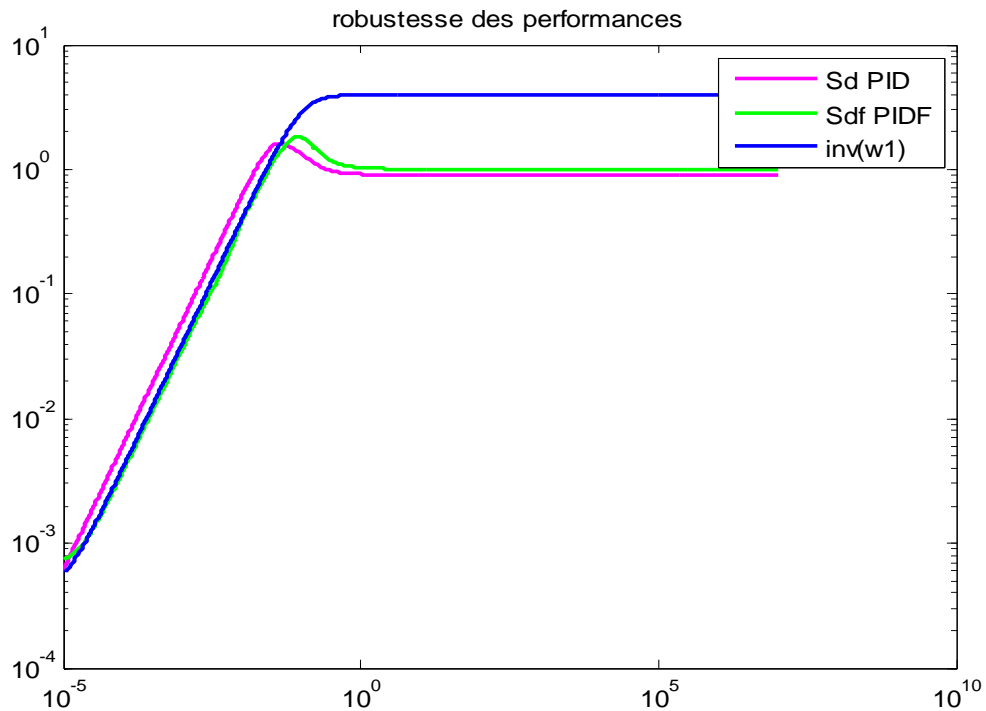


Fig IV.1 Robustesse en performances du système bouclé par les deux versions de PID

La figure (IV.1) illustre la satisfaction de la condition de robustesse en performances du système bouclé par le contrôleur fractionnaire au contraire pour le contrôleur PID simple, cela est expliqué par le fait que les valeurs singulières maximales de la fonction de sensibilité directe sont situées au-dessous de la condition de robustesse en performance dans toute la

plage de fréquence. Or Cette marge de robustesse devient très grande dans le cas de système bouclé par le PID fractionnaire.

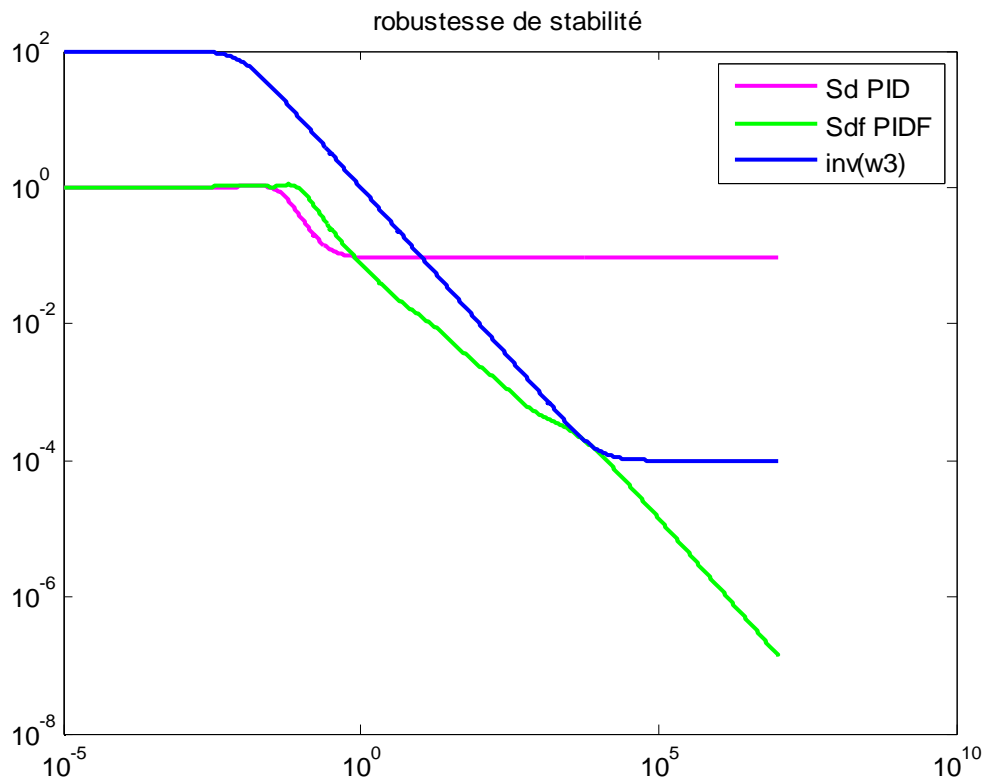


Fig IV.2 Robustesse de stabilité du système bouclé par les deux versions de PID

La figure (IV.2), nous constatons que le PID fractionnaire satisfait la condition de robustesse en stabilité avec une grande marge dans les hautes fréquences. Par contre, pour le système bouclé par le PID standard ne garantit pas la condition (dépassement de la condition de robustesse en stabilité).

Après comparaison, nous déduisons que la structure fractale du contrôleur est plus robuste en stabilité et en performances par rapport aux autres structures d'ordre entier, qui ne satisfont pas quelques spécifications fréquentielles.

Afin de valider ces résultats sur le plan temporel, nous considérons les entrées suivantes :

1- Entrées de référence $y_{ref} = (2 \ 1)^T$;

2- Entrées de perturbations à la sortie du procédé exprimées sous forme d'un échelon retardé à l'instant $t = 6.5 * 10^5$ secondes d'amplitude égale à 0.45 pour chaque voie du système ;

3- Entrées de bruits de mesures avec une moyenne égale à 0 et un moyen égal à 0.25.

Finalement, nous obtenons les sorties globales suivantes :

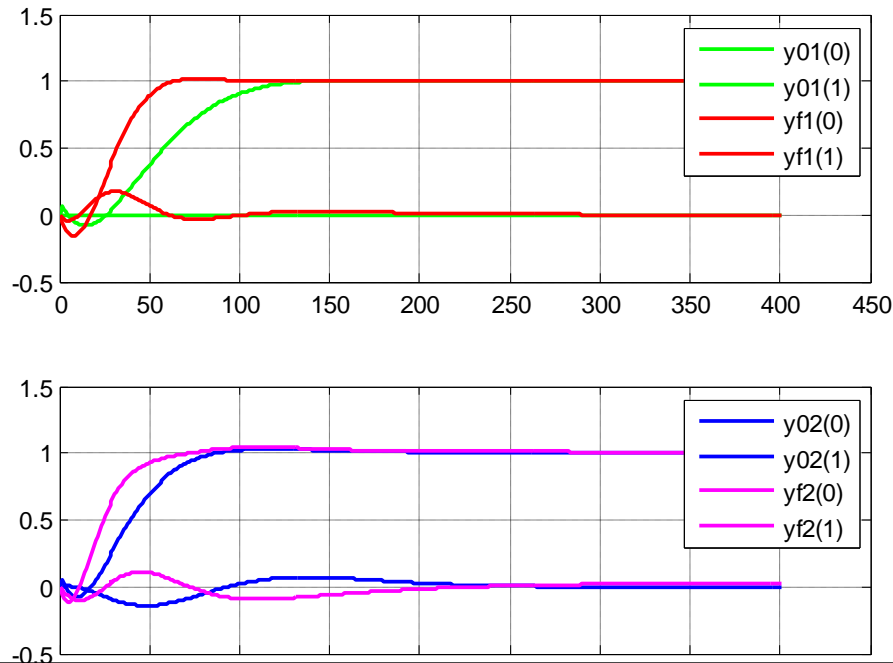


Fig IV.3 Dynamiques de poursuite et d'interaction du système bouclé par les deux PID

Nous remarquons que les résultats obtenus sur la figure.(IV.3) sont similaires sur les deux plans (temporel et fréquentiel). De plus, le PID fractionnaire assure une bonne dynamique de poursuite d'interaction des sorties, une meilleure rapidité de rejection des perturbations, et une minimisation de l'effet de bruits de mesures, dont le PID standard mal assuré.

IV.3. Proposition d'une structure fractionnaire basée sur les gains principaux

Le principe de la synthèse d'un contrôleur d'ordre non entier basant sur la résolution d'un problème d'optimisation non lisse peut être articulé sur les deux étapes suivantes:

- **1^{ère} étape** : détermination des paramètres de décisions du contrôleur robuste, on utilise la structure basant sur l'ordre non entier, celle-ci permet de manipuler la phase de l'optimisation avec un espace de recherche très réduit.
- **2^{ème} étape** : l'utilisant de l'identification fréquentielles afin de calculer un filtre approximant le transfert fractionnaire en module et en phase.

Dans la 1^{ère} étape, le contrôleur d'ordre fractionnaire est supposé par la structure suivante:

$$K(s, x) = K_1 \times K_2 \times K_3(s, x) \times K_4(s, x) \quad (\text{IV.8})$$

Sachant que :

- ❖ $K_1 \in \mathfrak{R}^+$: représente le gain de cette structure proposée. C'est un paramètre déterminé par l'optimisation non linéaire afin d'ajuster la bande passante de la fonction de sensibilité et de sensibilité complémentaire.
- ❖ $(K_2 \in \mathfrak{R}^{m \times m}) = G^{-1}(0)$: est une matrice carrée inversible qui représente l'effet de l'action proportionnelle du contrôleur proposé, cette dernière représente l'inverse du gain statique du système à commander. L'introduction de l'inverse du gain statique dans la structure (IV.1) joue un rôle important pour la commande des systèmes multi-variables, il est d'un côté, capable de découpler les réponses temporelles du système bouclé en régime stationnaire, et d'un autre côté, cette action peut augmenter l'insensibilité du système bouclé aux entrées des perturbations.

Un découplage parfait de la boucle fermée est celui qui offre une sortie identique à celle de la consigne correspondante. En effet, le vecteur de commande qui doit assurer ce découplage est celui qui vérifié l'identité ($y_{ref} \cong y$). Cette dernière est interprétée, selon le principe du théorème de la valeur finale, par une sensibilité complémentaire (qui est coïncide par le transfert de la boucle fermée) égale à l'unité en basse fréquence c'est-à-dire que $T_{y_{ref} \rightarrow y} \cong I_{m \times m}$. On peut définir l'équation du vecteur des sorties globales, en absence des entrées de bruits de mesures, par la relation ci-après:

$$y = T_{y_{ref} \rightarrow y} \cdot y_{ref} + T_{d_y \rightarrow y} \cdot d_y + T_{d_u \rightarrow y} \cdot d_u \quad (\text{IV.9})$$

Sachant que, la notation $T_{x \rightarrow y}$ représente le transfert entre le vecteur de sorties (y) et celui de l'entrée (x). On définit donc les transferts suivants:

- $T_{d_y \rightarrow y} := [I_{m \times m} + G(s) \cdot K(s, x)]^{-1}$: Le transfert entre le vecteur de sorties globales du système bouclé et les entrées de perturbations en sortie. Elle représente également le transfert de la fonction de sensibilité directe en sortie.

- $T_{y_{ref} \rightarrow y} := G(s) \cdot K(s, x) \cdot [I_{m \times m} + G(s) \cdot K(s, x)]^{-1}$: Le transfert entre le vecteur de sorties globales du système bouclé et les entrées de consignes. Elle représente, à la fois, le transfert de la fonction de sensibilité complémentaire ainsi la matrice de transfert de la boucle fermée du système bouclé.
- $T_{d_u \rightarrow y} := G(s) \cdot [I_{m \times m} + G(s) \cdot K(s, x)]^{-1}$ Le transfert entre le vecteur de sorties globales du système bouclé et les entrées de perturbations en entrée

Pour avoir un contrôleur robuste qui est capable de découpler le transfert de la boucle fermée, il est nécessaire de vérifier la condition suivante:

$$K(j, 0, x) := \Lambda \cdot G^{-1}(s=0) \quad (IV.10)$$

Avec Λ est scalaire positif qui représente le paramètre K_1 dans cette structure proposée.

En effet, le vecteur de sorties globales du système bouclé vaut donc l'expression suivante:

$$y := [I_{m \times m}] \cdot y_{ref} + [0_{m \times m}] \cdot d_y + G(j, 0) \cdot [0_{m \times m}] \cdot d_u \quad (IV.11)$$

Avec $[0_{m \times m}]$ représente la matrice nulle.

Cette dernière expression peut montrer explicitement le choix de l'action K_2 dans la structure du contrôleur à synthétiser.

Pour une dynamique d'un système non carré, cette action peut le calculer en utilisant le théorème du pseudo-inverse des matrices avec la relation suivante:

$$K_2 := [G^T(0) \times G(0)]^{-1} \times G(0) \quad (IV.12)$$

Nous verrons, dans le chapitre suivant, une commande d'un système multi-variable où sa dynamique est décrite par une matrice de transfert non carrée et l'action K_2 du contrôleur à élaborer peut définir par la relation (IV.12).

- ❖ K_3 : représente l'action diagonale du contrôleur à synthétiser, cette dernière à pour but d'éliminer l'erreur statique de chaque voie du système à commander. La structure de cette action est proposée comme suite:

$$(K_3(s, x) \in C^{m \times m}) = \begin{bmatrix} 1/s^{\lambda_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/s^{\lambda_{22}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1/s^{\lambda_{mm}} \end{bmatrix}, n \leq \lambda_{ii(i=1,2,\dots,m)} \leq n+1, n \in \mathbb{N} \quad (\text{IV.13})$$

Cette action dépend du vecteur des variables de décision à obtenir par l'optimisation non lisse. Ces variables représentent les ordres fractals des actions intégrales du système à commander. Pour expliquer pourquoi on a choisit la forme diagonale de la matrice K_3 . Un tel système bouclé par un contrôle robuste qui contient la matrice du gain statique inversée, le transfert de sa boucle fermée est coïncidé par celui qui représente le lien entre le vecteur de sorties globales et les entrées de bruits de mesures avec la relation:

$$T_{y_{ref} \rightarrow y} := T_{\eta \rightarrow y} \cong I_{m \times m} \quad (\text{IV.14})$$

Pour éliminer les effets de ces entrées, il est nécessaire d'introduire un nombre des intégrateurs pour chaque voie du système à commander. Ce dernier dépend de la classe de ce système ainsi par la nature des signaux de bruits affectant le système. Un cas particulier d'un intégrateur pur est celui qui prend la forme particulière $\lambda_{ii} = 1$. Le nombre d'intégrateur nécessaire pour chaque voie du système à commander est fixé a priori par l'utilisateur par le choix de la borne supérieure et inférieure limitant cette variable, la valeur optimale de la puissance fractale de l'action intégrale de chaque voie qui représente la solution du problème d'optimisation doit être se situe à l'intérieure de ces limités proposées.

- ❖ K_4 : est une matrice de transfert qui représente l'action dérivée du contrôleur fractionnaire. Cette dernière est choisie de tel sorte que $K_4(0, x) = I_{m \times m}$. La partie de la variable (x) ici représente, d'un coté, les puissances d'ordre non entier des actions dérivées de cette matrice proposée notées ici par μ_{ij} , et d'un autre coté, il contient aussi les constants des temps de chaque dérivée d'ordre non entier, on les notées ici par β_{ij} . On obtient donc la structure suivante:

$$(K_q(s, x) \in C^{m \times m}) = \begin{bmatrix} 1 + \beta_{11}s^{\mu_{11}} & \beta_{12}s^{\mu_{12}} & \dots & \beta_{1n}s^{\mu_{1m}} \\ \beta_{21}s^{\mu_{21}} & 1 + \beta_{22}s^{\mu_{22}} & \dots & \beta_{2n}s^{\mu_{2m}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n1}s^{\mu_{n1}} & \beta_{n2}s^{\mu_{n2}} & \dots & 1 + \beta_{nn}s^{\mu_{nm}} \end{bmatrix} \quad (IV.15)$$

Le vecteur des variables de décision est donc défini par $x = (K_I, \beta_{ij}, \mu_{ij}, \lambda_{ij})$ ses valeurs optimaux sont calculées à partir de la résolution du problème d'optimisation. Une fois on détermine cette solution on pourra construire la structure fractale de ce contrôleur puis on l'estimera par un transfert d'ordre entier pour la phase d'implémentation.

IV.3.1. Exemple 2 :

Dans la synthèse du contrôleur fractionnaire, le système G peut être augmenté par les pondérations $W_1(s)$ et $W_3(s)$ comme l'indique la figure suivante [36]:

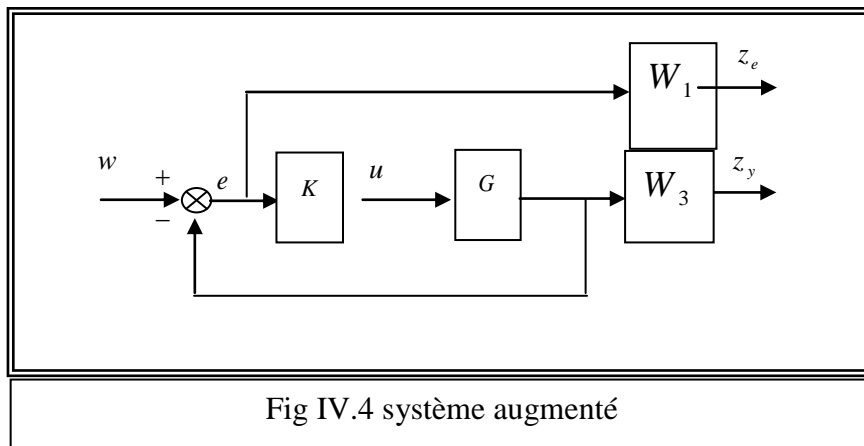


Fig IV.4 système augmenté

Ces pondérations spécifiant respectivement, l'allure de $S_d(jw)$ et $S_c(jw)$. Elles sont choisies de telles sortes que :

- a. **Spécification sur la robustesse de stabilité :** les perturbations non structurées sont de type multiplicatif, et le transfert scalaire stable le majorant est donné par :

$$W_3(s) = \begin{pmatrix} \frac{0.25(0.02s+1)}{(1+0.001s)} & 0 \\ 0 & \frac{0.25(0.02s+1)}{(1+0.001s)} \end{pmatrix} \quad (\text{VI.16})$$

Pour atteindre la performance désirée de rejet des bruits de mesure, il est nécessaire de satisfaire l'inégalité. Comme $W_3(s)$ est une fonction scalaire, le module de la fonction de sensibilité complémentaire doit rester au-dessous du module de $\frac{1}{W_3}$ pour toute la gamme de fréquences.

b. Spécification sur la robustesse des performances: La spécification sur la stabilité robuste est donnée par le transfert suivant :

$$W_1(s) = \begin{pmatrix} \frac{(0.005s+1)}{0.05s} & 0 \\ 0 & \frac{(0.005s+1)}{0.05s} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.17})$$

La robustesse des performances est assurée si le module de la fonction de sensibilité directe doit rester au-dessous du module de $\frac{1}{W_1}$ pour toute la gamme de fréquences.

Le critère à minimiser, qui permet de synthétiser un contrôleur robuste satisfaisant un compromis de robustesse, est défini par [37]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{K \in K_{admissible}} J = \min_{K \in K_{admissible}} \left\{ \sup_w \left(\bar{\sigma} \begin{bmatrix} W_1(jw) \cdot S_d(jw) \\ W_3(jw) \cdot S_c(jw) \end{bmatrix} \right) \right\} \\ \text{subject à : } x_{\min} \prec x \prec x_{\max} \end{array} \right\} \quad (\text{IV.18})$$

Avec : $x = (K_1 \quad \lambda_{11} \quad \lambda_{22} \quad \beta_{11} \quad \beta_{12} \quad \beta_{21} \quad \beta_{22} \quad \mu_{11} \quad \mu_{12} \quad \mu_{21} \quad \mu_{22})^T$

Le système d'équations (IV.18) représente, dans ce cas, un problème d'optimisation non linéaire sous contraintes de bornes. Selon les spécifications fréquentielles et temporelles

exigées par le cahier de charges, on peut ajouter d'autres contraintes linéaires et/ou non linéaires de type égalités et/ou inégalités, on obtient le formalisme général:

$$\begin{cases} \min_x \{f(x, w)\}, & w = \overline{w_{\min} \cdots w_{\max}} \\ x_{\min} \leq x \leq x_{\max} \\ g_{\text{equal}}(x, w) = 0 \\ g_{\text{iniqua}}(x, w) \leq 0 \end{cases} \quad (\text{IV.19})$$

Le problème (IV.18) est résolu par la fonction 'fminimax' qui est disponible dans le Toolbox Optimization / Matlab.

Le processus à commander utilisé pour la validation, la représentation d'état du système nominal décrivant ce processus est représenté par le modèle d'état suivant:

$$\begin{cases} \dot{x} = A \cdot x + B \cdot u \\ y = C \cdot x + D \cdot u \end{cases} \quad (\text{IV.20})$$

$y := [V_{ds} \quad V_{qs}]^T$: Le vecteur de sortie, $x = [\Phi_{dr} \quad \Phi_{qr}]^T$: Le vecteur d'état,
Avec :

$u = [I_s \quad V_r]^T$: Le vecteur de commande, $I_s := [I_{ds} \quad I_{qs}]^T$, $V_r := [V_{dr} \quad V_{qr}]^T$

Les paramètres de la machine asynchrone à double alimentation (MADA) :

- Résistance de stator $R_s = 5 \Omega$
- Résistance de rotor $R_r = 1,0113 \Omega$
- Inductance mutual $M = 0,01346 \text{ H}$
- Inductance statorique $L_s = 0,3409 \text{ H}$
- Inductance rotorique $L_r = 0,0605 \text{ H}$
- pulsation de courant Statorique $\omega_s = 146,6 \text{ rad/sec}$
- pulsation de courant Statorique $\omega_s = 2\pi \cdot (50) \text{ rad/sec}$

Où : sous forme matricielle :

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \quad (IV.21)$$

Avec :

$$G_{11} = \frac{2.225 * 10^9 s^2 + 3.719 * 10^{10} s + 1.025 * 10^{14}}{s^3 + 1 * 10^9 s^2 + 3.343 * 10^{10} s + 2.177 * 10^{13}}$$

$$G_{12} = \frac{698.9s + 1.168 * 10^4}{s^2 + 33.43s + 2.177 * 10^4}$$

$$G_{21} = \frac{-698.9s^2 - 3.728 * 10^{11} s - 1.168 * 10^{13}}{s^3 + 1e009s^2 + 3.343 * 10^{10} s + 2.177 * 10^{13}}$$

$$G_{22} = \frac{1.025 * 10^5}{s^2 + 33.43s + 2.177 * 10^4}$$

L'étude de robustesse est effectuée sur une gamme de fréquence définie par l'intervalle ($w_{\min} = 10^{-2}$, $w_{\max} = 10^{+2}$). La synthèse du contrôleur robuste par la méthode proposée est réalisée par un choix de $\gamma = 0.035$ et l'algorithme d'optimisation est initialisé par le vecteur initial $x_0 := 0.01 \cdot I_{1 \times 11}$. L'espace initial de recherche $\Omega := (\underline{x}, \bar{x})$ est donné par :

$$0 \leq K_1 \leq 10, 0 < \psi_{ii} < 1.5, 0 < \beta_{ij} < 5 \text{ and } 0 < \mu_{ij} < 1$$

La matrice de transfert du contrôleur proposé est celle formulée comme suite:

$$K(s) = K_1 \cdot K_2 \cdot \begin{bmatrix} 1/s^{\psi_{11}} & 0 \\ 0 & 1/s^{\psi_{22}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 + \beta_{11}s^{\mu_{11}} & \beta_{12}s^{\mu_{12}} \\ \beta_{21}s^{\mu_{21}} & 1 + \beta_{22}s^{\mu_{22}} \end{bmatrix} \quad (IV.22)$$

et les blocs de Simulink/Matlab de ce contrôleur est représenté suivant la figure (IV.5)

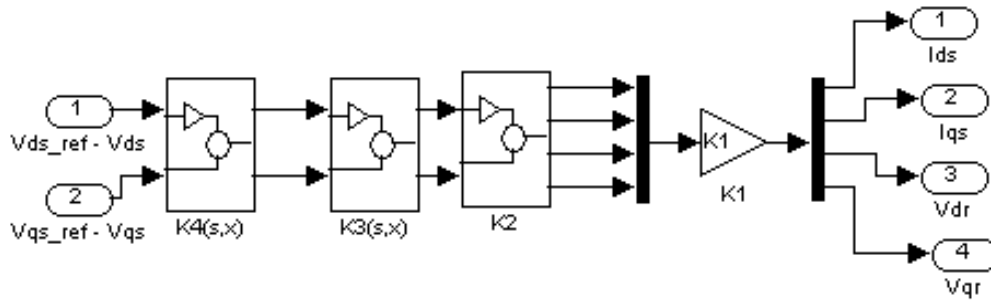


Fig.IV.5 Structure d'un contrôleur fractionnaire

Le contrôleur proportionnel K_2 est déterminé par l'utilisation de la pseudo-inverse de la matrice de gain statique de $G(0)$, on obtient:

$$G(0) = \begin{bmatrix} 4.7083 & 0.5365 \\ -0.5365 & 4.7083 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.23})$$

La solution optimale fournie par l'optimisation donne la structure suivante:

$$K(s, x^*) = 4.6237 \begin{bmatrix} 4.7083 & 0.5365 \\ -0.5365 & 4.7083 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/s^{0.912} & 0 \\ 0 & 1/s^{0.878} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+1.016s^{0.001} & 0.043s^{0.005} \\ 0.0258s^{0.025} & 1+2.434s^{0.007} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.24})$$

IV.4 Comparaison des résultats :

Dans cette partie, nous allons présenter une comparaison des résultats en temporel entre les réponses fournies par les différents types de contrôleurs cités précédemment, celle-ci pour illustrer les avantages de chacun par rapport aux autres contrôleurs.

* Analyse temporelle

Pour confirmer ces résultats, dans le plan temporel, la simulation est effectuée sur l'intervalle du temps $t = [0, 200]$ millisecondes. On commence par la présentation de la dynamique de

poursuite en absence des entrées de perturbations et de bruits de mesure, on utilise dans le premier coup le vecteur de consigne $r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ puis l'entrée de consigne. les figures (IV.6).

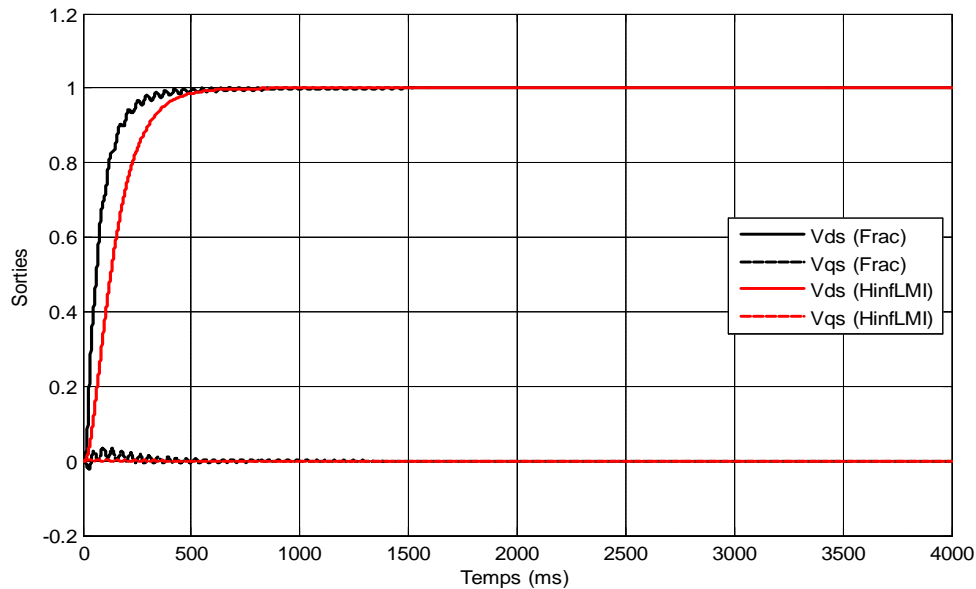


Fig IV.6 Dynamique de poursuite du système corrigé

D'après les résultats obtenus, on peut constater que le contrôleur fractionnaire devient plus robuste que celui obtenu par la méthode H_∞ basée sur les inégalités matricielles (LMIs). Ainsi que la dynamique de poursuite fournie par le premier contrôleur devient meilleure que celle obtenue par le second contrôleur.

On constate que le système bouclé ne possède pas d'erreur statique en boucle fermée, et qu'il est bien découplé, ceci est déduit du fait que chaque référence agit sur une seule sortie.

Pour voir l'effet des perturbations, on utilise la configuration de la figure (IV.7). Les entrées utilisées dans cette simulation sont les suivantes:

- 1- L'entrée de consigne $w(t)$ à suivre : est un échelon d'unité $r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ appliqué durant l'intervalle du temps $t = [0, 4000]$ milliseconde.
- 2- L'entrée de perturbations $d(t)$ à rejeter : est un échelon d'amplitude 0.45, il est injecté à partir de l'instant $t = 1500$ milliseconde.

Les figure (IV.7) représente respectivement les réponses et les commandes temporelles du système bouclé pour les trois entrées citées précédemment.

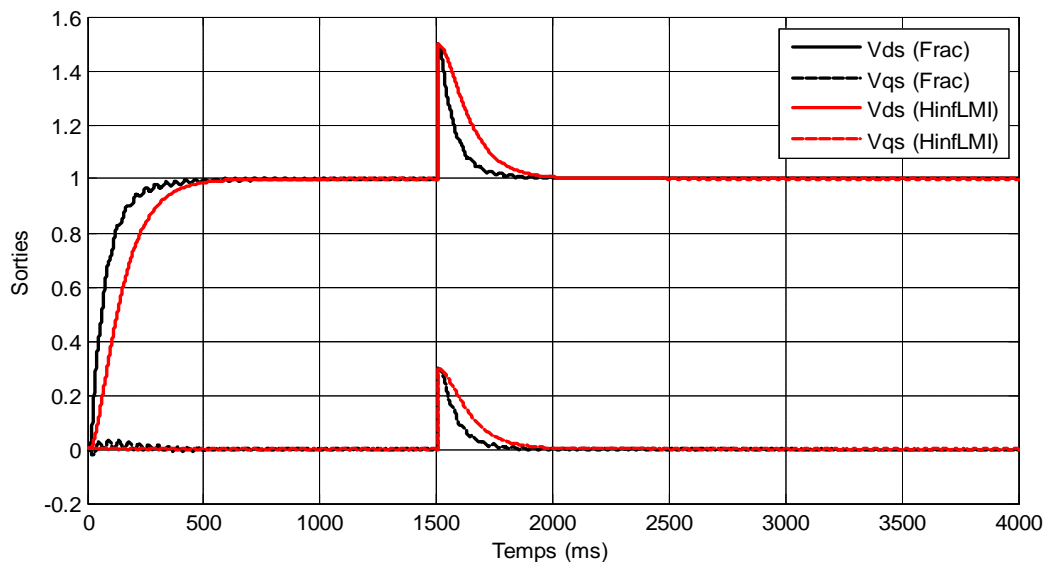


Fig.IV.7 dynamique de rejet de perturbation du système corrigé

D'après les figures ci-dessus, on peut remarquer : l'insensibilité du contrôleur aux variations paramétriques du modèle, ceci traduit par une obtention d'une bonne dynamique de rejection des perturbations et maintienne une dynamique de poursuite acceptable pour le contrôleur fractionnaire.

Pour voir l'effet des perturbations et de bruits de mesure, on utilise la configuration de la figure (IV.8). Les entrées utilisées dans cette simulation sont les suivantes:

1- L'entrée de consigne $w(t)$ à suivie : est un échelon $r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ d'unité appliqué durant l'intervalle du temps $t = [0, 4000]$ milliseconde.

2- L'entrée de perturbations $d(t)$ à rejet : est un échelon d'amplitude 0.45, il est injecté à partir de l'instant $t = 1500$ milliseconde.

3- L'entrée de bruits de mesure : est un bruit blanc définit par une moyenne nulle et une variance égale à 0.025, il est injecté à partir de l'instant $t = 3000$ milliseconde.

La figure (IV.8) représente les réponses temporelles du système bouclé pour les trois entrées citées précédemment, d'où on peut confirmer les résultats obtenus dans le plan fréquentiel.

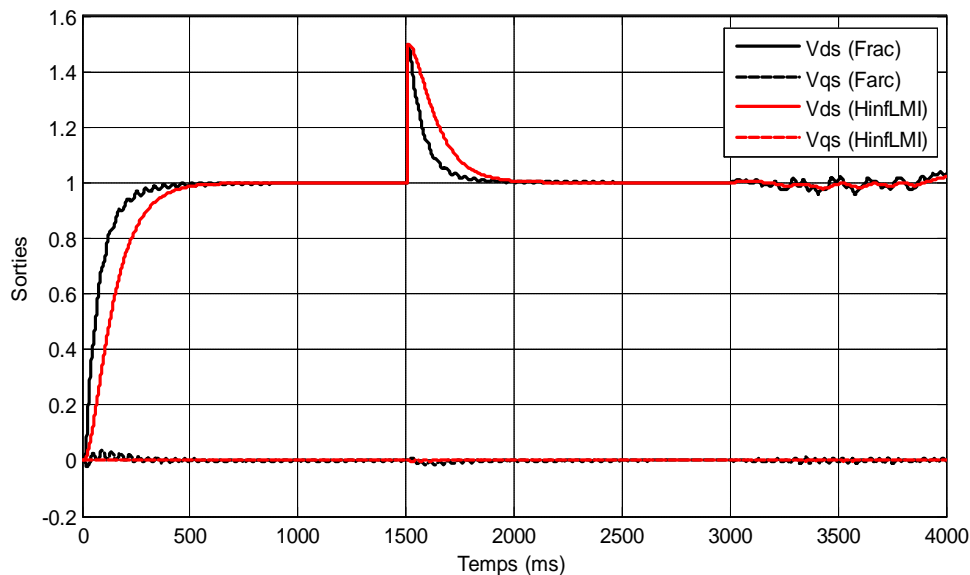


Fig IV.8 dynamique de rejet de perturbation et de bruit du système corrigé

D'après cette figure, on peut confirmer, dans le plan temporel, les résultats obtenus dans le plan fréquentiel. L'entrée de perturbation est bien rejetée, l'effet des bruits de mesures est bien minimiser et la dynamique de poursuite est acceptable par la méthode fractionnaire.

IV.5. Conclusion :

Dans ce chapitre, on a présenté une approche de commande basée sur la résolution d'un problème d'optimisation non linéaire sous contraintes de type Min-Max. Cette approche peut utiliser des différentes structures du contrôleur synthétisé, on a cité parmi lesquelles utilisées celle du PID et des gains principaux. L'avantage de cette méthode de commande est la possibilité d'élaborer un contrôleur robuste satisfaisant un nombre important des spécifications fréquentielles, ce contrôleur est capable d'assurer une marge importante de robustesse face aux différentes perturbations affectant le modèle de synthèse. L'implémentation de ce type des contrôleurs nécessite à priori l'application de l'approche de l'identification fréquentielle qui résout le problème d'ordre fractionnaire.

Ces résultats montrent que les contrôleurs obtenus assurent des meilleures performances l'un par rapport à l'autre, ainsi ces performances dépendent sur le choix de l'action parmi lesquelles utilisées dans ce contrôleur qu'il faut mettre l'ordre non entier.

Conclusion générale

Nous avons présenté dans ce travail, des notions sur la machine asynchrone à double alimentation (MADA), après nous avons évoqué les systèmes d'ordre fractionnaire, dont nous avons développé la représentation d'état, la fonction de transfert et la stabilité. La commande robuste d'ordre entier à été expliquée, dont nous avons évoqué l'impact des bruits de mesure, les perturbations extérieures qui affectent la sortie, la sensibilité directe et complémentaire sur la boucle de régulation des systèmes mono-variables et multi-variables.

Dans la partie simulations nous avons présenté l'application de la commande d'ordre fractionnaire des systèmes linéaires multi-variables par deux approches, en l'occurrence, le PID fractionnaire et par la méthode des gains principaux. Par la suite, nous avons appliqué la méthode des gains principaux sur la machine asynchrone à double alimentation (MADA).

Bibliographie

- [1] **Vincent Rogez**, « *modélisation simplifiée de source de production décentralisée pour des études de dynamique des réseaux. Application à l'intégration d'une production éolienne dans un réseau de distribution insulaire* », thèse de doctorat, université de Lille, 2004.
- [2] **Arnaud Boyette**, « *contrôle-commande d'un générateur asynchrone à double alimentation avec système de stockage pour la production éolienne* », thèse de doctorat, université de Nancy, 2006.
- [3] **Paul-Etienne Vidal**, « *commande non-linéaire d'une machine asynchrone à double alimentation* », thèses de doctorat, Institut polytechnique de Toulouse, 2004.
- [4] **Sejir Khojet El Khil**, « *commande vectorielle d'une machine asynchrone doublement alimentée (MADA)* », thèses de doctorat, Institut national polytechnique de Toulouse, 2006.
- [5] **Miguel Lopez**, « *contribution à l'optimisation d'un système de conversion éolien pour une unité de production isolée* », thèse de doctorat, université de Paris, 2007.
- [6] **Farid Merrahi**, « *alimentation et commande d'une machine asynchrone à double alimentation (application à l'énergie éolienne)* » mémoire de magister, école nationale polytechnique, 2007.
- [7] **Elbia Youcef**, « *commande floue optimisée d'une machine asynchrone à double alimentation et à flux orienté* », Mémoire de magister, université de Batna, 2009.
- [8] **Azeddine Chaiba**, « *commande de la machine asynchrone à double alimentation par des techniques de l'intelligence artificielle* », thèse de doctorat, université de Batna, 2010.
- [9] **R. GHOSN**, « *Contrôle Vectoriel de la Machine Asynchrone à Rotor Bobiné à Double Alimentation* », Thèse de Doctorat – ENSEEIHT – Institut National Polytechnique de Toulouse, Octobre 2001.
- [10] **D. RAMUZ**, « *Machine Généralisée Alimentée par Deux Convertisseurs* », Thèse de Doctorat, UFR des Sciences Techniques et Gestion de l'Industrie-Université de Franche-Comté, Mai 2000.
- [11] **Oustaloup**, « *La commande CORNE. Du séculaire au multi variables* », Editions HARMES, Paris, 1995.

- [12] **A. Djouambi**, « *Contribution à la commande CRONE* », Thèse de Doctorat Université de Constantine, Algérie, 2008.
- [13] **A. Oustaloup, O. Cois, L. Le Lay**, « *Représentation et identification par modèle non entier* », Hermes Science Publishing LTD, Paris, 2005.
- [14] **L. Le Lay**, « *Identification fréquentielle et temporelle par modèle non entier* », Thèse de Doctorat, 1998.
- [15] **I. Podlubny**, « *Fractional differential equations* », Academic press. San Diago, 1999.
- [16] **T. Djamah**, « *Identification des systèmes par des modèles d'ordre fractionnaire* ». Thèse de doctorat , UMMTO, Tizi-Ouzou, 2009.
- [17] **I. N'Doye**, « *Généralisation du lemme de Gronwall-Bellman pour la stabilisation des systèmes fractionnaires* ». Thèse de doctorat . L'Université Henri Poincaré- Nancy 1, 2011.
- [18] **D. Matignon**, « *satability results in fractional equation with applications to contrôle processing* ».In Proc.IEEE-IMACS system. Man cyber. Conf .Lille france, 1996-b.
- [19] **D. Matignon**, « *Recent results in fractional diffirential system theory. Technical-Report 96C004* ».Ecole Nationale supérieure dés Télécommunications. France, 1996-a.
- [20] **J. Sabatier, M. Moze, and C. Farges**, « *On stability of fractional ordre system* ». In Proc, IFAC Workshop on fractional Differentiation and its Applications. Ankara, Turkey, 2008
- [21] **A. M. Lyapunov**, « *Stability of motion* », Academic Press, New-York and London 1966.
- [22] **P. Kundur**. « *Power System Stability and control* », The Electric Power search Institute, Mc Graw-Hill Education, 1994.
- [23] **Matignon et Andréa-Noval**, « *Some results on controllability and observability of finite-dimensional fractional système* », In Proc. Mathimatical theory of Networks and système symposium, Lille, France, 1996.
- [24] **D. Matignon, and B. Andréa-Novél**, « *Observer-based for fractional differential systems* » In Proc. IEEE Conf. Decision and Contr. San Diego, France.

- [25] **B. Vinagre, M. Monje, C.A. and Caldero , A.J.** « *fractional ordre system and fractional actions ; tutorial workshop* ». In proc .IEEE Conf. Décision and contr. las Vegas, USA,2002
- [26] **Octavian Enacheanu**, « *Modélisation fractale des réseaux électriques* ». Thèse de doctorat Grenoble. 2008.
- [27] **Matignon, et Andréa-Novel**, « *Observer-based fer fractional diffirential système* ». In Proc. IEEE Conf. Décision and contr, San Diego, USA, 1997.
- [28] **R. C. Dorf and R. H. Bishop**, « *Modern control systems* ». Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1995.
- [29] **J.C. Truxal**, « *Automatic Feedback Control System Synthesis* ». Mc Graw-Hill Electrical and Electronic Engineering Séries. Mc Graw-Hill, New York, USA, 1955.
- [30] **P. Naslin**, « *Technologie et calcul pratique des systmes asservis* ». Dunod, Paris, France, 1968.
- [31] **K. Ogata**, « *Modern control engineering* ». Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey,USA, 1990.
- [32] **T. Glad and L. Ljung**, « *Control theory: Multivariable and nonlinear methods* ». Taylor and Francis, New , New York, USA, 2000.
- [33] **I. M. Horowitz**, « *Synthesis of feedback systems* », Academic Press, London, UK, 1963.
- [34] **D.Arzelier**, « *Representation et analyse des systems linèaires* », Notes de cours Toulouse 2010.
- [35] **Q. G. Wang, C. C. Hang, Y. Zhang, and Q. Bi**, « *Multivariable controller autotuning with its application in hvac systems* », 6 :4353–4357, 1999.
- [36] **G. Zames**, « *Feedback and optimal sensitivity : Model référence transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses* », *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 26(2) :301–320, 1981.
- [37] **W. Zhan, H. Jizhuo, and G. Mingxiu**, « *Applications of matlab optimization toolbox on sections of steel structure* », *Industrial Construction*, 8, 2002.

Résumé : L'objet de ce mémoire concerne la commande robuste d'ordre entier des systèmes multi-variables. La commande des systèmes électriques présentent de grandes difficultés à cause de leur grande complexité et leurs forte non linéarités et le retard pur. L'utilisation de la commande (CROE) permet de remédier à ce problème grâce à leur flexibilité, et leurs capacités d'approximation. Le premier chapitre du mémoire concerne la description de la machine asynchrone à double alimentations. Le deuxième chapitre notion et analyse des systèmes d'ordre fractionnaire et le troisième Commande Robuste d'Ordre Entier (CROE), enfin le dernier présent la Commande du système multi-variable par régulateur PID Fractionnaire.

Mots-clés : Commande robuste, CRONE, PID Fractionnaire, Sensibilité directe, sensibilité complémentaire

Abstract: This Memory deals with robust no order control for multi-input systems. The control of electrical systems is rather difficult, because of their complexity, strong nonlinearities and multiple delays. The use of CRONE can solve the problem thanks to their flexibility and their ability to approximate. The first part of this memory its concerns description of double alimentations machine. The second part notion and analyse of fractional systems order, and the third it's the CRONE, finally this last part the Command of system multi-output for fractional regulator (PID)

Key Words: Robust control, CRONE, Fractional PID, Stability, Direct sensitivity and complementary sensitivity