RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÈ KASDI MERBAH-OUARGLA

Département de Mathématiques et Informatique

MÉMOIRE

En vue de l'obtention du diplôme de

MAGISTER

Filière : **MATHÉMATIQUES**

OPTION : **Équations différentielles et systèmes dynamiques**

Présenté par : **BELOUL SAID**

Intitulé

Sur la résolution du problème de Laplace perturbé

dans un polygone plan, par décomposition du domaine

Soutenu publiquement le .20 Octobre 2010 à l'U.de Kasdi Merbah

Devant le jury composé de

M.Tayeb .Meftah Prof Université KASDI MERBAH - Ouargla Président.

A.Djamal .Chacha M.C(A) Université KASDI MERBAH - Ouargla Examinateur.

Amara .Guerfi M.C(A) Université KASDI MERBAH - Ouargla Examinateur.

SAID. M. Said M.C(A) Université KASDI MERBAH - Ouargla Rapporteur.

Remerciement

Je tiens à remercier mon directeur de mémoire le docteur. SAID.M.Saïd qui m'a proposé ce sujet et qui m'a beaucoup aidé durant la préparation de ce mémoire.

Je remercie le prof :**M.Tayeb Mefteh**.Université KASDI MERBAH-Ouargla pour avoir accepté d'être le président du jury de ce mémoir.

Je remercie les Docteurs :

Dr :**A.Djamel Chacha**.Université KASDI MERBAH

Dr :**Amara Guerfi**.Université KASDI MERBAH

pour avoir accépté d' examiner ce travail.

Mes remerciements vont particulierement à :

le prof :**Smail Djebali**-ENS. vieux kouba-Alger

le prof : **Boubakr.K.Saadalah** -ENS. vieux kouba-Alger

des leurs aides et encouragemeents.

Je ne voudrais pas terminer sans remercier toute ma famille :mes parents ,mes fréres ,mes soeurs , et aussi à tous mes collegues qui m'ont apporté le soutien moral suffisant.

ملخص :

يهدف هذَا العمل الَى درَاسة مسَالة لَابلَاس المتذبذب في مضلع مستو ،وذلك بتجزِئته الَى قطَاعَات مستوية . نقوم بدرسة المسَالة في قطَاع مستو بَاستعمَال دلة ڤرين التي تعطي عبَارة الحل صرَاحة، بعد كتَابة المسَالة بتحويل ميلين. ثم بتجزِئة منَاسبة لُلوحدة نمدُد النتَاج المحصل عليهَا الَى كَامل المضلع.

الكلمَات المفتَاحية : . تحويل ميلين ، دَالة ڤرين ، فضَاءَات سوبولوف ، تجزِئة الوحدة

Abstract

The aim of this work is to study the perturbed Laplace problem governed by a spectral parameter in polygonal plane,by domain decomposition into plane sectors.
We study the problem in plane sector, and we show that by the Green function which gives the explicit expression of the solution .After effecting the Mellin transformation, and by the partition of the unity of the polygon we extend this study to the whole polygon.
Keys words :Mellin transformation, Green function, Sobolev spaces, partition of the unity.

Resumé

Le but de ce travail, est d'étudier le problème de Laplace perturbé dans un polygone plan, et ceci par décomposition du domaine au scteurs plans.
On étudie le problème dans un secteur plan , la fonction de Green associée au problème nous donne l'expression de la solution explicitement après avoir effectuer la transformation de Mellin, la partition de l'unité nous permet d'étendre l'étude dans le polygone tout entier.
Mots clés : Transformation de Mellin, fonction de Green, espaces de Sobolev, partition de l'unité.

Table des matières

Notations

$\mathbb{R}$: corps des réels.

$\mathbb{R}^+$: l'ensemble des réels positif.

σ : une nombre complexe telle que $\sigma = \mu + i\nu \;\; \mu, \nu \in \mathbb{R}$

Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ de frontière polygonale notée Γ

Ω_φ un secteur plan infini d'ouverture φ

N : le nombre des sommets du polygône.

S_j : les sommets du polygône $j = 1, 2; ...N$.

φ : angle du secteur plan, telle que $0 < \varphi < 2\pi$:

Γ_φ : la frontière du secteur plan.

$\mathfrak{D}(\Omega_\varphi)$: l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact

$L^2(\Omega_\varphi)$: l'espace des fonctions carrè intégrable pour la mesure de Lebesgue dx

$H^1(\Omega_\varphi)$: l'espace de Sobolev d'ordre1

$H^2(\Omega_\varphi)$: l'espace de Sobolev d'ordre2

$H^m(\Omega_\varphi)$: l'espace de Sobolev d'ordre m où (m entier positif)

$H^s(\Omega_\varphi)$: l'espace de Sobolev d'ordre fractionel s tel que $0 < s < 1$

$H_0^1(\Omega_\varphi)$: l'adherence de $\mathfrak{D}(\Omega_\varphi)$ dans$H^1(\Omega_\varphi)$

$H_0^m(\Omega_\varphi)$: l'adherence de $\mathfrak{D}(\Omega_\varphi)$ dans$H^m(\Omega_\varphi)$

$\langle ., . \rangle$: désignera à le produit scalaire

$. * .$: le produit de convolution multiplicative

$\widetilde{f}$: transformation de Mellin de f

$\hat{f}$:la transformation de Fourier de f

$\dfrac{dt}{t}$:la mesure de Hàar

(r, θ) : les coordonnèes polaires

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{a-1} dx, \;\; (a > 0) : \text{la fonction } \Gamma$$

$B(0,R)$: la boule ouverte de centre O et de rayon R

$\overline{B}(0,R)$: la boule fermé de centre O et de rayon R

Δ : l'opérateur de Laplace $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$

$\frac{\partial}{\partial \eta}$: la derivèe par rapport à la normale η où :
$\frac{\partial}{\partial \nu} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}$
Formule de Lagrange :

pour un opérateur $L : y \mapsto Ly = a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y$

$$zLy - yLz = \frac{d}{dx}[a_0(y'z - yz') + (a_1 - a_0')yz]$$

Introduction

L'étude d'un problème elliptique dans un domaine régulier est bien connue , mais les difficultés se trouvent quand le domaine contient des singularités soit au bord ce qui concerne ce travail, soit dans le domaine lui même .

La majorité des auteurs qui ont travaillé dans ce type de problèmes surtout les problèmes ellliptiques dans un domaine non regulier , choisissent les espaces avec poids ,car le rôle des foctions poids est très efficace comme Kondratiev [11] qui utilise la tranformation $\ln r = t$.

aussi M.Merigot $[14], [15], [16]$ publie en 1974 la première étude systématique de la régularité dans les espaces $L^p(\Omega)$ .Il utilise le noyau de Poisson de l'opérateur ainsi que la transformation de Mellin pour mettre en place des inégalités a priori afin d'étudier l'existence et l'unicité de la solution

P.Grisvard [1] [5] précise la régularité des solutions du problème de Dirichlet dans un polygône plan ,il utilise l'alternative de Freholm, et généralise les résultats de Kadlec et Hanna et Smith[9]. Monique Dauge [4] avait plusieurs travaux dans les domaines à frontière polygonale et polyèdhral,aussi M.Moussaoui[17] qui est étudié un problème oblique dans polygone plan.

On propose dans ce travail de résoudre un problème elliptique dans un polygone plan, et la méthode sera comme suit :

On décompose le polygone en secteurs plan et un ouvert régulièr , ce qui nous conduit simplement d'èudier le problème dans un secteur plan ,après de prolonger les côtés $\Gamma_j$et Γ_{j+1}

Nous choisissons à travailler dans les espaces de Hilbert usuels(classiques)(les espacesH^s), donc on a pas le problème adjoint , simplement l'opèrateur de Laplace est auto adjoint.

[1] Pierre Grisvard est un mathématicien français $(1940 - 1994)$,il a travaillé à Nice(france)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ de frontière polygonale Γ , on décompose Ω en des secteurs plan et un ouvert régulier .

Γ sera donc d'un nombre fini de segments linéaires Γ_j, $j = 1, ...N$, on supposera aussi Ω d'un seul côté de sa frontière Γ .

S_j désignera l'origine de Γ_jc'est à dire :

$$\Gamma_j \cap \Gamma_{j+1} = \{S_j\}$$

On note par φ_j la mesure de l'angle formé par Γ_j, Γ_{j+1} vers l'intérieur .

On note par ν_j la normale à Γ_j orientée vers l'extérieur de Ω,et $\tau_j$le vecteur unitaire tangent à Γ_j et orienté dans le sens de Γ_j

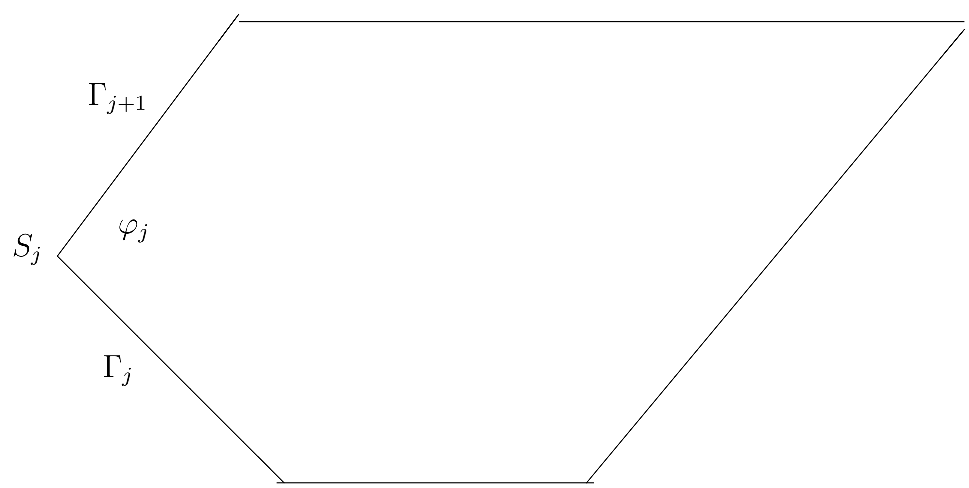

Fig. 1

Ce mémoire estcomposé d'une introduction et 4 chapitres. Dans l'introduction on explique la méthode de décomposition du domaine (polygone plan) de travail.

Dans le premier chapitre,on donne quelques définitions et notions classiques concernant :

- La géométrie du domaine du travail , et comme le polygone est Lipchitzien ,nous rappelons la définition d'un domaine Lipchitzien.

- Les espaces de Sobolev et leurs propriétés qui sont très utiles, donc il est necéssaire de faire un rappel sur la structure de ces espaces et ses propriètès
  La transformation de Mellin est une transformation intègrale, elle est bien adaptèe à notre problème où on ramène le problème à un autre de cauchy , donc il est necessaire de faire connaitre au moins quelques propriètès concernant cette transformation.

- La construction d'une fonction de Green associée à un problème homogène est un outil qui permet de nous donner l'expression de la solution explicitement , alors on fait un rappel sur ce principe et les propriétés de la fonction de Green.

Dans le deuxiéme chapitre , on propose d'étudier le Laplacien avec les conditions de Dirichlet et de Neumann dans un secteur plan , après de prolonger les côtès Γ_1 et Γ_2 . On établit une fonction G associé au Laplacien dans le cas de Dirichlet,travail simillaire avec les conditions de Neumann on établit une fonction de Green N On donne quelques remarques sur les espaces avec poids et la relation entre ces espaces et les espaces usuels Dans le troisième chapitre , on s'interesse à étudier l'existence de la solution , on établira une inègalitè à priori , et par l'application du lemme de Peetre ,et à l'aide de la forme de la solution qui est donnée par la fonction de green associe au problème nous assurons l'existence de la solution
Pour certaines conditions sur f, on voit premièrement pour $f \in L^2$ par suite pour $f \in H^m$, pour m entier positif. Dans le quatrième chapitre, nous ètudions l'unicitè de la solution avec les conditions de Dirichlet or de Neumann.
On généralise l'ètude au polygone tout entier, et ceci par partition de l'unité convenable.
On termine ce mémoire par une conclusion générale.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Propriétés géometriques des domaines

1.1.1 Propriété du cône :

Soit Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$, on dit que Ω vérifie la propriété du cône , si pour tout $x \in \Gamma$ (frontière de Ω) il existe un voisinage $V_x$de x ,et de nouvelle coordonnées $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ telle que :

1. V_x est un hypercube

   i.e : $V_x = \{(y_1, y_2, ..., y_n) \, ; -a_j < y_j < a_j, 1 \leq j \leq n\}$

2. Pour $y \in \overline{\Omega} \cap V_x$ et $z \in C$ on a $y - z \in \Omega$

   où C est un cône

$$C = \{z = (z', z_n), \ \cot\theta |z'| < z_n < h\}, \ \theta \in]0, \frac{\pi}{2}], \ h > 0\}$$

1.1.2 Propriété de Lipschitz

Définition 1.1.1 *Soit Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$ de frontière Γ , on dit que Ω est Lipshitzien[1] si et seulement si Γ répresente la graphe d'une fonction localement Lipschitzienne.*
On dit que la fonction φ est de Lipshitz s'il existe une constante K tel que :

$$|\varphi(x) - \varphi(x')| \leq K|x - x'|$$

Autre définition :

Définition 1.1.2 *On dit que Ω est Lipschitzien si pour tout $x \in \Gamma$ il existe un voisinage V_x de x ,et une nouvelle coordonnées orthogonales $\{y_1, y_2, ...y_n\}$ telle que :*

1. $V_x = \{(y_1, y_2, ..., y_n) \, , -a_j < y_j < a_j, 1 \leq j \leq n\}$
2. *il existe une fonction lipschitzienne ϕ définit dans V' où :*
   $V' = \{(y_1, y_2, ..., y_{n-1}) \, , -a_j < y_j < a_j, 1 \leq j \leq n-1\}$ *tel que :*

$$|\phi(y')| \leq \frac{a_n}{2} \qquad \textit{pour tout} \quad y' = (y_1, ..., y_{n-1}) \in V'$$

$$\Omega \cap V_x = \{y = (y', y_n) \in V_x / y_n < \phi(y')\}$$

$$\Gamma \cap V_x = \{y = (y', y_n) \in V_x / y_n = \phi(y')\}$$

1.2 Espaces de Sobolev

Ce sont des espaces très intéressant et très important dans l'étude des équations aux dérivées partielles , leurs avantages sont multiple.Tout d'abord ils possèdent une structure des espaces de Hilbert[2] , ce qui rend leur utilisation commode,ensuite ils mesurent trés finement la régularité d'une distribution ,permettant aussi de passer des solutions

[1]Rudolf otto sigismund Lipschitz est un mathématicien allemand $1832-1903$,il a travaillé à Bonn (Allemagne

[2]David Hilbert est mathématicien allemand $1862-1943$,il a travaillé à Königsberg(Allemagne)

faibles (au sens de distribution) aux solutions classiques (fortes) d'équations aux derivées partielles.

Définition 1.2.1 *Rappelons que $L^2(\Omega)$ (Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$), l'espace de fonctions u carré sommables sur Ω i.e : mesurables telle que :*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} := (\int_\Omega |u|^2 dx)^{\frac{1}{2}} < \infty \tag{1.1}$$

$$L^2(\Omega) = \{u/(\int_\Omega |u|^2 dx)^{\frac{1}{2}} < \infty\}$$

On posera souvent $L^2(\Omega) = H^0(\Omega)$

$L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour la norme (1.1) *et pour le produit scalaire suivant :*

$$(u,v)_{L^2} := \int_\Omega u\bar{v}dx$$

1.2.1 Les espaces $H^m(\Omega)$(m entier)

Soit maintenant m un entier $m > 1$,

L'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ d'ordre m sur Ω est définit par :

$$H^m(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega), D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall\alpha : |\alpha| \leq m\}$$

où

$D^\alpha = \dfrac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}.....\partial x_n^{\alpha_n}}$ et $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2...\alpha_n)$

$H^m(\Omega)$ est un espace de Banach muni de la norme :

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} := (\sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)})^{\frac{1}{2}} \tag{1.2}$$

Proposition 1.2.1 *$H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable, qui s'injecte continuement dans $L^2(\Omega)$, muni du produit scalaire :*

$$(u,v)_{H^m} = \sum_{|\alpha|\leq m} |D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2}$$

Propriétés des espaces $H^m(\Omega)$

1. Si $m_1 \geq m_2$ alors $H^{m_1}(\Omega)$ est contenu dans $H^{m_2}(\Omega)$ est cette inclusion est continue, de plus $\mathfrak{D}(\Omega)$ est contenu dans $H^m(\Omega)$ pour tout $m > 1$
2. Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, alors $C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $H^m(\mathbb{R}^n)$

L'espace $H_0^m(\Omega)$ **:**

Définition 1.2.2 *Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$, $m \in \mathbf{N}$.
On note $H_0^m(\Omega)$ *l'adhérence de* $\mathfrak{D}(\Omega)$ *pour la norme de* $H^m(\Omega)$
c'est à dire $\overline{\mathfrak{D}(\Omega)} = H_0^m(\Omega)$
$H_0^m(\Omega)$ *est un sous espace vectoriel normé , fermé de* $H^m(\Omega)$ *muni de la norme*(1.2)

Proposition 1.2.2 *Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$ m_1, m_2 *deux entiers* $m_1 < m_2$.
L'injection de $H_0^{m_2}(\Omega)$ *dans* $H_0^{m_1}(\Omega)$ *est compacte.*

1.2.2 Les espaces $H^s(\Omega)$(s réel)

Définition 1.2.3 *Soit* $s \in \mathbb{R}$ *, on désigne par* $H^s(\mathbb{R}^n)$ *l'espace vectoriel qui contient les éléments* $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ *(l'espace des distributions temperées)tels que* $\hat{u}$ *soit une fonction mésurable et* $(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$.. *,c'est à dire :*

$$H^s(\mathbb{R}^n) := \{u \in S'(\mathbb{R}^n); (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

$H^s(\mathbb{R}^n)$ *est un espace de Hilbert muni de la norme :*

$$\|u\|_s^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$$

et du produit scalaire :

$$(u,v)_s := \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s \hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}(\xi)} d\xi$$

où $\hat{u}$ *désignera la transformée de Fourier*[3] *de* u *avec :*

$$\hat{u}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} u(x) e^{-2\pi i \xi x} dx, \ \xi \in \mathbb{R}^n$$

[3]Jean baptiste joseph Fourier est un mathèmaticien français$(1768-1830)$,il a travaillé à Auxere,puis à Paris

Remarque 1.2.1 *Si $s > 0$ définit l'espace $H^s(\mathbb{R}^n)$ comme suit :*

$$H^s(\mathbb{R}^n) := \{u \in L^2(\mathbb{R}^n); (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on définit l'espace $H^s(\Omega)$ pour tout réel s de différentes façons comme suit :

Définition 1.2.4 *L'espace $H^s(\Omega)$ est un espace des restrictions des fonctions de $H^s(\mathbb{R}^n)$ à Ω,*
muni de la norme

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} := \inf_{U_{/\Omega}=u} \|U\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$$

où

$$H^s(\mathbb{R}^n) := \{u \in S'(\mathbb{R}^n); (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

on peut aussi définir l'espace $H^s(\Omega)$ par l'interpolation :

Définition 1.2.5 *Soient X, Y deux espaces de Banach , $X \hookrightarrow Y$ (avec injection continue) on définit l'espace d'interpolation entre les deux espaces comme suit :*

$$(X, Y)_\theta := \{a = x + y, t^{-\theta-1} K(t, a) \in L^2(0, +\infty)\}$$

où $x \in X$, $y \in Y$ et $K(t, a) = \inf\limits_{a=x+y} (\|x\|_X + t\|y\|_Y)$, $0 < \theta < 1$
l'espace $(X, Y)_\theta$ est un espace de Banach muni de la norme :

$$\|a\|_\theta := \Big(\int_0^{+\infty} |t^{-\theta} K(t, a)|^2 \frac{dt}{t} \Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$H^s(\Omega) := (H^m(\Omega), L^2(\Omega))_\theta$$

où $0 < \theta < 1$, $s = (1 - \theta)m$, dans ce cas l'espace $H^s(\Omega)$ est un espace d'interpolation entre les deux espaces $H^m(\Omega)$ et $L^2(\Omega)$.

Donc l'espace $H^s(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni de la norme :

$$\|u\|_{H^s} := \Big(\int_0^{+\infty} |t^{-s} K(t, a)|^2 \frac{dt}{t} \Big)^{\frac{1}{2}}$$

Définition 1.2.6 *sssssssoit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, alors pour $0 < s < 1$ et $1 \leq p \leq +\infty$ on définit L'espace $W^{s,p}(\Omega)$ comme suit :*

$$W^{s,p}(\Omega) := \{u \in L^p, \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy < \infty\}$$

Donc pour $p = 2$ et $n = 2$ on résulte :

$$W^{s,2}(\Omega) = H^s(\Omega) := \{u \in L^2 / \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{2(1+s)}} dxdy < +\infty\}$$

L'espace $H^s(\Omega)$ (pour $n = 2$) est un espace de Hilbert muni de la norme :

$$\|u\|_{H^s}^2 = \|u\|_{L^2}^2 + \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{2(s+1)}} dxdy$$

et généralement,on définit l'espace $H^{m+s}(\Omega)$ pour $m > 0$ (entier) et $0 < s < 1$ comme suit :

$$H^{m+s}(\Omega) := \{u \in H^m : \int_\Omega \int_\Omega \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^2}{|x-y|^{2(1+s)}} dxdy < +\infty\}$$

où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ l'espace $H^{m+s}(\Omega)$ muni de la norme :

$$\|u\|_{H^{m+s}}^2 := \|u\|_{H^m}^2 + \sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^2}{|x-y|^{2(s+1)}} dxdy$$

Remarque 1.2.2 *Si Ω est de frontière Lipschitzienne , alors les trois définitions précédentes sont équivalentes.*

Propriétés des l'espace $H^s(\Omega_\varphi)$

Théorème 1.2.1 *(la densité)*

*Si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière Lipschitzienne ,alors $\mathfrak{D}(\Omega)$ est dense dans $H^s(\Omega)$ si et seulement si $0 \leq s \leq \frac{1}{2}$ (**cf**[8])*

[4] par consequent on a :

$$si \;\; 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \Longrightarrow H_0^s(\Omega) = H^s(\Omega)$$
$$si \;\; s > \frac{1}{2} \Longrightarrow H_0^s(\Omega) \subset H^s(\Omega) \quad (stictement)$$

[4][8] P.Grisvard(Elliptic Problems in Nonsmooth Domains, Pitman, Boston (1985).)

Théorème 1.2.2 *(Extension)*

Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, borné de frontière Lipschitzienne, alors pour tout $s > 0$,il existe une application continue P de $H^s(\Omega)$ dans $H^s(\mathbb{R}^n)$ telle que :

$$Pu = u \ \ p.p \, dans \, \Omega$$

(**cf** [5])

Théorème 1.2.3 *(La compacité) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ borné ,avec la frontière Γ est une variété indéfiniment différentiable de dimension $(n-1)$,Ω étant localement d'un seul côtè de Γ.*
s réel quelconque ,alors :
$\forall\varepsilon > 0$ *l'injection $H^s \hookrightarrow H^{s-\varepsilon}(\Omega)$ est compacte .*

Démonstration :

1) Il suffit de montrer le théorème avec $s > 0$ car par passage à des sous-espces fermés, l'injection de $H_0^s(\Omega) \hookrightarrow H_0^{s-\varepsilon}(\Omega)$ est également compacte et donc, par transposition $H^{-s+\varepsilon}(\Omega) \hookrightarrow H^{-s}(\Omega)$ est compacte , d'où le résultat désiré .
2) Soit donc $s > 0$ fixé , il existe un opérateur P :

$$u \longmapsto Pu$$

linéaire continue de $H^s(\Omega) \longrightarrow H_0^s(\mathbb{R}^n)$ tel que : $Pu = u$ p.p sur Ω
Au soit à support dans un compact K fixé.

$$\Omega \subset K \tag{1.3}$$

Soit $(u_n) \in H^s(\Omega)$ avec $u_n \to 0$ dans $H^s(\Omega)$ faible. On veut montrer que $u_n \to 0$ dans $H^{s-\varepsilon}(\Omega)$ fort ,mais on a :

$$v_n = Pu_n \to 0 \, dans \ \ H^s(\mathbb{R}^n) \ \ faible \tag{1.4}$$

et comme l'opération (restriction à Ω) est continue de $H^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^n) \to H^{s-\varepsilon}(\Omega)$, donc il suffit de montrer que(1.4) entraine :

$$v_n \to 0 \; dans \; H^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^n) \;\; fort \tag{1.5}$$

ou encore si $\widehat{v_n}$ désignant la transformation de Fourier de v_n il suffit de montrer que :

$$X_n = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|)^{2(s-\varepsilon)} |\widehat{v_n}|^2 d\xi \leq \eta \; pour \; n \geq n(\eta) \tag{1.6}$$

or $X_n = \displaystyle\int_{|\xi|\geq M} (1+|\xi|)^{-2s}(1+|\xi|)^{2s}|\widehat{v_n}|^2 d\xi + \int_{|\xi|\leq M} (1+|\xi|)^{2(s-\varepsilon)}|\widehat{v_n}|^2 d\xi$

donc :

$$X_n \leq (1+M)^{-2s} \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|)^{2s} |\widehat{v_n}(\xi)|^2 d\xi + (1+M)^{2(s-\varepsilon)} \int_{|\xi|\leq M} |\widehat{v_n}(\xi)|^2 d\xi \tag{1.7}$$

D'après (1.4) v_n demeure borné de $H^s(\mathbb{R}^n)$ donc (1.7) entraine :

$$X_n \leq c_1(1+m)^{-2\varepsilon} + (1+M)^{2(s-\varepsilon)} \int_{|\xi|\leq M} |\widehat{v_n}(\xi)|^2 d\xi \tag{1.8}$$

On choisit M de façon que $c_1(1+M)^{-2\varepsilon} \leq \frac{\eta}{2}$, et on aura donc (1.6) si l'on démontre que :

$$\int_{|\xi|\leq M} |\widehat{v_n}(\xi)|^2 d\xi \leq \frac{\eta}{2(1+M)^{2(s-\varepsilon)}} \quad pour \quad n \geq n(\eta) \tag{1.9}$$

Mais grâce à (1.3) , v_n à support dans K , si θ désigne une fonction de $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ on a :

$$\widehat{v_n}(\xi) = \langle v_n, \theta \exp(-2\pi i x\xi) \rangle. \tag{1.10}$$

le crochet désignant la dualité entre $H^s(\mathbb{R}^n)$ et $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$. Mais lorsque $|\xi| \leq M$. $\theta \exp(-2\pi i x\xi)$ demeure dans un ensemble relativement compact de $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ et donc $\langle v_n, \theta \exp(-2\pi i x\xi) \rangle \to 0$ uniformement pour $|\xi| \leq M$,donc

$$\int_{|\xi|\leq M} |\widehat{v_n}(\xi)|^2 d\xi \to 0$$

d'où (1.9).

$\square$

Remarque 1.2.3 *:*

Le résultat est encore vraie si la frontiére Γ est Lipschitzienne. (cf.[18]*)*

1.3 Produit de convolution des fonctions

La notion de convolution (généralisè aux distributions) joue un rôle fondamental en théorie des équations aux dérivées partielles linèaires , ceci provient entre autre du fait que l'on peut exprimer la solution d'une équation $Lu = f$ (où L est un opérateur différentiel à coeficients constants) sous la forme :

$$u = E * f$$

E est une solution élémentaire de l'équation.

1.3.1 Définition

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ on appelle convolution muliplicative de f par g pour la mesure(de Haar)[5] $\dfrac{dt}{t}$ la fonction h définit par :

$$h(x) = f(x) * g(x) = \int_0^{+\infty} f(t)g(\frac{x}{t})\frac{dt}{t}$$

Remarque 1.3.1 *Une définition analogue pour la convolution additive de f par g comme suit :*

$$h(x) := f(x) * g(x) = \int_0^{+\infty} f(t)g(x-t)dt$$

1.3.2 Propriétés

1. L'opération de convolution "$*$" est commutative , c'est à dire :

$$f(x) * g(x) = g(x) * f(x)$$

2. La convolution est associative pour $f, g, h \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ on a :

$$(f(x) * g(x)) * h(x) = f(x) * (g(x) * h(x))$$

3. $supp(f * g) \subset supp f + supp\ g$

[5]Alfréd Haar est un mathématicien hungarien$1885 - 1933$,il a travaillè à Göttingen(Allemagne)

4. $f * \delta(x-1) = f$,(δ est l'élément neutre)
5. $x^\alpha h(x) = x^\alpha(f(x) * g(x)) = x^\alpha f(x) * x^\alpha g(x), \ \ \alpha \in \mathbb{R}$

Proposition 1.3.1 *Si* $f \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^+), etg \in C_0^k(\mathbb{R}^+), \ k \in \mathbb{N},$ *alors* $f * g \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^+),$ *et :*

$$D^\alpha(f * g) = f * D^\alpha g., \qquad |\alpha| \leq k$$

(cf[20]).

Proposition 1.3.2 *Si* $f \in L^p(\mathbb{R}^+)$, $\quad 1 \leq p \leq +\infty$ *et* $g \in L^1(\mathbb{R}^+)$ *pour la mesure de Haar* $\dfrac{dx}{x}$, *alors* $(f * g) \in L^p(\mathbb{R}^+)$,*et*

$$\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^+)} \leq \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}.\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^+)}$$

Remarque 1.3.2 *Si on pose* $x^\alpha f(x) = F(x) \quad x^\alpha h(x) = x^\alpha(f(x) * g(x)) = H(x)$, *et* $x^\alpha g(x) = G(x)$, *alors on a :*
si $F \in L^p(\mathbb{R}^+)$ *et* $G \in L^1(\mathbb{R}^+)$ *alors* $H \in L^p(\mathbb{R}^+)$ *et :*

$$\|F * G\|_{L^p(\mathbb{R}^+)} \leq \|G\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}.\|F\|_{L^p(\mathbb{R}^+)}$$

1.4 Transformation de Mellin

Puisqu'on travaille dans un domaine de frontière polygônale qu'on décompose en secteurs plans ,la transformation de Mellin est bien adapter à la géométrie de ce domaine, aussi pour tous les domaines qui présentent des points anguleux ,et elle joue le même rôle que celui par la transformation de Fourier dans le cas classique.

1.4.1 Définition

Si f est définit sur $\mathbb{R}^+$ on appelle transformée de Mellin de f la fonction $\widetilde{f}$ définit par :

$$\widetilde{f}(\sigma) := \int_0^{+\infty} f(x) x^{\sigma-1} dx \ \ \sigma \in \mathbb{C}$$

lorsque l'intégrale converge.

Exemple :

$$f : x \longmapsto \frac{1}{x+a}(a>0)$$

$$\widetilde{f}(\sigma) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\sigma-1}}{x+a}dx = \frac{\pi a^{\sigma-1}}{\sin \sigma\pi} \qquad 0 < Re\sigma < 1$$

1.4.2 Quelques propriétés :

1. $\widetilde{x^a f(x)} = \widetilde{f}(\sigma + a)$
2. $\widetilde{f(x^\beta)} = \frac{1}{\beta}\widetilde{f}(-\frac{\sigma}{\beta})\ \ (\beta > 0)$
3. $\widetilde{f(\frac{1}{x})} = \widetilde{f}(-\sigma)$
4. $(\widetilde{\frac{1}{x}\frac{df(x)}{dx}}) = -(\sigma-1)\widetilde{f}(\sigma-1)$
5. $(\widetilde{x\frac{df}{dx}}) = -\sigma\widetilde{f}(\sigma)$
6. $\widetilde{f^{(n)}} = (-1)^n \frac{\Gamma(\sigma)}{\Gamma(\sigma-n)}\widetilde{f}(\sigma-n)$
7. $(\widetilde{(x\frac{d}{dx})^n f})(\sigma) = (-1)^n \sigma^n \widetilde{f}(\sigma)$
8. Soit $\widetilde{h}$ la transformation de Mellin de la fonction h , avec $h = f * g$ alors on a :

$$\widetilde{h}(\sigma) = f(\widetilde{x) * g}(x) = \widetilde{f}(\sigma).\widetilde{g}(\sigma)$$

Fonction Gamma :

Pour tout réel $a > 0$, on définit la fonction Gamma Γ comme suit :

$$\Gamma(a) := \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{a-1}dx$$

rappelons que :

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$$

$$\Gamma(a-1) = (a-2)\Gamma(a-2)$$

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Transformation inverse

Définition 1.4.1 *La transformée de Mellin inverse de* $\widetilde{f}$ *est donnée par la fonction* f*, avec* $\widetilde{f}$ *est définie pour* $\alpha_1 < Re\sigma < \alpha_2$ *et*

$$f(x) = \lim_{\nu \to +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mu - i\nu}^{\mu + i\nu} \widetilde{f}(\sigma) x^{-\sigma} dx \qquad \alpha_1 < \mu < \alpha_2$$

lorsque l'intégrale converge.

1.4.3 Problème obtenu par transformation de Mellin

Proposition 1.4.1 *Soit A un opérateur différentiel homogène à coefficients constants,d'ordre* $2m$ *par rapport aux variables* x *et* y *.Alors en coordonnées polaires* (r,θ) *l'opérateur* $r^{2m}A$ *est un polynôme de degré* $2m$ *par rapport à la variable* $r\dfrac{d}{dr}$.

Démonstration :

On va utiliser un raisonnement par récurence pour démontrer cette proposition :

L'opérateur A étant homogène , donc on peut le décomposé sous la forme suivante :

$$A = \prod_{j=1}^{n} (\frac{\partial}{\partial x} + \lambda_j \frac{\partial}{\partial y})^{k_j}, \quad \lambda_j \in \mathbb{C}$$

Les nombres complexes λ_j sont les racines de l'opérateur A .

Soit $A_j = \dfrac{\partial}{\partial x} + \lambda_j \dfrac{\partial}{\partial y}$

On sait que :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta}$$
$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta \frac{\partial}{\partial \theta}$$

D'où A_j s'écrit en coordonnées polaires sous la forme :

$$A_j = (\cos\theta + \lambda_j \sin\theta)\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}(-\sin\theta + \lambda_j \cos\theta)\frac{\partial}{\partial \theta}$$

La proposition est donc démontrée pour un opèrateur d'ordre 1 .

Supposons maintenant que la proposition est vraie pour un opérateur homogène d'ordre

n , et on va démontrer que la proposition reste vraie pour un opérateur d'ordre $n+1$: on a :

$$B_{n+1} = \big(a(\theta)\frac{\partial}{\partial r} + b(\theta)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\big)B_n$$

et

$$r^{n+1}B_{n+1} = r^{n+1}\big(a(\theta)\frac{\partial}{\partial r} + b(\theta)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\big)\big[\frac{1}{r^n}r^nB_n\big]$$

$$= -na(\theta)r^nB_n + a(\theta)\big(r\frac{\partial}{\partial r}\big)\big(r^nB_n\big) + b(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\big(r^nB_n\big)$$

d'où le résultat.

□

Conséquences :

1. Si A est un opérateur différentiel homogène elliptique d'ordre $2m$ la transformation de Mellin de $r^{2m}Au$, s'écrit :

   $$\widetilde{r^{2m}Au} = P_{2m}(\sigma,\theta,\frac{\partial}{\partial\theta})\widetilde{u}(\sigma,\theta)$$

   où P_{2m} est un polynôme de dégré $2m$ par rapport à la variable σ.

2. La transformation de Mellin de $A_jf = 0$, vérifie :
   $P_j\widetilde{f} = \widetilde{rA_jf} = -(\cos\theta + \lambda_j\sin\theta)\sigma\widetilde{f} + (-\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \lambda_j\cos\theta)\dfrac{\partial\widetilde{f}}{\partial\theta} = 0$
   les solutions sont de la forme :

   $$\widetilde{f}(\sigma,\theta) = C(\cos\theta + \frac{1}{\lambda_j}\sin\theta)^{-\sigma} = 0$$

   avec $\frac{1}{\lambda_j} \neq 0$ car A_j est elliptique.

Nous utiliserons cette proposition pour le cas particulier où $m = 1$ et $A = \Delta$ (l'opérateur de Laplace), l'opérateur $r^2\Delta$ est donc un polynôme du second degré par rapport à $r\dfrac{\partial}{\partial r}$,il s'écrit donc :

$$r^2\Delta = (r\frac{\partial}{\partial r})^2 + (\frac{\partial}{\partial\theta})^2$$

Cette formule est très utile surtout pour établir une fonction de Green adaptée au problème (2.2), et pour mettre en évidence des inégalités à priori.

Exemple :

Considérons le problème :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u(r,0) = g \\ u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = 0 \end{cases} \tag{1.11}$$

Où Ω est un secteur plan infini d'ouverture φ, c'est à dire :

$$\Omega = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2, r > 0 \quad 0 < \theta < \varphi < 2\pi\}$$

En multipliant l'opérateur Δ par r^2, et en passant à la transformation de Mellin, le problème (1.11) sera :

$$\begin{cases} \widetilde{r^2\Delta u} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \widetilde{u}(\sigma,0) = \widetilde{g} \\ \widetilde{u}(\sigma,\varphi) = 0 \end{cases} \tag{1.12}$$

On a :

$$\widetilde{r^2\Delta u} = (\widetilde{r\frac{\partial u}{\partial r}})^2 + (\widetilde{\frac{\partial u}{\partial \theta}})^2 = \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial \theta^2} + \sigma^2\widetilde{u} = 0$$

On obtient un problème différentiel ordinaire d'ordre deux par rapport à la variable θ, et dépendant d'un paramètre complexe σ,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial \theta^2} + \sigma^2\widetilde{u}(\theta) = 0 \quad 0 < \theta < \varphi \\ \widetilde{u}(\sigma,0) = \widetilde{g} \\ \widetilde{u}(\sigma,\varphi) = 0 \end{cases} \tag{1.13}$$

Il admet comme solution :

$$\widetilde{u}(\sigma,\theta) = a\cos\sigma\theta + b\sin\sigma\theta$$

En utilisant les conditions aux limites etsi en posant $\widetilde{g} = 1$, on obtient :

$$\widetilde{u}(\sigma,0) = 1 \Longrightarrow a = 1$$

$$\widetilde{u}(\sigma,\varphi)=0 \Longrightarrow b=-\frac{\cos\sigma\varphi}{\sin\sigma\varphi}$$

d'où :

$$\widetilde{u}(\sigma,\theta)=\cos\sigma\theta-\frac{\cos\sigma\varphi}{\sin\sigma\varphi}\sin\sigma\theta$$

la fonction

$$\widetilde{N}(\sigma,\theta,r)=\frac{\sin\sigma(\varphi-\theta}{\sin\sigma\theta}$$

est la transformation de Mellin du noyau de Poisson $N(r,\theta,\varphi)$. En utilisant le produit de convolution multiplicative, il vient :

$$u(r,\theta)=\int_0^{+\infty} g(t)N(\frac{r}{t},\theta,\varphi)dt$$

où $u(r,\theta)$ représente la transformation de Mellin inverse de $\widetilde{u}(\sigma,\theta)$

Remarque 1.4.1 *Il y a une certaine analogie entre la transformation de Mellin et celle de Fourier, on peut passer de l'une à l'autre en effectuant un changement de variable convenable comme par exemple : $r=e^{-t}$. Si l'on pose $\sigma=i\xi$, on aura :*

$$\widetilde{f}(\sigma)=\int_0^{+\infty} f(r)r^{\sigma}\frac{dr}{r}$$

et en posant $r=e^{-t}$, il vient :

$$\widetilde{f}(\sigma)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(e^{-t})e^{-it\xi}dt=\widehat{F}(\xi)$$

qui n'est autre que la transformation de Fourier de $F(t)=f(r)$.

1.5 L'alternative de Fredholm

Soit le probléme de Cauchy :

$$\begin{cases} Lu=f & a<x<b \\ u(a)=u(b)=\alpha \end{cases} \tag{1.14}$$

1. Si le problème homogène associé à (1.14) n'admet que la solution triviale $u = 0$ (i.e $\lambda = 0$ n'est pas une valeur propre), alors le problème non homogène admet une solution unique

2. Si le problème homogène admet une solution non triviale (i.e $\lambda = 0$ est une valeur propre), alors le problème(1.14) n'admet aucune solution où un nombre infinie des solutions

   si v est solution du problème homogène alors :
   si $\int_a^b vf = 0 \Longrightarrow$ le problème non homogène admet un nombre infini des solutions
   si $\int_a^b vf \neq 0 \Longrightarrow$ il n'ya aucune solution

Exemple :

$$\begin{cases} \Delta u = e^x & 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 1 \end{cases} \tag{1.15}$$

La solution de l'èquation homogène $\Delta u = 0$ s'écrit :

$$u(x) = Ax + B$$

Pour $u(0) = 1 \Longrightarrow B = 1$

Et pour $u(1) = 1 \Longrightarrow A = 0$

On remarque que $v = 1$ est une solution de l'équation homogène car $\Delta v = 0$

Mais

$$\int_0^1 1.e^x dx = e - 1 \neq 0$$

donc le problème (1.15) n'admet aucune solution.

1.6 Principe de la fonction de Green

1.6.1 Définition

La fonction de Green[6] associée à un opérateur de dérivation injectif L avec des conditions aux bords homogènes est une solution du problème :

$$\begin{cases} LG(x,y) = \delta(x-y) \\ x \mapsto G(x,.) \ \ verifie \ les \ conditions \ aux \ bords \ homogen \end{cases}$$

où δ désigne à la fonction de Dirac[7]

Remarque 1.6.1 *Définissons la fonction de Dirac δ en un point $x_0 \in \mathbb{R}$ par :*

$$\delta|_{x=x_0} = \delta(x-x_0) := \lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon(x)$$

où

$$f_\varepsilon(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon} & si \ x_0 - \frac{\varepsilon}{2} \leq x \leq x_0 + \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 & si \ \ (x > x_0 + \frac{\varepsilon}{2}) \vee (x < x_0 - \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

Alors :

$$\delta(x-x_0) = \begin{cases} \infty & x = x_0 \\ 0 & si \ \ x \neq x_0 \end{cases}$$

et donc

$$\int_a^b \delta(x-x_0)dx = \begin{cases} 1 & a \leq x \leq b \\ 0 & si \ \ x \notin [a,b] \end{cases}$$

si f est une fonction continue en x_0 ,on a également :

$$\int_a^b f(x)\delta(x-x_0)dx = \begin{cases} f(x_0) & a \leq x \leq b \\ 0 & si \ x \notin [a,b] \end{cases}$$

Multiplions l'équation :

$$L(G(x,\xi)) = \delta(x-\xi) \tag{1.16}$$

[6]George Green est un mathèmaticien anglais (1793-1841)

[7]Paul Andrien maurice Dirac est un physicien anglais (1902-1984),il a obtenu le prix de Nobel en 1933,il a travaillé à Cambridge(Angleterre)

par $f(\xi)$ on obtient :

$$f(\xi)L(G(x,\xi)) = f(\xi)\delta(x-\xi)$$

et on intégre les deux termes par rapport à ξ ,on obtient :
$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\delta(x-\xi)d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)L(G(x,\xi))d\xi$
En remarquant que : $f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\delta(x-\xi)d\xi$
Alors : $Lu = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)L(G(x,\xi))d\xi = f(x)$
donc : $u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)G(x,\xi)d\xi$

1.6.2 Quelques propriétés

1. la fonction de Green est symétrique, i.e $G(x,\xi) = G(\xi,x)$

2. G est une fonction continue et bornée.

3. la fonction $x \rightarrowtail \dfrac{dG(x,y)}{dx}$ est continue pour tout $x \neq y$

1.6.3 Existence de la fonction de Green

Soient $p,q,f \in \mathcal{C}^1([a,b]),(a<b)$ et $(\alpha_i,\beta_i) \in \mathbb{R}^2$ telles que $\forall i = 1,2$ $|\alpha_1| + |\alpha_2|, |\beta_1| + |\beta_2| \neq 0$ .On a les équations différentielles ordinaires :

$$(py')' + qy = 0 \quad (H)$$

$$(py')' + qy = f \quad (NH)$$

ainsi que les conditions aux bords associées :

$$(CB)_h \begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0 & . \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 = y(b) = 0 & . \end{cases}$$

$$(CB)_{nh} \begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \gamma \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 = y(b) = \delta \end{cases}$$

Théorème 1.6.1 . *Si le problème homogène* $(H) - (CB)_h$ *n'admet pas de solution non triviale. Alors, il existe une (et une seule) fonction* G *ne dépend pas de* f *, et dite fonction de Green, telle que, pour toute fonction* f *, la solution* y *du problème non homogène* $(NH) - (CB)_h$ *s'écrit de manière unique sous la forme :*

$$y(x) = \int_a^b G(x, s)f(s)ds.$$

Démonstration :

(1)Existence de la fonction G :

Soient ϕ_1 et ϕ_2 les solutions respectives des problèmes aux conditions initiales :

$$(H) + \begin{cases} \phi_1(a) = \alpha_2 \\ \phi_1'(a) = -\alpha_1 \end{cases}$$

$$(H) + \begin{cases} \phi_2(a) = \beta_2 \\ \phi_2'(a) = \beta_1 \end{cases}$$

Alors , $\phi_1, \phi_2 \not\equiv 0$ sont linéairement indépendantes car sinon, elles sont solutions du problème $(P_0 : (H) + (CB)_h)$,ce qui contredit l'hypothèse.

Soit donc $W \neq 0$ leur Wronskien et G la fonction de Green définie par :

$$G(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\phi_1(x)\phi_2(y)}{p(x)W(x)} & a \leq x \leq y \\ \dfrac{\phi_1(y)\phi_2(x)}{p(x)W(y)} & y \leq x \leq b \end{cases}$$

En remarquant que le produit pW est constant car :

$$p(x)W(x) = P(y)W(y) = P(a)W(a) = P(b)W(b) \neq 0, \forall x, y \in [a, b]$$

En effet d'après la formule de Lagrange, on a :

$$\phi_2(p\phi_1')' - \phi_1(p\phi_2')' = 0 \Longleftrightarrow (p\phi_2\phi_1')' - (p\phi_1\phi_2)' = 0$$

$$\Longleftrightarrow (p(\phi_2\phi_1' - \phi_1\phi_2')' = 0$$

$$\Longleftrightarrow pW = cte$$

Enfin,G vérifie bien les hypotheses de la fonction de Green.

(2)Unicité de la fonction G :

soient G et H, deux fonctions de Green ; alors on a :

$$\int_a^b (G(x,y) - H(x,y))f(y)dy = 0$$

Pour toute fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Pour x fixé posons $f(y) = G(x,y) - H(x,y)$,on a :

$$\int_a^b = [G(x,y) - H(x,y))]^2 dy = 0, \forall x \in [a,b]$$

Comme G et H sont continueés ,alors $G \equiv H$

C'est à dire : $G(x,.) = H(x,.), \forall x \in [a,b]$

(3)Existence et unicité d'une solution :

La fonction F définie par :
$F(x) = \int_a^b G(x,y)f(y)dy = \dfrac{\phi_2(x)}{pW}\int_a^x \phi_1(y)dy + \dfrac{\phi_1(x)}{pW}\int_x^b \phi_2(y)dy$
est une solution du problème $(NH) + (CB)_h$,en effet,

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial G}{\partial x}(x,y)f(y)dy,$$

et

$$F''(x) = \int_a^b \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x,y)f(y)dy + f(x)[\frac{\partial G}{\partial x}(x,x^-) - \frac{\partial G}{\partial x}(x,x^+)]$$

or

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x^+,x) = \frac{\partial G}{\partial x}(x,x^-)$$
$$\frac{\partial G}{\partial x}(x^-,x) = \frac{\partial G}{\partial x}(x,x^+)$$
$$\frac{\partial G}{\partial x}(x^+,x) - \frac{\partial G}{\partial x}(x^-,x) = \frac{1}{p}$$

On a l'expression :

$$F''(x) = \int_a^b (\frac{\partial G}{\partial x})'(x,y)f(y)dy + \frac{f(x)}{p(x)}$$

ainsi que :

$$F''(x) = \int_a^b (p\frac{\partial G}{\partial x})'(x,y)f(y)dy + f(x)$$

Par suite,

$$(pF')' + qF = \int_a^b [(p\frac{\partial G}{\partial x}) + qF]'(x,y)f(y)dy + f(x)$$

$$\text{(par la définition de } G\text{)} \qquad = -\int_a^b \phi_1(x)\phi_1(y)f(y)dy + f(x)$$

$$\text{(par la définition de } \phi_1\text{)} \qquad = f(x)$$

L'unicité de la solution y résulte de l'hypothèse sur le problème homogène ainsi que de l'alternative de Fredholm.

$\square$

Exemple1 :

On calcule une fonction de Green du problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} y'' + y = 0 & \text{dans } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ y(0) = y(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases} \tag{1.17}$$

La solution générale de l'équation $y'' + y = 0$ s'écrit sous la forme :

$$y = a\cos x + b\sin x$$

$$y(0) = 0 \Longrightarrow a = 0$$

$$y(\frac{\pi}{2}) = 0 \Longrightarrow b = 0$$

Donc il existe une (et seulement une)fonction de Green associée au problème(1.17).

Il est clair que : $\{\cos x, \sin x\}$ est un système de solutions fondamentales ,alors on calcule le Wronskien :

$$W = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$$

et on obtient :

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \cos x.\sin\xi & \text{si} 0 \leq x \leq \xi \\ \sin x.\cos\xi & \text{si } \xi \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Exemple2 :

Soit le problème :

$$\begin{cases} y'' - y = x & \text{0<x<1} \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases} \tag{1.18}$$

1) Etablissons pour commencer l'existence de la fonction de Green du problème aux limites homogéne suivant :

$$\begin{cases} y'' - y = 0 & \text{dans } 0 < x < 1 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases} \tag{1.19}$$

Il est clair que : $\{y_1, y_2\} = \{e^x, e^{-x}\}$ est évidemment le sysème fondamental des solutions du problème (1.19) ,donc la solution génèrale du problème homogéne associé est :

$$y(x) = Ae^x + Be^{-x}$$

En passant aux conditions aux limites :

$$y(0) = 0 \Longrightarrow A = -B$$

$$y(1) = 0 \Longrightarrow A = B = 0$$

Et nous avons démontré l'existence de la fonction de Green.

2) On va calculer la fonction de Green, soit $\{y_1, y_2\}$ un systeme des solutions qui sont vérifiées :

$$\begin{cases} y_1'' - y_1 = 0 & 0 < x < 1 \\ y_1(0) = 0, \;\; y_1'(0) = -1 \end{cases} \tag{1.20}$$

$$\begin{cases} y_2'' - y_2 = 0 & 0 < x < 1 \\ y_2(1) = 0, \;\; y_2'(1) = 1 \end{cases} \tag{1.21}$$

Donc pour (1.20), on a :

$$y_1 = ae^x + be^{-x}$$

$y_1(0) = 0 \Longrightarrow a = -b$ et , $y_1'(0) = -1 \Longrightarrow a = -\dfrac{1}{2}$

Et ça implique :

$$y_1(x) = -\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = -\sinh x$$

Et pour le problème (1.21), on a :

$$y_2 = ce^x + de^{-x}$$

$y_2(1)=0 \Longrightarrow ce+de^{-1}=0$ et , $y_2'(1)=1 \Longrightarrow ce-de^{-1}=1$

Donc on obtient :$y_2=\dfrac{1}{2}(e^{x-1}-e^{1-x})=\sinh(x-1)$

$$W(y_1,y_2)(x)=\begin{vmatrix} -\sinh x & \sinh(x-1) \\ -\cosh x & \cosh(x-1) \end{vmatrix}=-\sinh 1$$

Alors la fonction de Green associée au problème (1.19) est donnée par :

$$G(x,\xi)=\begin{cases} \dfrac{y_1(x)y_2(\xi)}{W(y_1,y_2)} & 0<x<\xi \\ \dfrac{y_1(\xi)y_2(x)}{W(y_1,y_2)} & \text{si } x<\xi<1 \end{cases}$$

Donc on a :

$$G(x,\xi)=\begin{cases} \dfrac{\sinh x\sinh(\xi-1)}{\sinh 1} & 0\leq \xi\leq x \\ \dfrac{\sinh \xi\sinh(x-1)}{\sinh 1} & \text{si } x\leq \xi\leq 1 \end{cases}$$

3) Cherchons la solution du problème aux limites (1.18) sous la forme :

$$y(x)=\int_0^1 G(x,\xi)\xi d\xi$$

$$y(x)=\int_0^x \frac{\xi\sinh\xi\sinh(x-1)}{\sinh 1}d\xi+\int_x^1 \frac{\xi\sinh x\sinh(\xi-1)}{\sinh 1}d\xi=$$

$$=\frac{\sinh(x-1)}{\sinh 1}d\int_0^x \xi\sinh\xi d\xi+\frac{\sinh x}{\sinh 1}\int_x^1 \xi\sinh(\xi-1)d\xi$$

Puisque :

$$\int_0^x \xi\sinh\xi d\xi = x\cosh x-\sinh x,$$

$$\int_x^1 \xi\sinh(\xi-1)d\xi=1-x\cosh(x-1)+\sinh(x-1)$$

On a :

$y(x)=\frac{1}{\sinh 1}\big[\sinh(x-1)[x\cosh x-\sinh x]+\sinh x[1-x\cosh(x-1)+\sinh(x-1)]\big]$

$$=\frac{\sinh x}{\sinh 1}-x$$

Nous nous sommes servi de la formule :

$$\sinh(\alpha\pm\beta)=\sinh\alpha\cosh\beta\pm\cosh\alpha\sinh\beta$$

Et de fait que la fonction $\sinh x$ est impaire.

1.7 Partition de l'unité

1.7.1 Définition

soit $(\Omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une famille d'ouverts de $\mathbb{R}^n$ telle que :

1. $\mathbb{R}^n = \cup_{j=0}^{+\infty}\Omega_j$

2. $\overline{\Omega_j}$ est compact pour tout $j \in \mathbb{N}$

3. Tout point de $\mathbb{R}^n$ a un voisinage ne rencontrant qu'un nombre fini de Ω_j.

   Il existe alors ,pour tout $j \in \mathbb{N}$ des fonctions $\omega_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $supp\omega_j \subset \Omega_j$, $0 < \varphi_j < 1$ et $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}\omega_j = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

La famille (ω_j) est appellée une partition de l'unité subordonnées au recouvrement (Ω_j) de $\mathbb{R}^n$.(cf[23]

1.7.2 Partition de l'unité dans un polygône

soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ des sommets s_j de frontière polygônale $\Gamma = \cup_{j=1}^{N}\Gamma_j$ pour $j = 1, 2...N$, où N est le nombre des sommets du polygone.

Ω_{φ_j} $j = 1, 2...N$ est un secteur plan infini d'ouverture φ_j.

Soit (ω_j) pour $j = 1, 2...N$ une partition de l'unité de classe $C^\infty(\Omega)$ du polygone qui isole chacun des sommets s_j pour $j = 1, 2...N$.

Soit la fonction de troncature ϕ_j qui définie comme suit :

$$\omega_j = \begin{cases} 1 \quad \text{dans } V(s_j) \cap \Omega_{\varphi_j}, & j = 1, 2, ...N \\ 0 \quad \text{dans } \Omega \backslash V(s_j) \cap \Omega_{\varphi_j} \end{cases}$$

où $V(s_j)$ un voisinage du sommet s_j .

Soit T est une fonction troncature définie sur Ω telle que $T + \displaystyle\sum_{j=1}^{N}\omega_j = 1$

et comme $\sum_{j=1}^{N} \omega_j = 1$ alors la fonction troncature donnée par :

$$T = \begin{cases} 0 \quad \text{dans } V(s_j) \cap \Omega_{\varphi_j}, \qquad j = 1, 2, ...N \\ 1 \quad \text{dans } \Omega \backslash V(s_j) \cap \Omega_{\varphi_j} \end{cases}$$

T est une fonction définie sur un ouvert O (qui est en fait le polygone privé des voisinages de ses sommets).

Chapitre 2

Le problème dans un secteur plan

2.1 Position du problème

Soit Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, de frontière polygônale Γ, on décompose Ω en un nombre finie de secteurs plan Ω_{φ_j} où $j \in \{1, 2, ...N\}$ et un ouvert régulier O , le sommet de chaque secteur peut être ramener à l'origine par rotation et translation comme suivant :
Si on suppose que $s_j(x_j, y_j)$ le sommet du secteur Ω_{φ_j} , et soit $R(S_j, \theta)$ la rotation de centre S_j et d'angle θ où $tan\theta = \dfrac{x_{s_j} - y_{s_{j-1}}}{x_{s_j} - x_{s_{j-1}}}$

c'est à dire la rotation $(r, \theta) \longmapsto r \exp i\theta$

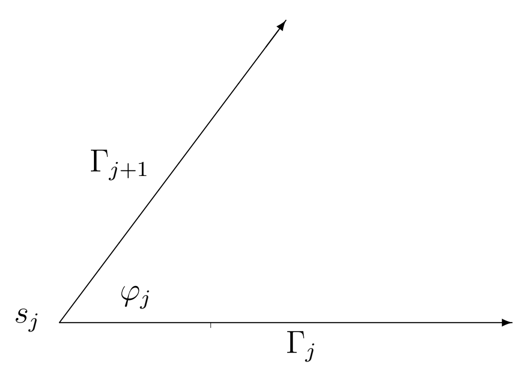

Fig 2

Soit $T_{\overrightarrow{S_jO}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{S_jO}$ où O est l'origine de repère ,
alors la tansformation $T_{\overrightarrow{S_jO}} \circ R(s_j, \theta)$ ramene chaque sommet S_j à l'origine de repère O .

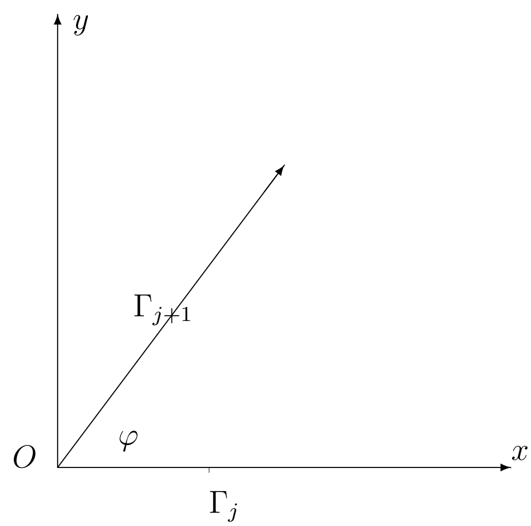

Fig3

Et nous prolongeons cette idée pour chaque secteur Ω_{φ_j} où $j = 1, 2, ...N$ donc choisissons l'un des secteurs , où nous faisons notre étude et pour le reste des secteurs nous obtenons les mêmes résultats et conséquences.

On propose de résoudre le problème elliptique :

$$\begin{cases} Au = f & \text{dans } \Omega \\ Bu = 0 & (\text{sur } \Gamma) \end{cases} \tag{2.1}$$

où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$,de frontière polygônale Γ et A est un opérateur différentiel aux derivées partielles d'ordre $2m$ définit dans Ω et B est un opèrateur de trace définit sur Γ on supposera que Ω d'un seul côté de sa frontière .

Pour notre problème , on choisira comme modèle d'un problème elliptique un problème de Laplace perturbé où plus précisement le problème de Poisson perturbé .

C'est à dire on prend $A = \Delta + \lambda \qquad \lambda > 0$(réel) , B d'ordre 0 (l'identité) pour les conditions du Dirichlet , où d'ordre 1 pour les conditions du Neumann.

Pour le premier ,on étudiera l'existence et l'unicité du problème du Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & (\text{sur } \Gamma) \end{cases} \tag{2.2}$$

En suite, le problème de Neumann suivant :

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = f & \text{dans } \Omega \\ Du = 0 & (\text{sur } \Gamma) \end{cases} \tag{2.3}$$

Mais il est nécessaire de passer au problème non perturbè,puis on déduit les résultas pour le problèmen perturbè.

Donc on va étudier l'existence et l'unicité de la solution du problème de Dirichlet non perturbè suivant :

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & (\text{sur } \Gamma) \end{cases} \tag{2.4}$$

De la même façon pour le problème de Neumann suivant :

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ Du = 0 & (\text{sur } \Gamma) \end{cases} \tag{2.5}$$

Et comme l'étude de notre problème dans le polygone tout entier est basée sur l'idée de faire l'étude dans l'un des secteurs plan , par une partition de l'unité on fait par la suite de l'étude une extension au polygone.

2.1.1 Les coordonnées polaires

Les coordonnées polaires sont bien adaptées pour le cas de notre problème ;

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

Donc on a :

$$dx = \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta$$

et

$$dy = \sin\theta dr + r\cos\theta d\theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos\theta \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sin\theta \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

2.1.2 Expression du Laplacien

L'opérateur de Laplace Δ est elliptique .

Son polynôme caractéristique est sachant que $r^2 = x^2 + y^2$, alors Δ s'écrit en coordonnées polaires comme :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta 2}$$

Théorème 2.1.1 *L'opérateur de Laplace Δ peut se mettre sous la forme*

$$\Delta = \frac{1}{r^2}[(r\frac{\partial}{\partial r})^2 + \frac{\partial}{\partial \theta^2})]$$

Démonstration :

On a :

$$(r\frac{\partial}{\partial r})^2 + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} = (r\frac{\partial}{\partial r})(r\frac{\partial}{\partial r}) + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

$$\begin{aligned}(r\frac{\partial}{\partial r})(r\frac{\partial}{\partial r}) + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} &= r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2} + r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \\ &= r^2(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}) \\ &= r^2\Delta\end{aligned}$$

Donc :

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\left[(r\frac{\partial}{\partial r})^2 + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right]$$

□

Et comme nous travaillons dans les espaces de Sobolev usuels, nous avons besoin de faire une comparaison entre les espaces $H^s_{x,y}$ et les espaces $H^s_{r,\nu}$ où η est le vecteur normal à Γ, et ceci au moins pour les deux cas $s = 1, 2$

Proposition 2.1.1 *Les deux espaces :*

$$H^1_{x,y} := \{u \in L^2(\Omega_\varphi); \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \in L^2(\Omega_\varphi)\}$$

$$H^1_{r,\nu} := \{u \in L^2(\Omega_\varphi); \frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial u}{\partial \nu} \in L^2(\Omega_\varphi)\} \quad ou \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

sont identiques ,c'est à dire $H^1_{x,y} \equiv H^1_{r,\nu}$

Démonstration :

Commençons par la première inclusion : $H^1_{x,y}(\Omega_\varphi) \subset H^1_{r,\nu}$

Supposons que : $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ $\dfrac{\partial u}{\partial y} \in L^2(\Omega_\varphi)$

On a : $\dfrac{\partial}{\partial \nu} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta}$ et

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \cos\theta \frac{\partial u}{\partial x} + \sin \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = -\sin\theta \frac{\partial u}{\partial x} + \cos\theta \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\int_{\Omega_\varphi} |\frac{\partial u}{\partial r}|^2 = \int_{\Omega_\varphi} |\cos\theta \frac{\partial u}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial u}{\partial y}|^2 \leq \int_{\Omega_\varphi} |\frac{\partial u}{\partial x}|^2 + \int_{\Omega_\varphi} |\frac{\partial u}{\partial y}|^2 + 2\int_{\Omega_\varphi} |\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}|$$

$$\int_{\Omega_\varphi} |\frac{\partial u}{\partial x}|^2 < +\infty \quad (\text{ car } \frac{\partial u}{\partial x} \in L^2(\Omega_\varphi))$$

$$\int_{\Omega_\varphi} |\frac{\partial u}{\partial y}|^2 < +\infty \quad (\text{ car } \frac{\partial u}{\partial y} \in L^2(\Omega_\varphi))$$

$$\int_{\Omega_\varphi} |\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}| \leq (\int_{\Omega_\varphi} |\frac{\partial u}{\partial x}|^2)^{\frac{1}{2}}.(\int_{\Omega_\varphi} |\frac{\partial u}{\partial y}|^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{(par l'inégalité de Hôlder).}$$

Donc $\dfrac{\partial u}{\partial r} \in L^2(\Omega_\varphi)$

Par la même méthode on obtient :

$\int_{\Omega_\varphi} |\frac{\partial u}{\partial \nu}|^2 = \int_{\Omega_\varphi} |-\sin\theta\frac{\partial u}{\partial x} + \cos\theta\frac{\partial u}{\partial y}|^2 \leq \int_{\Omega_\varphi} |\frac{\partial u}{\partial x}|^2 + \int_{\Omega_\varphi} |\frac{\partial u}{\partial y}|^2 + 2\int_{\Omega_\varphi} |\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}|$
En utilisant une autre fois l'inégalité de Hôlder on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \in L^2(\Omega_\varphi)$$

Alors $H^1_{x,y} \subset H^1_{r,\nu}$

On montre l'inclusion inverse :

Supposons que $\frac{\partial u}{\partial r} \in L^2(\Omega_\varphi),\ et\ \frac{\partial u}{\partial \nu} \in L^2(\Omega_\varphi)$

On a :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial u}{\partial r} - \sin\frac{\partial u}{\partial \theta}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sin\theta\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial \nu}$$

$\int_{\Omega_\varphi} |\frac{\partial u}{\partial x}|^2 \leq \int_{\Omega_\varphi} |\frac{\partial u}{\partial r}|^2 + \int_{\Omega_\varphi} |\frac{\partial u}{\partial \nu}|^2 + 2\int_{\Omega_\varphi} |\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial \nu}|$
$\int_{\Omega_\varphi} |\frac{\partial u}{\partial r}|^2 < +\infty \quad (car\frac{\partial u}{\partial r} \in L^2(\Omega_\varphi))$
Aussi :

$$\int_{\Omega_\varphi} |\frac{\partial u}{\partial \nu}|^2 < +\infty \quad (car\frac{\partial u}{\partial \nu} \in L^2(\Omega_\varphi))$$
$$\int_{\Omega_\varphi} |\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial \nu}| \leq (\int_{\Omega_\varphi} |\frac{\partial u}{\partial r}|^2)^{\frac{1}{2}}.(\int_{\Omega_\varphi} |\frac{\partial u}{\partial \nu}|^2)^{\frac{1}{2}}$$

(par l'inégalitè de Hôlder).

Donc :

$$H^1_{r,\nu}(\Omega_\varphi) \subset H^1_{x,y}(\Omega_\varphi)$$

Alors on arrive au resultat desiré dont $\quad H^1_{r,\nu} \equiv H^1_{x,y}$

□

Proposition 2.1.2 *L'espace $H^2_{x,y}(\Omega_\varphi)$ est inclus(srictement) dans l'espace $H^2_{r,\nu}(\Omega_\varphi)$*

Démonstration :On définit l'espace $H^2_{x,y}(\Omega_\varphi)$ comme suit :

$$H^2_{x,y}(\Omega_\varphi) = \{u \in L^2(\Omega_\varphi),\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} \in L^2(\Omega_\varphi)\}$$

Et

$$H^2_{r,\nu} = \{u \in L^2(\Omega_\varphi),\ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \eta} \in L^2\}$$

Supposons : $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 y^2},\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \in L^2(\Omega_\varphi)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \cos^2\theta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin^2\theta \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y^2} + \sin 2\theta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

$$|\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}| \leq |\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}| + |\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y^2}| + |\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}|$$

En utilisant l'inégalité $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$ on obtient :

$$|\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}|^2 \leq 3\big(|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|^2 + |\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y^2}|^2 + |\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}|^2\big)$$

Donc :

$$\int_{\Omega_\varphi} |\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}|^2 \leq 3\big(\int_{\Omega_\varphi} |\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|^2 + \int_{\Omega_\varphi} |\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|^2 + \int_{\Omega_\varphi} |\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}|^2\big)$$

La dernière intégrale converge car :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \in L^2(\Omega_\varphi)$$

On a aussi :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2} = \sin^2\theta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \sin 2\theta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \cos^2\theta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\int_{\Omega_\varphi} |\frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}|^2 \leq 3\big(\int_{\Omega_\varphi} |\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|^2 + \int_{\Omega_\varphi} |\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|^2 + \int_{\Omega_\varphi} |\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}|^2 < +\infty$$

car : $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 y^2},\ ;\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \in L^2(\Omega_\varphi)$

Il reste à montrer que : $\dfrac{\partial^2 u}{\partial r \partial \nu} \in L^2(\Omega_\varphi)$, on a :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \nu} = \frac{1}{2}\big[-\sin 2\theta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin 2\theta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\cos 2\theta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\big]$$

Alors : $\displaystyle\int_{\Omega_\varphi} |\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \nu}|^2 \leq C\big(\int_{\Omega_\varphi} |\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|^2 + \int_{\Omega_\varphi} |\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}|^2 + \int_{\Omega_\varphi} |\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}|^2\big)$

Et comme $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2},\ ;\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \in L^2(\Omega_\varphi)$, alors : $\displaystyle\int_{\Omega_\varphi} |\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \nu}|^2 \leq +\infty$

Donc on a : $H^2_{x,y}(\Omega_\varphi) \subset H^2_{r,\nu}(\Omega_\varphi)$

$\square$

Remarque 2.1.1 *L'inclusion inverse* $H^2_{r,\nu} \subset H^2_{x,y}$ *n'est pas vraie dans le cas général,comme dans le contre exemple suivant :*
$u(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} = r = u(r,\theta)$ *, u n'est pas dérivable par rapport à x et y en point* $(0,0)$ *car*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

et les deux dernières fonctions ne sont pas définies au point $(0,0)$.
Mais la fonction $u : (r,\theta) \mapsto r$ *est indéfiniment dérivable par rapport à r*
i.e $u \in L^\infty$

Pour obtenir une étude valable sur tout le polygone, il sera nécessaire d'éffectuer l'étude d'un problème modèle sur le secteur plan.
Considérons le secteur plan Ω_φ où φ la mesure de l'angle d'ouverture à l'intérieur qui est définie par :

$$\Omega_\varphi = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 > 0, 0 < \arctan\frac{x}{y} < \varphi < 2\pi\}$$

2.2 Le problème obtenu en coordonnées polaires

2.2.1 Problème de Dirichlet

Soit le problème de Dirichlet suivant :(écrit en coordonnées cartésiennes) :

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = f(x,y) \text{ dans } \Omega_\varphi \\ u(x,0) = u(x, xtan\varphi) = 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

En coordonnées polaires le problème (2.6) s'écrit :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = f(r,\theta) \text{ dans } \Omega_\varphi \\ u(r,0) = u(r,\varphi) = 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

Avec $\Omega_\varphi = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2, r > 0, 0 < \theta < 2\pi\}$.

Suivant l'alternative de Fredholm ,Commençons par résoudre le problème homogène :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta} = 0 \text{dans } \Omega_\varphi \\ u(r,0) = u(r,\varphi) = 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

On utilise la méthode de séparation des variables , on pose : $u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$

L'équation differentielle homogène s'écrit :

$$\Theta R'' + \frac{1}{r}R'.\Theta + \frac{R}{r^2}\Theta'' = 0$$

Ce qui implique :

$$r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda \ \ (contante)$$

D'où :

$$\begin{cases} \Theta'' + \lambda\Theta = 0 \\ r^2 R'' + rR' - \lambda R = 0 \end{cases} \tag{2.9}$$

On obtient deux équations différentielles ordinaires homogènes . L'équation :

$$\Theta'' + \lambda\Theta = 0 \tag{2.10}$$

On cherche les valeurs propres et les vecteurs propres associés à l'équation (2.10)

On trouve que les valeurs propres sont de la forme : $\pm\sqrt{\lambda}$

Donc les vecteurs propres s'écivent :

$$v(\theta) = a\cos\theta\sqrt{\lambda} + b\sin\theta\sqrt{\lambda}$$

Et quand on utilise les conditions initiales ,on obtient :

$$v(\theta) = b\sin\frac{n\pi\theta}{\varphi}$$

Alors la solution de l'équation (2.10) est :$v(\theta) = A_n \sin\frac{n\pi\theta}{\varphi}$

Pour l'équation :

$$r^2 R'' + rR' - \lambda R = 0 \tag{2.11}$$

On remarque que c'est une équation d'Euler , pour la resoudre on pose $R(r) = r^k$, en remplaçant dans l'équation(2.11) il vient :

$$r^k(k^2 - k + k - \lambda) = 0$$

D'où $k^2 = (\frac{n\pi\theta}{\varphi}^2$
Alors la solution est :$R(r) = r^{\frac{n\pi\theta}{\varphi}})$
Ce qui nous donne :

$$v_k(r,\theta) = \alpha_k r^{\frac{k\pi\theta}{\varphi}} \sin\frac{k\pi\theta}{\varphi}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Qui sont des solutions du problème homogène(2.8)).
Et suivant l'alternative de Fredholm, le problème non homogène (2.7) admet un nombre infinie des solutions si et seulement si :

$$\langle v_k, f\rangle = 0$$

Alors en calculant : $\langle v_k, f\rangle$ par l'itégration par partie,il vient :
$\langle v_k, f\rangle = \langle v_k, \Delta u\rangle = \int_{\Gamma_\varphi} v_k\frac{\partial u}{\partial\nu} - \int_{\Omega_\varphi} \nabla v_k \nabla u$
Et comme $\int_{\Gamma_\varphi} v_k\frac{\partial u}{\partial\nu} = 0$ (car $u = 0$ sur Γ_φ),
En intégrant par partie une autre fois , on obtient :

$$\langle v_k, \Delta u\rangle = -\int_{\Gamma_\varphi} \nabla v_k u + \int_{\Omega_\varphi} u\Delta v_k \nabla u = 0$$

car $\int_{\Gamma_\varphi} \nabla u v_k = 0$ et comme les fonctions v_k sont des solutions du problème homogéne donc $\Delta v_k = 0$

On déduit que les solutions du problème non homogène (2.7) s'écrivent sous la forme :

$$u_k(r,\theta) = \alpha_k r^{\frac{k\pi}{\varphi}} \sin\frac{k\pi\theta}{\varphi} + w$$

où w est une solution particulière du problème non homogène. $(w \in H^2(\Omega_\varphi))$

Remarque 2.2.1 *Pour* $k = 1$, $u_1 = \alpha_1 r^{\frac{\pi\theta}{\varphi}} \sin\frac{\pi\theta}{\varphi}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{\pi}{\varphi}(\frac{\pi}{\varphi} - 1)r^{\frac{\pi}{\varphi}-2}$$

Alors :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \in L^2(\Omega_\varphi) \Longrightarrow \frac{\pi}{\varphi} - 2 > -1$$

Alors si $\varphi \leq \pi$ *la solution* u_1 *appartient à* $H^2(\Omega_\varphi)$,
mais si $\varphi > \pi$ $\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} \notin L^2(\Omega_\varphi)$.
donc $v_1 \notin H^2(\Omega_\varphi)$, *et ça entraine que* $u \notin H^2(\Omega_\varphi)$

En effet on a le théorème suivant :

Théorème 2.2.1 *Soit* Ω *est ouvert borné de* $\mathbb{R}^2$ *de frontiére* Γ *polygonale ,où* $O \in \Gamma$*,et soit* V *un voisinage de* O *tel que :*

$$V \cap \overline{\Omega} \subseteq \{(r\cos\theta; r\sin\theta); r > 0, 0 \leq \theta \leq \varphi < 2\pi\}$$

Et soit u *une fonction de classe* C^∞ *dans* $\overline{\Omega}/\{O\}$ *et coinside avec* $r^\alpha\phi(\theta)$ *dans* $V \cap \Omega$ *(* $\alpha \in \mathbb{C}$*) où* $\phi \in C^\infty(0, \varphi)$*,alors*

1. $u \in H^s(\Omega)$ *pour* $Re\alpha > s - 1$
2. $u \notin H^s(\Omega)$ *pour* $Re\alpha \leq s - 1$

et ceci quand $Re\alpha$ *non entier .(cf*[8]*)*

2.2.2 Rélation entre les espaces usuels et les espaces avec poids

Si en multipliant la terme $\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}$ par $r^{\frac{\pi}{\varphi}}$ dans le cas où $\varphi > \pi$ on obtient : $r^{\frac{\pi}{\varphi}}\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} \in L^2$, donc on introduit un espace $H^{2,\alpha}(\Omega_\varphi)$ comme suit :

Définition 2.2.1 *On note par* $H^{2,\alpha}(\Omega_\varphi)$ *où* $\alpha = \frac{\pi}{\varphi}$ *l'espace des fonctions de* $H^1(\Omega_\varphi)$ *à support compact telle que :* $r^{\frac{\pi}{\varphi}}D^2u \in L^2$

$$H^{2,\alpha}(\Omega_\varphi) = \{u \in H^1(\Omega_\varphi), r^\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \in L^2(\Omega_\varphi)\}, \alpha = \frac{\pi}{\varphi}$$

Où les fonctions u *sont à support compact.*

$H^{2,\alpha}$ est un espace de Hilbert muni de la norme :

$$\|u\|^2_{H^{2,\alpha}} := \|u\|^2_{H^1} + \|r^\alpha D^2\|^2_{L^2}$$

et du produit scalaire :

$$\langle u, v\rangle_{H^{2,\alpha}} := \langle u, v\rangle_{H^1} + \sum_{|\beta|=2} \langle D^\beta u, D^\beta v\rangle$$

Il est clair que si$\varphi \in]\pi, 2\pi[\ \ v_k \in H^{2,\alpha}$.

Proposition 2.2.1 *L'espace $H^{2,\alpha}(\Omega_\varphi)$ est un espace intermediaire entre $H^1(\Omega_\varphi)$ et $H^2(\Omega_\varphi)$. et l'injection $H^{2,\alpha}(\Omega_\varphi) \hookrightarrow H^1(\Omega_\varphi)$ est compacte.*

Démonstration :

Par définition on a la premiére inclusion :$(H^{2,\alpha}(\Omega_\varphi) \subset H^1(\Omega_\varphi)$.

Alors ,il suffit de montrer que : $H^2(\Omega_\varphi) \subset H^{2,\alpha}(\Omega_\varphi)$

Soit $u \in H^2(\Omega_\varphi \cap B(o, R))$,on a :

$$\int_0^\varphi \int_0^R |r^\alpha D^2 u(r, \theta)|^2 dr d\theta \leq \int_0^\varphi \big[(\int_0^R r^{4\alpha} dr)^{\frac{1}{2}}.(\int_0^R (D^2u)^4 dr)^{\frac{1}{2}}\big] d\theta$$

$$\leq \int_0^\varphi I_1.I_2 d\theta$$

(En appliquant l'inégalité de Hölder)

Où :

$$I_1 = (\int_0^R r^{4\alpha} dr)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{(4\alpha+1)^{\frac{1}{2}}} R^{2\alpha+\frac{1}{2}}$$

Alors : $\displaystyle\int_0^\varphi \int_0^R |r^\alpha D^2 u(r, \theta)|^2 dr d\theta \leq \frac{1}{(4\alpha+1)^{\frac{1}{2}}} R^{2\alpha+\frac{1}{2}} (\int_0^\varphi \int_0^R (D^2u)^4 dr d\theta)^{\frac{1}{2}} < +\infty$

Car $\quad D^2 u \in L^2 \Longrightarrow (D^2u)^2 \in L^2$

Donc : $r^\alpha D^2 u \in L^2 \Longrightarrow u \in H^{2,\alpha}(\Omega_\varphi \cap B(o, R))$

□

2.2.3 Problème de Neumann

Pour le problème :

$$\begin{cases} \Delta u = f \qquad \text{dans } \ \Omega_\varphi \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} == 0 \quad (\text{sur } \Gamma_\varphi) \end{cases} \tag{2.12}$$

Comme dans le cas du problème de Dirichlet , on utilise la séparation des variables, ce qui donne que les solutions du problème homogène associé au (2.12) sont :

$$u(r,\theta) = \beta_k r^{\frac{k\pi}{\varphi}} \cos \frac{k\pi\theta}{\varphi}$$

où β_k est une constante réel.

Donc les solutions du (2.12) sont :

$$u(r,\theta) = \beta_k r^{\frac{k\pi}{\varphi}} \cos \frac{k\pi\theta}{\varphi} + w$$

Où w est une solution particulière du problème non homogène (2.12).

2.3 Construction de la fonction de Green du problème

2.3.1 Problème de Dirichlet

On aura établi une fonction de Green (noyau de Green où fonction d'infleance) associée au problème de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & (\text{sur } \Gamma) \end{cases} \tag{2.13}$$

Ce dérnier problème équivaut au suivant :

$$\begin{cases} r^2\Delta u = r^2 f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & (\text{sur } \Gamma) \end{cases} \tag{2.14}$$

on a :

$$r^2\Delta u = r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r\frac{\partial u}{\partial r} + r^2\frac{\partial^2 u}{\partial \theta}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta} = r^2 f(r,\theta) = F(r,\theta) \text{dans } \Omega_\varphi \\ u(r,0) = u(r,\varphi) = 0 \end{cases} \tag{2.15}$$

On a :

$$\widetilde{r^2 f(r,\theta)} = \widetilde{f}(\sigma+2,\theta) = \widetilde{F}(\sigma,\theta)$$
$$\widetilde{r^2\Delta u} = \widetilde{(r\frac{d}{dr})^2} u + \widetilde{\frac{\partial^2 u}{\partial\theta}}^2 = \frac{\partial^2\widetilde{u}}{\partial\theta^2} + (-1)^2\sigma^2\widetilde{u}(\sigma,\theta)$$

par la transformation de Mellin ,on transforme le problème (2.15) au suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\widetilde{u}}{\partial\theta^2} + \sigma^2\widetilde{u}(\theta) = \widetilde{f}(\sigma+2,\theta) \quad 0<\theta<\varphi \\ \widetilde{u}(0) = \widetilde{u}(\varphi) = 0 \end{cases} \tag{2.16}$$

où $\widetilde{u}$ représente la transformée de Mellin de u . $(u \longrightarrow \widetilde{u}(\sigma) = \int_0^{+\infty} u(x)x^\sigma \frac{dx}{x})$
Donc on obtient un problème de cauchy par rapport à la variable θ que l'on peut ècrire sous la forme :

$$\begin{cases} \widetilde{u}''(\theta) + \sigma^2\widetilde{u}(\theta) = \widetilde{F}(\theta) \; 0<\theta<\varphi \\ \widetilde{u}(0) = \widetilde{u}(\varphi) = 0 \end{cases} \tag{2.17}$$

Cherchons maintenant une fonction de Green associée à (2.16) ,en effet nous avons le théorème suivant :

Théorème 2.3.1 *:Si le problème homogène associe à* (2.16) *n'admet que la solution triviale alors il existe une (seule une) fonction de Green* $\widetilde{G}$ *continue et symètrique définit par :*

$$\widetilde{G}(\sigma,\theta,\alpha) = \begin{cases} \dfrac{\widetilde{u_1}(\theta)\widetilde{u_2}(\alpha)}{W(\widetilde{u_1},\widetilde{u_2})} & si 0 \le \alpha \le \theta \\ \dfrac{\widetilde{u_1}(\alpha)\widetilde{u_2}(\theta)}{W(\widetilde{u_1},\widetilde{u_2})} & si\ \theta \le \alpha \le \varphi \end{cases}$$

Où $\{\widetilde{u_1},\widetilde{u_2}\}$ *est un systeme fondamental de solutions pour le problème homogène, et* W *leur Wronskien. Alors le problème*(2.15) *admet une solution représenter par :*

$$\widetilde{u}(\sigma,\theta) = \int_0^{\varphi} \widetilde{G}(\sigma,\theta,\alpha)\widetilde{F}(\sigma,\alpha)d\alpha$$

Démonstration :

1) On a le problème homogène associé à (2.16) s'écrit :

$$\begin{cases} \widetilde{u}''(\theta) + \sigma^2 \widetilde{u}(\theta) = 0 \ 0 < \theta < \varphi \\ \widetilde{u}(0) = \widetilde{u}(\varphi) = 0 \end{cases} \tag{2.18}$$

La solution génèrale de (2.18) s'écrit :

$$\widetilde{u}(\theta) = c_1 \cos \sigma\theta + c_2 \sin \sigma\theta, \quad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$$

En passant au conditions unitiales :

$$\widetilde{u}(0) = 0 \Longrightarrow c_1 = 0$$

$$\widetilde{u}(\varphi) = 0 \Longrightarrow (c_2 = 0) \ \vee \ (\sigma\varphi = n\pi) \, , n \in \mathbb{Z}$$

Par suite ,si $\sigma\varphi \neq n\pi$ pour tout n dans $\mathbb{Z}$ alors : $c_2 = 0$ alors $\widetilde{u} \equiv 0$

Donc il existe une fonction de Green $\widetilde{G}$ associé au problème (2.16)

2) Pour determiner cette fonction de Green ,cherchons un système des solutions fondementales des problèmes de Cauchy respectifs suivants :

$$\begin{cases} \widetilde{u_1}''(\theta) + \sigma^2 \widetilde{u_1}(\theta) = 0 \ 0 < \theta < \varphi \\ \widetilde{u_1}(0) = 0, \quad \widetilde{u_1}'(0) = -1 \end{cases} \tag{2.19}$$

$$\begin{cases} \widetilde{u_2}''(\theta) + \sigma^2 \widetilde{u_2}(\theta) = 0 \\ \widetilde{u_2}(\varphi) = 0, \quad \widetilde{u_2}'(\varphi) = 1 \end{cases} \tag{2.20}$$

Pour (2.19), on a :

$$\widetilde{u_1} = c_1 \cos \sigma\theta + c_2 \sin \sigma\theta$$

$$\widetilde{u_1}(0) = 0 \Longrightarrow c_1 = 0$$

$$\widetilde{u_1}'(0) = -1 \Longrightarrow \sigma c_2 = -1$$

D'où :

$$c_2 = \frac{-1}{\sigma}$$

Alors

$$\widetilde{u_1}(\theta) = \frac{-1}{\sigma} \sin \sigma\theta$$

Pour (2.20) ,on a :

$$\widetilde{u_2} = c_3 \cos \sigma\theta + c_4 \sin \sigma\theta$$

$$\widetilde{u_2}(\varphi) = 0 \Longrightarrow c_3 \cos \sigma\varphi + c_4 \sin \sigma\varphi = 0$$

En multipliant le deux derniers termes par $\sigma \sin \sigma\varphi$ on obtient :

$$\sigma c_3 \sin \sigma\varphi \cos \sigma\varphi + \sigma c_4 \sin^2 \sigma\varphi = 0$$

$$\widetilde{u_2}'(\varphi) = 1 \Longrightarrow -\sigma c_3 \sin \sigma\varphi + \sigma c_4 \cos \sigma\varphi = 1$$

En multipliant le deux derniers termes par $\cos \sigma\varphi$ on obtient :

$$-\sigma c_3 \sin \sigma\varphi \cos \sigma\varphi + \sigma c_4 \cos^2 \sigma\varphi = \cos \sigma\varphi$$

Et on fait la somme maintenant on trouve :

$$\sigma c_4 (\sin^2 \sigma\varphi + \cos^2 \sigma\varphi) = \cos \sigma\varphi$$

Alors :

$$c_4 = \frac{\cos \sigma\varphi}{\sigma}$$

$$c_3 = \frac{-1}{\sigma \cos \sigma\varphi} (\cos \sigma\varphi \sin \sigma\varphi) = -\frac{\sin \sigma\varphi}{\sigma}$$

Donc :

$$\widetilde{u_2}(\theta) = \frac{-\sin \sigma\varphi . \cos \sigma\theta}{\sigma} + \frac{\cos \sigma\varphi \sin \sigma\theta}{\sigma} = \frac{-(\sin \sigma\varphi . \cos \sigma\theta - \cos \sigma\varphi \sin \sigma\theta)}{\sigma}$$
$$= -\frac{1}{\sigma} \sin \sigma(\varphi - \theta)$$

On remarque que :

$$\sin(\sigma\varphi - \sigma\theta) = \sin \sigma\varphi \cos \sigma\theta - \cos \sigma\varphi \sin \sigma\theta$$

Alors :

$$W(\widetilde{u_1}, \widetilde{u_2})(\theta) = \begin{vmatrix} \frac{-1}{\sigma} \sin \sigma\theta & -\frac{1}{\sigma} \sin \sigma(\varphi - \theta) \\ -\cos \sigma\theta & \cos \sigma(\varphi - \theta) \end{vmatrix} = -\frac{\sin \sigma\varphi}{\sigma} \neq 0$$

Donc :

$$W(\widetilde{u_1},\widetilde{u_2})(\theta)=W(\widetilde{u_1},\widetilde{u_2})(0)=W(\widetilde{u_1},\widetilde{u_2})(\varphi)=-\frac{\sin\sigma\varphi}{\sigma}\neq 0$$

3) La fonction de Green est une fonction symètrique , bornée et donnée par :

$$\widetilde{G}(\sigma,\theta,\alpha)=\begin{cases}\dfrac{\widetilde{u_1}(\theta)\widetilde{u_2}(\alpha)}{W(\widetilde{u_1},\widetilde{u_2})(\theta)} & \text{si} 0\leq\alpha\leq\theta\\ \dfrac{\widetilde{u_1}(\alpha)\widetilde{u_2}(\theta)}{W(\widetilde{u_1},\widetilde{u_2})(\alpha)} & \text{si } \theta\leq\alpha\leq\varphi\end{cases}$$

$$\widetilde{G}(\sigma,\theta,\alpha)=\begin{cases}-\dfrac{\sin\sigma(\varphi-\alpha).\sin\sigma\theta}{\sigma\sin\sigma\varphi} & \text{si } \ 0\leq\alpha\leq\theta\\ -\dfrac{\sin\sigma\alpha.\sin\sigma(\varphi-\theta)}{\sigma\sin\sigma\varphi} & \text{si } \ \theta\leq\alpha\leq\varphi\end{cases}$$

Il reste maintenant à montrer que la solution du problème (2.16), s'écrit sous la forme suivante :

$$\widetilde{u}(\sigma,\theta)=\int_0^{\varphi}\widetilde{G}(\sigma,\theta,\alpha)\widetilde{F}(\sigma,\theta)d\alpha$$

Et pour cela posons :

$$L=\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\sigma^2 I$$

Qui est l'opérateur de notre problème.

C'est à dire :

$$L\widetilde{u}=\widetilde{F}$$

Où L représente la transformée de Mellin de l'opérateur $r^2\Delta$

Alors d'aprés la définition de la fonction de Green on a :

$$L\widetilde{G}(\sigma,\theta,\alpha)=\delta(\theta-\alpha)\Longleftrightarrow\frac{\partial^2\widetilde{G}}{\partial\theta^2}+\sigma^2\widetilde{G}=\delta(\theta-\alpha)$$

$$L\widetilde{u}=\widetilde{F}\Longleftrightarrow\int_0^{\varphi}\widetilde{G}L\widetilde{u}=\int_0^{\varphi}G\widetilde{F}$$

En integrant la terme gauche deux fois par partie ,on obtient :

$$\int_0^{\varphi}\widetilde{G}L\widetilde{u}=\int_0^{\varphi}\widetilde{G}(\sigma,\theta,\alpha)\frac{\partial^2\widetilde{u}}{\partial\theta^2}+\sigma^2\widetilde{u}=[\widetilde{G}\frac{\partial u}{\partial\theta}]_0^{\varphi}-[\widetilde{u}\frac{\partial\widetilde{G}}{\partial\theta}]_0^{\varphi}+\int_0^{\varphi}\widetilde{u}(\frac{\partial^2\widetilde{G}}{\partial\theta^2}+\sigma^2\widetilde{G})d\alpha$$

$$=[\frac{\partial\widetilde{G}}{\partial\theta}]_0^{\varphi}+\int_0^{\varphi}\widetilde{u}(\frac{\partial^2\widetilde{G}}{\partial\theta^2}+\sigma^2\widetilde{G})d\alpha$$

on a

$$[\widetilde{G}\frac{\partial u}{\partial \theta}]_0^{\varphi} = 0$$

car u est nulle sur le bord, et :

$$[\widetilde{u}\frac{\partial \widetilde{G}}{\partial \theta}]_0^{\varphi} = 0$$

car $\widetilde{G}$ vérifie les conditions au bord aussi (par la définition de la fonction de Green) En remarquant que :

$$\frac{\partial^2 \widetilde{G}}{\partial \theta^2} + \sigma^2 \widetilde{G} = L\widetilde{G} = \delta(\theta - \alpha)$$

On aura :

$$\int_0^{\varphi} \widetilde{u}\delta(\theta - \alpha) d\alpha = \int_0^{\varphi} \widetilde{G}(\sigma, \theta, \alpha) d\alpha$$

Et d'aprés de la définition de la fonction de Dirac on a :

$$\widetilde{u}(\sigma, \alpha) = \int_0^{\varphi} \widetilde{u}(\theta)\delta(\theta - \alpha) d\theta$$

$$\Longrightarrow \widetilde{u}(\sigma, \alpha) = \int_0^{\varphi} \widetilde{G}(\sigma, \theta, \alpha)\widetilde{F} d\alpha$$

Donc si on pose $\theta = \alpha$,on obtient :

$$\widetilde{u}(\sigma, \theta) = \int_0^{\varphi} \widetilde{G}(\sigma, \alpha, \theta)\widetilde{F}(\sigma, \alpha) d\alpha$$

Et comme la fonction de Green est symètrique, on aura alors :

$$\widetilde{u}(\sigma, \theta) = \int_0^{\varphi} \widetilde{G}(\sigma, \theta, \alpha)\widetilde{F}(\sigma, \alpha) d\alpha$$

$$\widetilde{u}(\sigma, \theta) = \int_0^{\theta} -\frac{\sin\sigma(\varphi - \alpha).\sin\sigma\theta}{\sigma \sin\sigma\varphi}\widetilde{F}(\sigma, \theta) d\alpha - \int_{\theta}^{\varphi} \frac{\sin\sigma(\varphi - \theta).\sin\sigma\alpha}{\sigma \sin\sigma\varphi}\widetilde{F}(\sigma, \theta) d\alpha$$

Où $\widetilde{u}$ est la transformée de Mellin de u.

$\square$

Remarque 2.3.1 *La fonction $\widetilde{G} : \sigma \mapsto \widetilde{G}(\sigma,\theta,\alpha)$, considerée comme une fonction complexe de la variable σ où les pôles sont les nombres : $\sigma = \dfrac{n\pi}{\varphi}$, elle est à décroissance exponentielle pour tout couple $(\theta,\alpha) \neq 0$ quand $|Im\sigma| \to +\infty$, on peut donc dèfinir une fonction inverse G ,en effet on a le théorème suivant :*

Théorème 2.3.2 *Soit $z \mapsto f(z)$ une fonction analytique dans l'angle $-\alpha < \theta < \beta$ $(z = re^{i\theta})$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$:*

$$f(z) = \begin{cases} O(|z|^{-a-\varepsilon}) & quand\ |z| \to 0 \\ O(|z|^{-b+\varepsilon}) & quand\ |z| \to +\infty \end{cases}$$

avec $0 < a < b < \pi$ uniformement dans tout secteur fermé intérieur au précedent ,alors :
La fonction $\tilde{f}$ est analytique dans la bande $B_{a,b} = \{\sigma, a < \mu < b\}$ et :
Pour tout $\varepsilon > 0$ on a :

$$\widetilde{f}(\sigma) = \begin{cases} O(e^{-(\beta-\varepsilon)\nu}) & quand\ \nu \to +\infty \\ O(e^{(\alpha-\varepsilon)\nu}) & quand\ \nu \to -\infty \end{cases}$$

où $\sigma = \mu + i\nu$,uniformément dans toute bande intérieur à la précédente et reciproquement.

(**cf** [14])

Soit G la fonction inverse de $\tilde{G}$,alors on a :

$$G(r,\theta,\alpha) = \lim_{\nu\to+\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\mu-i\nu}^{\mu+i\nu} \widetilde{G}(\sigma,\theta,\alpha) r^{-\alpha} d\sigma$$

Rappelons que :

$$\widetilde{G * F} = \widetilde{G}.\widetilde{F}$$

C'est à dire que la solution du (2.15) s'écrit sous la forme :

$$u(r,\theta) = \int_0^{\varphi} G(r,\theta,\alpha) * t^2 f(t,\alpha) d\alpha$$

où $''*''$ designe le produit de convolution multiplicative de G et $F = r^2 f$

$$\Longrightarrow u(r,\theta) = \int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi} G(\frac{r}{t},\theta,\alpha) F(t,\alpha) d\alpha dt$$

Et comme :$F(r,\theta)=r^2f(r,\theta)$,alors :

$$u(r,\theta)=\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi}G(\frac{r}{t},\theta,\alpha)t^2f(t,\alpha)d\alpha dt$$

2.3.2 problème de Neumann

On construira une fonction de Green , associée au problème de Neumann suivant :

$$\begin{cases}\Delta u=f & \text{dans } \Omega_\varphi\\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}==0 & \text{sur } \Gamma_\varphi\end{cases} \tag{2.21}$$

Aprés l'application de la transformation de Mellin sur notre problème qui vient :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\widetilde{u}}{\partial\theta^2}+\sigma^2\widetilde{u}(\theta)=\widetilde{f}(\theta) \quad 0<\theta<\varphi\\ \widetilde{u}'(0)=\widetilde{u}'(\varphi)=0\end{cases} \tag{2.22}$$

1) Pour qu'il existe une fonction de Green associée au problème (2.22) il suffit que le problème homogène :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\widetilde{u}}{\partial\theta^2}+\sigma^2\widetilde{u}(\theta)=0 \ 0<\theta<\varphi\\ \widetilde{u}'(0)=\widetilde{u}'(\varphi)=0\end{cases} \tag{2.23}$$

n'admet que la solution triviale.

La solution générale de l'équation :

$$\frac{\partial^2\widetilde{u}}{\partial\theta^2}+\sigma^2\widetilde{u}(\theta)=0$$

est donnée par :

$$u(\sigma,\theta)=a\cos\sigma\theta+b\sin\sigma\theta$$

où a et b sont de constantes réelles.

En passant aux conditions au bord :

$$\widetilde{u}'(0)=0\Longrightarrow b=0$$

$$\widetilde{u}'(\varphi)=0\Longrightarrow -\sigma a\sin\sigma\varphi=0$$

Si : $\sigma\varphi \neq k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$, alors $a = 0$.

Donc il existe une fonction de Green associée au problème(2.22) .

2)Soit $\{\phi_1, \phi_2\}$ un système des solutions du problème (2.23) ,alors elles verifient :

$$\begin{cases} \phi_1' + \sigma^2\phi_1 = 0 \\ \phi_1(0) = 1,\ \phi_1'(0) = 0 \end{cases} \tag{2.24}$$

$$\begin{cases} \phi_2' + \sigma^2\phi_2 == 0 \\ \phi_2(\varphi) = 0,\ \phi_2'(\varphi) = 1 \end{cases} \tag{2.25}$$

Pour le problème (2.24) on a :

$$\phi_1(\theta) = c_1 \cos\sigma\theta + c_2 \sin\sigma\theta$$

$$\phi_1(0) = 0 \Longrightarrow c_1 = 1$$

$$\phi_1'(0) = 0 \Longrightarrow c_2 = 0$$

$$\Longrightarrow \phi_1(\theta) = \cos\sigma\theta$$

Et pour le problème (2.25) on a :

$$\phi_2(\theta) = b_1 \cos\sigma\theta + b_2 \sin\sigma\theta$$

$$\phi_2(\varphi) = 1 \Longrightarrow b_1 \cos\sigma\varphi + b2\sigma\varphi = 1 \tag{2.26}$$

$$\phi_2'(\varphi) = 0 \Longrightarrow -\sigma b_1 \sin\sigma\varphi + \sigma b_2 = \sigma\varphi = 1. \tag{2.27}$$

En multipliant (2.26) par $\cos\sigma\varphi$,et (2.27) par $\sigma\sin\sigma\varphi$, et faisant la somme on obtient :

$$\sigma b_2(\cos^2\sigma\varphi + \sin^2\sigma\varphi) = \sigma\sin\sigma\varphi$$

$$\Longrightarrow b_2 = \sin\sigma\varphi$$

Si $\sigma\varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi, ; k \in \mathbb{Z}$, il est clair que $b_1 = 0$
Si $\sigma\varphi \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Longrightarrow b_1 = \cos\sigma\varphi$

$$\phi_2(\theta) = \cos\sigma\varphi\cos\sigma\theta + \sin\sigma\varphi\sin\sigma\theta$$

$$= \cos\sigma(\varphi - \theta)$$

En remarquant que :

$$\cos(\sigma\varphi - \sigma\theta) = \cos\sigma\varphi\cos\sigma\theta + \sin\sigma\varphi\sin\sigma\theta$$

On calcule maintenant le Wronskien :

$$W(\phi_1, \phi_2)(\theta)(\theta) = \begin{vmatrix} \cos\sigma\theta & \cos\sigma(\varphi-\theta) \\ -\sigma\sin\sigma\theta & \sigma\sin\sigma(\varphi-\theta) \end{vmatrix} = \sigma\sin\sigma\varphi \neq 0$$

Remarquons que :

$$\cos\sigma\theta.\sin\sigma(\varphi-\theta) + \sin\sigma\theta.\cos\sigma(\varphi-\theta) = sin(\sigma(\varphi-\theta)+\sigma\theta) = \sin\sigma\varphi$$

Alors W est constant (independant de θ),c'est à dire :

$$W(\phi_1, \phi_2)(0) = W(\phi_1, \phi_2)(\varphi) = \begin{vmatrix} 1 & \cos\sigma\varphi \\ 0 & \sigma\sin\sigma\varphi \end{vmatrix} = \sigma\sin\sigma\varphi$$

Donc la fonction de Green $\widetilde{N}$ sera :

$$\widetilde{N}(\sigma,\theta,\alpha) = \begin{cases} \dfrac{\cos\sigma\theta.\cos\sigma(\varphi-\alpha)}{\sigma\sin\sigma\varphi} & \text{si}0 \le \alpha \le \theta \\ \dfrac{\cos\sigma\alpha.\cos\sigma(\varphi-\theta)}{\sigma\sin\sigma\varphi} & \text{si } \theta \le \alpha \le \varphi \end{cases}$$

La fonction $\widetilde{N}$ est une fonction à la variable complexe σ, dont les pôles sont les nombres $\sigma = \dfrac{k\pi}{\varphi}$.On resulte que la solution du problème (2.22) ,s'écrit sous la forme :

$$\widetilde{u}(\sigma,\theta) = \int_0^{\varphi} \widetilde{N}(\sigma,\theta,\alpha)\widetilde{F}(\sigma,\theta)d\alpha$$

c'est à dire que la solution est donnée par :

$$\widetilde{u}(\sigma,\theta) = \int_0^{\theta} \frac{\cos\sigma\theta.\cos\sigma(\varphi-\alpha)}{\sigma\sin\sigma\varphi}\widetilde{F}(\sigma,\theta)d\alpha + \int_{\theta}^{\varphi} \frac{\cos\sigma\alpha.\cos\sigma(\varphi-\theta)}{\sigma\sin\sigma\varphi}\widetilde{F}(\sigma,\theta)d\alpha$$

où $\widetilde{u}(\sigma,\theta)$ est la transformée de Mellin de $u(r,\theta)$ La fonction $\widetilde{N} : \sigma \mapsto \widetilde{N}(\sigma,\theta,\alpha)$ considerée comme une fonction complexe de la variable σ est à décroissance exponentielle pour tout couple $(\theta,\alpha) \neq 0$ quand $Im\sigma \to +\infty$, on peut donc dèfinir une fonction inverse N par :

$$N(r,\theta,\alpha) = \lim_{\nu\to+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mu-i\nu}^{\mu+i\nu} \widetilde{N}(\sigma,\theta,\alpha)r^{-\alpha}d\sigma$$

Donc la solution du problème (2.21) s'écrit :

$$u(r,\theta) = \int_0^{\varphi} N(r,\theta,\alpha) * F(t,\alpha)d\alpha$$

car $(N(r,\widetilde{\theta,\alpha) *} F(r,\theta)) = \widetilde{N}(\sigma,\theta,\alpha).\widetilde{F}(\sigma,\alpha)$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} u(r,\theta) &= \int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi} N(\frac{r}{t},\theta,\alpha)F(t,\alpha)d\alpha dt \\ &= \int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi} N(\frac{r}{t},\theta,\alpha)t^2 f(t,\alpha)d\alpha dt \end{aligned}$$

Chapitre 3

Existence de la solution

3.1 Inégalité à priori

Pour étudier l'existence de la solution du notre problème on a besoin de montrer que l'opérateur du problème est surjectif, ce que nous conduit à utiliser le lemme suivant ,dit lemme de Peetre[1] :

Lemme 3.1.1 ***(lemme de Peetre)*** *:*

Soient E, F, G trois espaces de Banach réfléxifs, tel que $E \subset F$ avec injection compacte ,et soit A un opérateur linéaire continue de E dans G. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *l'image de A est fermée dans G et le noyau de A est de dimension finie.*
2. *Il existe une constante $K > 0$, telle que :*

$$\|u\|_E \leq K\{\|Au\|_F + \|u\|_G\} \tag{3.1}$$

Démonstration :

1) $1 \Longrightarrow 2$?

D'abord on a (1) entraine que la boule unité dans $\ker A$ est compacte , et donc $\ker A$ est de dimension finie,

[1] Jaak Peetre est un mathématicien Suède,il est né en Estonie (1935),il a travaillé à Lund (Suède)

alors on décompose E en somme direct : $E = \ker A \oplus M$, donc la restriction de A à M est injective et alors on démontre que :

$$\|u\|_E \leq C\|Au\|_G, \quad \forall u \in M \tag{3.2}$$

Par l'absurde,en utilisant (1) et l'hypothèse que l'injection de E dans F est compacte .On en déduit que ImA est fermée dans G

car si on prend une suite (u_n) dans ImA qui tend vers u dans G alors il existe une suite (v_n) dans $\ker A$ tel que $u_n = Av_n$ et on en deduit de (2) que v_n tend vers v dans $\ker A$, d'où $Av = u$ donc $u \in ImA$.

2) $(2) \Longrightarrow (1)$?

Décomposons toujours E en somme directe : $E = \ker A \oplus M$.

La restriction de A à M est injective et surjective , donc grâce au théorème du graphe fermé on en déduit (2) .on démontre aussi que :

$$\|u\|_E \leq C_2\|u\|_F, \qquad \forall u \in \ker A \tag{3.3}$$

Toujours par l'absurde en utilisant l'hypothèse que l'injection de E dans F est compacte .alors si $u \in E$ et $u = u_1 + u_2$ avec $u_1 \in \ker A$, on en deduit (1) ,à partir de (3.2) et (3.3) ,d'où le resultat.

□

3.2 Cas $f \in L^2(\Omega_\varphi)$

on applique le lemme précédent pour le cas $Bu = 0$, et prendrons $E = H^2(\Omega_\varphi)$ $F = H^0(\Omega_\varphi) = L^2(\Omega_\varphi)$,et $G = H_0^1$ et l'opérateur $A = \Delta$ .premiérement on a :

1. H^2, L^2, H^1 sont des espaces de Hilbert donc sont de Banach réflexifs.
2. Δ est continue de $H^2(\Omega_\varphi)$ dans $L^2(\Omega_\varphi)$.

Sont verifiéés ,aussi la compacitè de l'injection $H^2(\Omega_\varphi)$ dans $L^2(\Omega_\varphi)$ est satisfaite d'après le thèoréme (1.2.3) .

Pour arriver au resultat desiré(i.e Δ est d'image fermé dans $H^1(\Omega_\varphi)$), on a besoin d'une inégalité de type : $\exists C > 0$ telle que :

$$\|u\|_{H^2} \leq C\{\|\Delta u\|_{L^2} + \|u\|_{H^1}\}$$

3.2.1 Problème de Dirichlet homogène

Problème non perturbé

D'aprés ce que précéde la solution du problème était donnée par :

$$u(r,\theta) = \int_0^\varphi G(r,\theta,\alpha) * (r^2 f(r,\alpha))d\alpha$$

$$\Longrightarrow u(r,\theta) = \int_0^\varphi \int_0^{+\infty} G(\frac{r}{t},\theta,\alpha).(t^2 f(t,\alpha))dtd\alpha$$

En effet, on a le théorème suivant :

Théorème 3.2.1 *(de Mikhlin)*
Si $f \in L^P(R+)$,et si M vérifie :

1. $\widetilde{M}(\frac{1}{p} + i\nu)$ *définie pour tout* ν
2. $\sup|\widetilde{M}(\frac{1}{p} + i\nu)| < +\infty$ *et* $\sup|\nu\frac{d}{d\sigma}\widetilde{M}(\frac{1}{p} + i\nu)| < +\infty$ *alors :*
   $h(r) = \int_0^{+\infty} f(t)M(\frac{r}{t})\frac{dt}{t}$ *appartient à $L^P(\mathbb{R}^+)$ et il existe $c > 0$ tel que :*
   $\|h\|_{L^p} \leq c\|f\|_{L^p}$ ***(cf**[14])*

pour :$f \in L^2(\Omega_\varphi)$, on a :

$$D^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}$$

Donc il suffit de montrer que :
$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \in L^2(\Omega_\varphi), \frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} \in L^2(\Omega_\varphi), \frac{2}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta} \in L^2(\Omega_\varphi)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \int_0^\varphi \frac{\partial^2 G}{\partial r^2}(r,\theta,\alpha) * r^2 f(r,\alpha)d\alpha$$

$$= \int_0^{\varphi} \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 G}{\partial r^2}(\frac{r}{t}, \theta, \alpha).f(t,\alpha)\frac{dt}{t}d\alpha$$

En appliquant les propriétés de la transformation de Mellin on aura :

$$\widetilde{\frac{\partial^2 G}{\partial r^2}}(r,\theta,\alpha) = (\sigma-1)(\sigma-2)\widetilde{G}(\sigma-2,\theta,\alpha)$$

Posons $\widetilde{K_1}(\sigma,\theta,\alpha) = (\sigma-1)(\sigma-2)\widetilde{G}(\sigma-2,\theta,\alpha)$,

et soit K_1 la transformée inverse de $\widetilde{K_1}$,alors on peut ècrire :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \int_0^{\varphi} \int_0^{+\infty} K_1(\frac{r}{t},\theta,\alpha)f(t,\alpha)\frac{dt}{t}d\alpha$$

En utilisant le théorème de Mikhlin ,on obtient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \in L^2(\mathbb{R}^+), et$$

$$\int_0^{+\infty} |\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}|^2 \leq \int_0^{\varphi} C\|f(r,\alpha)\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}d\alpha$$

En integrant par rapport à θ les deux termes on obtient :

$$\int_0^{\varphi} \|\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}d\theta \leq C_1\|f\|_{L^2(\Omega_\varphi)}$$

donc :

$$\|\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}(r,\theta)\|_{L^2(\Omega_\varphi)} \leq C_1\|f\|_{L^2(\Omega_\varphi)} \tag{3.4}$$

Maintenant on va montrer que :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r \partial \theta} \in L^2(\Omega_\varphi)$$

On a :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} = \int_0^{\varphi} \frac{1}{r}\frac{\partial^2 G}{\partial r \partial \theta}(r,\theta,\alpha) * (r^2 f(r,\alpha))d\alpha$$

$$= \int_0^{\varphi} \int_0^{+\infty} \frac{1}{r}\frac{\partial^2 G}{\partial r \partial \theta}(\frac{r}{t},\theta,\alpha).tf(t,\alpha)\frac{dt}{t}d\alpha$$

On remarque que :

$$\widetilde{\frac{1}{r}\frac{\partial^2 G}{\partial r \partial \theta}} = -(\sigma-1)\frac{\partial \widetilde{G}}{\partial \theta}(\sigma-1,\theta,\alpha)$$

Posons :

$$\widetilde{K_2}(\sigma,\theta,\alpha) = -(\sigma-1)\frac{\partial \widetilde{G}}{\partial \theta}(\sigma-1,\theta,\alpha)$$

,et soit K_2 la transformée inverse de $\widetilde{K_2}$, alors il vient :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} = \int_0^{\varphi} K_2(r,\theta,\alpha) * f(r,\alpha)d\alpha$$

En utilisant une autre fois le théorème de Mikhlin on obtient :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \in L^2(\mathbb{R}^+)$$

Et :

$$\|\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta}\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq C_2 \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}$$

Ce qui implique :

$$\int_0^{\varphi} \|\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta}\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq C_2 \int_0^{\varphi} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}$$

Donc :

$$\|\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta}\|_{L^2(\Omega_\varphi)} \leq C_2 \|f\|_{L^2(\Omega_\varphi)} \tag{3.5}$$

Il reste à montrer que :

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \in L^2(\Omega_\varphi)$$

On a :

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \int_0^{\varphi} \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 G}{\partial \theta^2}(r,\theta,\alpha) * f(r,\alpha)d\alpha$$

On remarque que :

$$\widetilde{\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 G}{\partial \theta^2}}(r,\theta,\alpha) = (\sigma-2)\frac{\partial^2 \widetilde{G}}{\partial \theta^2}(\sigma-2,\theta,\alpha)$$

Alors posons :

$$\widetilde{K_3}(\sigma,\theta,\alpha) = (\sigma-2)\widetilde{G}(\sigma-2,\theta,\alpha)$$

On obtient :

$$\widetilde{\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}} = \int_0^{\varphi} \widetilde{K_3}(\sigma,\theta,\alpha)\widetilde{f}(\sigma,\alpha)d\alpha$$

Soit K_3 la transformée inverse de $\widetilde{K_3}$,donc on aura :

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \int_0^{\varphi} K_3(r,\theta,\alpha) * f(r,\alpha)d\alpha$$

En utilisant le théorème de Mikhlin,il vient :

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \in L^2(\mathbb{R}^+)$$

Et :

$$\|\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\|_{((\mathbb{R}^+)} \leq C_3\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}$$

De la même demarche du cas précédent ,on obtient :

$$\|\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\|_{(\Omega_\varphi)} \leq C_3\|f\|_{L^2(\Omega_\varphi)} \tag{3.6}$$

Pour $\frac{1}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}$, on utilise l'inègalité de Poincaré :

$$\|\frac{1}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}\|_{L^2(\Omega_\varphi)} \leq \|\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\|_{L^2(\Omega_\varphi)} \tag{3.7}$$

Enfin d'aprés :$(3.4), (3.5), (3.6), et(3.7)$ il résulte :

$$\|D^2u\|_{L^2(\Omega_\varphi)} \leq \|\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}(r,\theta)\|_{L^2(\Omega_\varphi)} + \|\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta}\|_{L^2(\Omega_\varphi)} + \|\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\| + \|\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\|_{L^2(\Omega_\varphi)}$$

$$\leq C_1\|f\|_{L^2(\Omega_\varphi)} + C_2\|f\|_{L^2(\Omega_\varphi)} + (C_3+1)\|f\|_{L^2(\Omega_\varphi)}$$

Si on prend $M = \frac{1}{3}\max(C_1, C_2, C_3+1)$ on obtient :

$$\|D^2u\|_{L^2(\Omega_\varphi)} \leq M\|f\|_{L^2(\Omega_\varphi)}$$

$$\|D^2u\|_{L^2(\Omega_\varphi)} + \|u\|_{H^1} \leq M\|f\|_{L^2(\Omega_\varphi)} + \|u\|_{H^1}$$

Enfin on arrive à l'inégalité :

$$\|u\|_{H^2(\Omega_\varphi)} \leq K\{\|\Delta u\|_{L^2(\Omega_\varphi)} + \|u\|_{H^1}\} \tag{3.8}$$

Remarque :

Si $\varphi > \pi$, on a dejá vu que la solution est dans $H^{1+\frac{\pi}{\varphi}-\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$ un nombre arbitraire quelconque).

Et comme l'injection $H^2 \hookrightarrow H^{1+\frac{\pi}{\varphi}-\varepsilon}$ est continue , alors il existe une constante N tel que :

$$\|u\|_{H^{1+\frac{\pi}{\varphi}-\varepsilon}} \leq N\|u\|_{H^2}$$

Ce qui entrâine :

$$\|u\|_{H^{1+\frac{\pi}{\varphi}-\varepsilon}} \leq NK\{\|\Delta u\|_{L^2} + \|u\|_{H_0^1}\}$$

$$\leq K'\{\|\Delta u\|_{L^2} + \|u\|_{H_0^1}$$

Problème perturbé

On a besoin d'une inégalité du type :$\exists K > 0$, telle que :

$$\|u\|_{H^2} \leq K\{\|(\Delta + \lambda)u\|_{L^2} + \|u\|_{H_0^1}\}$$

On a :

$$\|\Delta u\| = \|\Delta u + \lambda u - \lambda u\|$$

$$\leq \|(\Delta + \lambda)u\| + \|\lambda u\|$$

$$\leq \|\Delta + \lambda)u\| + |\lambda|\|u\|$$

Soit $M = \max(1, |\lambda|)$ alors : $\|\Delta u\| \leq M(\|(\Delta + \lambda)u\| + \|u\|)$
alors on a :

$$\|u\|_{H^2} \leq K\{M\|(\Delta + \lambda)u\|_{L^2} + M\|u\| + \|u\|_{H_0^1}\}$$

et comme l'injection $H^1 \hookrightarrow L^2$ est continue ,alors il existe une constante C telle que :

$$\|u\|_{L^2} \leq C\|u\|_{H^1}$$

Donc

$$\|u\|_{H^2} \leq K\{M\|(\Delta + \lambda)u\|_{L^2} + (MC + 1)\|u\|_{H_0^1}\}$$

Posons $L = \max(KM, K(MC + 1))$.

Donc on a le résultat desiré :

$$\|u\|_{H^2} \leq L\{\|(\Delta + \lambda)u\|_{L^2} + \|u\|_{H_0^1}\} \tag{3.9}$$

Résultats de Grisvard :

P.Grisvard [5] a étudié le Laplacien dans un polygone plan et à l'aide de l'alternative de Fredholm , il a utilisé les coordonnèes cartesienne, il ajoute une condition sur f, où il faut que f soit nulle sur la frontière Γ ,donc il a introduisé un espace W_0^s ,dans le quel il a cherché les solutions du problème.

Classiquement ,lorsque Ω est à frontière régulière, la résolution de ce problème est basée sur l'inégalité à priori :

$$\|u\|_{H^{s+2}} \leq C\|\Delta u\|_{H^s} \tag{3.10}$$

Pour $u \in H^{s+2}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. dans le cas où Ω est un polygone,il peut arriver que l'inégalité (3.10) soit fausse .

Cependant,on prouvera que l'inégalité (3.10) est verifiée dans tous le cas si on impose une condition supplémentaire

$$\Delta u \in H_0^s(\Omega)$$

C'est à dire pour u dans l'espace :

$$W_0^s(\Omega) = \{u \in H^{s+2}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega); \Delta u \in H_0^s(\Omega)\}$$

Théorème 3.2.2 *On a :*

$$\|D_x^2 u\|^2 + \|D_y^2 u\|^2 + 2\|D_x D_y u\|^2 \leq \|\Delta u\|^2$$

pour tout $u \in W_0^s(\Omega)$

Démonstration :

on a :$\|\Delta u\|^2 = \|D_x^2 u + D_y^2 u\|^2 = \|D_x^2 u\|^2 + \|D_y^2 u\|^2 + 2(D_x^2 u, D_y^2 u)$

$(D_x^2 u, D_y^2 u) = \int_{\Omega_\varphi} D_x^2 u D_y^2 u dx dy$

Posons $D_x u = v$ et $D_x u = w$ on trouve :

$$(D_x v, D_y w) = \int_{\Gamma_\varphi} v D_y w dy - \int_{\Omega_\varphi} v D_x D_y w dx dy$$

$$= -(v, D_x D_y w) = -(v, D_y D_x)$$

car :

$$\int_{\Gamma_\varphi} v D_y w dy = 0$$

$$-(\int_{\Gamma_\varphi} D_y v D_x w dy - (D_y v, D_x w)) = (D_y v, D_x w)$$

Donc :

$$\begin{aligned}(D_x^2 u, D_y^2 u) &= \int_{\Omega_\varphi} D_y D_x u . D_x D_y dx dy \\ &= \|D_x D_y u\|^2\end{aligned}$$

Alors :

$$(D_x^2 u, D_y^2 u) = \|D_x D_y u\|^2$$

$\|\Delta u\|^2 = \|D_x^2\|^2 + \|D_y^2\|^2 + 2\|D_x D_y u\|^2$

Et par conséquent

$\|u\|_{H^2}^2 = \|u\|_{L^2}^2 + \|Du\|_{L^2}^2 + \|D_x^2\|^2 + \|D_y^2\|^2 + 2\|D_x D_y u\|^2$

Où le resultat (avec $K = 1$)

$$\|u\|_{H^2}^2 \leq \|\Delta u\|^2 + \|u\|_{H^1}^2$$

$\square$

3.2.2 Problème de Neumann

pour le problème de Neumann homogène :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad \text{dans } \Omega_\varphi \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad (\text{sur } \Gamma_\varphi) \end{cases} \tag{3.11}$$

On a dejá trouvé une fonction de Green N associe à ce problème. Donc le calcul est le même ,il suffit de remplacer G par N ,et $\widetilde{G}$ par $\widetilde{N}$.

Dans le deuxième chapitre , on avait trouvé que la solution du problème (3.11) s'écrit sous la forme :

$$u = \int_0^\varphi \int_0^{+\infty} N(\frac{r}{t}, \theta, \alpha) t^2 f(t, \alpha) \frac{dt}{t} d\alpha$$

Où N la transformée de Mellin inverse de la fonction de Green trouvée $\widetilde{N}$, donc on fait un raisonnement analogue comme dans le cas de la condition de Dirichlet, car la fonction de Green N satisfait aussi les hypothèses du thèoréme de Mikhlin, donc on déduit qu'il existe une constante K tel que :

$$\|u\|_{H^2} \leq K\{\|\Delta u\|_{L^2} + \|u\|_{H^1}$$

3.3 cas $f \in H^m(\Omega_\varphi)(m > 0, entier)$

3.3.1 Problème de Dirichlet homogène

Problème non perturbé

Supposons maintenant que $f \in H^m$ avec $m > 0$ entier , et on va voir que la solution du problème (3.2) sera dans $H^{m+2}(\Omega_\varphi \cap B(o,R))$ (pour $m+1 < \frac{\pi}{\varphi}$).
Donc on a besoin d'une inégalité de type : $\exists K > 0$, telle que :

$$\|u\|_{H^{m+2}} \leq K\big\{\|\Delta u\|_{H^m} + \|u\|_{H_0^{m+1}}\big\}$$

Où :

$$\|u\|_{H^{m+2}} = \sum_{|\alpha|=m+2} \|D^\alpha u\|_{L^2}$$

On a :

$$D^\alpha = \sum_{k+l=|\alpha|} \frac{\partial}{\partial r^k}\frac{\partial}{\partial \theta^l} \quad , |\alpha| \leq m$$

donc il suffit de montrer que : $D^\alpha u \in L^2(\Omega_\varphi \cap B(o,R))$ pour $|\alpha| = m$.

On ètudie l'expression suivante :

$$\frac{\partial^{k+l}u}{\partial r^k \partial \theta^l}(r,\theta) = \int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi} \frac{\partial^{k+l}G}{\partial r^k \partial \theta^l}(\frac{r}{t},\theta,\alpha)t^{2-k}\frac{dt}{t}d\alpha$$

$$= \int_0^{\varphi} t^{2-k} f(t,\alpha) * M(r,\alpha)d\alpha$$

Où : $M(r,\theta,\alpha) = \dfrac{\partial^{k+l}G}{\partial r^k \partial \theta^l}(r,\theta,\alpha)$

la fonction $\widetilde{M}$ (la transformèe de Mellin de M) est définiée pour tout $\sigma = \mu + i\nu$:

$$\widetilde{M}(\sigma,\theta,\alpha)=(-1)^k(\sigma-1)(\sigma-2)...(\sigma-k)\frac{\partial^l\widetilde{G}}{\partial\theta^l}(\sigma-k,\theta,\alpha)$$

On verra que la fonction M satisfaite aussi les hypothéses du théorème de Mikhlin ,en effet on a les deux lemmes suivants :

Lemme 3.3.1 *Soient les deux polynômes $P(\sigma),Q(\sigma)$ tel que dègrèQ -dègrè $P\geq 2$*
$e(\sigma,\theta)$ solution élémentaire du problème (2.16)
la fonction $\frac{P(\sigma)}{Q(\sigma)}.\frac{e(\sigma,\theta)}{e(\sigma,\varphi)}$ *vèrifie :*

1. $\sup\limits_{0\leq\theta\leq\varphi}|\sigma^k\frac{\partial^l}{\partial\theta^l}(\frac{P(\sigma)}{Q(\sigma)}.\frac{e(\sigma,\theta)}{e(\sigma,\varphi)}|<+\infty$
2. $\sup\limits_{0\leq\theta\leq\varphi}|\sigma^{k+1}\frac{\partial^{l+1}}{\partial\theta^{l+1}}(\frac{P(\sigma)}{Q(\sigma)}.\frac{e(\sigma,\theta)}{e(\sigma,\varphi)}|<+\infty$
   *où $\nu<0$, (**cf** [14])*

Lemme 3.3.2 *Soit* $g(\sigma,\theta)=\sigma^k(\varphi-\theta)^l\frac{e(\sigma,\theta)}{e(\sigma,\varphi)}$.
Alors :

$$1)\ \sup_{0\leq\theta\leq\varphi}|g(\sigma,\theta)|<+\infty$$

$$2)\ \sup_{0\leq\theta\leq\varphi}|\nu g(\sigma,\theta)|<+\infty$$

*où $\sigma=\mu+i\nu$ et $\nu<0$, (**cf** [14])*

Appllication :

On a :

$$\widetilde{G}(\sigma,\theta,\alpha)=\begin{cases}-\frac{\sin\sigma(\varphi-\theta).\sin\sigma\alpha}{\sigma\sin\sigma\varphi} & \text{si}0\leq\alpha\leq\theta\\ -\frac{\sin\sigma\theta.\sin\sigma(\varphi-\alpha)}{\sigma\sin\sigma\varphi} & \text{si }\theta\leq\alpha\leq\varphi\end{cases}$$

Il est clair que si on pose $e(\sigma,\theta)=\sin\sigma\theta$, et $e(\sigma,\varphi)=\sin\sigma\varphi$.

Pour $0\leq\alpha\leq\theta$,alors :

$$\widetilde{G}(\sigma,\theta,\alpha)=-\frac{\sin\sigma\alpha\sin\sigma(\varphi-\theta)}{\sigma\sin\sigma\varphi}$$

$\widetilde{G}$ vérifie les conditions du lemme (3.3.1) ,alors on a :

1. $\sup\limits_{0\leq\theta\leq\varphi}|\sigma^k\frac{\partial^l\widetilde{G}}{\partial\theta^l}(\sigma,\theta,\alpha)|<+\infty$

2. $\sup\limits_{0\leq\theta\leq\varphi} |\sigma^{k+1}\dfrac{\partial^{l+1}\widetilde{G}}{\partial\theta^{l+1}}(\sigma,\theta,\alpha)| < +\infty$

pour $\theta \leq \alpha \leq \varphi$

$$\widetilde{G}(\sigma,\theta,\alpha) = -\frac{\sin\sigma\theta\sin\sigma(\varphi-\alpha)}{\sigma\sin\sigma\varphi}$$

$\widetilde{G}$ vérifie les conditions du lemme (3.3.2), alors :

$$1)\ \sup_{0\leq\theta\leq\varphi} |\widetilde{G}(\sigma,\theta,\alpha)| < +\infty$$

$$2)\ \sup_{0\leq\theta\leq\varphi} |\nu\widetilde{G}(\sigma,\theta,\alpha)| < +\infty$$

Et comme :

$$\widetilde{M}(\sigma,\theta,\alpha) = (-1)^k(\sigma-1)(\sigma-2)...(\sigma-k)\frac{\partial\widetilde{G}}{\partial\theta^l}(\sigma-k,\theta,\alpha)$$

Donc dans les deux cas la fonction $\widetilde{M}$ satisfait les hypothèses du théorème de Mikhlin.

C'est à dire :

$$D^\alpha u \in L^2(\Omega_\varphi \cap B(o,R))\ pour\ tout |\alpha| \leq m$$

Si on pose : $v = D^\alpha u$,et fait une étude simillaire comme dans le cas où $m = 0$, juste à remplacer u par v ,et $\widetilde{G}$ par $\widetilde{M}$,il vient :

$$\|D^2 v\|_{L^2(\Omega_\varphi)} \leq C_5\|\Delta u\|_{L^2(\Omega_\varphi)}$$

$$\|D^{\alpha+2}u\|_{L^2(\Omega_\varphi)} \leq K\|\Delta u\|_{L^2(\Omega_\varphi)}$$

donc $\|u\|_{H^{m+2}} = \sum\limits_{|\alpha|\leq m+2} \|D^\alpha u\|_{L^2} \leq C_6\|f\|_{L^2}$

mais $L^2 \hookrightarrow H^m$ (pour tout $m \geq 0$ grâce à l'injection de Sobolev)

Enfin on arrive au résultat desirè :

$$\|u\|_{H^{m+2}} \leq K(\|u\|_{H^m} + \|u\|_{H^{m+1}})$$

$$\|u\|_{H^{m+2}} \leq K(\|u\|_{H^m} + \|u\|_{H^{m+1}})$$

3.3.2 problème de Neumann homogène

L'étude est tout à fait analogue comme celle des conditions de Dirichlet, car la fonction de Green $\widetilde{N}$ associée au problème (2.22) verifie aussi les conditions lesquels $\widetilde{G}$ verifieé.

Remarque 3.3.1 *On peut aussi obtenir ce dernier résultat ,par raisonnement de recurence comme suit :*

On restrient l'étude sur le cas des conditions de Dirichlet ,dans le cas de Neumann est simillaire.

Problème non perturbè :

Supposons maintenant que $f \in H^m$ avec $m > 0$ entier ,et on va voir que la solution du problème (2.4) sera dans H^{m+2} $(m+1 < \frac{\pi}{\varphi})$, et pour cela on raisonnera par recurence. donc pour arriver au résultat desiré ,on aura besoin d'une inégalité de type $\exists k > 0$, telle que :

$$\|u\|_{H^{m+2}} \leq K\{\|\Delta u\|_{H^m} + \|u\|_{H_0^{m+1}}\}$$

1) Pour $m = 0$ on a dejá démontrer qu'il existe une constante K telle que :

$$\|u\|_{H^2} \leq K\{\|\Delta u\|_{L^2} + \|u\|_{H^1}$$

En passant à la deuxième condition du recurence :

2)Supposons que si $f \in H^m$,alors la solution du problème (2.4) est dans $H^{m+2}(\Omega_\varphi)$.

Et on va montrer le suivant :

$$sif \in H^{m+1}(\Omega_\varphi) \Longrightarrow u \in H^{m+3}(\Omega_\varphi)?$$

C'est à dire que : $u \in H^{m+2}$ et $\dfrac{du}{dx}, \dfrac{du}{dy} \in H^{m+2}$

Soit u la solution du problème (3.4) , alors $u \in H^{m+2}$ (par hypothèse de recurence)

Posons :$v = \dfrac{du}{dx}$,alors :$v \in H^{m+1} \subset H_0^1(\Omega_\varphi)$

Car $u \in H^{m+2}$ et $v = 0$ sur Γ.

Si $f \in H^{m+1} \Longrightarrow g = \dfrac{df}{dx} \in H^m(\Omega_\varphi)$

En derivant par rapport à x dans le problème (2.4) ,on aura :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}(\Delta u) = \dfrac{df}{dx} & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{du}{dx} = 0 & (\text{sur } \Gamma) \end{cases} \tag{3.12}$$

$$\begin{cases} \Delta v = g & \text{dans } \Omega \\ v = 0 & (\text{sur } \Gamma) \end{cases} \tag{3.13}$$

Alors v une solution du problème (2.4)

Par hypothèse de recurence on a : $v \in H^{m+2}$

i.e $D^\alpha v \in L^2$, pour tout α tel que :$|\alpha| \leq m+2$.

Donc :

$$v = \frac{du}{dx} \in H^{m+2}$$

Et on fait un raisonnement analogue,on posera : $v = \dfrac{du}{dy}$,est on arrive au résultat suivant :

$$\frac{du}{dy} \in H^{m+2}$$

Donc $u \in H^{m+3}$, alors pour tout m entier on a l'inégalité desirée :

$$\|u\|_{H^{m+2}} \leq K\{\|\Delta u\|_{H^m} + \|u\|_{H_0^{m+1}}\}$$

Remarque : Pour le cas : $\varphi > \pi$, on a :

$$H^{m+2} \hookrightarrow H^{m+1+\frac{\pi}{\varphi}-\varepsilon} \rightharpoonup H^{m+1}$$

Donc il existe une constante C tel que :

$$\|u\|_{H^{m+1+\frac{\pi}{\varphi}-\varepsilon}} \leq C\|u\|_{H^{m+2}} \leq CK\{\|\Delta u\|_{H^m} + \|u\|_{H_0^{m+1}}\} \tag{3.14}$$

Problème perturbé

Comme dans le cas du problème non perturbè ,on fait un raisonnement analogue comme suit :

1) Le cas où $m = 0$ dejâ on a (3.5) satisfaite

2) Supposons que si $f \in H^m$ alors la solution du problème (2.2) soit dans H^{m+2}
Posons : $v = \dfrac{du}{dx}$.
En dérivant le problème (2.2) on obtient :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}(\Delta u + \lambda u) = \dfrac{df}{dx} & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{du}{dx} = 0 & (\text{sur } \Gamma) \end{cases} \tag{3.15}$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} \Delta v + \lambda v = g & \text{dans } \Omega \\ v = 0 & (\text{sur } \Gamma) \end{cases} \tag{3.16}$$

Donc on déduit que v est une solution du problème (2.2).
Par l'hypothèse de recurence $v \in H^{m+2}$ ce qui entraine $\dfrac{du}{dx} \in H^{m+2}$ on arrivera au résultat annalogue si on pose $v = \dfrac{du}{dy}$ que $\dfrac{du}{dy} \in H^{m+2}$ alors on résulte $u \in H^{m+3}$

Chapitre 4

L'unicité de la solution

4.1 problème de Dirichlet

4.1.1 problème non perturbé

on étudie le noyau du problème (2.4), nous cherchons la solution du problème :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega_\varphi \\ u = 0 & (\text{sur } \Gamma_\varphi) \end{cases} \tag{4.1}$$

On a dans ce cas l'unicitè vartionnelle car :

$$\begin{aligned} (\Delta u, u) &= \int_{\Gamma_\varphi} \nabla u.udx - \int_{\Omega_\varphi} (\nabla u)^2 dx \\ &= -\int_{\Omega_\varphi} (\nabla u)^2 dx = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\nabla u|^2 = 0 &\Longrightarrow |\frac{du}{dx}|^2 + |\frac{du}{dy}|^2 = 0 \\ &\Longrightarrow |\frac{du}{dx}|^2 = |\frac{du}{dy}|^2 = 0 \\ &\Longrightarrow u = c \quad (constante) \end{aligned}$$

Et comme $u \equiv 0$ sur Γ ,donc $u \equiv 0$

$$\ker \Delta = \{0\}$$

i.e l'opérateur du problème est injectif.

résultat : L'opérateur de Laplace est un isomorphisme de $H_0^2(\Omega_\varphi)$ dans $L^2(\Omega_\varphi)$

4.1.2 Problème petrurbé

On étudie le noyau du problème (2.2) . Les élèments du noyau sont les solutions du problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 & \text{dans } \Omega_\varphi \\ u(r,0) = 0 & (\text{sur } \Gamma_{\varphi_1}) \\ u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = 0 & (\text{sur } \Gamma_{\varphi_2}) \end{cases} \tag{4.2}$$

en retournant aux coordonnées cartesiennes,on a :

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u(x,0) = 0 & (\text{sur } \Gamma_{\varphi_1}) \\ u(x, x\tan\varphi) = 0 & (\text{sur } \Gamma_{\varphi_2}) \end{cases} \tag{4.3}$$

On resourd le dernier système par séparation des variables.

On pose :

$$u(x,y) = X(x)Y(y) \Longrightarrow \Delta u = YX'' + XY''$$

donc

$$\Delta u + \lambda u = 0 \Longleftrightarrow YX'' + XY'' + \lambda XY = 0$$
$$\Longleftrightarrow \frac{-Y'' - \lambda Y}{Y} = \frac{X''}{X} = C$$

si on resourd l'équation diffèrentielle ordinaire :

$$X'' - CX = 0$$

On trouve les valeurs propres associé :

$$\lambda_n = \pm \frac{n^2\pi^2}{x^2\tan^2\varphi}$$

Premier cas : $C = \mu^2 = \dfrac{n^2\pi^2}{x^2\tan^2\varphi} > 0$

1. **Si** $\lambda + \mu^2 > 0$:

   Alors on a le systeme :

$$\begin{cases} Y'' + (\lambda + \dfrac{n^2\pi^2}{x^2 \tan^2 \varphi})Y = 0 \\ X'' - \dfrac{n^2\pi^2}{x^2 \tan^2 \varphi} X = 0 \end{cases} \tag{4.4}$$

   Alors l'équation :

$$X'' - \frac{n^2\pi^2}{x^2 \tan^2 \varphi} X = 0$$

   est une équation d' Euler ,leurs solutions sont de la forme :$X(x) = x^k$

   Alors il vient :

$$k(k-1)x^{k-2} - \frac{n^2\pi^2}{x^2 \tan^2 \varphi} x^k = 0$$

   En multipliant par x^2 ,il vient :

$$k(k-1)x^k - \frac{n^2\pi^2}{\tan^2 \varphi} x^k = 0$$

$$\Longleftrightarrow k^2 - k - \frac{n^2\pi^2}{\tan^2 \varphi} = 0$$

   Alors $k_1 = \dfrac{\tan \varphi + \sqrt{\tan^2 \varphi + 4\pi^2 n^2}}{2 \tan \varphi}$, $k_2 = \dfrac{\tan \varphi - \sqrt{\tan^2 \varphi + 4\pi^2 n^2}}{2 \tan \varphi}$

   la solution générale sera :

$$X(x) = ax^{k_1} + bx^{k_2}$$

   Donc :

$$X(x) = ax^{\dfrac{\tan \varphi + \sqrt{\tan^2 \varphi + 4\pi^2 n^2}}{2 \tan \varphi}} + bx^{\dfrac{\tan \varphi - \sqrt{\tan^2 \varphi + 4\pi^2 n^2}}{2 \tan \varphi}}$$

   donc la solution générale du système (4.4) est donnée par :

$$\begin{cases} X(x) = ax^{k_1} + bx^{k_2} \\ Y(y) = C_1 \cos x\sqrt{\lambda + \dfrac{n^2\pi^2}{x^2 \tan^2 \varphi}} C_2 \sin x\sqrt{\lambda + \dfrac{n^2\pi^2}{x^2 \tan^2 \varphi}} \end{cases}$$

   En passant aux conditions aux limites :

$$u(x, 0) = 0 \Longrightarrow C_1 = 0$$

$$u(x, x\tan\varphi) = 0 \Longrightarrow C_2 \sin x \tan\varphi \sqrt{\lambda + \frac{n^2\pi^2}{x^2\tan^2\varphi}} = 0$$

si

$$C_2 = 0, \quad alors \quad u \equiv 0$$

Et si

$$C_2 \neq 0$$

alors :

$$\sin x \sqrt{\lambda + \frac{n^2\pi^2}{x^2\tan^2\varphi}} = 0$$

$$\Longrightarrow x\tan\varphi \sqrt{\lambda + \frac{n^2\pi^2}{x^2\tan^2\varphi}} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Longrightarrow x^2\tan^2\varphi(\lambda + \frac{n^2\pi^2}{x^2\tan^2\varphi} = k^2\pi^2$$

$$\Longrightarrow \lambda x^2\tan^2\varphi = (k^2 - n^2)\pi^2$$

$$\Longrightarrow \tan^2\varphi = \frac{(k^2 - n^2)\pi^2}{\lambda x^2}$$

En remarquant que :

$$\tan^2\varphi = \frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}$$

Et :

$$\cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1$$

Alors

$$\tan^2\varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{1 + \cos 2\varphi}$$

$$\Longrightarrow \tan^2\varphi = \frac{2}{1 + \cos 2\varphi} - 1$$

Donc :

$$\tan^2\varphi = \frac{2}{1 + \cos 2\varphi} - 1 = \frac{(k^2 - n^2)\pi^2}{\lambda x^2}$$

$$\Longrightarrow \frac{2}{1 + \cos 2\varphi} = \frac{(k^2 - n^2)\pi^2 + \lambda x^2}{\lambda x^2}$$

$$1 + \cos 2\varphi = \frac{2\lambda x^2}{(k^2 - n^2) + \lambda x^2}$$

$$\Longrightarrow \cos 2\varphi = \frac{2\lambda x^2 - (k^2 - n^2)\pi^2 - \lambda x^2}{(k^2 - n^2) + \lambda x^2}$$
$$\Longrightarrow \cos 2\varphi = \frac{\lambda x^2 - (k^2 - n^2)\pi^2}{(k^2 - n^2) + \lambda x^2}$$
$$\Longrightarrow \varphi = \frac{1}{2}\arccos\frac{\lambda x^2 - (k^2 - n^2)\pi^2}{(k^2 - n^2) + \lambda x^2}$$

Donc la solution n'est pas unique si et seulement si :

$$\varphi = \frac{1}{2}\arccos\frac{\lambda x^2 - (k^2 - n^2)\pi^2}{(k^2 - n^2) + \lambda x^2}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}$$

2. **Si** $\lambda + \dfrac{n^2\pi^2}{x^2\tan^2\varphi} = 0$:

$$Y(y) = ay + b$$

$u(x, 0) = 0 \Longrightarrow b = 0$

$u(x, x\tan\varphi) = 0 \Longrightarrow x\tan\varphi = 0$

$$\Longrightarrow \varphi = k\pi$$

La solution est unique

3. **Si**$\lambda + \dfrac{n^2\pi^2}{x^2\tan^2\varphi} < 0$

$Y(y) = a\exp(y\sqrt{-\lambda - \dfrac{n^2\pi^2}{x^2\tan^2\varphi}}) + b\exp(-y\sqrt{\lambda + \dfrac{n^2\pi^2}{x^2\tan^2\varphi}}$

$u(x, 0) = 0 \Longrightarrow a = -b$

$u(x, x\tan\varphi) = 0 \Longrightarrow 2x\tan\varphi = 0$

$$\Longrightarrow \varphi = k\pi$$

La solution est unique.

Deuxiéme cas :Si $C = -\dfrac{n^2\pi^2}{x^2\tan^2\varphi} < 0$:

$$\begin{cases} Y'' + (\lambda - \dfrac{n^2\pi^2}{x^2\tan^2\varphi})Y = 0 \\ X'' + \dfrac{n^2\pi^2}{x^2\tan^2\varphi}X = 0 \end{cases} \tag{4.5}$$

1. si$\lambda - \dfrac{n^2\pi^2}{x^2\tan^2\varphi} > 0$

$$Y(y) = a\cos y\sqrt{\lambda - \frac{n^2\pi^2}{x^2\tan^2\varphi}} + b\sin y\sqrt{\lambda - \frac{n^2\pi^2}{x^2\tan^2\varphi}}$$

En passant aux conditions au limites on trouve :

$u(x,0) = 0 \Longrightarrow a = 0$

$u(x, x\tan\varphi) = 0 \Longrightarrow b\sin x\tan\varphi\sqrt{\lambda - \dfrac{n^2\pi^2}{x^2\tan^2\varphi}} = 0$

Si $b = 0$,alors $u \equiv 0$

Si $b \neq 0$, et alors $x\tan\varphi\sqrt{\lambda - \dfrac{n^2\pi^2}{x^2\tan^2\varphi}} = k\pi$

$$x^2\tan^2\varphi(\lambda - \frac{n^2\pi^2}{x^2\tan^2\varphi} = k^2\pi^2$$
$$\tan^2\varphi = \frac{(k^2+n^2)\pi^2}{\lambda x^2}$$
$$\tan^2\varphi = \frac{2}{1+\cos 2\varphi} - 1 = \frac{(k^2+n^2)\pi^2}{\lambda x^2}$$
$$1+\cos 2\varphi = \frac{2\lambda x^2}{(k^2+n^2)+\lambda x^2}$$
$$\varphi = \frac{1}{2}\arccos\frac{\lambda x^2 - (k^2+n^2)\pi^2}{(k^2-n^2)+\lambda x^2}$$

Alors la solution n'est pas unique si et seulement si

$$\varphi = \frac{1}{2}\arccos\frac{\lambda x^2 - (k^2-n^2)\pi^2}{(k^2+n^2)+\lambda x^2}$$

2. **Si**$\lambda - \dfrac{n^2\pi^2}{x^2\tan^2\varphi} = 0$:

Ce cas ,on a dejá étudié ,et a trouvé :

$$Y(y) = ay + b$$

$u(x,0) = 0 \Longrightarrow b = 0$

$u(x, x\tan\varphi) = 0 \Longrightarrow x\tan\varphi = 0$

$$\Longrightarrow \varphi = k\pi$$

Donc la solution est unique

3. si $\lambda - \dfrac{n^2\pi^2}{x^2\tan^2\varphi} < 0$

   alors $Y(y) = a\exp(y\sqrt{-\lambda + \dfrac{n^2\pi^2}{x^2\tan^2\varphi}}) + b\exp(-y\sqrt{-\lambda + \dfrac{n^2\pi^2}{x^2\tan^2\varphi}})$

   les conditions aux limites nous donnent

$$2x\tan\varphi(-\lambda + \frac{n^2\pi^2}{x^2\tan^2\varphi}) = 0$$

$$\Longrightarrow x^2\tan^2\varphi(-\lambda + \frac{n^2\pi^2}{x^2\tan^2\varphi}) = 0$$

$$\lambda x^2\tan^2\varphi = n^2\pi^2$$

$$\Longrightarrow \varphi = \arctan\frac{n\pi}{x\sqrt{\lambda}}$$

La solution n'est pas unique si et seulement si :

$$\varphi = \arctan\frac{n\pi}{x\sqrt{\lambda}}$$

4.2 problème du Neumann

4.2.1 Problème non perturbé

l'étude du noyau du problème (2.3) nous donne :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & (\text{sur } \Gamma) \end{cases} \tag{4.6}$$

Qui est équivalent au problème :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0 & (\text{sur } \Gamma_1) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x, x\tan\varphi) = 0 & (\text{sur } \Gamma_2) \end{cases} \tag{4.7}$$

$$\Delta u = 0 \Longrightarrow \langle \Delta u, u \rangle = 0$$

$$\Longrightarrow \int_{\Gamma_\varphi} u\nabla u dxdy - \int_{\Omega_\varphi} (\nabla u)^2 dxdy = 0$$

Et comme $\nabla u = 0$ sur Γ_φ on deduit que $\displaystyle\int_{\Omega_\varphi} \nabla u = 0$

donc $\nabla u = 0 \Longrightarrow u = constante.$

C'est à dire qu'il existe au moins une fonction constante differente de zero appartenant au noyau,

donc la solution n'est pas unique .

4.2.2 Problème perturbé

On étudie le noyau du problème (2.3) , les élèments du noyau sont les solutions du problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{du}{d\eta} = 0 & (\text{sur } \Gamma_{\varphi_1}) \end{cases} \tag{4.8}$$

Les èlèments de noyau du problème les quels sont les solutions du problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{du}{d\eta}(r,0) = 0 & (\text{sur } \Gamma_{\varphi_1}) \\ \dfrac{du}{d\eta}(r\cos\theta, r\sin\theta) = 0 & (\text{sur } \Gamma_{\varphi_2}) \end{cases} \tag{4.9}$$

En utilisant les coordonnées cartesiennes) :

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{du}{dy}(x,0) = 0 & (\text{sur } \Gamma_{\varphi_1}) \\ \dfrac{du}{dy}(x, x\tan\varphi) = 0 & (\text{sur } \Gamma_{\varphi_2}) \end{cases} \tag{4.10}$$

On utilise la même méthode que celle utiliseé pour le problème de Dirichlet,on trouve :

$$\frac{-Y'' + \lambda Y}{X} = \frac{X''}{X} = C$$

Premier cas : si $C = \dfrac{n^2\pi^2}{x^2\tan^2\varphi} > 0$

$$\begin{cases} Y'' + (\lambda + \dfrac{n^2\pi^2}{x^2\tan^2\varphi})Y = 0 \\ X'' - \dfrac{n^2\pi^2}{x^2\tan^2\varphi}X = 0 \end{cases} \tag{4.11}$$

1. si $\lambda+\dfrac{n^2\pi^2}{x^2\tan^2\varphi}>0$:
   alors la solution du système(4.11), s'écrit :

$$\begin{cases} X(x)=ax^{\dfrac{\tan\varphi+\sqrt{\tan\varphi+4\pi^2n^2}}{2\tan\varphi}}+bx^{\dfrac{\tan\varphi-\sqrt{\tan\varphi+4\pi^2n^2}}{2\tan\varphi}} \\ Y(y)=C_1\cos x\sqrt{\lambda+\dfrac{n^2\pi^2}{x^2\tan^2\varphi}}+C_2\sin x\sqrt{\lambda+\dfrac{n^2\pi^2}{x^2\tan^2\varphi}} \end{cases}$$

   En utilisantt les condition aux limites on trouve :
   $\dfrac{du}{dy}(x,0)=0\Longrightarrow C_2=0$
   $\dfrac{du}{dy}(x,x\tan\varphi)=0\Longrightarrow C_1x\tan\varphi\sqrt{\lambda+\dfrac{n^2\pi^2}{x^2\tan^2\varphi}}=k\pi$
   Si $C_1\neq 0$, alors $x^2\tan^2\varphi(\lambda+\dfrac{n^2\pi^2}{x^2\tan^2\varphi})=k^2\pi^2$

$$\Longrightarrow \tan^2\varphi=\frac{(n^2-k^2)\pi^2}{\lambda x^2}$$

   comme dans le cas du problème de Dirichlet ,on trouve :

$$\varphi=\frac{1}{2}\arccos\frac{\lambda x^2-(k^2-n^2)\pi^2}{(k^2-n^2)+\lambda x^2},k\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}$$

2. Si $\lambda+\dfrac{n^2\pi^2}{x^2\tan^2\varphi}=0$:
   Alors ,on a :

$$Y(y)=ay+b$$

   Pour $\dfrac{du}{dy}(x,0)=0$,on trouve : $a=0$
   Donc $Y(y)=b$
   Et pour $\dfrac{du}{dy}(x,x\tan\varphi)=0$,il vient : Si $b\neq 0$ alors la solution n'est pas unique

3. Si $\lambda+\dfrac{n^2\pi^2}{x^2\tan^2\varphi}<0$

$$\begin{cases} X(x)=a\exp(\dfrac{n\pi}{x\tan\varphi}y)+b\exp(-\dfrac{n\pi}{x\tan\varphi}y) \\ Y(y)=C_1\exp(y\sqrt{-\lambda-\dfrac{n^2\pi^2}{x^2\tan^2\varphi}})+C_2\exp(-y\sqrt{\lambda+\dfrac{n^2\pi^2}{x^2\tan^2\varphi}}) \end{cases}$$

En utilisant les conditions aux limites,il vient :
$\frac{du}{dy}(x,0) = 0 \Longrightarrow C_2 = C_1$
$\frac{du}{dy}(x, x\tan\varphi) = 0 \Longrightarrow 2x\tan\varphi\sqrt{\lambda + \frac{n^2\pi^2}{x^2\tan^2\varphi}} = 0$

$$\Longrightarrow \tan\varphi = 0$$

$$\Longrightarrow \varphi = k\pi$$

Dexième cas : si $C = -\mu^2 = -\frac{n^2\pi^2}{x^2\tan^2\varphi} < 0$

$$\begin{cases} X'' + \mu^2 X = 0 \\ Y'' + (\lambda - \mu^2)Y = 0 \end{cases} \tag{4.12}$$

1. si $\lambda + \mu^2 > 0$:

   alors on a :

$$Y(y) = C_1\cos\mu y + C_2\sin\mu y$$

   Pour $\frac{du}{dy}(x,0) = 0$, il vient $C_2 = 0$
   Et pour $\frac{du}{dy}(x, x\tan\varphi) = 0$, on touve :

$$-C_1\sin\mu x\tan\varphi = 0$$

   Si $C_1 \neq 0$ alors $\mu x\tan\varphi = k\pi$,ce équivaut à :

$$\mu^2x^2\tan^2\varphi = k^2\pi^2$$

$$\Longrightarrow \tan^2\varphi = \frac{(n^2+k^2)\pi^2}{\lambda x^2}$$

$$\Longrightarrow \varphi = \frac{1}{2}\arccos\frac{\lambda x^2 - (k^2-n^2)\pi^2}{(k^2+n^2)+\lambda x^2}, k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$$

   Alors la solution n'est pas unique si et seulement si :

$$\varphi = \frac{1}{2}\arccos\frac{\lambda x^2 - (k^2-n^2)\pi^2}{(k^2+n^2)+\lambda x^2}, k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$$

2. si$\lambda + \mu^2 = 0$, alors $y(y) = ay + b$

   Et le résultat comme dans le premier cas.

3. si $\lambda + \mu^2 < 0$

   alors $Y(y) = C_1 \exp(\mu y) + C_2 \exp(-\mu y)$
   $\frac{du}{dy}(x,0) = 0 \Longrightarrow C_1 = -C_2$
   $\frac{du}{dy}(x, x\tan\varphi) = 0 \Longrightarrow C_1\mu(\exp(\mu y) - \exp(-\mu y)) = 0$
   Si $C_1 \neq 0$, alors $\frac{du}{dy}(x, x\tan\varphi) = 0 \Longrightarrow 2x\tan\varphi\sqrt{\lambda + \frac{n^2\pi^2}{x^2\tan^2\varphi}} = 0$

   $$\Longrightarrow \tan\varphi = 0$$

   alors $\varphi = k\pi$

   donc la solution est unique .

4.3 Extension l'étude dans le polygone tout entier

On propose maintenant d'étendre l'étude du probléme (2.1) , avec les conditions de Dirichlet et de Neumann dans un secteur plan au polygone Ω tout entier ,pour cela nous utiliserons une partition de l'unité de celui -ci :
$\cup_{j=1}^{N}\Omega_{\varphi_j}$
Soit (w_j) $j = 1, 2, ...N$ (où N le nombre du sommets de la polygône),une partition de l'unité de classe C^∞ qui est isolée chaque sommetS_j .
c'est à dire la fonction trancature definit par :

$$w_j = \begin{cases} 1 & \Omega_{\varphi_j} \cap V_{S_j} \cap \Omega \\ 0 & \Omega_{\varphi_j}/V_{S_j} \end{cases}$$

où $V_{s_j} = \overline{B}(o, \varepsilon_j)$ (voisinage de s_j
Soit T fonction trancature definit par :

$$T = \begin{cases} 0 & \Omega_{\varphi_j} \cap V_{S_j} \cap \Omega \\ 1 & \Omega \cap V_{S_j} \end{cases}$$

Donc on a :

$$T + \sum_{j=1}^{N} w_j = 1_\Omega$$

Alors

$$u = (T + \sum_{j=1}^{N} w_j)u = Tu + \sum_{j=1}^{N} w_j u$$

$$u = Tu + \sum_{j=1}^{N} u_j$$

où $u_j = w_j u$

Le problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \tag{4.13}$$

devient :

$$\begin{cases} \Delta(T + \sum\limits_{j=1}^{N} u_j) = f & \text{dans } \Omega \\ Tu + \sum_{j=1}^{N} u_j = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \tag{4.14}$$

aux voisinage des sommets S_j il s'écrit :

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{N} \Delta u_j = f & \text{dans } \bigcup\limits_{j=1}^{N} \Omega_{\varphi_j} \cap V_{s_j} \\ \sum\limits_{j=1}^{N} u_j = 0 & (\text{sur } \bigcup\limits_{j=1}^{N} \Gamma_{\varphi_j}) \end{cases} \tag{4.15}$$

En isolant chaque sommet S_j, alors le problème au voisinage du chaqu'un des sommets du polygone,s'écrit :

$$\begin{cases} \Delta u_j = f & \text{dans } \Omega_{\varphi_j} \\ u_j = 0 & (\text{sur } \Gamma_{\varphi_j}) \end{cases} \tag{4.16}$$

La fonction u_j est à support compact,on peut considérer le problème ci dessus définit dans un secteur plan Ω_{φ_j} de sommet S_j où φ_j la mesure de l'angle formé par Γ_j et Γ_{j+1}.

Nous savons déjà que si $\Delta u_j = f \in L^2$ alors $u_j \in H^2$ pour $\varphi_j < \pi$

Le problème dans un secteur plan Ω_φ on a dejá étudié. Pour la fonction $\Phi = Tu$,elle définie dans un domaine régulier donc l'inégalité à priori (3.1) :

$$\|\Phi\| \leq K(\|\Delta\Phi\|_{L^2} + \|\Phi\|_{H1})$$

est vérifiée.

Conclusion

Nous avons étudié le problème de Laplace (plus générale de Poisson) dans un polygone plan, et cette étude est fait par la décomposition du domaine.

On a décomposé le polygone, $\Omega = \cup_{j=1}^{N} \Omega_{\varphi_j} \cup O$

où Ω_{φ_j} ,$j = 1, 2...N$ sont des secteurs plans des sommets s_j , et O est un ouvert régulier.

On localise l'ètude de notre problème ,en faisant l'étude dans un secteur plan Ω_φ.

par des élements du groupe de déplacement (tanslations et rotations), on ramène le sommet s_j de chaque secteur plan à l'origine O du répère (O, x, y)

On avait résolu un modèle dans un secteur plan,et on a trouvé que la solution au voisinage du sommet est donnée suivant les conditions qui sont poseés sur f :

1. Pour $f \in L^2(\Omega_\varphi)$

   si $\varphi \leq \pi$ alors la solution est regulière .

   c'est à dire $u \in H^2(\Omega_\varphi)$

   si $\varphi > \pi$ alors la solution n'appartient pas à $H^2(\Omega_\varphi)$,et elle s'écrit sous la forme :

   $$u(r, \theta) = a_k r^{\frac{k\pi}{\varphi}} \sin \frac{k\pi\theta}{\varphi} + w$$

   où $w \in H^2(\Omega_\varphi)$,dans ce cas on peut dire que la solution u se décompose en deux parties

   Une partie singuliere :

   $$u_{sing} = \sin \frac{k\pi\theta}{\varphi} \notin H^2(\Omega_\varphi)$$

   Et une partie régulière :

   $$u_{reg} = w \in H^2(\Omega_\varphi)$$

   remarquant que dans ce cas $u \in H^{\frac{\pi}{\varphi}+1-\varepsilon}(\Omega_\varphi)$, où ε un nombre arbitraire quelconque.

   $$u = u_{sing} + u_{reg}$$

2. Pour $f \in H^m(\Omega_\varphi \cap B(o, R)), m \in \mathbf{N}$

   si $\frac{\pi}{\varphi} \leq m + 1$ alors $u \in H^{m+2}(\Omega_\varphi)$

   si $\frac{\pi}{\varphi} > m + 1$ alors $u \in H^{\frac{\pi}{\varphi}+1+m-\varepsilon}(\Omega_\varphi)$

Et pour généraliser l'ètude dans le polygone tout entier,on a revenu à la partition de l'unitè correspondante.

Bibliographie

[1] R. Adams, Sobolev Spaces, New York : Academic Press (1975).

[2] H. Bresis "Analyse fonctionnelle, théorie et application", Masson (1983).

[3] R. Courant, D. Hilbert : Methods of mathematical physics. Vol. 1. Interscience. New York (1953).

[4] M. Dauge, Elliptic boundary value problems on corner domains, Lecture notes in Mathematics,Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1988)

[5] P.Grisvard , Alternative de Fredholm relative au problème de Dirichlet dans un polygône ou un polyèdre , Boll .Un .Mat .Italie (4) .5 1972 p. 132-164.

[6] P.Grisvard , Alternative de Fredholm relative au problème de Dirichlet dans un polyè- dre, Annali S.N.S .Pisa ,séries 4,2 (3) ,359-388 ,1975.

[7] P.Grisvard , Singularités des solutions du problèmes des stokes dans un polygone, Séminaire d.analyse fonctionnelle , IREM, Nice ,1979.

[8] P.Grisvard , Elliptic problems in non smooth domains, Monographs and studies in Mathematics,24,Pitman ,London ,1985

[9] M.S. Hanna and K.T Smith, Some remarks on the Dirichlet problem in piecewise smooth domains, Comm.Pure and Apllied Math, 20 ,(1967) p.575-593

[10] V.A. Kondratiev, Boundary value problems for elliptic equations in conical regions, // Soviet Math. Dokl., 4 (1963).

[11] V.A. Kondratiev, Boundary problems for elliptic equations in domains with conical or angular points, Trans. Moscow Math. Soc. 16 (1967),209-292.

[12] V.A. Kondratievand and M.Borsuk Elliptic Boundary Value Problems of Second Order in Piecewise Smooth Domains.North Holland math (2006)

[13] V.A. Kozlov, V.G. Maz'ya and J. Rossmann, Elliptic Boundary Value Problems in Domains with Point Singularities, AMS. Mathematical surveys and monographs, 52 (1997).

[14] M.Merigot ,Solutions en normes L^p ; des problèmes aux limites dans des polygônes- plan, Thèse de Doctorat d.état , IREM,Université de Nice 1974.

[15] M.Merigot ,Régularité de la solution du problème de stockes dans un polygône plan, Boll .Un .Mat .Italie (4).6, 1972.

[16] M.Merigot ,Régularité des solutions des derrivèes da solution du problème de Dirichlet dans un secteur plan, Boll .Un .Mat .Italie (4).6, 1972.

[17] M. Moussaoui ,Régularité de la solution d'un problème à dérivée oblique pour l'opérateur de Laplace dans un polygone plan.Journées (équations aux dérivées partielles (1976) $p1 - 11$)

[18] J.L Lions,et Magenes, Problèmes aux limites non homogènes et Applications,Tome1, Dunod , Paris 1968.

[19] H. Reinhard , Equations aux dérivées partielles , Dunod , Paris , 1991.

[20] L. Tartar,An Introduction to Sobolev Spaces and Interpolation Spaces . Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2007)

[21] E.C. Titchmarsh , Introduction to the Theory of Fourier Integrals . Oxford univ. Press, 1937.

[22] K. Yosida , Functional Analysis .Springer-Verlag, Berlin, 1966.

[23] C. Zuly , Éléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles .Dunod ,Paris (2002).