UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

FACULTE DES SCIENCES ET SCIENCES DE L'INGENIEUR

****

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

N° d'ordre :
N° de série :

MAGISTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse Numérique et E.D.P

Par: Ben Moussa Med Tayeb

Thème

EXISTENCE GLOBALE ET COMPORTEMENT A L'INFINI DES SOLUTIONS D'UN SYSTEME DE REACTION-DIFFUSION

Soutenu publiquement le : 27/06/2006

Devant le jury composé de :

Mr. Djamel Ahmed CHACHA	M.C (Univ. Kasdi Merbah .Ouargla)	Président
Mr. Mohamed Lamine MELKMI	M.C (Univ.Hadj Lakhder.Batna)	Examinateur
Mr. Said Mohamed SAID	M.C (Univ. Kasdi Merbah .Ouargla)	Examinateur
Mr. Amar YOUKANA	M.C (Univ.Hadj Lakhder.Batna)	Rapporteur

Remerciements

Ce travail a été réalisé à l'université de OUARGLA, sous la direction de Monsieur Amar Youkana, qui a rendu possible la réalisation de ce mémoire par le soutien constant qu'il m'a apporté.

Je lui en suis d'autant plus reconnaissant qu'il m'a laissé une très grande liberté de travail aussi bien dans la conception que dans l'orientation de ma réflexion tout en me conseillant en veillant ce que je ne me disperse pas trop.

Sa rigueur et son honnêteté me serviront toujours d'exemple et j'ai énormément apprécié sa disponibilité.

J'adresse mon vif remerciement aux examinateurs, Monsieur Melkemi Med Lamine, Monsieur M.S Said pour avoir accepter d'examiner ce travail.

Leur participation au jury, est une marque à la quelle je suis très fier. Je voudrais également remercie Monsieur Chacha Ahmed Djamal qui me fait l'honneur d'être président du jury.

Je tiens à remercier les membres du département de mathématiques et informatique Messieurs : M Assila, M .Meflah, M.Reguiat, K.Guerbeti, E.Yenbouaii,

Je voudrais remercier tous mes amis, en particulier A.Bensayeh ,Merabat,BenAli,Doudi,Tidjani avec qui nous refaisons l'univers mathématiques et à A. Aichaoui ,S.Benouar,M Ghougali,I Chiradid,L.Mahmoudi,Med S.Zine ,AbdM. BenAli,Ahmed Sami.K

Un grande merci à ma femme Karima .pour sa grande disponibilité, sa gentillesse et sa bonne humeur en toute circonstance.

Je ne pourrais pas terminer sans rendre hommage à mes parents à mes frères et à tous mes proches.

Je ne saurai leur témoignes suffisamment toute ma gratitude pour m'avoir toujours soutenu.

Table des matières

Introduction . . . 3

1 Equations d'évolution **6**

1.1 Introduction . . . 6

1.2 Premier cas : X est un espace de Hilbert ($X = H$) . . . 7

1.3 Deuxième cas : X est un espace de Banach . . . 11

1.4 Les semi groupes . . . 15

1.4.1 Les semi groupes fortement continus . . . 15

1.4.2 Etude d'un semi groupe $T(t)$ . . . 16

1.5 Générateurs infinitésimaux . . . 18

2 Equations d'évolution non homogènes **22**

2.1 Introduction . . . 22

2.2 Estimations à priori . . . 25

2.3 L'influence de u_0 sur la solution de l'équation semi linéaire . . . 26

3 Existence globale ou explosion en temps fini des solutions **29**

4 Existence globale des solutions d'un système de réaction-diffusion à matrice de diffusion pleine. 33

4.1 Introduction : 33

4.1.1 Résultats préliminaires : 35

4.1.2 Existence globale des solutions : 39

4.2 Comportement à l'infini : 43

Introduction

De la modélisation mathématique de plusieurs phénomènes dans la nature ou dans d'autres domaines dans la pratique proviennent certains systèmes d'équations, appelées équations de réaction-diffusion.

Ces équations traduisent l'interaction entre plusieurs composantes ou masses d'une même espèce ou d'une même population.

Ces systémes d'équations sont de la forme :

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + Au &= f(u), \quad t > 0. \\ u(o, x) &= u_0(x) \end{aligned}$$

où $A = \begin{pmatrix} -d_1\Delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d_2\Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -d_m\Delta \end{pmatrix}$,

avec $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ le Laplacien sur l'espace de Banach X,

d_i des constantes positives appelées coefficients de diffusion,

$f : X \to X$ une application appelée terme réactif et u_0 la donnée initiale.

A ce titre on peut citer comme exemple un phénomène épidémiologique notée par FIV(Felire Immunde Ficienayvirus) modélisant la propagation d'une épidémie dans une population de chats. Celle ci est supposée être divisée en plusieurs classes, $u, w, v, z,$ représentant successivement la classe des males susceptibles, des males infectés, des femelles susceptibles et des femelles infectées.

Le modèle est le suivant :

$$
\begin{aligned}
u_t - d_1 \Delta u &= -\lambda_1 \varphi_1 (u) \, w^{\gamma} - \lambda_2 \varphi_2 (u) \, z^{\eta} \\
w_t - d_2 \Delta w &= \lambda_1 \varphi_1 (u) \, w^{\gamma} - \lambda_2 \varphi_2 (u) \, z^{\eta} - aw, \quad x \in \Omega, \quad t > 0 \\
v_t - d_3 \Delta v &= \lambda_3 \varphi_3 (v) \, w^{\sigma} - \lambda_4 \varphi_4 (v) \, z^{\rho} \\
z_t - d_4 \Delta z &= \lambda_3 \varphi_3 (v) \, w^{\sigma} - \lambda_4 \varphi_4 (v) \, z^{\rho} - az \\
\frac{\partial u}{\partial \eta} &= \frac{\partial w}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial \eta} = 0 \qquad x \in \Omega, \quad t > 0
\end{aligned}
$$

$$
(u, w, v, z) \, (x, 0) = (u_0, w_0, v_0, z_0) \qquad x \in \Omega
$$

où Ω est un ouvert borné de IR^n, d_i, λ_i, $i = 1, 2, 3, 4$, a et $\lambda, \gamma, \rho, \sigma$ des coefficients tels que $d_i > 0$, $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, $a > 0$ et $\lambda, \gamma, \rho, \sigma \geq 1$.

Les fonctions φ_i, $i = 1, 2, 3, 4$ sont continues et positives sur Ω.

u_0, w_0, v_0, z_0 sont les données initiales du système supposées comme fonctions continues positives et uniformément bornées sur Ω.

Le facteur principal favorisant la diffusion de cette épidémie est le contact sexuel.

L'étude de ce système par W. E.Fitzgibbon, M. E.Parrott et G. F.Webb a permis de montrer que ce phénomène n'est pas endémique tant qu'il n'ya pas de source de succeptibles.

L'objectif primordial est d'étudier la propagation de l'épidémie

Ainsi nous avons à résoudre d'abord les questions relatives à l'existence et l'unicité des solutions puis à étudier leur comportement à l'infini quand ces solutions sont partout définies.

Dans le cadre de cette problématique, notre travail consiste à l'étude de l'existence globale et du comportement asymptotique des solutions d'un système de réaction diffusion à matrice de diffusion pleine.

Comme les équations de réaction-diffusion font partie du domaine des équations d'évolution, nous avons donné à travers le chapitre1 des rappels et des notions générales sur ces équations d'évolution.

Au chapitre 2, nous avons abordé la théorie des équations d'évolution non homogènes et au chapitre 3 nous avons essayé d'expliciter à partir d'exemples assez simples la problématique qui subsiste dans les équations paraboliques au niveau de l'alternative entre l'existence globale ou l'explosion en temps fini des solutions.

Le chapitre 4 qui constitue l'objet principal de notre mémoire a été exclusif à l'étude d'un système de réaction diffusion à matrice de diffusion pleine et à non linéarités faiblement exponentielles. Ce système entre dans le cadre des travaux réalisés par Alikakos[1], Masuda([11]), Haraux et Youkana, ([5]) Hoshino. ([7]).etc.

Nous avons mis en évidence une extension de résultats d'existence globale de solutions pour cette classe de systèmes en utilisant des techniques de régions invariantes et des techniques de la fonctionnelle de Lyapounov établie par Haraux et Youkana.

Chapitre 1

Equations d'évolution

1.1 Introduction

Nous allons exposer dans ce chapitre la théorie des équations d'évolution, une théorie qui a permis de donner des réponses aux questions d'existence et d'unicité de solutions pour une large classe d'équations.

Les équations d'évolution sont des équations qui s'écrivent sous la forme :

$$\frac{du}{dt} + Au = f, \quad t > 0. \qquad ((1.1))$$

$$u(0,x) = u_0 \qquad ((1.2))$$

où $u = u\,(t,x)\,,\ A:\ X \to X$ est un opérateur d'un espace de Banach X dans X, u_0 la donnée initiale et f une application dans X.

Comparativement avec les équations différentielles ordinaires, il est tout à fait raisonnable d'envisager l'existence et l'unicité de la solution du problème $(1.1) - (1.2)$ à partir des propriétés de l'opérateur A.

Ainsi on note par $D(A)$ le domaine de l'opérateur A , $R(I+A)$ l'ensemble image de $I+A$ et $G(A)$ le graphe de A.

Comme cas particulier et cas très pratique, nous allons considérer en premier lieu l'espace X comme un espace de Hilbert.

1.2 Premier cas : X est un espace de Hilbert $(X = H)$

Définition 1-1 : *Soit A un opérateur linéaire de X dans X.*

On dit que A est accrétif si $\operatorname{Re} < Au, u > \geq 0$ *pour tout* $u \in D(A)$.

De plus si $\forall f \in X, \exists\, u \in D(A)$ *telque* $u + \lambda Au = f$ *i.e.* $R(I + \lambda A) = H \quad \forall \lambda > 0$

alors on dit que A est maximal accrétif .

Proposition 1-1 : *Si A est maximal accrétif alors A est fermé et de domaine dense.*

Preuve. Soit z dans l'orthogonal de D(A), et on choisit $u = (I + A)^{-1} z \in$D(A), on

a $< z, u >= 0 =< u - Au, u >$,

par conséquent $\|u\|^2 =< Au, u >\leq 0$ par suite $u = z = 0$ et donc D(A)est dense dans X.

Montrons que A est fermé ; on a: $J_1 = (I + A)^{-1} \in L(X), G(J_1)$ est fermé. Il en résulte que $G(A + I)$ est fermé ce qui montre que $G(A)$ est aussi. ■

Proposition 2-1 :*Si A est accrétif alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

(1) *A est un opérateur accrétif.*

(2) $\|(A + \lambda I)u\| \geq \operatorname{Re} \lambda \|u\|$ *pour tout* $u \in D(A)$ *et tout* λ

vérifiant $\operatorname{Re} \lambda$ *>0.*

(3) $\|(A + \lambda I)u\| \geq \lambda \|u\|$ *pour tout* $u \in D(A)$,$\forall \lambda > 0$.

Preuve. (1) $\Rightarrow$ (2) :Soit $u \in D(A)$ et $\operatorname{Re} \lambda > 0$; alors :

$$\operatorname{Re} \langle A + \lambda I)u, u\rangle = \operatorname{Re} \langle Au, u\rangle + \operatorname{Re} \lambda \|u\|^2 + \operatorname{Re} \lambda \|u\|^2$$

Ce qui imlique :

$$\|(A+\lambda I)u\| \, \|u\| \quad \geq \quad Re \, \langle (A+\lambda I)u, u \rangle \geq \operatorname{Re} \lambda \, \|u\|$$

$(2) \Rightarrow (3)$:c'est évident.

$(3) \Rightarrow (1)$:

$\forall u \in D(A)$ et $\lambda > 0$ on a :

$$\|Au\|^2 + 2\lambda \operatorname{Re} \langle Au, u \rangle = \|(A+\lambda I)u\|^2 + \lambda^2 \|u\|^2 \geq 0$$

$$\|Au\|^2 + 2\lambda \operatorname{Re} \langle Au, u \rangle = \|(A+\lambda I)u\|^2 + \lambda^2 \|u\|^2 \geq 0$$

Ce qui implique :

$$2\lambda \operatorname{Re}(Au, u) \geq - \|Au\|^2$$

λ est une valeur arbitraire alors : Re $\langle Au, u \rangle \geq 0$. ■

Proposition ***3-1*** *:Soit $A : H \to H$ un opérateur de H dans H accrétif. Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) A est un maximal accrétif.

(2)$R(A+\lambda I) = H \quad \forall \lambda$ tel que :$\operatorname{Re} \lambda > 0$.

(3) $R(A+\lambda I) = H$ pour λ fixé tel que : $\operatorname{Re} \lambda > 0$.

Preuve. $(1) \Rightarrow (2)$: par définition.

$(2) \Rightarrow (3)$: c'est évident

$(3) \Rightarrow (1)$:

Soit $\lambda > 0$ et considérons l'équation

$$u + \lambda A u = f.$$

On remarque que cette équation est équivalente à

$$u + \lambda_0 Au = \frac{\lambda_0}{\lambda} f + (1 - \frac{\lambda_0}{\lambda})u.$$

Comme A est accrétif et

$$R(I + \lambda_0 A) = H$$

alors on peut définir l'opérateur :

$$J_{\lambda_0} = (I + \lambda_0 A)^{-1}$$

qui est une contraction sur H. L'équation précédente est alors équivalente à :

$$u = J_{\lambda_0}\left[\frac{\lambda_0}{\lambda} f + (1 - \frac{\lambda_0}{\lambda})u\right].$$

Lorsque $2\lambda > \lambda_0$, cette dernière équation s'écrit $u = f(u)$, ou f est une application Lipchitzienne sur H de rapport

$$k = \left|1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right|.$$

En appliquant le théorème du point fixe, on peut donc résoudre l'équation :

$$u - \lambda Au = f$$

pour tout $\lambda \in \left]\frac{\lambda_0}{2}, +\infty\right[$. Avec ce procédé , on résoud encore cette équation pour

$$\lambda \in \left]\frac{\lambda_0}{2^n}, +\infty\right[\quad n \in N$$

et donc pour tout $\lambda > 0$. $\blacksquare$

Définition 5 ***2-1*** *:Soit A un opérateur non borné à domaine dense*

$$A : D(A) \subset H \rightarrow H.$$

On définit l'opérateur adjoint de A qu'on notera A^* par

$$A^* : D(A^*) \subset H \rightarrow H$$

tel que :

$$D(A^*) = \{v \in H ;\exists\ c \geq 0 \ \ telque \ \ |\langle v, Au\rangle| \leq c \|u\| \, \forall u \in D(A)\}$$

$$G(A^*) = \{(v, \varphi) \in H \times H, \forall (u,f) \in G(A), \langle \varphi, u\rangle = \langle v, f\rangle\}$$

et

$$\langle v, Au\rangle_{H,H} = \langle A^*v, u\rangle_{H,H}\,.$$

Théorème ***1-1*** *:Soit $A : H \rightarrow H$ un opérateur de domaine dense.*

Alors A est maximal accrétif si et seulement si A^* est accrétif et $G(A)$ est fermé.

Preuve. *Si A est maximal accrétif alors $G(A)$ est fermé d'après la proposition(1.1)*

Montrons que A^* est accrétif.

Soit $v \in D(A^*)$, on a :

$$\langle A^*v, J_\lambda v\rangle = \langle v, AJ_\lambda v\rangle = \langle v, A_\lambda v\rangle = \frac{1}{\lambda}\langle v, J_\lambda v - v\rangle = \frac{1}{\lambda}\left[\langle v, J_\lambda v\rangle - \|v\|^2\right] \geq 0$$

et

$$\langle A^*v, J_\lambda v\rangle \rightarrow \langle A^*v, v\rangle \ \ quand \quad \lambda \rightarrow 0$$

Donc $\langle A^*v, v\rangle \geq \ 0$ et A^* est accrétif

Réciproquement comme A^* est accrétif et $G(A)$ est fermé il est immédiat de voir que $R\,(I + A)$ est fermé dans H.

D'autre part , on a :

$$\overline{R\left(I+A\right)}^{\perp}=\{v\in D(A^{*}),v+A^{*}v=0\}=\{0\}$$

donc $R\left(I+A\right)=H$ *et* A *est maximal accrétif d'après la proposition (2.1)* ■

1.3 Deuxième cas : X est un espace de Banach

On note par Fu l'ensemble de tous les éléments $f\in X^{*}$ tel que :

$\forall u\in X$, f vérifiant :

$$\langle f,u\rangle=\|u\|^{2}=\|f\|^{2}$$

c'est à dire

$$Fu=\left\{f\in X^{*}:\langle f,u\rangle=\|u\|^{2}=\|f\|^{2}\right\}$$

D'après le théorème de Hahn Banach, l'ensemble Fu est non vide.

Définition 3-1 : *Un opérateur linéaire* A *de* $D(A)\subset X$ *dans* X *est dit accrétif si pour chaque* $x\in D(A)$ *il existe* $f\in Fx$ *tel que* $\mathrm{Re}<Ax,f>\geq 0$.

Lemme *1-1* :

Soient u,v $\in X$. *Alors* $\|u\|\leq\|u+\alpha v\|$ *pour tout* $\alpha>0$ *si et seulement si il existe* $f\in Fu$ *vérifiant :* $\mathrm{Re}\,\langle v,f\rangle\geq 0$.

Remarque *1-1* : *Le lemme (1-1) donne un critère d' accrétivité qui jouera un rôle ordinaire dans le cas où l'espace* X *est un espace de Banach.*

Théorème *2-1* : *Soit* A *un opérateur défini de* $D(A)\subset X$ *dans* X.

Alors A *est accrétif si et seulement si*

$$\|(\lambda I+A)\,u\|\geq\lambda\,\|u\|$$

pour tout $u\in D(A)$ *et tout* $\lambda>0$.

Preuve. Supposons que A est accrétif .

Soit $\lambda > 0$ et soit $x \in D(A)$

$$\begin{aligned} si\ x^* &\in Fx = \left\{x^* \in X, \langle x^*, x\rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\right\} \\ \operatorname{Re}\langle Ax\ ,x^*\rangle &\geq 0 \end{aligned}$$

alors

$$\|(\lambda I + A)\, x\|\, \|x\| \geq [\langle(\lambda x + Ax)\, , x^*\rangle] \geq \operatorname{Re}\langle \lambda x + Ax, x^*\rangle \geq \lambda \|x\|^2 .$$

Réciproquement, soit $x \in D(A)$ et supposons que :

$$\lambda \|x\| \leq \|(\lambda I + A)\, x\| \quad \forall \lambda > 0.$$

Si

$$y_\lambda^* \in F\,(\lambda x + Ax) \text{ et } z = \frac{y_\lambda^*}{\|y_\lambda^*\|}\ alors\, \|z_\lambda^*\| = 1$$

alors

$$\begin{aligned} \lambda \|x\| &\leq \|(\lambda I + A)\, x\| = \langle \lambda x + Ax, z_\lambda^*\rangle = \lambda \operatorname{Re}\langle x, z_\lambda^*\rangle \\ + \operatorname{Re}\langle Ax; z_\lambda^*\rangle &\leq \lambda \|x\| + \operatorname{Re}\langle Ax; z_\lambda^*\rangle \qquad \forall \lambda > 0 \end{aligned}$$

d'où :

$$\operatorname{Re}\langle Ax; z_\lambda^*\rangle \geq 0\ et\ \operatorname{Re}\langle x, z_\lambda^*\rangle \geq \|x\| - \frac{1}{\lambda}\|Ax\|$$

Comme la boule unité de X^* est compacte pour la topologie faible$*$ de X^*, alors la suite $(z_\lambda^*)_{\lambda > 0}$ admet un point d'accumulation faible z^* tel que $\|z^*\| = 1$, par conséquent

$$\operatorname{Re}\langle x, z_\lambda^*\rangle \ \geq 0\ et \operatorname{Re}\langle x, z_\lambda^*\rangle \geq \|x\| .$$

D'autre part on a

$$\operatorname{Re}\ \langle x, z^* \rangle \leq |\langle x, z^* \rangle| \leq \|x\|$$

alors

$$\operatorname{Re}\langle x, z^* \rangle = \|x\|\,.$$

Posons : $x^* = \|x\|\, z^*$, on a $x^* \in Fx$ et $\operatorname{Re}\langle Ax\ , x^* \rangle \geq 0$ ce qui implique :

$\forall\ x \in D(A)\ \exists x^* \in Fx$ tel que :$\langle Ax,\, x^* \rangle \geq 0$. ■

Définition 4-1 : *Soit A un opérateur linéaire de $D(A) \subset X$ dans X. On dit que A est m accrétif s 'il est accrétif et si $I + A$ est surjectif.*

On conclut les propriétés d'un opérateur m accrétif dans la proposition suivante :

Proposition 4-1 : *Soit A un opérateur de $D(A) \subset X$ dans X accrétif alors :*

(1) $(\lambda I + A)$ *est injectif pour tout* $\lambda > 0$ *et* $\left\|(\lambda + A)^{-1} z\right\| \leq \frac{1}{\lambda}\|z\|$ *pour tout* $z \in R(\lambda I + A)$ *et tout* $\lambda > 0$.

(2) $(\lambda I + A)$ *est surjectif pour tout* $\lambda > 0$ *et dans ce cas* $[0, \infty] \subset \rho(A)$ *; où* $\rho(A)$ *désigne la résolvante de* A.

(3) A *est fermé si et seulement si* $R(\lambda I + A)$ *est fermé pour un certain* $\lambda > 0$

(4) *Si* $R(A) \subset \overline{D(A)}$ *alors* A *est fermable et* $\bar{A}$ *est aussi accrétif et vérifie :* $R\left(\lambda I + \overline{A}\right) = \overline{R(\lambda I + A)}$.

Les propriétés de l'opérateur A jouent un rôle primordial pour l'existence et l'unicité des solutions de l'équation d'évolution homogène :

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + Au &= 0 \qquad \text{sur } [0, +\infty[\\ u(0) &= u_0 \end{aligned}$$

Ainsi nous avons le théorème fondamental suivant dû à Hille-Yosida

Théorème *3-1 (Hille - Yosida)*

Soit A un opérateur maximal accrétif dans un espace de Hilbert.

Alors pour tout $u_0 \in D(A)$ il existe une fonction

$$u \in C^1\left([0,+\infty[\,;H\right) \cap C\left([0,+\infty[\,;D(A)\right)$$

unique telle que :

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt}+Au &= 0 \qquad sur \;\; [0,+\infty[\\ u(0) &= u_0\end{aligned}$$

De plus on a :

$$|u(t)| \leq |u_0| \quad \forall t \geq 0$$

et

$$\left|\frac{du(t)}{dt}\right| \leq |Au(t)| \leq |Au_0| \qquad \forall t \geq 0.$$

Remarque *2-1 : L'intérêt principale du théorème (3-1) réside dans le fait que pour résoudre le problème d'évolution on se ramène à vérifier que A est maximal accrétif*

.

Preuve. D'aprés ([3]) elle est basée sur l'approximation $A_\lambda = \dfrac{(I-J_\lambda)}{\lambda}$ où $J_\lambda = (I+\lambda A)^{-1}$ et de

L'équation approchée

$$\begin{aligned}\frac{du_\lambda}{dt}+A_\lambda u_\lambda &= 0\\ u_\lambda(0,x) &= u_0(x).\end{aligned}$$

On montre que l'opérateur A_λ est lipschitzien et par suite le théorème d'existence et d'unicité de Cauchy Picard permet de montrer l'existence d'une solution u_λ de l'équation précédente.

Les propriétés de l'opérateur A en particulier l'accrétivité permettent de montrer que la suite $(u_\lambda)_{\lambda>0}$ est de Cauchy dans H et donc elle est convergente.

La régularité de la solution dépend essentiellement de la donnée initiale ([3]) ■

1.4 Les semi groupes

1.4.1 Les semi groupes fortement continus

Soit X un espace de Banach réel ou complexe.

Considérons une famille $(T(t))_{t\,\geq\,0}$ d'opérateurs linaires et continus.

Définition ***5-1*** **:**

Dans l'espace X, *la famille* $(T\,(t))_{t\,\geq\,0}$ *est appelée semi groupe si :*

$$T(0) = id$$

et

$$T(s+t) = T(s).T(t) \ \ \forall \ \ s, \ \ t \in \ IR^{+}.$$

L'application : $t \ \rightarrow \ \ T(t)$ est donc un homomorphisme du semi groupe additif $(IR^{+}, +)$

dans le groupe multiplicatif $(L(X), \bullet)$.

On dit que le semi groupe $(T(t))_{t\,\geq\,0}$ est fortement continu :

Si l'application : $t \rightarrow T\,(t)$ est continue pour la topologie forte d'opérateurs sur L(X) i.e.

$$\lim_{t\rightarrow t_0} \ \|T(t)f - T(t_0)f\| = 0 \ \text{ pour tout } \ f \in X$$

On note par c_0- semi groupes les semi groupes fortements continus.

D' une maniére analogue, on définit les semi groupes faiblement continus et uniformément continus en s'appuyant sur les topologies d'opérateurs([2]).

Proposition 5-1 :

Soit $(T(t))_{t\,\geq\,0}$ *un* C_0 *semi groupe.*

Alors il existe deux réels w *et* M*,* $w > 0$ *,* $M \geq 1$ *tels que :*

$$\|T(t)\| \leq M\ e^{-wt} \text{ pour tout } t \geq 0.$$

En particulier, nous avons les semi groupes importants suivants :

a) les semi groupes bornés i.e $\|T(t)\| \leq M \quad \forall t \geq 0$

b) les semi groupes de contraction i.e $\|T(t)\| \leq 1 \quad \forall t \geq 0.$

Remarque 3-1 :

Le semi groupe $(T(t))_{t\,\geq\,0}$ *sur* X *est fortement continu si et seulement si :*

$$\lim_{t\to 0} T(t)\,f = f \quad \text{pour tout } \ f \in X$$

1.4.2 Etude d'un semi groupe $T(t)$

Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ définit par :

$$T(t)u_0 = T(t)u_0 = \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{N}{2}}} \int\limits_{\mathrm{IR}^N} u_0(y) \exp -\frac{(x-y)^2}{4t} dy$$

Si on utilise la transformation de Fourrier, on obtient :

$$\|T(t)u_0\|_{L^2(IR^N)} = \left\|\hat{u}_0 \exp - |k|^2\, t\right\|_{L^2(IR^N)} \leq \|\hat{u}_0\|_{L^2(IR^N)} = \|u_0\|_{L^2(IR^N)}$$

Ce qui implique que $T(t)$ est un opérateur continu de $\mathrm{L}^2(\mathrm{IR}^N)$dans lui même.

On a :

$$\hat{T}(t)u_0 = \hat{u}_0 \exp - |k|^2\, t$$

ainsi

$$\begin{aligned} T(t+t_1)u_0 &= \hat{u}_0 \cdot \exp - |k|^2 t \cdot \exp - |k|^2 t_1 \\ &= \hat{T}(t)u_0 \cdot \exp - |k|^2 t_1 = \hat{T}(t_1)(T(t)u_0). \end{aligned}$$

En appliquant la transformée deFourrier inverse on obtient que :

$$T(t+t_1)u_0 = T(t_1)(T(t)u_0).$$

Il est clair de voir que $T(t)$ est fortement continu c'est à dire :

$$\lim_{t \to 0} \|T(t)u_0 - u_0\|_{L^2(IR^N)} = 0.$$

D'où $T(t)$ est un semi groupe de contraction.

Notons enfin que le théorème de Hille Yosida s'étend également aux cas où l'opérateur A est définit sur un espace de Banach. Et nous avons le théorème suivant :

Théorème ***4-1*** *(Hille - Yosida)* :

Soit A un opérateur m-accrétif définit de $D(A) \subset X$ dans X.

Alors pour tout $u_0 \in D(A)$ il existe $u \in C^1([0, +\infty[; X) \cap C([0, +\infty[; D(A))$ unique telle que :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + Au = 0 \quad sur[0, +\infty[\\ \qquad u(0) = u_0 \end{cases}$$

De plus on a :

$$\|u(t)\| \leq \|u_0\| \, et \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(t) \right\| = \|Au(t)\| \leq \|Au(0)\| \quad \forall t \geq 0.$$

L'opérateur $T_A(t) : u_0 \to u(t)$ peut être prolonger par continuité sur X.

Il est facile de voir que $(T_A(t))_{t\,\geq\,0}$ est un semi groupe continu de contraction.

Réciproquement, étant donné un semi groupe continu de contraction $(T(t))_{t\,\geq\,0}$,il a été établit qu'il existe un opérateur A m-accrétif unique tel que $T(t) = T_A(t)$ pour tout $t > 0$.

Preuve. voir ([3]) ■

De ce théoréme on constate qu'il ya un lien entre le semi groupes de contraction et une classe d'opérateurs linéaires appelés les générateurs infinitésimaux ([13]).

1.5 Générateurs infinitésimaux

Définition 5-1 :

Soient X un espace de Banach et $(T(t))_{t\geq 0}$ une famille de C_0- semi groupe. On appelle générateur infinitésimal de $(T(t))_{t\geq 0}$ l'opérateur $(A, D(A))$;

défini par :

$$\begin{aligned} D(A) &= \left\{ f \in X/ \ \lim_{h\to 0} \frac{T(h)f - f}{h} \ \textit{existe} \right\} \\ \textit{et} \quad Af &= \lim_{h\to 0} \frac{T(h)f - f}{h} \quad \textit{pour} \ \ \textit{tout} \ \ f \in D\left(A\right) \end{aligned}$$

Il est clair que $D(A)$ est un sous-espace vectoriel de X et que A est linéaire de $D(A)$ dans X.

On peut résumer les propriétés de ces générateurs infinitésimaux en ce qui suit :

Proposition 6-1 :

Soit A le générateur d'un C_0 semi groupe $(T(t))_{t\,\geq\,0}$.

Alors $D(A)$ est dense dans X et A est fermé.

Preuve. voir([13]) ■

Proposition 7-1 :

Soit X un espace de Banach et $(T(t))_{t\geq 0}$ *une famille de* C_0*- semi groupe.Alors :*

$$\begin{aligned}
&a)\forall x \in X \quad on\ a\ \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)xds = T(t)x\\
&b)\forall x \in X,\ \int_0^t T(s)xds \in D_A \quad et \quad A(\int_0^t T(s)xds) = T(t)x - x\\
&c)\ \forall x \in D_A,\ T(t)x \in D_A\ \ et\ \ \frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax\\
&d)\ \forall x \in D_A, T(t)x \in T(s)x = \int_s^t AT(z)xdz = \int_s^t T(z)Axdz
\end{aligned}$$

Preuve. a) la fonction :$t \to T(t)x$ est continue alors :

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)xds = T(t)x$$

b) Soient $x \in X\ et\ h > 0$ alors pour tout $t > 0$ on a :

$$\frac{T(h)-I}{h}\int_0^t T(s)xds = \frac{1}{h}\int_0^t \left[T(s+h)x - T(s)x\right]ds = \frac{1}{h}\int_0^t T(s)xds$$

Par passage à la limite quand $h \to 0$ on obtient le résultat.

c) Soit $x \in \ D(A)$ et $h > 0$ alors

$$\lim_{h\to 0}\frac{T(h)-I}{h}T(t)x = \lim_{h\to 0}\left(\frac{T(h)-I}{h}\right)x = T(t)Ax.$$

Mais on a

$$\lim_{h\to 0}\frac{T(h)-I}{h}T(t)x = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[(T(t+h)x - T(t)x\right] .$$

On a

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[(T(t+h)x-T(t)x\right]=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[(T(h)T(t)x-T(t)x\right].$$

Si on pose $T(t)x=x_1\in X$, d'aprés la définition on peut dire que :

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[T(t+h)x\text{-}T(t)x\right]$$

existe et elle est égale à : $AT(t)x$. i.e.

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[T(t+h)x\text{-}T(t)x\right] \;=\; AT(t)x\ .$$

Finalement on a :

$$\frac{dt}{d}T(t)x=AT(t)x=T(t)Ax\,,$$

Si on pose $T(t)x=x_1\in X$, d'aprés la définition on peut dire que

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[T(t+h)x\text{-}T(t)x\right]$$

existe et elle est égale à $AT(t)x$ i.e

.

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[T(t+h)x\text{-}T(t)x\right] \;=\; AT(t)x\ .$$

Finalement on a :

$$\frac{dt}{d}T(t)x=AT(t)x=T(t)Ax\,.$$

d) Immédiate. ■

Comme exemple très fréquent qui est celui de l'équation de la chaleur, on peut donner le résultat suivant :

Proposition 8-1 *: Soient* $X = L^p(IR^N), 1 \leq p \leq \infty$ *et le semi groupe de diffusion définit par*

$$(T(t)f)(x) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} \int\limits_{IR^N} (\exp - \frac{(x-y)^2}{4t}) f(s) ds \\ f(s) \ si \ t = 0. \end{cases}$$

Alors $(T(t))_{t \geq 0}$ *est un semi groupe fortement continu et le générateur infinitésimal coincide avec le Laplacien*

$$\Delta u = \sum \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \forall u \in L^p(IR^N).$$

Chapitre 2

Equations d'évolution non homogènes

2.1 Introduction

Les équations d'évolution non homogènes sont de la forme :

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + Au &= f \qquad \text{sur } [0, T[\qquad (2.1) \\ u(0, x) &= u_0(x) \qquad (2.2) \end{aligned}$$

où A est un opérateur de X dans X et f est une application de X dans X.

Le théorème suivant permet d'assurer l'existence de la solution de ce type d'équations([3]).

Théorème ***1-2*** *(Hille-Yosida)* :

So it X un espace de Banach et A un opérateur de $D(A) \subset X$ dans X.

On suppose que A est m-accrétif dans X. Alors pour tout $u_0 \in D(A)$ et tout $f \in$

$C^1(0,T;X)$ *il existe une fonction*

$$u \in C^1(0,T;X) \cap C(0,T;D(A))$$

unique solution de (2.1)-(2.2).

De plus u est donnée par la formule :

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds$$

Où $T(t)$ *désigne le semi groupe engendré par* $-A$.

Preuve. 1-Existence :-

On montre que :

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds$$

est une solution de $(2.1)-(2.2)$.

Puisque $T(t)u_0$ est une solution de l'équation homogène, on montre seulement que :

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)$$

est une solution de $(2.1)-(2.2)$.

Soit $t \in [0,T]$ alors la fonction :$s \to T(t-s)f(s)$ est dans $C^1([0,t], D(A))$

Par suite

$$v(t) \in D(A) \ et \ Av(t) = \int_0^t T(t-s)Af(s)$$

D'ou : $v \in C([0,T], D(A))$.

de plus, on a pour $t \in [0,T]$ et $h \in [0, T-t]$,

$$\frac{v(t+h)-v(t)}{h} = \frac{T(h)-I}{h}v(t) + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s).$$

Par le passage à la limite on a : $v \in C^1([0,t], X)$ et

$$\frac{dv}{dt} = -Av + f \text{ sur } [0,T].$$

2-Unicité :

Posons :

$$\varphi(s) = T(t-s)u(s)ds \qquad t \in [0,T], s \in [0,t], h \in [0,t-s]$$

où $T(t)$ désigne le semi groupe engendré par $-A$.

$$\frac{\varphi(s+h)-\varphi(s)}{h} = T(t-s-h)\left\{\frac{u(s+h)-u(s)}{h} - \frac{T(h)-I}{h}u(s)\right\}$$

qui tend vers

$$T(t-s)(\frac{du}{dt} + Au) = T(t-s)f(s)$$

quand $h \to 0$ ce qui implique que $\varphi \in C^1([0,t], X)$

et

$$\frac{d\varphi}{dt}(s) = T(t-s)f(s)$$

on a donc :

$$\varphi(\tau) = \varphi(0) + \int_0^\tau \varphi^{'}(s)d(s) \;\; pour \quad \tau \in [0,t].$$

D'où :

$$T(t-\tau)u(\tau) = T(t)\,\mathrm{u}_0 + \int_0^\tau T(t-s)f(s).$$

Lorsque $\tau \to t$ on obtient : $u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds.$ ■

.

Comme opérateurs particuliers nous allons considérer le Laplacien pour donner quelques résultats concernant les estimations et les régularités des solutions.

Soit $\Omega \subset IR^N$ un ouvert borné de IR^N et soit l'équation semi linéaire

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dt} - \Delta u &= f \qquad\quad t > 0 \\
u(0, x) &= u_0(x) \quad x \in \ \Omega, \\
\frac{\partial u}{\partial \eta} &= 0 \ \text{sur} \ \ \partial\Omega.
\end{aligned}$$

2.2 Estimations à priori

Proposition *1-2* **:**

Soit $u_0 \in C_0(\Omega)$ *alors pour tout* $t > 0$

le semi groupe $T(t)$ *définit un opérateur borné de* L_p *vers* L_q *i.e.*

$$\begin{aligned}
\|T(t)u_0\|_p &\leq \frac{1}{(4\pi t)^{N/2(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}} \|u_0\|_q \\
\textit{pour tout} &: \ 1 \leq \ q \leq \ p \leq \infty
\end{aligned}$$

Preuve. Soit le problème de Cauchy

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = 0$$

$$\begin{aligned}
v(x, 0) &= |u_0(x)| \ \textit{pour} \ x \in \Omega \\
v(x, 0) &= 0 \ \textit{pour} \ x \in IR^N \diagdown \Omega
\end{aligned}$$

La solution explicite de cette équation est

$$v(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} \int\limits_{IR^N} (\exp - \frac{(x-y)^2}{4t}) \, |u_0(y)| \, ds$$

En utilisant l'inégalité de Young on obtient

$$\|v(x.t)\|_q \leq \|z\|_r \cdot \|v(x,0)\|_p \;\; où : \frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p} + 1$$

tel que :

$$z(y) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}}(\exp - \frac{y^2}{4t})$$

ce qui donne : $\|T(t)u_0\|_q \leq \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}} \cdot \|\mathrm{u}_0\|_p$ ■

Proposition 2-2 :

Si $f \in L^\infty((0,T); L^P(\Omega))$ *et si* $p > \frac{N}{2}$ *alors* $u \in L^\infty((0,T); L^\infty(\Omega))$.

Preuve. Voir Haraux et Kirane ([4]). ■

2.3 L'influence de $\mathbf{u}_0$ sur la solution de l'équation semi linéaire

Soit l'équation semi linéaire

$$\frac{du}{dt} - \triangle u = f(u) \quad sur \;\; [0,T[\tag{2.1}$$

$$u = 0 \qquad \text{sur} \;\; \partial\Omega \tag{2.2}$$

$$u(0,x) = u_0(x) \quad x \in \Omega \tag{2.3}$$

La solution d'une équation d'évolution dépend de u_0 d'une façon régulière.

Dans ce sens on peut énoncer le théorème suivant donnant quelques résultats de régularité dans le cas Hilbertien.

Théorème 2-2 :

a) On suppose que $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ *alors la solution u de (2.1)-(2.3) vérifie :*

$$u \in C\left([0,\infty[\,; L^2(\Omega)\right) \cap L^2\left([0,\infty[\,; H^2(\Omega)\right)$$

et

$$\frac{du}{dt} \in L^2\left([0,\infty[\,; L^2(\Omega)\right)$$

de plus on a

$$\int_0^t \left|\frac{du}{dt}(t)\right|_{L^2}^2 dt + \frac{1}{2}\left|\nabla u(t)\right|_{L^2}^2 = \frac{1}{2}\left|\nabla u_0\right|_{L^2}^2$$

b)On suppose que

$$u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega),$$

alors on a :

$$u \in C\left([0,\infty[\,; H^2(\Omega)\right) \cap L^2\left([0,\infty[\,; H^3(\Omega)\right).$$

et

$$\frac{du}{dt} \in L^2\left([0,\infty[\,; H^1(\Omega)\right)$$

c)On suppose que $u_0 \in H^k(\Omega)\, \forall k$ *et vérifie les relations de compatilité suivantes*

$$u_0 = \triangle u_0 = ...\triangle^j u_0 = ... = 0 \quad sur\ \Gamma\ \forall j\ entier.$$

alors :

$$u \in C^\infty\left([0,\infty[\,, \bar{\Omega}\right).$$

Preuve. a) Immédiat.

b) On définit le produit scalaire dans H^2 par

$$(u,v)_{H^2} = (\Delta u, \Delta v)_{L^2} + (u,v)_{L^2}.$$

Dans H^2 on considère l'opérateur non-borné $A_2 : D(A_2) \subset H^2 \to H^2$ défini par :

$$\begin{cases} D(A_2) = \{u \in H^4(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \text{ et } \Delta u \in H_0^1(\Omega)\} \\ A_2 u = -\Delta u \end{cases}$$

on vérifie que A_2 est maximal accrétif et autoadjoint dans H^2 .Enfin on pose

$$\varphi(t) = \frac{1}{2} |\Delta u(t)|_{L^2}^2$$

la fonction φ est C$^\infty$ sur $]0, \infty[$ et l'on a :

$$\acute{\varphi}(t) = \left(\Delta u(t), \Delta \frac{du}{dt}(t)\right) L^2 = -|\nabla \Delta u(t)|_{L^2}^2 .$$

D'ou : pour $0 < \varepsilon < T < \infty$

$$\frac{1}{2} |\Delta u(t)|_{L^2}^2 - \frac{1}{2} |\Delta u(\varepsilon)|_{L^2}^2 + \int_\varepsilon^T |\nabla \Delta u(t)|_{L^2}^2 \, dt = 0$$

à la limite , quand $\varepsilon \to 0$, on voit que :

$$u \in L^2(0, \infty; H^3(\Omega)) \ et \quad \frac{du}{dt} \in L^2(0, \infty; H^1(\Omega))$$

c) On considère dans $H = L^2(\Omega)$ l'opérateur $A : D(A) \subset H \to H$ défini par :

$$\begin{cases} D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \\ Au = -\Delta u \end{cases}$$

On sait que pour $u_0 \in D(A^k)$, $k \geqslant 2$, alors

$$u \in C^{k-j}, ([0, \infty[\, ; D(A^j)) \qquad \forall j = 0, 1, ...k$$

Il en résulte que : $u \in C^\infty([0, \infty[\times \Omega)$. ■

Remarque ***1-2*** **:** *l'équation de la chaleur a un effet fortement régularisant sur* u_0.

Chapitre 3

Existence globale ou explosion en temps fini des solutions

Dans ce chapitre, nous aborderons à travers quelques exemples des résultats d'existence globale ou d'explosion en temps fini des solutions.

Considérons l'équation non homogène suivante :

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + Au &= f(u) \qquad t > 0 && (3.1) \\ u(0,x) &= u_0 && (3.2) \end{aligned}$$

en supposant que X est un espace de Banach, A est un opérateur m accrétif défini de $D(A) \subset X$ dans X et f une application localement lipschitzienne par rapport à u définie sur X et à valeurs dans X.

Le théorème de Hille Yosida nous permet de conclure que

$\forall u_0 \in D(A) \quad \exists\, u \in C^1((0,T);X) \cap C((0,T);D(A))$ unique solution de (3.1)-(3.2).

Et donc il existe un intervalle maximal $(0, T_{\max})$ où la solution reste définie.

Le principe de prolongement de la solution nous conduit à l'alternative suivante :

a) ou bien $T_{\max} = +\infty$ et la solution est dite globale.

b) ou bien $T_{\max} < +\infty$ et la solution explose en temps fini c'est à dire

$$\lim_{t \to T\max} \|u(t)\|_X = \infty.$$

Ainsi pour étudier l'existence globale des solutions, il suffit d'avoir des estimations uniformes sur ces solutions.

Exemple ***1-3([6])*** **:**

Soit $\Omega \subset IR^n$ un ouvert borné de IR^n à frontière régulière et soit l'équation

$$\frac{du(t,x)}{dt} - \Delta u(t,x) = -u^2(t,x), \quad t > 0, \ x \in \Omega \tag{3.3}$$

$$u(x,.) = 0 \qquad x \in \partial\Omega \tag{3.4}$$

$$u(0,x) = u_0(x) \qquad x \in \Omega \tag{3.5}$$

avec Δ est le Laplacien, $u_0(.) = 0$ sur $\partial\Omega$ et $0 \leq u_0(x) \leq M \quad \forall x \in \Omega$.

Si l'on choisit comme cadre fonctionnel l'espace de Hilbert $H = H^1(\Omega)$

$D(A) = H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) / \ u = 0 \ \text{sur}\, \partial\Omega\}$

$Au = -\Delta u$

Alors on vérifie aisément que A est maximal monotone dans H par suite il existe un intervalle local $(0, T^*)$ sur lequel est définie l'unique solution de (3.3)-(3.5).

En appliquant le principe du maximum à cette équation on obtient

$$0 \leq u(t,x) \leq \|u_0\|_\infty \qquad \forall (t,x) \in (0,T^*) \times \Omega.$$

D'où $T_{\max} = +\infty$ et l'existence des solutions est globale.

Exemple ***2-3*** **:** *Soit l'équation suivante* **:**

$$\frac{du}{dt} - \triangle u - u^{1+\alpha} = 0 \qquad \text{sur} \quad \Omega \times [0, T[\tag{3.6}$$

$$u(x,0) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \tag{3.7}$$

$$u(0,x) = u_0(x) \quad \text{sur } \Omega \tag{3.8}$$

où $\Omega \subset IR^n$ un ouvert borné de IR^n à frontière régulière.

L'existence locale est assurée d'après le théorème de Hille Yosida, quant à l'existence globale nous avons les résultats suivants : (cf M. Lions([8]).

Théorème ***1-3*** : *On suppose que* $n\alpha > 2$; *alors pour tout* $\Psi > 0$ *il existe* $\sigma > 0$ *tel que :*

si u_0 est une fonction continue vérifiant :

$$0 \leq u_0 \leq \sigma \; exp(-\frac{1}{4\Psi}\,|x|^2)$$

alors $T_{\max} = +\infty$ et u vérifie :

$$0 \leq u(x,t) \leq c\frac{1}{(t+\Psi)^{n/2}} \exp(-\frac{1}{4(t+\Psi)}\,|x|^2).$$

Théorème ***2-3*** : *On supose que* $u_0 \in L^{1+\alpha}(IR^n)$ $\quad u_0 \geq 0 \quad$ *p.p* $u_0 \neq 0$.

et $\alpha n < 2$ *alors il n'existe pas de solution du problème*($3.6) - (3.8)$ *telle que :* $u \in L^{1+\alpha}([0,T[\,, L^{1+\alpha}(IR^n)) \quad \forall T > 0$.

Exemple ***3-3*** :([*6*])

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u^3 \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0 \tag{3.9}$$

$$u(t,0) = u(\pi,t) = 0 \qquad t > 0. \tag{3.10}$$

$$u(0,x) = \varphi(x) \qquad 0 < x < \pi. \tag{3.11}$$

où φ est une fonction régulière de IR^+ à valeurs dans IR^+.

Théorème 3-3 : *Si* $\int_0^\pi (\sin x) u(t,x)\, dx > 2$ *alors la solution de* (3.9)−(3.11) *explose en temps fini.*

Preuve. L'existence locale des solutions est classiques alors considérons

$$v(t) = \int_0^\pi (\sin x) u(t,x)\, dx$$

et donc

$$\frac{dv}{dt} = -v + \int_0^\pi (\sin x) u^3(t,x)\, dx.$$

Alors de l'inégalité de Hölder appliquée à $v(t)$ il vient :

$$v(t) \leq 2^{2/3} \left(\int_0^\pi (\sin x) u^3(t,x)\, dx \right)^{1/3}$$

par suite

$$\frac{dv}{dt} \geq -v + \frac{1}{4} v^3 \quad \text{pour tout} \quad t > 0.$$

Cette inéquation différentielle ordinaire nous conduit à

$$T_{\max} = \frac{1}{2} Log\,(v(0) + 2)/(v(0) - 2)$$

et

$$\lim_{t \to T\max} \| v(t,.) \|_\infty = +\infty$$

et donc explosion en temps fini des solutions. ■

Chapitre 4

Existence globale des solutions d'un système de réaction-diffusion à matrice de diffusion pleine.

4.1 Introduction :

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de l'existence globale des solutions d'un système de réaction-diffusion et qui est l'objet principal de notre travail dans de le cadre de ce mémoire.

Il s'agit d'un système parabolique à matrice de diffusion pleine de la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} - a\triangle u - b\triangle v &= -f(u,v) \quad \text{ sur } IR^+ \times \Omega, \\ \frac{dv}{dt} - c\triangle u - a\triangle v &= f(u,v) \quad \text{ sur } IR^+ \times \Omega \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad v(0,x) = v_0(x) \qquad \text{sur } \Omega, \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \;\; \text{sur } IR^+ \times \partial\Omega, \tag{4.3}$$

Où Δ est le Laplacien sur IR^n, Ω est un ouvert borné de IR^n à frontière régulière $\Gamma = \partial\Omega$, a, b, c des coefficients de diffusion positifs vérifiant la condition de parabolicité $c + b < 2a$, f une fonction de classe $C^1(IR \times IR, IR^+)$ vérifiant

$$\lim_{v \to +\infty} \log \left(\frac{1 + f(u,v)}{v} \right) = 0 \tag{A.1}$$

et

$$f\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{b}}s, s\right) = 0, \forall s \in IR \text{ si } b > c \text{ et } f\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{b}}s, s\right) = 0, \forall s \in IR \text{ si } b \leq c \tag{A.2}$$

avec u_0 et v_0 des fonctions positives uniformement continues sur $\bar{\Omega}$ vérifiants

$$\sqrt{c}u_0 \geq \sqrt{b}v_0 \;\text{ si } b > c \text{ et } \sqrt{c}\, u_0 \leq \sqrt{b}v_0 \;\text{ si } b \leq c\,. \tag{A.3}$$

Ce système a été initialement proposé par R. H.Martin au cas où la matrice de diffusion est diagonale. Il a fait l'objet de plusieurs travaux. En premier lieu par N. D.Alikakos[1] en 1979 qui a montré que les solutions sont classiques, positives et qu'elles ne sont globales que pour des non linéarités de la forme $f(u,v) = uv^{\beta}$ avec en plus des conditions sur β de la forme $1 \leq \beta < \dfrac{n+2}{n}$. Ce résultat était basé sur des injections de Sobolev.

Contrairement à Alikakos, K. Masuda ([11]) (1983) a pu généraliser ce résultat pour toutes les non linéarités à sous croissance polynomiales, c'est à dire pour tout $\beta \geq 1$.

Ce problème était resté ouvert pour les non linéarités à croissance rapide telles que l'exponentielle. En se basant sur une inégalité d'énergie qu'ils ont construit A. Haraux et A. Youkana ([5]) (1988) avaient établis un résultat d'existence globale pour des non linéarités faiblement exponentielles, c'est à dire pour des fonctions f vérifiant

$$\lim_{v \to +\infty} \log\left(\frac{1+f(u,v)}{v}\right) = 0$$

Ces résultats étaient généralisés par M. Kirane (1889) ([4]) , S. Kouachi et A. Youkana (2001) ([9]) pour des matrices de diffusion triangulaires.

Notre travail est de montrer que ces résultats peuvent être encore étendus aux matrices de diffusion pleine à éléments diagonaux égaux.

La méthode utilisée est essentiellement basée sur la théorie des régions invariantes et sur la fonctionnelle de Lyapounov établie par Haraux et Youkana.

4.1.1 Résultats préliminaires :

Posons

$$A = \begin{pmatrix} -a\Delta & -b\triangle \\ -c\triangle & -a\triangle \end{pmatrix}$$

Ainsi le système $(4.1)-(4.3)$ est équivalent à :

$$\frac{dU}{dt} + AU = F(U), \qquad t > 0,\ x \in \Omega \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \eta} = 0 \qquad \text{sur} \qquad (0, +\infty) \times \partial\Omega \tag{4.5}$$

$$U(0, .) = U_0 \qquad \text{sur} \quad \Omega \tag{4.6}$$

où

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \qquad U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

$$F(U) = \begin{pmatrix} -f(u,v) \\ +f(u,v) \end{pmatrix}.$$

Notons par $X = C\left(\bar{\Omega}\right) \times C\left(\bar{\Omega}\right)$ et par $W^{2,p}(\Omega)$ l'espace de Sobolev d'ordre 2.

On définit le domaine de A par

$$D(A) = \left\{ U \in (W^{2,p}(\Omega))^2; \frac{\partial U}{\partial n} = 0 \right\}.$$

Notre principal est le suivant :

Théorème 1-4 : *Sous les hypothèses A.1-A.3, le système $(4.1)-(4.3)$ admet une so lution globale unique restant uniformement bornée sur $(0, +\infty) \times \Omega$.*

Preuve. Nous allons considérer uniquement le cas $b < c$, le cas $b > c$ se fait d'une façon tout à fait similaire avec une autre transformation linéaire.

La condition de parabolicité *est donnée par*

$$\cup^T A \cup = a \int |\nabla u|^2 + (c+b) \int |\nabla u| \, |\nabla v| + a \int |\nabla v|^2 \ >0 \ ,$$

comme $c + b < 2a$, le discriminant de cette forme quadratique est

$$(c+b)^2 - 4a^2 < 0.$$

Notre but est de réduire le systéme ([4.1])-([4.3]) comme suit :

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \lambda_1 \Delta w = f_1 \tag{4.7}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} - \lambda_2 \Delta z = f_2. \tag{4.8}$$

En effet on cherche une transformation linéaire$T$ qui fait correspondre à (u,v) l'élément (w,z).

Soit :

$$\begin{cases} w = \alpha_1 u + \beta_1 v \\ z = \alpha_2 u + \beta_2 v \end{cases} \tag{4.9}$$

alors

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= \alpha_1 \frac{du}{dt} + \beta_1 \frac{dv}{dt} = \alpha_1 \left[a\triangle u + b\triangle v - f(u,v)\right] + \beta_1 \left[c\triangle u + a\triangle v + f(u,v)\right] \\ &= (\alpha_1 a + \beta_1 c)\, \Delta u + (\alpha_1 b + \beta_1 a)\Delta v + (\beta_1 - \alpha_1)\, f(u,v) \\ \frac{dz}{dt} &= \alpha_2 \frac{du}{dt} + \beta_2 \frac{dv}{dt} = \alpha_2 \left[a\triangle u + b\triangle v - f(u,v)\right] + \beta_2 \left[-c\triangle u - a\triangle v + f(u,v)\right] \\ &= (\alpha_2 a + \beta_2 c)\, \Delta u + (\alpha_2 b + \beta_2 a)\Delta v + (\beta_2 - \alpha_2)\, f(u,v)\,, \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure qu'il suffit de choisir

$$\begin{cases} \alpha_1 a + \beta_1 c = \lambda_1 \alpha_1 \\ \alpha_1 b + \beta_1 a = \lambda_1 \beta_1 \end{cases} \tag{4.10}$$

$$\begin{cases} \alpha_2 (a - \lambda_2) + \beta_2 c = 0 \\ \alpha_2 b + \beta_2 (a - \lambda_2) = 0 \end{cases}. \tag{4.11}$$

pour avoir (4.7) - (4.8) .

D'où , si le discriminant de (4.10) est nul le système admet une infinité de solutions.

$$\begin{aligned}(a-\lambda_i)^2 - bc &= 0 \quad i=1,2 \quad \Rightarrow \\ (a-\lambda_i)^2 &= bc \quad\quad i=1,2.\end{aligned} \tag{4.12}$$

Choisissons $\alpha_1 = 1, \alpha_{2.} = -1$ alors $\beta_1 = \dfrac{a-\lambda_1}{c}, \quad \beta_2 = \dfrac{a-\lambda_2}{c}$ ce qui donne

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \frac{\sqrt{bc}}{c} = \sqrt{\frac{b}{c}} \;\; et \\ \beta_2 &= \frac{\sqrt{bc}}{c} = +\sqrt{\frac{b}{c}}.\end{aligned} \tag{4.13}$$

Finalement on peut choisir comme transformation :

$$\begin{aligned}T &: \;(u,v) \rightarrow (u + \sqrt{\frac{b}{c}}v, \; -u + \sqrt{\frac{b}{c}}v). \\ w &= u + \sqrt{\frac{b}{c}}v, \quad z = -u + \sqrt{\frac{b}{c}}v.\end{aligned} \tag{4.14}$$

Donc le systéme réduit obtenu est :

$$\begin{cases} \dfrac{d\,w}{d\,t} - \lambda_1 \Delta w = f_1(w,z) \quad / \quad \lambda_1 = a + \sqrt{bc} \quad \text{sur } IR^+ \times \Omega, \\ \dfrac{d\,z}{d\,t} - \lambda_2 \Delta z = f_2(w,z) \quad / \quad \lambda_2 = a - \sqrt{cb} \end{cases} \tag{4.15}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial \eta} = 0 \quad \text{sur } IR^+ \times \partial\Omega \tag{4.16}$$

$$w(0,x) = w_0(x), \qquad z(0,x) = z_0(x) \quad \text{sur } \;\Omega. \tag{4.17}$$

où

$$f_1(w,z) = (\sqrt{\frac{b}{c}} - 1)\, f(u,v) \leq 0 \tag{4.18}$$

$$f_2(w,z) = (\sqrt{\frac{b}{c}} + 1)\, f(u,v) \geq 0. \tag{4.19}$$

La condition $b + c < 2a \quad \Rightarrow \quad a \geq \sqrt{bc}$,et donc le système $(4.11) - (4.13)$ admet une solution unique (w,z). ■

4.1.2 Existence globale des solutions :

1-Positivité des solutions

Proposition *1-4* : *Soit* (w,z) *les solutions de* $(4.15) - (4.17)$ *alors l'ensemble* $\sum = \{(w,z) \in IR^2 / \ \ w_0 \geq 0,\ z_0 \geq 0\}$ *est une région invariante.*

Preuve. De (4.14)et (4.19) on a : $z(0,x) = -u_0 + \sqrt{\frac{b}{c}} v_0 \geq 0$ sur $(0,T^*) \times \Omega$ et

$w(0,x) = \sqrt{\frac{b}{c}} u_0 + v_0 \geq 0$ sur $(0,T^*) \times \Omega$.

De la relation $y = y^+ - y^-$ et de A.2 en utilisant les accroissements finis on écrit

$$\begin{aligned} f(u,v) &= f\left(\frac{1}{2}(w-z), \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{b}}(w+z)\right) - f\left(-\sqrt{\frac{b}{c}}(2v), 2v\right) \\ &= \left[\frac{1}{2}(w-z) - (-(w+z))\right] f'(\xi,.) \ = w f'(\xi,.), \end{aligned}$$

en appliquant le principe du maximum à (4.15) et en utilisant la formule de Green on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_\Omega (w^-)^2 dx &= -\lambda_1 \int_\Omega |\nabla w^-|^2\, dx + (\sqrt{\tfrac{b}{c}} - 1)\int_\Omega w w^- f'(\xi,.)\ dx \\ &\leq C(T)\int_\Omega ((w^-)^2 dx. \end{aligned}$$

de la même manière on obtient :

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega (z^-)^2 dx = -\lambda_2 \int_\Omega \left|\nabla z^-\right|^2 dx + (\sqrt{\tfrac{b}{c}}+1)\int_\Omega wz^- f'(\xi,.)dx$$
$$\leq C\,(T)\int_\Omega ((z^-)^2.$$

En additionnant ces deux dernières inégalités on obtient

$$\frac{d}{dt}\left[\int_\Omega (w^-)^2 dx + \int_\Omega (z^-)^2 dx\right] \leq C\,(T)\left[\int_\Omega (w^-)^2 dx + \int_\Omega (z^-)^2 dx\right] \text{ sur } (0,T^*)\times\Omega \tag{4.20}$$

et donc de (4.14) et (4.20) on déduit que : $w \geq 0$ et $z \geq 0$ sur $(0,T^*)\times\Omega$. ■

2-Bornage des solutions :

Multiplions la première équation (4.15) du système par $(w-M)^+$ où $M = \|w_0\|_\infty$ et appliquons la formule de Green alors

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,t}\int_\Omega ((w-M)^+)^2 &= -\lambda_1 \int_\Omega \left|\nabla w^-\right|^2 + \int_\Omega f_1\,(w,z)\,(w-M)^+ \\ &\leq 0 \quad \text{sur } (0,T^*)\times\Omega.\end{aligned}$$

Ce qui implique que :

$$\|w\,(t,.)\|_\infty \leq M \quad \text{sur } (0,T^*)\times\Omega. \tag{4.21}$$

Pour montrer que l'existence est globale on aura à utiliser le résultat suivant établi par Haraux et Youkana([3]).

Proposition 2-4 : *Il existe deux constantes positives δ et ε ne dépendant que de*

$\|w(0,.)\|_{\infty}$*telle que la fonctionnelle*

$$F(t)=\int_{\Omega}\left(1+\delta\left(w+w^{2}\right)e^{\varepsilon z}\right)\ \textit{est décroissante en } t.$$

Preuve. On a $f_2(w,z)=(\sqrt{\frac{b}{c}}+1)\,f(u,v)\geq 0$ sur $(0,T^{*})\times\Omega.$

Appliquons maintenant la fonctionnelle de Lyapounov établie par Haraux et Youkana à l'équation (4.16).

On a :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\left(w+w^{2}\right)e^{\varepsilon z}dx &= -2\lambda_1\int_{\Omega}e^{\varepsilon z}\left|\nabla w\right|^{2}dx-\lambda_2\varepsilon^{2}\int_{\Omega}\left|\nabla z\right|^{2}e^{\varepsilon z}\left(w+w^{2}\right)dx\\ &\quad -(\lambda_1+\lambda_2)\varepsilon\int_{\Omega}e^{\varepsilon z}(1+2w)\nabla z\nabla w dx+\\ &\quad \frac{1}{\sqrt{c}}\int\left[\varepsilon\left(w+w^{2}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)-\left(\sqrt{c}-\sqrt{b}\right)(1+2w)\right]\bullet\\ &\quad e^{\varepsilon z}f(w,z)\,dx.\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega}e^{\varepsilon z}=-\lambda_2\varepsilon^{2}\int_{\Omega}e^{\varepsilon z}\left|\nabla z\right|^{2}+\varepsilon(\sqrt{\frac{b}{c}}+1)\int_{\Omega}e^{\varepsilon z}f(w,z)\,dx.$$

Par l'inégalité de Young :

$$\begin{aligned}(\lambda_1+\lambda_2)\varepsilon\int_{\Omega}(1+2w)\nabla w\nabla z &\leq \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^{2}}{8\lambda_1}\varepsilon^{2}\int_{\Omega}(1+2w)^{2}\left|\nabla w\right|^{2}e^{\varepsilon z}dx\\ &\quad +2\lambda_1\int_{\Omega}\left|\nabla w\right|^{2}e^{\varepsilon z}dx\end{aligned}$$

donc :

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\left(w+w^{2}\right)e^{\varepsilon z}dx \leq \frac{\varepsilon^{2}\left(\lambda_1+\lambda_2\right)^{2}}{8\lambda_1}\int_{\Omega}(1+2w)^{2}\left|\nabla z\right|^{2}e^{\varepsilon z}dx+$$

$$\frac{1}{\sqrt{c}}\int\left[\varepsilon\left(w+w^2\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)-\left(\sqrt{c}-\sqrt{b}\right)(1+2w)\right]\bullet$$
$$e^{\varepsilon v}f(w,z)\,dx$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_\Omega\left[1+\delta\left(w+w^2\right)\right]e^{\varepsilon v}dx &= -\lambda_2\varepsilon^2\int_\Omega e^{\varepsilon z}\left|\nabla z\right|^2dx\\ &+\frac{\delta\varepsilon^2\left(\lambda_1+\lambda_2\right)^2}{8\lambda_1}\int(1+2w)^2\left|\nabla w\right|^2e^{\varepsilon z}dx+\\ &\frac{1}{\sqrt{c}}\int\left[\varepsilon(\sqrt{b}+\sqrt{c})+\delta\left[\begin{array}{c}\varepsilon\left(w+w^2\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\\ -\left(\sqrt{c}-\sqrt{b}\right)(1+2w)\end{array}\right]\right]\bullet\\ &e^{\varepsilon z}f(w,z)\,dx\end{aligned}$$

Si on prend :

$$\delta=\frac{8\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1+\lambda_2)^2}(1+2\left\|w_0\right\|_\infty)^{-2}\text{ alors}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_\Omega\left[1+\delta\left(w+w^2\right)\right]e^{\varepsilon z}dx &\leq\\ &\frac{1}{\sqrt{c}}\int_\Omega(\varepsilon\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)+\delta[\varepsilon\left(w+w^2\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)-\\ &\left(\sqrt{c}-\sqrt{b}\right)(1+2w)])f(w,z)\,dx\end{aligned}$$

Si l'inégalité

$$\varepsilon\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)+\delta\varepsilon\left(\left\|w_0\right\|_\infty+\left\|w_0\right\|_\infty^2\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\leq\delta\left(\sqrt{c}-\sqrt{b}\right)\quad\text{est satisfaite}$$

autrement dit si

$$\varepsilon\leq\frac{\delta\left(\sqrt{c}-\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left[1+\delta(\left\|u_0\right\|_\infty+\left\|u_0\right\|_\infty^2\right]}$$

alors :

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega\left[1+\left(w+w^2\right)\right]e^{\varepsilon z}dx\leq0\quad\text{sur }(0,T^*)\times\Omega.$$

Comme w est uniformément bornée sur $(0,T^*)\times\Omega$ alors de l'hypothèse

$$\lim_{v\to\infty}\frac{\log\left(1+f\left(u,v\right)\right)}{v}=0$$

on déduit que

$$\begin{aligned}\forall B &> 0 \quad \exists A>0 \quad ; v>0 \Rightarrow \frac{\log\left(1+f_2\left(w,z\right)\right)}{z}<B\\ &\Rightarrow \log\left(1+f_2\left(w,z\right)\right)<Bz\Rightarrow 1+f_2\left(w,z\right)\le e^{Bz}\end{aligned}$$

Si on pose :$B=\dfrac{\varepsilon}{n}$alors ;

$$1+f_2\left(w,z\right)\le e^{\frac{\varepsilon}{n}z}\Rightarrow f_2\left(w,z\right)\le e^{\frac{\varepsilon}{n}z}\Rightarrow\int_\Omega\left(f_2\left(w,z\right)\right)^n\le\int_\Omega e^{(B.\dot{n}).z}\le C$$

où C est une constante indépendante de t (supposée la même partout).

De l'effet régularisant de l'équation de la chaleur appliqué à la deuxième équation de (4.15)

on déduit que

$$\|z\left(t,.\right)\|_{L^\infty(\Omega)}\le C\quad\forall t\in\left(0,T^*\right)\tag{4.22}$$

et donc la solution du système $(4.1)-(4.3)$ est globale et bornée sur $(0,+\infty)\times\Omega$. ■

4.2 Comportement à l'infini :

On a le résultat suivant :

Théorème 1-4 *: Sous les hypothèses A.1, A.2,* (4.18) *et* (4.19) *il existe deux constantes positives* u^*,v^* *telle que :*

$\lim\limits_{t\to+\infty}\|u(t,.)-u^*\|_\infty=\lim\limits_{t\to+\infty}\|v(t,.)-v^*\|_\infty=0.$

Preuve. En intégrant sur $(0,t)\times\Omega$ les deux équations du système (4.15)

$$\frac{d\,w}{d\,t}-\lambda_1\Delta w=(\sqrt{\tfrac{b}{c}}-1)\,f\,(u,v)\,,\qquad /\quad \lambda_1=a+\sqrt{bc}\quad \text{sur } IR^+\times\Omega,$$

$$\frac{d\,z}{d\,t}-\lambda_2\Delta z\quad=(\sqrt{\tfrac{b}{c}}+1)\,f\,(u,v)\qquad /\quad \lambda_2=a-\sqrt{bc}$$

et en posant $g\,(w,z)=f\,(u,v)\geq 0$ on obtient :

$$\int_\Omega wdx-\int_\Omega w_0dx=(\sqrt{\frac{b}{c}}-1)\int_0^t\int_\Omega g\,(w,z)\,dsdx \tag{4.23}$$

$$\int_\Omega zdx-\int_\Omega z_0dx=(\sqrt{\frac{b}{c}}+1)\int_0^t\int_\Omega g\,(w,z)\,dsdx \tag{4.24}$$

Puis en multipliant successivement les deux équations du système (4.15) par w et z et par intégration sur $(0,t)$ on obtient :

$$\int_\Omega w^2dx-\int_\Omega w_0^2dx+\lambda_1\int_0^t\int_\Omega|\nabla w|^2\,dsdx=(\sqrt{\frac{b}{c}}-1)\int_0^t\int_\Omega wg\,(w,z)\,dsdx \tag{4.25}$$

$$\int_\Omega z^2dx-\int_\Omega z_0^2dx+\lambda_2\int_0^t\int_\Omega|\nabla z|^2\,dsdx=(1+\sqrt{\frac{b}{c}})\int_0^t\int_\Omega zg\,(w,z)\,dsdx \tag{4.26}$$

De (4.23) , (4.25) et (4.26) on déduit que

$\int_0^t\int_\Omega g\,(w,z)\,dsdx<+\infty\,,\ \int_0^t\int_\Omega wg\,(w,z)\,dsdx<+\infty\,,$

$\int_0^t\int_\Omega|\nabla w|^2\,dsdx<+\infty\,,\ \int_0^t\int_\Omega|\nabla z|^2\,dsdx<+\infty\,.$

Comme ces expressions sont croissantes en t et majorées alors elles sont convergentes et donc de (4.23) et (4.24) on déduit qu'il existe deux constantes positives c_1 et c_2 telles que

$$\lim_{t\to+\infty}\int_\Omega w\,(t,x)\,dx=c_1\;et\;\lim_{t\to+\infty}\int_\Omega z\,(t,x)\,dx=c_2. \tag{4.27}$$

Utilisons un résultat de précompacité des trajectoires([4]), on montre qu'il existe une sous suite $(t_{n_k})_{k\geq 1}$ et il existe deux fonctions w^* et z^* telles que

$$\lim_{k\to+\infty} \sup |w(t_{n_k}, x) - w^*| = \lim_{k\to+\infty} \sup |z(t_{n_k}, x) - z^*| = 0. \tag{4.28}$$

De (4.27) on déduit que

$$w^* = \frac{1}{|\Omega|}c_1 \quad \text{et} \quad z^* = \frac{1}{|\Omega|}c_2 \tag{4.29}$$

Enfin de (4.14) , (4.21) , (4.22) et (4.29) on déduit que :

$$\begin{aligned}
\|u(t,.)\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq \frac{1}{2}\left\|u(t,.) + \sqrt{\frac{b}{c}}v(t,.) + u(t,.) - \sqrt{\frac{b}{c}}v(t,.)\right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \\
&\quad \left\|u(t,.) + \sqrt{\frac{b}{c}}v(t,.)\right\|_{L^\infty(\Omega)} + \left\|u(t,.) - \sqrt{\frac{b}{c}}v(t,.)\right\| \\
&\leq C\,, \\
\|v(t,.)\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{b}}\ \left[\|w(t,.)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|z(t,.)\|_{L^\infty(\Omega)}\right] \leq C \quad \forall t \in (0, T^*)
\end{aligned}$$

et qu'il existe deux constantes u^* et v^* telles que $\lim\limits_{t\to+\infty} \sup |u(t,x) - u^*| = \lim\limits_{t\to+\infty} \sup |v(t,x) - v^*| = 0.$ ■

Remarque *1-4* :

Ces résultats restent encore valables pour des matrices de diffusion pleines à coefficients de diffusion constants, positifs et quelconques vérifiant la condition de parabolicité Voir [8] .

Bibliographie

[1] N. D. Alikakos . L^p-bound of solutions of reaction-diffusion equations, comm. Partial Differential Equations (1979), 827-868.

[2] A.Aibech . Cours de magister, Universitè de Sétif.

[3] H. Brézis . Analyse Fonctionnelle : Théorie et Application. Dunod 1983

[4] A. Haraux and M.Kirane . Estimation C^1 pour des problemes paraboliques semi-linéaires, Ann.Fac.Sci.Toulouse Math.5 (1988),265-280.

[5] A. Haraux and A.Youkana . On a result K. Masuda concerning reaction-diffusion equations, Tôhoku Math. J. 40(1988).159-163.

[6] D.Henry .Géometric Theory of Semilinear Parabolic Equations. Lecture Notes in Math. 840, Springer-Verlag, Berlin, 1981.

[7] H. Hoshino. On the convergence properties of global solutions for some reaction diffusion systems under Neumann boundary conditions, Dioe and Integ. Eqs., Vol. 9, No. 4 (1996), 761-778.

[8] S. Kouachi . Existence of global Solution to Reaction-Diffusion system via a Liaponov functional . E. J.D.E (2002

[9] S. Kouachi and A. Youkana .Global existence for a class of reaction-diffusion systems.Vol.49, N 3 (2001)

[10] J. L. Lions and E. Magenes .Quelques méthodes de résolutions des problèmes aux limites non linéaires. Dunod-Gauthier Villars (1969).

[11] Masuda .On th global existence and asymptotique behavior of reaction-diffusion equations, Hokkaido Math. J.12(1983),360-370.

[12] L. Melkemi, A. Mokrane and A. Youkana . On the uniform boundedness of the solutions of systems of reaction-diffusion .E.J. Q.T (2005).

[13] A. Pazy . Semigroups of linear operators and Application to Partial Differential Equation.Springer Verlag, New York, 1983

[14] F. Rothe . Global solution of Reaction-Diffusion. Lecture Notes in Math. 1072, Springer-Verlag , Berlin , New York , 1983.

[15] H. Tanabe . Equation of Evolution. pitman press, Bath.(1979).

[16] A.Youkana .Thèse de 3 ème cycle , Chapitre 3, Université Paris 6, 1986.