UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des Sciences et Sciences de l'ingénieur

DEPARTEMENT DE :
MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

N° d'ordre :
N° de série :

MAGISTER

Spécialité : Mathématiques
Option : Analyse numérique et E. D. P

Par : BENADDI Hadda

Thème

Quelques problèmes aux-limites gouvernés par l'opérateur perturbé des ondes et de la diffusion

Soutenu publiquement le : 19 / 09 /2006

Devant le jury composé de :

Président :	**D. A. CHACHA**	**M.C. UKM OUARGLA**
Rapporteur :	**B. MEROUANI**	**Prof. UFA SETIF**
Examinateurs :	**S. M. SAID**	**M.C. UKM OUARGLA**
	B. BENYETTOU	**M.C. UTA LAGHOUAT**

2005/2006

Remerciements

Ce travail a été réalisé à l'université de Kasdi Merbeh Ourgla, sous la direction de Monsieur **B. MEROUANI**, Professeur à l'université Ferhat Abbas de Sétif, qui m'a fourni le sujet de ce mémoire et, m'a guidé par ces précieux conseils et suggestions et pour la confiance qu'il m'a témoignée tout au long de ce travail qui a été réalisé entièrement au sein du Laboratoire de Mathématiques Appliquées de L'UFAS.

Je remercie le Docteur **D. A. CHACHA**, maître de conférence à l'université Kasdi Merbah de Ouargla, pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de ce mémoire. Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de ma profonde gratitude.

Je tiens à remercier les examinateurs, **S. M. SAID**, maître de conférence à l'université Kasdi Merbah de Ouargla et **B. BENYETTOU**, maître de conférence à l'université Thledji Amar de Laghouat, d'avoir accepter de juger mon travail.

Mes remerciements vont à toute ma famille qui m'a donné la tendresse et m'a réalisé toutes les circonstances de présenter ce travail. Sans oublier à tous qui m'avaient aidé.

Table des matières

0.1 Introduction

Dans ce travail, on étudie quelques problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielles :

- semi-linéaires du deuxième ordre,

- le problème dynamique de la diffusion.

Les premiers problèmes aux limites, qui sont non-linéaires, modélisent les petites vibrations, d'une corde, d'une membrane élastique et de manière générale la propagation d'une onde (acoustique, électromagnétique, etc) dans un milieu élastique homogène $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Ces phénomènes sont modélisés mathématiquement par l'équation des ondes linéaires ou non-linéaires suivant le cas, avec des conditions aux limites et initiales. En pratique, la partie non-linéaire définie les changements des perturbations du phénomène.

Le second problème, est celui de la diffusion et est du type parabolique. Ce genre de problèmes interviennent dans plusieurs applications, comme la théorie de la chaleur, la diffusion des gaz, etc.

Dans le premier chapitre, on donne des rappels d'analyse fonctionnelle, dans le deuxième et le troisième chapitres, on considère d'abord, le modèle mathématique général des ondes perturbées, notons par $\digamma(u)$ cette perturbation, composée d'une équation différentielle semi-linéaire du second ordre et de type hyperbolique, dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ borné et de frontière Γ régulière avec :

-une condition aux limites de Dirichlet $u = 0$ sur Γ,

-et les conditions initiales : déplacement initial $u_0(x)$ et la vitesse initiale $u_1(x)$.

On a commencé par les cas particuliers où $\digamma(u) = |u|^{\rho} u$, $\rho > 0$, $\digamma(u) = u^3$ et $\digamma(u) \equiv a(x,t)\, u^2$. Dans chaque cas on s'intéressera à l'existence, l'unicité et la régularité des solutions. Les techniques qu'on utilisera ici sont celles de la méthode de compacité (de Faedo-Galerkin), cette technique est inspirée des travaux de [5].

Dans le dernier chapitre constituant un travail original, on étudie pour la première fois le problème de la diffusion par les techniques de régularisation elliptique. On démontrera un théorème d'existence d'une solution de ce problème.

Les problèmes considérés sont les suivants :

*** Problème semi - linéaire :**

$$(p_0) \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + \digamma(u) = 0, \text{ dans } \Omega \times]0,T[\\ u = 0, \text{ sur } \Gamma \times]0,T[\\ u(x,0) = u_0(x), \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), \text{ sur } \Omega. \end{cases}$$

*** Problème de la diffusion :**

Ω désigne un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière régulière Γ, Q désigne l'ouvert $]0,T[\times\Omega$ avec $T>0$, de frontière Σ et $2<p<\infty$. On cherche une fonction u, solution du problème suivant :

$$(p_4)\left\{\begin{array}{c}\frac{\partial u}{\partial t}-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(|u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)=f,\ \text{ dans } Q,\\ u=0,\ \text{ sur } \Sigma\\ u\left(x,0\right)=u_0\left(x\right),\ \ x\in\Omega.\end{array}\right.$$

Où f, $u_0(x)$ et $u_1(x)$ sont données et $t\in[0,T]$.

Dans ce travail on suira le plan suivant :

Chapitre 1 :

Dans ce chapitre, on introduit les espaces fonctionnelles, les résultats d'injections topologiques ainsi que compactes entre ces espaces et les théorèmes de base des techniques de la méthode de régularisation elliptique.

Chapitre 2 :

Dans ce chapitre, on traite comme dans [5], l'existence, l'unicité et la régularité de la solution du problème (où $\rho>0$)

$$(p_1)\left\{\begin{array}{c}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\Delta u+|u|^{\rho}\,u=f,\ \text{ dans } \Omega\times\left]0,T\right[,\\ u=0,\ \text{ sur } \Gamma\times\left]0,T\right[\\ u\left(x,0\right)=u_0\left(x\right),\ \frac{\partial u}{\partial t}\left(x,0\right)=u_1\left(x\right),\ \ x\in\Omega.\end{array}\right.$$

Comme cas particulier du problème (p_1), on considère le cas où $\rho=2$ (soit le problème (p_2) où $F(u)=u^3$).

Chapitre 3 :

Dans ce chapitre, par les mêmes techniques on étudie le problème (p_3), c'est-à-dire le cas où $F\left(u\right)\equiv a\left(x,t\right)u^2$. L'existence globale et la régularité des solutions dépendent du coefficient $a\left(x,t\right)$. On donnera à la fin de ce chapitre, des remarques sur le problème (p_0).

Chapitre 4 :

Dans ce dernier chapitre, on étudie par les techniques de régularisation elliptique, le problème (p_4).

On transforme le problème en une suite de problèmes elliptiques approchés (dépendant de ε). Pour conclure, on cherche des estimations de la solution approchée ainsi que pour sa dérivée, et on passera à la limite.

Chapitre 1

Rappels d'analyse fonctionnelle

On rappellera ci-dessous les principaux résultats d'analyse fonctionnelle, dont nous aurons besoin dans toute la suite.

1.1 Topologie faible

Définition 1.1.1 *On note E un espace normé, E' son dual topologique.* *On appelle topologie faible sur E et que l'on note $\sigma(E, E')$, la topologie la moins fine rendant continues toutes les formes linèaires $f \in E'$.*

Définition 1.1.2 *Si $x_n \to x$ dans $\sigma(E, E')$, on notera $x_n \rightharpoonup x$ et on dira que x_n converge faiblement vers x dans E.*

Proposition 1.1.3 *Soit E un espace de banach et (x_n) une suite d'éléments de E ; alors :*

$$x_n \rightharpoonup x \Leftrightarrow f(x_n) \to f(x), \ \forall f \in E'.$$

Soit E un espace de Banach, E' son dual, E'' son bidual topologique muni de la norme :

$$\|\xi\|_{E''} = \sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\| \leq 1}} |\xi(f)|.$$

On a une injection canonique $J : E \to E''$. En effet tout élément $x \in E$ définit un élément $J_x \in E''$ par :

$$J_x(f) = f(x)$$

J_x est bien une forme linéaire continue sur E' puisque :

$$|J_x(f)| = |f(x)| \leq \|x\|_E \|f\|_{E'}.$$

En fait $\|J_x\|_{E''} = \|x\|_E$ car :

$$\|J_x\|_{E''} = \sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\| \leq 1}} |J_x(f)| = \sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\| \leq 1}} |f(x)| = \|x\|_E.$$

Corollaire 1.1.4 *Soit E un espace de Banach séparable et soit $\{f_n\}$ une suite bornée dans E'. Alors, il existe une sous-suite extraite $\{f_{n_k}\}$ qui converge pour la topologie $\sigma(E', E)$. C'est à dire :*

$$\langle f_{n_k}, x\rangle \to \langle f, x\rangle, \ \forall x \in E$$

Définition 1.1.5 *L'espace E est dit réflexif, si $J(E) = E''$.*

Théorème 1.1.6 *Soit E un espace de Banach réflexif; alors toute suite bornée dans E admet au moins une sous-suite faiblement convergente.*

Définition 1.1.7 *Un espace métrique séparable est un espace métrique qui contient un sous emsenble dense et dénombrable.*

1.2 Espaces de Sobolev

Soit $(X, \|.\|_X)$ un espace de Banach, $1 < p < \infty$ et $T > 0$. On définit l'espace $L^p(0,T,X)$ comme suit :

$$L^p(0,T,X) = \left\{ f :]0,T[\to X, \text{ telle que } f \text{ mesurable et } \int_0^T \|f(t)\|_X^p \, dt < \infty \right\},$$

cet espace est munit de la norme :

$$\|f\|_{L^p(0,T,X)} = \left(\int_0^T \|f(t)\|_X^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

et pour $p = \infty$, on pose :

$$\|f\|_{L^\infty(0,T,X)} = \sup_{t \in]0,T[} ess \, \|f(t)\|_X.$$

propriétés

(i) Pour $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(0,T,X)$ est un espace de Banach et on particulier, $L^2(0,T,X)$ est un espace de Hilbert, lorsque X est un espace de Hilbert.
(ii) Pour $1 < p < \infty$ et si X est réflexif, alors $L^p(0,T,X)$ est un espace réflexif.
(iii) Pour $1 \leq p < \infty$ et si X séparable, alors $L^p(0,T,X)$ est aussi séparable.

Espaces de Sobolev d'ordre entier

Définition 1.2.1 *Soit p un réel, $1 \leq p \leq \infty$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et m un entier naturel. On appelle espace de Sobolev d'ordre m et on note $H^m(\Omega)$. L'ensemble :*

$$H^m(\Omega) = \left\{ \text{ u mesurable, tel que } D^\alpha u \in L^2(\Omega),\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n,\ |\alpha| \leq m \right\},$$

où

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}, \text{ désigne la dérivé d'ordre } \alpha \text{ au sens des distributions avec}$$

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$.

Quelques propriétés des espaces $H^m(\Omega)$

(i) On munit l'espace $H^m(\Omega)$ du produit scalaire :

$$(u,v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)},\ \forall u, v \in H^m(\Omega).$$

La norme associé étant donné par :

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}},\ \forall u \in H^m(\Omega),$$

de plus, il est bien connu que cet espace est un espace de Hilbert.
(ii) Pour $m = 0$ on a $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ et pour tout $m_1 > m_2$, on a : $H^{m_1}(\Omega) \subset H^{m_2}(\Omega)$
avec injection continue.
(iii) Pour tout $m \geq 0$, $H^m(\Omega)$ est un espace séparable.
(iv) Pour tout $m \geq 0$, nous désignons par $H_0^m(\Omega)$ la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$:

$$H_0^m(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)} \text{ dans } H^m(\Omega),$$

et par $H^{-m}(\Omega)$ le dual topologique de $H_0^m(\Omega)$.

(v) Grâce aux applications traces, que nous allons voir aprés, les espaces $H_0^m(\Omega)$ peuvent être définis comme suit :

$$H_0^m(\Omega) = \left\{ u \in H^m(\Omega) \text{ telle que : } \frac{\partial^j u}{\partial n^j} = 0, \ \forall j = 0, ..., m-1. \right\},$$

où : $\frac{\partial}{\partial n}$ est la dérivée normale de u suivant la normale extérieur à $\Gamma = \partial\Omega$:

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) n_i, \ \forall x \in \Gamma$$

Lemme 1.2.2 *Si*

$$f \in L^p(0,T;X) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial t} \in L^p(0,T;X) \quad (1 \leq p \leq \infty),$$

alors f est, après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle de $]0,T[$ continue de $[0,T] \to X$.

Lemme 1.2.3 *L'espace $H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ où $p = \rho + 2$ est séparable.(i.e : il existe un ensemble dénombrable dense).*

Espaces de Sobolev d'ordre non entier

Définition 1.2.4 *Soit s un réel, $0 < s < 1$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on désigne par $H^s(\Omega)$ l'espace :*

$$H^s(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega), \text{ tel que } \iint_{\Omega \times \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dxdy < \infty \right\},$$

muni de la norme :

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \iint_{\Omega \times \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dxdy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Si s désigne un réel positif de partie entière $[s] = m$, l'espase $H^s(\Omega)$ peut être défini de la manière suivante :

$$H^s(\Omega) = \left\{ u \in H^m(\Omega), \ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \ |\alpha| = m, \ D^\alpha u \in H^{s-m}(\Omega) \right\},$$

l'orsque $\Omega = \mathbb{R}^n$, *nous pouvons définir l'espace de Sobolev* $H^s(\mathbb{R}^n)$ *au moyen de la transformée de Fourier. En effet, si* $v \in L^2(\mathbb{R}^n)$, *sa transformée de fourier est donnée par :*

$$\hat{v}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-ix\xi) \; v(x)\, dx, \; \xi \in \mathbb{R}^n,$$

et nous avons :

$$H^s(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^n), \; \textit{tel que} \; \left(1 + |\xi|^2\right)^{s/2} \hat{v}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\},$$

muni de la norme :

$$\|v\|_{H^s(\Omega)} = \left\| \left(1 + |\xi|^2\right)^{s/2} \hat{v}(\xi) \right\|_{L^2(\Omega)},$$

qui est équivalente à la norme de $H^s(\mathbb{R}^n)$, *(voir P. A. Raviart et J. M. Thomas* [12] *page 28-33).*

1.3 Résultats de compacité et application trace

Théorème 1.3.1 *Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$ *de frontière* Γ *assez régulière ; alors l'injection :*

$$Id : H^1(\Omega) \to L^2(\Omega),$$

est compact, et on dit que $H^1(\Omega)$ *s'injecte de façon compacte dans* $L^2(\Omega)$.

Preuve. Voir H. Brezis [1], (Théorème IX.16, page 169) ■

Lemme 1.3.2 *(de Gronwall) : Soit* T *un réel positif,* C *une constante positive,* f *et* g *deux fonctions vérifiant :*

$$\begin{aligned} f &\in L^\infty(0,T), \; f(t) \geq 0 \; p.p.t \;, \\ g &\in L^1(0,T), \; g(t) \geq 0 \; p.p.t, \; et \\ f(t) &\leq \int_0^t g(s) f(s)\, ds + C \; p.p.t. \end{aligned}$$

Alors f *vérifie :*

$$f(t) \leq C \exp\left(\int_0^t g(s)\, ds \right).$$

Théorème 1.3.3 *Soit* F *un espace de Banach réflexif strictement convexe ainsi que son dual. Soit* J *l'application de dualité de* $F \to F'$ *relative à* Φ*. Pour* f *donné dans* F', *il* *existe u unique dans F tel que*

$$J(u) = f.$$

Théorème 1.3.4 *Soit s un réel quelconque et Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière Γ assez régulière ; alors nous avons le résultat suivant :$\forall \varepsilon > 0$, l'injection: $H^s(\Omega) \rightarrow H^{s-\varepsilon}(\Omega)$ est compacte.*

Preuve. Voir J. L. lions-Magenes [6]. ■

Dans la suite on se donne trois espaces de Banach : B_0, B et B_1, tels que :

1) $B_0 \subset B \subset B_1$ avec injections continues,

2) Les B_i, $i = 0, 1$, sont réflexifs.

Alors nous avons le résultat suivant :

Lemme 1.3.5 *L'espace des fonctions :*

$$(1.1) \quad W = \left\{ v \in L^{p_0}(0, T, B_0), \text{ tel que } v' = \frac{dv}{dt} \in L^{p_1}(0, T, B_1) \right\},$$

muni de la norme :

$$\|v\|_W = \|v\|_{L^{p_0}(0,T,B_0)} + \|v'\|_{L^{p_1}(0,T,B_1)},$$

où T est fini et $1 < p_i < \infty$, $i = 0, 1$, est un espace de Banach réflexif.

Preuve. Ce lemme est classique, pour sa démonstration nous renvoyons le lecteur au livre de lions- Magenes [6] . ■

Lemme 1.3.6 *Si, en plus des hypothèses du lemme 1.3.5 nous supposons que l'injection $B_0 \rightarrow B_1$ est compacte, alors pour tout $\eta > 0$, il existe une constante $C_\eta > 0$ dépendant seulement de η, telle que :*

$$(1.2) \quad \forall v \in B_0, \ \|v\|_B \leq \eta \|v\|_{B_0} + C_\eta \|v\|_{B_1}.$$

Comme conséquence, il existe une constante D_η telle que :

$$(1.3) \quad \forall v \in B_0, \ \|v\|_{L^{p_0}(0,T,B)} \leq \eta \|v\|_{L^{P_0}(0,T,B_0)} + D_\eta \|v\|_{L^{p_0}(0,T,B_1)}$$

Preuve. Nous faisons la démonstration par l'absurde. Alors nous pouvons construire une sous suite $(v_n) \in B_0$, telle que $\|v_n\|_B \rightarrow \infty$, avec :

$$(1.4) \quad \|v_n\|_B > \eta \|v_n\|_{B_0} + n \|v_n\|_{B_1}.$$

posons:

$$w_n = \frac{v_n}{\|v_n\|_{B_0}},$$

on a donc : $\|w_n\|_B > \eta + n\|w_n\|_{B_1}$, et comme l'injection $B_0 \to B$ est continues, on écrit :

$$\|w_n\|_B \leq C\|w_n\|_{B_0} = C < \infty.$$

Donc (1.4) entraîne :

$$(1.5) \quad \|w_n\|_{B_1} \to 0$$

mais $\|w_n\|_{B_0} = 1$ et comme l'injection : $B_0 \to B_1$ et compacte, on peut extraire de (w_n) une sous suite (w_μ) fortement convergente dans B et nécessairement d'aprés (1.5) tendant vers 0 dans B_1, car l'injection de B dans B_1 est continue. Donc $\|w_n\|_B \to 0$ ce qui contredit (1.4), d'où nous avons bien montré (1.2). ■

On a alors le résultat :

Théorème 1.3.7 *Sous les hypothèses du lemme 1.3.6 et si* $1 < p_0,\, p_1 < \infty$, *alors l'injection de* W *dans* $L^{p_0}(0, T, B)$ *est compacte.*

Preuve. Soit $(v_n)_n$ une suite bornée dans W :

$$\|v_n\|_W \leq C < \infty, \ \forall n.$$

Nous voulons montrer que $(v_n)_n$ possède une sous-suite qui converge fortement dans $L^{p_0}(0, T, B)$. Comme W est réflexif (d'aprés lemme 1.3.5), il existe une sous-suite $(v_\mu)_\mu$ qui converge faiblement dans W. Sans perdre de généralité, nous supposons que :

$$v_\mu \to 0 \text{ dans } W \text{ faiblement.}$$

D'autre part, le lemme 1.3.6, pour tout $\eta > 0$, il existe $D_\eta > 0$, telle que :

$$\begin{aligned} \|v_n\|_{L^{p_0}(0,T,B)} &\leq \eta\|v_n\|_{L^{p_0}(0,T,B_0)} + D_\eta\|v_n\|_{L^{p_1}(0,T,B_1)} . \\ &\leq \eta C + D_\eta\|v_n\|_{L^{p_1}(0,T,B_1)} \end{aligned}$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$ donné et choisissons η, telle que $\eta C \leq \frac{\varepsilon}{2}$, alors on aura :

$$\|v_n\|_{L^{p_0}(0,T,B)} \leq \frac{\varepsilon}{2} + d_n\|v_n\|_{L^{p_1}(0,T,B_1)},$$

tout revient donc à montrer que :

$$(1.6) \quad v_n \to 0 \text{ dans } L^{p_1}(0, T, B_1) \text{ fortement}$$

Comme W s'injecte continument dans $C^0([0,T], B_1)$ la sous suite (u_μ) est donc bornée dans $C^0([0,T], B_1)$, ce qui permet d'écrire :

$$\|v_\mu(t)\|_{B_1} \leq C < \infty,$$

de sorte que, d'aprés le théorème de lebesgue on aura (1.6) si l'on montre que :

$$v_n(s) \to 0 \text{ dans } B_1 \text{ fortement, } \forall s \in [0,T],$$

mais comme s ne joue aucun rôle spécial tout revient finalement à montrer que :

$$(1.7) \quad v_n(0) \to 0 \text{ dans } B_1 \text{ fortement}$$

Si l'on introduit w_n :

$$(1.8) \quad w_n(t) = v_n(\lambda t), \ \lambda > 0 \text{ fixé,}$$

on a

$$(1.9) \quad \begin{cases} v_n(0) = w_n(0), \\ \|w_n\|_{L^{p_0}(0,T,B_0)} \leq C_1 \lambda^{-1/p_0}, \\ \|w_n'\|_{L^{p_1}(0,T,B_1)} \leq C_2 \lambda^{1-\frac{1}{p_1}} \end{cases}$$

Si $\varphi \in C^1([0,T])$, $\varphi(0) = -1$, $\varphi(T) = 0$, on a :

$$w_n(0) = \int_0^T (\varphi w_n)' \, dt = \beta_n + \delta_n$$

où

$$\beta_n = \int_0^T \varphi w_n' dt, \ \delta_n = \int_0^T \varphi' w_n dt.$$

d'aprés (1.9), on en déduit :

$$(1.10) \quad \|v_n(0)\| \leq \|\beta_n\|_{B_1} + \|\delta_n\|_{B_1} \leq C_3 \lambda^{1-\frac{1}{p_1}} + \|\delta_n\|_{B_1}$$

Si $\varepsilon > 0$, on choisit λ de façon que $C_3 \lambda^{1-\frac{1}{p_1}} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et on aura (1.7) si l'on montre que :

$$(1.11) \quad \delta_n \to 0 \text{ dans } B_1 \text{ fortement,}$$

or $w_n \to 0$ dans $L^{p_0}(0,T,B_0)$ faible (λ fixé et on peut toujour le supposer ≤ 1), donc $\delta_n \to 0$ dans B_0 faiblement. Comme l'injection $B_0 \to B_1$ est suppopsé compacte on en déduit (1.7) et par conséquent le théorème est prouvé ■

Application trace sur $H^m(\Omega)$

Désignons par $\mathcal{D}\left(\overline{\Omega}\right)$ l'espace des restrictions des fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ à $\overline{\Omega}$. Nous pouvons alors parler de la trace d'une fonction de $\mathcal{D}\left(\overline{\Omega}\right)$ et nous définissons l'application :

$$\begin{array}{ccc} \gamma & : & \mathcal{D}\left(\overline{\Omega}\right) \rightarrow L^2(\Gamma), \\ \varphi & \mapsto & \gamma(\varphi) = \varphi_{|\Gamma} \end{array}$$

L'application γ est dite application trace. Il est bien connu qu'elle est linéaire est continue au sens de la norme de $H^1(\Omega)$, il est aussi connu que si Ω est régulier, alors $\mathcal{D}\left(\overline{\Omega}\right)$ est dense dans $H^1(\Omega)$.

Voir par exemple Raviart et Thomas [12].

Ceci nous permet d'énnoncer le résultat suivant :

Théorème 1.3.8 *On suppose que Ω est un ouvert borné de frontière Γ assez régulière. Alors l'application γ de :*

$$\mathcal{D}\left(\overline{\Omega}\right) \rightarrow L^2(\Gamma),$$

se prolonge par continuité en une application linièaire continue de :

$$\begin{array}{rcl} H^s(\Omega) & \rightarrow & L^2(\Gamma) \\ u & \mapsto & \gamma(u) \end{array}$$

Preuve. Voir lions-Magenes [6]

■

Nous aurons besion aussi dans la suite de quelques définitions et propriétés des opérateurs. Soit V un espace de Banach et V' son dual topologique.

1.4 Définitions

Définition 1.4.1 *On dit que l'opérateur A, définit de $\mathbf{V}$ dans $\mathbf{V}'$, est*

1) borné s'il existe $C > 0$ tel que :

$$\|A(u)\|_{\mathbf{V}'} \leq C \|u\|_{\mathbf{V}}, \ \forall u \in \mathbf{V};$$

2) coercive s'il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\begin{aligned} (A(u), u) &\geq \alpha \|u\|_{\mathbf{V}}^p, \ \forall u \in \mathbf{V}, \ \alpha > 0, \ 1 < p < \infty, \ \textit{ou bien} \\ \frac{(A(u), u)}{\|u\|_{\mathbf{V}}} &\to +\infty \ \textit{si} \ \|u\|_{\mathbf{V}} \to +\infty. \end{aligned}$$

3) monotone de $\mathbf{V}$ dans $\mathbf{V}'$ s'il vérifie :

$$\forall u, v \in \mathbf{V} : (A(u) - A(v), u - v)_{\mathbf{V}', \mathbf{V}} \geq 0.$$

4) hemi continue de $\mathbf{V}$ dans $\mathbf{V}'$ s'il vérifie la propriété suivante :

$$\forall u, v, w \in \mathbf{V} : \textit{la fonction } \lambda \mapsto (A(u + \lambda v), w)_{\mathbf{V}', \mathbf{V}} \textit{ est continue de } \mathbb{R} \textit{ dans } \mathbb{R}$$

5) pseudo monotone si :

a) A est borné,

b) lorsque $u_j \to u$ dans $\mathbf{V}$ faible et $\limsup_{j\to\infty} (A(u_j), u - v) \leq 0$, alors

$$\liminf_{j\to\infty} (A(u_j), u - v) \geq (A(u), u - v), \ \forall v \in \mathbf{V}.$$

Remarque 1.4.2 *La somme d'un opérateur pseudo-monotone A et d'un opérateur borné hémi continue monotone M est pseudo-monotone.*

Proposition 1.4.3 *On a les implications :*

(A borné, hémicontinue et monotone) $\Rightarrow$(A pseudo-monotone) $\Rightarrow$

(A a la propriété : $u_\mu \to u$ *dans* V *faible,* $A(u_\mu) \to \psi$ *dans* V' *faible et* $\limsup (A(u_\mu), u_\mu) \leq (\psi, u) \Rightarrow \psi = A(u)$

Les deux théorèmes suivants sont la base de la méthode de régularisation elliptique.

1.5 Théorèmes d'existence

Théorème 1.5.1 *Soit* $\mathbf{V}$ *un espace de Banach réflexif de norme strictement convexe, ainsi que celle de son dual* $\mathbf{V}'$*. Soit* L *un opérateur linéaire de* $D(L)$ *sous espace dense de* $\mathbf{V}$*, à valeurs dans* $\mathbf{V}'$*,* L *étant maximal monotone. Soit* A *un opérateur de* $\mathbf{V} \to \mathbf{V}'$*, pseudo-monotone, coercive, donc :*

$$\frac{(A(v), v)}{\|v\|} \to +\infty \text{ si } \|v\| \to +\infty. \tag{1.12}$$

Alors,

$$\forall f \in V', \ \exists u \in D(L) \ \text{ tel que } Lu + A(u) = f.$$

Preuve. (voir J. L. lions [5]). ■

Théorème 1.5.2 *Soit* $\mathbf{V}$ *un espace de Banach réflexif de norme strictement convexe, ainsi que celle de son dual. Soit* L *un opérateur linéaire de* $\mathbf{D}(L)$*, sous espace dense de* $\mathbf{V}$*, à valeurs dans* $\mathbf{V}'$*,* L *étant maximal monotone. Soit* A *un opérateur de* $\mathbf{D}(L)$ *(et non* $\mathbf{V}$ *tout entier)* $\to \mathbf{V}'$ *vérifiant les hypothèses suivantes :*

$$\begin{cases} \text{si } u_j \to u \text{ dans } \mathbf{V} \text{ faible,} \\ u_j \in D(L), \ u \in D(L), \ Lu_j \to Lu \text{ dans } \mathbf{V}' \text{ faible,} \\ \text{et } \limsup_{j\to\infty} (A(u_j), u_j - u) \leq 0 \text{ alors } \liminf_{j\to\infty} (A(u_j), u_j - v) \geq (A(u), u - v), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{il existe une fonction } \lambda \mapsto \Psi(\lambda) \text{ de } \lambda > 0 \to \mathbb{R}_+ \text{ bornée sur tout compact,} \\ \text{et il existe un nombre } \theta, \ 0 \leq \theta < 1 \text{ tels que :} \\ \|A(u)\|_* \leq \Psi(\|u\|) + \theta \|Lu\|_*, \ \forall u \in D(L). \end{cases}$$

On suppose que (1.12) *à lieu. Alors,*

$$\forall f \in V', \exists u \in D(L) \ \text{ solution de } Lu + A(u) = f$$

Preuve. (voir J. L. lions [5]). ■

Chapitre 2

Etude d'un cas particulier de (p_0)

2.1 Position du problème

On désigne par Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et Γ sa frontière (assez régulière). On désigne par Q, pour T fini, l'ouvert $\Omega \times]0, T[$, et par Σ la frontière latérale de Q, soit $\Sigma = \Gamma \times]0, T[$, et lorsque $F(u) \equiv |u|^\rho u$; $\rho > 0$ est donné, on résout le problème :

$$(p_1) \begin{cases} (2.1) & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + |u|^\rho u = f, \text{ dans } Q, \\ (2.2) & u = 0, \text{ sur } \Sigma, \\ (2.3) & u(x,0) = u_0(x), \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), \ x \in \Omega. \end{cases}$$

2.2 Etude l'existence et l'unicité

2.2.1 Existence

Théorème 2.2.1 *On suppose que Ω est un ouvert borné. On donne f, u_0 et u_1 avec*

$$\begin{array}{lc} (2.4) & f \in L^2(Q), \\ (2.5) & u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega), \ p = \rho + 2, \\ (2.6) & u_1 \in L^2(\Omega). \end{array}$$

Il existe alors une fonction u vérifiant

$$
\begin{array}{ll}
(2.7) & u \in L^{\infty}\left(0,T;H_0^1\left(\Omega\right)\cap L^p\left(\Omega\right)\right), \\
(2.8) & \frac{\partial u}{\partial t} \in L^{\infty}\left(0,T;L^2\left(\Omega\right)\right), \\
(2.9) & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + \left|u\right|^{\rho} u = f \ \textit{dans } Q, \\
(2.10) & u\left(0\right) = u_0(x),\ x \in \Omega, \\
(2.11) & \frac{\partial u}{\partial t}\left(0\right) = u_1(x),\ x \in \Omega.
\end{array}
$$

Preuve. Le plan de la démonstration est le suivant :
(i) Construire des solutions approchées par la méthode de Faedo-Galerkin ;
(ii) Etablire, sur ces solutions approchées, des estimations a priori ;
(iii) Passer à la limite, grâce à la compacité.
Etape (i), solution approchées
Pour simplifier l'écriture, on posera

$$v' = \frac{\partial v}{\partial t},\ v'' = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}.$$

D'après le lemme 1.2.3, on introduit une suite $w_1, ..., w_m, ...$ des fonctions ayant les propriétés suivantes :

$$
(2.12) \begin{cases}
w_i \in H_0^1\left(\Omega\right) \cap L^p\left(\Omega\right)\ \forall i; \\
\forall m,\ w_1, ...,\ w_m \text{ sont linéairement indépendants :} \\
\text{les combinaisons linéaires finies des } w_i \text{ sont denses dans} \\
H_0^1\left(\Omega\right) \cap L^p\left(\Omega\right).
\end{cases}
$$

Donc il existe une suite, telle que $u_m = u_m\left(t\right)$
(solution approchée) sous la forme :

$$(2.13) \quad u_m\left(t\right) = \sum_{i=1}^{m} g_{im} w_i.$$

On détermine les g_{im}

$$u_m''\left(t\right) - \Delta u_m + \left|u_m\right|^{\rho} u_m = f\left(t\right) \Rightarrow$$

$$(2.14) \quad \left(u_m''\left(t\right), w_j\right) + a\left(u_m, w_j\right) + \left(\left|u_m\left(t\right)\right|^{\rho} u_m\left(t\right), w_j\right) = \left(f\left(t\right), w_j\right) 1 \leq j \leq m.$$

Tel que a est une forme bilinéaire définit comme suit :

$$(2.15) \quad a(u,v) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx,$$

$\|v\| = \sqrt{a(v,v)}$.

Le système (2.14) est à compléter par les conditions initiales :

$$\begin{aligned} (2.16) \quad u_m(0) &= u_{0m}, \ u_{0m} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{im} w_i \underset{m\to\infty}{\to} u_0 \text{ dans } H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega), \\ (2.17) \quad u_m'(0) &= u_{1m}, \ u_{1m} = \sum_{i=1}^{m} \beta_{im} w_i \underset{m\to\infty}{\to} u_1 \text{ dans } L^2(\Omega). \end{aligned}$$

Grâce à la linéaire indépendance de $w_1, ..., w_m$, donc $\det(w_i, w_j) \neq 0$ c'est a dire que le système composé de (2.14), (2.16) et (2.17) admet une solution pour tout t de $[0, t_m]$.

Etape (ii), estimations a priori

Les estimations a priori qui suivent montreront que $t_m = T$.

On multiplie l'équation (2.14) d'indice j par $g_{jm}'(t)$ on a :

$$(u_m''(t), u_m'(t)) + a(u_m(t), u_m'(t)) + (|u_m(t)|^\rho u_m(t), u_m'(t)) = (f(t), u_m'(t)) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u_m'(t), u_m'(t)) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt} a(u_m(t), u_m(t)) + \frac{1}{\rho+2}\frac{d}{dt}(|u_m(t)|^\rho u_m(t), u_m(t)) = (f(t), u_m'(t)) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(|u_m'(t)|^2 + \|u_m(t)\|^2\right) + \frac{1}{\rho+2}\frac{d}{dt}(|u_m(t)|^\rho u_m(t), u_m(t)) = (f(t), u_m'(t)).$$

Mais, $|u_m(t)|^\rho u_m(t) \in L^{P'}(\Omega)$ et $p = \rho + 2$, alors d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz on a :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(|u_m'(t)|^2 + \|u_m(t)\|^2\right) + \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\left(\int_{\Omega} |u_m(x,t)|^p dx\right) \leq |f(t)| |u_m'(t)|.$$

Donc on intégrant entre 0, t on en déduit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(|u_m'(t)|^2 + \|u_m(t)\|^2\right) + \frac{1}{p}\|u_m(x,t)\|_{L^p(\Omega)}^p \quad &\leq \quad \frac{1}{2}|u_{1m}(x)|^2 + \frac{1}{2}\|u_{0m}(x)\|^2 + \\ & \frac{1}{p}\|u_m(0)\|_{L^p(\Omega)}^p + \int_0^t |f(\sigma)| |u_m'(\sigma)| d\sigma. \end{aligned}$$

D'après (2.16) , (2.17) et l'inégalité :

$$ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2.$$

On a

$$|f(\sigma)| \, |u'_m(\sigma)| \leq \frac{1}{2} |f(\sigma)|^2 + \frac{1}{2} |u'_m(\sigma)|^2 .$$

Alors

$$(2.18) \quad \frac{1}{2}\left(|u'_m(t)|^2 + \|u_m(t)\|^2\right) + \frac{1}{p} \|u_m(x,t)\|^p_{L^p(\Omega)} \leq c + \frac{1}{2}\int_0^t |f(\sigma)|^2 \, d\sigma + \frac{1}{2}\int_0^t |u'_m(\sigma)|^2 \, d\sigma.$$

Mais

$$f \in L^2(Q) \Rightarrow \int_0^t |f(\sigma)|^2 \, d\sigma \leq \text{constant}.$$

On déduit donc, en particulier de (2.18) que :

$$(2.19) \quad |u'_m(t)|^2 \leq c' + \int_0^t |u'_m(\sigma)|^2 \, d\sigma.$$

Et d'après l'inégalité de Gronwall on a :

$$(2.20) \quad |u'_m(t)| \leq \text{constant}.$$

Alors

$$(2.21) \quad \|u_m(t)\| + \|u_m(x)\|_{L^p(\Omega)} \leq \text{constant}.$$

D'après (2.20) , (2.21) et lorsque $m \to \infty$ on a, u_m dans un ensemble borné de $L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega) \cap L^p(\Omega))$ et u'_m dans un ensemble borné de $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$.

Etape (iii), passge à la limite

En étape (ii), on a u_m est borné dans $L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega) \cap L^p(\Omega))$ alors est borné dans $L^2(0,T;H^1_0(\Omega))$. Donc il existe une sous suite de u_m, u_μ telle que,

comme $L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega) \cap L^p(\Omega))$ $\{$resp.de $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\}$

est le dual de $L^1\left(0,T;H^{-1}(\Omega)+L^{p'}(\Omega)\right)$ {resp.de $L^1(0,T;L^2(\Omega))$}, donc d'après le corollaire 1.1.4, on a :

$$\begin{aligned} \forall g \ \in \ & L^1\left(0,T;H^{-1}(\Omega)+L^{p'}(\Omega)\right) : \\ & \int_0^T (u_\mu(t), g(t))\, dt \underset{\mu\to\infty}{\to} \int_0^T (u(t), g(t))\, dt. \end{aligned}$$

Qui implique

$$(2.22) \quad u_\mu \to u \text{ faible dans } L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\cap L^p(\Omega)\right) \text{ et dans } L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right),$$

Donc

$$(2.23) \begin{cases} \exists u'_\mu \to u' \text{ dans } \mathcal{D}'(0,T;H_0^1(\Omega)\cap L^p(\Omega)) \Rightarrow u'_\mu \to u' \text{ faible dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{et dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \end{cases}$$

Alors en particulier u_m borné dans $H^1(Q)$, mais on sait que l'injection suivante est compact :

$$(2.24) \quad H^1(Q) \hookrightarrow L^2(Q).$$

Donc, on peut supposer que la suite u_μ extraite de u_m qui vérifie (2.22) (2.23), donc u, u' existe et dans $L^2(Q)$ alors :

$$(2.25) \begin{cases} u_\mu \to u \text{ dans } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)\cap L^p(\Omega)) \text{ fort (p.p)}, \\ u'_\mu \to u' \text{ dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \text{ faible (p.p)}. \end{cases}$$

Etudier la convergence de $|u_m|^\rho u_m$:
$|u_m|^\rho u_m$ étant dans un borné de $L^\infty\left(0,T;L^{p'}(\Omega)\right)$, donc on pose :

$$(2.26) \quad |u_\mu|^\rho u_\mu \to w \text{ dans } L^\infty\left(0,T;L^{p'}(\Omega)\right),$$

Montrant que

$$(2.27) \quad w = |u|^\rho u.$$

Pour cela on donne le lemme suivant :

Lemme (cf.[5]) *Soit O un ouvert borné de $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t$, g_μ et g des fonctions de $L^q(O)$, $1<q<\infty$, telles que*

$$\|g_\mu\|_{L^q(O)} \le c, \ g_\mu \to g \text{ p.p. dans } O$$

Alors

$$g_\mu \to g \text{ dans } L^q \text{ faible.}$$

Quand pose, $O = Q$ et $g_\mu = |u_\mu|^\rho u_\mu$, d'après (2.25)

$$u_\mu \to u \text{ dans } L^2(Q) \text{ (p.p).}$$

Donc

$$g_\mu = |u_\mu|^\rho u_\mu \rightharpoonup |u|^\rho u = g \text{ (p.p) dans } L^{p'}(\Omega).$$

Telle que $p' = \frac{\rho+2}{\rho+1} = q$ (car $p = \rho + 2$), et d'aprés (2.26)

$$|u_\mu|^\rho u_\mu \rightharpoonup w \text{ dans } L^{p'}(\Omega).$$

Mais la limite est unique donc

$$g = |u|^\rho u = w.$$

On montre que cette solution vérifié l'équation des solutions approchées, donc quand pose $m = \mu$ et j fixe et qui $\mu > j$ alors :

$$(2.28) \quad \left(u''_\mu(t), w_j\right) + a(u_\mu, w_j) + \left(|u_\mu(t)|^\rho u_\mu(t), w_j\right) = (f(t), w_j)$$

D'après (2.22)

$$a(u_\mu, w_j) \rightharpoonup a(u, w_j) \text{ dans } L^\infty(0,T).$$

$$\begin{aligned} \left(u'_\mu, w_j\right) &\rightharpoonup (u', w_j) \text{ dans } L^\infty(0,T) \Rightarrow \\ \frac{d}{dt}\left(u'_\mu, w_j\right) &= \left(u''_\mu, w_j\right) \to (u'', w_j) \text{ dans } \mathcal{D}'(0,T), \end{aligned}$$

Et d'après (2.26), (2.27)

$$\left(|u_\mu|^\rho u_\mu, w_j\right) \rightharpoonup \left(|u|^\rho u, w_j\right) \text{ dans } L^\infty(0,T).$$

On déduit donc de (2.28) que

$$\frac{d^2}{dt^2}(u, w_j) + a(u, w_j) + \left(|u|^\rho u, w_j\right) = (f, w_j).$$

D'après la densité de la base $\{w_j\}$ dans l'espace séparable $H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$, on a :

$$\frac{d^2}{dt^2}(u, v) + a(u, v) + \left(|u|^\rho u, v\right) = (f, v), \ \forall v \in H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega).$$

Alors la solution u satisfait (2.7), (2.8) et (2.9).

Reste à montrer que la solution u vérifié les conditions initiales (2.10), (2.11), $u(0) = u_0$, $u'(0) = u_1$.

D'après (2.22), (2.23) et le lemme 1.2.2 on a :

$$(2.22) \quad u_\mu \to u \text{ dans } L^\infty\left(0,T; H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)\right),$$

$$(2.23) \quad \frac{du_\mu}{dt} = u'_\mu \rightharpoonup u' \text{ dans } L^\infty\left(0,T; L^2(\Omega)\right).$$

Donc u_μ est continue sur $[0,T]$ alors continue en 0 donc :

$$u_{0\mu} = u_\mu(0) \to u(0) = u_0 \text{ dans } H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega).$$

D'ou (2.10). Et encore

$$\begin{array}{rcl} \left(u''_\mu, w_j\right) & \rightharpoonup & (u'', w_j) \text{ dans } L^\infty(0,T), \\ \left(u'_\mu, w_j\right) & \rightharpoonup & (u', w_j) \text{ dans } L^\infty(0,T). \end{array}$$

D'après le lemme 1.2.2

$$\left(u'_\mu(0), w_j\right) \rightharpoonup (u', w_j)\,|_{t=0} = (u'(0), w_j),$$

et d'après (2.17)

$$\left(u'_\mu(0), w_j\right) \rightharpoonup (u_1, w_j).$$

On a

$$(u'(0), w_j) = (u_1, w_j), \ \forall j.$$

Alors

$$u'(0) = u_1.$$

D'où (2.11). ∎

2.2.2 Unicité

Théorème 2.2.2 *On se place dans les hypothèses du théorème 2.2.1 avec :*

$$(2.29) \quad \rho \leq \frac{2}{n-2}.$$

(ρ fini quelconque si $n = 2$).

Alors la solution u obtenue au théorème 2.2.1 est unique.

Preuve. $n \geq 3$. Comme dans J. Lions, soient u et v deux solutions, au sens du théorème 2.2.1, alors $w = u - v$ vérifie :

$$\begin{array}{lc}
(2.30) & w'' - \Delta w = |v|^\rho v - |u|^\rho u, \\
(2.31) & w(0) = 0, \; w'(0) = 0, \\
(2.32) & w \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)), \\
(2.33) & w' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)).
\end{array}$$

Donc (2.30) implique

$$(2.34) \quad (w'', v) + a(w, v) = (|v|^\rho v - |u|^\rho u, v), \; \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Pour remplacer v par w' il faut que $w' \in H_0^1(\Omega)$ car $v \in H_0^1(\Omega)$, mais on a
$w' \in L^2(\Omega)$ donc il faut introduire une fonction auxiliaire : $\forall s \in]0, T[$, $\Psi :]0, T[\to \mathbb{R}$

$$t \mapsto \Psi(t) = \begin{cases} -\int_t^s w(\sigma)\, d\sigma, & t \leq s \\ 0, & t > s \end{cases}$$

$$\Psi'(t) = w(t); \; w_1(t) = \int_0^t w(\sigma)\, d\sigma \text{ si } \forall t \leq s.$$

Donc

$$\Psi(t) = -\int_t^s w(\sigma)\, d\sigma = w_1(t) - w_1(s) \Rightarrow \Psi(0) = -w_1(s)$$

Alors (2.30) donne :

$$\begin{aligned}
(w'', \Psi(t)) + a(w, \Psi(t)) &= (|v|^\rho v - |u|^\rho u, \Psi(t)) \Rightarrow \\
-\int_0^s (w', \Psi'(t))\, dt + \int_0^s a(w, \Psi(t))\, dt &= \int_0^s (|v|^\rho v - |u|^\rho u, \Psi(t))\, dt \Rightarrow \\
-\int_0^s (w', w)\, dt + \int_0^s \frac{d}{dt} a(w_1(t), w_1(t) - w_1(s))\, dt &= \int_0^s (|v|^\rho v - |u|^\rho u, \Psi(t))\, dt \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\left|w(s)\right|^2+\frac{1}{2}\left\|w_1(s)\right\|^2-a\left(w_1(s),w_1(s)\right) &= \int_0^s \left(\left|v\right|^\rho v-\left|u\right|^\rho u,\Psi(t)\right)dt \Rightarrow \\
-\frac{1}{2}\left|w(s)\right|^2+\frac{1}{2}\left\|w_1(s)\right\|^2-\left\|w_1(s)\right\|^2 &= \int_0^s \left(\left|v\right|^\rho v-\left|u\right|^\rho u,\Psi(t)\right)dt \Rightarrow
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\left|w(s)\right|^2-\frac{1}{2}\left\|w_1(s)\right\|^2 &= \int_0^s \left(\left|v\right|^\rho v-\left|u\right|^\rho u,\Psi(t)\right)dt \Rightarrow \\
\frac{1}{2}\left|w(s)\right|^2+\frac{1}{2}\left\|w_1(s)\right\|^2 &= -\int_0^s \left(\left|v\right|^\rho v-\left|u\right|^\rho u,\Psi(t)\right)dt
\end{aligned}
$$

On a

$$
\begin{aligned}
\left|-\left(\left|v\right|^\rho v-\left|u\right|^\rho u,\Psi(t)\right)\right| &\leq c\int_\Omega \sup\left(\left|u\right|^\rho,\left|v\right|^\rho\right)\left|u-v\right|\left|\Psi(t)\right|dx= \\
& c\int_\Omega \sup\left(\left|u\right|^\rho,\left|v\right|^\rho\right)\left|w(t)\right|\left|\Psi(t)\right|dx.
\end{aligned}
$$

D'après l'inégalité de Hôlder on a :

$$
c\int_\Omega \sup\left(\left|u\right|^\rho,\left|v\right|^\rho\right)\left|w(t)\right|\left|\Psi(t)\right|dx=c\int_\Omega \sup\left(\left|u\right|^\rho,\left|v\right|^\rho\right)\left|w(t)\right|\left|w_1(t)-w_1(s)\right|dx
$$

$$
\leq c\left[\left(\int_\Omega \left(\left|u\right|^\rho\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}+\left(\int_\Omega \left(\left|v\right|^\rho\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}\right]\left[\left(\int_\Omega \left|w_1(t)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_\Omega \left|w_1(s)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right]\times
$$

$$
\begin{aligned}
\left[\int_\Omega \left|w(t)\right|^2\right]^{\frac{1}{2}} &\leq c\left[\left\|\left|u\right|^\rho\right\|_{L^n(\Omega)}+\left\|\left|v\right|^\rho\right\|_{L^n(\Omega)}\right]\left[\left\|w_1(t)\right\|_{L^q(\Omega)}+\left\|w_1(s)\right\|_{L^q(\Omega)}\right]\times \\
& \left\|w(t)\right\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Tel que

$$
\frac{1}{n}+\frac{1}{q}+\frac{1}{2}=1,
$$

alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{q} &= \frac{n-2}{2n} \Rightarrow \\ q &= \frac{2n}{n-2}. \end{aligned}$$

Mais en théorème 2.2.2

$$\begin{aligned} \rho &\leq \frac{2}{n-2} \Rightarrow \rho n \leq \frac{2n}{n-2} = q \\ &\Rightarrow \rho n \leq q. \end{aligned}$$

On a

$$(2.35) \quad H_0^1(\Omega) \subset L^q(\Omega), \ \frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \ n \geq 3.$$

Alors

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega \left(|u|^\rho u - |v|^\rho v \right) \Psi(t) \, dx \right| &\leq c \left(\|u(t)\|^\rho + \|v(t)\|^\rho \right) \times \\ & \left(\|w_1(t)\|_{L^q(\Omega)} + \|w_1(s)\|_{L^q(\Omega)} \right) \|w(t)\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Et comme u, $v \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$ (car $H_0^1(\Omega) \subset L^q(\Omega)$), on a :

$$\left| \int_\Omega \left(|u|^\rho u - |v|^\rho v \right) \Psi(t) \, dx \right| \leq c \, |w(t)| \left(\|w_1(t)\| + \|w_1(s)\| \right).$$

Donc

$$|w(s)|^2 + \|w_1(s)\|^2 \leq c \int_0^s \left(|w(t)|^2 + \|w_1(t)\|^2 \right) dt.$$

D'après l'inégalité de Gronwall on a :

$$\begin{aligned} |w(s)|^2 + \|w_1(s)\|^2 &= 0 \Rightarrow \\ \begin{cases} w(s) = 0 \\ w_1(s) = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} u = v, \\ u' = v'. \end{cases} \end{aligned}$$

Alors on a l'unicité. ■

2.3 Etude la régularité

Dans le cas d'existence de la solution on fait l'étudie dans un espace plus large soit $H^m(\Omega)$. On a le théorème suivant :

Théorème 2.3.1 *On se place dans les conditions du théorème 2.2.1 avec en outre :*

$$\begin{array}{lc} (2.36) & \frac{\partial f}{\partial t} \in L^2(Q), \\ (2.37) & u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \\ (2.38) & u_1 \in H_0^1(\Omega), \\ (2.39) & \rho \leq \frac{2}{n-2}. \end{array}$$

ρ fini quelconque si $n = 2$. Il existe alors une solution et une seule du système (2.9), (2.10) *et* (2.11) *vérifiant :*

$$\begin{array}{lc} (2.40) & u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)), \\ (2.41) & u' \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \\ (2.42) & u'' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \end{array}$$

Preuve. Existence

u_m solutions approchées du problème (2.14), (2.16) et (2.17) telle que w_j forme une base de l'espace $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. (2.16) implique :

$$(2.43) \quad u_{0m} \to u_0 \text{ dans } H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega),$$

(2.17) implique :

$$(2.44) \quad u_{1m} \to u_1 \text{dans } H_0^1(\Omega),$$

$$(2.14) \quad (u_m''(t), w_j) + a(u_m(t), w_j) + (|u_m(t)|^\rho u_m(t), w_j) = (f(t), w_j), \ 1 \leq j \leq m.$$

Avec

$$(2.15) \quad a(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx.$$

Il y a deux étapes pour la démonstration de l'existence.

Etape (i)

On montre l'existence d'une solution avec (2.41), (2.42) et les conditions initiales.

$$(2.14) \Rightarrow (u_m''(t), w_j) = (f(t) + \Delta u_m(t) - |u_m(t)|^\rho u_m(t), w_j),$$

en $t=0$, on a

$$\left(u''_m(0), w_j\right) = \left(f(0) + \Delta u_m(0) - |u_m(0)|^\rho u_m(0), w_j\right) \Rightarrow$$

$$(2.45) \quad \left(u''_m(0), w_j\right) = \left(f(0) + \Delta u_{0m} - |u_{0m}|^\rho u_{0m}, w_j\right) \ \ 1 \le j \le m.$$

On a, $\frac{\partial f}{\partial t} \in L^2(Q)$ et $f \in L^2(Q)$ donc d'après le lemme 1.2.2, $f(0) \in L^2(\Omega)$.
D'après (2.43)

$$|\Delta u_{0m}| \le \text{constante}.$$

Et

$$|u_{0m}|^\rho u_{0m} \text{ borné dans } L^2(\Omega).$$

On déduit donc de (2.45), en multipliant par $g''_{jm}(0)$ et sommant en j :

$$\begin{aligned} \left(u''_m(0), u''_m(0)\right) &= \left(f(0) + \Delta u_{0m} - |u_{0m}|^\rho u_{0m}, u''_m(0)\right) \Rightarrow \\ |u''_m(0)|^2 &\le \left(|f(0)| + |\Delta u_{0m}| + \left||u_{0m}|^\rho u_{0m}\right|\right) |u''_m(0)|. \end{aligned}$$

Alors

$$(2.46) \quad |u''_m(0)| \le \text{constante}.$$

C'est à dire $u''_m(0)$ existe et est bien définit. Dérivant (2.14) en t, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(u''_m(t), w_j\right) + \frac{d}{dt} a\left(u_m(t), w_j\right) + \frac{d}{dt}\left(|u_m(t)|^\rho u_m(t), w_j\right) &= \frac{d}{dt}\left(f(t), w_j\right) \Rightarrow \\ (2.47) \quad \left(u_m^{(3)}(t), w_j\right) + a\left(u'_m, w_j\right) + (\rho+1)\left(|u_m(t)|^\rho u'_m(t), w_j\right) &= \left(f'(t), w_j\right). \end{aligned}$$

On multiplie (2.47) par $g''_{jm}(t)$ et on somme en j, il vient :

$$\left(u_m^{(3)}(t), u''_m(t)\right) + a\left(u'_m(t), u''_m(t)\right) + (\rho+1)\left(|u_m(t)|^\rho u'_m(t), u''_m(t)\right) = \left(f'(t), u''_m(t)\right) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u''_m(t)|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u'_m(t)\|^2 + (\rho+1)\left(|u_m(t)|^\rho u'_m(t), u''_m(t)\right) = \left(f'(t), u''_m(t)\right) \Rightarrow$$

$$(2.48) \quad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(|u''_m(t)|^2 + \|u'_m(t)\|^2\right) = \left(f'(t), u''_m(t)\right) - (\rho+1)\left(|u_m(t)|^\rho u'_m(t), u''_m(t)\right).$$

D'après l'inégalité de Hôlder on a :

$$(2.49) \quad \left|\left(|u_m(t)|^\rho u'_m(t), u''_m(t)\right)\right| \le \left(\int_\Omega \left||u_m(t)|^\rho\right|^n dx\right)^{\frac{1}{n}} \left(\int_\Omega |u'_m(t)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \times$$

$$\left(\int_{\Omega} \left|u''_m(t)\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left\| |u_m(t)|^{\rho} \right\|_{L^n(\Omega)} \left\| u'_m(t) \right\|_{L^q(\Omega)} \left\| u''_m(t) \right\|_{L^2(\Omega)}.$$

Tel que

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{q}+\frac{1}{2}=1$$

alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{q} &= \frac{n-2}{2n} \Rightarrow \\ q &= \frac{2n}{n-2}. \end{aligned}$$

Donc on a

$$\left\| |u_m(t)|^{\rho} \right\|_{L^n(\Omega)} \leq \|u_m(t)\|^{\rho} \leq \text{constante},$$

et d'après

$$(2.21) \quad \|u_m(t)\| + \|u_m(t)\|_{L^p(\Omega)} \leq \text{constante},$$

on sorte que

$$(2.50) \quad \left|\left(|u_m(t)|^{\rho} u'_m(t), u''_m(t)\right)\right| \leq c \left\|u'_m(t)\right\| \left|u''_m(t)\right|,$$

et (2.48) donne

$$\begin{aligned} (2.51) \quad \int_0^t \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left|u''_m(t)\right|^2 + \left\|u'_m(t)\right\|^2\right) &\leq \int_0^t \left|f'(\sigma)\right| \left|u''_m(\sigma)\right| d\sigma + \\ & c\int_0^t \left\|u'_m(\sigma)\right\| \left|u''_m(\sigma)\right| d\sigma, \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\left|u''_m(t)\right|^2+\frac{1}{2}\left\|u'_m(t)\right\|^2-\frac{1}{2}\left|u''_m(0)\right|^2-\frac{1}{2}\left\|u'_m(0)\right\|^2\leq\frac{1}{2}\int_0^t\left|f'(\sigma)\right|^2d\sigma+$$

$$\frac{1}{2}\int_0^t\left|u''_m(\sigma)\right|^2d\sigma+\frac{c}{2}\int_0^t\left\|u'_m(\sigma)\right\|^2d\sigma+\frac{c}{2}\int_0^t\left|u''_m(\sigma)\right|^2d\sigma$$

$$\Rightarrow \quad \left|u''_m(t)\right|^2+\left\|u'_m(t)\right\|^2\leq\left|u''_m(0)\right|^2+\left\|u'_m(0)\right\|^2+\int_0^t\left|f'(\sigma)\right|^2d\sigma+$$

$$c\left(\int_0^t\left(\left\|u'_m(\sigma)\right\|^2+\left|u''_m(\sigma)\right|^2\right)d\sigma\right).$$

Mais on a

$$f'\in L^2(Q),\ \ \left|u''_m(0)\right|^2\leq c \text{ et } \left\|u'_m(0)\right\|^2\leq c.$$

Donc

$$\left|u''_m(t)\right|^2+\left\|u'_m(t)\right\|^2\leq c+c\int_0^t\left(\left\|u'_m(\sigma)\right\|^2+\left|u''_m(\sigma)\right|^2\right)d\sigma.$$

D'après le lemme de Gronwall on a :

$$\left|u''_m(t)\right|^2+\left\|u'_m(t)\right\|^2\leq c\exp cT,\ \text{ pour tout } t.$$

Donc

$$\begin{aligned}\left|u''_m(t)\right| &\leq \text{ constante},\\ \left\|u'_m(t)\right\| &\leq \text{ constante}.\end{aligned}$$

Alors

$$(2.52)\begin{cases} u'_m \text{ borné dans } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)),\\ u''_m \text{ borné dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).\end{cases}$$

Donc il existe une sous suite de u_m, notée u_μ comme dans la démonstration du théorème 2.2.1 on en déduit que :

$$\begin{aligned}u'_\mu &\to u' \text{ dans } L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right) \text{ fort (p.p)},\\ u''_\mu &\rightharpoonup u'' \text{ dans } L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right) \text{ faible}.\end{aligned}$$

Alors u vérifie (2.41) et (2.42) à savoir que :

$$(2.53)\quad u\in L^\infty\left(0,T;H^2(\Omega)\right).$$

Etape (ii), démonstration de (2.53)

On déduit de (2.9) que :

$$(2.54) \quad \Delta u = u'' + |u|^{\rho} u - f.$$

puisque $u \in L^{\infty}(0, T; H_0^1(\Omega))$, donc $|u|^{\rho} u \in L^{\infty}(0, T; L^2(\Omega))$, comme $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ donc on déduit de (2.54) que :

$$(2.55) \quad \Delta u \in L^{\infty}\left(0, T; L^2(\Omega)\right).$$

On pose

$$\Delta u = h,$$

tel que

$$(2.56) \quad \Delta \in \pounds\left(H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)\right).$$

Et soit G son inverse

$$G : H^{-1}(\Omega) \to H_0^1(\Omega).$$

Alors

$$(2.57) \quad u(t) = Gh(t) \text{ p.p.}$$

Car, $u \in L^{\infty}(0, T; H_0^1(\Omega))$. D'après les théorèmes de régularité des solutions des équations linéaires elliptiques on a :

$$(2.58) \quad G \in \pounds\left(L^2(\Omega), H^2(\Omega)\right).$$

Alors d'après (2.57) et (2.58) on a :

$$u(t) = Gh(t) : L^2(\Omega) \to H^2(\Omega).$$

Donc

$$u(t) \in H^2(\Omega),$$

C'est à dire

$$u \in L^{\infty}\left(0, T; H^2(\Omega)\right).$$

En conclusion on a une solution u vérifiant (2.40), (2.41) et (2.42).

Unicité

Comme dans la démonstration du théorème 2.2.2. On arrive à

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left|w'(t)\right|^2+\left\|w(t)\right\|^2\right) &\leq c\left(\left\|\left|u(t)\right|^\rho\right\|_{L^n(\Omega)}+\left\|\left|v(t)\right|^\rho\right\|_{L^n(\Omega)}\right)\times\\ &\left\|w(t)\right\|_{L^q(\Omega)}\left|w'(t)\right|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

et comme

$$\left\|\left|u(t)\right|^\rho\right\|_{L^n(\Omega)}+\left\|\left|v(t)\right|^\rho\right\|_{L^n(\Omega)}\leq c\ \ (\text{car } \rho n\leq q),$$

on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left|w'(t)\right|^2+\left\|w(t)\right\|^2\right)\leq c\left\|w(t)\right\|\left|w'(t)\right|$$

d'où l'unicité suit. ■

2.4 Application à d'autre cas

2.4.1 Position du problème

On étudie un cas particulier de (p_1), soit $\rho = 2$, sous des hypothèses différentes sur f. Le problème (p_2) est le suivant :

$$(p_2)\begin{cases}(2.2.1) & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\Delta u+u^3=f,\ \text{dans } Q,\\ (2.2.2) & u=0,\ \text{sur } \Sigma,\\ (2.2.3) & u(x,0)=u_0(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=u_1(x),\ x\in\Omega.\end{cases}$$

En choisissant convenablement les donnés, nous allons étudier, par les mêmes techniques,

- l'existence de la solution pour n quelconque,
- l'unicité et la régularité pour $n = 3$.

2.4.2 Etude l'existence et l'unicité

Existence

Théorème 2.4.1 *Soient f, u_0 et u_1 avec :*

$$\begin{aligned}(2.2.4)&\quad f\in L^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right),\\ (2.2.5)&\quad u_0\in H_0^1(\Omega)\cap L^4(\Omega),\\ (2.2.6)&\quad u_1\in L^2(\Omega).\end{aligned}$$

Alors, il existe une solution u vérifiant :

$$
\begin{array}{ll}
(2.2.7) & u \in L^{\infty}\left(0,T;H_0^1(\Omega)\cap L^4(\Omega)\right), \\
(2.2.8) & \frac{\partial u}{\partial t} \in L^{\infty}\left(0,T;L^2(\Omega)\right).
\end{array}
$$

Preuve. On suivra le même plan que celui du théorème 2.2.1.

Etape (i), solutions approchées

Pour simplifier l'écriture, on posera :

$$v' = \frac{\partial v}{\partial t},\ v'' = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}.$$

D'après le lemme 1.2.3 on introduit une base vérifiant les propriétés (2.12). Donc il existe une suite telle que $u_n = u_n(t)$ sous forme :

$$u_n(t) = \sum_{i=1}^{n} g_i(t)\, w_i,$$

telle que

$$(2.2.9) \quad \left(u_n'' - \Delta u_n + u_n^3 - f, w_i\right) = 0,\ 1 \leq i \leq n.$$

Ce système est à compléter par les conditions initiales :

$$(2.2.10) \quad u_n(0) = u_{0n} \to u_0 \text{ dans } H_0^1(\Omega)\cap L^4(\Omega),$$

$$(2.2.11) \quad u_{1n} \to u_1 \text{dans } L^2(\Omega).$$

Comme $\{w_i\}_{i\in N}$ est une base, alors $(w_i, w_j) \neq 0$ c'est a dire que le système $(2.2.9)$, $(2.2.10)$ et $(2.2.11)$ admet une solution u_n locale sur l'intervalle $[0, t_n]$.

Etape (ii), estimations a priori

Les estimations a priori montreront que $t_m = T$. On multiplie l'équation (2.2.9) à l'indice i par $g'_{in}(t)$ on aura :

$$
\begin{aligned}
\left(u_n'' - \Delta u_n + u_n^3 - f, w_i\right) &= 0 \Rightarrow \\
\left(u_n'' - \Delta u_n + u_n^3 - f, u_n'\right) &= 0 \Rightarrow \\
(u_n'', u_n') + (-\Delta u_n, u_n') + \left(u_n^3, u_n'\right) - (f, u_n') &= 0 \Rightarrow \\
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u_n', u_n') + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(-\Delta u_n, u_n) + \frac{1}{4}\left(u_n^3, u_n\right) - (f, u_n') &= 0 \Rightarrow \\
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(|u_n'|^2 + \|u_n\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \frac{1}{2}\int_{\Omega} |u_n|^4\, dx\right) - (f, u_n') &= 0.
\end{aligned}
$$

On a

$$
\begin{aligned}
\left(u_n^3, u_n'\right) &= \frac{1}{4}\frac{d}{dt}\int_{\Omega} |u_n|^4 \, dx = \frac{1}{4}\frac{d}{dt}\left[\left(\int_{\Omega} |u_n|^4\right)^{\frac{1}{4}}\right]^4 \\
&= \frac{1}{4}\frac{d}{dt}\,|u_n|^4_{L^4(\Omega)}
\end{aligned}
$$

et

$$
\left(f, u_n'\right) \leq |f(t)|_{L^2(\Omega)} \, |u_n'|_{L^2(\Omega)}
$$

$$
(2.2.12) \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}|u_n'|^2 + \frac{1}{2}\|u_n\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \frac{1}{4}|u_n|^4_{L^4(\Omega)}\right) \leq |f(t)|_{L^2(\Omega)} \, |u_n'|_{L^2(\Omega)}
$$

On pose

$$
\begin{aligned}
\varphi(t) &= \frac{1}{2}|u_n'|^2 + \frac{1}{2}\|u_n\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \frac{1}{4}|u_n|^4_{L^4(\Omega)} \Rightarrow \\
\frac{d}{dt}\varphi(t) &= \varphi'(t) \leq |f(t)|\sqrt{|u_n'|^2} \leq \sqrt{2}\,|f(t)|\sqrt{\varphi(t)} \Rightarrow \\
\frac{1}{2}\frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi(t)}} &\leq \frac{\sqrt{2}}{2}|f(t)| \Rightarrow \left(\sqrt{\varphi(t)}\right)' \leq \frac{\sqrt{2}}{2}|f(t)|
\end{aligned}
$$

En intègre entre 0, t on aura :

$$
\begin{aligned}
\int_0^t \left(\sqrt{\varphi(s)}\right)' ds &\leq \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^t |f(s)| \, ds \Rightarrow \\
(2.2.13) \quad \sqrt{\varphi(t)} &\leq \sqrt{\varphi(0)} + \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^t |f(s)| \, ds.
\end{aligned}
$$

Mais, $f \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$ et d'aprés les conditions $(2.2.10)$, $(2.2.11)$. On déduit en particulier de (2.2.13) que :

$$
(2.2.14) \quad |u_n'(t)| \leq \text{constant.}
$$

Alors

$$
(2.2.15) \quad \|u_n(t)\| + |u_n(t)|_{L^4(\Omega)} \leq \text{constant.}
$$

D'après $(2.2.14)$, $(2.2.15)$ et lorsque $n \to \infty$ on a $\{u_n\}$ dans un ensemble borné de $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega))$ et $\{u_n'\}$ dans un ensemble borné de $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$.

Etape (iii), passage à limite

Comme $H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega)$ est réflexive, donc on peut extraie une sous suite $\{u_m\}$ qui converge faiblement dans $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega))$ vers u, et donc :

$$\frac{du_m}{dt} \rightharpoonup \frac{du}{dt} \text{ faible dans } L^\infty\left(0, T; L^2(\Omega)\right),$$

et aussi

$$u_m \rightharpoonup u \text{ faible dans } L^\infty\left(0, T; H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega)\right).$$

Donc

$$\frac{\partial u_m}{\partial x} \rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial x} \text{ faible dans } L^\infty\left(0, T; L^2(\Omega)\right),$$

car

$$\frac{\partial}{\partial x} : H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega) \to L^2(\Omega).$$

On applique le théorème d'injection compacte de $H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, car Ω est borné, $(V \hookrightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega))$, donc, $\{u_m\}$ borné dans $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega))$ et $L^p(0, T; H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega))$ pour $1 < p < \infty$ (pour L^p est réflexif) et aussi $\left\{\frac{du_m}{dt}\right\}$ est borné dans $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ et $L^p(0, T; L^2(\Omega))$ pour $1 < p < \infty$, donc $\{u_m\}$ est dans un ensemble compacte dans $L^p(0, T; L^2(\Omega))$ pour $1 < p < \infty$, donc :

$$u_m \to u \text{ fort dans } L^p\left(0, T; L^2(\Omega)\right), \ (T < \infty).$$

Alors

$$\left(\frac{d^2 u_m}{dt^2} - \Delta u_m + u_m^3 - f, w_i\right) = 0, \text{ pour } i = 1, 2, ..., m.$$

D'après les convergences au-dessus on étudie u_m^3. On a

$$\begin{aligned} u_m &\to u \text{ fort dans } L^p\left(0, T; L^2(\Omega)\right), \text{ et} \\ u_m &\rightharpoonup u \text{ faible dans } L^p\left(0, T; L^4(\Omega)\right), \ \left(H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega) \subseteq L^4(\Omega)\right). \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Hôlder :

$$u_m \to u \text{ fort dans } L^p(0, T; L^q(\Omega)) \text{ pour } 2 \leq q < 4,$$

car

$$\|u_m - u\|_{L^q} \leq \|u_m - u\|_{L^2}^{1-\theta} \|u_m - u\|_{L^4}^{\theta} \text{ tel que } \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{2} + \frac{\theta}{4}.$$

Quand, $q \geq 3$ et $p \geq 3$ on a :

$$u_m^3 \to u^3 \text{ fort dans } L^{\frac{p}{3}}\left(0, T; L^{\frac{q}{3}}(\Omega)\right).$$

Pour la limite on a :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{du_m}{dt}, w_i\right) = \left(\frac{d^2u_m}{dt^2}, w_i\right) \to \left(\frac{d^2u}{dt}, w_i\right),$$

au sens de distribution

$$(-\Delta u_m, w_i) \rightharpoonup (-\Delta u, w_i) \text{ faible dans } L^\infty(0,T)$$

et

$$\left(u_m^3, w_i\right) \rightharpoonup \left(u^3, w_i\right) \text{ fort dans } L^\infty(0,T).$$

Alors

$$\left(\frac{d^2u}{dt^2} - \Delta u + u^3 - f, w_i\right) = 0.$$

C'est à dire u est une solution de (p_2). ■

Unicité

Théorème 2.4.2 *On se place dans les hypothèses du théorème 2.4.1 avec,* $n = 3$*. Alors, la solution* u *obtenue au théorème 2.4.1 est unique.*

Preuve. On suppose que u et v sont deux solutions du problème, en posant $w = u-v$ on a :

$$\begin{aligned}
\frac{d^2(u-v)}{dt^2} - \Delta(u-v) + \left(u^3 - v^3\right) &= 0 \Rightarrow \\
\frac{d^2w}{dt^2} - \Delta w + \left(u^2 + uv + v^2\right)(u-v) &= 0 \Rightarrow \\
\frac{d^2w}{dt^2} - \Delta w + a(u-v) &= 0.
\end{aligned}$$

Où on a posé

$$a = \frac{u^3 - v^3}{u-v} = u^2 + uv + v^2.$$

Pour $n = 3$, de l'inégalité de Sobolev implique :

$$H_0^1(\Omega) \subseteq L^6(\Omega).$$

Alors

$$\begin{aligned}
u,\ v &\in L^\infty\left(0,T; H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega)\right),\ a \in L^\infty\left(0,T; L^3(\Omega)\right), \\
w &\in L^\infty\left(0,T; H_0^1(\Omega)\right) \text{ et } w' \in L^\infty\left(0,T; L^2(\Omega)\right).
\end{aligned}$$

On multiple l'équation par w' on aura :

$$\begin{aligned}
(w'', w_i) + (-\Delta w, w_i) &= -(aw, w_i) \Rightarrow \\
(w'', w') + (-\Delta w, w') &= -(aw, w') \Rightarrow \\
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(w', w') + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\nabla w, \nabla w) &= -(aw, w') \Rightarrow \\
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(|w'|^2 + \|w\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right) &\leq |aw|_{L^2(\Omega)} |w'|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

On a

$$a \in L^3(\Omega) \text{ et } w \in H_0^1(\Omega) \subseteq L^6(\Omega).$$

Donc :

$$aw \in L^2(\Omega),$$

car

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2},$$

alors

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(|w'|^2 + \|w\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right) \leq \|a\|_{L^3(\Omega)} \|w\|_{L^6(\Omega)} |w'|_{L^2(\Omega)}.$$

D'après l'inégalité

$$ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2,$$

et $H_0^1(\Omega) \subseteq L^6(\Omega)$, on a

$$\|u\|_{L^6(\Omega)} \leq c\|u\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(|w'|^2 + \|w\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right) &\leq c\|a\|_{L^3(\Omega)}\left(\frac{1}{2}|w'|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|w\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right) \Rightarrow \\
\frac{d}{dt}\left(|w'|^2 + \|w\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right) &\leq c\|a\|_{L^3(\Omega)}\left(|w'|^2_{L^2(\Omega)} + \|w\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right).
\end{aligned}$$

En intègrant sur $(0, t)$ on trouve :

$$|w'|^2 + \|w\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq c\int_0^t \|a\|_{L^3(\Omega)}\left(|w'|^2_{L^2(\Omega)} + \|w\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right)ds + \left(|w'|^2_{L^2(\Omega)} + \|w\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right)_{|t=0}$$

Les conditions initiales implique :

$$\left(|w'|^2_{L^2(\Omega)} + \|w\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right)|_{t=0} = 0.$$

L'inégalité de Gronwall

$$
\begin{aligned}
|w'|^2 + \|w\|^2_{H_0^1(\Omega)} &\leq c\int_0^t \|a\| \left(|w'|^2 + \|w\|^2\right) ds \Rightarrow \\
|w'|^2 + \|w\|^2 &= 0 \Rightarrow \begin{cases} w' = 0 \\ w = 0 \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} u' = v', \\ u = v. \end{cases}.
\end{aligned}
$$

Qui donne l'unicité. ■

2.4.3 Etude la régularité

Théorème 2.4.3 *On se place dans les hypothèses du théorème 2.4.1 avec en outre :*

$$
\begin{array}{ll}
(2.2.16) & \frac{\partial f}{\partial t} \in L^1\left(0,T;L^2\left(\Omega\right)\right), \\
(2.2.17) & u_0 \in H_0^1\left(\Omega\right) \cap H^2\left(\Omega\right), \\
(2.2.18) & u_1 \in H_0^1\left(\Omega\right), \\
(2.2.19) & n = 3.
\end{array}
$$

Il existe alors une solution et une seule du système (2.2.1) , (2.2.2) *et* (2.2.3) *vérifiant :*

$$
\begin{array}{ll}
(2.2.20) & u \in L^\infty\left(0,T;H_0^1\left(\Omega\right) \cap H^2\left(\Omega\right)\right), \\
(2.2.21) & u' \in L^\infty\left(0,T;H_0^1\left(\Omega\right)\right), \\
(2.2.22) & u'' \in L^\infty\left(0,T;L^2\left(\Omega\right)\right).
\end{array}
$$

Preuve. On utilise la méthode de Galerkin avec les fonctions propres $w_i \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, pour obtenir des estimations. On prend $w_1 = u_0$ (si $u_0 \neq 0$) et on pose :

$$u_n(0) = u_0,$$

et

$$\frac{du_n}{dt}(0) = u_n'(0) \rightarrow u_1 \text{ dans } H_0^1(\Omega)\,, \ \frac{du_n}{dt} = v_n$$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(u_n'' - \Delta u_n + u_n^3 - f, w_i\right) &= 0 \Rightarrow \\
\left(\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{du_n}{dt}\right) - \Delta\left(\frac{du_n}{dt}\right) + \frac{d}{dt}\left(u_n^3\right) - \frac{df}{dt}, w_i\right) &= 0 \Rightarrow \\
\left(\frac{d^2}{dt^2}v_n - \Delta v_n + 3u_n^2\left(\frac{du_n}{dt}\right) - f', w_i\right) &= 0 \Rightarrow \\
\left(v_n'' - \Delta v_n + 3u_n^2 v_n - f', w_i\right) &= 0.
\end{aligned}$$

$\{u_n\}$ borné dans $H_0^1(\Omega)$.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dv_n}{dt}(0), w_i\right) &= \left(\frac{d^2u_n}{dt^2}(0), w_i\right) \\
&= \left(f(0) + \Delta u_0 - u_0^3, w_i\right).
\end{aligned}$$

Donc, $\frac{dv_n}{dt}(0) = \frac{d^2u_n}{dt^2}(0)$, c'est la projection de $\left(f(0) + \Delta u_0 - u_0^3\right)$ sur $\langle w_1, ..., w_n\rangle$. On a

$$f(0) \in L^2(\Omega),\ \ \Delta u_0 \in L^2(\Omega),\ \ u_0^3 \in L^3(\Omega) \text{ et } L^3(\Omega) \subset L^2(\Omega).$$

Donc

$$f(0) + \Delta u_0 - u_0^3 \in L^3(\Omega).$$

C'est à dire que $u_n''(0)$ existe et est bien définit. On a

$$\begin{aligned}
\left(v_n'' - \Delta v_n + 3u_n^2 v_n - f', w_i\right) &= 0 \Rightarrow \\
\left(v_n'' - \Delta v_n + 3u_n^2 v_n - f', v_n'\right) &= 0 \Rightarrow \\
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(|v_n'|^2 + \|v_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2\right) + 3\left(u_n^2 v_n, v_n'\right) &= \left(f', v_n'\right).
\end{aligned}$$

D'après l'i négalité de Hôlder on a :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}|v_n'|^2 + \frac{1}{2}\|v_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2\right) &\leq |f'(t)|\,|v_n'| + 3\left(\int_\Omega \left(u_n^2\right)^3\right)^{\frac{1}{3}}\left(\int_\Omega v_n^6\right)^{\frac{1}{6}}\left(\int_\Omega \left(v_n'\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq |f'(t)|\,|v_n'| + 3\left\|u_n^2\right\|_{L^3(\Omega)}\|v_n\|_{L^6(\Omega)}|v_n'|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

(remarquant que $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = 1$). Mais on a

$$H_0^1(\Omega) \subseteq L^6(\Omega) \Rightarrow \exists c > 0 : \|u\|_{L^6(\Omega)} \leq c\,\|u\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Donc

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left|v_n'\right|^2+\frac{1}{2}\left\|v_n\right\|_{H_0^1(\Omega)}^2\right)\leq\left|f'(t)\right|\left|v_n'\right|+c\left|v_n'\right|_{L^2(\Omega)}\left\|v_n\right\|_{H_0^1(\Omega)}\left\|u_n\right\|_{L^6(\Omega)}^2.$$

Car

$$\begin{aligned}\left\|u_n^2\right\|_{L^3(\Omega)} &\Rightarrow \left\|u_n^2\right\|^3=\int_\Omega u_n^6\\ &\Rightarrow \left\|u_n^2\right\|^6=\left\|u_n\right\|_{L^6(\Omega)}^2\leq\text{constant.}\end{aligned}$$

Donc d'après l'inégalité

$$ab\leq\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2.$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left|v_n'\right|^2+\frac{1}{2}\left\|v_n\right\|_{H_0^1(\Omega)}^2\right)\leq\left|f'(t)\right|\left|v_n'\right|+c\left(\frac{1}{2}\left|v_n'\right|^2+\frac{1}{2}\left\|v_n\right\|^2\right).$$

On pose

$$\varphi(t)=\frac{1}{2}\left|v_n'\right|^2+\frac{1}{2}\left\|v_n\right\|_{H_0^1(\Omega)}^2$$

on a

$$\sqrt{\left|v_n'\right|^2}\leq\sqrt{\varphi(t)}.$$

Alors

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\varphi(t) &= \varphi'(t)\leq\sqrt{2}\left|f'(t)\right|\sqrt{\varphi(t)}+c\varphi(t)\Longrightarrow\\ \varphi'(t)-c\varphi(t) &\leq \sqrt{2}\left|f'(t)\right|\sqrt{\varphi(t)}\Longrightarrow\\ \frac{1}{2}\frac{\varphi'(t)-c\varphi(t)}{\sqrt{\varphi(t)}} &\leq \frac{\sqrt{2}}{2}\left|f'(t)\right|\Rightarrow\\ \frac{\varphi'(t)}{2\sqrt{\varphi(t)}}-\frac{c}{2}\sqrt{\varphi(t)} &\leq \frac{1}{\sqrt{2}}\left|f'(t)\right|\Rightarrow\\ \left(\sqrt{\varphi(t)}\right)' &\leq \frac{1}{\sqrt{2}}\left|f'(t)\right|+\frac{c}{2}\sqrt{\varphi(t)}\Rightarrow\\ \sqrt{\varphi(t)} &\leq \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^t\left|f'(s)\right|ds+\sqrt{\varphi(0)}+\frac{c}{2}\int_0^t\sqrt{\varphi(s)}ds\end{aligned}$$

Mais on a $f'\in L^1(0,T;L^2(\Omega))$ et en utilisant les conditions initiales on trouve :

$$\sqrt{\varphi(t)}\leq c+\frac{c}{2}\int_0^t\sqrt{\varphi(s)}ds$$

l'inégalité de Gronwall implique :

$$\sqrt{\varphi(t)} \leq c \exp cT, \text{ pour tout } t.$$

Alors

$$|v_n'| \leq \text{constant}, \ \|v_n\| \leq \text{constant}.$$

Alors $\{v_n'\}$ demeure dans un borné de $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ et $\{v_n\}$ est dans un borné de $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$, mais $\left\{v_n = \frac{du_n}{dt}\right\}$ c'est à dire $\{u_n\}, \{u_n'\}$, sont dans $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ et $\{u_n''\}$ dans $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. Quand $n \to \infty$ on a :

$$u, \ u' \in L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right) \text{ et } u'' \in L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right).$$

Alors

$$u \in L^\infty\left(0,T;H^2(\Omega)\right).$$

En conclusion on a une solution u vérifiant $(2.2.20)$, $(2.2.21)$ et $(2.2.22)$. ■

Chapitre 3

Etude du problème (p_3)

3.1 Position du problème

Avec les mêmes notations que celles du chapitre 2, on pose $F(u) \equiv a(t,x)u^2$ où a est borné, on obtient le problème (p_3). Dans ce chapitre nous allons étudier l'existence et l'unicité de la solution du problème :

$$(p_3)\begin{cases} (3.1) & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + a(t,x)u^2 = f, \quad \text{dans } Q, \\ (3.2) & u = 0, \ \text{sur } \Sigma \\ (3.3) & u(x,0) = u_0(x), \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), \ \text{sur } \Omega. \end{cases}$$

3.1.1 Etude l'existence et l'unicité

Existence

On a le théorème suivant

Théorème 3.1.1 *Soient $n \leq 6$, $|a(t,x)| \leq M$, $\forall x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $t \in [0,T]$; on se donne u_0, u_1 et f telles que : $u_0 \in H_0^1(\Omega), u_1 \in L^2(\Omega)$ et $f \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$, et*

$$\alpha = \left(\frac{1}{2}|u_1|^2 + \frac{1}{2}\|u_0\|^2 + \frac{1}{3}\int_\Omega a(x)u_0^3 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^T |f(s)|\, ds < \left(\frac{1}{6c_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Alors il existe une solution u du problème (p_3) satisfaisant à :

$$\begin{aligned} u &\in L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right), \\ u' &\in L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right). \end{aligned}$$

Preuve. Solutions approchées

On utilise la méthode de Faedo-Galerkin, soit $\{w_i\}$ une base de $H_0^1(\Omega)$ au sens de (2.12). On cherche une solution sous la forme :

$$u_n(t) = \sum_{i=1}^{n} g_{in}(t)\, w_i,$$

tel que

$$(3.4)\begin{cases} (u_n''(t), w_i) + a(u_n(t), w_i) + (a(t,x)\, u_n^2(t), w_i) = (f(t), w_i) \ \ 1 \leq i \leq n, \\ u_n(0) = u_{0n} \in [w_1, ...w_n], \\ u_n'(0) = u_{1n} \in [w_1, ...w_n]. \end{cases}$$

où

$$a(u,v) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx.$$

1) Existence local

$n \leq 4$ et la définition de la base $\{w_i\}$ implique qu'il existe une suite $\{u_n\}$ tel que $u_n = u_n(t)$ sur l'intervalle $[0, t_n)$ où $t_n \leq T$.Alors il existe un T_0 :$0 < T_0 < T$ et il existe une solution $u \in L^\infty(0, T_0; H_0^1(\Omega))$ avec $u' \in L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega))$. On dira qu'il existe une solution locale, dont la démonstration est bien connue dans [10].

2) Existence global

On suppose maintenant que $a(t,x)$ est indépendant du temps t, et est $|a(x)| \leq 1$, on suppose en plus que $n \leq 6$ et u_0 est dans l'ensemble :

$$V = \left\{ u \in H_0^1(\Omega);\ \ \|u\| < \frac{1}{c_0} \right\}.$$

et

$$|u|^3_{L^3(\Omega)} \leq c_0 \|u\|^3_{H_0^1(\Omega)}$$

En effet, pour démonter cela on établit des

Estimations a priori

On multiplie l'équation (3.4) d'un indice i par $g'_{in}(t)$ on a :

$$(u_n''(t), u_n'(t)) + a(u_n(t), u_n'(t)) + \big(a(x)\, u_n^2(t), u_n'(t)\big) = (f(t), u_n'(t)) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u_n'(t), u_n'(t)) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt} a(u_n(t), u_n(t)) + \int_{\Omega} a(x)\, u_n^2(t)\, u_n'(t)\, dx = (f(t), u_n'(t)) \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left|u_n'(t)\right|^2+\frac{1}{2}\left\|u_n(t)\right\|^2+\frac{1}{3}\int\limits_{\Omega}a(x)\,u_n^3(t)\,dx\right]=\left(f(t),u_n'(t)\right).$$

On cherche $u_n \in V$, pour cela on utilise le graphe de la fonction :

$$(3.5)\quad y=\frac{x^2}{2}-\frac{c_0x^3}{3}.$$

Pour $x=\beta$, avec $0\leq\beta<\frac{1}{c_0}$, on a :

$$y(\beta)=\alpha^2=\frac{\beta^2}{2}-\frac{c_0\beta^3}{3}.$$

On démontre, comme dans [10] , que

$$\left|u_n'(t)\right|^2\leq\frac{1}{3c_0^2},\ \text{sur}\ \left[0,t_n\right[$$

et

$$\frac{1}{2}\left\|u_n(t)\right\|^2-\frac{c_0\left\|u_n(t)\right\|^3}{3}\leq\alpha^2.$$

Alors $\|u_n\|$ vérifie l'équation (3.5) , c'est à dire :

$$\|u_n\|\leq\beta<\frac{1}{c_0}\ \text{sur}\ \left[0,t_n\right[.$$

Ces estimations sont indépendant de n et t_n, alors $t_n=T$, et par suite $u_n\in V$ et $\{u_n\}$, $\{u_n'\}$ sont dans des ensembles bornées dans $L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)$ et dans $L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$ respectivement.

Passage à la limite

D'après les estimations a priori précédentes, $\{u_n\}$ est borné dans $L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)$, donc dans $L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)$. De même $\{u_n'\}$ est borné dans $L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$, donc dans $L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$. $H_0^1(\Omega)$ étant réflexif, donc d'après le corollaire 1.1.4 il existe une sous suite de u_n, soit u_μ telle que :

$$(3.6)\quad u_\mu\rightharpoonup u \text{ dans } L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right) \text{ et dans } L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right).$$

Donc au sens de distribution on a :

$$(3.7)\quad u_\mu'\rightharpoonup u' \text{ dans } L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right) \text{ et dans } L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right).$$

Et en particulier u_n est borné dans $H^1(Q)$ mais l'injection, $H^1(Q)\hookrightarrow L^2(Q)$ est compact, donc la suite u_μ vérifie (3.6) et (3.7) , par conséquent u et u' existent et sont dans $L^2(Q)$

et alors

$$(3.8) \quad u_\mu \to u \ \text{ dans } L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right) \text{ fort}$$

$$(3.9) \quad u'_\mu \rightharpoonup u' \text{ dans } L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right) \text{ faible.}$$

u_n étant borné dans $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$, alors u_n^2 borné dans $L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))$ et dans $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, donc on trouve :

$$(3.10) \ldots u_\mu^2 \rightharpoonup u^2 \text{ dans } L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right).$$

Lorsque $n=\mu$, pour i fixé tel que $\mu > i$, on a :

$$\left(u''_\mu, w_i\right) + a(u_\mu, w_i) + \left(a(x)\, u_\mu^2, w_i\right) = (f, w_i).$$

D'après (3.8), (3.9) et (3.10) on trouve :

$$\frac{d^2}{dt^2}(u, w_i) + a(u, w_i) + \left(a(x)\, u^2, w_i\right) = (f, w_i).$$

Et d'après la densité de la base $\{w_i\}$ dans l'espace séparable $H_0^1(\Omega)$ on a :

$$\frac{d^2}{dt^2}(u, v) + a(u, v) + \left(a(x)\, u^2, v\right) = (f, v), \ \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Alors la solution u vérifie l'équation (3.1) et le lemme 1.2.2 implique que la solution u vérifie les conditions initiales u_0, u_1. ■

Unicité

Théorème 3.1.2 *On se place dans les hypothèses du théorème 3.1.1 avec* $n \leq 4$. *Alors, la solution* u *obtenue au théorème 3.1.1 est une unique.*

Preuve. On suppose que u et v sont deux solutions, soit $w = u - v$ donc :

$$\begin{cases} \frac{d^2u}{dt^2} - \Delta u + a(x)\, u^2 = f, \text{dans } Q \\ \frac{d^2v}{dt^2} - \Delta v + a(x)\, v^2 = f, \text{dans } Q \end{cases}$$

Alors

$$\frac{d^2(u-v)}{dt^2} - \Delta(u-v) + a(x)\left(u^2 - v^2\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d^2w}{dt^2} - \Delta w = -a(x)(u+v)(u-v) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{d^2w}{dt^2} - \Delta w = -a(x)(u+v)w, \\ w(0) = 0, \\ \frac{dw}{dt}(0) = 0. \end{cases}$$

On multipliant l'équation par g'_{in} on a :

$$(w'', w_i) + a(w, w_i) = -(a(x)(u+v)w, w_i) \Rightarrow$$

$$(w'', w') + a(w, w') = -(a(x)(u+v)w, w') \Rightarrow$$
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(|w'|^2 + \|w\|^2\right) \leq c(\|u\| + \|v\|)\|w\||w'|.$$

Et comme u, v dans $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$ alors :

$$\frac{d}{dt}\left(|w'|^2 + \|w\|^2\right) \leq c\|w\||w'|.$$

D'après l'inégalité de Hôlder et l'intégration sur $(0, t)$ on trouve :

$$|w'|^2 + \|w\|^2 \leq \frac{c}{2}\int_0^t \left(\|w(s)\|^2 + |w'(s)|^2\right) ds.$$

Et par conséquent le lemme de Gronwall nous donne :

$$|w'|^2 + \|w\|^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} w(t) = 0, \\ w'(t) = 0. \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} u \equiv v, \\ u' \equiv v'. \end{cases}$$

■

3.1.2 Etude la régularité

Théorème 3.1.3 *On se place dans les hypothèses du théorème 3.1.1 avec :*

$$\begin{aligned} n &\leq 4, \\ f' &\in L^1\left(0, T; L^2(\Omega)\right), \\ u_0 &\in V \cap H^2(\Omega), \\ u_1 &\in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Il existe une unique solution u du problème (p_3) vérifiant :

$$\begin{array}{ll} (3.11) & u \in L^{\infty}\left(0,T;H_0^1\left(\Omega\right)\cap H^2\left(\Omega\right)\right), \\ (3.12) & u' \in L^{\infty}\left(0,T;H_0^1\left(\Omega\right)\right), \\ (3.13) & u'' \in L^{\infty}\left(0,T;L^2\left(\Omega\right)\right). \end{array}$$

Preuve. u_n solutions approchées de système (3.4) telle que $\{w_i\}$ est la base de l'espace $H_0^1\left(\Omega\right)\cap H^2\left(\Omega\right)$. On a

$$(3.14) \quad u_{0n} \rightarrow u_0 \text{ dans } H_0^1\left(\Omega\right)\cap H^2\left(\Omega\right),$$

$$(3.15) \quad u_{1n} \rightarrow u_1 \text{ dans } H_0^1\left(\Omega\right),$$

et

$$(3.16) \quad \left(u_n''\left(t\right),w_i\right)+a\left(u_n\left(t\right),w_i\right)+\left(a\left(x\right)u_n^2\left(t\right),w_i\right)=\left(f\left(t\right),w_i\right) \ \ 1\leq i\leq n.$$

Avec

$$a\left(u,v\right)=\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx.$$

On montre l'existence d'une solution vérifiant (3.12), (3.13) et les conditions initiales. Il y a deux étapes pour la démonstration.

Etape(i)

L'équation (3.16) donne

$$\left(u_n''\left(t\right),w_i\right)=\left(f\left(t\right)+\Delta u_n\left(t\right)-a\left(x\right)u_n^2\left(t\right),w_i\right).$$

En $t=0$ on a

$$\left(u_n''\left(0\right),w_i\right)=\left(f\left(0\right)+\Delta u_n\left(0\right)-a\left(x\right)u_n^2\left(0\right),w_i\right)\Rightarrow$$

$$(3.17) \quad \left(u_n''\left(0\right),w_i\right)=\left(f\left(0\right)+\Delta u_{0n}-a\left(x\right)u_{0n}^2,w_i\right) \ \ 1\leq i\leq n$$

Comme

$$f' \in L^1\left(0,T;L^2\left(\Omega\right)\right) \text{ et } f\in L^1\left(0,T;L^2\left(\Omega\right)\right),$$

alors le lemme 1.2.2 implique que

$$f\left(0\right)\in L^2\left(\Omega\right).$$

D'après (3.14), on a

$$\begin{aligned} \left|\Delta u_{0n}\right| &\leq \text{ constante et} \\ \left|u_{0n}^{2}\right| &\leq \text{ constante.} \end{aligned}$$

On en déduit donc de (3.17), en multipliant par $g''_{in}(0)$ et sommant en i, que :

$$\begin{aligned} \left(u''_n(0), u''_n(0)\right) &= \left(f(0) + \Delta u_{0n} - a(x)\, u_{0n}^{2}, u''_n(0)\right) \Rightarrow \\ \left|u''_n(0)\right|^2 &\leq \left(\left|f(0)\right| + \left|\Delta u_{0n}\right| + \left|a(x)\, u_{0n}^{2}\right|\right) \left|u''_n(0)\right|. \end{aligned}$$

Et par conséquent

$$(3.18) \quad \left|u''_n(0)\right| \leq \text{constante.}$$

C'est a dire que $u''_n(0)$ existe et est bien définit.

Dérivons (3.16) en t, et multiplie par $g''_{in}(t)$ et somme en i, il vient :

$$\begin{aligned} \left(u_n^{(3)}(t), w_i\right) + a\left(u'_n(t), w_i\right) + 2\left(a(x)\, u_n(t)\, u'_n(t), w_i\right) &= \left(f'(t), w_i\right) \Rightarrow \\ \left(u_n^{(3)}(t), u''_n(t)\right) + a\left(u'_n(t), u''_n(t)\right) + 2\left(a(x)\, u_n(t)\, u'_n(t), u''_n(t)\right) &= \left(f'(t), u''_n(t)\right) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left|u''_n(t)\right|^2 + \left\|u'_n(t)\right\|^2\right) = -2\left(a(x)\, u_n(t)\, u'_n(t), u''_n(t)\right) + \left(f'(t), u''_n(t)\right).$$

D'après l'inégalité de Hôlder et,

$$\left|a(x)\right| \leq 1, \; u_n \in H_0^1(\Omega).$$

On a

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left|u''_n(t)\right|^2 + \frac{1}{2}\left\|u'_n(t)\right\|^2\right) \leq \left|f'(t)\right| \left|u''_n(t)\right| + c\left(\frac{1}{2}\left|u''_n(t)\right|^2 + \frac{1}{2}\left\|u'_n(t)\right\|^2\right).$$

On pose

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\left|u''_n(t)\right|^2 + \frac{1}{2}\left\|u'_n(t)\right\|^2.$$

On a

$$\sqrt{2}\sqrt{\left|u''_n(t)\right|^2} \leq \sqrt{2}\sqrt{\varphi(t)}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\varphi(t) &= \varphi'(t) \leq \sqrt{2}\left|f'(t)\right|\sqrt{\varphi(t)} + c\varphi(t) \Rightarrow \\
\varphi'(t) - c\varphi(t) &\leq \sqrt{2}\left|f'(t)\right|\sqrt{\varphi(t)} \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{\varphi'(t) - c\varphi(t)}{\sqrt{\varphi(t)}} \\
&\leq \frac{\sqrt{2}}{2}\left|f'(t)\right| \Rightarrow \left(\frac{\varphi'(t)}{2\sqrt{\varphi(t)}}\right) - \frac{c}{2}\sqrt{\varphi(t)} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2}}\left|f'(t)\right| \Rightarrow \left(\sqrt{\varphi(t)}\right)' - \frac{c}{2}\sqrt{\varphi(t)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\left|f'(t)\right| \Rightarrow \\
\int_0^t \left(\sqrt{\varphi(s)}\right)' ds - \frac{c}{2}\int_0^t \sqrt{\varphi(s)}ds &\leq \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^t \left|f'(s)\right| ds \Rightarrow \\
\sqrt{\varphi(t)} &\leq \sqrt{\varphi(0)} + \frac{c}{2}\int_0^t \sqrt{\varphi(s)}ds + \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^t \left|f'(s)\right| ds.
\end{aligned}$$

Mais on a

$$f' \in L^1\left(0, T; L^2(\Omega)\right).$$

En intégrant de 0 à t et en utilisant les conditions initiales on trouve :

$$\sqrt{\varphi(t)} \leq c + \frac{c}{2}\int_0^t \sqrt{\varphi(s)}ds.$$

L'inégalité de Gronwall implique :

$$\sqrt{\varphi(t)} \leq c\exp cT, \text{ pour tout } t.$$

Alors

$$|u_n''| \leq \text{constante et } \|u_n'\| \leq \text{constante}$$

Donc, u_n' est bornée dans $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$ et u_n'' est borné dans $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$,et par suite il existe une sous suite de u_n; u_μ telle que :

$$\begin{aligned}
u_\mu' &\to u' \text{ dans } L^\infty\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right) \text{ fort,} \\
u_\mu'' &\rightharpoonup u'' \text{ dans } L^\infty\left(0, T; L^2(\Omega)\right) \text{ faible.}
\end{aligned}$$

Alors u vérifie (3.12) et (3.13).

Etape(ii)

Reste à démontrer que

$$(3.19)\quad u \in L^{\infty}\left(0,T;H^{2}(\Omega)\right).$$

On déduit de (3.1) que :

$$(3.20)\quad \Delta u = u'' + a(x)\,u^{2} - f.$$

Et

$$u \in L^{\infty}\left(0,T;H_{0}^{1}(\Omega)\right).$$

Donc

$$a(x)\,u^{2} \in L^{\infty}\left(0,T;L^{2}(\Omega)\right),\ \text{car}\ |a(x)| \leq 1.$$

Et on a

$$f \in L^{1}\left(0,T;L^{2}(\Omega)\right).$$

Donc on déduit de (3.20) que :

$$\Delta u \in L^{\infty}\left(0,T;L^{2}(\Omega)\right).$$

On pose

$$\Delta u = h,\ \text{tel que}\ \Delta \in \pounds\left(H_{0}^{1}(\Omega), H^{-1}(\Omega)\right).$$

Et soit G son inverse

$$G : H^{-1}(\Omega) \to H_{0}^{1}(\Omega),$$

alors

$$(3.21)\quad u(t) = Gh(t)\ \text{ p.p.}$$

car

$$u \in L^{\infty}\left(0,T;H_{0}^{1}(\Omega)\right).$$

D'après les théorèmes de régularité des solutions des équations linéaires elliptiques on a :

$$(3.22)\quad G \in \pounds\left(L^{2}(\Omega), H^{2}(\Omega)\right).$$

Alors d'après (3.21) et (3.22) on a :

$$u(t) = Gh(t) : L^{2}(\Omega) \to H^{2}(\Omega).$$

Donc

$$u(t) \in H^{2}(\Omega),$$

alors

$$u \in L^{\infty}\left(0,T;H^{2}\left(\Omega\right)\right).$$

En conclusion, on a une solution u vérifiant (3.11), (3.12) et (3.13).

Remarque : Pour avoir l'unicité de la solution on doit imposer la condition $n \leq 4$. La démonstration est la même que celle du théorème 3.1.2. ■

3.2 Quelques remarques sur le problème (p_0)

On considère le problème (p_0) :

$$(p_0)\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + F\left(u\right) = 0, \text{ dans } Q, \\ u = 0, \text{ sur } \Sigma \\ u\left(x,0\right) = u_0\left(x\right), \ \frac{\partial u}{\partial t}\left(x,0\right) = u_1\left(x\right), \ x \in \Omega. \end{cases}$$

D'après l'étude des problèmes (p_1), (p_2) et (p_3), on peut donner une définition de l'énergie.

Comme dans [10], on multiple l'équation par $\frac{du}{dt}$ et on intègre (avec $F\left(u\right) = 0$) :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{\partial u}{\partial t}dx + \int_{\mathbb{R}^n} -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\frac{\partial u}{\partial t}dx &= 0 \Rightarrow \\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx + \sum_{i=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n} -\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\frac{\partial u}{\partial t}dx &= 0. \end{aligned}$$

On intègre par partie :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx + \sum_{i=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial t}dx &= 0 \Rightarrow \\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx &= 0 \Rightarrow \\ \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right] dx &= 0. \end{aligned}$$

Où u est régulière. L'intégrale est constant en temps et représente l'énergie totale. Le premier terme désigne l'énergie cinétique et le deuxième terme est l'énergie potentielle. Dans ce cas on cherche deux points pour le terme non-linèaire $F(u)$, dans (p_0) :

-On cherche la forme de F pour l'énergie.

-On calcule le nombre des invariants de l'équation du problème (p_0).

Le premier point : On donne des estimations spéciales sur l'équation d'onde du problème linéaire. D'après la définition de l'énergie, on pose :

$$E(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right] dx = \text{constant.}$$

E est l'énergie.

L'énergie ne peut pas être nulle dans $\mathbb{R}^n$. Cependant, si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ et Ω est borné, l'énergie dans Ω :

$$\int_{\Omega} \left[\left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 + \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \right] dx,$$

peut être nulle, quand t augmente.

Trois invariant pour

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0.$$

$$E_1(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \left[\left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 + |gradu|^2 \right] dx.$$

Rappel

$$\begin{aligned} grad\ u &= \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right), \\ r &= |x|_{\mathbb{R}^n} = \sqrt{\sum_i |x_i|^2}. \end{aligned}$$

$$E_2(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left[t\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 + |gradu|^2 \right) + 2r\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial r} + (n-1)\, u\frac{\partial u}{\partial t} \right] dx.$$

où

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \sum_i \frac{x_i}{r}\frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

$$E_3(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left[\left(r^2+t^2\right)\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 + |gradu|^2 \right) + 4tr\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial r} + 2\,(n-1)\, tu\frac{\partial u}{\partial t} - (n-1)\, u^2 \right] dx.$$

Pour obtenir ces quantités, on doit multiplier l'équation par des termes :
Pour E_1, on multiplie par

$$2\frac{\partial u}{\partial t}.$$

Pour E_2, on multiplie par

$$2t\frac{\partial u}{\partial t} + 2r\frac{\partial u}{\partial r} + (n-1)\, u.$$

Et pour E_3, on multiplie par

$$2\left(r^2+t^2\right)\frac{\partial u}{\partial t} + 4tr\frac{\partial u}{\partial t} + 2\,(n-1)\, tu.$$

Remarques

1) Toujours dans $\mathbb{R}^n$. Si on travaille dans $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, avec $u = 0$ sur $\partial\Omega$, on a :

$$\frac{d}{dt} E_1(t) = 0,$$

mais

$$\frac{d}{dt} E_2(t) = \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial \eta} \right|^2 (x, \eta)\, d\sigma,$$

et

$$\frac{d}{dt} E_3(t) = 2t \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial \eta} \right|^2 (x, \eta)\, d\sigma.$$

2) $E_3 \geq 0$. Si $E_3 \leq 0$, on démontre, pour $n = 3$, que :

$$\int_{\Omega} \left[\left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 + |gradu|^2 \right] dx \to 0, \text{ quand } \frac{1}{t^2} \to 0.$$

car Ω un ensemble borné.

Proposition 3.2.1 *On suppose que u est régulière et à support compact dans $\mathbb{R}^n$ (Avec $n > 1$) et*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f.$$

Alors, on a

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\varphi \left(\left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 + |gradu|^2 \right) + b(t)\, r \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial t} + \psi u \frac{\partial u}{\partial t} \right] dx \\ = & \int_{\mathbb{R}^n} \left[2\varphi \frac{\partial u}{\partial t} + b(t)\, r \frac{\partial u}{\partial r} + \psi u \right] f dx + \int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} u \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \Delta \psi \, |u|^2 \right] dx. \end{aligned}$$

Où φ, b et ψ sont données.

Preuve. On multiple l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f$ par $\varphi \frac{\partial u}{\partial t}$ et on intègre par partie, on a

$$\begin{aligned}
2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \varphi\frac{\partial u}{\partial t}\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \varphi\frac{\partial u}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial t}\right) \Rightarrow \\
2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \varphi\frac{\partial u}{\partial t}\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx - \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \varphi}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$(3.2.1) \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \varphi\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \varphi}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx.$$

$$2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \varphi\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + 2\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial t}\right) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
(3.2.2) \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \varphi\frac{\partial u}{\partial t}\right) &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \varphi}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx \\
&\quad +2\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial t} dx.
\end{aligned}$$

et

$$(3.2.3) \quad \left(f, \varphi\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi\frac{\partial u}{\partial t} f dx.$$

De (3.2.1) , (3.2.2) et (3.2.3) on en déduit que

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \varphi\frac{\partial u}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \varphi\frac{\partial u}{\partial t}\right) &= \left(f, \varphi\frac{\partial u}{\partial t}\right) \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx - \\
&\quad \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \varphi}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx \\
&\quad \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \varphi}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx + 2\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial t} dx \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi\frac{\partial u}{\partial t} f dx \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right]dx = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right]dx - 2\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial t}dx+\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi\frac{\partial u}{\partial t}f dx,$$

ce qui implique

$$\text{(3.2.4)}\quad \frac{d}{dt}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2+|gradu|^2\right)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2+|gradu|^2\right)dx - 2\int\limits_{\mathbb{R}^n}\sum_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial t}dx+\int\limits_{\mathbb{R}^n}2\varphi\frac{\partial u}{\partial t}f dx.$$

Par les mêmes calcules, en multipliant l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\Delta u=f$ par $a\,(x,t)\,\frac{\partial u}{\partial x_i}$ (resp par ψu) cette foi-ci on montre que

$$\text{(3.2.5)}\quad \frac{d}{dt}\int\limits_{\mathbb{R}^n}a_i\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial t} = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\left[-\frac{1}{2}\frac{\partial a_i}{\partial x_i}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2+\frac{1}{2}\frac{\partial a_i}{\partial x_i}|gradu|^2-\sum_j\frac{\partial a_i}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right]dx + \int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial a_i}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial t}dx+\int\limits_{\mathbb{R}^n}a_i\frac{\partial u}{\partial x_i}f dx.$$

(resp

$$\text{(3.2.6)}\quad \frac{d}{dt}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi u\frac{\partial u}{\partial t}=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left[\psi\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2-\psi\,|gradu|^2+\frac{\partial\psi}{\partial t}u\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\Delta\psi\,|u|^2\right]dx+\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi u f dx).$$

Si on travaille avec des fonctions de (r,t), on utilise :

$$\frac{\partial}{\partial r}=\sum\frac{x_i}{r}\frac{\partial}{\partial x_i},$$

ce qui montre que φ dépende seulement de r, ce qui implique que

$$\text{(3.2.7)}\quad \frac{d}{dt}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2+|gradu|^2\right)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2+|gradu|^2\right)+\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left[-2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial t}+2\varphi\frac{\partial u}{\partial t}f\right]dx.$$

On suppose

$$a_i\left(x,t\right)=\frac{x_i}{r}a\left(r,t\right),$$

alors, comme un exemple on calcule le coefficient $-\frac{1}{2}\sum\limits_i\frac{\partial a_i}{\partial x_i}$ de $\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2$. On a

$$\sum_i\frac{\partial a_i}{\partial x_i}=\sum_i\left[\frac{x_i}{r}\frac{\partial a}{\partial r}\frac{x_i}{r}+a\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_i}{r}\right)\right],$$

mais

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_i}{r}\right) &= \frac{1}{r}+x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r}\right)\\ &= \frac{1}{r}+x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{\sqrt{\sum\left|x_i\right|^2}}\right)\\ &= \frac{1}{r}+x_i\left(-\frac{x_i}{\left(\sqrt{\sum\left|x_i\right|^2}\right)^3}\right)\\ &= \frac{1}{r}+x_i\left(-\frac{x_i}{r^3}\right)\\ &= \frac{1}{r}-\frac{x_i^2}{r^3}.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\sum_i\frac{\partial a_i}{\partial x_i} &= \sum_i\left[\frac{x_i^2}{r}\frac{\partial a}{\partial r}+a\left(\frac{1}{r}-\frac{x_i^2}{r^3}\right)\right]\\ &= \frac{\partial a}{\partial r}+a\left(\frac{n}{r}-\frac{1}{r}\right)\\ &= \frac{\partial a}{\partial r}+\frac{(n-1)}{r}a.\end{aligned}$$

Finalement, on a

$$(3.2.8)\quad \frac{d}{dt}\int\limits_{\mathbb{R}^n} a\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial t} = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a}{\partial r}+\frac{(n-1)}{r}a\right)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2\right]dx + \int\limits_{\mathbb{R}^n}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a}{\partial r}+\frac{(n-3)\,a}{r}\right)|gradu|^2+\frac{\partial a}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial t}\right]dx + \int\limits_{\mathbb{R}^n}\left[-\left(\frac{\partial a}{\partial r}-\frac{a}{r}\right)\left|\frac{\partial u}{\partial r}\right|^2\right]dx+\int\limits_{\mathbb{R}^n} a\frac{\partial u}{\partial r}f.$$

De (3.2.7), (3.2.8) et (3.2.6) on en déduit que

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2+|gradu|^2\right)dx+\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathbb{R}^n}a\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi u\frac{\partial u}{\partial t}\\
=\ &\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left[\varphi\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2+|gradu|^2\right)+a\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial t}+\psi u\frac{\partial u}{\partial t}\right]dx\\
=\ &\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2+|gradu|^2\right)-2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial t}+2\varphi\frac{\partial u}{\partial t}f\right]dx+\\
&\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a}{\partial r}+\frac{(n-1)}{r}a\right)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a}{\partial r}+\frac{(n-3)\,a}{r}\right)|gradu|^2\right]dx+\\
&\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left[\frac{\partial a}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial t}-\left(\frac{\partial a}{\partial r}-\frac{a}{r}\right)\left|\frac{\partial u}{\partial r}\right|^2\right]dx+\int\limits_{\mathbb{R}^n}a\frac{\partial u}{\partial r}f dx+\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi u f dx+\\
&\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left[\psi\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2-\psi\,|gradu|^2+\frac{\partial\psi}{\partial t}u\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\Delta\psi\,|u|^2\right]dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
=\ &\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\psi-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a}{\partial r}+\frac{(n-1)}{r}a\right)\right)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2\right]dx+\\
&\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\psi+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a}{\partial r}+\frac{(n-3)\,a}{r}\right)\right)|gradu|^2\right]dx+\\
&\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left[-\left(\frac{\partial a}{\partial r}-\frac{a}{r}\right)\left|\frac{\partial u}{\partial r}\right|^2+\left(-2\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{\partial a}{\partial t}\right)\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial t}\right]dx+\int\limits_{\mathbb{R}^n}2\varphi\frac{\partial u}{\partial t}f dx+\\
&\int\limits_{\mathbb{R}^n}a\frac{\partial u}{\partial r}f dx+\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi u f dx+\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left[\frac{\partial\psi}{\partial t}u\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\Delta\psi\,|u|^2\right]dx.
\end{aligned}$$

On cherche les coefficients des termes

$$\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2, |gradu|^2, \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial t}$$

et

$$\left|\frac{\partial u}{\partial r}\right|^2.$$

Donc le coefficient $-\left(\frac{\partial a}{\partial r}-\frac{a}{r}\right)$ de $\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2$ est nul si, et seulement si :

$$a(r,t)=b(t)\,r,$$

et

$$\frac{\partial a}{\partial t}=b'(t)\,r.$$

Alors

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}+\psi-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a}{\partial r}+\frac{(n-1)}{r}a\right)=\frac{\partial \varphi}{\partial t}-\frac{n}{2}b(t)+\psi.$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}+\psi+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a}{\partial r}+\frac{(n-3)\,a}{r}\right)=\frac{\partial \varphi}{\partial t}+\frac{n-2}{2}b(t)-\psi.$$

$$-2\frac{\partial \varphi}{\partial r}+\frac{\partial a}{\partial t}=-2\frac{\partial \varphi}{\partial r}+b'(t)\,r.$$

Ces termes sont nulles si et seulement si

$$\psi=\frac{n}{2}b(t)-\frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

et

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}=\frac{1}{2}b(t),\ \frac{\partial \varphi}{\partial r}=\frac{1}{2}b'(t)\,r.$$

Car

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}-\frac{n}{2}b(t)+\psi=0\Rightarrow\frac{\partial \varphi}{\partial t}=\frac{n}{2}b(t)-\psi. \tag{3.2.9}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}+\frac{n-2}{2}b(t)-\psi=0\Rightarrow\frac{\partial \varphi}{\partial t}=\psi-\frac{n-2}{2}b(t). \tag{3.2.10}$$

de (3.2.9) et (3.2.10) on en déduit que

$$2\frac{\partial \varphi}{\partial t}=\frac{n}{2}b(t)+\frac{n-2}{2}b(t)-\psi+\psi\Rightarrow\frac{\partial \varphi}{\partial t}=\frac{1}{2}b(t).$$

$$-2\frac{\partial \varphi}{\partial r}+b'(t)\,r=0\Rightarrow\frac{\partial \varphi}{\partial r}=\frac{1}{2}b'(t)\,r.$$

Et par conséquent

$$b''(t) = 0.$$

D'où la solution générale

$$\begin{aligned}
\varphi &= \alpha + \beta t + \gamma\left(r^2 + t^2\right), \\
b &= 2\left(\beta + 2\gamma t\right), \\
\psi &= (n-1)\left(\beta + 2\gamma t\right).
\end{aligned}$$

Finalement, on aura

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left[\varphi\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 + |gradu|^2\right) + a\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial t} + \psi u\frac{\partial u}{\partial t}\right]dx =$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left[2\varphi\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial r} + \psi u\right]f dx + \int\limits_{\mathbb{R}^n}\left[\frac{\partial \psi}{\partial t}u\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\Delta\psi\left|u\right|^2\right]dx \Rightarrow$$

$$(3.2.11)\ldots\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left[\varphi\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 + |gradu|^2\right) + b(t)\,r\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial t} + \psi u\frac{\partial u}{\partial t}\right]dx =$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left[2\varphi\frac{\partial u}{\partial t} + b(t)\,r\frac{\partial u}{\partial r} + \psi u\right]f dx + \int\limits_{\mathbb{R}^n}\left[\frac{\partial \psi}{\partial t}u\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\Delta\psi\left|u\right|^2\right]dx.$$

■

Remarques

Pour des valeurs particulier de α, β et γ on distingue trois cas :

Premier cas

On prend

$$\alpha = 0,\ \beta = 1 \text{ et } \gamma = 0.$$

Donc

$$\varphi = 1,\ b = 0 \text{ et } \psi = 0.$$

En reportant dans (3.2.11) on aura l'expression de $E_1(t)$:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left[\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2+|gradu|^2\right)\right]dx=\int\limits_{\mathbb{R}^n}2\frac{\partial u}{\partial t}f dx.$$

Deuxième cas

On prend

$$\alpha=0,\ \beta=1 \text{ et } \gamma=0.$$

Donc

$$\varphi=t,\ b=2 \text{ et } \psi=n-1.$$

En reportant dans (3.2.11) on aura l'expression de $E_2(t)$:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left[t\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2+|gradu|^2\right)+2r\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial t}+(n-1)\,u\frac{\partial u}{\partial t}\right]dx=$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left[2t\frac{\partial u}{\partial t}+2r\frac{\partial u}{\partial r}+(n-1)\,u\right]f dx.$$

Troisième cas

On prend

$$\alpha=0,\ \beta=0 \text{ et } \gamma=1.$$

Donc

$$\varphi = r^2 + t^2,\ b = 4t \text{ et } \psi = 2(n-1)t.$$

En reportant dans (3.2.11) on aura l'expression de $E_3(t)$:

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n}\left[\left(r^2+t^2\right)\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 + |gradu|^2\right) + 4tr\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial t}dx + 2(n-1)tu\frac{\partial u}{\partial t}\right]dx =$$

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n}(n-1)u^2dx + \int_{\mathbb{R}^n}\left[2\left(r^2+t^2\right)\frac{\partial u}{\partial t} + 4tr\frac{\partial u}{\partial r} + 2(n-1)tu\right]fdx \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n}\left[\left(r^2+t^2\right)\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 + |gradu|^2\right) + 4tr\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial t} + 2(n-1)tu\frac{\partial u}{\partial t} - (n-1)u^2\right]dx =$$

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left[2\left(r^2+t^2\right)\frac{\partial u}{\partial t} + 4tr\frac{\partial u}{\partial r} + 2(n-1)tu\right]fdx.$$

puisque

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}u\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\Delta\psi|u|^2 = 2(n-1)u\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{d}{dt}(n-1)u^2.$$

Maintenant, nous allons voir, si $u'' - \Delta u = F(u)$, quelle sont les cas où la fonctions F donne les mêmes invariant ?

Soit G la primitive de F

$$\frac{d}{dt}G = F.$$

Donc, en utilisant (3.2.11) et après calcul simple on aura

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left[2t\frac{\partial u}{\partial t} + 2r\frac{\partial u}{\partial r} + (n-1)u\right]F(u)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n}\left[2t\frac{\partial u}{\partial t} + 2r\frac{\partial u}{\partial r} + (n-1)u\right]\frac{dG}{du}dx.$$

et par conséquent

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left[t\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2+|gradu|^2\right)+2r\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial t}+(n-1)\,u\frac{\partial u}{\partial t}-2tG(u)\right]dx$$
$$=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left[(n-1)\,uF(u)-2(n+1)\,G(u)\right]dx+\int\limits_{\mathbb{R}^n}\sum_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(2x_iG(u)\right)dx.$$

Il y a une seule fonction qui vérifie cela, à savoir

$$F(u)=cu^{\alpha+1}\text{ avec }\alpha=\frac{n+1}{n-1}.$$

Pour $n=3$, on a $F(u)=cu^3$.

D'autres cas

En plus des trois invariants $E_1(t)$, $E_2(t)$ et $E_3(t)$ de l'équation

$$u''-\Delta u=0\text{ dans }\mathbb{R}^n,$$

Il y a d'autres invariants, comme le montre le tableau suivant

Nombre	Invariant	multiplicateur correspondant
n	$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial t}$	$\frac{\partial u}{\partial x_i}$
n	$\int\limits_{\mathbb{R}^n}x_i\left(\left\lvert\frac{\partial u}{\partial t}\right\rvert^2+\lvert gradu\rvert^2\right)+2t\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial t}$	$x_i\frac{\partial u}{\partial t}+t\frac{\partial u}{\partial x_i}$
$\frac{n(n-1)}{2}$	$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(x_i\frac{\partial u}{\partial x_j}-x_j\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\frac{\partial u}{\partial t}$	$x_i\frac{\partial u}{\partial x_j}-x_j\frac{\partial u}{\partial x_i}$

Remarque

Chaque multiplicateur vérifie l'équation $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\Delta v=0$.

Lemme 3.2.2 *Si u, v vérifient l'équation*

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\Delta w=0,$$

alors

$$I = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(u\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t} v \right) .\textit{est constante.}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\frac{dI}{dt} &= \frac{d}{dt}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(u\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t} v \right) \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} v - \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial t} \right) \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(u\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} v \right) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (u\Delta v - \Delta u v) = (u, \Delta v) - (\Delta u, v) = 0.
\end{aligned}$$

vu que Δ est auto-adjoint. Pour u, v de supports compactes, on a

$$\frac{dI}{dt} = 0 \Rightarrow I = \text{constant}$$

■

Le lemme 3.2.2 implique le

Lemme 3.2.3 *Si p transforme les solutions de*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0,$$

en d'autre solutions, on en déduit que

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(u\frac{\partial}{\partial t} pu - \frac{\partial u}{\partial t} pu \right),$$

est constant en temps.

Maintenant, on va calculer tous les opérateurs

$$p = a_0 \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c.$$

Soit

$$\left[p, \frac{d^2}{dt^2} - \Delta \right]$$

le commutateur.

$$p\left(\frac{d^2}{dt^2}-\Delta\right)-\left(\frac{d^2}{dt^2}-\Delta\right)p,$$

il est de second ordre, donc il s'écrit sous la forme

$$\left[p,\frac{d^2}{dt^2}-\Delta\right]=d\left(x,t\right)\left(\frac{d^2}{dt^2}-\Delta\right).$$

On vérifie aisément que

$$(3.2.12)\left\{\begin{array}{c}\forall j\ \ \frac{\partial b_j}{\partial x_j}=\frac{\partial a_0}{\partial t}=-\frac{d}{2},\\ \forall i\neq j\ \ \frac{\partial b_i}{\partial x_j}+\frac{\partial b_j}{\partial x_i}=0,\\ \forall j\ \ \frac{\partial b_j}{\partial t}=\frac{\partial a_0}{\partial x_j}.\end{array}\right.$$

$$(3.2.13)\left\{\begin{array}{c}2\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{\partial^2 a_0}{\partial t^2}-\Delta a_0=0,\\ \forall j\quad -2\frac{\partial c}{\partial x_j}+\frac{\partial^2 b_j}{\partial t^2}-\Delta b_j=0,\\ \frac{\partial^2 c}{\partial t^2}-\Delta c=0.\end{array}\right.$$

(3.2.12) implique que

$$\forall i\neq j\qquad 2\frac{\partial^2 a_0}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial^2 b_j}{\partial x_i\partial t}+\frac{\partial^2 b_i}{\partial x_j\partial t}=0.$$

ce qui donne

$$\frac{\partial^2 b_j}{\partial x_i\partial t}=0.$$

Soit

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{\partial^2 a_0}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 b_j}{\partial x_j \partial t} = \frac{\partial^2 a_0}{\partial x_j^2} \quad \forall j, \\
\forall i,\ \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} &= \frac{\partial^3 a_0}{\partial x_i \partial x_j^2} = 0 \ \text{ pour certain } \ j \ \ (n > 1)\,.
\end{aligned}$$

Soit

$$\left\{ \begin{array}{c}
\beta_i = \frac{\partial^2 a_0}{\partial x_i \partial t} = \frac{\partial^2 b_i}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 b_j}{\partial x_i \partial x_j} \quad \forall j, \\
\beta_i = -\frac{\partial^2 b_i}{\partial x_k^2}, \forall k \neq i.
\end{array} \right.$$

Ce qui donne

$$\left\{ \begin{array}{c}
\forall i \ \ \frac{\partial \beta_i}{\partial t} = \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} = 0, \\
\forall i \neq j \ \ \frac{\partial \beta_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^3 a_0}{\partial x_i \partial x_j \partial t} = 0, \\
\forall i \ \ \frac{\partial \beta_i}{\partial x_i} = \frac{\partial^3 a_0}{\partial x_i^2 \partial t} = \frac{\partial \alpha}{\partial t}.
\end{array} \right.$$

(3.2.13) implique que

$$\begin{aligned}
2\frac{\partial c}{\partial t} &= (n-1)\,\alpha, \\
2\frac{\partial c}{\partial x_j} &= (n-1)\,\beta_j,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial^2 c}{\partial t^2} - \Delta c = \frac{n-1}{2}\frac{\partial \alpha}{\partial t} - \frac{n-1}{2}\sum_j \frac{\partial \beta_j}{\partial x_j} \\
&= -\frac{(n-1)^2}{2}\frac{\partial \alpha}{\partial t}.
\end{aligned}$$

Donc α et β_j sont constants et en générale la forme de a_0 est donnée par :

$$a_0 = \frac{\alpha}{2}\left(t^2 + r^2\right) + t\sum_j \beta_j x_j + \gamma t + \sum_j \delta_j x_j + \varepsilon.$$

D'où

$$b_i = \frac{\beta_i}{2}\left(t^2 - r^2\right) + x_i \sum_j \beta_j x_j + \alpha t x_i + \gamma x_i + \delta_i t + \bar{b_i}.$$

Avec

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{b_i}}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar{b_i}}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial \bar{b_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{b_j}}{\partial x_i} = 0, \ \forall i, \ j. \end{cases}$$

et

$$c = \frac{n-1}{2}\left(\alpha t + \sum_j \beta_j x_j\right) + c_0.$$

De

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{b_i}}{\partial x_j \partial x_k} &= -\frac{\partial^2 \bar{b_j}}{\partial x_i \partial x_k} \\ &= \frac{\partial^2 \bar{b_k}}{\partial x_i \partial x_j} = -\frac{\partial^2 \bar{b_i}}{\partial x_k \partial x_j}. \end{aligned}$$

On en déduit que la forme de $\bar{b_i}$ est $\sum_i \lambda_{ij} x_j + \mu_i$, avec λ_{ij}, μ_i sont constants et tels que

$$\lambda_{ij} + \lambda_{ji} = 0 \ \forall i, \ j.$$

Nous obtenons les invariants si on remarque que :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial u}{\partial t} pu - u \frac{\partial}{\partial t} pu\right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left(a_0 \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 + a_0 \left|gradu\right|^2 + 2\sum_j b_j \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial t}\right) dx +$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} u\frac{\partial u}{\partial t}\left(-\frac{\partial a_0}{\partial t}+\sum_j\frac{\partial b_j}{\partial x_j}\right)dx+\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u|^2}{2}\left(-\Delta a_0+\sum_j\frac{\partial^2 b_j}{\partial x_j\partial t}-2\frac{\partial c}{\partial t}\right)dx.$$

Pour cela on donne le

Théorème 3.2.4 *Si u est à support compact en x et vérifie l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\Delta u=0$, alors*

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left(a_0\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2+a_0\,|gradu|^2+2\sum_j b_j\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial t}\right)dx+(n-1)\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial a_0}{\partial t}u\frac{\partial u}{\partial t}dx-$$
$$\frac{(n-1)\,\alpha}{2}\int_{\mathbb{R}^n}|u|^2\,dx.$$

Est constante en t. Où

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{\alpha}{2}\left(t^2+r^2\right)+t\sum_j\beta_j x_j+\gamma t+\sum_j\delta_j x_j+\varepsilon,\\
b_i &= \frac{\beta_i}{2}\left(t^2-r^2\right)+x_i\sum_j\beta_j x_j+\alpha t x_i+\gamma x_i+\delta_i t+\sum_j\lambda_{ij}x_j+\mu_i,\\
c &= \frac{n-1}{2}\left(\alpha t+\sum_j\beta_j x_j\right)+constant,
\end{aligned}$$

avec

$$\lambda_{ij}+\lambda_{ji}=0.$$

Et on a $3+3n+\frac{n(n-1)}{2}$ invariants de ce type et $n+2$ de ces invariants correspondant à $d\,(x,t)\neq 0$.

Remarque

Soit l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-Au=0$, tel que $A=A^*$. Si $F\left(u,\frac{du}{dt}\right)$ est un invariant différentiable, comme fonction $F\,(u,v)$, alors

$$w\,(t)=\frac{\partial F}{\partial v}\left(u\,(t)\,,\frac{du}{dt}\right),$$

est une solution de l'équation

$$\frac{d^2w}{dt^2} + Aw = 0.$$

On peut démontre cela dans le cas où $V = H = \mathbb{R}^k$. Alors,

$$\left(\frac{du}{dt}, w\right) - \left(u, \frac{dw}{dt}\right),$$

est une constante égale à

$$\left(u\left(t\right)\frac{\partial F}{\partial u} + v\frac{\partial F}{\partial v}\right),$$

Où $v = \frac{du}{dt}$. Si F est homogène, cela vaut CF. Tous les invariants homogènes sont de forme

$$\left(u, \frac{dpu}{dt}\right) - \left(\frac{du}{dt}, pu\right),$$

où p est homogène et transforme des solutions en d'autres solutions. Dans le cas $n = 1$ pour l'équation d'onde, il y a des transformations non linéaire p qui tronsforme des solutions en d'autres solutions.

Si $n > 1$, il n'y a aucune transformation non affine qui conserve les solutions régulières de l'équation d'onde.

Exemple pour $n = 1$.

$$u \to \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2,$$

Conserve des solutions. Dans ce cas, u est une solution si, et seulement si

$$u = f\left(x + t\right) + g\left(x - t\right).$$

$$
\begin{aligned}
w &= \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = \left(f' - g'\right)^2 + \left(f' + g'\right)^2 \\
&= 2\left(f'\right)^2 + 2\left(g'\right)^2 = f_1\left(x + t\right) + g_1\left(x - t\right).
\end{aligned}
$$

L'invariant correspondent est

$$
\int \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + 3\frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right] dx = \int \left(u\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t}w\right) dx,
$$

où u est une solution.

Si $n = 1$, on peut prouver que si $\digamma\left(u, v\right)$ satisfait

$$
\frac{\partial^2 \digamma}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 \digamma}{\partial v^2}.
$$

Alors $\int \digamma\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx$ est une constante. Donc, pour $n = 1$ il y a beaucoup d'invariants.

Lemme 3.2.5

$$
E_3 \geq o
$$

Preuve. Première preuve : E_3 est indépendant de t, donc prenez $t = 0$. Alors, on démontre que

$$
\int \left[r^2 \left|gradu\right|^2 - \left(n - 1\right) u^2\right] dx \geq 0 \text{ pour } u \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^n\right).
$$

C'est une généralisation d'inégalité de Poincaré.

Considérons

$$
\int \left(r^2\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 + 2u\frac{\partial u}{\partial x_i}\alpha x_i + \alpha^2 u^2 \frac{x_i^2}{r^2}\right) dx = \int \left(r\frac{\partial u}{\partial x_i} + \alpha\frac{x_i}{r}u\right)^2 dx \geq 0.
$$

Par une intégration par parties, on trouve

$$
\int r^2\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx - \int \alpha u^2 dx + \int \alpha^2 u^2 \frac{x_i^2}{r^2} dx \geq 0.
$$

En sommant sur i, on en déduit que

$$\int r^2 \left|gradu\right|^2 dx - \int n\alpha u^2 dx + \int \alpha^2 u^2 dx \geq 0,$$

donc

$$\int r^2 \left|gradu\right|^2 dx \geq \left(n\alpha - \alpha^2\right) \int \left|u\right|^2 dx,\ \forall\alpha.$$

$\alpha = 1$ donne le résultat désiré, mais $\alpha = \frac{n}{2}$ donne la meilleure inégalité

$$\int r^2 \left|gradu\right|^2 dx \geq \frac{n^2}{4} \int \left|u\right|^2 dx.$$

Deuxième preuve :

$$\begin{aligned} E_3 &= \int \left[\left(r^2+t^2\right)\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 + \sum_i \lambda_i^2\right) + 4t\frac{\partial u}{\partial t}\sum_i x_i\lambda_i\right] dx + \\ &\quad \frac{(n-1)(n-3)}{4}\int \frac{\left(r^2+t^2\right)}{r^2}\left|u\right|^2 dx. \end{aligned}$$

Avec

$$\lambda_i = \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{n-1}{2}\frac{x_i}{r^2}u.$$

Pour $n = 3$, le dernier terme est nul :

$$\frac{(n-1)(n-3)}{4}\int \frac{\left(r^2+t^2\right)}{r^2}\left|u\right|^2 dx = 0,$$

Cependant, le reste de l'expression de E_3 est positif par Cauchy-Schwartz. En effet,

$$r\frac{\partial u}{\partial r} = r\sum_i \frac{x_i}{r}\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_i x_i \frac{\partial u}{\partial x_i},$$

$$\begin{aligned} 4tr\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial r} + 2(n-1)tu\frac{\partial u}{\partial t} &= 4t\frac{\partial u}{\partial t}\left(r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{(n-1)}{2}u\right) \Rightarrow \\ 4tr\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial r} + 2(n-1)tu\frac{\partial u}{\partial t} &= 4t\frac{\partial u}{\partial t}\sum_i x_i\lambda_i, \end{aligned}$$

avec

$$\lambda_i = \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{n-1}{2}\frac{x_i}{r^2}u,$$

et

$$|gradu|^2 = \sum_i \lambda_i^2 - (n-1)\sum_i \frac{x_i}{r^2} u \frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{(n-1)^2}{4}\frac{|u|^2}{r^2}.$$

Donc

$$E_3 = \int \left[\left(r^2+t^2\right)\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 + \sum_i \lambda_i^2 \right) + 4t\frac{\partial u}{\partial t}\sum_i x_i\lambda_i \right] dx - (n-1)X,$$

où, après intégration par partie

$$\begin{aligned} X &= \int \left[\left(r^2+t^2\right)\left(\sum_i \frac{x_i}{r^2}\frac{\partial u}{\partial x_i}u + \frac{(n-1)|u|^2}{r^2}\right) + |u|^2 \right] dx \\ &= (3-n)\int \frac{\left(r^2+t^2\right)|u|^2}{4r^2} dx, \end{aligned}$$

donc

$$E_3 = \int \left[\left(r^2+t^2\right)\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 + \sum_i \lambda_i^2 \right) + 4t\frac{\partial u}{\partial t}\sum_i x_i\lambda_i \right] dx \geq 0.$$

■

Remarque

Si $n \geq 3$ et u est une solution régulière

$$\int \left[\left(r^2+t^2\right)\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 + \sum_i \lambda_i^2 \right) + 4t\frac{\partial u}{\partial t}\sum_i x_i\lambda_i \right] dx + \frac{(n-1)(n-3)}{4}\int \frac{\left(r^2+t^2\right)u^2}{r^2} dx \leq k.$$

Théorème 3.2.6 *Pour* $0 < \theta < 1$, *et* $n = 3$ *on a*

$$\int_{r \leq \theta t} \left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 + |gradu|^2 \right) dx \leq \frac{c_0}{t^2}, \text{ quand } t \to \infty.$$

Preuve. Si $r < \theta t$, $\theta < 1$, alors

$$2tr \leq \frac{2\theta}{1+\theta^2}\left(r^2+t^2\right).$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$4t\frac{\partial u}{\partial t}\sum_i x_i\lambda_i \leq 4t\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right| \left(\sum_i |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_i \lambda_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq 4t\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right| r \left(\sum_i \lambda_i^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

puisque $r = \sqrt{\sum_i |x_i|^2}$, et d'après l'inégalité de Young, on a

$$\begin{aligned}
4tr\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|\left(\sum_i \lambda_i^2\right)^{\frac{1}{2}} &\leq 4tr\left[\frac{1}{2}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 + \frac{1}{2}\left(\sqrt{\sum_i |\lambda_i|^2}\right)^2\right] \\
&\leq 2tr\left[\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 + \sum_i \lambda_i^2\right] \\
&\leq \frac{2\theta}{1+\theta^2}\left(r^2+t^2\right)\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 + \sum_i \lambda_i^2\right),
\end{aligned}$$

d'après la remarque au-dessus on donne

$$\left(1 - \frac{2\theta}{1+\theta^2}\right)\int_{r\leq\theta t}\left(r^2+t^2\right)\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 + \sum_i \lambda_i^2\right)dx \leq k.$$

$$1 - \frac{2\theta}{1+\theta^2} = \frac{(1-\theta)^2}{1+\theta^2}$$

par conséquent

$$\int_{r\leq\theta t}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 + \sum_i \lambda_i^2\right)dx \leq \frac{\frac{k}{(1-\theta)^2}}{t^2}.$$

Vu la définition des λ_i, on a

$$\int_{r<\theta t}\sum_i \lambda_i^2 = \int_{r<\theta t}\left[|gradu|^2 + (n-1)\sum_i \frac{x_i}{r^2}\frac{\partial u}{\partial x_i}u + \frac{(n-1)^2}{4r^2}u^2\right]dx.$$

On intègre par partie

$$\int_{r<\theta t}\sum_i \lambda_i^2 = \int_{r<\theta t}|gradu|^2\,dx - \int_{r<\theta t}\frac{|u|^2(n-1)(n-3)}{4r^2}dx + \int_{r=\theta t}\frac{(n-1)|u|^2}{2r}d\sigma.$$

Donc, pour $n = 3$, nous n'avons aucun problème. Pour $n > 3$,

$$\int_{r<\theta t}\frac{\left(r^2+t^2\right)|u|^2}{r^2} \leq k \Rightarrow \int_{r<\theta t}\frac{|u|^2}{r^2}dx \leq \frac{k}{t^2}.$$

■

Remarque

Si $\eta > 1$, donc

$$\int\limits_{r \geq \eta t} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 + |gradu|^2 \right) dx \leq \frac{c_0}{t^2}.$$

Remarques, sur l'équation non-linèaire $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + F(u) = 0.$

1) Est-ce que nous avons les mêmes invariants dans ce cas ?

Réponse : Le nombre $1 + 2n + \frac{n(n-1)}{2}$ des invariants pour tout F reste valables. De même, $n + 2$ invariants reste valables pour $F(u) = cu^{\alpha+1}$, où α dépend de n ($\alpha = 2$ si $n = 3$).

2) Le cas où $F(u) = m^2 u$, $m \neq 0$, donne l'équation de **Klein-Gordon.**

Chapitre 4

Etude du problème (p_4)

4.1 Notations et position du problème

Ω désigne un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière régulière Γ, Q désigne l'ouvert $]0,T[\times\Omega$ avec $T>0$, de frontière Σ et $2<p<\infty$. Etant donné f, on cherche une fonction u, solution du problème suivant :

$$(p_4)\begin{cases} (4.1) & \frac{\partial u}{\partial t}-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(|u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)=f,\ \text{dans } Q, \\ (4.2) & u=0,\ \text{sur } \Sigma, \\ (4.3) & u(x,0)=u_0(x),\ x\in\Omega. \end{cases}$$

Ce problème intervient dans plusieurs applications, comme la théorie de la chaleur, la diffusion des gaz, etc.

Partant des considérations physiques, on voit que pour décrire de façon unique le processus de propagation, il convient de se donner en plus de l'équation principale, la température à l'instant $t=0$ et le régime thermique au bord, ce qui manifeste dans ce problème par la condition initiale $u(x,0)=u_0(x)$ dans Ω et la condition au limite de Dirichlet $u=0$ sur Σ.

Pour que le processus de la diffusion, se prête à une description univoque il faut connaître la répartition de la densité f telle que $u(x,0)=u_0(x)$ dans Ω en plus toujours on décrit le régime diffusion au bord par la condition au limite de Dirichlet $u=0$ sur Σ.

Pour résoudre ce problème, on applique la méthode de régularisation elliptique. Dans ce qui suit, nous allons démontrer le théorème d'existence suivant :

4.2 Théorème (d'existence)

Soit $V = W_0^{1,p}(Q)$*, muni de la norme usuelle de* $W^{1,p}(Q)$ *et soit* $L = \frac{\partial}{\partial t}$ *de* $D(L)$*, sous-espace dense de* V*, dans* V'*,* L *étant maximal monotone. Alors, il existe un opérateur* A *de* $D(L)$ *(et non* V *tout entier)*$\to V'$ *pseudo monotone et vérifiant :*$\frac{(A(v),v)}{\|v\|} \longrightarrow \infty$ si $\|v\| \to \infty$.

Alors, $\forall f \in V'$*, il existe* $u \in D(L)$ *solution de*

$$Lu + A(u) = f.$$

Preuve. L'espace V (où $2 < p < \infty$)

$$V = W_0^{1,p}(Q) = \left\{ v,\ \text{telle que } v,\ \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^p(Q),\ \forall i = 1, ..., n,\ v = 0 \text{ p.p sur } \Sigma \right\}.$$

Munit de la norme, strictement convexe,

$$\|v\|_V = \left(\|v\|_{L^p(Q)}^p + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^p(Q)}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Est un sous espace fermé de $L^p(Q)$, donc V est un espace de Banach réflexif ainsi que son dual $V' = (W_0^{1,p}(Q))'$.

Pour vérifier les propriétés du théorème ci-dessus, on procède par étape :

Etape (1)

Par la méthode de régularisation elliptique, on approche l'équation parabolique (4.1), par une équation elliptique, en suite on résout le problème approché.

Formulation variationnelle :

On suppose

$$\langle u, v \rangle_V = \langle u, \widetilde{v} \rangle_{V'}.$$

Tel que $\widetilde{v}$ est la solution de

$$-\Delta \widetilde{v} = v.$$

On a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i}\left(|u|^{p-2}u\right) &= (p-2)|u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}+|u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i} \\
&= (p-1)|u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i} \Rightarrow \\
|u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i} &= \frac{1}{(p-1)}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(|u|^{p-2}u\right).
\end{aligned}$$

On multiplions l'équation (4.1) par $v \in V$, alors

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, v\right\rangle_V - \sum_{i=1}^{n}\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right), v\right\rangle_V &= \langle f, v\rangle_V \Rightarrow \\
\left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, \widetilde{v}\right\rangle_{V'} - \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\widetilde{v}dx &= \langle f, \widetilde{v}\rangle_{V'} \Rightarrow \\
\left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, \widetilde{v}\right\rangle_{V'} - \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{1}{p-1}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(|u|^{p-2}u\right)\right]\widetilde{v}dx &= \langle f, \widetilde{v}\rangle_{V'} \Rightarrow \\
\left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, \widetilde{v}\right\rangle_{V'} - \frac{1}{p-1}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left(|u|^{p-2}u\right)\widetilde{v}dx &= \langle f, \widetilde{v}\rangle_{V'}
\end{aligned}$$

Avec la condition (4.2) et en utilisant la formule de Green on obtient

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, \widetilde{v}\right\rangle_{V'} - \frac{1}{p-1}\int_\Omega \left(|u|^{p-2}u\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\widetilde{v}}{\partial x_i^2}dx &= \langle f, \widetilde{v}\rangle_{V'} \Rightarrow \\
\left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, \widetilde{v}\right\rangle_{V'} - \frac{1}{p-1}\int_\Omega |u|^{p-2}u\Delta\widetilde{v}dx &= \langle f, \widetilde{v}\rangle_{V'} \Rightarrow \\
\left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, \widetilde{v}\right\rangle_{V'} + \frac{1}{p-1}\int_\Omega |u|^{p-2}uvdx &= \langle f, \widetilde{v}\rangle_{V'}
\end{aligned}$$

On prend

$$a(u,v) = \frac{1}{p-1}\int_\Omega |u|^{p-2}uvdx.$$

On vérifie que $a(u,v)$ est une forme continue de $V \times V \to \mathbb{R}$. Comme, pour tout u de V l'application

$$V \longrightarrow \mathbb{R}, v \longrightarrow a(u,v)$$

est une forme linéaire continue alors, le théorème de représentation de Riez, implique qu'il existe un unique représentant noté $A(u) \in L^{P'}(\Omega)$, tel que

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \langle A(u), v\rangle \\ &= \frac{1}{p-1}\int_\Omega |u|^{p-2}\, uvdx,\ \forall v \in V. \end{aligned}$$

Vérifiant que $A = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|.|^{p-2}\frac{\partial .}{\partial x_i}\right)$, pour tout v de $\mathcal{D}(\Omega)$ on a

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \frac{1}{p-1}\int_\Omega |u|^{p-2}\, uvdx = \frac{1}{p-1}\left\langle |u|^{p-2}\, u, v\right\rangle \\ &= \frac{1}{p-1}\left\langle |u|^{p-2}\, u, -\Delta\widetilde{v}\right\rangle = -\frac{1}{p-1}\sum_{i=1}^{n}\left\langle \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left(|u|^{p-2}\, u\right), \widetilde{v}\right\rangle \\ &= -\sum_{i=1}^{n}\left\langle \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left(\frac{1}{p-1}|u|^{p-2}\, u\right), \widetilde{v}\right\rangle \\ &= -\sum_{i=1}^{n}\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{p-1}|u|^{p-2}\, u\right)\right), \widetilde{v}\right\rangle \\ &= -\sum_{i=1}^{n}\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right), v\right\rangle = \left\langle -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(|u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right), v\right\rangle. \end{aligned}$$

Donc,

$$Au = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(|u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right).$$

En appliquant la proposition 1.4.3, nous allons démontrer que A est borné, monotone et hémi continue et par conséquent, A est pseudo-monotone. On a

$$\begin{aligned} \|A(u)\|_{V'} &= \sup_{\substack{v\in V\\ \|v\|\leq 1}}\left|\langle A(u), v\rangle_{V',V}\right|, \text{ alors} \\ \|A(u)\|_{V'} &= \sup_{\substack{v\in V\\ \|v\|\leq 1}}\left|\langle A(u), v\rangle_{V',V}\right| \leq \frac{1}{P-1}\|u\|_{L^{P'}(\Omega)}^{P-1}\sup_{\substack{v\in V\\ \|v\|\leq 1}}\|v\|_V \\ &\leq C\|u\|_{L^{P'}(\Omega)}^{P-1} \leq C\|u\|_V^{P-1}. \end{aligned}$$

Donc A est borné.

L'application $x \to |x|^p$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, étant convexe, alors

$\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\left(|x|^{p-2} x - |y|^{p-2} y\right)(x-y) \geq 0$, et par suit

$$(A(u) - A(v), u - v) = \frac{1}{P-1} \int_{\Omega} \left(|u|^{p-2} u - |v|^{p-2} v\right)(u-v)\, dx \geq 0.$$

C'est-à-dire A est monotone.

A hémi continue si, $\forall u, v, w \in V$, la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\lambda \mapsto (A(u + \lambda v), w)$, est continue. Soit λ_n une suite, telle que $\lambda_n \to \lambda$, dans $\mathbb{R}$. On pose

$$f_n(x) = |u(x) + \lambda_n v(x)|^{p-2} (u(x) + \lambda_n v(x))\, w(x),$$

f_n est converge presque par tout vers la fonction f telle que

$$f(x) = |u(x) + \lambda v(x)|^{p-2} (u(x) + \lambda v(x))\, w(x), \ x \in \mathbb{R}.$$

Donc

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &= |u(x) + \lambda_n v(x)|^{p-2} \left|(u(x) + \lambda_n v(x))\, w(x)\right| \\ &\leq |u(x) + \lambda_n v(x)|^{p-2} \left|(u(x) + \lambda_n v(x))\right| |w(x)| \\ &\leq |u(x) + \lambda_n v(x)|^{p-1} |w(x)|, \end{aligned}$$

d'après l'inégalité

$$ab \leq \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} b^2, \ \forall a, b \geq 0$$

on trouve

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{2} |u(x) + \lambda_n v(x)|^{2(p-1)} + \frac{1}{2} |w(x)|^2,$$

de plus en utilisant l'inégalité

$$\forall f, g \in L^p(\Omega) : \|f + g\|^p_{L^p(\Omega)} \leq 2^p \left(\|f\|^p + \|g\|^p\right),$$

alors

$$|f_n(x)| \leq 2^{2p-3} |u(x)|^{2(p-1)} + 2^{2p-3} |\lambda_n|^{2(p-1)} |v(x)|^{2(p-1)} + \frac{1}{2} |w(x)|^2,$$

mais λ_n est converge dans $\mathbb{R}$, alors elle est bornée, donc

$$|f_n(x)| \leq 2^{2p-3} \left(|u(x)|^{2(p-1)} + C |v(x)|^{2(p-1)}\right) + \frac{1}{2} |w(x)|^2.$$

On définit la fonction g par

$$g\left(x\right)=\frac{1}{2}\left[2^{2(p-1)}\left(\left|u\left(x\right)\right|^{2(p-1)}+C\left|v\left(x\right)\right|^{2(p-1)}\right)+\left|w\left(x\right)\right|^{2}\right],$$

est dans $L^{1}\left(\Omega\right)$, alors on a $f_{n}\left(x\right)\rightarrow f\left(x\right)$ p.p. sur Ω, et $\exists g\in L^{1}\left(\Omega\right)$ tel que $\left|f_{n}\left(x\right)\right|\leq g\left(x\right)$ p.p. sur Ω.

Donc, vu le théorème de convergence dominée de Lebesgue, en on déduit que

$$f\in L^{1}\left(\Omega\right)\ \text{ et }\ \left\|f_{n}-f\right\|_{L^{1}(\Omega)}\rightarrow 0.$$

Par conséquent

$$\left\langle A\left(u+\lambda_{n}v\right),w\right\rangle_{V',V}\rightarrow\left\langle A\left(u+\lambda v\right),w\right\rangle_{V',V}\ \text{ pour } u,v,w\in V.$$

Alors A est hémi continue.

Nous allons démontrer que $a(u,v)$ est coercive, c'est-à-dire qu'il existe une constante $\alpha>0$ telle que

$$a(u,u)\geq\alpha\left|u\right|^{2},\ \forall v\in V.$$

$\forall u\in V$, on a

$$\begin{aligned}\left(A\left(u\right),u\right) &= a(u,u)=\frac{1}{p-1}\int_{\Omega}\left|u\right|^{p-2}u^{2}dx\\ &= \frac{1}{p-1}\left\|u\right\|_{L^{p}(\Omega)}^{p}dx\geq\alpha\left\|u\right\|_{V}^{p}.\end{aligned}$$

Donc, A est coercive.

On définit l'opérateur M par $Mv=-\frac{\partial v}{\partial t}$, avec

$$D\left(M\right)=\left\{v\in V,\ \frac{\partial v}{\partial t}\in L^{2}\left(\Omega\right),\ v\left(x,0\right)=v_{0}\left(x\right),\ x\in\Omega\right\}.$$

$D\left(M\right)$ est un sous espace fermé dense dans $V\subset L^{2}\left(\Omega\right)$ (pour $2<p<\infty$).

On prend

$$\left\langle u,v\right\rangle_{V}=\left\langle u,\widetilde{v}\right\rangle_{V'},$$

tel que $-\Delta\widetilde{v}=v$, et on pose

$$L=M^{*}=\frac{\partial}{\partial t}.$$

D'après la définition de M, on vérifie qu'il est linéaire et fermé. En effet, on a

$$\begin{aligned}
\langle Mu - Mv, u - v\rangle &= \left\langle -\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t}, u - v\right\rangle \\
&= \left\langle -\frac{\partial}{\partial t}\left(u - v\right), u - v\right\rangle \\
&= \left\langle M\left(u - v\right), u - v\right\rangle
\end{aligned}$$

$\forall u_j \in D\left(M\right)$, tel que $u_j \underset{j\to\infty}{\to} u$, et $Mu_j \underset{j\to\infty}{\to} Mu$, tel que $u \in D\left(M\right)$.

On applique le résultat suivant :

$$\left\{\begin{array}{c}
M \text{ est un opérateur linéaire et fermé de domaine dans } V \text{ réflexif,} \\
\text{strictement convexe ainsi que son dual, tel que :} \\
\langle Mu, u\rangle \geq 0,\ \forall u \in D\left(M\right),\ \ \langle M^{*}u, u\rangle \geq 0,\ \forall u \in D\left(M^{*}\right), \\
\text{alors } M \text{ est un opérateur de } D\left(M\right) \to V',\ \text{maximal monotone et à domaine dense.}
\end{array}\right.$$

En effet

$$\begin{aligned}
\langle Mu, u\rangle &= \int_Q -\frac{\partial u}{\partial t}u\left(x,t\right)dxdt = -\frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial}{\partial t}\left(u\left(x,t\right)\right)^2 dxdt \\
&= -\frac{1}{2}\int_\Omega\int_0^T \frac{\partial}{\partial t}\left(u\left(x,t\right)\right)^2 dxdt = -\frac{1}{2}\int_\Omega \left[\left(u\left(x,T\right)\right)^2 - \left(u\left(x,0\right)\right)^2\right]dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_\Omega -\left(u\left(x,0\right)\right)^2 dx = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(u\left(x,0\right)\right)^2 dx \Rightarrow 2\left\langle Mu, u\right\rangle = \int_\Omega \left(u\left(x,0\right)\right)^2 dx \geq 0.
\end{aligned}$$

On vérifie de mêmes que

$$\langle M^{*}u, u\rangle \geq 0.$$

alors M est maximal monotone.

Donc, $\forall f \in V'$, il existe $u \in D\left(M\right)$ tel que

$$\begin{aligned}
\langle u, Mv\rangle_V + \langle A\left(u\right), v\rangle_V &= \langle f, v\rangle_V\ \ \forall v \in D\left(M\right) \Rightarrow \\
\langle u, M\widetilde{v}\rangle_V + \langle A\left(u\right), -\Delta\widetilde{v}\rangle_V &= \langle f, \widetilde{v}\rangle_V\ \ \forall v \in D\left(M\right) \Rightarrow \\
\int_Q -u\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial t}dxdt + \frac{1}{p-1}\int_Q \left|u\right|^{p-2}u\left(-\Delta\widetilde{v}\right)dxdt &= \int_Q f\widetilde{v}dxdt.
\end{aligned}$$

Vu la formule de Green, on a

$$\int\limits_Q - u\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial t}dxdt = \int\limits_Q \frac{\partial u}{\partial t}\widetilde{v}dxdt.$$

et

$$\frac{1}{p-1}\int\limits_Q |u|^{p-2}u\left(-\Delta\widetilde{v}\right)dxdt = \frac{1}{p-1}\int\limits_Q -\Delta\left(|u|^{p-2}u\right)\widetilde{v}dxdt + \frac{1}{p-1}\int\limits_0^T\int\limits_\Gamma \left(|u|^{p-2}u\right)\widetilde{v}\,\overrightarrow{n}\,d\Gamma dt.$$

Et par suit, en utilisant (4.2),

$$\frac{1}{p-1}\int\limits_Q |u|^{p-2}u\left(-\Delta\widetilde{v}\right)dxdt = \frac{1}{p-1}\int\limits_Q -\Delta\left(|u|^{p-2}u\right)\widetilde{v}dxdt.$$

Alors

$$\int\limits_Q \frac{\partial u}{\partial t}\widetilde{v}dxdt - \frac{1}{p-1}\int\limits_Q \Delta\left(|u|^{p-2}u\right)\widetilde{v}dxdt = \int\limits_Q f\widetilde{v}dxdt.$$

Ce qui montre que u est solution du problème (p_4).

$$Lu + Au = f.$$

1) Régularisation elliptique :

On introduit l'opérateur J de dualité de $V \to V'$ relatif à $\phi(r) = r$ (donc $\|J(v)\|_{V'} = \|v\|$). On va approcher l'équation $Lu + Au = f$ par

$$\begin{aligned} \varepsilon L^* J^{-1}\left(Lu_\varepsilon\right) + Lu_\varepsilon + A\left(u_\varepsilon\right) &= f \Rightarrow \\ -\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}J^{-1}\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\right) + \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + A\left(u_\varepsilon\right) &= f. \end{aligned}$$

Donc, le problème approché est sous la forme :

$$(p_\varepsilon)\begin{cases} (4.4) & -\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}J^{-1}\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\right) + \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + A\left(u_\varepsilon\right) = f,\ \varepsilon > 0, \\ (4.5) & u_\varepsilon = 0,\ \text{sur } \Sigma \\ (4.6) & u_\varepsilon\left(x, 0\right) = u_0\left(x\right),\ x \in \Omega. \end{cases}$$

Pour résoudre ce problème, on munit $D(L)$ de la norme du graphe

$$\|u\|_{D(L)} = \left(\|u\|^2_{L^2(Q)} + \left\|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\right\|^2_{L^2(Q)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour $u,\ v\in D\left(L\right)$, on pose

$$\Pi_{\varepsilon}\left(u,v\right)=\left(\varepsilon J^{-1}\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial t},\frac{\partial v}{\partial t}\right)+\left(\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial t},v\right)+\left(A\left(u_{\varepsilon}\right),v\right).$$

La forme $v\rightarrow\Pi_{\varepsilon}\left(u,v\right)$ est continue sur $D\left(L\right)$ car

$$\begin{aligned}
\left|\Pi_{\varepsilon}\left(u,v\right)\right| &= \left|\left(\varepsilon J^{-1}\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial t},\frac{\partial v}{\partial t}\right)+\left(\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial t},v\right)+\left(A\left(u_{\varepsilon}\right),v\right)\right| \\
&\leq \left|\left(\varepsilon J^{-1}\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial t},\frac{\partial v}{\partial t}\right)\right|+\left|\left(\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial t},v\right)\right|+\left|\left(A\left(u_{\varepsilon}\right),v\right)\right| \\
&\leq \varepsilon\left\|\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial t}\right\|_{L^{2}(\Omega)}\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|_{L^{2}(\Omega)}+\left\|\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial t}\right\|_{L^{2}(\Omega)}\left\|v\right\|_{L^{2}(\Omega)}+C\left\|u_{\varepsilon}\right\|_{L^{2}(\Omega)}\left\|v\right\|_{L^{2}(\Omega)} \\
&\leq C\left\|u_{\varepsilon}\right\|_{D(L)}\left\|v\right\|_{D(L)}+\left\|u_{\varepsilon}\right\|_{D(L)}\left\|v\right\|_{D(L)}+C\left\|u_{\varepsilon}\right\|_{D(L)}\left\|v\right\|_{D(L)} \\
&\leq \alpha\left\|u_{\varepsilon}\right\|_{D(L)}\left\|v\right\|_{D(L)},\ \text{Pour tout } u,\ v\in D\left(L\right).
\end{aligned}$$

Donc, d'après le théorème de représentation de Riesz-Fréchet

$$\begin{aligned}
\exists B_{\varepsilon}\left(u\right) &\in \left(D\left(L\right)\right)',\ \text{tel que } \Pi_{\varepsilon}\left(u,v\right)=\left(B_{\varepsilon}\left(u\right),v\right) \\
&= \left(\varepsilon J^{-1}\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial t},\frac{\partial v}{\partial t}\right)+\left(\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial t},v\right)+\left(A\left(u_{\varepsilon}\right),v\right).
\end{aligned}$$

On prend

$$\Pi_{\varepsilon}\left(u,v\right)=\left(M_{\varepsilon}\left(u\right),v\right)+\left(A\left(u_{\varepsilon}\right),v\right),$$

tel que

$$\left(M_{\varepsilon}\left(u\right),v\right)=\left(\varepsilon J^{-1}\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial t},\frac{\partial v}{\partial t}\right)+\left(\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial t},v\right),\ M_{\varepsilon}\left(u\right)\in\left(D\left(L\right)\right)'.$$

Donc M_{ε} est borné, hémi continue et monotone, ce qui montre que M_{ε} est pseudo-monotone. Vu la remarque 1.4.2, on en déduit que B_{ε} est pseudo-monotone. L'opérateur B_{ε} est coercif, en effet, on a

$$\begin{aligned}
\left(B_{\varepsilon}\left(u\right),v\right) &= \left(\varepsilon J^{-1}\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial t},\frac{\partial v}{\partial t}\right)+\left(\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial t},v\right)+\left(A\left(u_{\varepsilon}\right),v\right) \\
&\geq \varepsilon\left\|\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial t}\right\|_{V'}^{2}+\left(A\left(u_{\varepsilon}\right),v\right)=\left(A\left(u_{\varepsilon}\right),v\right)+\varepsilon\left\|Lu_{\varepsilon}\right\|_{V'}^{2}.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\frac{\left(B_{\varepsilon}\left(u\right),u\right)}{\left\|u\right\|_{D(L)}}\rightarrow\infty \text{ si } \left\|u\right\|_{D(L)}\rightarrow\infty.$$

Vu le théorème 1.3.3, on en déduit qu'il existe $u_{\varepsilon}\in D\left(L\right)$ tel que $B_{\varepsilon}\left(u_{\varepsilon}\right)=f$.

Donc
$$\Pi_{\varepsilon}\left(u,v\right)=\left(f,v\right),\ \forall v\in D\left(L\right),$$
et
$$v\mapsto\left(\varepsilon J^{-1}\left(Lu_{\varepsilon}\right),Lv\right)=\left(f-A\left(u_{\varepsilon}\right)-\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial t},v\right),$$
est continue sur $D\left(L\right)$, muni de la topologie induite par V ce qui montre que
$$(4.7)\quad J^{-1}\left(Lu_{\varepsilon}\right)\in D\left(L^{*}\right).$$

2) Estimations sur u_{ε} et $\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial t}$: On prend le produit scalaire des deux membres d'équation (4.4) avec $u_{\varepsilon}\in D\left(L\right)$, on a
$$\begin{aligned}\left(\varepsilon J^{-1}\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial t},\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial t}\right)+\left(\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial t},u_{\varepsilon}\right)+\left(A\left(u_{\varepsilon}\right),u_{\varepsilon}\right) &= \left(f,u_{\varepsilon}\right),\ \varepsilon>0\Rightarrow\\ \varepsilon\left\|\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial t}\right\|_{V'}^{2}+\left(\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial t},u_{\varepsilon}\right)+\left(A\left(u_{\varepsilon}\right),u_{\varepsilon}\right) &= \left(f,u_{\varepsilon}\right).\end{aligned}$$
Où
$$\left(A\left(u_{\varepsilon}\right),u_{\varepsilon}\right)=\frac{1}{p-1}\int_{\Omega}\left|u_{\varepsilon}\right|^{p-2}u_{\varepsilon}^{2}dx=\frac{1}{p-1}\int_{\Omega}\left|u_{\varepsilon}\right|^{p}dx,$$
et comme $\left(Lu_{\varepsilon},u_{\varepsilon}\right)\geq 0$

donc
$$\begin{aligned}\varepsilon\left\|\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial t}\right\|_{V'}^{2}+\frac{1}{p-1}\int_{\Omega}\left|u_{\varepsilon}\right|^{p}dx &\leq \left\|f\right\|_{V'}\left\|u_{\varepsilon}\right\|_{V}\Rightarrow\\ \frac{1}{p-1}\int_{\Omega}\left|u_{\varepsilon}\right|^{p}dx &\leq \left\|f\right\|\left\|u_{\varepsilon}\right\|_{V}\Rightarrow\\ \frac{1}{p-1}\left\|u_{\varepsilon}\right\|_{V}^{p} &\leq C\left\|u_{\varepsilon}\right\|\Rightarrow\\ \frac{1}{p-1}\left\|u_{\varepsilon}\right\|_{V}^{p-1} &\leq C\Rightarrow\\ \left\|u_{\varepsilon}\right\|_{V} &\leq C\left(p-1\right)^{\frac{1}{p-1}}=\text{Constant.}\end{aligned}$$
$$(4.8)\quad\left\|u_{\varepsilon}\right\|_{V}\leq C\left(p-1\right)^{\frac{1}{p-1}}=\text{Cst.}$$
On peut choisir u_{ε} de façon que, u_{ε} demeure dans un borné de V lorsque $\varepsilon\rightarrow 0$.

Esimation sur $\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial t}$: On prend le produit scalaire des deux membres d'équation (4.4) avec (4.7)

$$\left(-\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}J^{-1}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t},J^{-1}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\right)+\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t},J^{-1}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\right)+\left(A\left(u_\varepsilon\right),J^{-1}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\right)=\left(f,J^{-1}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\right),$$

mais on a $L^*=-\frac{\partial}{\partial t}\geq 0$, alors

$$\left\|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\right\|_{V'}^2+\left(A\left(u_\varepsilon\right),J^{-1}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\right)\leq\left(f,J^{-1}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\right).$$

On a u_ε demeure dans un borné de V, A est borné et

$$\left\|A\left(u_\varepsilon\right)\right\|_{V'}\leq c\left\|u_\varepsilon\right\|_V^{p-1},$$

donc

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\right\|_{V'}^2 &\leq \|f\|_{V'}\left\|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\right\|_{V'}+c\left\|u_\varepsilon\right\|_V^{p-1}\left\|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\right\|_{V'}\Rightarrow\\
\left\|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\right\|_{V''}^2 &\leq \left[\|f\|_{V'}+c\left\|u_\varepsilon\right\|_V^{p-1}\right]\left\|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\right\|_{V'}\Rightarrow\\
\left\|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\right\|_{V'} &\leq \left[\|f\|_{V'}+c\left\|u_\varepsilon\right\|_V^{p-1}\right]\Rightarrow\\
\left\|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\right\|_{V'} &\leq C\|f\|_{V'}+C=\text{constant}.
\end{aligned}$$

$$(4.9)\qquad\left\|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\right\|_{V'}\leq C\|f\|_{V'}+C=\text{constant}.$$

Alors $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}$ demeure dans un borné de V'.

3) Passage à la limite en ε : On a $A\left(u_\varepsilon\right)$ est borné, $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}$ est borné et L est fermé d'après (4.8), (4.9), alors on peut extraire une sous suite, notée encore u_ε, telle que :

$$\begin{cases} u_\varepsilon\rightarrow u \;\text{ dans } V \text{ faible } u\in D\left(L\right),\\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\rightarrow\frac{\partial u}{\partial t}\text{ dans } V'\text{ faible,}\\ A\left(u_\varepsilon\right)\rightarrow\chi\text{ dans } V'\text{ faible.}\end{cases}$$

On a

$$\limsup_{\varepsilon\rightarrow 0}\left(A\left(u_\varepsilon\right),u_\varepsilon-u\right)\leq 0,$$

En effet, d'après (4.4) on a

$$\left(A\left(u_{\varepsilon}\right), u_{\varepsilon}-u\right)=\left(f-\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial t}, u_{\varepsilon}-u\right)+\varepsilon\left(J^{-1} \frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\left(u_{\varepsilon}-u\right)\right),$$

et d'après (4.9) , on a

$$\left\|\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial t}\right\| \leq C \Rightarrow\left\|\left(J^{-1} \frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\left(u_{\varepsilon}-u\right)\right)\right\| \leq C.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\left(A\left(u_{\varepsilon}\right), u_{\varepsilon}-u\right) & \leq\left(f-L u, u_{\varepsilon}-u\right)-\left(L u_{\varepsilon}-L u, u_{\varepsilon}-u\right)+C \varepsilon \\
& \leq\left(f-L u, u_{\varepsilon}-u\right)-\left(L\left(u_{\varepsilon}-u\right), u_{\varepsilon}-u\right)+C \varepsilon,
\end{aligned}$$

or,

$$L=\frac{\partial}{\partial t},$$

est maximal monotone

$$-\left(L\left(u_{\varepsilon}-u\right), u_{\varepsilon}-u\right) \leq 0,$$

alors

$$\left(A\left(u_{\varepsilon}\right), u_{\varepsilon}-u\right) \leq\left(f-\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial t}, u_{\varepsilon}-u\right)+C \varepsilon,$$

quand $\varepsilon \rightarrow 0$ on a

$$\limsup _{\varepsilon \rightarrow 0}\left(A\left(u_{\varepsilon}\right), u_{\varepsilon}-u\right) \leq 0.$$

Alors, A étant pseudo-monotone,

$$(\chi, u-v)=\liminf _{\varepsilon \rightarrow 0}\left(A\left(u_{\varepsilon}\right), u_{\varepsilon}-v\right) \geq(A(u), u-v) \tag{4.10}$$

donc d'après la proposition 1.4.3, on a, $\chi=A(u)$.

Dans ce cas, $\forall v \in D(L)$, d'après (4.4) on a

$$\begin{aligned}
\left(A\left(u_{\varepsilon}\right), u_{\varepsilon}-v\right) & =\left(f-L u_{\varepsilon}, u_{\varepsilon}-v\right)-\varepsilon\left(J^{-1}\left(L u_{\varepsilon}\right), L\left(u_{\varepsilon}-v\right)\right) \\
& =\left(f-L v, u_{\varepsilon}-v\right)-\left(L u_{\varepsilon}-L v, u_{\varepsilon}-v\right)-\varepsilon\left(J^{-1}\left(L u_{\varepsilon}\right), L u_{\varepsilon}-L v\right),
\end{aligned}$$

L est maximal monotone, alors

$$\left(A\left(u_{\varepsilon}\right), u_{\varepsilon}-v\right) \leq\left(f-L v, u_{\varepsilon}-v\right)+C_{1} \varepsilon.$$

Par conséquent on a

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\left(A\left(u_{\varepsilon}\right),u_{\varepsilon}-u\right)\leq\left(f-Lv,u-v\right),\ \forall v\in D\left(L\right)$$

mais

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}\left(A\left(u_{\varepsilon}\right),u_{\varepsilon}-u\right)\leq\limsup_{\varepsilon\to 0}\left(A\left(u_{\varepsilon}\right),u_{\varepsilon}-u\right),\ \forall v\in D\left(L\right)$$

et d'après (4.10), on a

$$(4.11)\quad \left(A\left(u\right),u-v\right)\leq\left(f-Lv,u-v\right)\ \forall v\in D\left(L\right).$$

On prend $v=u-\theta w$, $\theta>0$ et $w\in D\left(L\right)$, donc (4.11) implique

$$\begin{array}{rcl}\left(A\left(u\right),u-u-\theta w\right) & \leq & \left(f-L\left(u-\theta w\right),u-u-\theta w\right)\Rightarrow\\ \theta\left(A\left(u\right),w\right) & \leq & \left(f-L\left(u-\theta w\right),\theta w\right)\Rightarrow\\ \left(A\left(u\right),w\right) & \leq & \left(f-L\left(u-\theta w\right),w\right),\end{array}$$

quand $\theta\to 0$ on a

$$\left(A\left(u\right),w\right)\leq\left(f-Lu,w\right),\ \forall w\in D\left(L\right).$$

Puisque $D\left(L\right)$ est dense dans V, donc u est solution du problème (p_4). ■

Conclusion

Ce travail, comprend quelques problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielles semi-linéaires du deuxième ordre et le problème dynamique de la diffusion.

La première catégorie des problèmes aux limites, modélisent les petites vibrations, par exemple, d'une corde, d'une membrane élastique et de manière générale la propagation d'une onde (acoustique, électromagnétique, etc) dans un milieu élastique homogène $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Ces phénomènes sont modélisés mathématiquement par l'équation des ondes linéaires ou non-linéaires suivant le cas, avec des conditions aux limites et initiales. En pratique, la partie non-linéaire définie les changements des perturbations du phénomène.

Le dernier problème, est celui de la diffusion et est du type parabolique. Ce genre de problèmes interviennent dans plusieurs applications, comme la théorie de la chaleur, la diffusion des gaz, etc.

Dans le premier chapitre, on introduit un rappel sur l'analyse fonctionnelle, dans le deuxième et le troisième chapitres, on a considéré d'abord, le modèle mathématique général des ondes perturbées, notons par $F(u)$ cette perturbation, composée d'une équation différentielle semi-linéaire du second ordre et de type hyperbolique, dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ borné et de frontière Γ régulière avec :

- une condition aux limites de Dirichlet $u = 0$ sur Γ,

- et les conditions initiales : déplacement initial $u_0(x)$ et la vitesse initiale $u_1(x)$.

On a commencé par les cas particuliers où $F(u) = |u|^\rho u$, $\rho > 0$, $F(u) = u^3$ et $F(u) \equiv a(x,t)\,u^2$. Pour chaque cas, on a démontré l'existence, l'unicité et la régularité des solutions. Les techniques utilisées, sont celles de la méthode de compacité (de Faedo-Galerkin).

Le dernier chapitre constitue un travail original. On a étudié pour la première fois, le problème de la diffusion par les techniques de régularisation elliptique. On a démontré un théorème d'existence d'une solution de ce problème.

Bibliographie

[1] **Haim Brézis**, Analyse fonctionnelle. Dunod, Paris, 1999.

[2] **F. Bouzeghaya**, Problème à Frontière Libre, Mémoire de Magister, Juillet 2005, Université F. Abbas de Sétif.

[3] **S. D. Chartterji**, Cours d'Analyse, vols 3. Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 1998.

[4] **P. Grisvard**, Singularities in boundary value problems. Springer-verlag, Masson (Paris), 1992.

[5] **J.L. Lions**, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non-linéaires. Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[6] **Lions-Magenes**, Problèmes aux limites non homogène et applications, volume 1. Dunod paris, 1968.

[7] **V. Mikhailov**, Equations aux dérivées partielles. Traduction française Editions Mir, 1980.

[8] **B. Merouani**, Méthodes de résolution de quelques problèmes aux limites non linéaires, cours de la première année de la post-graduation (2004-2005).

[9] **S. Sandel**, quelques problèmes aux limites gouvernés par l'équation de la diffusion. Mémoire de Magister, Juillet 2005, Université F. Abbas de Sétif.

[10] **L. Tartar**, Topics in non lineair analysis. Université de Paris-Sud, Publications Mathematiques d'Orsay, novembre 1978.

[11] **Marie-Thérèse**, Distributions Espaces de Sobolev Applications. Lacroix-Sonrier, ellipses édition marketing S. A, paris, 1998.

[12] **Raviart et J. M Tomas**, Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles. Masson-1992.

ملخص

تحتوي هده المذكرة على بعض المسائل الحدية ذات معادلات تفاضلية جزئية من الدرجة الثانية النصف خطية من نوع القطع الزائد ومسألة حركة الانتشار. الصنف الأول هو المسألة الحدية التي تفسر انتشار الأمواج في وسط مرن متجانس، أما الصنف الثاني فيتمثل نمذجة حركة الانتشار من نوع القطع المكافئ التي تظهر في تطبيقات عديدة.

في القسم الأول قمنا بتذكير في التحليل الدالي، في القسمين الثاني والثالث، نعتبر أولا الشكل الرياضي العام للأمواج المضطربة و ندرس الحالات الخاصة للمسألة العامة، وفي كل حالة نبرهن وجود، وحدانية ونظامية الحل لكل مسألة حيث كانت الطريقة المتبعة التراص.

قدمنا في القسم الأخير من هذه المذكرة عمل ذاتي تمت دراسته لأول مرة، وهو مسألة حركة الانتشار بطريقة نظامية القطع الناقص، حيث تم البرهان على وجود الحل لهده المسألة.

كلمات مفتاحية: الانتشار، وسط مرن متجانس، اضطراب، وجود، وحدانية، نظامية، طريقة التراص، أمواج، قطع زائد، قطع مكافئ.

Résumé:

Ce travail, comprend quelques problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielles semi- linéaires du deuxième ordre de type hyperbolique et le problème dynamique de la diffusion. La première catégorie de problèmes aux limites modélise la propagation d'une onde dans un milieu élastique homogène. La deuxième catégorie modélise le problème de la diffusion qui est du type parabolique, où il intervient dans plusieurs applications.

Dans le premier chapitre, on donne des rappels d'analyse fonctionnelle, dans le deuxième et le troisième chapitres, on a considéré d'abord, le modèle mathématique générale des ondes perturbées et on étudie des cas particuliers du problème général. Dans chaque cas on s'intéressera à l'existence, l'unicité et la régularité des solutions. Les techniques utilisées, sont celles de la méthode de compacité.

Le dernier chapitre constitue un travail original. On a étudié pour la première fois, le problème de la diffusion par les techniques de régularisation elliptique. On a démontré un théorème d'existence d'une solution de ce problème.

Mots clefs: dynamique de la diffusion, milieu élastique homogène, perturbation, existence, unicité, régularité, compacité, ondes, type hyperbolique, type parabolique.

Abstract.

This work includes some problems in extreme cases for the partial derivative equations semi linear second-order of hyperbolic type and the dynamic problem of the diffusion. The first category of problems in extreme cases models the propagation of a wave in a homogeneous elastic medium. While the second models the problem of the diffusion which is of parabolic type, where it intervenes in several applications. In the first chapter, one recalled the function analytic, the second and the third chapters, one considered initially, the mathematical model general of the disturbed waves, and one studies particular cases of the problem general. In each case one will be interested in the existence, the unicity and the regularity of the solutions. The techniques used, are those of the method of compactness.

The final chapter constitutes an original work; one studied for the first time the problem of the diffusion by the techniques of elliptic regularization. One showed a theorem of existence of a solution of this problem

Key words: dynamics of the diffusion, homogeneous elastic medium, perturbation, existence, unicity, regularity, compactness, waves, hyperbolic type, parabolic type.