UNIVERSITÉ KASDI MERBAH
OUARGLA

Faculté des Sciences et Technologie

et Sciences de la Matière

N° d'ordre :
N° de série :

MÉMOIRE

Pour l'obtention du grade de

Magister

Spécialité : Mathématiques
Option : Équations différentielles et systèmes dynamiques

Présenté par: BENDAB Mebarka

Intitulé

Résolution par la méthode de décomposition des opérateurs d'un système de Carlemann intervenant en cinétique des gaz en dimension trois, dans un tybe à base rectangulaire

Soutenu publiquement le : 24/02/2011

Devant le jury composé de :

MEFTAH M. Tayeb Prof	Université KASDI MERBAH – Ouargla	**Président**
CHACHA A. Djamal M.C(A)	Université KASDI MERBAH – Ouargla	**Examinateur**
GUERFI Amara M.C(A)	Université KASDI MERBAH – Ouargla	**Examinateur**
SAID Mohamed Said M.C(A)	Université KASDI MERBAH – Ouargla	**Rapporteur**

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer toute ma gratitude et ma reconnaissance à mon encadreur, monsieur Mohamed Said SAID qui a constamment veillé, avec compétence et patience, à ce que ce travail se déroule dans les meilleures conditions et l'occasion m'est donc offerte de lui exprimer mon admiration pour ses grandes qualités scientifiques et humaines.

J'apprécie hautement que le Professeur MEFTAH .M.Tayeb ait accepté de présider le jury de ce mémoire, et mes vifs remerciements vont aussi aux membres de ce jury Monsieur CHACHA.A.Djamal Maître de Conférence à l'Université KASDI MERBAH et Monsieur GUERFI.Amara Maître de Conférence à l'Université KASDI MERBAH qui ont bien voulu examiner ce travail.
Je voudrais également remercier tous les membres du département de mathématique et surtout son directeur et mon professeur Monsieur Mostafa ACILA et tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin pour achever ce travail.

Je tiens à remercier tous mes amis et mes collègues et surtout ceux avec qui on a passé une période agréable à l'université de Kasdi Merbeh de Ouargla.

Je voudrais également remercier toute ma famille, mes beaux parents, mes frères, mes soeurs, qui m'ont toujours soutenu et encouragé.

Table des matières

1 Préliminaires **8**
1.1 Notations et Définitions 8
1.1.1 Notations 8
1.1.2 La topologie faible 9
1.1.3 La topologie faible$*$. 10
1.1.4 Espaces réflexifs, espaces séparables 10
1.2 Rappels sur les espaces $L^p(\Omega)$ 11
1.2.1 Inégalités principales 11
1.2.2 Convolution et régularisation 12
1.3 Rappels sur les espaces de Sobolev 13
1.3.1 Dérivées faibles 13
1.3.2 Espaces de Sobolev 15
1.3.3 Théorèmes de densité 16
1.3.4 Trace 17
1.3.5 Compacité 19
1.3.6 Injections de Sobolev 19
1.4 Approximation d'équations aux dérivées partielles par des méthodes de décomposition 20
1.4.1 Problèmes d'évolution 20
1.4.2 Problèmes de calcul des variations 24
2 Résumé sur les travaux de L. Tartar : solutions oscillantes des équations de Carleman **26**
2.1 Introduction 26
2.2 Rappels sur les équations de Carleman 27
2.3 Questions et méthodes 27
2.4 Résultats 28
2.5 Généralisation 31

3 Le problème en dimension deux **32**
3.1 Position du problème 32
3.2 Etude de l'existence et l'unicité 33
3.2.1 L'unicité 33
3.2.2 Etude de l'existence 36
3.3 Estimations à priori 37
3.4 Passage à la limite 43
4 Etude de l'existence et l'unicité de la solution du problème en dimension trois **46**
4.1 Position du problème 46
4.2 Etude de l'existence 47
4.3 L'unicité 50
4.4 Estimations à priori 55
4.5 Passage à la limite 62

Introduction

Un grand nombre de phénomènes physiques, chimiques, biologiques et autres issus de la technologie moderne sont décris par des systèmes complexes d'équations différentielles aux dérivées partielles. La résolution numérique de ces systèmes d'équations nécessite des connaissances approfondies en mathématiques. Chacune de ces équations différentielles aux dérivées partielles peut être rèpertoriée par type. Ainsi, les équations de type elliptique décrivent les phénomènes de diffusion stationnaire, les équations de type parabolique décrivent les phénomènes de diffusion évolutive et les équations de type hyperbolique décrivent les phénomènes de transport à vitesse finie.

De plus, dans la plupart des cas, le phénomène physique évolue durant un intervalle de temps déterminé, aussi, afin de décrire convenablement le phénomène, nous devons imposer des conditions aux limites(au début et à la fin de l'intervalle de temps en question). Nous obtenons ainsi un problème aux limites pour des équations différentielles.

Nous allons donner dans ce mémoire un aperçu de quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites (et de calcul des variations) qui jouent actuellement un grand rôle en analyse numérique.
L'idée commune à ces méthodes est la "décomposition" : il s'agit, utilisant certaines propriétés spécifiques du problème (décomposition des opérateurs pour les problèmes aux limites, décomposition des opérateurs et des contraintes en calcul des variations), de ramener la résolution d'un problème donné à la résolution d'un certain nombre de problèmes beaucoup plus simples.

Il n'est pas possible de faire un exposé complet sur le sujet, nous nous contenterons de montrer sur quelques exemples l'idée générale de ces méthodes.

Dans ce travail, nous développons le cas des équations de Carleman, qui est un système hyperbolique non linéaire intervenant dans la théorie de la cinétique des gaz [2], et introduit par T. Carleman. Les méthodes de décomposition permettent d'obtenir un schéma d'approximation particulièrement simple.

On présente ici la résolution d'un problème tridimentionnel, mais on va commoncer le problème bidimentionnel :
Dans l'ouvert Q = Ω×]0, T[, où Ω =]a^1, b^1[×]a^2, b^2[.
On cherche les fonctions u(x, t) et v(x, t), tels que x ∈ Ω, t ∈]0, T[et vérifiant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x_1} + u^2 - v^2 = 0 \quad \text{avec} \quad u(a_1, x_2, t) = 0 \\ \qquad\qquad \text{et } u(x, 0) = u_0(x), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x_2} + v^2 - u^2 = 0 \quad \text{avec} \quad v(x_1, a_2, t) = 0 \\ \qquad\qquad \text{et } v(x, 0) = v_0(x), \end{cases} \tag{1}$$

Puis, on généralise au problème tridimentionnel : dans l'ouvert Q = Ω×]0, T[, où Ω =]a^1, b^1[×]a^2, b^2[×]a^3, b^3[.
On cherche les fonctions u(x, t), v(x, t) et w(x, t), telles que x ∈ Ω, t ∈]0, T[et vérifiant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x_1} + u^2 - v^2 = 0 \quad \text{avec} \quad u(a_1, x_2, x_3, t) = 0 \\ \qquad\qquad \text{et } u(x, 0) = u_0(x), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x_2} + v^2 - u^2 = 0 \quad \text{avec} \quad v(x_1, a_2, x_3, t) = 0 \\ \qquad\qquad \text{et } v(x, 0) = v_0(x), \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x_3} + w^2 - (u^2 - v^2) = 0 \text{ avec } w(x_1, x_2, a_3, t) = 0 \\ \qquad\qquad \text{et } w(x, 0) = w_0(x). \end{cases} \tag{1}$$

Nous allons d'abord démontrer l'unicité par la méthode classique. Pour la démonstration de l'existence on utilise la technique qui utilise la méthode de décomposition.
Premièrement, on étudie l'existence d'une approximation de la solution.
Deuxièment, on étudie des estimations à priori sur les approximations
Troisièment, on passe à la limite et par suite la démonstration de l'existence.

Ce mémoire est divisé en cinq chapitres.

Dans le chapitre 1, on présente quelques notations, définitions et préliminaires issus de l'analyse fonctionnelle et un aperçu de l'approximation d'équations aux dérivées partielles par des méthodes de décomposition, qui nous permettent de mieux comprendre le contenu de ce travail.

Dans le chapitre 2, on donne un résumé sur les travaux de L.TARTAR sur les solutions oscillantes des équations de Carleman

Dans le chapitre 3, nous traitons le problème en dimension deux, et on va étudier l'existence et l'unicité de la solution du problème

Dans le chapitre 4, on présente la généralisation du problème à la dimension trois, et on pose le théorème de l'existence et l'unicité de la solution.

Dans le chapitre 5, on va étudier l'existence et l'unicité de la solution du problème en dimension trois

On termine ce mémoire par une conclusion qui est une synthèse où on récapitule les résultats obtenus.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Notations et Définitions

1.1.1 Notations

Dans toute la suite nous utiliserons les notations suivantes :

• On désigne par p.p. la notation qui veut dire presque partout.

• $f \in L_{loc}(\Omega)$ si pour tout compact $K \subset \Omega$, $f \in L^1(K)$.

• $D(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions de classe $C\infty$ à support compact dans Ω.

• $B_{1,N} = \{x \in IR^N , \|x\| < 1\}$.

• $\underline{L}(X,X')$ désigne l'espace des applications linéaires de X dans X' continues inférieurement.
• C([0, T];X) désigne l'espace des fonctions de [0, T] dans X continues inférieurement.

• $C^{0,\alpha}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions α-holdériennes de $C^0(\Omega)$, c'est-à-dire qui vérifient $\exists k > 0$ tel que $\forall (x, y) \in \Omega$, $|u(x) - u(y)| \leq k\|x - y\|^{\alpha}$.

•Si E ⊂ V , $(E, ||.||_e) \hookrightarrow (V, ||.||_v)$ signifie que E s'injecte continuement dans V , c'est à dire que l'injection E → V est continue (donc ∃C > 0 tel que ∀x ∈ E, $||x||_v \leq C||x||_e$).

- $L^p(\Omega)$ est l'espace des fonctions de puissace p-ième sommable sur pour la mesure $dx = dx_1dx_2.....dx_n$

- $L^{\infty}(\Omega)$ est l'espace des (classes des) fonctions essentiellement bornés

Si $1 \leq p < \infty$: $||f||_{L^p(\Omega)} = (\int_\Omega |f|_p \, dx)^{\frac{1}{p}}$

Si $p = \infty$: $||f||_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$

- Pour T ≥ 0 et X un espace de Banach pour la norme $||.||_X$, On note :
  i. C(0, T,X) : l'espace des fonctions continues sur [0, T] à valeurs dans X.
  ii. $L^p(0, T,X)$: l'espace des fonctions v telles que :
  $t \to ||v(t)||_X$ est une fonction de $L^p(0, T)$, $1 \leq p \leq \infty$

• $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha i$.

1.1.2 La topologie faible

Définition 1.1.2.1 : Soit E un espace vectoriel réel ou complexe. Une application p de E dans IR^+, appelé ***semi-norme*** quand :
a) ∀x ∈ E, ∀λ ∈IR, ou IC, p(λx) = |λ|p(x)
b) ∀x ∈ E, ∀y ∈ E, p(x + y) ≤ p(x) + p(y)

Définition 1.1.2.2 : Soit E un espace vectoriel normé F un sous-espace vectoriel de E'(dual topologique de E), **la topologie faible** σ(E, F) sur E est définie comme ci-dessus par les semi-normes :

$$p_\phi : x \in E \longrightarrow p_\phi(x) = | < \phi, x > |. \text{ quand } \phi \text{ décrit F.}$$

Autrement dit :

$$x_n \to x \text{ dans } \sigma(E, F) \Leftrightarrow \forall \phi \in F, < \phi, x_n > \to < \phi, x >$$

1.1.3 La topologie faible$*$

Soit E un espace de Banach, E' son dual muni de la norme :

$$\|\phi\| = \sup_{x\in E,\|x\|\leq 1}|\phi(x)|$$

et E''son bidual, c'est à dire le dual de E'muni de la norme :

$$\|F\| = \sup_{\phi\in E',\|\phi\|\leq 1}|F(\phi)|$$

|

Proposition 1.1.3.1 Soit E un espace de Banach, E'' son bidual, alors l'application J de E dans E''définie par :

$$[J(x)](\phi) = \phi(x)$$

est une isométrie linéaire de E dans E''

.**Preuve.** : la démonstration de cette proposition se trouve dans M. SAMUELIDES, L. TOUZILLIER [10] (page 169).

Définition 1.1.3.1 Sur E' on a défini deux topologies : la topologie associée à la norme de E' et la topologie faible $\sigma(E',E'')$. On considérera aussi sur E' une autre topologie faible, la topologie $\sigma(E',E)$ appelée **topologie faible$*$** car J n'est pas nécessairement surjective, mais toujours d'identifier E à un sous-espace de E''.

Remarque 1.1.3.1 La topologie $\sigma(E',E)$ est la topologie la moins fine sur E' rendant continues toutes les applications ϕ_x où $x \in E$.
Donc chaque ouvert pour la topologie $\sigma(E',E)$ est un ouvert pour la topologie de la norme.

1.1.4 Espaces réflexifs, espaces séparables

Soit E un espace de Banach et $J : E \longrightarrow E''$ l'injection canonique de E dans E'' définie par :

$$J_x(f) = f(x), \text{ pour tout } x \in E, f \in E'$$

.

Définition 1.1.4.1 L'espace E est réflexif, si $J(E) = E''$

Théorème 1.1.4.1 Soit E un espace de Banach réflexif, alors toute suite bornée dans E admet au moins une sous-suite faiblement convergente.
Preuve. la démonstration de ce théorème se trouve dans H.BREZIS [1] (Théorème III.27, page 50).

Définition 1.1.4.2 Un espace métrique séparable est un espace métrique qui contient un sous ensemble D dense et dénombrable.

Théorème 1.1.4.2 Soit E un espace de Banach séparable, alors toute suite bornée $(f_n)_{n\geq 0}$ dans E' admet au moins une sous-suite faiblement$*$convergente.
Preuve : la démonstration de ce théorème se trouve dans H.BREZIS [1] (corollaire III.26, page 50).

1.2 Rappels sur les espaces $L^p(\Omega)$

1.2.1 Inégalités principales

Théorème 1.2.1.1 Si Ω est un ouvert de IR^N $1 \leq p , q \leq \infty$ deux réels et q=p' l'exposant conjugué de p, c'est à dire $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$
(1) Inégalité de Hölder
Si $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^{p'}(\Omega)$, alors $f.g \in L^1(\Omega)$ et

$$\|f.g\|_{L1(\Omega)} \leq \|f\|_{Lp(\Omega)} \|g\|_{Lp'(\Omega)}$$

(2) Inégalité d'interpolation
Si $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, alors $f \in L^r(\Omega)$ quelque soit $r \in [p, q]$ et

$$\|f\|_{Lr(\Omega)} \leq \|f\|^{\alpha}_{Lp(\Omega)} \|f\|^{1-\alpha}_{Lq(\Omega)} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$$

pour un certain $0 \leq \alpha \leq 1$

(3) Inégalité d'inclusion
Si de plus $|\Omega| < \infty$ et $f \in L^q(\Omega)$, alors $f \in L^p(\Omega)$ et

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_{L^q(\Omega)}$$

En particulier

$$Lp(\Omega) \subset Lq(\Omega), \forall 1 \leq p , q < \infty$$

1.2.2 Convolution et régularisation

Définition 1.2.2.1 Soit $\rho \in C^{\infty}_{0}(IR^N)$ une fonction non négative telle que :

$$\int_{IRN} \rho(x)dx = 1, \quad supp\rho \subset \bar{B}(0, 1)$$

Pour $\varepsilon > 0$ arbitrairement choisi, la fonction $\rho_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-N}\rho(\frac{x}{\varepsilon})$ appartient à $C^{\infty}_{0}(IR^N)$ et supp $\rho_\varepsilon \subset \bar{B}(0, \varepsilon)$. La fonction ρ_ε est appelée fonction régularisante et la convolution :

$$u_\varepsilon(x) := (\rho_\varepsilon * u)(x) = \int_{IRN} \rho\varepsilon(x - y)u(y)dy$$

est appelée, pour autant que le membre à droite de l'égalité ait un sens, la régularisation de u.

Corollaire 1.2.2.1 Soient $p \geq 1$, $f \in L^1(IR^N)$ et $g \in L^p(IR^N)$. Les assertions suivantes sont vérifiées :
(1) pour presque tout $x \in IR^N$, la fonction $y \longmapsto f(x - y)g(y)$ est intégrable sur IR^N.
(2) on pose

$$(f * g)(x) = \int_{IRN} f(x - y)g(y)dy$$

Alors $f * g \in L^p(IR^N)$ et $\|f * g\|_{Lp(IRN)} \leq \|f\|_{L1(IRN)} \|g\|_{Lp(IRN)}$
En outre, on a $(f * g)(x) = (g * f)(x)$

Théorème 1.2.2.1 Soient $f \in C^k_0(IR^N)$, $g \in L^1_{loc}(IR^N)$ et α un multi-indice tel que $|\alpha| = k$. Alors

$$f * g \in C^k(IR^N) \quad \text{et} \quad D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f) * g$$

En particulier si $f \in C^{\infty}_{0}(IR^N)$, $g \in L^1_{loc}(IR^N)$, alors $f * g \in C^\infty(IR^N)$. Ici D^α représente la α-ième dérivée au sens usuel.

Corollaire 1.2.2.2 Si $u \in L^1_{loc}(IR^N)$, $\varepsilon > 0$, alors $u_\varepsilon \in C^\infty(IR^N)$.
et $D^\alpha(\rho_\varepsilon * u) = (D^\alpha\rho_\varepsilon) * u$

Théorème 1.2.2.2 Soit $u \in C(IR^N)$, alors $\rho_\varepsilon * u \longrightarrow u$ uniformément sur tout compact de IR^N.
.

Corollaire 1.2.2.3 Soient Ω un domaine ouvert de IR^N et u une fonction définie sur IR^N qui s'annule identiquement en dehors de Ω. Les assertions suivantes sont vérifiées :

(1) Si $u \in L^1_{loc}(\bar{\Omega})$ alors $u \in C\infty(IRN)$.

(2) Si de plus supp $u \subset\subset \Omega$, alors $u_\varepsilon \in C^\infty_0(IR^N)$ pour autant que $\varepsilon <$ dist(suppu, $\partial\Omega$)

(3) Si $u \in L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p < \infty$, alors $u_\varepsilon \in L^p(\Omega)$. De plus

$$\| u\varepsilon \|_{Lp(\Omega)} \leq \| u \|_{Lp(\Omega)} \text{ et } \lim \varepsilon_{\to 0} \| u\varepsilon - u \|_{Lp(\Omega)} = 0$$

(4) Si $u \in C(\Omega)$ et $\Omega' \subset\subset \Omega$, alors $\lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(x) = u(x)$ uniformément sur Ω'

(5) Si $u \in C(\bar{\Omega})$, alors $\lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(x) = u(x)$ uniformément sur Ω

(6) $C^\infty_0(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ si $1 \leq p < \infty$.

1.3 Rappels sur les espaces de Sobolev

Dans tout ce qui suit Ω est un ouvert de IR^N et p est un réel tel que $1 \leq p \leq \infty$.

1.3.1 Dérivées faibles

Lemme 1.3.1.1 Soient $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$. Si pour toute fonction $\phi \in D(\Omega)$ on a :

$$\int_\Omega f(x)\,\phi(x)\,dx = \int_\Omega g(x)\,\phi(x)\,dx$$

$$\text{alors} \quad f = g \quad \text{p.p.}$$

Définition 1.3.1.1 On dit que $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ est dérivable dans la direction i, $i \in [1,N]$, au sens faible s'il existe $D_i f \in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que pour toute fonction $\phi \in D(\Omega)$,

$$\int_\Omega f(x)\,\frac{\partial\phi}{\partial xi}\,dx = \int_\Omega Dif\phi(x)\,dx$$

Remarque 1.3.1.1 Par le lemme ci-dessus, si une telle $D_i f$ existe, elle est unique. Néanmoins, elle n'existe pas toujours...

Définition 1.3.1.2 Si Ω est un ouvert de IR^N alors on note :

1. Pour $K \subset \Omega$ compact, $D_K(\Omega) = \{\phi \in D(\Omega) \mid supp(\phi) \subset K\}$,
2. Pour $\alpha \in IN^N$ et $\phi \in D(\Omega)$, $P_\alpha(\phi) = \|\partial\alpha\phi\ \|\infty$.

Remarque 1.3.1.2 pour $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N) \in IN^N$, $\partial^\alpha\phi$ désigne $\frac{\partial^{\alpha 1+...+\alpha N}\phi}{\partial x^{\alpha 1}.....x^{\alpha N}}$.

Définition 1.3.1.3

1. On dit que $T \in D'(\Omega)$, (T est une distribution) si
$T : D(\Omega) \longrightarrow IR$, est linéaire et vérifie : pour tout K compact inclu dans Ω, il existe $C_K > 0$ et $m_K \in IN$, tels que $\forall\phi \in D_K(\Omega)$,
$| < T, \phi > | = C_K \sup_{|\alpha|\leq mK} P\alpha(\phi)$.
2. Si i ∈ [1,N] alors on définit la dérivée de $T \in D'(\Omega)$ dans la direction i comme étant la distribution D_iT vérifiant :

$$< D_iT, \phi >= - < T, \frac{\partial\phi}{\partial xi} >$$

Remarques 1.3.1.3

1. On a bien sûr noté $T(\phi) =< T, \phi >$.
2. S'il existe $m \in IN$, tel que l'on puisse choisir $m_K = m$ pour tout $K \subset \Omega$ compact, alors on dit que T est d'ordre inférieur à m.
Une mesure de Radon est une distribution d'ordre 0
3. Si $T \in D'(\Omega)$ est d'ordre m alors $D_iT \in D'(\Omega)$ est d'ordre m + 1.

Définition 1.3.1.4 Si $(T_n) \in D'(\Omega)$ et $T \in D'(\Omega)$ alors :

$$T_n \xrightarrow{D'} T \text{ si } \forall\phi \in D(\Omega), < Tn, \phi > \longmapsto < T, \phi >.$$

Remarque 1.3.1.4 : On a alors $T_n \xrightarrow{D'} T$ implique $D_iT_n \xrightarrow{D'} DiT$.

Définition 1.3.1.5 Si $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ alors on définit la distribution d'ordre 0 :

$$T_f(\phi) = \int_\Omega f(x)\,\phi(x)\,dx$$

On appelle alors dérivée faible, au sens des distributions, de f dans la direction i la distribution $D_i T_f$ que l'on note $D_i f$.

Remarque 1.3.1.5 : Si f est dérivable au sens faible dans la direction i alors :

$$D_i T_f = T_{Dif}\ .$$

Proposition 1.3.1.1 : Si $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ alors :

f est lipschitzienne ssi $\forall i \in [1,N]$, $D_i f \in L^\infty(\Omega)$.

1.3.2 Espaces de Sobolev

Définition 1.3.2.1 Les espaces de Sobolev sont, pour Ω ouvert de IR^N, $m \in IN$, et $p \in [1,+\infty]$:

$H^m(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) \mid \forall \alpha \in IN^N \text{ avec } |\alpha| \le m,\ D^\alpha f \in L^2(\Omega)\}$,

$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) \mid \forall \alpha \in IN^N \text{ avec } |\alpha| \le m, D^\alpha f \in L^p(\Omega)\}$.

On définit :

sur $H^m(\Omega)$, le produit scalaire $< u, v >_{Hm} = \sum_{|\alpha|\le m} < D\alpha u, D\alpha v >_{L^2}$,

sur $W^{m,p}(\Omega)$, la norme $\|u\|_{W^{m,p}} = \sum_{|\alpha|\le m} \|D^\alpha u\|_p$.

Remarques 1.3.2.1

1. $D_i f$ étant une distribution, $D_i f \in L^2$ signifie qu'il existe $g \in L^2$ telle que $D_i f = T_g$:

$$\forall \phi \in D(\Omega),\ < D_i f, \phi > = \int_\Omega g(x)\,\phi(x)\,dx$$

.

2. $W^{m,2} = H^m$ et les normes sur $W^{m,2}$ et sur H^m sont équivalentes.

Proposition 1.3.2.1

1. $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach.
2. Pour $p < +\infty$, $W^{m,p}(\Omega)$ est séparable.
3. Pour $1 < p < +\infty$, $W^{m,p}(\Omega)$ est réflexif.

Remarque 1.3.2.2 $H^m(\Omega)$ est donc un banach muni d'un produit scalaire : c'est un hilbert.

Définition 1.3.2.2 :
Si Ω est un ouvert de IR^N, m $\in$IN, et p $\in [1,+\infty]$, on définit :
$W^{m,p}{}_0(\Omega) = \overline{D(\Omega)}$, où l'adhérence est prise pour la topologie de $W^{m,p}(\Omega)$.

Proposition 1.3.2.2 Si $u \in W^{m,p}{}_0(\Omega)$ et $\tilde{u}$ est définie par :

$$\begin{cases} u \text{ sur } \Omega \\ 0 \text{ sur } \Omega^c \end{cases}$$

alors $\tilde{u} \in W^{m,p}(\Omega)$.

1.3.3 Théorèmes de densité

Théorème 1.3.3.1 Si $1 \leq p < \infty$ alors $D(IR^N)$ est dense dans $W^{m,p}(IR^N)$.

Définition 1.3.3.1 Si Ω est un ouvert de IR^N, on pose :

$$C^\infty{}_c(\overline{\Omega}) = \{u_\Omega, u \in D(IR^N)\}.$$

Théorème 1.3.3.2 Si $IR^N{}_+ = \{(x_1, y) \in IR^N \mid x_1 > 0, y \in IR^{N-1}\}$
et $1 \leq p < \infty$ alors :

1. $C^\infty{}_c(\overline{IR}^N{}_+)$ est dense dans $W^{1,p}(IR^N{}_+)$.
2. Il existe une application linéaire continue
   $P : W^{1,p}(IR^N{}_+) \rightarrow W^{1,p}(IR^N)$, telle que :
   $\forall u \in W^{1,p}(IR^N{}_+)$, $P(u) = u$ sur $IR^N{}_+$.

Remarque 1.3.3.1 On a en fait $W^{1,p}(IR^N_+) = \{u_{IR^N_+}, u \in W^{1,p}(IR^N)\}$.

Définition 1.3.3.2 Un ouvert borné Ω de IRN est dit à frontière lipschitzienne s'il existe des ouverts $(O_0, O_1, ..., O_n)$ de IR^N et des applications $(\phi_0, \phi_1, ..., \phi_n)$ tels que :
– $\overline{\Omega} \subset \bigcup_{i=0}^{n} Oi$ et $O_i \subset \Omega$,
– $\phi_0 : O_0 \longrightarrow B^{1,N}$ est bijective avec ϕ_0, ${\phi^{-1}}_0$ lipschitziennes,
– Pour tout $i \geq 1$, $\phi_i : O_i \longrightarrow B^{1,N}$ est bijective avec ϕ_i, ${\phi^{-1}}_i$ lipschitziennes et $\phi_i(O_i \cap \Omega) = B^{1,N} \cap IR^N_+$, $\phi_i(O_i \cap \partial\Omega) = B^{1,N} \cap \{(0, y), y \in IR^{N-1}\}$.

Théorème 1.3.3.3 Si Ω est un ouvert borné à frontière lipschitzienne et $1 \leq p < \infty$ alors :
1. ${C^\infty}_c(\Omega)$ est dense dans $W^{1,p}(\Omega)$.
2. il existe une application linéaire continue

$P : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{1,p}(IR^N)$, telle que :
$\forall u \in W^{1,p}(\Omega)$, $P(u) = u$ sur Ω.

1.3.4 Trace

Si $1 \leq p < \infty$ et Ω est un ouvert borné à frontière lipschitzienne alors l'application :

$$\gamma_0 = \begin{cases} C_c^\infty(\Omega) \subset W1,p(\Omega) \to Lp(\partial\Omega) \\ u \to u|\partial\Omega \end{cases}$$

est linéaire continue et se prolonge donc en une unique application linéaire continue $\gamma : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\partial\Omega)$: c'est l'opérateur trace.

Remarque 1.3.4.1 Si $\Omega = IR^N_+$ alors $L^p(\partial\Omega) = L^p(IR^{N-1})$. En fait, pour démontrer la continuité de γ_0, on la fait pour $\Omega = IR^N_+$ et on se ramène à ce cas pour Ω borné à frontière lipschitzienne.

Remarque 1.3.4.2 Pour définir une intégrale sur $\partial\Omega$, on prend $(\alpha_i)_{i\in[0,n]}$ une approximation de l'unité C^∞ subordonnée au recouvrement (O_i), et on écrit :

$$\int_{\partial\Omega} f(x)d\sigma(x) = \sum_{u=1}^{n} \int_{Oi\cap\partial\Omega} \alpha i(x)f(x)d\sigma(x).$$

On est donc ramené à calculer

$$\int_{Oi\cap\partial\Omega} g(x)d\sigma(x) \quad i \in [0, n]$$

pour cela, on paramétrise $O_i \cap \partial\Omega$ par $\gamma(y) = \phi^{-1}{}_i\,(0, y)$, $(y \in B^{1,N-1})$ et on pose :

$$\int_{Oi\cap\partial\Omega} g(x)d\sigma(x) = \int_{B1,N-1} g(\gamma(y)) \left\| \frac{\partial\gamma}{\partial y1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial\gamma}{\partial yN-1} \right\| dy$$

où $\|.\|$ est la norme euclidienne et $a_1 \wedge \wedge a_{N-1}$ est le produit mixte dans IR^N.

Proposition 1.3.4.1 Si Ω est un ouvert borné à frontière lipschitzienne alors :

1. $\ker\gamma = W^{1,p}(\Omega)$
2. Si $u \in C(\bar{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega)$ alors $\gamma u = u_{|\partial\Omega}$.

Proposition 1.3.4.2 Si Ω est un ouvert borné à frontière lipschitzienne et $n(x) = (n_1(x), ..., n_N(x))$ désigne la normale extérieure à $\partial\Omega$ en x alors, pour tous $(u, v) \in H^1(\Omega)$ et $i \in [1,N]$, on a :

$$\int_\Omega u(x)Div(x)dx = \int_{\partial\Omega} \gamma u(y)\gamma v(y)ni(y)d\sigma(y) - \int_\Omega Diu(x)v(x)dx$$

Remarque 1.3.4.3 Ce théorème d'intégration par parties est aussi valable si $\Omega = IR^N{}_+$. Dans ce cas, le vecteur normal extérieur à $IR^N{}_+$ est constant : $n = (-1, 0, ..., 0)$.

1.3.5 Compacité

Théorème 1.3.5.1 (Kolmogorov) Si Ω est un ouvert borné et $1 \leq p < \infty$ et $B \subset L^p(\Omega)$ alors les propositions suivantes sont équivalentes :

1. B est relativement compacte dans $L^p(\Omega)$
2. Il existe un opérateur $P : B \to L^p(IR^N)$ tel que :
   – $\forall u \in B$, $Pu = u$ sur Ω,
   – $\{Pu , u \in B\}$ est borné dans $L^p(IR^N)$
   – $\sup_{u \in B} \|\tau_h Pu - Pu\|_{L^p(IR^N)} \to 0$ quand $h \to 0$.

Théorème 1.3.5.2 (Rellich) Si Ω est un ouvert borné à frontière lipschitzienne et $1 \leq p < \infty$ alors toute partie bornée dans $W^{1,p}(\Omega)$ est relativement compacte dans $L^p(\Omega)$.

Remarque 1.3.5.1 Ceci traduit que l'inculsion $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ est compacte.

Remarque 1.3.5.2 Si l'on supprime l'hypothèse "à frontière lipschitzienne" alors le théorème reste valable en remplaçant $W^{1,p}$ par $W^{1,p}_0$.

Théorème 1.3.5.3 Si Ω est un ouvert borné à frontière lipschitzienne et $1 < p < \infty$ alors la trace $\gamma : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ est compacte.

Remarque 1.3.5.3 Une application linéaire est compacte si l'image de tout borné est relativement compacte.

Remarque 1.3.5.4 Ce théorème est faux pour $p = 1$, puisque : $\gamma : W^{1,1}(\Omega) \to L^1(\partial\Omega)$ est surjective.

1.3.6 Injections de Sobolev

Théorème 1.3.6.1 Si Ω est un ouvert borné à frontière lipschitzienne ou si $\Omega = IR^N$ on a :

1. si $p < N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{Np}{N-p}}(\Omega)$
2. si $p > N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,1-\frac{N}{p}}(\Omega)$
3. pour tout $q \in]N, +\infty[$, $W^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$.

Remarque 1.3.6.1 Si l'on supprime l'hypothèse "à frontiére lipschitzienne" alors le théorème reste valable en remplaçant $W^{1,p}$par $W^{1,p}{}_0$. Dans ce cas, et si N > 1, le 3) est même valable pour tout q ∈ [1,+∞[.

1.4 Approximation d'équations aux dérivées partielles par des méthodes de décomposition

1.4.1 Problèmes d'évolution

Description heuristique de la méthode des pas fractionnaires

On considère dans un espace de Hilbert H une équation d'évolution

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t) + Au(t) = f(t), 0 < t < T \\ u(0) = u0. \end{cases} \quad (1.1)$$

où A est un opérateur linéaire dans H (hypothèses à préciser).
Dans les méthodes usuelles d'approximation, on considère un découpage de l'intervalle [0, T] en N intervalles égaux de longueur k, et on définit une famille d'éléments de H,

$$u^0, u^1, ..., u^N.$$

Par récurrence, en part de :

$$u^0 = u_0 \quad (1.2)$$

et de :

$$\begin{cases} \frac{u^{n+1}-u^n}{k} + Au^{n+1} = f^{n+1}\left(= f\big((n+1)k\big)\right), \\ n = 0, \ldots, N-1. \end{cases} \quad (1.3)$$

.

Si l'opérateur A admet une décomposition :

$$A = \sum_{i=1}^{q} A_i \quad (1.4)$$

on peut utiliser cette décomposition pour approcher (1.1) et ceci conduit au schéma de pas fractionnaires suivant : on définit les éléments :

$$u^{n+\frac{i}{q}},\ n = 0, ...,N-1,\ i = 1, ..., q$$

tels que :

$$u^0 = u_0 \tag{1.5}$$

et

$$\begin{cases} \frac{u^{n+\frac{i}{q}} - u^{n-\frac{i-1}{q}}}{k} + A_i u^{n+\frac{i}{q}} = f^{n+\frac{i}{q}}, \\ n = 0, \ldots, N-1, i = 1, \ldots, q. \end{cases} \tag{1.6}$$

.

Où

$$f^{n+1} = \sum_{i=1}^{q} f^{n+\frac{i}{q}} \tag{1.7}$$

Dans le cas du schéma (1.3), le calcul de u^{n+1} nécessite l'inversion de l'opérateur (I+kA) ; dans le cas du schéma (1.6), le calcul de $u^{n+\frac{i}{q}}$, ..., u^{n+1}, nécessite l'inversion des opérateurs $(I + A_1)$, ..., $(I + kA_q)$, et la méthode est intéressante lorsque l'inversion de ces opérateurs est plus simple que l'inversion de l'opérateur I + kA.

Un résultat de convergence

Nous allons énoncer un résultat précis sur la manière dont les $u^{n+\frac{i}{q}}$ approximent la solution u de (1.1). On se reportera à [13] pour la démonstration de ce résultat et pour d'autres résultats plus généraux.
Soient V_i, i = 1, ..., q, des espaces de Hilbert,

$$V = \bigcap_{i=1}^{q} V_i, \text{ avec } V \subset Vi \subset H$$

les injections étant continues et chaque espace étant dense dans le suivant.
On identifie H à son dual, V' désigne le dual de Vi, V'celui de V , on a

$$V \subset V_i \subset H \subset V_i' \subset V' \tag{1.8}$$

avec injections continues, chaque espace étant dense dans le suivant.
Supposons que Ai $\in \underline{L}$ (V_i, V') avec

$$\begin{cases} (A_i v, v) \geq \alpha_i \|v\|_{V_i}^2, \\ \forall v \in V_i, \alpha_i > 0. \end{cases} \tag{1.9}$$

Alors, pour u0 donnée dans H et f donnée dans L^2([O, T];H), l'équation (1.1) possède une solution unique u $\in L^2$([O, T]; V) $\cap$ C([0, T];H) (cf. Lions[6])

On se donne une décomposition arbitraire de f

$$f = \sum_{i=1}^{q} f^i,\ f^i \in L^2([O, T];H) \tag{1.10}$$

et on pose :

$$f((n + \frac{i}{q})k) = f^{n+\frac{i}{q}} = \frac{1}{k}\int_{nk}^{(n+1)k} f_i(s)ds \tag{1.11}$$

Les équations (1.6) définissent alors de manière unique les $u^{n+\frac{i}{q}}$ comme éléments de V_i, on introduit les fonctions étagées u_{ik}, $1 \leq i \leq q$:

$$u_{ik} = u^{n+\frac{i}{q}}, \text{ pour } t \in [nk, (n + 1)k[,\ i = 1, ..., q$$

et on a le résultat de convegernce (cf .[13]).

Théorème 1.4.1.1 Lorsque $k \longrightarrow 0$,

1. u_{ik} converge vers u dans L^2 ([O, T]; Vi) fort et L^{∞}([O, T];H) faible$*$
2. $u_{ik}(t) \longrightarrow u(t)$ dans H fort, $\forall t \in [0, T]$, où u est la solution unique de (1.1).

Cas particulier q = 2

De façon générale et formelle, considérons le système (u désignant éventuellement un vecteur) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A_1(u) + A_2(u) = f, \tag{1.12}$$

où A_1 et A_2 sont deux opérateurs linéaires ou non.
Soit :

$$k = \Delta t$$

le pas de temps et supposons que nous connaissions :

$$u^n = \text{« approximation » de u à l'instant nk.}$$

Nous déterminons alors u^{n+1}=(« approximation » de u à l'instant (n + 1)k) en deux étapes :

Première étape : on considère l'équation :

$$\begin{cases} \frac{\partial w_1}{\partial t} + A_1(w_1) = f_1, \\ w_1 \text{vérifiant les conditions aux limites « correspondantes à } A_1\text{»}, \\ w_1(nk) = u^n. \end{cases} \quad (1.13)$$

Et on « calcule » :

$$w_1((n+1)k) = u^{n+\frac{1}{2}} \quad (1.14)$$

Deuxième étape : on considère la « deuxième partie » de l'équation (1.12)

$$\begin{cases} \frac{\partial w_2}{\partial t} + A_2(w_2) = f_2, \\ w_2 \text{vérifiant les conditions aux limites « correspondantes à } A_2\text{»}, \\ w_2(nk) = u^{n+\frac{1}{2}}. \end{cases} \quad (1.15)$$

où

$$f_1 + f_2 = f.$$

On prend alors :

$$u^{n+1} = W_2((n+1)k) \quad (1.16)$$

Pour « l'intégration » de (1.13) (1.15) il est naturel de se borner à une approximation de l'équation (1.13) (ou (1.15)) (puisque, même une intégration exacte ne fournit qu'une « approximation » de u).
On arrive ainsi, par exemple, au schéma décomposé (ou de pas fractionnaire) :

$$\begin{cases} \frac{u^{n+\frac{1}{2}} - u^n}{k} + A_1 u^{n+\frac{1}{2}} = f_1^n, \\ . \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}}}{k} + A_2 u^{n+1} = f_2^n. \end{cases} \quad (1.17)$$

1.4.2 Problèmes de calcul des variations

Soient H un espace de Hilbert, V_i, $1 \leq i \leq q$, des espaces de Banach réflexifs, $V = \bigcap_{i=1}^{q} V_i$, avec :

$$V \subset V_i \subset H, \tag{1.18}$$

les injections étant continues et chaque espace étant dense dans le suivant. Pour chaque i, soit K_i un ensemble convexe fermé de V_i et soit $K = \bigcap_{i=1}^{q} K_i$. Soit J_i une fonctionnelle réelle définie sur K_i, strictement convexe, semi-continue intérieurement et vérifiant :

$$\lim_{u \in K_i,\ \|u\|_{V_i} \to \infty} \{J_i(u)\} = \infty$$

Soit alors : $J = \sum_{i=1}^{q} J_i$
Il est bien connu que le problème d'optimisation :

$$\inf_{v \in K} J(v), \tag{1.19}$$

possède une solution unique u.
On peut proposer un algorithme d'approximation de u par décomposition : soient $\tau > 0$ et un entier N fixés ($\frac{1}{\tau}$ et N destinés à tendre vers l'infini).
On définit une famille d'éléments $u^{n+\frac{i}{q}}$ n = 0, ...,N , i = 1, ..., q.
On part de :

$$u^0 \in H \text{ quelconque}, \tag{1.20}$$

puis, lorsque u^0, ..., $u^{n+\frac{i-1}{q}}$ sont connus, on définit :

$$u^{n+\frac{i}{q}} \in K_i, \tag{1.21}$$

car la solution du problème existe et unique :

$$\inf_{v \in K_i} \{ \left| v - u^{n+\frac{i-1}{q}} \right|_H^2 + \tau J_i(v) \} \tag{1.22}$$

Ayant ainsi définit les $u^{n+\frac{i}{q}}$, on introduit les moyennes (du type Cesaro) :

$$w^{n+\frac{i}{q}} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u^{n+\frac{i}{q}} \in K_i. \tag{1.23}$$

On démontre alors le résultat suivant (cf. J.-L. Lions et R. Temam [7]) :

Théorème 1.4.2.1- Sous les hypothèses précédentes, si $\tau \to 0$, $N \to \infty$ avec

$$\tau N \to \infty \tag{1.24}$$

alors, pour tout i, $1 \leq i \leq q$,

$$w^{n+\frac{i}{q}} \to u \tag{1.25}$$

solution de (1.19) dans V_i faible.

Chapitre 2

Résumé sur les travaux de L. Tartar : solutions oscillantes des équations de Carleman

2.1 Introduction

Le but de cet exposé est de présenter un phénomène de propagation d'oscillations pour des équations aux dérivées partielles non linéaires qui n'a rien à voir avec la propagation des singularités.
Il est utile de signaler que l'importance pratique du modèle de Carleman considéré ici (au moins en théorie cinétique) est quasiment nulle et qu'il serait important d'étudier les phénomènes analogues sur des modèles plus raisonnables. Une tentative dans cette direction est faite sur le modèle de Broadwell.

2.2 Rappels sur les équations de Carleman

On a le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + u^2 - v^2 = 0 \quad x \in IR, t \geq 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x} + v^2 - u^2 = 0 \quad x \in IR, t \geq 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

avec les données initiales :

$$\begin{cases} u(x,0) = \phi(x) \\ v(x,0) = \psi(x). \end{cases} \tag{2.2}$$

Les équations (2.1), (2.2) permettent de définir un semi-groupe (non-linéaire) S(t) dont on connait les propriétés suivantes :

R_1 : Si $0 \leq \phi, \psi \leq M_o$ alors la solution $(u, v) = S(t)(\phi, \psi)$ existe sur $t \in [0,+\infty[$ et vérifie $0 \leq u, v \leq M_0$.

R_2 : Le semi groupe S(t) est de contraction dans $L^1(IR) \times L^1(IR)$ (il est seulement défini sur les fonctions positives).
R3 : S(t) n'est pas (séquentiellement) continu sur $L^\infty(IR) \times L^\infty(IR)$ muni de la topologie faible$*$

R4 : Si $0 \leq \phi, \psi$, avec $\int(\phi + \psi)dx = m$ alors $0 \leq u(x, t), v(x, t) \leq \frac{C(m)}{t}$ pour une certaine fonction C(m).

2.3 Questions et méthodes

La première question, assez naturelle quand on a R_1 et R_3, est la suivante :
Ql : Soit $0 \leq \phi_\varepsilon, \psi_\varepsilon \leq M_o$ pour une suite ε (tendant vers 0) alors u_ε, v_ε les solutions vérifient aussi $0 \leq u_\varepsilon, v_\varepsilon \leq M$; si ϕ_ε et ψ_ε convergent dans L^∞ faible$*$ que peut on dire de u_ε, v_ε?

La deuxième question est liée à R4 :
Q2 : Soit $0 \leq \phi, \psi$ avec ϕ et $\psi \in L^1(IR)$ étudier le comportement à $t = +\infty$ de la solution (u, v).

La troisième question est liée à R_3 et concerne l'extension de S(t) à des mesures

Q_3 : Si $0 \leq \phi_\varepsilon, \psi_\varepsilon$ est une suite de $L^1(IR) \times L^1(IR)$ convergeant vaguement vers $(\alpha\delta_0, \beta\delta_0)$ que peut on dire des solutions $u_\varepsilon, v_\varepsilon$?

En plus de propriétés élémentaires du système (2.1), (2.2) on a :

Conservation de la masse :

$$\int_{IR}(u(x,t) + v(x,t))dx = \int_{IR}(\phi(x) + \psi(x))dx \qquad (2.3)$$

Invariance de (2.1) par le changement :

$$(u, v) \rightarrow (\lambda u(\lambda x, \lambda t), \lambda v(\lambda x, \lambda t)) \qquad (2.4)$$

On utilisera le lemme de compacité par compensation suivant :

Lemme 2.3.1 Soit $(w_\varepsilon, z_\varepsilon)$ une suite de $L^\infty(IR^2_+) \times L^\infty(IR^2_+)$ vérifiant :

$$\begin{cases} \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x} & \text{borné dans } L^\infty(IR^2_+) \\ \frac{\partial z_\varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial z_\varepsilon}{\partial x} & \text{borné dans } L^\infty(IR^2_+) \end{cases} \qquad (2.5)$$

alors si w_ε et z_ε convergent dans $L^\infty(IR^2_+)$ faible$*$ vers w_0 et z_0
le produit $w_\varepsilon, z_\varepsilon$ converge dans $L^\infty(IR^2_+)$ faible$*$ vers le produit w0z0.

2.4 Résultats

Pour répondre à la question 1 on doit remarquer que la connaissance des limites de ϕ_ε et ψ_ε est insuffisante pour caractériser les limites de u_ε et v_ε; il faut plus d'information, comme par exemple les limites des puissances ϕ_ε^m et ψ_ε^m pour tout m (qui, en général ne se déduisent pas les unes des autres). Il est important de remarquer que, pour le modèle considéré, aucune corrélation entre ϕ_ε et ψ_ε n'intervient.

Soit une suite $(\phi_\varepsilon, \psi_\varepsilon)$ vérifiant :

$$0 \leq \phi_\varepsilon, \psi_\varepsilon \leq M_o \text{ presque partout} \qquad (2.6)$$

$$\begin{cases} \phi_\varepsilon^m \rightarrow \phi^m \text{ dans } L^\infty(IR) \text{ faible} *, m = 1, 2, \ldots. \\ \psi_\varepsilon^m \rightarrow \psi^m \text{ dans } L^\infty(IR) \text{ faible} *, m = 1, 2, \ldots. \end{cases} \qquad (2.7)$$

Alors la suite des solutions (u_ε, v_ε) vérifie :

$$\begin{cases} u_\varepsilon^m \rightarrow u^m \text{ dans } L^\infty(IR_+^2) \text{ faible} *, m = 1, 2, \ldots. \\ v_\varepsilon^m \rightarrow v^m \text{ dans } L^\infty(IR_+^2) \text{ faible} *, m = 1, 2, \ldots. \end{cases} \tag{2.8}$$

où la famille (U_1..., V_1, ...) est la solution unique du système infini :

$$\begin{cases} \frac{\partial U_m}{\partial t} + \frac{\partial U_m}{\partial x} + mU_{m+1} - mU_{m-1}V_2 = 0 \quad x \in IR, t \geq 0 \\ \frac{\partial V_m}{\partial t} + \frac{\partial V_m}{\partial x} + mV_{m+1} - mV_{m-1}U_2 = 0 \quad x \in IR, t \geq 0 \\ 0 \leq U_m, V_m \leq M_0^m \end{cases} \tag{2.9}$$

vérifiant les conditions aux limites :

$$\begin{cases} U(x, 0) = \phi_m(x) \\ V(x, 0) = \psi_m(x) \end{cases} \tag{2.10}$$

Prenons le cas simple (le cas général n'est pas très différent) où la suite (ϕ_ε , ψ_ε) est de la forme (ε tend vers 0) :

$$\begin{cases} \phi_\varepsilon(x) = a(x, \frac{x}{\varepsilon}) \\ \psi_\varepsilon(x) = b\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right). \end{cases} \tag{2.11}$$

$$0 \leq a , b \leq M_o \tag{2.12}$$

a et b étant périodiques de période 1 dans la deuxième variable (et régulières)
Alors :

$$\begin{cases} \phi_m(x) = \int_0^1 a(x, y)^m dy \\ . \\ \psi_m(x) = \int_0^1 b(x, y)^m dy \end{cases} \tag{2.13}$$

Et la solution du système (2.9), (2.10) est très simple :

Corollaire 2.4.1 Sous les hypothèses (2.11), (2.12) la solution de (2.9), (2.10) est donnée par :

$$\begin{cases} U_m(x, t) = \int_0^1 A(x, y, t)^m dy \\ . \\ V_m(x, t) = \int_0^1 B(x, y, t)^m dy \end{cases} \tag{2.14}$$

où A, B est la solution unique (qui vérifie $0 \leq A, B \leq M_o$) de :

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x} + A^2 = \int_0^1 B(x,y,t)^2 dy \\ \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial x} - B^2 = \int_0^1 A(x,y,t)^2 dy \end{cases} \quad (2.14)$$

$$A(x, y, 0) = a(x, y), B(x, y, 0) = b(x, y)$$

On voit donc sur (2.15) que l'effet de la convergence faible se réduit à l'adjonction d'une variable "d'espace" supplémentaire. Si on ne s'intéresse qu'aux limites faibles U_1 et V_1 il suffit, après avoir résolu (2.15), de supprimer la variable y par une intégration.

Un corollaire important du système (2.9) est l'inégalité suivante sur les variances :

Corollaire 2.4.2 La variance $\sigma_u(x, t) = U_2(x, t) - U^2{}_1 (x, t)$ vérifie 1'inégalité $\frac{\partial}{\partial t}\sigma_u + \frac{\partial}{\partial x}\sigma_u \leq 0$.
De même $\sigma_v = V^2 - V^2{}_1$ vérifie $\frac{\partial}{\partial t}\sigma_v + \frac{\partial}{\partial x}\sigma_v \leq 0$

Une des conséquences importantes est la propagation des oscillations, ou plus précisément la non création d'oscillations.

Corollaire 2.4.3 Si ϕ_ε converge fortement (dans $L^1(I)$) sur un intervalle I alors U_ε converge fortement sur la bande caractéristique $\{(x, t) : x - t \in I\}$; de même si ψ_ε converge fortement sur I, v_ε converge fortement sur $\{(x, t) : x + t \in I\}$.
On voit donc que des oscillations en u ne peuvent pas créer des oscillations en v et réciproquement.

Remarque 2.4.1 On peut, à partir de ces résultats répondre aux questions (2.2) et (2.3), R_2, R_4 ainsi que (2.3), (2.4) sont alors utiles.

Remarque 2.4.2 Les résultats qui précèdent permettent de trouver la limite faible de toute fonction (continue) de U_ε et V_ε. En effet, puisque d'après le lemme $U^p{}_\varepsilon V^q{}_\varepsilon$ converge faiblement vers U^pV^q on connait le résultat pour

toute fonction polynôme et donc pour toute fonction continue.
Dans le cas des données (2.11) on a $F(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \rightarrow f$ dans L^∞ faible$*$
où :

$$f(x, t) = \iint_0^1 F(A(x, y, t), B(x, z, t))dydz .$$

2.5 Généralisation

Nous allons maintenant considérer un modèle plus réaliste,
celui de Broadwell :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + uv - w^2 = 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} + uv - w^2 = 0, \quad v(x, 0) = \psi(x) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + uv - w^2 = 0, \quad w(x, 0) = \chi(x) \end{cases} \tag{2.16}$$

Ce modèle est obtenu à partir d'un modèle plan à 4 vitesses, introduit en fait par Maxwell, où les particules ont une vitesse de module 1 parallèle à l'un des axes ; on suppose ensuite que les distributions sont indépendantes de y et que les distributions de particules à vitesse parallèle à y sont égales.
Les propriétés de ce modèle sont très différentes de celle de Carleman. (C'est le cas pour tous les modèles réalistes de théorie cinétique des gaz). On a les propriétés suivantes :

R'_1 : Si $0 \leq \phi, \psi, \chi \leq M_o$ alors la solution $(u, v, w) = S(t)(\phi, \psi, \chi)$ existe sur $t \in [0, +\infty[$ et vérifie $0 \leq u, v, w \leq F(t, M_0)$. (La meilleure borne $F(t, M_0)$ n'est pas connue mais de toute façon ce n'est pas M_0).
Une borne locale en temps $F(t, M) = M(1 - tM)^{-1}$ est claire.

R' : S(t) n'est pas (séquentiellement) continu sur $L^\infty(IR_+)^3$ muni de la topologie faible$*$.

R'_3: Si la norme L^1 des données initiales est petite alors on a :
$0 \leq u, v, w \leq kM_0$ et le comportement pour t grand est analogue au cas linéaire $u \sim \bar{u}(x - t)$, $v \sim \bar{v}(x + t)$, $w \sim \bar{w}(x)$.

Chapitre 3

Le problème en dimension deux

3.1 Position du problème

Dans l'ouvert $Q = \Omega \times]0, T[$, où $\Omega =]a^1, b^1[\times]a^2, b^2[$.
On cherche les fonctions u(x, t) et v(x, t), tels que $x \in \Omega$, $t \in]0, T[$ et vérifiant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x_1} + u^2 - v^2 = 0 \quad \text{avec} \quad u(a_1, x_2, t) = 0 \\ \qquad\qquad \text{et } u(x, 0) = u_0(x), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x_2} + v^2 - u^2 = 0 \quad \text{avec} \quad v(x_1, a_2, t) = 0 \\ \qquad\qquad \text{et } v(x, 0) = v_0(x), \end{cases} \tag{3.1}$$

Relativement à ce système, nous allons montrer le résultat suivant (cf.J.-L. Lions [8]) :

Théorème I Soient u_0 et v_0 donnés avec :

$$\begin{cases} u_0, v_0 \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \\ u(a_1, x_2, t) = 0, v(x_1, a_2, t) = 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

$$u_0 , v_0 \geq 0 \quad (p , p) \text{ dans } \Omega \tag{3.3}$$

Il existe alors un couple des fonctions u, v, et un seul tel que :

$$\begin{cases} u \in L^\infty(0 , T ; H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)) \\ v \in L^\infty(0 , T ; H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)) \end{cases} \tag{3.4}$$

avec :

$$u, v \geq 0 \ \text{(p.p)} \ \text{dans} \ Q, \tag{3.5}$$

et u, v vérifiant (3.1) .

Remarque 3.3.1 : Il résulte de (3.1) et (3.4) que :

$$\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t} \in L^{\infty}(0, T; L^2(\Omega))$$

de sorte que u_0, v_0 ont un sens (en particulier dans $L^2(\Omega)$)

3.2 Etude de l'existence et l'unicité

3.2.1 L'unicité

Soient $\{u_1, v_1\}$ et $\{u_2, v_2\}$ deux solutions du problème. Posans :

$$u = u_1 - u_2, v = v_1 - v_2$$

on a :

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + {u_1}^2 - {v_1}^2 = \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + {u_2}^2 - {v_2}^2 = 0$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + {v_1}^2 - {u_1}^2 = \frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + {v_2}^2 - {u_2}^2 = 0$$

donc :

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + {u_1}^2 - {u_2}^2 = {v_1}^2 - {v_2}^2$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} - \frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + {v_1}^2 - {v_2}^2 = {u_1}^2 - {u_2}^2$$

c'est à dire :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x_1} + {u_1}^2 - {u_2}^2 = {v_1}^2 - {v_2}^2 \qquad (3.6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x_2} + {v_1}^2 - {v_2}^2 = {u_1}^2 - {u_2}^2 \qquad (3.7)$$

Multiplions (3.6) par u, (3.7) par v puis intégrons sur Ω, on trouve :

$$\int_\Omega u\frac{\partial u}{\partial t}dx + \int_\Omega u\frac{\partial u}{\partial x_1}dx + \int_\Omega u\,(u_1^2 - u_2^2)\,dx = \int_\Omega u\,(v_1^2 - v_2^2)\,dx$$

$$\int_\Omega v\frac{\partial v}{\partial t}dx + \int_\Omega v\frac{\partial v}{\partial x_2}dx + \int_\Omega v\,(v_1^2 - v_2^2)\,dx = \int_\Omega v\,(u_1^2 - u_2^2)\,dx$$

Posons :

$$(\varphi, \psi) = \int_\Omega \varphi\,\psi\,dx, |\varphi| = (\varphi, \psi)^{\frac{1}{2}}$$

donc :

$$(\frac{\partial u}{\partial t}, u) + (\frac{\partial u}{\partial x_1}, u) + \int_\Omega u\,(u_1^2 - u_2^2)\ dx = \int_\Omega u\,(v_1^2 - v_2^2)\ dx$$

$$(\frac{\partial v}{\partial t}, v) + (\frac{\partial v}{\partial x_2}, v) + \int_\Omega v\,(v_1^2 - v_2^2)\ dx = \int_\Omega v\,(u_1^2 - u_2^2)\ dx$$

alors :

$$(\frac{\partial u}{\partial t}, u) = \int_\Omega u\,(v_1^2 - v_2^2)\ dx - (\frac{\partial u}{\partial x_1}, u) - \int_\Omega u\,(u_1^2 - u_2^2)\ dx$$

$$(\frac{\partial v}{\partial t}, v) = \int_\Omega v\,(u_1^2 - u_2^2)\ dx - (\frac{\partial v}{\partial x_2}, v) - \int_\Omega v\,(v_1^2 - v_2^2)\ dx$$

Notons que:

$$(\frac{\partial u}{\partial x_1}, u) = \int_\Omega u\frac{\partial u}{\partial x_1} dx = \int_{]a2,b2[}\int_{]a1,b1[} u\frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1\, dx_2$$

$$= \frac{1}{2}\int_{]a2,b2[}[\lim_{x_1 \to b_1} u^2(x_1, x_2)]dx_2 \geq 0\ ,$$

$$(\frac{\partial v}{\partial x_2}, v) = \int_\Omega v\frac{\partial v}{\partial x_2} dx = \int_{]a1,b1[}\int_{]a2,b2[} v\frac{\partial v}{\partial x_2} dx_2\, dx_1$$

$$= \frac{1}{2}\int_{]a1,b1[}[\lim_{x_2 \to b_2} u^2(x_1, x_2)]dx_1 \geq 0\ .$$

alors :

$$(\frac{\partial u}{\partial t}, u) = \int_\Omega u\,(v_1^2 - v_2^2)\ dx - (\frac{\partial u}{\partial x_1}, u) - \int_\Omega u\,(u_1^2 - u_2^2)\ dx$$

$$(\frac{\partial v}{\partial t}, v) = \int_\Omega v\,(u_1^2 - u_2^2)\ dx - (\frac{\partial v}{\partial x_2}, v) - \int_\Omega v\,(v_1^2 - v_2^2)\ dx$$

Et grâce à (3.5) on a:

$$(u_1^2 - u_2^2)\,(u_1 - u_2) = (u_1 + u_2)(u_1 - u_2)^2 \geq 0$$

$$(v_1^2 - v_2^2)\,(v_1 - v_2) = (v_1 + v_2)(v_1 - v_2)^2 \geq 0$$

$$(w_1^2 - w_2^2)\,(w_1 - w_2) = (w_1 + w_2)(w_1 - w_2)^2 \geq 0$$

De sorte que:

$$(\frac{\partial u}{\partial t}, u) \leq \int_\Omega (v_1^2 - v_2^2)(v_1 - v_2)\ dx \qquad (3.8)$$

$$(\frac{\partial v}{\partial t}, v) \leq \int_\Omega (u_1^2 - u_2^2)(u_1 - u_2)\ dx \qquad (3.9)$$

mais :

$$u_i, v_i \in L^\infty(Q)$$

donc si :

$$\text{Max}\,(||u_i||_{L^\infty(Q)}\,,\,||v_i||_{L^\infty(Q)}) = \mu$$

on a :

$$\left|\int_\Omega (v_1^2 - v_2^2)(u_1 - u_2)\ dx\right| = \left|\int_\Omega (v_1 + v_2)(v_1 - v_2)(u_1 - u_2)\ dx\right|$$

$$\leq 2\mu \int_\Omega |(v_1 - v_2)(x,t)||(u_1 - u_2)\,(x,t)|\ dx = 2\mu\,|(u,v)|$$

$$\leq 2\mu(u,u)^{\frac{1}{2}}(v,v)^{\frac{1}{2}} = 2\mu\,|v|\,|u|$$

et

$$\left|\int_\Omega (u_1^2 - u_2^2)(v_1 - v_2)\ dx\right| \leq 2\mu\,|u|\,|v|$$

et d'après (3.8), (3.9) on obtient :

$$\frac{d}{dt}|u(t)|^2 = 2\left(\frac{\partial u}{\partial t}\,,u\right) \leq 4\mu\,|v(t)||u(t)| \qquad (3.10)$$

$$\frac{d}{dt}|v(t)|^2 = 2\left(\frac{\partial v}{\partial t}\,,v\right) \leq 4\mu\,|u(t)||v(t)| \qquad (3.11)$$

En ajoutant (3.10), (3.11) il vient :

$$\frac{d}{dt}\left(|u(t)|^2 + |v(t)|^2\right) \leq 4(2\mu\,|u(t)||v(t)|)$$

on a :

$$A^2 + B^2 - 2AB = (A - B)^2 \geq 0$$

donc :

$$2AB \leq A^2 + B^2$$

alors :

$$\frac{d}{dt}\left(|u(t)|^2 + |v(t)|^2\right) \leq 4\left(|u(t)|^2 + |v(t)|^2\right)$$

et donc d'après le lemme de Gronwall (Voir J.L.Demially [3]) :
$|u(t)|^2 + |v(t)|^2 = 0$
c'est à dire :

$$|u(t)| = |v(t)| = 0$$

d'où :

$$u_1 = u_2,\ v_1 = v_2$$

3.2.2 Etude de l'existence

Reprenons le système (3.1). Essayons de le « décomposer » en les deux systèmes :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u^2 - v^2 = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v^2 - u^2 = 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

.

L'intérêt de cette décompositions est que chacun des systèmes (3.12) (3.13) peut être intégré explicitement. Il est alors convenable que l'on puisse ainsi obtenir des estimations à priori « plus fine » que celles que l'on pourrait obtenir directement (sans décomposition)

La semi-discétisation conduit en fin de compte à « l'approximation » suivante du problème : supposons connue $\{u^n, v^n\}$ « approximation » à l'instant nk on détermine $\{u^{n+\frac{1}{2}}, u^{n+\frac{1}{2}}\}$ et $\{u^{n+1}, v^{n+1}\}$ par :

$$\begin{cases} u^{n+\frac{1}{2}} - u^n + k\,[(u^{n+\frac{1}{2}})^2 - (v^{n+\frac{1}{2}})^2] = 0 \quad (A) \\ v^{n+\frac{1}{2}} - v^n + k\,[(v^{n+\frac{1}{2}})^2 - (u^{n+\frac{1}{2}})^2] = 0 \quad (B) \end{cases} \quad (3.14)$$

$$\begin{cases} u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}} + k\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_1} = 0 \qquad u^{n+1}(a_1, x_2, t) = 0 \\ v^{n+1} - v^{n+\frac{1}{2}} + k\frac{\partial v^{n+1}}{\partial x_2} = 0 \qquad v^{n+1}(x_1, a_2, t) = 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

Ceci a bien un sens : en effet le système (3.14) admet une solution unique donnée explicitement par :

$$\begin{cases} u^{n+\frac{1}{2}} = \frac{u^n + k(\sigma^n)^2}{1 + 2k\sigma^n} \\ v^{n+\frac{1}{2}} = \frac{v^n + k(\sigma^n)^2}{1 + 2k\sigma^n} \end{cases} \quad (3.16)$$

Où :

$$\sigma^n = u^n + v^n \quad (3.17)$$

Puisque, si on ajoute (A1), (B2) il vient :

$$u^{n+\frac{1}{2}} + v^{n+\frac{1}{2}} = \sigma^n$$

De (A_1) on a :

$$u^{n+\frac{1}{2}} - u^n + k\sigma^n (u^{n+\frac{1}{2}}) - (v^{n+\frac{1}{2}}) = 0$$

d'où :

$$u^{n+\frac{1}{2}} = \frac{u^n + k\,\sigma^n v^{n+\frac{1}{2}}}{1 + k\,\sigma^n}$$

de (B1) on a :

$$v^{n+\frac{1}{2}} - v^n + k\sigma^n (v^{n+\frac{1}{2}}) - (u^{n+\frac{1}{2}}) = 0$$

En substituant $u^{n+\frac{1}{2}}$ dans cette égalité on trouve :

$$v^{n+\frac{1}{2}} = \frac{v^n + k(\sigma^n)^2}{1+2k\sigma^n}$$

De même système (3.15) admet une solution unique donnée explicitement par :

$$\begin{cases} u^{n+1}(x) = \frac{1}{k} \int_{a_1}^{x_1} u^{n+\frac{1}{2}}(\xi, x_2) \exp\left(\frac{\xi - x_1}{k}\right) d\xi, \\ v^{n+1}(x) = \frac{1}{k} \int_{a_2}^{x_2} v^{n+\frac{1}{2}}(x_1, \xi,) \exp\left(\frac{\xi - x_2}{k}\right) d\xi, \end{cases} \qquad (3.18)$$

.

Cela définit donc complètement la suite $\{u^n, v^n\}$. une fois choisis $\{u^0, v^0\}$; on prendra évidemment :

$$u^0 = u_0,\ v^0 = v_0$$

3.3 Estimations à priori

On prend k sous la forme :

$$k = \frac{T}{N}\text{, N entier,}$$

et l'on introduit les fonnctions :

$$\begin{cases} u_{ik}(t) = u^{n+\frac{i}{2}}, v_{ik}(t) = v^{n+\frac{i}{2}}, i = 1,2 \\ \text{pour } t \in [\, nk, (n+1)k\,[,\ n = 0,1 \ldots, N-1 \end{cases} \quad (3.19)$$

et

$$\begin{cases} \tilde{u}_k(t), \tilde{v}_k(t) \text{ linéaire dans } [\, nk, (n+1)k\,], 0 \le n \le N-1, \\ \tilde{u}_k(nk) = u^n, \tilde{v}_k(nk) = v^n. \end{cases} \quad (3.20)$$

On va démontrer le :

Lemme 3.3.1 les fonnctions u_{ik}, v_{ik}, (i = 1, 2), $\tilde{u}_k$, $\tilde{v}_k$ demeurent, lorsque $k \to 0$, dans un borné de $L^{\infty}(0, T; H^1(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega))$ et sont à valeurs positives (p.p).

Nous allons diviser la démonstration de ce lemme en plusieurs étapes ; on vérifiera en cours de route que les fonnctions u_{ik}... sont bien à valeurs dans $H^1(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$.

Lemme 3.3.2 Si l'on pose :

$$c_0 = ||u_0||_{L^{\infty}(\Omega)} + ||v_0||_{L^{\infty}(\Omega)} \quad (3.21)$$

on a :

$$\begin{cases} ||u^{n+\frac{i}{2}}||_{L^{\infty}(\Omega)} + ||v^{n+\frac{i}{2}}||_{L^{\infty}(\Omega)} \le c_0 \\ \forall n = 0, \ldots, N-1 \text{ et pour } i = 1, 2, \end{cases} \quad (3.22)$$

et

$$\begin{cases} u^{n+\frac{i}{2}}, v^{n+\frac{i}{2}}, \ge 0 \quad \text{p. p.} \\ \forall n \text{ et } i = 1, 2. \end{cases} \quad (3.23)$$

Démonstration.
Les propriétés (3.23) résultent des formules (3.16) (3.18) .
Pour simplifier l'écriture, posons :

$$\lambda^{n+\frac{i}{2}} = ||u^{n+\frac{i}{2}}||_{L^{\infty}(\Omega)},\ \mu^{n+\frac{i}{2}} = ||v^{n+\frac{i}{2}}||_{L^{\infty}(\Omega)}$$

d'après les formules (3.18) on a :

$$\lambda^{n+1} \le \lambda^{n+\frac{1}{2}},\ \mu^{n+1} \le \mu^{n+\frac{1}{2}}$$

et on aura donc (3.22) si l'on montre que :

$$\lambda^{n+\frac{1}{2}} + \mu^{n+\frac{1}{2}} \le \lambda^n + \mu^n \quad (3.24)$$

On observe pour cela que, comme $\sigma^n \leq \lambda^n + \mu^n$ et comme la fonction :

$$\sigma \to \frac{a+k\sigma^2}{1+2k\sigma}$$

est croissante au moins pour $\sigma \leq a$, on a (d'aprés (3.16)) :

$$\begin{cases} u^{n+\frac{1}{2}}(x) \leq \frac{u^n(x)+k(\lambda^n+\mu^n)^2}{1+2k(\lambda^n+\mu^n)} & \text{p. p.} \\ v^{n+\frac{1}{2}}(x) \leq \frac{v^n(x)+k(\lambda^n+\mu^n)^2}{1+2k(\lambda^n+\mu^n)} & \text{p. p} \end{cases} \tag{3.25}$$

$$\lambda^{n+\frac{1}{2}} \leq \frac{\lambda^n + k(\lambda^n+\mu^n)^2}{1+2k(\lambda^n+\mu^n)}$$

$$\mu^{n+\frac{1}{2}} \leq \frac{\mu^n + k(\lambda^n+\mu^n)^2}{1+2k(\lambda^n+\mu^n)}$$

d'où (3.24) par addition de ces inégalités.
Du lemme (6.2) résulte aussitôt que u_{ik}, v_{ik}, (i = 1, 2), $\tilde{u}_k$, $\tilde{v}_k$ demeurent dans un borné de $L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))$.
Il reste maintenant à montrer que ces fonctions demeurent dans un borné de $L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$.
On va montrer le :

***Lemme* 3.3.3** Si $4kc_0 < 1$, il existe une constante c_1 telle que :

$$\begin{cases} \left|\frac{\partial u^{n+\frac{i}{2}}}{\partial x_j}\right|, \left|\frac{\partial v^{n+\frac{i}{2}}}{\partial x_j}\right| \leq c_1, \\ i = 1,2, \quad \text{et } j = 1,2, \quad 0 \leq n \leq N-1. \end{cases} \tag{3.26}$$

Remarque 3.3.1
Naturellement les inégalités (3.26) donnent le résultat désiré et leur démonstration achèvera donc la démonstration du lemme (3.3.1).

Démonstration du Lemme 3.3.3

1) Montrons d'abord que :

$$\left|\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_2}\right| \le \left|\frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x_2}\right| \tag{3.27}$$

$$\left|\frac{\partial v^{n+1}}{\partial x_1}\right| \le \left|\frac{\partial v^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x_1}\right| \tag{3.28}$$

D'après la première équation (3.15), que l'on dérive en x_2 on trouve :

$$\begin{cases} \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_2} - \frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x_2} + k\,\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_2}\right) = 0. \\ \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_2}(a_1, x_2, t) = 0 \end{cases} \tag{3.29}$$

Cette dérivation est justifiée si, par exemple, $\frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x_2} \in L^2(\Omega)$: prenant alors le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$ avec $\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_2}$, comme :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_2}\right), \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_2}\right) \ge 0,$$

il vient :

$$\left|\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_2}\right|^2 \le \left|\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_2}\right| \left|\frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x_2}\right|$$

d'où (3.27). On établit de la même façon (3.28) en dérivant en x_1 la deuxième équation (3.15).

1) Admettons pour l'instant les inégalités suivantes :

$$\begin{cases} \left|D_i u^{n+\frac{1}{2}}\right|^2 + \left|D_i v^{n+\frac{1}{2}}\right|^2 \le \xi\left(\left|D_i u^n\right|^2 + \left|D_i v^n\right|^2\right) \\ D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \xi = \frac{(1)^2}{(1-4kc_0)^2}, \ i=1, 2. \end{cases} \tag{3.30}$$

et

$$\left|\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_1}\right|^2 + \left|\frac{\partial v^{n+1}}{\partial x_2}\right|^2 \le k\,c_2 + \left(\left|\frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x_1}\right|^2 + \left|\frac{\partial v^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x_2}\right|^2\right) \tag{3.31}$$

Vérifions que le lemme en résulte.

Posons :

$$\begin{cases} \beta_{n+\frac{i}{2}} = \left|D_1 u^{n+\frac{i}{2}}\right|2 + \left|D_2 u^{n+\frac{i}{2}}\right|2 + \left|D_1 v^{n+\frac{i}{2}}\right|2 + \left|D_2 v^{n+\frac{i}{2}}\right|2 \\ i = 1, 2. \end{cases} \tag{3.32}$$

on déduit de (3.27) (3.28) (3.31) que :

$$\beta_{n+1} \leq kc_2 + \beta_{n+\frac{1}{2}} \qquad (3.33)$$

et de (3.30) on déduit (par addition des inégalités pour i = 1, 2) :

$$\beta_{n+\frac{1}{2}} \leq \xi\beta_n \qquad (3.34)$$

donc

$$\beta_{n+1} \leq kc_2 + \xi\beta_n$$

d'où :

$$\beta_{n+1} \leq \frac{c_2(1-4kc_0)^2}{8c_0(1-2kc_0)}(\xi^{n+1} - 1) + \xi^{n+1}\beta_0 \leq \text{constante.}$$

Utilisant alors (3.34), on a finalement :

$$\beta_{n+1}, \beta_{n+\frac{1}{2}} \leq \text{constante .}$$

Ce qui démontre le lemme, sous réserve de la vérification de (3.30) (3.31).

2) Vérification de (3.30) : on déduit de (3.14) que :

$$D_i u^{n+\frac{1}{2}} = D_i u^n - 2k\, u^{n+\frac{1}{2}} D_i\, u^{n+\frac{1}{2}} + 2k\, v^{n+\frac{1}{2}} D_i\, v^{n+\frac{1}{2}}$$

d'où :

$$|D_i u^{n+\frac{1}{2}}| \leq |D_i u^n| + 2kc_0(|D_i\, u^{n+\frac{1}{2}}| + |D_i\, v^{n+\frac{1}{2}}|) \qquad (3.35)$$

et de même :

$$|D_i v^{n+\frac{1}{2}}| \leq |D_i v^n| + 2kc_0(|D_i\, v^{n+\frac{1}{2}}| + |D_i\, u^{n+\frac{1}{2}}|) \qquad (3.36)$$

pour simplifier, posons pour l'instant :

$$|D_i u^{n+\frac{1}{2}}| = x,\ |D_i v^{n+\frac{1}{2}}| = y,\ |D_i u^n| = a,\ |D_i v^n| = b,\ 2kc_0 = \gamma\ ;$$

alors (3.35) (3.36) s'écrivent :

$$x \leq a + \gamma(x + y),\ y \leq b + \gamma(x + y)$$

d'où par addition :

$$(1 - 2\gamma)(x + y) \leq a + b,$$

d'où :

$$x \le a + \gamma \frac{a+b}{1-2\gamma}, \quad y \le b + \gamma \frac{a+b}{1-2\gamma}$$

et donc :

$$x^2 + y^2 \le a^2 + b^2 + \frac{2\gamma}{1-2\gamma}(a+b)^2 + \frac{2\gamma^2}{(1-2\gamma)^2}(a+b)^2 =$$

$$= a^2 + b^2 + \frac{2\gamma(1-\gamma)}{(1-2\gamma)^2}(a+b)^2 \le a^2 + b^2 + \frac{4\gamma(1-\gamma)}{(1-2\gamma)^2}(a^2+b^2)$$

$$= \frac{1}{(1-2\gamma)^2}(a^2+b^2)$$

d'où (3.30).

4) Vérification de (3.31). Dérivons (formellement d'abord) la 1re équation (3.15) en x_1 ; il vient :

$$\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_1} - \frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x_1} + k \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_1}\right) = 0 \qquad (3.37)$$

et l'équation (3.15) donne :

$$\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_1}(a_1, x_2) = \frac{1}{k} u^{n+\frac{1}{2}}(a_1, x_2) \qquad (3.38)$$

En prenant le produit scalaire de (3.37) avec $\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_1}$ il vient :

$$\left|\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_1}\right|^2 - \left(\frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x_1}, \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_1}\right) \le \frac{k}{2} \int_{a_2}^{b_2} \left[\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_1}(a1, x2)\right]^2 dx_2$$

d'où, d'après (3.38) :

$$\left|\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_1}\right|^2 \le \left|\frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x_1}\right| \left|\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_1}\right| + \frac{1}{2k} \int_{a_2}^{b_2} [u^{n+\frac{1}{2}}(a1, x2)]^2 dx_2$$

d'où :

$$\left|\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_1}\right|^2 \le \left|\frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x_1}\right|^2 + \frac{1}{k} \int_{a_2}^{b_2} [u^{n+\frac{1}{2}}(a1, x2)]^2 dx_2 \qquad (3.39)$$

mais d'après (3.16) :

$$u^{n+\frac{1}{2}}(a1,x2)=\frac{k(\sigma^n(a1,x2))^2}{1+2k\,\sigma^n(a1,x2)}\leq \text{(d'après le lemme (3.2))}kc^2{}_0$$

et donc :

$$\frac{1}{k}\int_{a_2}^{b_2}[u^{n+\frac{1}{2}}(a1,x2)]^2\,dx_2 \leq k(b_2-a_2)c^4{}_0$$

de sorte que (3.39) donne :

$$\left|\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_1}\right|^2 \leq \left|\frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x_1}\right|^2 + k(b2-a2)c_0^4. \qquad (3.40)$$

En partant de la deuxième équation (3.15) (que l'on dérive en x_2), on en déduit une inégalité analogue à (3.40) avec v et x_2 au lieu de u et x_1, d'où (3.31) .

3.4 Passage à la limite

D'aprés le lemme 3.3.1, on peut extraire des sous-suites, encore notées :

u_{ik}, v_{ik}, $\tilde{u}_k$, $\tilde{v}_k$, telles que :

$$\begin{cases} u_{ik}\to u_i\,,\ v_{ik}\to v_i\,, \\ \tilde{u}_k\to \tilde{u}\,,\ \tilde{v}_k\to \tilde{v}. \\ \text{dans } L^{\infty}(0,T;H^1(\Omega)\cap L^{\infty}(\Omega)) \text{ faible étoile.} \end{cases} \qquad (3.41)$$

Ce type de convergence n'est pas suffisant pour passer à la limite dans les terme non linéaire, mais on a une estimation supplémentaire pour $\tilde{u}_k, \tilde{v}_k$.

Lemme 3.4.1- lorsque $k\to 0$,

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial t}\,,\frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial t} \text{ demeurent} \\ \text{dans un borné } L^{\infty}(0\,,T\,;H^1(\Omega)\cap L^2(\Omega)) \end{cases} \qquad (3.42)$$

Démonstration

En ajoutant les égalités correspondantes de (3.14) (3.15), on a :

$$u^{n+1} - u^n + k\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_1} + k[(u^{n+\frac{1}{2}})^2 - (v^{n+\frac{1}{2}})^2] = 0 \qquad (3.43)$$

Ce qui équivaut à :

$$\frac{\partial \tilde{u}k}{\partial t} + \frac{\partial u2k}{\partial x1} + (u_{1k})^2 - (v_{1k})^2 = 0 \qquad (3.44)$$

De mème :

$$\frac{\partial \tilde{v}k}{\partial t} + \frac{\partial v2k}{\partial x2} + (v_{1k})^2 - (u_{1k})^2 = 0 \qquad (3.45)$$

Ceci extrait (3.42), grâce au lemme 3.3.1.

On peut alors supposer, gràce aux estimations sur $\tilde{u}_k, \tilde{v}_k$ et la compacité de l'injection de $H^1(Q) \rightarrow L^2(Q)$, que :

$$\begin{cases} \tilde{u}_k \rightarrow \tilde{u}, \tilde{v}_k \rightarrow \tilde{v} \\ \text{dans } L^2(Q) \text{ fort et p. p.} \end{cases} \qquad (3.46)$$

mais, d'après la définition des fonctions $\tilde{u}_k$ et u_{2k}, on a :

$$||\tilde{u}_k - u_{2k}||_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq \sup_{0 \leq n \leq N-1} | u^{n+1} - u^n |$$

et avec (3.43) et le lemme (3.3.1), il en résulte que :

$$||\tilde{u}_k - u_{2k}||_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq kc_3 \qquad (3.47)$$

De même :

$$||\tilde{v}_k - v_{2k}||_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq kc_3 \qquad (3.48)$$

donc, avec (3.46), on en déduit que l'on peut supposer :

$$\begin{cases} \tilde{u}_{2k} \rightarrow \tilde{u}, \tilde{v}_{2k} \rightarrow \tilde{v} \\ \text{dans } L^2(Q) \text{ fort et p. p.} \end{cases} \qquad (3.49)$$

mais la première égalité (3.15) s'écrit

$$u_{2k} - u_{1k} + k\frac{\partial u2k}{\partial x1} = 0$$

d'où, avec le lemme (3.3.1),

$$|| u_{2k} - u_{1k}||_{L^{\infty}(0,T\,;\,L^2(\Omega))} \leq kc_4 \tag{3.50}$$

Et de même :

$$|| v_{2k} - v_{1k}||_{L^{\infty}(0,T\,;\,L^2(\Omega))} \leq kc_4 \tag{3.51}$$

on peut donc supposer, d'après (3.49), que :

$$\begin{cases} \tilde{u}_{1k} \to \tilde{u}, \tilde{v}_{1k} \to \tilde{v} \\ \text{dans } L^2(Q) \text{ fort et p. p.} \end{cases} \tag{3.52}$$

alors (avec les notations (3.41)) :

$$u_i = \tilde{u}\ (= u),\ v_i = \tilde{v}\ (= v),\ w_i = \tilde{w}(\ = w).$$

et l'on a maintenant :

$$(u_{1k})^2 \to u^2 \text{ dans } L^2(Q) \text{ faible,}$$

Et, au même sens, $(v_{1k})^2 \to v^2$, et on peut passer à la limite dans (3.44) (3.45).

Comme, d'après le lemme 3.3.4, on peut aussi supposer que :

$$\frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial t} \to \frac{\partial u}{\partial t},\ \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial t} \to \frac{\partial v}{\partial t} \text{ dans } L^{\infty}(0,\ T;L^2(\Omega)) \text{ faible étoile.}$$

on a :

$$\tilde{u}_k\ (0) \to u(0),\ \tilde{v}_k\ (0) \to v(0) \text{ dans } L^2(\Omega)$$

et par conséquent :

$$u(0) = u_0,\ v(0) = v_0\ ;$$

on voit ainsi que u et v satisfont au système (3.1).

Chapitre 4

Etude de l'existence et l'unicité de la solution du problème en dimension trois

4.1 Position du problème

On a les problèmes du type suivant :
Dans l'ouvert $Q = \Omega \times]0, T[$, où $\Omega =]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[\times]a_3, b_3[$.
On cherche les fonctions u(x, t), v(x, t) et w(x, t), tels que $x \in \Omega$, $t \in]0, T[$ et vérifiant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x_1} + u^2 - v^2 = 0 \quad \text{avec} \quad u(a_1, x_2, x_3, t) = 0 \\ \qquad\qquad \text{et } u(x, 0) = u_0(x), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x_2} + v^2 - u^2 = 0 \quad \text{avec} \quad v(x_1, a_2, x_3, t) = 0 \\ \qquad\qquad \text{et } v(x, 0) = v_0(x), \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x_3} + w^2 - (u^2 - v^2) = 0 \text{ avec } w(x_1, x_2, a_3, t) = 0 \\ \qquad\qquad \text{et } w(x, 0) = w_0(x). \end{cases} \tag{4.1}$$

Relativement à ce système, nous allons montrer le résultat suivant :

Théorème I Soient u_0, v_0 et w_0 donnés avec :

$$\begin{cases} u_0, v_0, w_0 \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \\ u(a_1, x_2, x_3, t) = 0, v(x_1, a_2, x_3, t) = 0, w(x_1, x_2, a_3, t) = 0 \end{cases} \tag{4.2}$$

$$u_0 , v_0 , w_0 \geq 0 \quad (p , p) \text{ dans } \Omega \tag{4.3}$$

Il existe alors un triplet de fonctions (u, v, w) et un seul tel que :

$$\begin{cases} u \in L^\infty(0 , T ; H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)) \\ v \in L^\infty(0 , T ; H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)) \\ w \in L^\infty(0 , T ; H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)) \end{cases} \tag{4.4}$$

avec :

$$u_0, v_0, w_0 \geq 0 \quad (p , p) \text{ dans } Q , \tag{4.5}$$

et u, v, w vérifiant (4.1) .

Remarque 3.1 :

Il résulte de (4.1) et (4.4) que :

$$\frac{\partial u}{\partial t} , \frac{\partial v}{\partial t} , \frac{\partial w}{\partial t} \in L^\infty(0 , T ; L^2(\Omega))$$

De sorte que : u_0, v_0 et w_0 ont un sens (en particulier dans $L^2(\Omega)$)

4.2 Etude de l'existence

Reprenons le système (4.1), et essayons de le « décomposer » les deux systèmes :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u^2 - v^2 = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v^2 - u^2 = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial t} + w^2 - (u^2 - v^2) = 0 \end{cases} \tag{4.6}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x_3} = 0 \end{cases} \tag{4.7}$$

L'intérét de cette décompositions est que chacun des systèmes (4.6) (4.7) peut être intégré explicitement ; il est alors convenable que l'on puisse ainsi obtenir des estimations à priori « plus fine » que celles que l'on pourrait obtenir directement (sans décomposition)
La semi-discétisation conduit en fin de compte à « l'approximation » suivante du problème : supposons connue $\{u^n, v^n, w^n\}$ « approximation » à l'instant nk on détermine $\{ u^{n+\frac{1}{2}}, v^{n+\frac{1}{2}}, w^{n+\frac{1}{2}} \}$ et $\{ u^{n+1}, v^{n+1}, w^{n+1} \}$ par :

$$\begin{cases} u^{n+\frac{1}{2}} - u^n + k\left[\left(u^{n+\frac{1}{2}}\right)^2 - \left(v^{n+\frac{1}{2}}\right)^2\right] = 0 & \text{(A2)} \\ v^{n+\frac{1}{2}} - v^n + k\left[\left(v^{n+\frac{1}{2}}\right)^2 - \left(u^{n+\frac{1}{2}}\right)^2\right] = 0 & \text{(B2)} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + w^2 - \left[\left(u^{n+\frac{1}{2}}\right)^2 - \left(v^{n+\frac{1}{2}}\right)^2\right] = 0 & \text{(C2)} \end{cases} \tag{4.8}$$

$$\begin{cases} u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}} + k\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_1} = 0 & u^{n+1}(a_1, x_2, x_3, t) = 0 \\ v^{n+1} - v^{n+\frac{1}{2}} + k\frac{\partial v^{n+1}}{\partial x_2} = 0 & v^{n+1}(x_1, a_2, x_3, t) = 0 \\ w^{n+1} - w^{n+\frac{1}{2}} + k\frac{\partial w^{n+1}}{\partial x_3} = 0 & w^{n+1}(x_1, x_2, a_3, t) = 0 \end{cases} \tag{4.9}$$

Cela a bien un sens : en effet le système (4.8) ademet une solution unique donnée explicitement par :

$$\begin{cases} u^{n+\frac{1}{2}} = \frac{u^n + k(\sigma^n)^2}{1+2k\sigma^n} \\ v^{n+\frac{1}{2}} = \frac{v^n + k(\sigma^n)^2}{1+2k\sigma^n} \\ w^{n+\frac{1}{2}} = \sqrt{/\sigma'/}\tan\left[\arctan\left(\frac{w^n}{\sqrt{/\sigma/}}\right) - k\sqrt{/\sigma'/}\right] \end{cases} \tag{4.10}$$

Où :

$$\sigma^n = u^n + v^n, \quad \sigma' = \sigma^n \left(\frac{v^n + u^n}{1+2k\,\sigma^n}\right) \tag{4.11}$$

puisque, si on ajoute (A2), (B2) il vient :

$$u^{n+\frac{1}{2}} + v^{n+\frac{1}{2}} = \sigma^n$$

De (A_2) on a :

$$u^{n+\frac{1}{2}} - u^n + k\sigma^n (u^{n+\frac{1}{2}}) - (v^{n+\frac{1}{2}}) = 0$$

d'où :

$$u^{n+\frac{1}{2}} = \frac{u^n + k\,\sigma^n v^{n+\frac{1}{2}}}{1 + k\,\sigma^n}$$

de (B_1) on a :

$$v^{n+\frac{1}{2}} - v^n + k\sigma^n (v^{n+\frac{1}{2}}) - (u^{n+\frac{1}{2}}) = 0$$

En substituant $u^{n+\frac{1}{2}}$ dans cette égalité on trouve :

$$v^{n+\frac{1}{2}} = \frac{v^n + k(\sigma^n)^2}{1+2k\sigma^n}$$

et (C2) donne :

$$dw + [w^2 - \sigma^n(u^{n+\frac{1}{2}} - v^{n+\frac{1}{2}})]dt = 0$$

donc :

$$dw + [w^2 - \sigma^n(\frac{u^n - v^n}{1+k\,\sigma^n})]dt = 0$$

alors :

$$dw = -[w^2 + \sigma^n(\frac{v^n - u^n}{1+k\,\sigma^n})]dt$$

d'où :

$$\frac{dw}{w^2 + \sigma'} = -dt$$

donc :

$$\frac{1}{((\frac{w}{\sqrt{|\sigma'|}})^2+1)}\frac{dw}{|\sigma'|} = -dt$$

En intégrant :

$$\frac{1}{\sqrt{/\sigma'/}}\int_{w^n}^{w^{n+\frac{1}{2}}} \frac{1}{((\frac{w}{\sqrt{/\sigma'/}})^2+1)}\frac{dw}{\sqrt{/\sigma'/}} = -\int_{nk}^{(n+1)k} dt$$

on obtient :

$$w^{n+\frac{1}{2}} = \sqrt{/\sigma'/}\ \tan\ [\ \arctan(\frac{w^n}{\sqrt{/\sigma'/}}) - k\sqrt{/\sigma'/}\ ]$$

De même système (4.9) admet une solution unique donnée explicitement par :

$$\begin{cases} u^{n+1}(x) = \frac{1}{k}\int_{a_1}^{x_1} u^{n+\frac{1}{2}}(\xi, x_2, x_3)\exp(\frac{\xi - x_1}{k})\,d\xi, \\ v^{n+1}(x) = \frac{1}{k}\int_{a_2}^{x_2} v^{n+\frac{1}{2}}(x_1, \xi, x_3)\exp(\frac{\xi - x_2}{k})\,d\xi, \\ w^{n+1}(x) = \frac{1}{k}\int_{a_2}^{x_2} w^{n+\frac{1}{2}}(x_1, x_2, \xi)\exp(\frac{\xi - x_3}{k})\,d\xi, \end{cases} \qquad (4.12)$$

Ceci définit donc complètement la suite $\{u^n, v^n, w^n\}$. une fois choisis $\{u^n, v^n, w^n\}$; on prendra évidemment :

$$u^0 = u_0,\ v^0 = v_0 \text{ et } w^0 = w_0$$

4.3 L'unicité

Soient $\{u_1, v_1, w_1\}$ et $\{u_2, v_2, w_2\}$ deux solutions du problème, posons :

$$u = u_1 - u_2,\ v = v_1 - v_2,\ w = w_1 - w_2$$

On a:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + {u_1}^2 - {v_1}^2 = \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + {u_2}^2 - {v_2}^2 = 0$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + {v_1}^2 - {u_1}^2 = \frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + {v_2}^2 - {u_2}^2 = 0$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} + \frac{\partial w_1}{\partial x_3} + {w_1}^2 - ({u_1}^2 - {v_1}^2) = \frac{\partial w_2}{\partial t} + \frac{\partial w_2}{\partial x_3} + {w_2}^2 - ({u_2}^2 - {v_2}^2) = 0$$

Donc : $\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + {u_1}^2 - {v_1}^2 = {u_2}^2 - {v_2}^2$

$\frac{\partial v_1}{\partial t} - \frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + {v_1}^2 - {u_1}^2 = {v_2}^2 - {u_2}^2$

$\frac{\partial w_1}{\partial t} - \frac{\partial w_2}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x_3} - \frac{\partial w_2}{\partial x_3} + {w_1}^2 - {w_2}^2 = ({u_1}^2 - {u_2}^2) - ({v_1}^2 - {v_2}^2)$

C'est-à-dire:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x_1} + {u_1}^2 - {u_2}^2 = {v_1}^2 - {v_2}^2 \qquad (4.13)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x_2} + {v_1}^2 - {v_2}^2 = {u_1}^2 - {u_2}^2 \qquad (4.14)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x_3} + {w_1}^2 - {w_2}^2 = ({u_1}^2 - {u_2}^2) - ({v_1}^2 - {v_2}^2) \qquad (4.15)$$

Multiplions (13) par u, (14) par v et (15) par w puis intègrons sur Ω,

on trouve :

$$\int_\Omega u \frac{\partial u}{\partial t} dx + \int_\Omega u \frac{\partial u}{\partial x_1} dx + \int_\Omega u (u_1^2 - u_2^2) dx = \int_\Omega u (v_1^2 - v_2^2) dx$$

$$\int_\Omega v \frac{\partial v}{\partial t} dx + \int_\Omega v \frac{\partial v}{\partial x_2} dx + \int_\Omega v (v_1^2 - v_2^2) dx = \int_\Omega v (u_1^2 - u_2^2) dx$$

$$\int_\Omega w \frac{\partial w}{\partial t} dx + \int_\Omega w \frac{\partial w}{\partial x_3} dx + \int_\Omega w (w_1^2 - w_2^2) dx =$$

$$\int_\Omega w (u_1^2 - u_2^2) dx - \int_\Omega w (v_1^2 - v_2^2) dx$$

Posons :

$$(\varphi, \psi) = \int_\Omega \varphi \psi dx, /\varphi/ = (\varphi, \psi)^{\frac{1}{2}}$$

donc :

$$(\frac{\partial u}{\partial t}, u) + (\frac{\partial u}{\partial x_1}, u) + \int_\Omega u (u_1^2 - u_2^2) dx = \int_\Omega u (v_1^2 - v_2^2) dx$$

$$(\frac{\partial v}{\partial t}, v) + (\frac{\partial v}{\partial x_2}, v) + \int_\Omega v (v_1^2 - v_2^2) dx = \int_\Omega v (u_1^2 - u_2^2) dx$$

$$(\frac{\partial w}{\partial t}, w) + (\frac{\partial w}{\partial x_3}, w) + \int_\Omega w (w_1^2 - w_2^2) dx = \int_\Omega w (u_1^2 - u_2^2) dx - \int_\Omega w (v_1^2 - v_2^2) dx$$

alors :

$$(\frac{\partial u}{\partial t}, u) = \int_\Omega u\,(v_1^2 - v_2^2)\ dx - (\frac{\partial u}{\partial x_1}, u) - \int_\Omega u\,(u_1^2 - u_2^2)\ dx$$

$$(\frac{\partial v}{\partial t}, v) = \int_\Omega v\,(u_1^2 - u_2^2)\ dx - (\frac{\partial v}{\partial x_2}, v) - \int_\Omega v\,(v_1^2 - v_2^2)\ dx$$

$$(\frac{\partial w}{\partial t}, w) = \int_\Omega w\,(u_1^2 - u_2^2)\ dx - \int_\Omega w\,(v_1^2 - v_2^2)\ dx - (\frac{\partial w}{\partial x_3}, w) - \int_\Omega w\,(w_1^2 - w_2^2)\ dx$$

Notons que:

$$(\frac{\partial u}{\partial x_1}, u) = \int_\Omega u\frac{\partial u}{\partial x_1} dx = \int_{]a3,b3[}\int_{]a2,b2[}\int_{]a1,b1[} u\frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1\, dx_2\ dx_3$$

$$= \frac{1}{2}\int_{]a3,b3[}\int_{]a2,b2[}[\lim_{x_1 \to b_1} u^2(x_1, x_2, x_3)]dx_2\, dx_3 \geq 0\ ,$$

$$(\frac{\partial v}{\partial x_2}, v) = \int_\Omega v\frac{\partial v}{\partial x_2} dx = \int_{]a3,b3[}\int_{]a1,b1[}\int_{]a2,b2[} v\frac{\partial v}{\partial x_2} dx_2\, dx_1\ dx_3$$

$$= \frac{1}{2}\int_{]a3,b3[}\int_{]a1,b1[}[\lim_{x_2 \to b_2} u^2(x_1, x_2, x_3))]dx_1 dx_3 \geq 0\ .$$

$$(\frac{\partial w}{\partial x_3}, w) = \int_\Omega w\frac{\partial w}{\partial x_3} dx = \int_{]a3,b3[}\int_{]a2,b2[}\int_{]a1,b1[} w\frac{\partial w}{\partial x_3} dx_1\, dx_2\ dx_3$$

$$= \frac{1}{2}\int_{]a2,b2[}\int_{]a1,b1[}[\lim_{x_3 \to b_3} u^2(x_1, x_2, x_3))]dx_1 dx_2 \geq 0\ .$$

et grâce à (4.5) on a :

$$(u_1^2 - u_2^2)\,(u_1 - u_2) = (u_1 + u_2)(u_1 - u_2)^2 \geq 0$$
$$(v_1^2 - v_2^2)\,(v_1 - v_2) = (v_1 + v_2)(v_1 - v_2)^2 \geq 0$$
$$(w_1^2 - w_2^2)\,(w_1 - w_2) = (w_1 + w_2)(w_1 - w_2)^2 \geq 0$$

De sorte que:

$$(\frac{\partial u}{\partial t}, u) \leq \int_\Omega (v_1^2 - v_2^2)(v_1 - v_2)\ dx \qquad (4.16)$$

$$(\frac{\partial v}{\partial t}, v) \leq \int_\Omega (u_1^2 - u_2^2)(u_1 - u_2)\ dx \qquad (4.17)$$

$$(\frac{\partial w}{\partial t}, w) \leq \int_\Omega (u_1^2 - u_2^2)(w_1 - w_2) - \int_\Omega (v_1^2 - v_2^2)(w_1 - w_2)\ dx \qquad (4.18)$$

mais :

$$u_i, v_i, w_i \in L^{\infty}(Q)$$

donc si :

$$\text{Max}\ (||u_i||_{L^{\infty}(Q)}, ||v_i||_{L^{\infty}(Q)}, ||w_i||_{L^{\infty}(Q)}) = \mu$$

on a :

$$\left| \int_{\Omega} (v_1^2 - v_2^2)(u_1 - u_2)\ dx \right| = \left| \int_{\Omega} (v_1 + v_2)(v_1 - v_2)(u_1 - u_2)\ dx \right|$$

$$\leq 2\mu \int_{\Omega} |(v_1 - v_2)(x,t)||(u_1 - u_2)(x,t)|\ dx = 2\mu |(u, v)|$$

$$\leq 2\mu (u,u)^{\frac{1}{2}} (v,v)^{\frac{1}{2}} = 2\mu |v||u|$$

et

$$\left| \int_{\Omega} (u_1^2 - u_2^2)(v_1 - v_2)\ dx \right| \leq 2\mu |u||v|$$

et $\left| \int_{\Omega} w(u_1^2 - u_2^2)dx - \int_{\Omega} w(v_1^2 - v_2^2)dx \right| \leq 2\mu |w| [|u| + |v|]$

et d'après (4.16), (4.17) et (4.18) on obtient :

$$\frac{d}{dt} |u(t)|^2 = 2 \left(\frac{\partial u}{\partial t}, u\right) \leq 4\mu |v(t)||u(t)| \qquad (4.19)$$

$$\frac{d}{dt} |v(t)|^2 = 2 \left(\frac{\partial v}{\partial t}, v\right) \leq 4\mu |u(t)||v(t)| \qquad (4.20)$$

$$\frac{d}{dt} |w(t)|^2 = 2 \left(\frac{\partial w}{\partial t}, w\right) \leq 4\mu |w(t)| (|u(t)| + |v(t)|) \qquad (4.21)$$

En ajoutant (4.19), (4.20) et (4.21) il vient :

$$\frac{d}{dt} (|u(t)|^2 + |v(t)|^2 + |w(t)|^2) \leq$$

$$4\mu (2|v(t)||u(t)| + |w(t)||u(t)| + |w(t)||v(t)|)$$

Alors :

$$\frac{d}{dt} (|u(t)|^2 + |v(t)|^2 + |w(t)|^2) \leq 8\mu (|u(t)|^2 + |v(t)|^2 + |w(t)|^2)$$

on a :

$$A^2 + B^2 - 2AB = (A - B)^2 \geq 0$$

donc :

$$2AB \leq A^2 + B^2$$

alors :

$$\frac{d}{dt}(|u(t)|^2 + |v(t)|^2 + |w(t)|^2) \leq 4\,\mu\,[|u(t)|^2 + |v(t)|^2 + \frac{1}{2}(|u(t)|^2 + |w(t)|^2) + \frac{1}{2}(|v(t)|^2 + |w(t)|^2)]$$

$$\leq 4\,\mu\,[|u(t)|^2 + |v(t)|^2 + (|u(t)|^2 + |w(t)|^2) + (|v(t)|^2 + |w(t)|^2)]$$

$$\leq 8\,\mu\,[|u(t)|^2 + |v(t)|^2 + |w(t)|^2$$

Et donc d'aprés le lemme de Gronwall (J.L.Demially [3]) :

$$|u(t)|^2 + |v(t)|^2 + |w(t)|^2 = 0,$$

c'est à dire :

$$|u(t)| = |v(t)| = |w(t)| = 0,$$

d'où :

$$u_1 = u_2, \quad v_1 = v_2 \quad \text{et} \quad w_1 = w_2$$

4.4 Estimations à priori

On prend k sous la forme :

$$k = \frac{T}{N}, \text{ N entier,}$$

et l'on introduit les fonnctions :

$$\begin{cases} u_{ik}(t) = u^{n+\frac{i}{2}}, v_{ik}(t) = v^{n+\frac{i}{2}}, w_{ik}(t) = w^{n+\frac{i}{2}}, i = 1,2 \\ \text{pour } t \in [\, nk, (n+1)k\,[, \; n = 0,1 \ldots, N-1 \end{cases} \tag{4.22}$$

et

$$\begin{cases} \tilde{u}_k(t), \tilde{v}_k(t), \tilde{w}_k(t) \text{ linéaire dans } [\, nk, (n+1)k\,], 0 \le n \le N-1, \\ \tilde{u}_k(nk) = u^n, \tilde{v}_k(nk) = v^n, \tilde{w}_k(nk) = w^n. \end{cases} \tag{4.23}$$

On va démontrer le :

Lemme 4.4.1 les fonnctions u_{ik}, v_{ik}, w_{ik}, (i = 1, 2), $\tilde{u}_k$, $\tilde{v}_k, \tilde{w}_k$ demeurent, lorsque $k \to 0$, dans un borné de $L^{\infty}(0, T; H^1(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega))$ et sont à valeurs positives (p.p).
Nous allons diviser la démonstration de ce lemme en plusieurs étapes ; on vérifiera en cours de route que les fonnctions u_{ik}... sont bien à valeurs dans $H^1(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$.

Lemme 4.4.2 Si l'on pose :

$$R_0 = ||u_0||_{L^{\infty}(\Omega)} + ||v_0||_{L^{\infty}(\Omega)} + ||w_0||_{L^{\infty}(\Omega)} \tag{24}$$

On a :

$$\begin{cases} ||u^{n+\frac{i}{2}}||_{L^{\infty}(\Omega)} + ||v^{n+\frac{i}{2}}||_{L^{\infty}(\Omega)} + ||w^{n+\frac{i}{2}}||_{L^{\infty}(\Omega)} \le R_0 \\ \forall n = 0, \ldots, N-1 \text{ et pour } i = 1,2, \end{cases} \tag{25}$$

Et

$$\begin{cases} u^{n+\frac{i}{2}}, v^{n+\frac{i}{2}}, w^{n+\frac{i}{2}} \ge 0 \quad \text{p. p.} \\ \forall n \text{ et } i = 1,2. \end{cases} \tag{26}$$

Démonstration.

Les propriétés (4.26) résultent des formules (4.10) (4.12).

Pour simplifier l'écriture, posons :

$\lambda^{n+\frac{i}{2}} = ||u^{n+\frac{i}{2}}||_{L^\infty(\Omega)}$, $\mu^{n+\frac{i}{2}} = ||v^{n+\frac{i}{2}}||_{L^\infty(\Omega)}$, $\nu^{n+\frac{i}{2}} = ||w^{n+\frac{i}{2}}||_{L^\infty(\Omega)}$

D'après les formules (4.12) on a :

$$\lambda^{n+1} \leq \lambda^{n+\frac{1}{2}}\ ,\ \mu^{n+1} \leq \mu^{n+\frac{1}{2}}\ ,\ \nu^{n+1} \leq \nu^{n+\frac{1}{2}}$$

et on aura donc (4.25) si l'on montre que :

$$\lambda^{n+\frac{1}{2}} + \mu^{n+\frac{1}{2}} + \nu^{n+\frac{1}{2}} \leq \lambda^n + \mu^n + \nu^n \qquad (4.27)$$

On observe pour cela que, comme $\sigma^n \leq \lambda^n + \mu^n$ et comme la fonction :

$$\sigma \rightarrow \frac{a+k\sigma^2}{1+2k\sigma}$$

est croissante au moins pour $\sigma \leq a$, on a (d'aprés (4.10)) :

$$\begin{cases} u^{n+\frac{1}{2}}(x) \leq \dfrac{u^n(x)+k(\lambda^n+\mu^n)^2}{1+2k(\lambda^n+\mu^n)} & \text{p. p.} \\ v^{n+\frac{1}{2}}(x) \leq \dfrac{v^n(x)+k(\lambda^n+\mu^n)^2}{1+2k(\lambda^n+\mu^n)} & \text{p. p} \end{cases} \qquad (4.28)$$

d'où l'on déduit :

$$\lambda^{n+\frac{1}{2}} \leq \frac{\lambda^n + k(\lambda^n+\mu^n)^2}{1+2k(\lambda^n+\mu^n)}$$

$$\mu^{n+\frac{1}{2}} \leq \frac{\mu^n + k(\lambda^n+\mu^n)^2}{1+2k(\lambda^n+\mu^n)}$$

et on a :

$$w^{n+\frac{1}{2}} = \sqrt{/\sigma'/}\tan\left[\arctan\left(\frac{w^n}{\sqrt{/\sigma/}}\right) - k\sqrt{/\sigma'/}\right], \text{ telque } \sigma' = \sigma^n\left(\frac{v^n+u^n}{1+2k\,\sigma^n}\right)$$

d'où :

$$w^{n+\frac{1}{2}} \leq \sqrt{/\sigma'/}\tan\left[\arctan\left(\frac{w^n}{\sqrt{/\sigma/}}\right)\right]$$

(puisque les fonctions tangente et arctangente sont strictement croissantes)

donc :

$$w^{n+1} \leq w^n$$

alors :

$$v^{n+\frac{1}{2}} \leq v^n$$

d'où (4.27) par addition de ces inégalités.
Du lemme (4.7) résulte aussitôt que u_{ik}, v_{ik}, w_{ik}, (i = 1, 2), $\tilde{u}_k$, $\tilde{v}_k$, $\tilde{w}_k$ demeurent dans un borné de $L^{\infty}(0, T; L^{\infty}(\Omega))$.
Il reste maintenant à montrer que ces fonctions demeurent dans un borné de $L^{\infty}(0, T; H^1(\Omega))$.

On va montrer le :
Lemme 4.4.3 Si $6kR_0 < 1$, il existe une constante R_1 telle que :

$$\begin{cases} \left|\frac{\partial u^{n+\frac{i}{2}}}{\partial x_j}\right|, \left|\frac{\partial v^{n+\frac{i}{2}}}{\partial x_j}\right|, \left|\frac{\partial w^{n+\frac{i}{2}}}{\partial x_j}\right| \leq R_1, \\ i = 1,2, \quad \text{et } j = 1,2,3, \quad 0 \leq n \leq N-1. \end{cases} \tag{29}$$

Remarque 4.4.1
Naturellement les inégalités (4.29) donnent le résultat désiré et leur démonstration achèvera donc la démonstration du lemme (4.4.1).
Démonstration du Lemme 4.4.3
1) Montrons d'abord que :

$$\begin{cases} \left|\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_j}\right| \leq \left|\frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x_j}\right|, \\ j = 2,3. \end{cases} \tag{4.30}$$

$$\begin{cases} \left|\frac{\partial v^{n+1}}{\partial x_j}\right| \leq \left|\frac{\partial v^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x_j}\right|, \\ j = 1,3. \end{cases} \tag{4.31}$$

$$\begin{cases} \left|\frac{\partial w^{n+1}}{\partial x_j}\right| \leq \left|\frac{\partial w^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x_j}\right|, \\ j = 1,3. \end{cases} \tag{4.32}$$

D'après la première équation (9), que l'on dérive en x_j tel que j = 2, 3 :

$$\begin{cases} \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_j} - \frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x_j} + k \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_j}\right) = 0. \\ \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_j}(a_1, x_2, x_3, t) = 0 \text{ et } j = 2, 3 \end{cases} \tag{4.33}$$

Cette dérivation est justifiée si, par exemple, $\frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x_j} \in L^2(\Omega)$, j = 2, 3 :

prenant alors le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$ avec $\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_j}$, j = 2, 3, il vient,

comme :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_j}\right), \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_j}\right) \geq 0,$$

$$\left| \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_j} \right|^2 \leq \left|\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_j}\right| \left|\frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x_j}\right|$$

d'où (4.30). On établit de la mème façon (4.31) en dérivant en x_j , j = 1, 3 la deuxième équation (4.9).

Aussi (4.32) de la mème façon, en dérivant en x_j , j = 1, 2 la troisième équation (4.9).

1) Admettons pour l'instant les inégalités suivantes :

$$\begin{cases} \left| D_i u^{n+\frac{1}{2}} \right|^2 + \left| D_i v^{n+\frac{1}{2}} \right|^2 + \left| D_i w^{n+\frac{1}{2}} \right|^2 \\ \qquad \leq \xi \left(\left| D_i u^n \right|^2 + \left| D_i v^n \right|^2 + \left| D_i w^n \right|^2 \right) \\ D_i = \frac{\partial}{\partial x_j}, \ \xi = \frac{(1-2kR_0)^2}{(1-6kR_0)^2}, \ 1, 2, 3. \end{cases} \tag{4.34}$$

et

$$\left| \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_1} \right|^2 + \left|\frac{\partial v^{n+1}}{\partial x_2}\right|^2 + \left|\frac{\partial w^{n+1}}{\partial x_3}\right| \leq k R_2 + \left(\left| \frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x_1} \right|^2 + \left|\frac{\partial v^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x_2}\right|^2 + \left|\frac{\partial w^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x_3}\right|^2 \right) \tag{4.35}$$

Vérifions que le lemme en résulte.

Posons :

$$\beta_{n+\frac{i}{2}} = \left| D_1 u^{n+\frac{i}{2}} \right|^2 + \left| D_2 u^{n+\frac{i}{2}} \right|^2 + \left| D_3 u^{n+\frac{i}{2}} \right|^2 + \left| D_1 v^{n+\frac{i}{2}} \right|^2 + \left| D_2 v^{n+\frac{i}{2}} \right|^2 +$$

$$\left| D_3 v^{n+\frac{i}{2}} \right|^2 + \left| D_1 w^{n+\frac{i}{2}} \right|^2 + \left| D_2 w^{n+\frac{i}{2}} \right|^2 + \left| D_3 w^{n+\frac{i}{2}} \right|^2 , \ i = 1 ,2 ,3. \qquad (4.36)$$

on déduit de (4.30) (4.31) (4.32) (4.35) que :

$$\beta_{n+1} \leq kc_2 + \beta_{n+\frac{1}{2}} \qquad (4.37)$$

et de (4.34) on déduit (par addition des inégalités pour i = 1, 2) :

$$\beta_{n+\frac{1}{2}} \leq \xi \beta_n \qquad (4.38)$$

donc :

$$\beta_{n+1} \leq kc_2 + \xi \beta_n$$

d'où :

$$\beta_{n+1}, \beta_{n+\frac{1}{2}} \leq \text{constante}$$

Ce qui démontre le lemme, sous réserve de la vérification de (4.34) (4.35)

2) Vérification de (4.34), on déduit de (4.8) que :

$$D_i u^{n+\frac{1}{2}} = D_i u^n - 2k\, u^{n+\frac{1}{2}} D_i\, u^{n+\frac{1}{2}} + 2k\, v^{n+\frac{1}{2}} D_i\, v^{n+\frac{1}{2}}$$

donc :

$$| D_i u^{n+\frac{1}{2}}| \leq |D_i u^n| + 2k(|u^{n+\frac{1}{2}}| + |v^{n+\frac{1}{2}}|)\ (|D_i\, u^{n+\frac{1}{2}}| + | D_i\, v^{n+\frac{1}{2}}|) \qquad (4.39)$$

d'où :

$$| D_i u^{n+\frac{1}{2}}| \leq |D_i u^n| + 2kR_0(|D_i\, u^{n+\frac{1}{2}}| + | D_i\, v^{n+\frac{1}{2}}|) \qquad (4.40)$$

et de même :

$$| D_i v^{n+\frac{1}{2}}| \leq |D_i v^n| + 2kR_0(|D_i\, v^{n+\frac{1}{2}}| + | D_i\, u^{n+\frac{1}{2}}|) \qquad (4.41)$$

et

$$| D_i w^{n+\frac{1}{2}}| \leq |D_i w^n| + 2kR_0(|D_i\, v^{n+\frac{1}{2}}| + | D_i\, u^{n+\frac{1}{2}}| + | D_i\, w^{n+\frac{1}{2}}|) \qquad (4.42)$$

pour simplifier, posons pour l'instant :

$$| D_i u^{n+\frac{1}{2}} | = x, \; | D_i v^{n+\frac{1}{2}} | = y, \; | D_i w^{n+\frac{1}{2}} | = z, \; |D_i u^n| = a, \; |D_i v^n| = b,$$

$$|D_i w^n| = c, \quad 2kR_0 = \gamma ;$$

alors (4.40) (4.41) (4.42) s'écrivent :

$$x \le a + \gamma(x + y) \le a + \gamma(x + y + z),$$

$$y \le b + \gamma(x + y) \le b + \gamma(x + y + z),$$

$$\text{et } z \le c + \gamma(x + y + z)$$

d'où par addition :

$$(1 - 3\gamma)(x + y + z) \le a + b + c$$

d'où :

$$x \le a + \gamma \frac{a+b+c}{1-3\gamma}, \quad y \le b + \gamma \frac{a+b+c}{1-3\gamma}, \quad z \le c + \gamma \frac{a+b+c}{1-3\gamma}$$

et donc :

$$x^2 + y^2 + z^2 \le a^2 + b^2 + c^2 + \frac{2\gamma}{1-3\gamma}(a+b+c)^2 + \frac{3\gamma^2}{(1-3\gamma)^2}(a+b+c)^2 =$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + \frac{2\gamma(1-2\gamma)}{(1-3\gamma)^2}(a+b+c)^2 \le a^2 + b^2 + c^2 + \frac{4\gamma(1-2\gamma)}{(1-3\gamma)^2}(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$= \frac{(1-\gamma)^2}{(1-3\gamma)^2}(a^2 + b^2 + c^2)$$

d'où (4.34)

4) Vérification de (4.35). Dérivons (formellement d'abord) la 1re équation (4.9) en x_1 ; il vient :

$$\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_1} - \frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x_1} + k \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_1}\right) = 0 \qquad (4.43)$$

Et l'équation (4.9) donne :

$$\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_1}(a_1, x_2, x_3) = \frac{1}{k} u^{n+\frac{1}{2}}(a_1, x_2, x_3) \qquad (4.44)$$

Prenant le produit scalaire de (4.43) avec $\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_1}$ il vient :

$$\left|\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_1}\right|^2 - \left(\frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x_1}, \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_1}\right) \leq \frac{k}{2} \int_{a_3}^{b_3} \int_{a_2}^{b_2} \left[\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_1}(a1, x2, x3)\right]^2 \, dx2 \, dx3$$

d'où, d'après (4.44) :

$$\left|\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_1}\right|^2 \leq \left|\frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x_1}\right| \left|\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_1}\right| + \frac{1}{2k} \int_{a_3}^{b_3} \int_{a_2}^{b_2} [u^{n+\frac{1}{2}}(a1, x2, x3)]^2 \, dx2 \, dx3$$

d'où :

$$\left|\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_1}\right|^2 \leq \left|\frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x_1}\right|^2 + \frac{1}{k} \int_{a_3}^{b_3} \int_{a_2}^{b_2} [u^{n+\frac{1}{2}}(a1, x2, x3)]^2 \, dx2 \, dx3 \qquad (4.45)$$

Mais d'après (4.10) :

$$u^{n+\frac{1}{2}}(a1, x2, x3) = \frac{k(\sigma^n(a1,x2,x3))^2}{1+2k\,\sigma^n(a1,x2,x3)} \leq \text{(d'après le lemme (4.4.2)) } kR^2_0$$

et donc :

$$\frac{1}{k} \int_{a_3}^{b_3} \int_{a_2}^{b_2} [u^{n+\frac{1}{2}}(a1, x2, x3)]^2 \, dx2 \, dx3 \leq k(b3 - a3)(b2 - a2)R^4_0$$

de sorte que (4.45) donne :

$$\left|\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_1}\right|^2 \leq \left|\frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x_1}\right|^2 + k(b3 - a3)(b2 - a2)R^4_0 \qquad (4.46)$$

Partant de la deuxième équation (4.9) (que l'on dérive en x_2), on en déduit une inégalité analogue à (4.46) avec v et x_2 au lieu de u et x_1.

Dérivons (formellement d'abord) la troisième équation (4.9) en x_3 ; il vient :

$$\frac{\partial w^{n+1}}{\partial x_3} - \frac{\partial w^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x_3} + k \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial w^{n+1}}{\partial x_3}\right) = 0 \qquad (4.47)$$

et l'équation (4.9) donne :

$$\frac{\partial w^{n+1}}{\partial x_3}(x_1, x_2, a_3) = \frac{1}{k} w^{n+\frac{1}{2}}(x_1, x_2, a_3) \qquad (4.48)$$

Prenant le produit scalaire de (4.47) avec $\frac{\partial w^{n+1}}{\partial x_3}$ il vient :

$$\left|\frac{\partial w^{n+1}}{\partial x_3}\right|^2 - \left(\frac{\partial w^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x_3}, \frac{\partial w^{n+1}}{\partial x_3}\right) \leq \frac{k}{2} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} \left[\frac{\partial w^{n+1}}{\partial x_3}(a1, x2, x3)\right]^2 \, dx1 \, dx2$$

d'où, d'après (4.48) :

$$\left|\frac{\partial w^{n+1}}{\partial x_3}\right|^2 \leq \left|\frac{\partial w^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x_3}\right| \left|\frac{\partial w^{n+1}}{\partial x_3}\right| + \frac{1}{2k} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} [w^{n+\frac{1}{2}}(a1, x2, x3)]^2 \, dx1 \, dx2$$

d'où :

$$\left|\frac{\partial w^{n+1}}{\partial x_3}\right|^2 \leq \left|\frac{\partial w^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x_3}\right|^2 + \frac{1}{k} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} [w^{n+\frac{1}{2}}(a1, x2, x3)]^2 \, dx1 \, dx2 \qquad (4.49)$$

Mais d'après (4.10) :

$$w^{n+\frac{1}{2}}(x1, x2, a3) \leq w^n(x1, x2, a3) = 0 \leq kR^2_0$$

et donc :

$$\frac{1}{k} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} [w^{n+\frac{1}{2}}(a1, x2, x3)]^2 \, dx1 \, dx2 \leq k(b2 - a2)(b1 - a1) \, R^4_0$$

de sorte que (4.49) donne :

$$\left|\frac{\partial w^{n+1}}{\partial x_3}\right|^2 \leq \left|\frac{\partial w^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x_3}\right|^2 + k(b2 - a2)(b1 - a1) \, R^4_0 \qquad (4.50)$$

d'où (4.35)

4.5 Passage à la limite

D'après le lemme 4.4.1, on peut extraire des sous-suites, encore notées :

u_{ik}, v_{ik}, w_{ik}, $\tilde{u}_k$, $\tilde{v}_k$, $\tilde{w}_k$, telles que :

$$\begin{cases} u_{ik} \to u_i, \; v_{ik} \to v_i, \; w_{ik} \to w_i, \\ \tilde{u}_k \to \tilde{u}, \; \tilde{v}_k \to \tilde{v}, \; \tilde{w}_k \to \tilde{w}. \\ \text{dans } L^{\infty}(0, T; H^1(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)) \text{ faible étoile.} \end{cases} \qquad (4.51)$$

Ce type de convergence n'est pas suffisant pour passer à la limite dans les terme non linéaire, mais on a une estimation supplémentaire pour $\tilde{u}_k, \tilde{v}_k$ et $\tilde{w}_k$

Lemme 4.5.1 - lorsque k → 0,

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial t}, \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial t}, \frac{\partial \tilde{w}_k}{\partial t} \text{ demeurent} \\ \text{dans un borné } L^{\infty}(0, T ; H^1(\Omega) \cap L^2(\Omega)) \end{cases} \quad (4.52)$$

Démonstration.
Ajoutant les égalités correspondantes de (4.8) (4.9), on a :

$$u^{n+1} - u^n + k \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_1} + k[(u^{n+\frac{1}{2}})^2 - (v^{n+\frac{1}{2}})^2] = 0 \quad (4.53)$$

Ce qui équivaut à :

$$\frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial t} + \frac{\partial u2k}{\partial x1} + (u_{1k})^2 - (v_{1k})^2 = 0 \quad (4.54)$$

De mème :

$$\frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial t} + \frac{\partial v2k}{\partial x2} + (v_{1k})^2 - (u_{1k})^2 = 0 \quad (4.55)$$

et

$$\frac{\partial \tilde{w}_k}{\partial t} + \frac{\partial w2k}{\partial x3} + (w_{1k})^2 - (v_{1k})^2 - (u_{1k})^2 = 0 \quad (4.56)$$

et ceci extrait (4.52) grâce au Lemme 4.4.1.
On peut alors supposer, grâce aux estimations sur $\tilde{u}_k, \tilde{v}_k, \tilde{w}_k$ et la compacité de l'injection de $H^1(Q) \to L^2(Q)$, que :

$$\begin{cases} \tilde{u}_k \to \tilde{u}, \tilde{v}_k \to \tilde{v}, \tilde{w}_k \to \tilde{w} \\ \text{dans } L^2(Q) \text{ fort et p. p.} \end{cases} \quad (4.57)$$

Mais, d'après la définition des fonctions $\tilde{u}_k$ et u_{2k}, on a :

$$||\tilde{u}_k - u_{2k}||_{L^{\infty}(0,T ; L^2(\Omega))} \leq \sup_{0 \leq n \leq N-1} | u^{n+1} - u^n |$$

Et avec (4.44) et le lemme (4.4.1), il en résulte que :

$$||\tilde{u}_k - u_{2k}||_{L^{\infty}(0,T ; L^2(\Omega))} \leq kc_3 \quad (4.58)$$

De même :

$$||\tilde{v}_k - v_{2k}||_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq kc_3 \quad (4.59)$$

Et

$$||\tilde{w}_k - w_{2k}||_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq kc_3 \quad (4.60)$$

Donc, avec (4.57), on en déduit que l'on peut supposer que :

$$\begin{cases} \tilde{u}_{2k} \to \tilde{u}, \tilde{v}_{2k} \to \tilde{v}, \widetilde{w}_{2k} \to \tilde{w} \\ \text{dans } L^2(Q) \text{ fort et p. p.} \end{cases} \quad (4.61)$$

Mais la première égalité (4.8) s'écrit :

$$u_{2k} - u_{1k} + k\frac{\partial u2k}{\partial x1} = 0$$

D'où, avec le lemme (4.4.1),

$$||u_{2k} - u_{1k}||_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq kc_4 \quad (4.62)$$

Et de même :

$$||v_{2k} - v_{1k}||_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq kc_4 \quad (4.63)$$

Et

$$||w_{2k} - w_{1k}||_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq kc_4 \quad (4.64)$$

On peut donc supposer, d'après (4.61), que :

$$\begin{cases} \tilde{u}_{1k} \to \tilde{u}, \tilde{v}_{1k} \to \tilde{v}, \widetilde{w}_{1k} \to \tilde{w} \\ \text{dans } L^2(Q) \text{fort et p. p.} \end{cases} \quad (4.65)$$

alors (avec les notations (4.51)) :

$$u_i = \tilde{u}\ (= u),\ v_i = \tilde{v}\ (= v),\ w_i = \tilde{w}(\ = w).$$

Et l'on a maintenant :

$$(u_{1k})^2 \to u^2 \text{ dans } L^2(Q) \text{ faible,}$$

Et, au même sens, $(v_{1k})^2 \to v^2$ et $(w_{1k})^2 \to w^2$, et on peut passer à la limite dans

dans (4.54) (4.55) (4.56) ;

Comme, d'après le lemme 4.5.1, on peut aussi supposer que :

$$\frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial t} \to \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial t} \to \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial \tilde{w}_k}{\partial t} \to \frac{\partial w}{\partial t} \text{ dans } L^{\infty}(0, T;L^2(\Omega)) \text{ faible*}$$

et on a :

$$\tilde{u}_k(0) \to u(0),\ \tilde{v}_k(0) \to v(0) \text{ et } \tilde{w}_k(0) \to w(0) \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible,}$$

et par conséquent :

$$u(0) = u_0,\ v(0) = v_0 \text{ et } w(0) = w_0$$

on voit ainsi que u, v et w satisfont au système (4.1).

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons appliqué la méthode de décomposition de l'opérateur pour l'étude d'un problème aux limites non linéaire gouverné par un système de Carleman en dimension trois dans un tube parallélépipédique.
On a établi un résultat de l'existence et l'unicité pour le cas bidimensionnel puis on a généralisé ce résultat au cas tridimensionnel.
Le problème étudié en dimension deux est un problème posé par T.CARLEMAN dans [2], ce problème a été déjà étudié par KOLODNER [5]. Le résultat donné dans le texte est dû à R.TEMAM. La méthode de décomposition est l'usage courant en Analyse Numérique, bornons-nous a renvoyons à G.I.MARCHIK [9], N.N.YANENKO [16], R.TEMAM [13] et à la bibliographie de ces travaux (cf. aussi TROTTER [15]). Une démonstration d'un théorème de l'existence (pour un système d'équations intervenant en Météorologie) utilisant la méthode de décomposition est annoncé dans DEMIDOV et MARCHIK [4]. Une autre application de la méthode de décomposition pour l'étude directe des équations de Riccati est due à R.TEMAM [14] .
La méthode donnée est constructive (à cause de l'unicité, il y a convergence sans qu'il soit nécessaire d'extraire des sous-suites).
La méthode peut être généralisée à des problèmes multidimensionnels.

Bibliographie

[1] H. BREZIS - Analyse fonctionnelle, Théorie et application, Masson, Paris (1987).

[2] T. CARLEMAN - Problèmes mathématiques dans la théorie cinétique des gaz, Publications scientifiques de l'Institut Mittag-Leffler, Uppsala (1957).

[3] J.L.DEMIALLY - Analyse numérique et équations différentielles, OPU. Alger (1993) Introduction générale.

[4] DEMIDOV et G.I.MARCHIK - Un théorème d'existence pour le problème de la prévision météorologique a court terme. Soviet. Math., 7(1966), 1310-1312.

[5] KOLODNER - On Carleman's model for the Boltzman equation. Non linear problems. The Univ. Of wisconsin Press, (1963) 285-287.

[6] J.-L. LIONS - Equations différentielles opérationnelles, Springer-Verlag, Berlin (1961).

[7] J.-L. LIONS, R. TEMAM - Eclatement et décentralisation en calcul des variations, 3^{me} Colloque International d'Optimisation, Nice (1969), Springer-Verlag, Lecture Notes.

[8] J.-L. LIONS - Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaire, Paris, Dunod, Gauthier-Villars, 1969.

[9] G.I.MARCHIK - Méthode numérique de la prévision météorologique. Léningrad, 1967.(Tradiction française : A. Colin, Paris, 1969).

[10] M. SAMUELIDES, L. TOUZILLIER - Aalyse fonctionnelle, Cepadues-éditions, n◦255 (1989)

[11] L. TARTAR - Solutions oscillantes des équations de Carleman. Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz. (1980-1981), exp. n◦ 12, p. 295-303.

[14] R. TEMAM - Etude directe de l'équation de Riccati en dimension infinie. C. R. Acad. Sc., Paris 1969.

[15] H. F. TROTTER, On the product of semi-groups of operators. Proc. Amer. Math. Soc. 10(1959), 545-551.

[16] N. N. YANENKO - Méthodes à pas fractionnaires, Armand Colin, (1969).