République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Kasdi Merbah- OUARGLA

Faculté des sciences et de la technologie

et des sciences de la matière

Département des mathématique et informatique

N° d'ordre :
N° de série :

MEMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de :

MAGISTER En MATHEMATIQUES

Option : Mathématiques Appliquées

Présenté par

MADANI Belabbas

ETUDE DE QUELQUES PROBLEMES DE THERMOELASTICITE AVEC DEUXIEME SON

Soutenu le **10-03-2013**

Devant le Jury composé de :

Nom	Grade	Université	Qualité.
Dr Djamal Ahmed Chacha	Professeur	Ouargla	Président
Dr Salim Messaoudi.	Professeur	KFUPM-A.S	Rapporteur
Dr Saïd Med Saïd	MC	Ouargla	Examinateur
Dr Guerfi Amara	MC	Ouargla	Examinateur

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

DEDICACES

A la mémoire de mon père ;

A ma chère mère ;

A toutes ma famille ;

A tous les enseignants et les éducateurs qui ont contribué à ma formation durant tout le parcours de mes études jusqu'à ce jour ;

…je dédie ce modeste travail.

Belabbas

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer mes sincères remerciements ainsi que ma vive gratitude envers tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce modeste travail.

Mes sincères remerciements et reconnaissances vont à mon encadreur, Professeur Salim **Messaoudi** pour son aide, ainsi que pour la confiance qu'il m'a prodiguée durant la réalisation de ce travail. Il a su motiver chaque étape de mon travail par des remarques pertinentes et a su me faire progresser dans mes recherches.

Mes plus vifs remerciements s'adressent également aux membres de jury qui m'ont honoré en acceptant d'évaluer ce travail.

Que tous les enseignants qui ont contribué à ma formation reçoivent ma gratitude et en particulier ceux du département des mathématique et informatique de Ouargla.

Sans oublier d'exprimer mes remerciements à tous mes amis Chacun avec son nom et tous ceux qui m'ont aidé de prés ou de loin.

Table des matières

Introduction

Dans la théorie classique de la thermodynamique, le transfert de chaleur est considéré comme un processus purement diffusif, généralement décrits en utilisant la loi de Fourier

$$q = -k(\theta)\,\theta_x.$$

En conséquence, nous obtenons l'équation de la chaleur habituelle. Cette équation donne une description utile de la conduction de la chaleur en vertu d'une large gamme de conditions et prédit une vitesse de propagation infinie, qui est toute perturbation thermique à un point a un effet instantané dans le reste du corps. Les expériences ont montré que la conduction de chaleur dans certains cristaux diélectriques à basse température est libre de ce paradoxe (la vitesse de propagation infinie) et les perturbations qui sont presque entièrement thermique, peut se propager à une vitesse finie. Cette propagation de l'ondulatoire de la chaleur est connue sous le nom de deuxième son (second sound). Il a d'abord été détecté dans le **He**, puis dans des cristaux de diélectriques puretés de floride de sodium, **Naf**, et bismath **Bi**. La gamme de température, pour laquelle le deuxième son est détectable, est en fait la propagation tout à fait petite et normale diffusive intervient au-dessus de lui.

Dans cette théorie, il est supposé que le flux de chaleur satisfait la loi de Cattaneo [5]

$$\tau(\theta)\,q_t + q = -k(\theta)\,\theta_x, \tag{1}$$

où θ est la température absolue, q est le flux de chaleur, τ et k sont des fonctions strictement positives dépendant de la température absolue. Avec cette relation, l'énergie interne, donnée par

$$e = \hat{e}(\theta)\,, \tag{2}$$

n'est plus compatible avec la deuxième loi de la thermodynamique. Coleman, Fabrizio et Owen [6] ont montré en 1982 que, si (1) est adoptée, la compatibilité avec la thermodynamique exige que (2) devrait être remplacée par

$$e = \tilde{e}(\theta, q) = a(\theta) + \sigma(\theta) q^2,$$

où σ est une fonction déterminée par τ et k. En particulier $\sigma(\theta) > 0$. En conséquence, nous obtenons le système qui régit l'évolution de θ et q

$$\begin{aligned} q_x - \left(a'(\theta) + b'(\theta) q^2\right) q_t + 2\sigma(\theta) q q_t &= 0 \\ \tau(\theta) q_t + q + k(\theta) q_x &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

au lieu de système de chaleur utilisé

$$\begin{aligned} q + k(\theta) \theta_x &= 0 \\ q_x + \hat{e}'(\theta) \theta_t &= 0, \end{aligned}$$

qui donne, a son tour, l'équation de la chaleur linéaire bien connue $\theta_t = k\theta_{xx}, \quad k = k/\hat{e}'$.

Au cours des trois dernières décennies, de nombreux chercheurs se sont intéressés à la conduction de la chaleur et thermoélasticité avec deuxième son et plusieurs résultats concernant l'existence, explosion, et le comportement asymptotique de douceur, ainsi que des solutions faibles, liés à (3), ont été établis. Nous renvoyons le lecteur à [7], $[11-14]$, [16], [18], [20], $[31-32]$ pour plus de détails.

Pour la thermoélasticité avec le deuxième son, nous commençons avec le travail pionnier de Tarabek [33], où les problèmes liés a

$$\begin{aligned} u_{tt} - a(u_x, \theta, q) u_{xx} + b(u_x, \theta, q) \theta_x &= \alpha_1(u_x, \theta) q q_x \\ \theta_t - g(u_x, \theta, q) q_x + d(u_x, \theta, q) u_{tx} &= \alpha_2(u_x, \theta) q q_t \\ \tau(u_x, \theta) q_t + q + k(u_x, \theta) \theta_x &= 0, \end{aligned} \tag{4}$$

ont été discutés dans des situations de domaine à la fois bornées et non bornées et les résultats d'existence globale pour les petites données initiales ont été établies. Il a également montré que ces solutions "classiques" ont tendance à l'équilibre quand t tend vers l'infini, mais pas de taux de décroissance a été donné. Dans son travail, Tarabek a utilisé l'argument de l'énergie habituelle et a exploité certaines relations de la seconde loi de la thermodynamique pour surmonter la difficulté résultant de l'absence de l'inégalité de Poincaré dans les domaines non bornés. En ce qui concerne le comportement asymptotique, Racke [27] a discuté (4) et a établi des résultats de décroissance exponentielle pour plusieurs linéaires et non linéaires problèmes aux limites. En particulier, il a étudié (4), avec $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, et pour un milieu assujetti rigidement avec la température maintenue constante sur les limites, i.e.

$$u\,(t;0) = u\,(t;1) = 0,\ \ \theta\,(t,0) = \theta\,(t,1) = \bar{\theta},\ \ t \geq 0$$

et il a montré que, pour des données initiales suffisamment petites, les solutions classiques décroissent de manière exponentielle à l'état d'équilibre. Messaoudi et Saïd-Houari [20] ont étendu le résultat de [27] au cas où $\alpha_1 \neq 0,\ \alpha_2 \neq 0$. Qin et al. [26] ont considéré comme un système non linéaire unidimensionnel de thermoélasticité non linéaire avec mémoire thermique et deuxième son et prouvé l'existence globale et décroissance exponentielle de la solution fournie quand les données initiales sont proches de l'équilibre et la fonction de relaxation décroit exponentiellement. En outre, Racke et Wang [30] ont considéré un problème de Cauchy non linéaire unidimensionnel de thermoélasticité avec deuxième son, et ont discuté de la bien posé. Ils décrivent le comportement en long temps des solutions globales et ont obtenu un taux de décroissance polynomiale. Voir aussi [10] et [30]. Pour le cas multidimensionnel (n = 2, 3), Racke [28] a établi un résultat d'existence pour le problème

$$\begin{cases} u_{tt} - \mu\Delta u - (\mu+\lambda)\nabla \operatorname{div} u + \beta\nabla\theta = 0 & \text{dans } \Omega\times(0,+\infty) \\ c\theta + k\operatorname{div} q + \beta \operatorname{div} u_t = 0 & \text{dans } \Omega\times(0,+\infty) \\ \tau_0 q_t + q + k\nabla\theta = 0 & \text{dans } \Omega\times(0,+\infty) \\ u(.,0) = u_0,\ u_t(.,0) = u_1,\ \theta(.,0) = \theta_0,\ q(.,0) = q_0 & \text{dans } \Omega \\ u = \theta = 0 & \text{sur } \partial\Omega\times(0,+\infty) \end{cases} \tag{5}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$, avec une frontière lisse $\partial\Omega$, $u = u(x,t)$, $q = q(x,t) \in \mathbb{R}^n$, et $\mu, \beta, \lambda, \gamma, \delta, \tau_0, k$ sont des constantes positives, où μ, λ sont des modules de Lamé et τ_0 est le temps de relaxation, un petit paramètre par rapport aux autres. En particulier, si $\tau_0 = 0$, (5) se réduit au système de la thermoélasticité classique, dans lequel le flux de chaleur est donnée par la loi de Fourier, au lieu du loi de Cattaneo. Il a aussi prouvé, dans les conditions $rotu = rotq = 0$, un résultat de décroissance exponentielle pour (5). Ce résultat s'applique automatiquement à la solution à symétrie radiale, comme un cas particulier. Messaoudi [15] a considéré (5), en présence d'un terme source dans la première équation, et ont prouvé une existence locale, ainsi qu'un résultat d'explosion pour des solutions avec l'énergie initiale négative. Ce résultat a ensuite été étendu à certaines solutions d'énergie initiale positive par Messaoudi et Saïd-Houari [17].

Dans ce travail, on considère un système thermoélastique linéaire avec deuxième son de 2 ou 3 dimensions, où les perturbations thermique en se propagent de manière ondulatoires en se déplaçant avec des points positifs à une vitesse finie. Cela se fait en utilisant la loi de Cattaneo pour la conduction de la chaleur au lieu de la loi de Fourier, pour des conditions aux limites de Dirichlet.

Notre objet d'étude est de traiter deux cas du système thermoélastique, avec deuxième son. Le premier perturbé avec un terme amortissant, on essayera d'obtenir des résultats d'existence et de comportement asymptotique. Le deuxième étant avec un terme viscoélastique. On essayera d'obtenir des résultats d'un comportement asymptotique dans le cas où la fonction de relaxation décroit d'une manière générale.

Résultats :

1- Pour le système :

$$u_{tt}-\mu\Delta u-(\mu+\lambda)\nabla(\operatorname{div}u)+\beta\nabla\theta+au_t=0,\ dans\ \ \Omega\ \times(0,+\infty),$$

$$c\theta_t+k\operatorname{div}q+\beta\operatorname{div}u_t=0,\ dans\ \Omega\ \times(0,+\infty),$$

$$\tau_0 q_t+q+k\nabla\theta=0,\ dans\ \Omega\ \times(0,+\infty),$$

$$u(.,0)=u_0,\ u_t(.,0)=u_{1,}\ \theta(.,0)=\theta_{0,}\ q(.,0)=q_0\ dans\ \Omega,$$

$$u=\theta=0,\ sur\ \partial\Omega\ \times(0,+\infty).$$

On va établir

- **existence et unicité** par la théorie des opérateurs maximaux monotones,
- **décroissance exponentielle** de l'énergie à l'aide de méthode des multiplicateurs.

2- Pour le système :

$$u_{tt}-\mu\Delta u-(\mu+\lambda)\nabla(\operatorname{div}u)+\beta\nabla\theta+\int_0^t g(t-s)\,\Delta u(x,s)\,ds=0,\ x\in\Omega,\ t\geq0$$

$$c\theta_t+k\operatorname{div}q+\beta\operatorname{div}u_t=0,\ x\in\Omega,\ t\geq0$$

$$\tau_0 q_t+q+k\nabla\theta=0,\ x\in\Omega,\ t\geq0$$

$$u(.,0)=u_0,\ u_t(.,0)=u_{1,}\ \theta(.,0)=\theta_{0,}\ q(.,0)=q_0\ dans\ \Omega$$

$$u=\theta=0\ sur\ \partial\Omega\ \times(0,+\infty)$$

On a établir

-**décroissance générale** si g décroit d'une manière générale,

-**décroissance exponentielle** de l'énergie si g décroit exponentiellement.

Chapitre 1

Notations, Rappels

1.1 Principales notations

On note :

1. $|x| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ...x_n^2}$ la norme euclidienne de x, $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.
2. $\langle x, y \rangle = \sum\limits_i x_i y_i$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.
3. $\overrightarrow{\eta} = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n)$ le vecteur normal unitaire extérieur en un point du bord de Ω.

Pour toute fonction $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ régulière, on note :

1. $D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$. avec $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ et $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^n |\alpha_i|$
2. $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) = \operatorname{grad} u$: Le gradient de u.
3. $\Delta u = \sum\limits_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$: Laplacien de u.

Pour toute fonction $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ régulière avec $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$, on note

1. $\Delta u = (\Delta u_1, \Delta u_2, ..., \Delta u_n)$.
2. $\operatorname{div} u = \nabla . u = \sum\limits_{i=1}^n \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$: La divirgence de u.
3. Si $n = 2$, $rot\ u = \nabla \wedge u = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$.

4. Si $n=3$, $rot\ u = \nabla \wedge u = \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)$.

Soit A un opérateur d'un espace de Banach réel E dans un espace de Banach réel F. On note

1. $D(A)$: Domaine de l'opérateur A.
2. $R(A)$: Image de l'opérateur A.
3. E' : Espace dual de E.
4. $L(E,F)$: Espace des opérateurs linéaires continus de E dans F.

1.2 Quelques formules utiles

1.2.1 Espaces fonctionnels

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $\partial\Omega = \Gamma$ frontière de Ω

1. $L^p(\Omega) = \left\{u \text{ mesurable sur } \Omega \text{ et } \int_\Omega |u(x)|^p \, dx < \infty\right\}, \ (1 \le p < \infty)$.
2. $L^\infty(\Omega) = \{u \text{ mesurable sur } \Omega \text{ et il existe } C \text{ tel que } |u(x)| < C \text{ p.p.t. sur } \Omega\}$.
3. $D(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega) \,/\, u \text{ à support compact dans } \Omega\}$.
4. $H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \text{ telles que } D^\alpha u \in L^2(\Omega),\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n,\ |\alpha| \le m\}$.
5. $H_0^m(\Omega)$ L'adhérence de $D(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$.

1.2.2 Formules de Green

Soit Ω un ouvert de classe C^1 et $\eta(x)$ sa normale extérieure. Soient v et u de classe $C^2(\Omega)$. Alors

$$\int_\Omega \nabla v . \nabla u dx = -\int_\Omega v \Delta u dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta}(s)\, v(s)\, ds.$$

1.2.3 Quelques inégalités utiles

Inégalité de Hölder

Soient f et g deux fonctions respectivement dans $L^p(\Omega)$, $L^q(\Omega)$, avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Alors, le produit fg est dans $L^1(\Omega)$ et l'on a

$$\int_\Omega |fg|\,dx \leq \left(\int_\Omega |f|^p\,dx\right)^{1/p}\left(\int_\Omega |g|^q\,dx\right)^{1/q}.$$

Inégalité de Young

Soitent p et q deux réels vérifiant $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Alors

$$\forall (a,b)\in\mathbb{R}_+^2,\ \forall\varepsilon>0,\ ab\leq\frac{\varepsilon}{p}a^p+\frac{1}{q\varepsilon^{\frac{q}{p}}}b^q.$$

Si $p=q=2$ on a

$$\forall (a,b)\in\mathbb{R}_+^2,\ \forall\varepsilon>0,\ ab\leq\frac{\varepsilon}{2}a^2+\frac{1}{2\varepsilon}b^2.$$

1.3 Propriétés des espaces de Hilbert

Soit H un espace de Hilbert munit d'un produit scalaire $(.,.)$.

Racine d'opérateur

Définition 1 $A : H \longrightarrow H$ et dit positif $(A>0)$ si

$$(Au,u)>0,\ \forall u\neq 0.$$

Théorème 1 [4] *Soit $A=A^*>0$. Alors il existe un opérateur unique $B=B^*>0$ tel que*

$$B^2=A.$$

On note $B=A^{1/2}$.

Inégalité de Cauchy–Schwarz

$$|(u,v)| \leq (u,u)^{1/2} (v,v)^{1/2}, \ \forall u,v \in H.$$

Théorème 2 (Représentation de Riesz) [2]

Soit L une forme linéaire sur H. Il existe un élément unique $x \in H$ tel que

$$Lu = (u,x)_H, \ \forall u \in H.$$

1.3.1 Le théorème de Lax-Milgram

Définition 2. On dit qu'une forme bilinéaire

$$a(u,v): \ H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$$

est

1. continue s'il existe une constante C telle que

$$|a(u,v)| \leq C \|u\| \|v\|, \quad \forall u \in H, \ \forall v \in H,$$

2. coercive s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$|a(v,v)| \geq \alpha \|v\|^2, \quad \forall v \in H.$$

Théorème 3 (Lax-Milgram) [2]

Soit a une forme bilinéaire, continue et coercive. Alors pour tout $\varphi \in H'$, il existe $u \in H$ unique tel que

$$a(u,v) = \langle \varphi, v \rangle, \ \forall v \in H.$$

De plus, si a est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété

$$u \in H \text{ et } \frac{1}{2}a(u,u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(v,v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}.$$

1.4 Les espaces de Sobolev

Définition 3. Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^n$. On définit l'espace de Sobolev

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega), \ \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \ \forall i = 1, ..., n \right\}.$$

Remarque 1. $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert, pour le produit scalaire

$$(u,v)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega uv dx + \int_\Omega \nabla u . \nabla v dx, \tag{1}$$

et est un espace de Banach pour la norme associée

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Remarque 2 $C^1(\bar{\Omega}) \subset H^1(\Omega)$, mais les fonctions de $H^1(\Omega)$ ne sont pas nécessairement continues.

Définition 4. Soit Ω un domain de $\mathbb{R}^n$. On définit l'espace

$$H_0^1(\Omega) = \overline{C_0^1(\Omega)}$$

par rapport à la norme de $H^1(\Omega)$.

Théorème 4 [2]

$H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire de $H^1(\Omega)$.

Inégalité de Poincaré

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$. Il existe une constante positive C telle que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \ \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Équivalence de normes

Si Ω est borné. Alors, La semi-norme

$$|v|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

définit une norme sur $H_0^1(\Omega)$, équivalente à la norme de $H^1(\Omega)$.

Définition 5. Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^n$. On définit l'espace l'espace de Sobolev

$$H^2(\Omega) = \left\{ v \in H^1(\Omega), \ 1 \leq i, j \leq n, \ \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\Omega) \right\}.$$

Remarque 3. $H^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert, pour le produit scalaire

$$(u, v)_{H^2(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq 2} \int_\Omega D^\alpha u(x) \, D^\alpha v(x) \, dx \tag{1}$$

Définition 6 Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^n$. On désigne par $H^{-1}(\Omega)$ l'espace dual de $H_0^1(\Omega)$.

Remarque 4 On identifie $L^2(\Omega)$ et son dual, mais on n'identifie pas $H_0^1(\Omega)$ et son dual. On a le schéma

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$$

avec injections continues et denses.

1.5 Le Théorème de Hille-Yosida

1.5.1 Définition et propriétés élémentaires des opérateurs maximaux monotones

Dans toute la suite H désigne un espace de Hilbert.

Définition 7

Soit $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ un opérateur linéaire "non bomé". On dit que A est monotone si

$$(Av, v) \geq 0, \ \forall v \in D(A).$$

A est maximal monotone si de plus $R(I + A) = H$, i.e.

$$\forall f \in H, \ \exists u \in D(A) \ \text{ telle que } u + Au = f.$$

Proposition 1 [2]

Soit A un opérateur maximal monotone. Alors

1. $D(A)$ est dense dans H.

2. A est fermé.

3. Pour tout $\lambda < 0$, $(I + \lambda A)$ est bijectif de $D(A)$ sur H, $(I + \lambda A)^{-1}$ est un opérateur borné et $\left\|(I + \lambda A)^{-1}\right\|_{L(H)} \leq 1$.

1.5.2 Résolution du problème d'évolution

Etant donné, le problème d'évolution suivant :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = 0, \ t > 0 \\ \quad u(0) = u_0. \end{cases}$$

Théorème 5 (Hille-Yosida) [2]

Soit A un opérateur maximal monotone dans un espace de Hilbert H. Alors pour tout

$u_0 \in D(A)$ il existe une fonction

$$u \in C^1([0,+\infty[; H)) \cap C([0,+\infty[; D(A))$$

unique telle que

$$\begin{aligned} \tfrac{du}{dt} + Au = 0 \quad &sur \quad [0,+\infty[\\ u(0) = u_0& \end{aligned}$$

De plus on a

$$|u(t)| \leq |u_0| \text{ et } \left|\tfrac{du}{dt}(t)\right| = |Au(t)| \leq |Au_0|, \ \forall t \geq 0.$$

Remarque 5. L'intérêt principal du théorème de Hille-Yosida réside dans le fait que pour résoudre le problème d'évolution on se ramène à vérifier que A est maximal monotone, c'est-à-dire, à étudier l'équation stationnaire $u + \lambda Au = f$.

1.5.3 Régularité

Définition 8

On définit par récurrence l'espace

$$D\left(A^k\right) = \left\{v \in D\left(A^{k-1}\right);\ Av \in D\left(A^{k-1}\right)\right\} \quad k \text{ entier } \geq 2.$$

On vérifie aisément que $D\left(A^k\right)$ est un espace de Hilbert pour Ie produit scalaire

$$(u,v)_{D\left(A^k\right)} = \sum_{j=0}^{k} \left(A^j u, A^j v\right);$$

la norme correspondante est

$$\|u\|_{D\left(A^k\right)} = \left(\sum_{j=0}^{k} \left\|A^j u\right\|^2\right)^{1/2}.$$

Théorème 6 [2]

On suppose que $u_0 \in D\left(A^k\right)$ *avec* $k \geq 2$*. Alors la solution* u *du problème*

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = 0 \text{ sur }]0, \infty[\\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

obtenue au théorème de Hille-Yosida vérifie, de plus,

$$u \in C^{k-j}\left([0, \infty[\,; D\left(A^j\right)\right) \text{ pour } j = 0, 1, ...k.$$

1.5.4 Le cas autoadjoint

Définition 9. On dit que :

A est **symétrique** si $(Au, v) = (u, Av)\ \forall u,\ v \in D(A)$

A est **autoadjoint** si $A^* = A$ ce qui sous-entend $D(A^*) = D(A)$.

Proposition 2 [2]

Soit A un opérateur maximal monotone, symétrique. Alors A est autoadjoint.

Théorème 7 [2]

Soit A *un opérateur maximal monotone autoadjoint. Alors pour tout* $u_0 \in H$ *il existe une fonction*

$$u \in C([0, \infty[\,; H) \cap C^1(]0, \infty[\,; H) \cap C(]0, \infty[\,; D(A))$$

unique telle que

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = 0 \text{ sur }]0, \infty[\\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

De plus on a

$$|u(t)| \leq u_0 \text{ et } \left|\frac{du}{dt}(t)\right| = |Au(t)| \leq \frac{1}{t}|u_0| \quad \forall t \geq 0.$$

Chapitre 2

Résultat d'existence en utilisant la théorie des opérateurs maximaux monotones

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on étudiera l'existence des solutions de problème de stabilisation du système de thermoélasticité avec deuxième son, en utilisant la théorie des opérateurs monotones.

On considère le problème suivant :

$$u_{tt} - \mu\Delta u - (\mu+\lambda)\nabla(\operatorname{div} u) + \beta\nabla\theta + au_t = 0,\ dans\ \ \Omega\ \times (0,+\infty), \tag{2.1}$$

$$c\theta_t + k\operatorname{div} q + \beta\operatorname{div} u_t = 0,\ dans\ \Omega\ \times [0,+\infty), \tag{2.2}$$

$$\tau_0 q_t + q + k\nabla\theta = 0,\ dans\ \Omega\ \times [0,+\infty), \tag{2.3}$$

$$u(.,0) = u_0,\ u_t(.,0) = u_{1,}\ \theta(.,0) = \theta_{0,}\ q(.,0) = q_0\ dans\ \Omega, \tag{2.4}$$

$$u = \theta = 0,\ sur\ \partial\Omega\ \times [0,+\infty). \tag{2.5}$$

Ce système est un modèle linéaire. Le corps Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$ avec une frontière régulière $\partial\Omega$.

$u(x,t) \in \mathbb{R}^n$, $\theta(x,t) \in \mathbb{R}$ et $q(x,t) \in \mathbb{R}^n$ représentent des déviations de déplacement, de température absolue et de flux de chaleur et $\mu, \beta, \lambda, \tau_0, c, k$ sont des constantes positives, où μ, λ sont des modules de Lamé et τ_0 est le temps de relaxation, un petit paramètre par rapport aux autres.

On pose $V := \begin{pmatrix} u \\ u_t \\ \theta \\ q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3n+1}$ avec $V(0) = V_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \theta_0 \\ q_0 \end{pmatrix}$

et

$$Lu = -\mu\Delta u - (\mu + \lambda)\nabla(\operatorname{div} u).$$

Le système s'écrit comme

$$\begin{cases} u_t - v = 0, \\ v_t + Lu + \beta\nabla\theta + av = 0, \\ \theta_t + \frac{k}{c}\operatorname{div} q + \frac{\beta}{c}\operatorname{div} v = 0, \\ q_t + \frac{1}{\tau_0}q + \frac{k}{\tau_0}\nabla\theta = 0. \end{cases}$$

Le système devient

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \\ q \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ L & a & \beta\nabla & 0 \\ 0 & \frac{\beta}{c}\operatorname{div} & 0 & \frac{k}{c}\operatorname{div} \\ 0 & 0 & \frac{k}{\tau_0}\nabla & \frac{1}{\tau_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \\ q \end{pmatrix} = 0.$$

On pose

$$M=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ L & a & \beta\nabla & 0 \\ 0 & \frac{\beta}{c}\operatorname{div} & 0 & \frac{k}{c}\operatorname{div} \\ 0 & 0 & \frac{k}{\tau_0}\nabla & \frac{1}{\tau_0} \end{pmatrix},$$

donc V vérifie

$$V_t+MV=0, \quad V(0)=V_0. \tag{2.6}$$

La résolution de (2.6) en espace convenable est équivalent à la résolution de $(2.1)-(2.5)$.

2.2 Existence et unicité

On définit l'opérateur L comme suit,

$$L: D(L)\subset \left(L^2(\Omega)\right)^n \longrightarrow \left(L^2(\Omega)\right)^n$$

$$D(L):=\left[H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\right]^n$$

$$Lu=-\mu\Delta u-(\mu+\lambda)\nabla(\operatorname{div} u)$$

Lemme 2.1 L'opérateur L est positif et auto-adjoint.

Preuve

a- L est positif, soit $u\in D(L)$, alors, en utilisant la formule de Green et les conditions aux limites, il vient

$$\begin{aligned}\int_\Omega (Lu)\,udx &= -\mu\int_\Omega \Delta u udx-(\mu+\lambda)\int_\Omega \nabla(\operatorname{div} u)\,udx \\ &= \mu\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx+(\mu+\lambda)\int_\Omega |\operatorname{div} u|^2\,dx\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mu \int_\Omega (\nabla u)^2 \, dx + (\mu+\lambda) \int_\Omega |\operatorname{div} u|^2 \, dx \\
&= \mu \|\nabla u\|^2 + (\mu+\lambda) \|\operatorname{div} u\|^2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

On applique le proposition 2, on va prouver que L est symétrique et maximal monotone,

b1-L est symétrique. Soient u et v dans $D(L)$,

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega Lu.vdx &= -\mu \int_\Omega \Delta uvdx - (\mu+\lambda) \int_\Omega \nabla(\operatorname{div} u)\, vdx \\
&= -\mu \int_{\partial\Omega} v.\frac{\partial u}{\partial \nu} ds + \mu \int_\Omega \nabla u \nabla vdx - (\mu+\lambda) \int_{\partial\Omega} (\operatorname{div} u)\, v.\nu ds \\
&\quad + (\mu+\lambda) \int_\Omega (\operatorname{div} u)(\operatorname{div} v)\, dx \\
&= \mu \int_\Omega \nabla u \nabla vdx + (\mu+\lambda) \int_\Omega (\operatorname{div} u)(\operatorname{div} v)\, dx
\end{aligned}
$$

et on a

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega Lv.udx &= -\mu \int_\Omega \Delta vudx - (\mu+\lambda) \int_\Omega \nabla(\operatorname{div} v)\, udx \\
&= \mu \int_\Omega \nabla v \nabla udx + (\mu+\lambda) \int_\Omega (\operatorname{div} v)(\operatorname{div} u)\, dx
\end{aligned}
$$

donc pour tout $u, v \in D(L)$

$$
\int_\Omega Lu.vdx = \int_\Omega u.Lvdx
$$

d'où L est symétrique.

b2- L est maximal. Soit $f \in (L^2(\Omega))^n$

$$
u + Lu = f
$$

$$
u - \mu\Delta u - (\mu+\lambda)\nabla(\operatorname{div} u) = f.
$$

On applique le théorème de Lax-Milgram sur $\left[H_0^1(\Omega)\right]^n$, on multiplie cette équation par $v \ \in \left[H_0^1(\Omega)\right]^n$, on trouve

$$\int_\Omega vudx - \mu \int_\Omega v\Delta udx - (\mu+\lambda)\int_\Omega v\nabla(\operatorname{div} u)\, dx = \int_\Omega fvdx,$$

donc, d'après la formule de Green

$$\int_\Omega uvdx + \mu \int_\Omega \nabla u\nabla vdx + (\mu+\lambda)\int_\Omega (\operatorname{div} u)(\operatorname{div} v)\, dx = \int_\Omega fvdx.$$

La forme

$$a(u,v) = \int_\Omega uvdx + \mu \int_\Omega \nabla u\nabla vdx + (\mu+\lambda)\int_\Omega (\operatorname{div} u)(\operatorname{div} v)\, dx$$

est bilinéaire, continue et coercive sur $\left[H_0^1(\Omega)\right]^n$. En effet

- Soient u, v dans $\left[H_0^1(\Omega)\right]^n$,

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \int_\Omega uvdx + \mu \int_\Omega \nabla u\nabla vdx + (\mu+\lambda)\int_\Omega (\operatorname{div} u)(\operatorname{div} v)\, dx \\ &\leq \|u\|_2\|v\|_2 + \mu\|\nabla u\|_2\|\nabla v\|_2 + (\mu+\lambda)\|\operatorname{div} u\|_2\|\operatorname{div} v\|_2 \\ &\leq \|u\|_2\|v\|_2 + c\|\nabla u\|_2\|\nabla v\|_2 \\ &\leq \acute{c}\left(\|u\|_2 + \|\nabla u\|_2\right)\left(\|\nabla v\|_2 + \|v\|_2\right) \\ &\leq \acute{c}\|u\|_{\left[H_0^1(\Omega)\right]^n}\|v\|_{\left[H_0^1(\Omega)\right]^n}. \end{aligned}$$

- Soit $u \in \left[H_0^1(\Omega)\right]^n$

$$a(u,u) = \int_\Omega u^2dx + \mu\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx + (\mu+\lambda)\int_\Omega |\operatorname{div} u|^2\, dx,$$

alors

$$\begin{aligned} a(u,u) &= \|u\|_2^2 + \mu\|\nabla u\|_2^2 + (\mu+\lambda)\|\operatorname{div} u\|_2^2 \\ &\geq \|u\|_2^2 + \mu\|\nabla u\|_2^2 \\ &\geq \mu\|\nabla u\|_2^2 = \mu\|u\|_{[H_0^1(\Omega)]^n}^2 . \end{aligned}$$

L'opérateur L est positif et auto-adjoint, donc d'après le théorème 1 $L^{1/2}$ existe.
On définit l'espace H

$$H := \left(H_0^1(\Omega)\right)^n \times \left(L^2(\Omega)\right)^n \times L^2(\Omega) \times \left(L^2(\Omega)\right)^n$$

avec le produit scalaire

$$\langle v,w\rangle_H = \int_\Omega \left(L^{1/2}v^1\right)\left(L^{1/2}w^1\right)dx + \int_\Omega v^2w^2dx + c\int_\Omega v^3w^3dx + \tau_0\int_\Omega v^4w^4dx,$$

pour $v = (v^1, v^2, v^3, v^4)$ et $w = (w^1, w^2, w^3, w^4)$.

Lemme 2.2. *l'espace H est un espace de Hilbert.*

Preuve H est un espace préhilbertien puisque c'est un sous-espace vectorial de $\left(L^2(\Omega)\right)^{3n+1}$ et $\langle .,.\rangle_H$ est un produit scalaire,

car

1-

$$\langle v,v\rangle_H = \left\|L^{1/2}v^1\right\|_2^2 + \left\|v^2\right\|_2^2 + c\left\|v^3\right\|_2^2 + \tau_0\left\|v^4\right\|_2^2 \geq 0$$

2-

$$\langle v,v\rangle_H = \left\|L^{1/2}v^1\right\|_2^2 + \left\|v^2\right\|_2^2 + c\left\|v^3\right\|_2^2 + \tau_0\left\|v^4\right\|_2^2 = 0$$

$$\Longleftrightarrow L^{1/2}v^1 = 0, v^2 = 0, v^3 = 0, v^4 = 0$$

$$\Longleftrightarrow v^1 = 0, v^2 = 0, v^3 = 0, v^4 = 0$$

$L^{1/2}v^1 = 0 \Longrightarrow v^1 = 0$ puisque $L^{1/2}$ est linéaire et auto-adjoint donc $0 \in \rho\left(L^{1/2}\right)$, ($\rho$ est la résolvante), et si $v^1 = 0$ on a $L^{1/2}v^1 = 0$ puisque $L^{1/2}$ est linéaire

3- $\langle \alpha v, w \rangle_H = \alpha \langle v, w \rangle_H$, pour toute $\alpha \in \mathbb{R}$, a cause de la propriété de produit scalaire de $L^2(\Omega)$ et que $L^{1/2}$ est linéaire

4-

$$\langle v, w \rangle_H = \langle w, v \rangle_H$$

- H est complet, soit $(V_n)_n = ((v_n^1, v_n^2, v_n^3, v_n^4))_n$ une suite de Cauchy dans H et soit $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall p, q \geq n_0$

$$\begin{aligned}
\|V_p - V_q\|_H &= \sqrt{\left\|L^{1/2}\left(v_p^1 - v_q^1\right)\right\|^2 + \left\|v_p^2 - v_q^2\right\|^2 + c\left\|v_p^3 - v_q^3\right\|^2 + \tau_0\left\|v_p^4 - v_q^4\right\|^2} \\
&< \varepsilon,
\end{aligned}$$

ce que implique que

$$\begin{aligned}
\left\|L^{1/2}\left(v_p^1 - v_q^1\right)\right\| &< \varepsilon, \left\|v_p^2 - v_q^2\right\| < \varepsilon, \left\|v_p^3 - v_q^3\right\| < \varepsilon/\sqrt{c}, \\
\left\|v_p^4 - v_q^4\right\| &< \varepsilon/\sqrt{\tau_0}.
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
\left\|L^{1/2}\left(v_p^1 - v_q^1\right)\right\|^2 &= \left\langle L^{1/2}\left(v_p^1 - v_q^1\right), L^{1/2}\left(v_p^1 - v_q^1\right)\right\rangle_{L^2(\Omega)} \\
&= \left\langle L\left(v_p^1 - v_q^1\right), \left(v_p^1 - v_q^1\right)\right\rangle_{L^2(\Omega)} \\
&= -\mu\left\langle \Delta\left(v_p^1 - v_q^1\right), \left(v_p^1 - v_q^1\right)\right\rangle \\
&\quad - (\mu + \lambda)\left\langle \nabla\left(\operatorname{div}\left(v_p^1 - v_q^1\right)\right), \left(v_p^1 - v_q^1\right)\right\rangle \\
&= \mu\left\|\nabla\left(v_p^1 - v_q^1\right)\right\|^2 + (\mu + \lambda)\left\|\operatorname{div}\left(v_p^1 - v_q^1\right)\right\|^2 < \varepsilon^2,
\end{aligned}$$

ce qui implique que $(\nabla v_n^1)_n$ et aussi de Cauchy dans $(L^2(\Omega))^n$ et d'après l'équivalence des normes entre $\|.\|_{0,1}$ et $\|.\|_1$ donc $(v_n^1)_n$ est aussi de Cauchy dans $(H_0^1(\Omega))^n$.

les suites v_n^1, v_n^2, v_n^3 et v_n^4 sont de Cauchy dans $(H_0^1(\Omega))^n$, $(L^2(\Omega))^n$, $L^2(\Omega)$ et $(L^2(\Omega))^n$ elles convergent respectivement vers v^1, v^2, v^3, v^4.

D'où $((v_n^1, v_n^2, v_n^3, v_n^4))_n$ converge vers (v^1, v^2, v^3, v^4), alors H est complet donc c'est un espace de Hilbert.

On définit l'opérateur A comme suit

$$\begin{aligned} A \quad H &\longrightarrow H \\ v &\to Av = Mv \end{aligned}$$

$D(A) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^n \times (H_0^1(\Omega))^n \times H_0^1(\Omega) \times \tilde{D}$

avec $\tilde{D} = \left\{ w \in (L^2(\Omega))^n \setminus \operatorname{div} w \in L^2(\Omega) \right\}$.

Soit $W = \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \\ w^3 \\ w^4 \end{pmatrix} \in D(A)$

donc

$$AW = \begin{pmatrix} -w^2 \\ Lw^1 + aw^2 + \beta \nabla w^3 \\ \frac{\beta}{c} \operatorname{div} w^2 + \frac{k}{c} \operatorname{div} w^4 \\ \frac{k}{\tau_0} \nabla w^3 + \frac{1}{\tau_0} w^4 \end{pmatrix}$$

Théoreme 2.1

Soit $(u_0, u_1, \theta_0, q_0) \in D(A)$ *et* $t > 0$, *alors le problème* $(2.1)-(2.5)$ *admet une solution unique telle que*

$$(u, u_t, \theta, q) \in C^1([0, +\infty[; H) \cap C([0, +\infty[; D(A)).$$

Pour obtenir l'existence et l'unicité il suffit d'appliquer le théorème de Hille-Yosida.

Lemme 2.3 *L'opérateur A est monotone.*

Preuve

$$\begin{aligned}\langle Aw,w\rangle_H &= -\int_\Omega L^{1/2}w^2.L^{1/2}w^1dx+\int_\Omega \left(Lw^1+aw^2+\beta\nabla w^3\right)w^2dx\\ &\quad +c\int_\Omega\left(\frac{\beta}{c}\operatorname{div}w^2+\frac{k}{c}\operatorname{div}w^4\right)w^3dx+\tau_0\int_\Omega\left(\frac{k}{\tau_0}\nabla w^3+\frac{1}{\tau_0}w^4\right)w^4dx,\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned}\langle Aw,w\rangle_H &= -\int_\Omega L^{1/2}w^2.L^{1/2}w^1dx+\int_\Omega Lw^1.w^2dx+a\int_\Omega w^2w^2dx\\ &\quad +\beta\int_\Omega\nabla w^3.w^2dx+\beta\int_\Omega\operatorname{div}w^2.w^3dx+k\int_\Omega\operatorname{div}w^4.w^3dx\\ &\quad +k\int_\Omega\nabla w^3.w^4dx+\int_\Omega\left|w^4\right|^2dx.\end{aligned}$$

On utilise la formule de Green et que $L=L^{1/2}L^{1/2}$, on obtient

$$\begin{aligned}\langle Aw,w\rangle_H &= -\int_\Omega L^{1/2}w^2.L^{1/2}w^1dx+\int_\Omega L^{1/2}w^1.L^{1/2}w^2dx+a\int_\Omega\left|w^2\right|^2dx\\ &\quad +\beta\int_\Omega\nabla w^3.w^2dx-\beta\int_\Omega w^2\nabla w^3dx+k\int_\Omega\operatorname{div}w^4.w^3dx\\ &\quad -k\int_\Omega w^3\operatorname{div}w^4dx+\int_\Omega\left|w^4\right|^2dx.\end{aligned}$$

Donc

$$\langle Aw,w\rangle_H=a\int_\Omega\left|w^2\right|^2dx+\int_\Omega\left|w^4\right|^2dx\geq 0,$$

ce qui prouve que A est monotone.

Lemme 2.4 *L'opérateur A est maximal.*

Preuve

soit

$$f = \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \\ f^3 \\ f^4 \end{pmatrix} \in H.$$

Il faut trouver $w \in D(A)$ telle que

$$w + Aw = f,$$

c'est-à-dire, on cherche à résoudre

$$w + Aw = \begin{pmatrix} -w^2 + w^1 \\ Lw^1 + aw^2 + \beta\nabla w^3 + w^2 \\ \frac{\beta}{c}\operatorname{div} w^2 + \frac{k}{c}\operatorname{div} w^4 + w^3 \\ \frac{k}{\tau_0}\nabla w^3 + \frac{1}{\tau_0}w^4 + w^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \\ f^3 \\ f^4 \end{pmatrix}$$

ou

$$\begin{aligned} -w^2 + w^1 &= f^1, \\ Lw^1 + (a+1)\,w^2 + \beta\nabla w^3 &= f^2, \\ \frac{\beta}{c}\operatorname{div} w^2 + w^3 + \frac{k}{c}\operatorname{div} w^4 &= f^3, \\ \frac{k}{\tau_0}\nabla w^3 + \left(\frac{1}{\tau_0} + 1\right) w^4 &= f^4. \end{aligned} \tag{2.8}$$

En utilisant la première et la dernière équation, on a

$$w^1 = f^1 + w^2 \text{ et } w^4 = -\frac{k}{(1+\tau_0)}\nabla w^3 + \frac{\tau_0}{(1+\tau_0)}f^4,$$

en remplaçant dans la troisième et quatrième équation, on aura

$$
\begin{aligned}
Lw^2+(a+1)\,w^2+\beta\nabla w^3 &= -Lf^1+f^2,\\
\frac{\beta}{c}\operatorname{div}w^2+w^3-\frac{k^2}{c\,(1+\tau_0)}\Delta w^3 &= f^3-\frac{k\tau_0}{c\,(1+\tau_0)}\operatorname{div}f^4.
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

Soit l'opérateur

$$
T:\ F\longrightarrow\left(H^{-1}(\Omega)\right)^n\times H^{-1}(\Omega),
$$

$$
F:=\left\{U=(v,w)\,/\ v\in\left(H_0^1(\Omega)\right)^n,\ w\in H_0^1(\Omega)\right\},
$$

défini par

$$
T\,(v,w)=\left(Lv+(a+1)\,v+\beta\nabla w,\frac{\beta}{c}\operatorname{div}v+w-\frac{k^2}{c\,(1+\tau_0)}\Delta w\right),
$$

avec

$$
\langle U,V\rangle_F=\langle v,\acute{v}\rangle_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^n}+c\,\langle w,\acute{w}\rangle_{H_0^1(\Omega)}.
$$

Il suffit donc de montrer que la forme bilinéaire :

$$
\langle TU,V\rangle=\left\langle\begin{pmatrix}Lv+(a+1)\,v+\beta\nabla w\\ \frac{\beta}{c}\operatorname{div}v+w-\frac{k^2}{c(1+\tau_0)}\Delta w\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\acute{v}\\ \acute{w}\end{pmatrix}\right\rangle,\quad V=\begin{pmatrix}\acute{v}\\ \acute{w}\end{pmatrix}
$$

est continue et coercive.

La continuité :

$$
\begin{aligned}
\langle TU,V\rangle &= \langle Lv+(a+1)\,v+\beta\nabla w,v'\rangle+c\left\langle\frac{\beta}{c}\operatorname{div}v+w-\frac{k^2}{c\,(1+\tau_0)}\Delta w,w'\right\rangle\\
&= \langle Lv,v'\rangle+(a+1)\,\langle v,v'\rangle+\beta\,\langle\nabla w,v'\rangle+\beta\,\langle\operatorname{div}v,w'\rangle\\
&\quad+c\,\langle w,w'\rangle-\frac{k^2}{(1+\tau_0)}\,\langle\Delta w,w'\rangle\\
&= \mu\,\langle\nabla v,\nabla v'\rangle+(\mu+\lambda)\,\langle\operatorname{div}v,\operatorname{div}v'\rangle+(a+1)\,\langle v,v'\rangle+\beta\,\langle\nabla w,v'\rangle\\
&\quad+\beta\,\langle\operatorname{div}v,w'\rangle+c\,\langle w,w'\rangle+\frac{k^2}{(1+\tau_0)}\,\langle\nabla w,\nabla w'\rangle.
\end{aligned}
$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy–Schwarz et le fait que $\|\operatorname{div} v\ \| \leq \|\nabla v\|$, on trouve

$$\begin{aligned}
&|\langle TU, V\rangle| \\
\leq\ & (2\mu+\lambda)\|\nabla v\|\|\nabla v'\| + (a+1)\|v\|\|v'\| + \beta\|\nabla w\|\|v'\| + \beta\|v\|\|\nabla w'\| \\
& + c\|w\|\|w'\| + \frac{k^2}{(1+\tau_0)}\|\nabla w\|\|\nabla w'\|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\leq\ & \max\{(2\mu+\lambda), (a+1), \beta\}\left[(\|\nabla v\| + \|v\|)(\|\nabla v'\| + \|\nabla w'\|) + (\|\nabla v\| + \|v\|)\|v'\|\right] \\
& + \max\left\{c, \beta, \frac{k^2}{(1+\tau_0)}\right\}\left[(\|w\| + \|\nabla w\|)(\|w'\| + \|v'\|) + (\|w\| + \|\nabla w\|)\|\nabla w'\|\right] \\
\leq\ & r_0\left(\|v\|_{\left[H_0^1(\Omega)\right]^n}\|v'\|_{H_0^1(\Omega)} + \|w\|_{\left[H_0^1(\Omega)\right]^n}\|w'\|_{H_0^1(\Omega)}\right), \\
\leq\ & r_1\left(\|v\|_{\left[H_0^1(\Omega)\right]^n} + c\|w\|_{\left[H_0^1(\Omega)\right]^n}\right)\left(\|v'\|_{H_0^1(\Omega)} + c\|w'\|_{H_0^1(\Omega)}\right) \\
=\ & r_1\|U\|_F\|V\|_F.
\end{aligned}$$

La coercivité :

$$\begin{aligned}
\langle TU, U\rangle &= \mu\langle\nabla v, \nabla v\rangle + (\mu+\lambda)\langle\operatorname{div} v, \operatorname{div} v\rangle + (a+1)\langle v, v\rangle \\
&\quad + c\langle w, w\rangle + \frac{k^2}{(1+\tau_0)}\langle\nabla w, \nabla w\rangle \\
&= \mu\|\nabla v\|^2 + (\mu+\lambda)\|\operatorname{div} v\|^2 + (a+1)\|v\|^2 \\
&\quad + c\|w\|^2 + \frac{k^2}{(1+\tau_0)}\|\nabla w\|^2 \\
&\geq \min\{\mu, (a+1)\}\left[\|\nabla v\|^2 + \|v\|^2\right] + \min\left\{c, \frac{k^2}{(1+\tau_0)}\right\}\left[\|w\|^2 + \|\nabla w\|^2\right] \\
&\geq \min\{\mu, (a+1)\}\|v\|^2_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^n} + \frac{\min\left\{c, \frac{k^2}{(1+\tau_0)}\right\}}{c}c\|w\|^2_{\left(H_0^1(\Omega)\right)} \\
&\geq r_2\|U\|_F^2, \quad \text{avec } r_2 = \min\left\{\mu, 1, \frac{k^2}{(1+\tau_0)}\right\}.
\end{aligned}$$

donc d'après le théorème de Lax-Milgram il existe $(v, w)^t \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^n \times H_0^1(\Omega)$ solution de (2.9) ,qui donne, par la théorie de la régularité, une solution et une seule de (2.7) dans $D(A)$ ce qui termine la preuve du théorème 2.1.

Chapitre 3

La décroissance des solutions d'un système de thermoélasticité avec deuxième son

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on étudiera le problème de stabilisation du système $(2.1) - (2.5)$.

On introduit les deux fonctions d'énergie du premier et second ordre

$$\begin{aligned} E_1(t) \quad &: \quad = \frac{1}{2}\|u_t\|_2^2 + \frac{\mu}{2}\|\nabla u\|_2^2 + \frac{c}{2}\|\theta\|_2^2 + \frac{(\mu+\lambda)}{2}\|\operatorname{div} u\|_2^2 + \frac{\beta\tau_0}{2}\|q\|_2^2, \\ E_2(t) \quad &: \quad = \frac{1}{2}\|u_{tt}\|_2^2 + \frac{\mu}{2}\|\nabla u_t\|_2^2 + \frac{c}{2}\|\theta_t\|_2^2 + \frac{(\mu+\lambda)}{2}\|\operatorname{div} u_t\|_2^2 + \frac{\beta\tau_0}{2}\|q_t\|_2^2, \quad (3.1) \end{aligned}$$

et on pose

$$E(t) := E_1(t) + E_2(t).$$

3.2 La décroissance exponentielle

Lemme 3.1.*Soit* (u,θ,q) *la solution de* $(2.1)-(2.5)$. *Alors*

$$\frac{d}{dt}E_1(t) = -\beta\|q\|_2^2 - a\|u_t\|_2^2 \tag{3.2}$$

$$\frac{d}{dt}E_2(t) = -\beta\|q_t\|_2^2 - a\|u_{tt}\|_2^2 . \tag{3.3}$$

Preuve

On multiplie (2.1) par u_t et on intègre sur Ω, grâce à la formule de Green on a

$$\int_\Omega u_t u_{tt} dx - \mu\int_\Omega u_t\Delta u dx - (\mu+\lambda)\int_\Omega u_t\nabla(\operatorname{div} u)\,dx + \beta\int_\Omega u_t\nabla\theta dx + a\|u_t\|_2^2 = 0$$

ce qui implique que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t\|_2^2 + \frac{\mu}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_2^2 + \frac{(\mu+\lambda)}{2}\frac{d}{dt}\|\operatorname{div} u\|_2^2 + \beta\int_\Omega u_t\nabla\theta dx + a\|u_t\|_2^2 = 0 \tag{3.4}$$

On multiplie (2.2) par θ et on intègre sur Ω,

$$c\int_\Omega \theta\theta_t dx + k\int_\Omega \theta\operatorname{div} q dx + \beta\int_\Omega \theta\operatorname{div} u_t dx = 0$$

$$\frac{1}{2}c\frac{d}{dt}\|\theta\|_2^2 - k\int_\Omega q\nabla\theta dx - \beta\int_\Omega u_t\nabla\theta dx = 0$$

Donc

$$\beta\int_\Omega u_t\nabla\theta dx = \frac{1}{2}c\frac{d}{dt}\|\theta\|_2^2 - k\int_\Omega q\nabla\theta dx \tag{3.5}$$

Combinons (3.4) et (3.5), on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t\|_2^2 + \frac{\mu}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{2}c\frac{d}{dt}\|\theta\|_2^2 + \frac{(\mu+\lambda)}{2}\frac{d}{dt}\|\operatorname{div} u\|_2^2 - \beta k\int_\Omega q\nabla\theta dx + a\|u_t\|_2^2 = 0 \tag{3.6}$$

On multiplie (2.3) par q et on intègre sur Ω,

$$\tau_0 \int_\Omega q_t q dx + \|q\|_2^2 + k \int_\Omega \nabla\theta q dx = 0, \tag{3.7}$$

ce qui implique

$$\frac{\tau_0}{2}\frac{d}{dt}\|q\|_2^2 + \|q\|_2^2 + k \int_\Omega \nabla\theta q dx = 0;$$

ou bien

$$k \int_\Omega \nabla\theta q dx = -\frac{\tau_0}{2}\frac{d}{dt}\|q\|_2^2 - \|q\|_2^2 \tag{3.8}$$

Combinons (3.6) et (3.8), on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t\|_2^2 + \frac{\mu}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{2}c\frac{d}{dt}\|\theta\|_2^2 + \frac{(\mu+\lambda)}{2}\frac{d}{dt}\|\operatorname{div} u\|_2^2 + \frac{\beta\tau_0}{2}\frac{d}{dt}\|q\|_2^2 \\ = \; & -\beta\|q\|_2^2 - a\|u_t\|_2^2 . \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{d}{dt}E_1(t) = -\beta\|q\|_2^2 - a\|u_t\|_2^2 .$$

La dérivation de $(2.1)-(2.3)$ par rapport à t et la multiplication par u_{tt}, θ_t et q_t respectivement donne

$$\int_\Omega u_{ttt}u_{tt} - \mu\int_\Omega \Delta u_t u_{tt} - (\mu+\lambda)\int_\Omega \nabla(\operatorname{div} u_t)\, u_{tt} + \beta\int_\Omega \nabla\theta_t u_{tt} + a\int_\Omega |u_{tt}|^2 dx = 0 \tag{3.9}$$

$$c\int_\Omega \theta_{tt}\theta_t dx + k\int_\Omega \operatorname{div} q_t\theta_t dx + \beta\int_\Omega \operatorname{div} u_{tt}\theta_t dx = 0 \tag{3.10}$$

$$\tau_0\int_\Omega q_{tt}q_t dx + \int_\Omega (q_t)^2 dx + k\int_\Omega \nabla\theta_t q_t dx = 0 \tag{3.11}$$

et on répète les mêmes étapes que ci-dessus, on arrive à

$$\frac{d}{dt}E_2(t) = -\beta\|q_t\|_2^2 - a\|u_{tt}\|_2^2 .$$

On pose

$$\mathcal{F}(t) := E_1(t) + E_2(t) + \varepsilon\left(G(t) + H(t) + K(t)\right),$$

avec

$$
\begin{aligned}
G(t) &:= \int_\Omega u_t u dx + \frac{a}{2}\|u\|_2^2, \\
H(t) &:= \int_\Omega u_{tt} u_t dx + \beta \int_\Omega \nabla\theta u_t dx + \frac{a}{2}\|u_t\|_2^2,
\end{aligned}
$$

$$
K(t) := -c \int_\Omega \theta\theta_t dx.
$$

Lemme 3.2 Pour ε assez petit,

$$
\alpha_1 (E_1(t) + E_2(t)) \leq \mathcal{F}(t) \leq \alpha_2 (E_1(t) + E_2(t)) \tag{3.12}
$$

valable pour deux constantes positives α_1 et α_2.

Preuve

En utilisant les inégalité de Young et de Poincaré, il vient

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(t) \leq\ & E_1(t) + E_2(t) + \varepsilon \int_\Omega u_t u dx + \varepsilon \frac{a}{2}\|u\|_2^2 + \varepsilon \int_\Omega u_{tt} u_t dx \\
& + \varepsilon\beta \int_\Omega \nabla\theta u_t dx + \varepsilon \frac{a}{2}\|u_t\|_2^2 + \varepsilon c \int_\Omega \theta\theta_t dx \\
\leq\ & E_1(t) + E_2(t) + \frac{\varepsilon}{2}\|u_t\|_2^2 + \frac{\varepsilon}{2} C \|\nabla u\|_2^2 + \varepsilon \frac{a}{2} C \|\nabla u\|_2^2 \\
& + \frac{\varepsilon}{2}\|u_{tt}\|_2^2 + \frac{\varepsilon}{2}\|u_t\|_2^2 + \frac{\varepsilon}{2}\beta^2 \|\nabla\theta\|_2^2 + \frac{\varepsilon}{2}\|u_t\|_2^2 + \varepsilon \frac{a}{2}\|u_t\|_2^2 \\
& + \frac{\varepsilon c^2}{2}\|\theta\|_2^2 + \frac{\varepsilon}{2}\|\theta_t\|_2^2 \\
\leq\ & \alpha_2 (E_1(t) + E_2(t)), \text{ pour } \varepsilon \text{ assez petit.}
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(t) &\geq E_1(t)+E_2(t)+\varepsilon\int_\Omega u_t u dx+\varepsilon\int_\Omega u_{tt}u_t dx\\
&\quad +\varepsilon\beta\int_\Omega \nabla\theta u_t dx+\varepsilon c\int_\Omega \theta\theta_t dx\\
&\geq E_1(t)+E_2(t)-\frac{\varepsilon}{2}\|u_t\|^2-\frac{\varepsilon}{2}\|u\|^2-\frac{\varepsilon}{2}\|u_{tt}\|^2-\frac{\varepsilon}{2}\|u_t\|^2\\
&\quad -\frac{\varepsilon}{2}\beta^2\|\nabla\theta\|^2-\frac{\varepsilon}{2}\|u_t\|^2-\frac{\varepsilon c^2}{2}\|\theta\|^2-\frac{\varepsilon}{2}\|\theta_t\|^2\\
&\geq \alpha_1\left(E_1(t)+E_2(t)\right),\ \text{pour } \varepsilon \text{ assez petit.}
\end{aligned}
$$

Remarque 3.1 L'équation (2.2) donne

$$\nabla\theta=-\frac{\tau_0}{k}q_t-\frac{1}{k}q$$

qui implique

$$\|\nabla\theta\|^2\leq\frac{2\tau_0^2}{k^2}\|q_t\|^2+\frac{2}{k^2}\|q\|^2. \tag{3.13}$$

Théorème 3.1 *Soit* (u,θ,q) *la solution de* $(2.1)-(2.5)$. *Donc l'énergie associée*

$$E(t)=E_1(t)+E_2(t)$$

décroit exponentiellement, i.e. $\exists d_0, C_0>0$ telles que

$$E(t)\leq C_0e^{-d_0t},\ \forall t\geq 0. \tag{3.14}$$

Preuve

Grâce à (2.1) et l'inégalité de Young, on a

$$
\begin{aligned}
G'(t) &= \int_\Omega u_{tt}u dx+\|u_t\|_2^2+a\int_\Omega u u_t dx\\
&= \int_\Omega\left(\mu\Delta u+(\mu+\lambda)\nabla(\operatorname{div}u)-\beta\nabla\theta-au_t\right)u dx+\|u_t\|_2^2+a\int_\Omega u u_t dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\mu \|\nabla u\|^2 - (\mu+\lambda)\|\operatorname{div} u\|^2 - \beta \int_\Omega \nabla\theta u dx - a\int_\Omega u_t u dx \\
&\quad + \|u_t\|_2^2 + a\int_\Omega u u_t dx \\
&\le -\mu \|\nabla u\|_2^2 - (\mu+\lambda)\|\operatorname{div} u\|_2^2 + \beta^2 \frac{C_p}{2\mu}\|\nabla\theta\|_2^2 + \frac{\mu}{2C_p}\|u\|_2^2 + \|u_t\|_2^2 \\
&\le -\frac{\mu}{2}\|\nabla u\|_2^2 - (\mu+\lambda)\|\operatorname{div} u\|_2^2 + \beta^2 \frac{C_p}{2\mu}\left(\frac{2\tau_0^2}{k^2}\|q_t\|^2 + \frac{2}{k^2}\|q\|^2\right) \\
&\quad + \|u_t\|_2^2 \qquad (3.15)
\end{aligned}
$$

où C_p et est la constante de Poincaré.

En dérivant l'équation (2.1) par rapport à t , il vient

$$
u_{ttt} = \mu\Delta u_t + (\mu+\lambda)\nabla(\operatorname{div} u_t) - \beta\nabla\theta_t - a u_{tt}.
$$

Alors

$$
\begin{aligned}
H'(t) &= \int_\Omega u_{ttt} u_t dx + \|u_{tt}\|^2 + \beta\int_\Omega u_t \nabla\theta_t dx + \beta\int_\Omega u_{tt}\nabla\theta dx + a\int_\Omega u_t u_{tt} dx \\
&= -\mu\|\nabla u_t\|_2^2 - (\mu+\lambda)\|\operatorname{div} u_t\|_2^2 - \beta\int_\Omega u_t\nabla\theta_t dx - a\int_\Omega u_{tt}u_t dx \\
&\quad + \|u_{tt}\|_2^2 + \beta\int_\Omega u_t\nabla\theta_t dx + \beta\int_\Omega u_{tt}\nabla\theta dx + a\int_\Omega u_t u_{tt} dx \\
&= -\mu\|\nabla u_t\|_2^2 - (\mu+\lambda)\|\operatorname{div} u_t\|_2^2 + \|u_{tt}\|_2^2 + \beta\int_\Omega u_{tt}\nabla\theta dx \\
&\le -\mu\|\nabla u_t\|_2^2 - (\mu+\lambda)\|\operatorname{div} u_t\|_2^2 + \frac{\tau_0^2}{k^2}\|q_t\|_2^2 + \frac{1}{k^2}\|q\|_2^2 \\
&\quad + \left(1+\frac{\beta^2}{2}\right)\|u_{tt}\|_2^2 . \qquad (3.16)
\end{aligned}
$$

En utilisant (2.2), (3.13), la formule de Green, et l'inégalité de Young, il vient

$$\begin{aligned}
K'(t) &= \frac{d}{dt}\int_{\Omega}\theta\left(k\operatorname{div}q+\beta\operatorname{div}u_t\right)dx \\
&= k\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\theta\operatorname{div}q dx-\beta\frac{d}{dt}\int_{\Omega}u_t\nabla\theta dx \\
&= k\int_{\Omega}\theta\operatorname{div}q_t dx+k\int_{\Omega}\theta_t\operatorname{div}q dx-\beta\int_{\Omega}u_{tt}\nabla\theta dx-\beta\int_{\Omega}u_t\nabla\theta_t dx \\
&= -k\int_{\Omega}q_t\nabla\theta dx+k\int_{\Omega}\left(-\frac{c}{k}\theta_t-\frac{\beta}{k}\operatorname{div}u_t\right)\theta_t dx-\beta\int_{\Omega}u_{tt}\nabla\theta dx-\beta\int_{\Omega}u_t\nabla\theta_t dx \\
&= -k\int_{\Omega}q_t\nabla\theta dx-c\left\|\theta_t\right\|_2^2-\beta\int_{\Omega}u_{tt}\nabla\theta dx \\
&\leq k^2\left\|q_t\right\|_2^2+\frac{1}{4}\left\|\nabla\theta\right\|_2^2-c\left\|\theta_t\right\|_2^2+\frac{1}{4}\left\|\nabla\theta\right\|_2^2+\beta^2\left\|u_{tt}\right\|_2^2 \\
&\leq -c\left\|\theta_t\right\|_2^2+\left(\frac{k^2}{c^2}+\frac{\tau_0^2}{k^2}\right)\left\|q_t\right\|_2^2+\frac{1}{k^2}\left\|q\right\|_2^2+\beta^2\left\|u_{tt}\right\|_2^2. \qquad (3.17)
\end{aligned}$$

Les inégalités $(3.15)-(3.17)$ impliquent

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}'(t) \leq & -\left(\beta-\frac{\varepsilon\beta^2C_p}{\mu k^2}-\frac{\varepsilon}{k^2}-\frac{\varepsilon}{k^2}\right)\left\|q\right\|_2^2-(a-\varepsilon)\left\|u_t\right\|_2^2 \\
& -\left(\beta-\frac{\varepsilon\beta^2C_p\tau_0^2}{\mu k^2}-\frac{\varepsilon\tau_0^2}{k^2}-\varepsilon\left(\frac{k^2}{c^2}+\frac{\tau_0^2}{k^2}\right)\right)\left\|q_t\right\|_2^2 \\
& -\left(a-\varepsilon\left(1+\frac{\beta^2}{2}\right)-\varepsilon\beta^2\right)\left\|u_{tt}\right\|_2^2-\frac{\varepsilon\mu}{2}\left\|\nabla u\right\|_2^2 \\
& -\varepsilon(\mu+\lambda)\left\|\operatorname{div}u\right\|_2^2-\varepsilon\mu\left\|\nabla u_t\right\|_2^2-\varepsilon(\mu+\lambda)\left\|\operatorname{div}u_t\right\|_2^2 \\
& -\varepsilon c\left\|\theta_t\right\|_2^2, \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

en utilisant (3.13) et l'inégalité de Poincaré, on obtient

$$\left\|\theta\right\|_2^2\leq C_p\left\|\nabla\theta\right\|_2^2\leq\frac{2C_p\tau_0^2}{k^2}\left\|q_t\right\|_2^2+\frac{2C_p}{k^2}\left\|q\right\|_2^2.$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}'(t) \leq & -\left(\beta-\frac{\varepsilon\beta^2 C_p}{\mu k^2}-\frac{\varepsilon}{k^2}-\frac{\varepsilon}{k^2}+\frac{2\varepsilon C_p}{k^2}\right)\|q\|_2^2-(a-\varepsilon)\|u_t\|_2^2 \\
& -\left(\beta-\frac{\varepsilon\beta^2 C_p\tau_0^2}{\mu k^2}-\frac{\varepsilon\tau_0^2}{k^2}-\varepsilon\left(\frac{k^2}{c^2}+\frac{\tau_0^2}{k^2}\right)+\frac{2\varepsilon C_p\tau_0^2}{k^2}\right)\|q_t\|_2^2 \\
& -\left(a-\varepsilon\left(1+\frac{\beta^2}{2}\right)-\varepsilon\beta^2\right)\|u_{tt}\|_2^2-\frac{\varepsilon\mu}{2}\|\nabla u\|_2^2 \\
& -\varepsilon(\mu+\lambda)\|\operatorname{div} u\|_2^2-\varepsilon\mu\|\nabla u_t\|_2^2-\varepsilon(\mu+\lambda)\|\operatorname{div} u_t\|_2^2 \\
& -\varepsilon c\|\theta_t\|_2^2-\varepsilon\|\theta\|_2^2,
\end{aligned}$$

Donc, pour ε assez petit, on a

$$\mathcal{F}'(t) \leq -\sigma E(t), \ \forall t \geq 0. \tag{3.19}$$

avec $\sigma > 0$ une constante.

D'après l'equivalance enter $\mathcal{F}(t)$ et $E(t)$, on a

$$\mathcal{F}'(t) \leq -C_1\alpha_1\mathcal{F}(t), \ \forall t \geq 0 \tag{3.20}$$

Une intégration simple de (3.20) sur $(0,t)$ donne

$$\mathcal{F}(t) \leq \mathcal{F}(0)\, e^{-C_1\alpha_1 t}, \ \forall t \geq 0 \tag{3.21}$$

encore l'equivalance enter $\mathcal{F}(t)$ et $E_1(t)+E_2(t)$ donne

$$\alpha_1 E(t) \leq \alpha_2 E(0)\, e^{-C_1\alpha_1 t}, \ \forall t \geq 0,$$

c'est à dire

$$\exists d_0, C_0 > 0 \ \ \forall t \geq 0 : \ E(t) \leq C_0 e^{-d_0 t},$$

avec $d_0 = C_1\alpha_1 E(0)$ et $C_0 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}E(0)$.

Chapitre 4

Décroissance générale des solutions d'un système de thermoviscoélasticité avec deuxième son

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on étudiera le problème de stabilisation du système de thermoviscoélasticité suivant

$$u_{tt}-\mu\Delta u-(\mu+\lambda)\nabla(\operatorname{div}u)+\beta\nabla\theta+\int_0^t g(t-s)\Delta u(x,s)\,ds=0,\ x\in\Omega,\ t\geq 0 \quad (4.1)$$

$$c\theta_t+k\operatorname{div}q+\beta\operatorname{div}u_t=0,\ x\in\Omega,\ t\geq 0 \quad (4.2)$$

$$\tau_0 q_t+q+k\nabla\theta=0,\ x\in\Omega,\ t\geq 0 \quad (4.3)$$

$$u(.,0)=u_0,\ u_t(.,0)=u_{1,}\ \theta(.,0)=\theta_{0,}\ q(.,0)=q_0\ dans\ \Omega \quad (4.4)$$

$$u=\theta=0\ sur\ \partial\Omega\ \times(0,+\infty) \quad (4.5)$$

Ce système est un modèle linéaire pour un corps viscoélastique. Le corps Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$ avec une frontière régulière $\partial\Omega$.

$u(x,t) \in \mathbb{R}^n,\ \theta(x,t) \in \mathbb{R}$ et $q(x,t) \in \mathbb{R}^n$ représentent des déviations de déplacement, de température absolue et de flux de chaleur et $\mu, \beta, \lambda, \tau_0, c, k$ sont des constantes positives, où μ, λ sont des modules de Lamé et τ_0 est le temps de relaxation, un petit paramètre par rapport aux autres.

Pour la fonction de relaxation g, on suppose que

$(G1)$ g : $\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction différentiable telle que

$$g(0) > 0, \quad \mu - \int_0^{+\infty} g(s)\,ds = l > 0$$

$(G2)$ Il existe une fonction décroissante différentiable $\xi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, et une constante $p \geq 1$ telles que

$$\begin{aligned} g'(t) &\leq -\xi(t)\,g^p(t)\,, \ \forall t \geq 0, \\ \xi(t) &> 0, \ \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

On introduit la fonctionnelle d'énergie

$$E(t) = E_1(t) + E_2(t) \tag{4.6}$$

avec

$$\begin{aligned} E_1(t) &= \frac{1}{2}\|u_t\|_2^2 + \frac{\mu+\lambda}{2}\|\operatorname{div} u\|_2^2 + \frac{1}{2}\left(\mu - \int_0^t g(s)\,ds\right)\|\nabla u\|_2^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}(g \circ \nabla u)(t) + \frac{c}{2}\|\theta\|_2^2 + \frac{\tau_0}{2}\|q\|_2^2\,, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E_2(t) &= \frac{1}{2}\|u_{tt}\|_2^2 + \frac{\mu+\lambda}{2}\|\operatorname{div} u_t\|_2^2 + \frac{1}{2}\left(\mu - \int_0^t g(s)\,ds\right)\|\nabla u_t\|_2^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}(g \circ \nabla u_t)(t) + \frac{c}{2}\|\theta_t\|_2^2 + \frac{\tau_0}{2}\|q_t\|_2^2,
\end{aligned}
$$

et

$$
(g \circ v)(t) := \int_0^t g(t-s)\|v(t) - v(s)\|_2^2\,ds, \quad \forall v \in \left[L^2(\Omega)\right]^n.
$$

4.2 Décroissance générale

Lemme 4.1. Soit (u, θ, q) la solution de $(4.1) - (4.5)$ alors

$$
\begin{aligned}
E_1'(t) &= \frac{1}{2}(g' \circ \nabla u)(t) - \frac{1}{2}g(t)\|\nabla u(t)\|_2^2 - \|q\|_2^2 \\
&\le \frac{1}{2}(g' \circ \nabla u)(t) - \|q\|_2^2 \le 0,
\end{aligned} \tag{4.7}
$$

et

$$
\begin{aligned}
E_2'(t) &= \frac{1}{2}(g' \circ \nabla u_t)(t) - \frac{1}{2}g(t)\|\nabla u_t(t)\|_2^2 - \|q_t\|_2^2 - g(t)\int_\Omega u_{tt}.\Delta u_0\,dx \\
&\le \frac{1}{2}(g' \circ \nabla u_t)(t) - \|q_t\|_2^2 - g(t)\int_\Omega u_{tt}.\Delta u_0\,dx.
\end{aligned} \tag{4.8}
$$

Preuve

En multipliant (4.1) par u_t et en intégrant sur Ω, on trouve

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_\Omega u_{tt}u_t\,dx - \mu\int_\Omega \Delta u u_t\,dx - (\mu+\lambda)\int_\Omega \nabla(\operatorname{div} u)\,u_t\,dx \\
&\quad + \beta\int_\Omega \nabla\theta u_t\,dx + \int_\Omega\left(\int_0^t g(t-s)\,\Delta u(x,s)\,ds\right)u_t\,dx.
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u_t\right\|_2^2-\mu\int_\Omega \Delta u u_t dx-(\mu+\lambda)\int_\Omega \nabla\left(\operatorname{div} u\right) u_t dx \\
&\quad+\beta\int_\Omega \nabla\theta u_t dx+\int_0^t g\left(t-s\right)\left(\int_\Omega \Delta u\left(x,s\right) u_t dx\right) ds.
\end{aligned}
$$

Alors, en utilisant la formule de Green et les conditions aux limites, il vient

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u_t\right\|_2^2+\frac{1}{2}\mu\frac{d}{dt}\left\|\nabla u\right\|_2^2+(\mu+\lambda)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\operatorname{div} u\right\|_2^2+\beta\int_\Omega u_t\nabla\theta dx \\
&\quad+\int_0^t g\left(t-s\right)\int_\Omega u_t\left(x,t\right)\Delta u\left(x,s\right) dxds \qquad (4.9)
\end{aligned}
$$

D'autre part

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t g\left(t-s\right)\int_\Omega u_t\left(x,t\right)\Delta u\left(x,s\right) dxds \\
&= -\int_0^t g\left(t-s\right)\int_\Omega \nabla u_t\left(x,t\right).\nabla u\left(x,s\right) dxds \\
&= \int_0^t g\left(t-s\right)\int_\Omega \nabla u_t\left(x,t\right).\left(\nabla u\left(x,t\right)-\nabla u\left(x,s\right)\right) dxds \\
&\quad-\int_0^t g\left(t-s\right)\int_\Omega \nabla u_t\left(x,t\right)\nabla u\left(x,t\right) dxds \\
&= \int_0^t g\left(t-s\right)\int_\Omega \frac{d}{dt}\left[\nabla u\left(x,t\right)-\nabla u\left(x,s\right)\right]\left[\nabla u\left(x,t\right)-\nabla u\left(x,s\right)\right] dxds \\
&\quad-\int_0^t g\left(t-s\right)\int_\Omega \nabla u_t\left(x,t\right)\nabla u\left(x,t\right) dxds \\
&= \frac{1}{2}\int_0^t g\left(t-s\right)\frac{d}{dt}\left\|\nabla u\left(t\right)-\nabla u\left(s\right)\right\|^2 ds-\frac{1}{2}\int_0^t g\left(t-s\right)\frac{d}{dt}\left\|\nabla u\left(t\right)\right\|^2 ds \\
&= \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{dt}\left[g\left(t-s\right)\left\|\nabla u\left(t\right)-\nabla u\left(s\right)\right\|_2^2\right] ds-\frac{1}{2}\int_0^t g'\left(t-s\right)\left\|\nabla u\left(t\right)-\nabla u\left(s\right)\right\|_2^2 ds \\
&\quad-\left(\int_0^t g\left(t-s\right) ds\right)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla u\left(t\right)\right\|_2^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(g\circ\nabla u\right)(t)-\frac{1}{2}\left(g'\circ\nabla u\right)(t)-\frac{1}{2}\left(\int_0^t g\left(t-s\right)ds\right)\frac{d}{dt}\left\|\nabla u\left(t\right)\right\|_2^2 \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(g\circ\nabla u\right)(t)-\frac{1}{2}\left(g'\circ\nabla u\right)(t)-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left(\int_0^t g\left(s\right)ds\right)\left\|\nabla u\left(t\right)\right\|_2^2\right] \\
&\quad +\frac{1}{2}g\left(t\right)\left\|\nabla u\left(t\right)\right\|_2^2
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

En remplaçant (4.10) dans (4.9) , on obtient

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u_t\right\|_2^2+(\mu+\lambda)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\operatorname{div}u\right\|_2^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\mu-\int_0^t g\left(s\right)ds\right)\left\|\nabla u\right\|_2^2 \\
&\quad +\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(g\circ\nabla u\right)(t)-\frac{1}{2}\left(g'\circ\nabla u\right)(t)+\frac{1}{2}g\left(t\right)\left\|\nabla u\left(t\right)\right\|_2^2 \\
&\quad +\beta\int_\Omega u_t\nabla\theta dx
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

En multipliant (4.2) par θ et en intégrant sur Ω, il vient

$$
c\int_\Omega \theta\theta_t dx+k\int_\Omega \theta\operatorname{div}q dx+\beta\int_\Omega \theta\operatorname{div}u_t dx=0
$$

en utilisant la formule de Green et les conditions aux limites, il vient

$$
\frac{1}{2}c\frac{d}{dt}\left\|\theta\right\|^2-k\int_\Omega q\nabla\theta dx-\beta\int_\Omega u_t\nabla\theta dx=0
$$

d'où

$$
\beta\int_\Omega u_t\nabla\theta dx=\frac{c}{2}\frac{d}{dt}\left\|\theta\right\|_2^2-k\int_\Omega q\nabla\theta dx \tag{4.12}
$$

En combinant (4.11) et (4.12) , on obtient

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u_t\right\|_2^2+(\mu+\lambda)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|(\operatorname{div}u)\right\|_2^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left(\mu-\int_0^t g\left(s\right)ds\right)\left\|\nabla u\right\|_2^2\right] \\
&\quad +\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(g\circ\nabla u\right)(t)-\frac{1}{2}\left(g'\circ\nabla u\right)(t)+\frac{1}{2}g\left(t\right)\left\|\nabla u\left(t\right)\right\|_2^2 \\
&\quad +\frac{c}{2}\frac{d}{dt}\left\|\theta\right\|_2^2-k\int_\Omega q\nabla\theta dx,
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

On multiplie (4.3) par q et on intègre sur Ω, il vient

$$\tau_0 \int_\Omega q_t q dx + \|q\|_2^2 + k \int_\Omega \nabla\theta . q dx = 0,$$

donc

$$\frac{\tau_0}{2} \frac{d}{dt} \|q\|_2^2 + \|q\|_2^2 + k \int_\Omega \nabla\theta . q dx = 0,$$

ce qui implique

$$k \int_\Omega \nabla\theta . q dx = -\frac{\tau_0}{2} \frac{d}{dt} \|q\|_2^2 - \|q\|_2^2 . \tag{4.14}$$

Combinons (4.13) et (4.14) , on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \|u_t\|_2^2 + (\mu+\lambda) \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \|\operatorname{div} u\|_2^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \left[\left(\mu - \int_0^t g(s)\, ds \right) \|\nabla u\|_2^2 \right] \\ &+ \frac{1}{2}\frac{d}{dt} (g \circ \nabla u)(t) - \frac{1}{2} (g' \circ \nabla u)(t) + \frac{1}{2} g(t) \|\nabla u(t)\|_2^2 \\ &+ \frac{c}{2}\frac{d}{dt} \|\theta\|_2^2 + \frac{\tau_0}{2}\frac{d}{dt} \|q\|_2^2 + \|q\|_2^2 , \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_1(t) &= \frac{1}{2} (g' \circ \nabla u)(t) - \frac{1}{2} g(t) \|\nabla u(t)\|_2^2 - \|q\|_2^2 \\ &\leq \frac{1}{2} (g' \circ \nabla u)(t) - \|q\|_2^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Maintenant, par changement de variables et intégration par parties, on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^t g(t-s) \Delta u(x,s)\, ds &= \frac{d}{dt} \int_0^t g(h) \Delta u(x, t-h)\, dh, \text{ avec } h = t-s \\ &= g(t) \Delta u_0 + \int_0^t g(s) \frac{d}{dt} \Delta u(x, t-h)\, dh \\ &= g(t) \Delta u_0 + \int_0^t g(s) \Delta u_t(x, t-h)\, dh, \end{aligned}$$

Revenant au $s = t - h$, on obtient

$$\frac{d}{dt}\int_0^t g(t-s)\,\Delta u(x,s)\,ds = g(t)\,\Delta u_0 + \int_0^t g(t-s)\,\Delta u_t(x,s)\,ds. \tag{4.15}$$

On considère des solution dans $H^3(\Omega)$ et on dérive (4.1) par rapport à t puit en multiplie par u_{tt} et en intègre sur Ω

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega u_{ttt}u_{tt}dx - \mu\int_\Omega \Delta u_t u_{tt}dx - (\mu+\lambda)\int_\Omega \nabla(\operatorname{div} u_t)\,u_{tt}dx \\ &\quad +\beta\int_\Omega u_{tt}\nabla\theta_t dx + \int_\Omega u_{tt}\left(\frac{d}{dt}\int_0^t g(t-s)\,\Delta u(x,s)\,ds\right)dx, \end{aligned}$$

on utilise (4.15), il vient

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega u_{ttt}u_{tt}dx - \mu\int_\Omega u_{tt}\Delta u_t dx - (\mu+\lambda)\int_\Omega u_{tt}\nabla(\operatorname{div} u_t)\,dx + \beta\int_\Omega u_{tt}\nabla\theta_t dx \\ &\quad +g(t)\int_\Omega u_{tt}.\Delta u_0 dx + \int_\Omega u_{tt}\int_0^t g(t-s)\,\Delta u_t(s)\,dsdx, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_{tt}\|_2^2 + \mu\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_t\|_2^2 + (\mu+\lambda)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\operatorname{div} u_t\|_2^2 + \beta\int_\Omega u_{tt}\nabla\theta_t dx \\ &\quad +g(t)\int_\Omega u_{tt}.\Delta u_0 dx - \int_\Omega \nabla u_{tt}\int_0^t g(t-s)\,\nabla u_t(s)\,dsdx, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_{tt}\|_2^2 + \mu\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_t\|_2^2 + (\mu+\lambda)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\operatorname{div} u_t\|_2^2 \\ &\quad +\beta\int_\Omega u_{tt}\nabla\theta_t dx + g(t)\int_\Omega u_{tt}.\Delta u_0 dx \\ &\quad +\int_0^t g(t-s)\int_\Omega \frac{d}{dt}(\nabla u_t(t) - \nabla u_t(s))(\nabla u_t(t) - \nabla u_t(s))\,dxds \\ &\quad -\frac{1}{2}\left(\int_0^t g(s)\,ds\right)\frac{d}{dt}\|\nabla u_t\|_2^2 \end{aligned} \tag{4.16}$$

On a

$$\begin{aligned}
&\int_0^t g(t-s)\int_\Omega \frac{d}{dt}\left(\nabla u_t(t)-\nabla u_t(s)\right)\left(\nabla u_t(t)-\nabla u_t(s)\right)dxds\\
=\;& \int_0^t g(t-s)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega \left|\nabla u_t(t)-\nabla u_t(s)\right|^2 dx\right)ds\\
=\;& \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^t g(t-s)\left(\int_\Omega \left|\nabla u_t(t)-\nabla u_t(s)\right|^2 dx\right)ds\\
&-\frac{1}{2}\int_0^t g'(t-s)\left(\int_\Omega \left|\nabla u_t(t)-\nabla u_t(s)\right|^2 dx\right)ds,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^t g(t-s)\frac{d}{dt}\left\|\nabla u_t(t)-\nabla u_t(s)\right\|_2^2 ds\\
=\;& \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^t g(t-s)\left\|\nabla u_t(t)-\nabla u_t(s)\right\|_2^2 ds+\frac{1}{2}\int_0^t g'(s-t)\left\|\nabla u_t(t)-\nabla u_t(s)\right\|_2^2 ds\\
=\;& \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(g\circ\nabla u_t\right)(t)+\frac{1}{2}\left(g'\circ\nabla u_t\right)(t),
\end{aligned}$$

avec

$$\left(g'\circ\nabla u_t\right)(t):=\int_0^t g'(t-s)\left\|\nabla u_t(t)-\nabla u_t(s)\right\|_2^2 ds,$$

et

$$-\frac{1}{2}\left(\int_0^t g(s)\,ds\right)\frac{d}{dt}\left\|\nabla u_t\right\|_2^2=-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left(\int_0^t g(s)\,ds\right)\left\|\nabla u_t\right\|_2^2\right]+\frac{1}{2}g(t)\left\|\nabla u_t\right\|_2^2,$$

alors, la relation (4.16) devient

$$\begin{aligned}
0 \;=\;& \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u_{tt}\right\|_2^2+\mu\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla u_t\right\|_2^2+(\mu+\lambda)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\operatorname{div} u_t\right\|_2^2+\beta\int_\Omega u_{tt}\nabla\theta_t dx\\
&+g(t)\int_\Omega u_{tt}.\Delta u_0 dx+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(g\circ\nabla u_t\right)(t)-\frac{1}{2}\left(g'\circ\nabla u_t\right)(t)\\
&-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left(\int_0^t g(s)\,ds\right)\left\|\nabla u_t\right\|_2^2\right]+\frac{1}{2}g(t)\left\|\nabla u_t\right\|_2^2. \qquad (4.17)
\end{aligned}$$

En dérivant (4.2) par rapport à t et en multipliant par θ_t et en intégrant sur Ω,

$$c\int_\Omega \theta_t\theta_{tt}dx + k\int_\Omega \theta_t \operatorname{div} q_t dx + \beta\int_\Omega \theta_t \operatorname{div} u_{tt} dx = 0,$$

ce qui implique

$$\frac{c}{2}\frac{d}{dt}\|\theta_t\|_2^2 + k\int_\Omega \theta_t \operatorname{div} q_t dx = \beta\int_\Omega u_{tt}\nabla\theta_t dx. \tag{4.18}$$

Combinons (4.17) et (4.18), on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_{tt}\|_2^2 + \mu\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_t\|_2^2 + (\mu+\lambda)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\operatorname{div} u_t\|_2^2 + \frac{c}{2}\frac{d}{dt}\|\theta_t\|_2^2 \\ &\quad + k\int_\Omega \theta_t \operatorname{div} q_t + g(t)\int_\Omega u_{tt}.\Delta u_0 dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(g\circ\nabla u_t)(t) \\ &\quad - \frac{1}{2}(g'\circ\nabla u_t)(t) - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left(\int_0^t g(s)\,ds\right)\|\nabla u_t\|_2^2\right] + \frac{1}{2}g(t)\|\nabla u_t\|_2^2 \end{aligned} \tag{4.19}$$

En dérivant (4.3) par rapport à t et en multpliant par q_t et en intégrant sur Ω,

$$\tau_0\int_\Omega q_t q_{tt} dx + \|q_t\|_2^2 + k\int_\Omega q_t\nabla\theta_t dx = 0,$$

d'où

$$\frac{\tau_0}{2}\frac{d}{dt}\|q_t\|_2^2 + \|q_t\|_2^2 = k\int_\Omega \theta_t \operatorname{div} q_t dx. \tag{4.20}$$

En combinant (4.19) et (4.20), on arrive à

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_{tt}\|_2^2 + \mu\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_t\|_2^2 + (\mu+\lambda)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\operatorname{div} u_t\|_2^2 + \frac{c}{2}\frac{d}{dt}\|\theta_t\|_2^2 \\ &\quad + \frac{\tau_0}{2}\frac{d}{dt}\|q_t\|_2^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(g\circ\nabla u_t)(t) - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left(\int_0^t g(s)\,ds\right)\|\nabla u_t\|_2^2\right] \\ &\quad + g(t)\int_\Omega u_{tt}.\Delta u_0 dx + \frac{1}{2}g(t)\|\nabla u_t\|_2^2 - \frac{1}{2}(g'\circ\nabla u_t)(t) + \|q_t\|_2^2, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u_{tt}\right\|_2^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left(\mu-\int_0^t g\left(s\right)ds\right)\left\|\nabla u_t\right\|_2^2\right]+\left(\mu+\lambda\right)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\operatorname{div}u_t\right\|_2^2 \\
& +\frac{c}{2}\frac{d}{dt}\left\|\theta_t\right\|_2^2+\frac{\tau_0}{2}\frac{d}{dt}\left\|q_t\right\|_2^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(g\circ\nabla u_t\right)\left(t\right) \\
= & -\frac{1}{2}g\left(t\right)\left\|\nabla u_t\right\|_2^2+\frac{1}{2}\left(g'\circ\nabla u_t\right)\left(t\right)-\left\|q_t\right\|_2^2-g\left(t\right)\int_\Omega u_{tt}.\Delta u_0dx,
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
E_2'\left(t\right) &= -\frac{1}{2}g\left(t\right)\left\|\nabla u_t\right\|_2^2+\frac{1}{2}g'\circ\nabla u_t\left(t\right)-\left\|q_t\right\|_2^2-g\left(t\right)\int_\Omega u_{tt}.\Delta u_0dx \\
&\leq -\left\|q_t\right\|_2^2-g\left(t\right)\int_\Omega u_{tt}\Delta u_0dx.
\end{aligned}$$

Ce dérivier resultat reste valable pour des solutions $H^2\left(\Omega\right)$ en utilisant la densité de $H^3\left(\Omega\right)$ dans $H^2\left(\Omega\right)$.

On introduit les fonctionnelles

$$\Psi_1\left(t\right):=\int_\Omega uu_tdx,$$

$$\Psi_2\left(t\right):=\int_\Omega u_tu_{tt}dx,$$

$$\chi_1\left(t\right):=-\int_\Omega u_t\int_0^t g\left(t-s\right)\left(u\left(t\right)-u\left(s\right)\right)dsdx,$$

$$\chi_2\left(t\right):=-\int_\Omega u_{tt}\int_0^t g\left(t-s\right)\left(u_t\left(t\right)-u_t\left(s\right)\right)dsdx,$$

$$K\left(t\right)=-c\int_\Omega \theta\theta_tdx,$$

$$\mathcal{L}_1\left(t\right):=E\left(t\right)+\varepsilon_1\Psi_1\left(t\right)+\ \varepsilon_2\chi_1\left(t\right),$$

$$\mathcal{L}_2\left(t\right):=E\left(t\right)+\varepsilon_3\Psi_2\left(t\right)+\varepsilon_4\chi_2\left(t\right)+\varepsilon_3\frac{\beta^2}{c\left(\mu+\lambda\right)}K\left(t\right),$$

$$\mathcal{L}\left(t\right)=\mathcal{L}_1\left(t\right)+\mathcal{L}_2\left(t\right).$$

où $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \varepsilon_4$, et ε_5 sont des constantes strictement positives.

Lemme 4.2. Pour $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3$, et ε_4 assez petits on a

$$\alpha_1 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq \alpha_2 E(t) \tag{4.21}$$

avec $\alpha_1, \quad \alpha_2 > 0$.

Preuve On utilise l'inégalité de Young et l'inégalité de Poincaré, il vient

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(t) \quad \leq \quad & 2E(t) + \frac{\varepsilon_1}{2}\int_\Omega |u|^2\,dx + \frac{\varepsilon_2}{2}\int_\Omega |u_t|^2\,dx + \frac{\varepsilon_1}{2}\int_\Omega |u_t|^2\,dx \\
& + \frac{\varepsilon_2}{2}\int_\Omega \left|\int_0^1 g(t-s)(u(t)-u(s))\,ds\right|^2 dx \\
& + \frac{\varepsilon_3}{2}\int_\Omega |u_t|^2\,dx + \frac{\varepsilon_4}{2}\int_\Omega |u_{tt}|^2\,dx + \frac{\varepsilon_3}{2}\int_\Omega |u_{tt}|^2\,dx \\
& + \frac{\varepsilon_4}{2}\int_\Omega \left|\int_0^1 g(t-s)(u_t(t)-u_t(s))\,ds\right|^2 dx + \varepsilon_3\frac{\beta^2}{2(\mu+\lambda)}\int_\Omega |\theta|^2\,dx \\
& + \varepsilon_3\frac{\beta^2}{2(\mu+\lambda)}\int_\Omega |\theta_t|^2\,dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\leq \quad & 2E(t) + \frac{\varepsilon_1}{2}c_p\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \left(\frac{\varepsilon_2}{2}+\frac{\varepsilon_1}{2}\right)\int_\Omega |u_t|^2\,dx \\
& + \frac{\varepsilon_2}{2}\int_\Omega \left(\int_0^1 g^{1/2}(t-s)\,g^{1/2}(t-s)\,|(u(t)-u(s))|\,ds\right)^2 dx \\
& + \frac{\varepsilon_3}{2}c_p\int_\Omega |\nabla u_t|^2\,dx + \left(\frac{\varepsilon_4}{2}+\frac{\varepsilon_3}{2}\right)\int_\Omega |u_{tt}|^2\,dx \\
& + \frac{\varepsilon_4}{2}\int_\Omega \left(\int_0^1 g^{1/2}(t-s)\,g^{1/2}(t-s)\,|(u_t(t)-u_t(s))|\,ds\right)^2 dx \\
& + \varepsilon_3\frac{\beta^2}{2(\mu+\lambda)}\int_\Omega |\theta|^2\,dx + \varepsilon_3\frac{\beta^2}{2(\mu+\lambda)}\int_\Omega |\theta_t|^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq 2E(t)+\frac{\varepsilon_1}{2}c_p\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx+\left(\frac{\varepsilon_2}{2}+\frac{\varepsilon_1}{2}\right)\int_\Omega |u_t|^2\,dx \\
&\quad+\frac{\varepsilon_2}{2}\left[\int_0^1 g(s)\,dt\right]\int_0^1 g(t-s)\int_\Omega |(u(t)-u(s))|^2\,dxds \\
&\quad+\frac{\varepsilon_3}{2}c_p\int_\Omega |\nabla u_t|^2\,dx+\left(\frac{\varepsilon_4}{2}+\frac{\varepsilon_3}{2}\right)\int_\Omega |u_{tt}|^2\,dx \\
&\quad+\frac{\varepsilon_4}{2}\left[\int_0^1 g(s)\,dt\right]\int_0^1 g(t-s)\int_\Omega |u_t(t)-u_t(s)|^2\,dxds \\
&\quad+\varepsilon_3\frac{\beta^2}{2(\mu+\lambda)}\int_\Omega |\theta|^2\,dx+\varepsilon_3\frac{\beta^2}{2(\mu+\lambda)}\int_\Omega |\theta_t|^2\,dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq 2E(t)+\left(\frac{\varepsilon_2}{2}+\frac{\varepsilon_1}{2}\right)\int_\Omega |u_t|^2\,dx+\frac{\varepsilon_1}{2}c_p\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx \\
&\quad+\frac{\varepsilon_2}{2}(\mu-l)\,c_p^2\,(g\circ\nabla u)(t)+\left(\frac{\varepsilon_4}{2}+\frac{\varepsilon_3}{2}\right)\int_\Omega |u_{tt}|^2\,dx \\
&\quad+\frac{\varepsilon_3}{2}c_p\int_\Omega |\nabla u_t|^2\,dx+\frac{\varepsilon_4}{2}(\mu-l)\,c_p^2\,(g\circ\nabla u_t)(t) \\
&\quad+\varepsilon_3\frac{\beta^2}{2(\mu+\lambda)}\int_\Omega |\theta|^2\,dx+\varepsilon_3\frac{\beta^2}{2(\mu+\lambda)}\int_\Omega |\theta_t|^2\,dx \\
&\leq \alpha_1 E(t)\,,\ \alpha_1>0.
\end{aligned}
$$

Aussi

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(t) &\geq 2E(t)-\left(\frac{\varepsilon_2}{2}+\frac{\varepsilon_1}{2}\right)\int_\Omega |u_t|^2\,dx-\frac{\varepsilon_1}{2}c_p\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx \\
&\quad-\frac{\varepsilon_2}{2}(1-l)\,c_p^2\,(g\circ\nabla u)(t)-\left(\frac{\varepsilon_4}{2}+\frac{\varepsilon_3}{2}\right)\int_\Omega |u_{tt}|^2\,dx-\frac{\varepsilon_3}{2}c_p\int_\Omega |\nabla u_t|^2\,dx \\
&\quad-\frac{\varepsilon_4}{2}(1-l)\,c_p^2\,(g\circ\nabla u_t)(t)-\varepsilon_3\frac{\beta^2}{2(\mu+\lambda)}\int_\Omega |\theta|^2\,dx \\
&\quad-\varepsilon_3\frac{\beta^2}{2(\mu+\lambda)}\int_\Omega |\theta_t|^2\,dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\geq\ & \frac{1-(\varepsilon_2+\varepsilon_1)}{2}\|u_t\|_2^2+\frac{1}{2}(\mu+\lambda)\|\operatorname{div} u\|_2^2+\frac{1}{2}\left(l-\frac{\varepsilon_1}{2}c_p\right)\|\nabla u\|_2^2 \\
&+\left(\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon_2}{2}(1-l)\,c_p\right)(g\circ\nabla u)(t)+\frac{1}{2}\tau_0\|q\|_2^2 \\
& \frac{1-(\varepsilon_4+\varepsilon_3)}{2}\|u_{tt}\|_2^2+\frac{1}{2}(\mu+\lambda)\|\operatorname{div} u_t\|_2^2+\frac{1}{2}\left(l-\frac{\varepsilon_3}{2}c_p\right)\|\nabla u_t\|_2^2 \\
&+\left(\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon_4}{2}(1-l)\,c_p\right)(g\circ\nabla u_t)(t)+\frac{1}{2}\tau_0\|q_t\|_2^2 \\
&+\left(\frac{1}{2}c-\frac{\varepsilon_3\beta^2}{2(\mu+\lambda)}\right)\int_\Omega|\theta|^2\,dx+\left(\frac{1}{2}c-\frac{\varepsilon_3\beta^2}{2(\mu+\lambda)}\right)\int_\Omega|\theta_t|^2\,dx,
\end{aligned}
$$

donc par choisir $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3$ et ε_4 assez petits, on obtient $\mathcal{L}(t)\geq\alpha_2 E(t)\,,\ \alpha_2>0.$

Lemme 4.3 Pour la solution du problème $(4.1)-(4.5)$ et sous les hypothèses $(G1)$ et $(G2)$, la fonctionnelle

$$\Psi_1(t):=\int_\Omega u u_t dx$$

satisfait

$$
\begin{aligned}
\Psi_1'(t)\ \leq\ & \int_\Omega|u_t|^2\,dx-\frac{l}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2\,dx-\frac{(\mu+\lambda)}{2}\int_\Omega|\operatorname{div} u|^2\,dx \\
&+\frac{\beta^2}{2(\mu+\lambda)}\int_\Omega|\theta|^2\,dx+\frac{1}{2l}\left(\int_0^t g^{2-p}(s)\,ds\right)(g^p\circ\nabla u)(t)\,. \qquad (4.22)
\end{aligned}
$$

Preuve

En utilisant l'équation (4.1) et la formule de Green, on trouve

$$
\begin{aligned}
\Psi_1'(t)\ =\ & \int_\Omega|u_t|^2\,dx+\int_\Omega u u_{tt}dx \\
=\ & \int_\Omega|u_t|^2\,dx \\
&+\int_\Omega u\left(\mu\Delta u+(\mu+\lambda)\nabla(\operatorname{div} u)-\beta\nabla\theta-\int_0^t g(t-s)\Delta u(x,s)\,ds\right)dx \\
=\ & \int_\Omega|u_t|^2\,dx-\mu\int_\Omega|\nabla u|^2\,dx-(\mu+\lambda)\int_\Omega|\operatorname{div} u|^2\,dx+\beta\int_\Omega\theta\operatorname{div} u dx \\
&+\int_\Omega\nabla u(t)\int_0^t g(t-s)\nabla u(x,s)\,dsdx
\end{aligned}
$$

On sait alors, grâce à l'inégalité de Young, que

$$\begin{aligned}
\Psi_1'(t) &\leq \int_\Omega |u_t|^2\,dx - \mu\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - (\mu+\lambda)\int_\Omega |\operatorname{div} u|^2\,dx + \frac{\beta^2}{2(\mu+\lambda)}\int_\Omega |\theta|^2\,dx \\
&\quad + \frac{(\mu+\lambda)}{2}\int_\Omega |\operatorname{div} u|^2\,dx + \int_\Omega \nabla u(t)\int_0^t g(t-s)\nabla u(s)\,dsdx \\
&\leq \int_\Omega |u_t|^2\,dx - \mu\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \frac{(\mu+\lambda)}{2}\int_\Omega |\operatorname{div} u|^2\,dx + \frac{\beta^2}{2(\mu+\lambda)}\int_\Omega |\theta|^2\,dx \\
&\quad + \int_\Omega \nabla u(t)\int_0^t g(t-s)\nabla u(x,s)\,dsdx \qquad (4.23)
\end{aligned}$$

Pour le dernier terme, et d'après l'inégalité de Young, on a

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \nabla u(t)\int_0^t g(t-s)\nabla u(s)\,dsdx \\
\leq\ & \frac{\mu}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \frac{1}{2\mu}\int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s)\nabla u(s)\,ds\right)^2 dx \\
\leq\ & \frac{\mu}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \frac{1}{2\mu}\int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s)\left[|\nabla u(s)-\nabla u(t)| + |\nabla u(t)|\right] ds\right)^2 dx.
\end{aligned}$$

Mais on a

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s)\left[|\nabla u(s)-\nabla u(t)| + |\nabla u(t)|\right] ds\right)^2 dx \\
=\ & \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s)|\nabla u(s)-\nabla u(t)|\,ds\right)^2 dx + \int_\Omega \left(\int_0^t g(s)|\nabla u(t)|\,ds\right)^2 dx \\
& +2\int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s)|\nabla u(s)-\nabla u(t)|\,ds\right)\left(\int_0^t g(s)|\nabla u(t)|\,ds\right) dx
\end{aligned}$$

Grâce à l'inégalité de Young, donc pour tout $\eta > 0$, on a

$$
\begin{aligned}
& \int_{\Omega}\left(\int_0^t g(t-s)\left[|\nabla u(s)-\nabla u(t)|+|\nabla u(t)|\right] ds\right)^2 dx \\
= & \int_{\Omega}\left(\int_0^t g(t-s)|\nabla u(s)-\nabla u(t)| ds\right)^2 dx+\int_{\Omega}\left(\int_0^t g(s)|\nabla u(t)| ds\right)^2 dx \\
& +2\left[\frac{1}{2\eta}\int_{\Omega}\left(\int_0^t g(t-s)|\nabla u(s)-\nabla u(t)| ds\right) dx+\frac{\eta}{2}\int_{\Omega}\left(\int_0^t g(s)|\nabla u(t)| ds\right) dx\right] \\
\leq & \left(1+\frac{1}{\eta}\right)\int_{\Omega}\left(\int_0^t g(t-s)|\nabla u(s)-\nabla u(t)| ds\right)^2 dx \\
& +(1+\eta)\int_{\Omega}\left(\int_0^t g(s)|\nabla u(t)| ds\right)^2 dx \qquad (4.24)
\end{aligned}
$$

Le premier terme de (4.24) donne

$$
\begin{aligned}
& \int_{\Omega}\left(\int_0^t g(t-s)|\nabla u(t)-\nabla u(s) ds|\right)^2 dx \\
= & \int_{\Omega}\left(\int_0^t g^{(2-p)/2}(t-s) g^{p/2}(t-s)|\nabla u(t)-\nabla u(s) ds|\right)^2 dx \\
= & \int_{\Omega}\left[\left(\int_0^t g^{2-p}(t-s) dt\right)^{1/2}\left(\int_0^t g^{p}(t-s)|\nabla u(t)-\nabla u(s) ds|^2\right)^{1/2}\right]^2 dx \\
= & \left(\int_0^t g^{2-p}(t-s) ds\right)\int_{\Omega}\int_0^t g^{p}(t-s)|\nabla u(t)-\nabla u(s)|^2 ds dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= & \left[\int_0^t g^{2-p}(s) ds\right]\int_0^t g^{p}(t-s)\int_{\Omega}|\nabla u(t)-\nabla u(s)|^2 dx ds \\
= & \left[\int_0^t g^{2-p}(s) ds\right](g^{p}\circ\nabla u)(t). \qquad (4.25)
\end{aligned}
$$

On remplace (4.25) dans (4.24), et on utilise que

$$
\int_0^t g(s) ds \leq \int_0^{\infty} g(s) ds \leq \mu - l
$$

il vient

$$\begin{aligned}
& \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s) \left[|\nabla u(s) - \nabla u(t)| + |\nabla u(t)| \right] ds \right)^2 dx \\
\leq\ & \left(1+\frac{1}{\eta}\right) \left[\int_0^t g^{2-p}(s)\, ds \right] (g^p \circ \nabla u)(t) + (1+\eta) \left(\int_0^t g(s)\, ds \right)^2 \int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx \\
\leq\ & \left(1+\frac{1}{\eta}\right) \left[\int_0^t g^{2-p}(s)\, ds \right] (g^p \circ \nabla u)(t) + (1+\eta)(\mu - l)^2 \int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx, \quad (4.26)
\end{aligned}$$

On remplace (4.26) dans (4.23) , on arrive à

$$\begin{aligned}
\Psi_1'(t) \leq\ & \int_\Omega |u_t|^2 dx - \mu \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{(\mu+\lambda)}{2} \int_\Omega |\operatorname{div} u|^2 dx \\
& + \frac{\beta^2}{2(\mu+\lambda)} \int_\Omega |\theta|^2 dx + \frac{\mu}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \\
& + \frac{1}{2\mu} \left(1+\frac{1}{\eta}\right) \left[\int_0^t g^{2-p}(s)\, ds \right] (g^p \circ \nabla u)(t) \\
& + \frac{1}{2\mu} (1+\eta)(\mu-l)^2 \int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire que

$$\begin{aligned}
\Psi_1'(t) \leq\ & \int_\Omega |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} \left(-\mu + \frac{1}{\mu}(1+\eta)(\mu-l)^2 \right) \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \\
& - \frac{(\mu+\lambda)}{2} \int_\Omega |\operatorname{div} u|^2 dx + \frac{\beta^2}{2(\mu+\lambda)} \int_\Omega |\theta|^2 dx \\
& + \frac{1}{2\mu} \left(1+\frac{1}{\eta}\right) \left[\int_0^t g^{p}(s)\, ds \right] \left(g^{2-p} \circ \nabla u\right)(t). \quad (4.27)
\end{aligned}$$

On prend $\eta = \frac{l}{\mu - l}$, alors (4.27) devient

$$\begin{aligned}
\Psi_1'(t) \leq\ & \int_\Omega |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} \left(-\mu + \frac{1}{\mu} \left(1 + \frac{l}{\mu - l}\right) (\mu-l)^2 \right) \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \\
& - \frac{(\mu+\lambda)}{2} \int_\Omega |\operatorname{div} u|^2 dx + \frac{\beta^2}{2(\mu+\lambda)} \int_\Omega |\theta|^2 dx \\
& + \frac{1}{2\mu} \left(1+\frac{\mu - l}{l}\right) \left[\int_0^t g^{2-p}(s)\, ds \right] (g^p \circ \nabla u)(t)
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\Psi_1'(t) &\leq \int_\Omega |u_t|^2\,dx - \frac{l}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \frac{(\mu+\lambda)}{2}\int_\Omega |\operatorname{div} u|^2\,dx \\
&+\frac{\beta^2}{2(\mu+\lambda)}\int_\Omega |\theta|^2\,dx + \frac{1}{2l}\left[\int_0^t g^{2-p}(s)\,ds\right](g^p\circ\nabla u)(t).
\end{aligned}$$

Lemme 4.4. Pour (u,θ,q) est une solution du problème $(4.1)-(4.5)$ et sous les hypotheses $(G1)$ et $(G2)$, la fonctionnelle

$$\chi_1(t) = -\int_\Omega u_t \int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))\,dsdx$$

satisfait

$$\begin{aligned}
\chi_1'(t) &\leq \left(\delta - \int_0^t g(s)\,ds\right)\int_\Omega |u_t|^2\,dx + \left(\mu + 2(\mu-l)^2\right)\delta\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx \\
&+\left[\frac{1}{4\delta}(1+2\mu+\lambda+\beta)+2\delta\right]\left(\int_0^t g^{2-p}(s)\,ds\right)(g^p\circ\nabla u)(t) \\
&+\delta(\mu+\lambda)\int_\Omega |\operatorname{div} u|^2\,dx + \delta\beta\int_\Omega |\theta|^2\,dx \\
&+\frac{1}{4\delta}g(0)\,C_p\,(-g'\circ\nabla u)(t), \ \forall\delta>0. \qquad (4.28)
\end{aligned}$$

Preuve On a

$$\begin{aligned}
\chi_1'(t) &= -\int_\Omega u_{tt}\int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))\,dsdx \\
&\quad -\int_\Omega u_t\frac{d}{dt}\int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))\,dsdx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= & -\int_{\Omega} u_{tt} \int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))\, dsdx \\
& -\int_{\Omega} u_t \int_0^t g'(t-s)(u(t)-u(s))\, dsdx \\
& -\left(\int_0^t g(s)\, ds\right) \int_{\Omega} u_t^2 dx
\end{aligned} \tag{4.29}
$$

On utilise (4.1) et la formule de Green, pour avoir

$$
\begin{aligned}
& -\int_{\Omega} u_{tt} \int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))\, dsdx \\
= & -\mu \int_{\Omega} \Delta u(t) \int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))\, dsdx \\
& -(\mu+\lambda) \int_{\Omega} \nabla(\operatorname{div} u(t)) \int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))\, dsdx \\
& +\beta \int_{\Omega} \nabla\theta(t) \int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))\, dsdx
\end{aligned}
$$

$$
+\int_{\Omega} \int_0^t g(t-s)\, \Delta u(s)\, ds \int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))\, dsdx
$$

$$
\begin{aligned}
= & \ \mu \int_{\Omega} \nabla u(t) \int_0^t g(t-s)(\nabla u(t)-\nabla u(s))\, dsdx \\
& -(\mu+\lambda) \int_{\Omega} \nabla(\operatorname{div} u)(t) \int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))\, dsdx \\
& +\beta \int_{\Omega} \nabla\theta(t) \int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))\, dsdx \\
& -\int_{\Omega} \left(\int_0^t g(t-s)\, \nabla u(s)\, ds\right) \left(\int_0^t g(t-s)(\nabla u(t)-\nabla u(s))\, ds\right) dx
\end{aligned} \tag{4.30}
$$

Grâce à l'inégalité de Young, on a les estimations suivantes :

Le premier terme

$$
\begin{aligned}
& \mu \int_{\Omega} \nabla u\left(t\right) \int_{0}^{t} g\left(t-s\right)\left(\nabla u\left(t\right)-\nabla u\left(s\right)\right) dsdx \\
\leq\ & \delta\mu \int_{\Omega} \left|\nabla u\right|^{2} dx+\frac{\mu}{4\delta} \int_{\Omega} \left(\int_{0}^{t} g^{(2-p)/2}\left(t-s\right) g^{p/2}\left(t-s\right)\left(\nabla u\left(t\right)-\nabla u\left(s\right)\right) ds\right)^{2} dx \\
\leq\ & \delta\mu \int_{\Omega} \left|\nabla u\right|^{2} dx+\frac{\mu}{4\delta}\left(\int_{0}^{t} g^{2-p}\left(t-s\right) ds\right) \int_{\Omega} \int_{0}^{t} g^{p}\left(t-s\right)\left|\nabla u\left(t\right)-\nabla u\left(s\right)\right|^{2} dsdx \\
\leq\ & \delta\mu \int_{\Omega} \left|\nabla u\right|^{2} dx+\frac{\mu}{4\delta}\left(\int_{0}^{t} g^{2-p}\left(s\right) ds\right) \int_{0}^{t} g^{p}\left(t-s\right) \int_{\Omega} \left|\nabla u\left(t\right)-\nabla u\left(s\right)\right|^{2} dxds \\
\leq\ & \delta\mu \int_{\Omega} \left|\nabla u\right|^{2} dx+\frac{\mu}{4\delta}\left(\int_{0}^{t} g^{2-p}\left(s\right) ds\right)\left(g^{p} \circ \nabla u\right)\left(t\right),\ \forall \delta>0. \qquad (4.31)
\end{aligned}
$$

Le deuxième terme

$$
\begin{aligned}
& -\left(\mu+\lambda\right) \int_{\Omega} \nabla\left(\operatorname{div} u\right)\left(t\right) \int_{0}^{t} g\left(t-s\right)\left(u\left(t\right)-u\left(s\right)\right) dsdx \\
=\ & \left(\mu+\lambda\right) \int_{\Omega} \operatorname{div} u \int_{0}^{t} g\left(t-s\right)\left(\operatorname{div} u\left(t\right)-\operatorname{div} u\left(s\right)\right) dsdx \\
\leq\ & \left(\mu+\lambda\right) \delta_{1} \int_{\Omega} \left|\operatorname{div} u\right|^{2} dx+\frac{1}{4\delta_{1}} \int_{\Omega} \left(\int_{0}^{t} g\left(t-s\right)\left(\operatorname{div} u\left(t\right)-\operatorname{div} u\left(s\right)\right) ds\right)^{2} dx \\
\leq\ & \left(\mu+\lambda\right) \delta_{1} \int_{\Omega} \left|\operatorname{div} u\right|^{2} dx \\
& +\frac{\left(\mu+\lambda\right)}{4\delta_{1}}\left(\int_{0}^{t} g^{2-p}\left(s\right) ds\right) \int_{0}^{t} g^{p}\left(t-s\right) \int_{\Omega} \left|\operatorname{div} u\left(t\right)-\operatorname{div} u\left(s\right)\right|^{2} dxds \\
\leq\ & \left(\mu+\lambda\right) \delta_{1} \int_{\Omega} \left|\operatorname{div} u\right|^{2} dx+\frac{\mu+\lambda}{4\delta_{1}}\left(\int_{0}^{t} g^{2-p}\left(s\right) ds\right)\left(g^{p} \circ \nabla u\right)\left(t\right),\ \forall \delta_{1}>0. \ (4.32)
\end{aligned}
$$

Le troisième terme

$$
\begin{aligned}
& \beta \int_{\Omega} \nabla\theta\,(t) \int_0^t g\,(t-s)\,(u\,(t)-u\,(s))\,dsdx \\
= \;& -\beta \int_{\Omega} \theta\,(t) \int_0^t g\,(t-s)\,(\operatorname{div} u\,(t)-\operatorname{div} u\,(s))\,dsdx \\
\leq \;& \beta\delta_1 \int_{\Omega} |\theta|^2\,dx + \frac{\beta}{4\delta_1} \int_{\Omega} \left(\int_0^t g\,(t-s)\,(\operatorname{div} u\,(t)-\operatorname{div} u\,(s))\,ds\right)^2 dx \\
\leq \;& \beta\delta_1 \int_{\Omega} |\theta|^2\,dx + \frac{\beta}{4\delta_1} \left(\int_0^t g^{2-p}\,(s)\,ds\right) \int_0^t g^p\,(t-s) \int_{\Omega} |\operatorname{div} u\,(t)-\operatorname{div} u\,(s)|^2\,dxds \\
\leq \;& \beta\delta_1 \int_{\Omega} |\theta|^2\,dx + \frac{\beta}{4\delta_1} \left(\int_0^t g^{2-p}\,(s)\,ds\right) \int_0^t g^p\,(t-s) \int_{\Omega} |\nabla u\,(t)-\nabla u\,(s)|^2\,dxds \\
\leq \;& \beta\delta_1 \int_{\Omega} |\theta|^2\,dx + \frac{\beta}{4\delta_1} \left(\int_0^t g^{2-p}\,(s)\,ds\right) (g^p \circ \nabla u)\,(t)\,,\ \forall\delta_1 > 0. \qquad (4.33)
\end{aligned}
$$

Le quatrième terme

$$
\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left(\int_0^t g\,(t-s)\,\Delta u\,(s)\,ds\right) \left(\int_0^t g\,(t-s)\,(u\,(t)-u\,(s))\,ds\right) dx \\
= \;& -\int_{\Omega} \left(\int_0^t g\,(t-s)\,\nabla u\,(s)\,ds\right) \left(\int_0^t g\,(t-s)\,(\nabla u\,(t)-\nabla u\,(s))\,ds\right) dx \\
\leq \;& \delta_2 \int_{\Omega} \left|\int_0^t g\,(t-s)\,\nabla u\,(s)\,ds\right|^2 dx + \frac{1}{4\delta_2} \int_{\Omega} \left(\int_0^t g\,(t-s)\,(\nabla u\,(t)-\nabla u\,(s))\,ds\right)^2 dx \\
\leq \;& \delta_2 \int_{\Omega} \left|\int_0^t g\,(t-s)\,(|\nabla u\,(t)-\nabla u\,(s)|+|\nabla u\,(t)|)\,ds\right|^2 dx \\
& + \frac{1}{4\delta_2} \int_{\Omega} \left(\int_0^t g\,(t-s)\,(\nabla u\,(t)-\nabla u\,(s))\,ds\right)^2 dx \\
\leq \;& 2\delta_2 \int_{\Omega} \left(\int_0^t g\,(t-s)\,|\nabla u\,(t)-\nabla u\,(s)|\,ds\right)^2 + 2\delta_2 \int_{\Omega} \left(\int_0^t g\,(t-s)\,|\nabla u\,(t)|\,ds\right)^2 dx \\
& + \frac{1}{4\delta_2} \int_{\Omega} \left(\int_0^t g\,(t-s)\,(\nabla u\,(t)-\nabla u\,(s))\,ds\right)^2 dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq 2\delta_2\left(\int_0^t g^{2-p}(s)\,ds\right)(g^p\circ\nabla u)(t)+2\delta_2\left(\int_0^t g(t-s)\,ds\right)^2\int_\Omega|\nabla u|^2\,dx\\
&\quad+\frac{1}{4\delta_2}\left(\int_0^t g^{2-p}(s)\,ds\right)(g^p\circ\nabla u)(t)\\
&\leq \left(2\delta_2+\frac{1}{4\delta_2}\right)\left(\int_0^t g^{2-p}(s)\,ds\right)(g^p\circ\nabla u)(t)\\
&\quad+2\delta_2\left(\int_0^t g(s)\,ds\right)^2\int_\Omega|\nabla u|^2
\end{aligned}
\tag{4.34}
$$

Pour le deuxième terme dans (4.29), on a

$$
\begin{aligned}
&-\int_\Omega u_t\int_0^t g'(t-s)(u(t)-u(s))\,dsdx\\
&\leq \delta\int_\Omega|u_t|^2\,dx+\frac{1}{4\delta}\int_\Omega\left(\int_0^t g'(t-s)(u(t)-u(s))\,ds\right)^2dx\\
&\leq \delta\int_\Omega|u_t|^2\,dx+\frac{1}{4\delta}\left(\int_0^t g'(t-s)\,ds\right)\int_0^t g'(t-s)\int_\Omega|u(t)-u(s)|^2\,dxds\\
&\leq \delta\int_\Omega|u_t|^2\,dx-\frac{c_pg(0)}{4\delta}(g'\circ\nabla u)(t)
\end{aligned}
\tag{4.35}
$$

En combinant $(4.29)-(4.35)$, il vient

$$
\begin{aligned}
\chi_1'(t) &\leq \left(\delta\mu+2\delta_2(\mu-l)^2\right)\int_\Omega|\nabla u|^2\,dx+(\mu+\lambda)\,\delta_1\int_\Omega|\mathrm{div}\,u|^2\,dx\\
&\quad+\beta\delta_1\int_\Omega|\theta|^2\,dx+\left(\delta-\int_0^t g(s)\,ds\right)\int_\Omega|u_t|^2\,dx\\
&\quad+\left(\frac{\mu}{4\delta}+\frac{(\mu+\lambda)}{4\delta_1}+\frac{\beta}{4\delta_1}+2\delta_2+\frac{1}{4\delta_2}\right)\left(\int_0^t g^{2-p}(s)\,ds\right)(g^p\circ\nabla u)(t)\\
&\quad-\frac{c_pg(0)}{4\delta}(g'\circ\nabla u)(t)
\end{aligned}
$$

On pose $\delta=\delta_2=\delta_1$, on trouve (4.28).

Lemme 4.6 Soit (u,θ,q) la solution de $(4.1)-(4.5)$, alors

$$
E_2(t)\leq K\left(E_2(0)+\frac{1}{2}\int_\Omega|\Delta u_0|^2\,dx\right). \tag{4.36}
$$

Preuve

On utilise (4.8) et l'inégalité de Young, il vient

$$\begin{aligned}
E_2'(t) &\leq -g(t)\int_\Omega u_{tt}\Delta u_0 dx \leq \frac{g(t)}{2}\int_\Omega |u_{tt}|^2 dx + \frac{g(t)}{2}\int_\Omega |\Delta u_0|^2 dx \\
&\leq g(t) E_2(t) + \frac{g(t)}{2}\int_\Omega |\Delta u_0|^2 dx.
\end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[E_2(t) e^{-\int_0^t g(s)ds}\right] \leq e^{-\int_0^t g(s)ds}\frac{g(t)}{2}\int_\Omega |\Delta u_0|^2 dx$$

donc

$$\begin{aligned}
E_2(t) &\leq e^{\int_0^t g(s)ds}\left(E_2(0) + \left[\int_0^t e^{-\int_0^\tau g(s)ds}\frac{g(\tau)}{2}d\tau\right]\int_\Omega |\Delta u_0|^2 dx\right) \\
&\leq c\left(E_2(0) + \left[\frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{d\tau}\left[-e^{-\int_0^\tau g(s)ds}\right]d\tau\right]\int_\Omega |\Delta u_0|^2 dx\right) \\
&\leq c\left(E_2(0) + \frac{1}{2}\left[-e^{-\int_0^t g(s)ds}+1\right]\int_\Omega |\Delta u_0|^2 dx\right) \\
&\leq K\left(E_2(0) + \frac{1}{2}\int_\Omega |\Delta u_0|^2 dx\right).
\end{aligned}$$

Le lemme 4.6 donne

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega u_{tt}.\Delta u_0 dx &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |u_{tt}|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\Delta u_0|^2 dx \\
&\leq K\left(E_2(0) + \frac{1}{2}\int_\Omega |\Delta u_0|^2 dx\right) + \frac{1}{2}\int_\Omega |\Delta u_0|^2 dx \\
&\leq K_1\left(E_2(0) + \frac{1}{2}\int_\Omega |\Delta u_0|^2 dx\right). \qquad (4.37)
\end{aligned}$$

Etant donné $t_0 > 0$, On pose $\int_0^{t_0} g(s)\,ds = g_0$, $g_1(t) = \int_0^t g(s)\,ds$,
$g_2(t) = \int_0^t g^{2-p}(s)\,ds$, et $g_3(t) = \left(\int_0^t g^{1/2}(s)\,ds\right)^{2(p-1)}$.

Lemme 4.5. Pour la solution du problème $(4.1)-(4.5)$ et sous les hypotheses $(G1)$ et $(G2)$, la fonctionnelle

$$\mathcal{L}_1(t) := E(t) + \varepsilon_1 \Psi_1(t) + \ \varepsilon_2 \chi_1(t),$$

satisfait

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1'(t) &\leq -c_0 \left[\int_\Omega |u_t|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega |\operatorname{div} u|^2 dx + \|\theta\|_2^2 + \|q\|_2^2 \right] \\ &\quad + r_5 g_2(t) (g^p \circ \nabla u)(t) + g(t) K_1 \left(E_2(0) + \frac{1}{2} \int_\Omega |\Delta u_0|^2 dx \right), \ \forall t \geq t_0, \end{aligned} \tag{4.38}$$

avec $c_0,\ r_5,\ K_1$ des constantes positives.

Preuve

On utilise $\int_0^t g(s)\,ds \geq \int_0^{t_0} g(s)\,ds = g_0 > 0, \quad \forall t \geq t_0$ et

$$\begin{aligned} & -\left(\|q\|_2^2 + \|q_t\|_2^2\right) + \left[\varepsilon_1 \frac{\beta^2}{2(\mu+\lambda)} + \varepsilon_2 \beta \delta \right] \left(\frac{2\tau_0^2 C_p}{k^2} \|q_t\|_2^2 + \frac{2C_p}{k^2} \|q\|_2^2 \right) \\ \leq & \left(-1 + \varepsilon_1 \frac{\tilde{\lambda}\beta^2}{2(\mu+\lambda)} + \varepsilon_2 \tilde{\lambda} \beta \delta \right) \left(\|q_t\|_2^2 + \|q\|_2^2\right) \end{aligned}$$

avec $\tilde{\lambda} = \max\left(\frac{2\tau_0^2 C_p}{k^2}, \frac{2C_p}{k^2} \right)$, on trouve

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1'(t) \leq & -\left(1 - \varepsilon_1 \frac{\tilde{\lambda}\beta^2}{2(\mu+\lambda)} - \varepsilon_2 \tilde{\lambda}\beta\delta \right) \left(\|q_t\|_2^2 + \|q\|_2^2\right) - g(t) \int_\Omega u_{tt}.\Delta u_0 dx \\ & - [\varepsilon_2 (g_0 - \delta) - \varepsilon_1] \int_\Omega |u_t|^2 dx - \left[\varepsilon_1 \frac{l}{2} - \varepsilon_2 \delta \left(\mu + 2(\mu - l)^2 \right) \right] \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \\ & - \left[\frac{\varepsilon_1}{2} - \varepsilon_2 \delta \right] (\mu+\lambda) \int_\Omega |\operatorname{div} u|^2 dx \\ & + \left[\varepsilon_1 \frac{1}{2l} + \varepsilon_2 \left(2\delta + \frac{1}{4\delta} (2\mu + \lambda + \beta + 1) \right) \right] g_2(t) (g^p \circ \nabla u)(t) \\ & + \left[\frac{1}{2} - \varepsilon_2 \frac{c_p g(0)}{4\delta} \right] (g' \circ \nabla u)(t). \end{aligned}$$

où $g_2(t) = \int_0^t g^{2-p}(s)\, ds$.

A ce point, on choisit δ assez petit pour que

$$g_0 - \delta > \frac{3}{4} g_0$$

$$\frac{2}{l}\delta\left(\mu + 2(\mu - l)^2\right) < \frac{1}{2} g_0$$

On fixe δ, et on choisit ε_1 et ε_2 tels que

$$\frac{1}{2} g_0 \varepsilon_2 < \varepsilon_1 < \frac{3}{4} g_0 \varepsilon_2 \tag{4.39}$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}
-\varepsilon_1 + \varepsilon_2 (g_0 - \delta) &> -\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \frac{3}{4} g_0 > -\varepsilon_1 + \frac{3}{4} g_0 \varepsilon_2 > 0, \\
\varepsilon_1 \frac{l}{2} - \varepsilon_2 \delta\left(\mu + 2(\mu - l)^2\right) &> \frac{l}{2}\left(\varepsilon_1 - \frac{1}{2} g_0 \varepsilon_2\right) > 0, \\
-\varepsilon_2 \delta + \frac{\varepsilon_1}{2} &> -\varepsilon_2 \frac{1}{4} g_0 + \frac{1}{4} g_0 \varepsilon_2 = 0.
\end{aligned}$$

Puis, on prend ε_1 et ε_2 assez petits pour que les inégalités (4.21),(4.39) restent vraies et, en plus,

$$\begin{aligned}
&1 - \varepsilon_1 \tfrac{\lambda \beta^2}{2(\mu+\lambda)} - \varepsilon_2 \lambda \beta \delta > 0, \\
&-\varepsilon_2 \tfrac{c_p g(0)}{4\delta} + \tfrac{1}{2} > 0.
\end{aligned}$$

On pose

$$\begin{aligned}
r_1 &= 1 - \varepsilon_1 \tfrac{\tilde{\lambda} \beta^2}{2(\mu+\lambda)} - \varepsilon_2 \tilde{\lambda} \beta \delta, \\
r_2 &= -\varepsilon_1 + \varepsilon_2 (g_0 - \delta), \\
r_3 &= \varepsilon_1 \tfrac{l}{2} - \varepsilon_2 \delta\left(\mu + 2(\mu - l)^2\right), \\
r_4 &= (\mu + \lambda)\left[-\varepsilon_2 \delta + \varepsilon_1 \tfrac{1}{2}\right], \\
r_5 &= \varepsilon_1 \tfrac{1}{2l} + \varepsilon_2 \left(2\delta + \tfrac{1}{4\delta}(2\mu + \lambda + \beta + 1)\right).
\end{aligned}$$

Il vient

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_1'(t) &\leq -r_1\left(\|q_t\|_2^2+\|q\|_2^2\right)-r_2\int_\Omega |u_t|^2\,dx-r_3\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx-r_4\int_\Omega |\operatorname{div} u|^2\,dx \\
&\quad +r_5g_2(t)\left(g^p\circ\nabla u\right)(t)-g(t)\int_\Omega u_{tt}.\Delta u_0dx. \qquad (4.40)
\end{aligned}
$$

On utilse (3.18) pour avoir $\|\nabla\theta\|_2^2 \leq \frac{2c_0\tau_0^2}{k^2}\|q_t\|_2^2+\frac{2c_0}{k^2}\|q\|_2^2$, et par consequent

$$
\begin{aligned}
\|\theta\|_2^2+\|q\|_2^2 &\leq \frac{2C_p\tau_0^2}{k^2}\|q_t\|_2^2+\left(\frac{2C_p}{k^2}+1\right)\|q\|_2^2 \leq r_6\left(\|q_t\|_2^2+\|q\|_2^2\right), \\
\text{avec } r_6 &= \max\left\{\frac{2C_p\tau_0^2}{k^2},\frac{2C_p}{k^2}+1\right\}
\end{aligned}
$$

donc

$$
-\frac{1}{r_6}\|\theta\|_2^2-\frac{1}{r_6}\|q\|_2^2 \geq -\left(\|q_t\|_2^2+\|q\|_2^2\right) \qquad (4.41)
$$

En combinant (4.37), (3.40) et (3.41), il vient pour tout $t \geq t_0$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_1'(t) &\leq -\frac{r_1}{r_6}\|\theta\|_2^2-\frac{r_1}{r_6}\|q\|_2^2-r_2\int_\Omega |u_t|^2\,dx-r_3\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx \\
&\quad -r_4\int_\Omega |\operatorname{div} u|^2\,dx+r_5g_2(t)\left(g^p\circ\nabla u\right)(t) \\
&\quad +g(t)K_1\left(E_2(0)+\frac{1}{2}\int_\Omega |\Delta u_0|^2\,dx\right) \\
&\leq -c_0\left[\int_\Omega |u_t|^2\,dx+\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx+\int_\Omega |\operatorname{div} u|^2\,dx+\|\theta\|_2^2+\|q\|_2^2\right] \\
&\quad +r_5g_2(t)\left(g^p\circ\nabla u\right)(t)+g(t)K_1\left(E_2(0)+\frac{1}{2}\int_\Omega |\Delta u_0|^2\,dx\right), \qquad (4.42)
\end{aligned}
$$

pour une constante $c_0>0$.

Lemme 4.7 Pour la solution du problème $(4.1)-(4.5)$ et sous les hypothèses $(G1)$ et $(G2)$, la fonctionnelle

$$
\Psi_2(t) := \int_\Omega u_tu_{tt}dx
$$

satisfait

$$
\begin{aligned}
\Psi_2'(t) \;\; \leq \;\; & \int_\Omega |u_{tt}|^2\, dx - \frac{l}{2}\int_\Omega |\nabla u_t|^2\, dx - \frac{(\mu+\lambda)}{2}\int_\Omega |\operatorname{div} u_t|^2\, dx \\
& + \frac{\beta^2}{2(\mu+\lambda)}\int_\Omega |\theta_t|^2\, dx + \frac{1}{2l}\left(\int_0^t g^{2-p}(s)\, ds\right)(g^p \circ \nabla u_t)(t) \\
& - g(t)\int_\Omega u_t \Delta u_0 dx. \qquad (4.43)
\end{aligned}
$$

Preuve En dérivant l'équation (4.1) par rapport à t et en utilisant la formule de Green, on trouve

$$
\begin{aligned}
\Psi_2'(t) \;\; = \;\; & \int_\Omega |u_{tt}|^2\, dx + \int_\Omega u_t u_{ttt} dx \\
= \;\; & \int_\Omega |u_{tt}|^2\, dx \\
& + \int_\Omega u_t\left(\mu\Delta u_t + (\mu+\lambda)\nabla(\operatorname{div} u_t) - \beta\nabla\theta_t - \frac{d}{dt}\int_0^t g(t-s)\Delta u(x,s)\, ds\right) dx \\
= \;\; & \int_\Omega |u_{tt}|^2\, dx - \mu\int_\Omega |\nabla u_t|^2\, dx - (\mu+\lambda)\int_\Omega |\operatorname{div} u_t|^2\, dx + \beta\int_\Omega \theta_t \operatorname{div} u dx \\
& - g(t)\int_\Omega u_t\Delta u_0 dx + \int_\Omega \nabla u_t(t)\int_0^t g(t-s)\nabla u_t(x,s)\, ds dx.
\end{aligned}
$$

On répète les mêmes étapes que ci-dessus (la preuve du lemme 4.3) on arrive à (4.43).

Lemme 4.8. Pour la solution du problème $(4.1)-(4.5)$ et sous les hypotheses $(G1)$ et $(G2)$, la fonctionnelle

$$
\chi_2(t) := -\int_\Omega u_{tt}\int_0^t g(t-s)(u_t(t) - u_t(s))\, ds dx
$$

satisfait

$$\begin{aligned}
\chi_2'(t) \;\leq\; & \left(\delta' - \int_0^t g(s)\,ds\right) \int_\Omega |u_{tt}|^2\,dx + \left(\mu + 2(\mu - l)^2\right)\delta' \int_\Omega |\nabla u_t|^2\,dx \\
& + \left[\frac{1}{4\delta'}(1 + 2\mu + \lambda + \beta) + 3\delta'\right] \left(\int_0^t g^{2-p}(s)\,ds\right)(g^p \circ \nabla u_t)(t) \\
& + \delta'(\mu + \lambda) \int_\Omega |\mathrm{div}\, u_t|^2\,dx + \delta'\beta \int_\Omega |\theta_t|^2\,dx + \frac{1}{4\delta'} g(0)\, C_p\, (-g' \circ \nabla u_t)(t) \\
& + \frac{1}{4\delta'} g^2(t) \int_\Omega |\nabla u_0|^2\,dx, \;\; \forall \delta' > 0. \qquad (4.44)
\end{aligned}$$

Preuve pour justifier les calculs, on prend une solution plus régulière (dans $H^3(\Omega)$). Le resultat du lemme reste valable pour la solution dans $H^2(\Omega)$ par virtu de la densité de $H^3(\Omega)$ dans $H^2(\Omega)$.

On derive χ_2 :

$$\begin{aligned}
\chi_2'(t) &= -\int_\Omega u_{ttt} \int_0^t g(t-s)\,(u_t(t) - u_t(s))\,dsdx \\
&\quad - \int_\Omega u_{tt} \frac{d}{dt} \int_0^t g(t-s)\,(u_t(t) - u_t(s))\,dsdx \\
&= -\int_\Omega u_{ttt} \int_0^t g(t-s)\,(u_t(t) - u_t(s))\,dsdx \\
&\quad - \int_\Omega u_{tt} \int_0^t g'(t-s)\,(u_t(t) - u_t(s))\,dsdx \\
&\quad - \left(\int_0^t g(s)\,ds\right) \int_\Omega u_{tt}^2\,dx. \qquad (4.45)
\end{aligned}$$

En dérivant l'équation (4.1) par rapport à t et en utilisant la formule de Green et le fait que

$$\frac{d}{dt} \int_0^t g(t-s)\,\Delta u(s)\,ds = g(t)\,\Delta u_0 + \int_0^t g(t-s)\,\Delta u_t(s)\,ds,$$

on trouve

$$
\begin{aligned}
& -\int_{\Omega} u_{ttt} \int_0^t g(t-s)\left(u_t(t)-u_t(s)\right) dsdx \\
= \; & \mu \int_{\Omega} \nabla u_t(t) \int_0^t g(t-s)\left(\nabla u_t(t)-\nabla u_t(s)\right) dsdx \\
& -(\mu+\lambda) \int_{\Omega} \nabla\left(\operatorname{div} u_t\right)(t) \int_0^t g(t-s)\left(u_t(t)-u_t(s)\right) dsdx \\
& +\beta \int_{\Omega} \nabla \theta_t \int_0^t g(t-s)\left(u_t(t)-u_t(s)\right) dsdx \\
& -\int_{\Omega}\left(\int_0^t g(t-s) \nabla u_t(s) ds\right)\left(\int_0^t g(t-s)\left(\nabla u_t(t)-\nabla u_t(s)\right) ds\right) dx \\
& -\int_{\Omega} g(t) \nabla u_0\left(\int_0^t g(t-s)\left(\nabla u_t(t)-\nabla u_t(s)\right) ds\right) dx \qquad (4.46)
\end{aligned}
$$

Pour les quatre premiers termes on répète les mêmes étapes que ci-dessus (la preuve du lemme 4.4), on arrive à :

le premier terme

$$
\begin{aligned}
& \mu \int_{\Omega} \nabla u_t(t) \int_0^t g(t-s)\left(\nabla u_t(t)-\nabla u_t(s)\right) dsdx \\
\leq \; & \delta' \mu \int_{\Omega}\left|\nabla u_t\right|^2 dx+\frac{\mu}{4 \delta'}\left(\int_0^t g^{2-p}(s) ds\right)\left(g^p \circ \nabla u_t\right)(t), \; \forall \delta'>0, \qquad (4.47)
\end{aligned}
$$

le deuxième terme

$$
\begin{aligned}
& -(\mu+\lambda) \int_{\Omega} \nabla\left(\operatorname{div} u_t\right)(t) \int_0^t g(t-s)\left(u_t(t)-u_t(s)\right) dsdx \\
\leq \; & (\mu+\lambda) \delta_1' \int_{\Omega}\left|\operatorname{div} u_t\right|^2 dx+\frac{\mu+\lambda}{4 \delta_1'}\left(\int_0^t g^{2-p}(s) ds\right)\left(g^p \circ \nabla u_t\right)(t), \qquad (4.48)
\end{aligned}
$$

le troisième terme

$$
\begin{aligned}
& \beta \int_{\Omega} \nabla \theta_t \int_0^t g(t-s)\left(u_t(t)-u_t(s)\right) dsdx \\
\leq \; & \beta \delta_1' \int_{\Omega}\left|\theta_t\right|^2 dx+\frac{\beta}{4 \delta_1'}\left(\int_0^t g^{2-p}(s) ds\right)\left(g^p \circ \nabla u_t\right)(t), \; \forall \delta_1'>0, \qquad (4.49)
\end{aligned}
$$

le quatrième terme

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s)\,\Delta u_t(s)\,ds\right)\left(\int_0^t g(t-s)\,(u_t(t)-u_t(s))\,ds\right)dx \\
\leq\ & \left(2\delta_2' + \frac{1}{4\delta_2'}\right)\left(\int_0^t g^{2-p}(s)\,ds\right)(g^p \circ \nabla u_t)(t) \\
&+2\delta_2'\left(\int_0^t g(t-s)\,ds\right)^2 \int_\Omega |\nabla u_t|^2\,dx. \qquad (4.50)
\end{aligned}$$

Pour le cinquième terme

$$\begin{aligned}
&-\int_\Omega g(t)\,\nabla u_0 \left(\int_0^t g(t-s)\,(\nabla u_t(t)-\nabla u_t(s))\,ds\right)dx \\
\leq\ & \frac{1}{4\delta_3'}\int_\Omega (g(t)\,\nabla u_0)^2\,dx + \delta_3'\int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s)\,(\nabla u_t(t)-\nabla u_t(s))\,ds\right)^2 dx \\
\leq\ & \frac{1}{4\delta_3'}(g(t))^2\int_\Omega |\nabla u_0|^2\,dx + \delta_3'\left(\int_0^t g^{2-p}(s)\,ds\right)(g^p \circ \nabla u_t)(t), \qquad (4.51)
\end{aligned}$$

Pour le deuxième terme dans (4.45), on arrive à

$$\begin{aligned}
&-\int_\Omega u_t \int_0^t g'(t-s)\,(u_t(t)-u_t(s))\,dsdx \\
\leq\ & \delta'\int_\Omega |u_t|^2\,dx - \frac{c_p g(0)}{4\delta'}(g' \circ \nabla u_t)(t). \qquad (4.52)
\end{aligned}$$

En combinant $(4.45)-(4.52)$, il vient

$$\begin{aligned}
\chi_2'(t) \leq\ & \left(\delta'\mu + 2\delta_2'(\mu-l)^2\right)\int_\Omega |\nabla u_t|^2\,dx + (\mu+\lambda)\,\delta_1'\int_\Omega |\operatorname{div} u_t|^2\,dx \\
&+\beta\delta_1'\int_\Omega |\theta_t|^2\,dx + \left(\delta' - \int_0^t g(s)\,ds\right)\int_\Omega |u_{tt}|^2\,dx \\
&+\left(\frac{\mu}{4\delta'} + \frac{\mu+\lambda}{4\delta_1'} + \frac{\beta}{4\delta_1'} + 2\delta_2' + \frac{1}{4\delta_2'} + \delta_3'\right)\left(\int_0^t g^{2-p}(s)\,ds\right)(g^p \circ \nabla u_t)(t) \\
&-\frac{c_p g(0)}{4\delta'}(g' \circ \nabla u_t)(t) + \frac{1}{4\delta'}(g(t))^2\int_\Omega |\nabla u_0|^2\,dx
\end{aligned}$$

On pose $\delta' = \delta_2' = \delta_1' = \delta_3'$, on trouve (4.44).

Lemme 4.9. Pour la solution du problème $(4.1)-(4.5)$ et sous les hypotheses $(G1)$ et $(G2)$, la fonctionnelle

$$K(t) := -c\int_\Omega \theta\theta_t dx$$

satisfait

$$\begin{aligned} K'(t) &\leq -c\|\theta_t\|_2^2 + \left(1+\frac{\beta^2}{\omega}\right)\left(\frac{k^2}{2}+\frac{\tau_0^2}{k^2}\right)\|q_t\|_2^2 \\ &+ \left(1+\frac{\beta^2}{\omega}\right)\frac{1}{k^2}\|q\|_2^2 + \omega\|u_{tt}\|_2^2,\ \forall\omega>0. \end{aligned} \tag{4.53}$$

Preuve

On utilise (4.2) et la formule de Green, il vient

$$\begin{aligned} K'(t) &= \frac{d}{dt}\int_\Omega \theta\left(k\operatorname{div} q + \beta\operatorname{div} u_t\right)dx \\ &= k\frac{d}{dt}\int_\Omega \theta\operatorname{div} q dx + \beta\frac{d}{dt}\int_\Omega \theta\operatorname{div} u_t dx \\ &= k\frac{d}{dt}\int_\Omega \operatorname{div} q\theta dx - \beta\frac{d}{dt}\int_\Omega u_t\nabla\theta dx \\ &= k\int_\Omega \operatorname{div} q_t\theta dx + k\int_\Omega \operatorname{div} q\theta_t dx - \beta\int_\Omega u_{tt}\nabla\theta dx - \beta\int_\Omega u_t\nabla\theta_t dx. \end{aligned}$$

Encore une fois, en utilisant (4.2), on trouve

$$\begin{aligned} K'(t) &= -k\int_\Omega q_t\nabla\theta dx + k\int_\Omega\left(-\frac{c}{k}\theta_t - \frac{\beta}{k}\operatorname{div} u_t\right)\theta_t dx \\ &\quad -\beta\int_\Omega u_{tt}\nabla\theta dx - \beta\int_\Omega u_t\nabla\theta_t dx \\ &= -k\int_\Omega q_t\nabla\theta dx - c\|\theta_t\|_2^2 - \beta\int_\Omega u_{tt}\nabla\theta dx, \end{aligned}$$

grâce à l'inégalité de Young, pour tout $\omega > 0$,

$$\begin{aligned} K'(t) &\leq \frac{k^2}{2}\|q_t\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla\theta\|_2^2 - c\|\theta_t\|_2^2 + \frac{\beta^2}{2\omega}\|\nabla\theta\|_2^2 + \omega\|u_{tt}\|_2^2 \\ &= -c\|\theta_t\|_2^2 + \left(1 + \frac{\beta^2}{\omega}\right)\left(\frac{k^2}{2} + \frac{\tau_0^2}{k^2}\right)\|q_t\|_2^2 \\ &\quad + \left(1 + \frac{\beta^2}{\omega}\right)\frac{1}{k^2}\|q\|_2^2 + \omega\|u_{tt}\|_2^2. \end{aligned}$$

Lemme 4.10. Pour (u, θ, q) est une solution forte du problème $(4.1) - (4.5)$ et sous les hypotheses $(G1)$ et $(G2)$, il existe deux constantes strictement positives d_1 et d_2 telles que la fonctionnelle

$$\mathcal{L}_2(t) := E(t) + \varepsilon_3\varphi_2(t) + \varepsilon_4\chi_2(t) + \varepsilon_3\frac{\beta^2}{c(\mu+\lambda)}K(t),$$

satisfait,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2'(t) &\leq -a_1\int_\Omega |u_{tt}|^2\,dx - a_2\int_\Omega |\operatorname{div} u_t|^2\,dx - a_3\int_\Omega |\nabla u_t|^2\,dx - a_4\int_\Omega |\theta_t|^2\,dx \\ &\quad - a_5\int_\Omega |q_t|^2\,dx + d_2 g_2(t)(g\circ\nabla u_t)(t) - g(t)\int_\Omega u_{tt}.\Delta u_0\,dx \\ &\quad + \left(E_1(0) + \frac{1}{2}\int_\Omega |\Delta u_0|^2\,dx\right) + d_3 g^2(t)\int_\Omega |\nabla u_0|^2\,dx. \end{aligned} \tag{4.54}$$

Preuve En combinant (4.43), (4.44), et (4.53), il vient

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_2'(t) &\leq -\left[1-\frac{\beta^2}{c(\mu+\lambda)}\varepsilon_3\left(1+\frac{\beta^2}{\omega}\right)\frac{1}{k^2}\right]\int_\Omega |q|^2\,dx \\
&\quad -\left[1-\frac{\beta^2}{c(\mu+\lambda)}\varepsilon_3\left(1+\frac{\beta^2}{\omega}\right)\left(\frac{k^2}{2}+\frac{\tau_0^2}{k^2}\right)\right]\int_\Omega |q_t|^2\,dx \\
&\quad -g(t)\int_\Omega u_{tt}.\Delta u_0 dx-\varepsilon_3 g(t)\int_\Omega u_t\Delta u_0 dx+\frac{\varepsilon_4}{4\delta'}g^2(t)\int_\Omega |\nabla u_0|^2\,dx \\
&\quad -\left(\varepsilon_4(g_0-\delta')-\varepsilon_3-\frac{\beta^2}{c(\mu+\lambda)}\varepsilon_3\omega\right)\int_\Omega |u_{tt}|^2\,dx \\
&\quad -\left[\frac{\varepsilon_3 l}{2}-\varepsilon_4\delta'\left(\mu+2(\mu-l)^2\right)\right]\int_\Omega |\nabla u_t|^2\,dx \\
&\quad -\left(\frac{\varepsilon_3}{2}-\varepsilon_4\delta'\right)(\mu+\lambda)\int_\Omega |\operatorname{div} u_t|^2\,dx \\
&\quad -\left(\frac{\varepsilon_3\beta^2}{2(\mu+\lambda)}-\varepsilon_4\beta\delta'\right)\int_\Omega |\theta_t|^2\,dx-\left(\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon_4 c_p g(0)}{4\delta'}\right)(g'\circ\nabla u_t)(t) \\
&\quad +\varepsilon_4\left(3\delta'+\frac{1}{4\delta'}(2\mu+\lambda+\beta+1)+\frac{\varepsilon_3}{2l}\right)g_2(t)(g^p\circ\nabla u_t)(t).
\end{aligned}$$

On pose $\omega=\frac{c(\mu+\lambda)}{3\beta^2}$, il vient

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_2'(t) &\leq -\left[1-\varepsilon_3\frac{\beta^2}{c(\mu+\lambda)}\left(1+\frac{3\beta^4}{c(\mu+\lambda)}\right)\frac{1}{k^2}\right]\int_\Omega |q|^2\,dx \\
&\quad -\left[1-\varepsilon_3\frac{\beta^2}{c(\mu+\lambda)}\left(1+\frac{3\beta^4}{c(\mu+\lambda)}\right)\left(\frac{k^2}{2}+\frac{\tau_0^2}{k^2}\right)\right]\int_\Omega |q_t|^2\,dx \\
&\quad -g(t)\int_\Omega u_{tt}.\Delta u_0 dx-\varepsilon_3 g(t)\int_\Omega u_t\Delta u_0 dx+\frac{\varepsilon_4}{4\delta'}g^2(t)\int_\Omega |\nabla u_0|^2\,dx \\
&\quad -\left(\varepsilon_4(g_0-\delta')-\frac{4}{3}\varepsilon_3\right)\int_\Omega |u_{tt}|^2\,dx-\left[\frac{\varepsilon_3 l}{2}-\varepsilon_4\delta'\left(\mu+2(\mu-l)^2\right)\right]\int_\Omega |\nabla u_t|^2\,dx \\
&\quad -\left(\frac{\varepsilon_3}{2}-\varepsilon_4\delta'\right)(\mu+\lambda)\int_\Omega |\operatorname{div} u_t|^2\,dx-\left(\varepsilon_3\frac{\beta^2}{2(\mu+\lambda)}-\varepsilon_4\beta\delta'\right)\int_\Omega |\theta_t|^2\,dx \\
&\quad +\left(\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon_4 c_p g(0)}{4\delta'}\right)(g'\circ\nabla u_t)(t) \\
&\quad +\left(\varepsilon_4\left(3\delta'+\frac{1}{4\delta'}(2\mu+\lambda+\beta+1)\right)+\frac{\varepsilon_3}{2l}\right)g_2(t)(g\circ\nabla u_t)(t).
\end{aligned}$$

A ce point, on choisit δ' assez petit pour que

$$g_0 - \delta' > \frac{5}{6} g_0,$$

$$\delta' \frac{2}{l} \left(\mu + 2 (\mu - l)^2\right) < \frac{1}{2} g_0,$$

$$\frac{2 (\mu + \lambda)}{\beta} \delta' < \frac{1}{2} g_0.$$

On fixe δ' et on choisit ε_3 et ε_4 tels que

$$\frac{1}{2} g_0 \varepsilon_4 < \varepsilon_3 < \frac{5}{8} g_0 \varepsilon_4. \tag{4.55}$$

Par conséquent, on a

$$\begin{gathered}
\varepsilon_4 (g_0 - \delta') - \frac{4}{3} \varepsilon_3 > \frac{5}{6} g_0 \varepsilon_4 - \frac{4}{6} g_0 \varepsilon_4 > 0, \\
\frac{\varepsilon_3 l}{2} - \varepsilon_4 \delta' \left(\mu + 2 (\mu - l)^2\right) > g_0 \frac{l}{4} \varepsilon_4 - \frac{l}{4} g_0 \varepsilon_4 = 0, \\
\frac{\varepsilon_3}{2} - \varepsilon_4 \delta' > \frac{1}{4} g_0 \varepsilon_4 - \varepsilon_4 \frac{l}{4 \left(\mu + 2 (\mu - l)^2\right)} g_0 > \frac{1}{4} g_0 \varepsilon_4 - \frac{1}{4} g_0 \varepsilon_4 = 0, \\
\varepsilon_3 \frac{\beta^2}{2 (\mu + \lambda)} - \varepsilon_4 \beta \delta' > \varepsilon_4 \frac{g_0 \beta^2}{4 (\mu + \lambda)} - \varepsilon_4 \frac{g_0 \beta^2}{4 (\mu + \lambda)} = 0.
\end{gathered}$$

Puis, on prend ε_3 et ε_4 assez petits tels que les inégalités (4.21) et (4.55) restent vraies et en plus,

$$\begin{gathered}
1 - \varepsilon_3 \frac{\beta^2}{c (\mu + \lambda)} \left(1 + \frac{3\beta^4}{c (\mu + \lambda)}\right) \frac{1}{k^2} > 0, \\
1 - \varepsilon_3 \frac{\beta^2}{c (\mu + \lambda)} \left(1 + \frac{3\beta^4}{c (\mu + \lambda)}\right) \left(\frac{k^2}{2} + \frac{\tau_0^2}{k^2}\right) > 0, \\
\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon_4 c_p g (0)}{4\delta'} > 0.
\end{gathered}$$

Donc, il existe des constantes $a_1,\ a_2,\ a_3\ a_4,\ a_5,\ d_2,\ d_3 > 0$, telles que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_2'(t) &\leq -a_1 \int_\Omega |u_{tt}|^2\,dx - a_2 \int_\Omega |\operatorname{div} u_t|^2\,dx - a_3 \int_\Omega |\nabla u_t|^2\,dx - a_4 \int_\Omega |\theta_t|^2\,dx \\
&\quad -a_5 \int_\Omega |q_t|^2\,dx + d_2 g_2(t)\,(g \circ \nabla u_t)(t) - g(t) \int_\Omega u_{tt}.\Delta u_0 dx \\
&\quad -\varepsilon_3 g(t) \int_\Omega u_t \Delta u_0 dx + d_3 g^2(t) \int_\Omega |\nabla u_0|^2\,dx. \qquad (4.56)
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
-\varepsilon_3 g(t) \int_\Omega u_t \Delta u_0 dx &\leq \varepsilon_3 g(t) \left[\frac{1}{2}\int_\Omega |u_t|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\Delta u_0|^2\,dx\right] \\
&\leq \varepsilon_3 g(t) \left[E_1(t) + \frac{1}{2}\int_\Omega |\Delta u_0|^2\,dx\right] \\
&\leq \varepsilon_3 g(t) \left[E_1(0) + \frac{1}{2}\int_\Omega |\Delta u_0|^2\,dx\right]. \qquad (4.57)
\end{aligned}$$

En combinant (4.56) et (4.57) il vient

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_2'(t) &\leq -a_1 \int_\Omega |u_{tt}|^2\,dx - a_2 \int_\Omega |\operatorname{div} u_t|^2\,dx - a_3 \int_\Omega |\nabla u_t|^2\,dx - a_4 \int_\Omega |\theta_t|^2\,dx \\
&\quad -a_5 \int_\Omega |q_t|^2\,dx + d_2 g_2(t)\,(g \circ \nabla u_t)(t) - g(t) \int_\Omega u_{tt}.\Delta u_0 dx \\
&\quad + \left(E_1(0) + \frac{1}{2}\int_\Omega |\Delta u_0|^2\,dx\right) + d_3 g^2(t) \int_\Omega |\nabla u_0|^2\,dx,
\end{aligned}$$

Lemme 4.11. [9] Soit (u, θ, q) solution de $(4.1) - (4.5)$, et sous les hypothèses $(G1)$ et $(G2)$. Alors

$$(g \circ \nabla u)^{2p-1} \leq \left(\frac{8}{l} E(0)\right)^{2(p-1)} g_3(t)\,(g^p \circ \nabla u).$$

Preuve Analogue à la démonstration du Lemme 3.2 $[9]$.

Théorème 4.1.

On suppose que g vérifie $(G1)$ et $(G2)$. Alors, pour tout $t_0 > 0$, il existe des constantes $C > 0,\ C_1 > 0,\ C_2 > 0$ et $0 < \lambda_0 < 1$ *independentes de t et les données inetiales, telles* *que l'énergie associe à la solution du problème* $(4.1)-(4.5)$ *satisfait pour tout* $t \geq t_0$

$$E(t) \leq \left[C_1 + C_2 \int_{t_0}^{t} e^{-(1-\lambda_0)\int_{t_0}^{s}\xi(h)dh} ds\right] e^{-\lambda_0 \int_{t_0}^{t}\xi(s)ds}, \ p = 1 \tag{4.58}$$

$$E_1(t) \leq C \left(\frac{1 + \left(\int_0^t g^{1/2}(s)\,ds\right)^{2p-1} + \int_0^t g^{2-p}(s)\,ds}{\int_0^t \xi(s)\,ds}\right)^{\frac{1}{2p-1}}, \ p > 1. \tag{4.58'}$$

Preuve

Cas 1. Pour $p = 1$

En combinant (4.38) avec $p = 1$, et (4.54), et en utilisant que

$$\int_0^t g(s)\,ds \leq \int_0^\infty g(s)\,ds = \mu - l,$$

on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(t) \leq\ & -d_0 E(t) + r_5[\mu - l + 1](g \circ \nabla u)(t) + d_2[\mu - l + 1](g \circ \nabla u_t)(t) \\ & +2K_1 g(t)\left(E_2(0) + \frac{1}{2}\int_\Omega |\Delta u_0|^2\,dx\right) \\ & +\varepsilon_3 g(t) K_2\left(E_1(0) + \frac{1}{2}\int_\Omega |\Delta u_0|^2\,dx\right) \\ & +d_3 g^2(t)\int_\Omega |\nabla u_0|^2\,dx. \end{aligned} \tag{4.59}$$

pour une constante $d_0 > 0$.

En multipliant (4.59) par $\xi(t)$, on trouve

$$\begin{aligned}\xi(t)\mathcal{L}'(t) &\leq -d_0\xi(t)E(t)+r_5[\mu-l+1]\xi(t)(g\circ\nabla u)(t)\\&+d_2[\mu-l+1]\xi(t)(g\circ\nabla u_t)(t)\\&+2K_1\xi(t)g(t)\left(E_2(0)+\frac{1}{2}\int_\Omega|\Delta u_0|^2dx\right)\\&+\varepsilon_3\xi(t)g(t)K_2\left(E_1(0)+\frac{1}{2}\int_\Omega|\Delta u_0|^2dx\right)\\&+d_3\xi(t)g^2(t)\int_\Omega|\nabla u_0|^2dx,\end{aligned}$$

mais, d'après $(G2)$ on a

$$\begin{aligned}\xi(t)\int_0^t g(t-s)\|u(t)-u(s)\|_2^2ds &\leq \int_0^t\xi(t)g(t-s)\|u(t)-u(s)\|_2^2ds\\&\leq \int_0^t\xi(t-s)g(t-s)\|u(t)-u(s)\|_2^2ds\\&\leq -\int_0^t g'(t-s)\|u(t)-u(s)\|_2^2ds.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\xi(t)\mathcal{L}'(t) &\leq -d_0\xi(t)E(t)-r_5[\mu-l+1](g'\circ\nabla u)(t)-d_2[\mu-l+1](g'\circ\nabla u_t)(t)\\&+2K_1\xi(t)g(t)\left(E_2(0)+\frac{1}{2}\int_\Omega|\Delta u_0|^2dx\right)\\&+\varepsilon_3\xi(t)g(t)K_2\left(E_1(0)+\frac{1}{2}\int_\Omega|\Delta u_0|^2dx\right)\\&+d_3\xi(t)g^2(t)\int_\Omega|\nabla u_0|^2dx,\end{aligned}$$

en utilisant (4.7) , (4.8) et (4.37) , on trouve

$$\begin{aligned}
\xi(t)\mathcal{L}'(t) \leq\ & -d_0\xi(t)E(t) - 2r_5[\mu - l + 1]E_1'(t) \\
& -d_2[\mu - l + 1]\left[2E_2'(t) + 2g(t)\int_\Omega u_{tt}.\Delta u_0 dx\right] \\
& +2K_1\xi(t)g(t)\left(E_2(0) + \frac{1}{2}\int_\Omega |\Delta u_0|^2 dx\right) \\
& +\varepsilon_3\xi(t)g(t)K_2\left(E_1(0) + \frac{1}{2}\int_\Omega |\Delta u_0|^2 dx\right) \\
& +d_3\xi(t)g^2(t)\int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx,
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
& \xi(t)\mathcal{L}'(t) + 2r_5[\mu - l + 1]E_1'(t) + 2d_2[\mu - l + 1]E_2'(t) \\
\leq\ & -d_0\xi(t)E(t) \\
& +2K_1g(t)[d_2(g_1(t) + 1) + \xi(t)]\left(E_2(0) + \frac{1}{2}\int_\Omega |\Delta u_0|^2 dx\right) \\
& +\varepsilon_3\xi(t)g(t)K_2\left(E_1(0) + \frac{1}{2}\int_\Omega |\Delta u_0|^2 dx\right) \\
& +d_3\xi(t)g^2(t)\int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx. \qquad (4.60)
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
& \xi(t)\mathcal{L}'(t) + 2[\mu - l + 1](r_5E_1'(t) + d_2E_2'(t)) \\
=\ & \{\xi(t)\mathcal{L}(t) + 2[\mu - l + 1](r_5E_1(t) + d_2E_2(t))\}' - \xi'(t)\mathcal{L}(t) \\
\geq\ & [\xi(t)\mathcal{L}(t) + 2[\mu - l + 1](r_5E_1(t) + d_2E_2(t))]',
\end{aligned}$$

car $\xi'(t) \leq 0$ et $\mathcal{L}(t) \geq 0$ (puisque $\mathcal{L}(t) \sim E(t)$).

On pose

$$R(t) = \xi(t)\mathcal{L}(t) + 2[\mu - l + 1](r_5E_1(t) + d_2E_2(t)).$$

On a l'équivalence

$$R(t) \backsim E(t)$$

car

$$\begin{aligned} R(t) &\leq \alpha_2 \xi(0) E(t) + 2[\mu - l + 1] \max\{r_5, d_2\} E(t) \\ &\leq \rho_2 E(t), \ \rho_2 > 0 \end{aligned}$$

et

$$R(t) \geq \rho_1 E(t), \text{ avec } \rho_1 = 2[\mu - l + 1] \min\{r_5, d_2\}.$$

Il existe alors une constante $\lambda_1 > 0$ telle que

$$\lambda_1 \xi(t) R(t) \leq d_0 \xi(t) E(t).$$

On pose $\lambda_0 = \frac{1}{2} \min\{1, \lambda_1\}$, et on utilise que $R(t)$ est positive (car $R(t) \backsim E(t)$), donc (4.60) devient

$$\begin{aligned} R'(t) + \lambda_0 \xi(t) R(t) &\leq R'(t) + \lambda_1 \xi(t) R(t) \\ &\leq 2K_1 g(t) (d_2 (g_1(t) + 1) + \xi(t)) \left(E_2(0) + \frac{1}{2} \int_\Omega |\Delta u_0|^2 dx \right) \\ &\quad + \varepsilon_3 \xi(t) g(t) K_2 \left(E_1(0) + \frac{1}{2} \int_\Omega |\Delta u_0|^2 dx \right) \\ &\quad + d_3 \xi(t) g^2(t) \int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx. \end{aligned} \tag{4.61}$$

En utilisant que $\xi(t)$ et $g(t)$ sont décroissantes et que $g_1(t) \leq \mu - l$, on trouve pour une constante $C_0 > 0$

$$
\begin{aligned}
& 2K_1 g(t)\left[d_2\left(g_1(t)+1\right)+\xi(t)\right]\left(E_2(0)+\frac{1}{2}\int_\Omega |\Delta u_0|^2\,dx\right) \\
& +\varepsilon_3\xi(t)\,g(t)\,K_2\left(E_1(0)+\frac{1}{2}\int_\Omega |\Delta u_0|^2\,dx\right)+\frac{\varepsilon_4}{4\delta'}\xi(t)\,g^2(t)\int_\Omega |\nabla u_0|^2\,dx \\
\leq\ & 2K_1 g(t)\left(d_2(\mu-l+1)+\xi(0)\right)\left(E_2(0)+\frac{1}{2}\int_\Omega |\Delta u_0|^2\,dx\right) \\
& \varepsilon_3\xi(0)\,g(t)\,K_2\left(E_1(0)+\frac{1}{2}\int_\Omega |\Delta u_0|^2\,dx\right)+d_3\xi(0)\,g(0)\,g(t)\int_\Omega |\nabla u_0|^2\,dx \\
\leq\ & C_0 g(t)\,,\ \forall t\geq t_0.
\end{aligned}
$$

Donc (4.61) devient

$$
R'(t)+\lambda_0\xi(t)\,R(t)\leq C_0 g(t)\,,
$$

C'est-à-dire

$$
\left[e^{\lambda_0\int_{t_0}^t \xi(s)ds}R(t)\right]'\leq C_0 g(t)\,e^{\lambda_0\int_{t_0}^t \xi(s)ds}. \tag{4.62}
$$

Une integration simple de (4.62) sur (t_0,t) donne

$$
e^{\lambda_0\int_{t_0}^t \xi(s)ds}R(t)\leq R(t_0)+C_0\int_{t_0}^t g(s)\,e^{\lambda_0\int_{t_0}^s \xi(h)dh}ds
$$

C'est-à-dire

$$
R(t)\leq\left[R(t_0)+C_0\int_{t_0}^t g(s)\,e^{\lambda_0\int_{t_0}^s \xi(h)dh}ds\right]e^{-\lambda_0\int_{t_0}^t \xi(s)ds}. \tag{4.63}
$$

D'après $(G2)$ on a

$$
g'(t)+\xi(t)\,g(t)\leq 0,
$$

ce qui donne

$$
g(t)\leq g(t_0)\,e^{-\int_{t_0}^t \xi(s)ds}. \tag{4.64}
$$

En remplaçant (4.64) dans (4.63), on obtient

$$R(t) \leq \left[R(t_0) + C_0 g(t_0) \int_{t_0}^{t} e^{-(1-\lambda_0)\int_{t_0}^{s} \xi(h)dh} ds\right] e^{-\lambda_0 \int_{t_0}^{t} \xi(s)ds}.$$

Encore $R(t) \backsim E(t)$, donne pour deux constantes C_1 et $C_2 > 0$

$$E(t) \leq \left[C_1 + C_2 \int_{t_0}^{t} e^{-(1-\lambda_0)\int_{t_0}^{s} \xi(h)dh} ds\right] e^{-\lambda_0 \int_{t_0}^{t} \xi(s)ds}, \ \forall t \geq t_0.$$

Cas 2. Pour $p > 1$

En utilisant le lemme 4.11, et l'enégalité de Minkowski, on obtient

$$\begin{aligned}
E_1^{2p-1}(t) &\leq \varrho\left[\int_\Omega |u_t|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega |\operatorname{div} u|^2 dx + \|\theta\|_2^2 + \|q\|_2^2\right]^{2p-1} \\
&\quad + \varrho (g \circ \nabla u)^{2p-1} \\
&\leq \varrho\left[\int_\Omega |u_t|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega |\operatorname{div} u|^2 dx + \|\theta\|_2^2 + \|q\|_2^2\right]^{2p-1} \\
&\quad + \varrho \left(\frac{8}{l} E(0)\right)^{2(p-1)} (g_3(t)) (g^p \circ \nabla u) \\
&\leq \varrho_1 E^{2(p-1)}(0)\left[\int_\Omega |u_t|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega |\operatorname{div} u|^2 dx + \|\theta\|_2^2 + \|q\|_2^2\right] \\
&\quad + \varrho_1 E^{2(p-1)}(0) (g_3(t)) (g^p \circ \nabla u) \qquad (4.65)
\end{aligned}$$

où $g_3(t) = \left(\int_0^t g(s)\, ds\right)^{2p-2}$,

donc

$$\begin{aligned}
-\varrho_1 E^{2(p-1)}(0)&\left[\int_\Omega |u_t|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega |\operatorname{div} u|^2 dx + \|\theta\|_2^2 + \|q\|_2^2\right] \\
&\leq -E_1^{2p-1}(t) + \varrho_1 E^{2(p-1)}(0)\, g_3(t) (g^p \circ \nabla u)(t) \qquad (4.66)
\end{aligned}$$

En multipliant (4.38) par $E^{2(p-1)}(0)$, puis en remplaçant (4.66) dans (4.38), on conclut pour tout $t \geq t_0$ que

$$\begin{aligned}
& E^{2(p-1)}(0)\,\mathcal{L}_1'(t) \\
\leq\ & -\frac{c_0}{\varrho_1}E_1^{2p-1}(t)+c_0E^{2(p-1)}(0)\,g_3(t)\,(g^p\circ\nabla u)(t) \\
& +r_5E^{2(p-1)}(0)\,g_2(t)\,(g^p\circ\nabla u)(t)+K_1E^{2(p-1)}(0)\,g(t)\left(E_2(0)+\frac{1}{2}\int_\Omega|\Delta u_0|^2\,dx\right)
\end{aligned}$$

Ce qui implique pour une constante $\varrho_2>0$ que

$$\begin{aligned}
& E_1^{2p-1}(t)\leq-\frac{\varrho_1}{c_0}E^{2(p-1)}(0)\,\mathcal{L}_1'(t)+\varrho_2E^{2(p-1)}(0)\,(g_3(t)+g_2(t))\,(g^p\circ\nabla u)(t) \\
& +\varrho_1K_1E^{2(p-1)}(0)\,g(t)\left(E_2(0)+\frac{1}{2}\int_\Omega|\Delta u_0|^2\,dx\right)
\end{aligned}\tag{4.67}$$

En multipliant (4.67) par $\xi(t)$, et on utilise que $\xi(t)\,(g^p\circ\nabla u)\leq-g'\circ\nabla u$, on trouve

$$\begin{aligned}
\xi(t)\quad & E_1^{2p-1}(t)\leq-\frac{\varrho_1}{c_0}E^{2(p-1)}(0)\,\xi(t)\,\mathcal{L}_1'(t)-\varrho_2E^{2(p-1)}(0)\,(g_3(t)+g_2(t))\,(g'\circ\nabla u)(t) \\
& +\varrho_1K_1E^{2(p-1)}(0)\left(E_2(0)+\frac{1}{2}\int_\Omega|\Delta u_0|^2\,dx\right)\xi(t)\,g(t)
\end{aligned}\tag{4.68}$$

E_1^{2p-1} est décroissante, alors on trouve pour tout $t\geq t_0$

$$E_1^{2p-1}(t)\int_0^t\xi(s)\,ds\leq\int_0^{t_0}\xi(s)\,E_1^{2p-1}(s)\,ds+\int_{t_0}^t\xi(s)\,E_1^{2p-1}(s)\,ds,\tag{4.69}$$

en intégrant (4.68) sur (t_0,t) et en utilisant (4.69), il vient

$$\begin{aligned}
E_1^{2p-1}(t)\int_0^t\xi(s)\,ds\ \leq\ & \int_0^{t_0}\xi(s)\,E_1^{2p-1}(s)\,ds-\frac{\varrho_1}{c_0}E^{2(p-1)}(0)\int_{t_0}^t\xi(s)\,\mathcal{L}_1'(s)\,ds \\
& -\varrho_2E^{2(p-1)}(0)\int_{t_0}^t(g_3(s)+g_2(s))\,(g'\circ\nabla u)(s)\,ds \\
& +\varrho_1K_1E^{2(p-1)}(0)\left(E_2(0)+\frac{1}{2}\int_\Omega|\Delta u_0|^2\,dx\right)\int_{t_0}^t\xi(s)\,g(s)\,ds
\end{aligned}$$

En intégrant par parties, et en utilisant (4.7), $\mathcal{L}_1(t)\leq\alpha_3E_1(t)$, et que ξ et E_1^{2p-1}

sont décroissantes, on obtient

$$\begin{aligned}
& E_1^{2p-1}(t)\int_0^t \xi(s)\,ds \\
\leq\ & t_0\xi(0)\,E_1^{2p-1}(0) \\
& -\frac{\varrho_1}{c_0}E^{2(p-1)}(0)\left[\left(\xi(t)\,\mathcal{L}_1(t)-\xi(t_0)\,\mathcal{L}_1(t_0)\right)-\int_{t_0}^t \xi'(s)\,\mathcal{L}_1(s)\,ds\right] \\
& -2\varrho_2E^{2(p-1)}(0)\int_{t_0}^t \left(g_3(s)+g_2(s)\right)E_1'(s)\,(s)\,ds \\
& +\varrho_1K_1E^{2(p-1)}(0)\left(E_2(0)+\frac{1}{2}\int_\Omega |\Delta u_0|^2\,dx\right)\int_{t_0}^t \xi(s)\,g(s)\,ds
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
& E_1^{2p-1}(t)\int_0^t \xi(s)\,ds \\
\leq\ & t_0\xi(0)\,E_1^{2p-1}(0) \\
& +\frac{\varrho_1}{c_0}\alpha_3E^{2(p-1)}(0)\,\xi(t_0)\,E_1(t_0) \\
& -2\varrho_2E^{2(p-1)}(0)\left[\left(g_3(t)+g_2(t)\right)E_1(t)-\left(g_3(t_0)+g_2(t_0)\right)E_1(t_0)\right] \\
& +2\varrho_2E^{2(p-1)}(0)\int_{t_0}^t \left(g_3'(s)+g_2'(s)\right)E_1(s)\,ds \\
& +\varrho_1K_1E^{2(p-1)}(0)\left(E_2(0)+\frac{1}{2}\int_\Omega |\Delta u_0|^2\,dx\right)\xi(t_0)\int_0^\infty g(s)\,ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\leq\ & t_0\xi(0)\,E_1^{2p-1}(0) \\
& +\frac{\varrho_1}{c_0}\alpha_3E^{2(p-1)}(0)\,\xi(t_0)\,E_1(t_0)+2\varrho_2E^{2(p-1)}(0)\,E_1(t_0)\left(g_3(t)+g_2(t)\right) \\
& +\varrho_1K_1E^{2(p-1)}(0)\left(E_2(0)+\frac{1}{2}\int_\Omega |\Delta u_0|^2\,dx\right)\xi(t_0)\int_0^\infty g(s)\,ds \\
\leq\ & C_1E_1^{2p-2}(0)\left(E_1(0)+E_2(0)+\frac{1}{2}\int_\Omega |\Delta u_0|^2\,dx\right)\left(1+g_3(t)+g_2(t)\right)
\end{aligned}$$

pour une constante $C_1>0$.

d'ou

$$E_1^{2p-1}(t) \leq C_1 E_1^{2(p-1)}(0)\left(E_1(0)+E_2(0)+\frac{1}{2}\int_\Omega |\Delta u_0|^2\,dx\right)\frac{1+g_3(t)+g_2(t)}{\int_0^t \xi(s)\,ds}$$

On pose $C = E_1^{\frac{2(p-1)}{2p-1}}(0)\left(E_1(0)+E_2(0)+\frac{1}{2}\int_\Omega |\Delta u_0|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2p-1}}$, on trouve $(4.58')$.

Corollaire 4.1

1. Si $P = 1$ et $\xi(t) = C$

$$\begin{aligned} E(t) &\leq \frac{C_1 + C_2\int_{t_0}^t e^{-(1-\lambda_0)C(s-t_0)}ds}{e^{\lambda_0 C(t-t_0)}} \\ &\leq \frac{C_1 + C_2 e^{C(1-\lambda_0)t_0}\left[\frac{1}{C(1-\lambda_0)t_0}e^{-C(1-\lambda_0)t_0} - \frac{1}{C(1-\lambda_0)t}e^{-C(1-\lambda_0)t}\right]}{e^{\lambda_0 C(t-t_0)}} \\ &\leq \frac{C_1 + C_2 e^{C(1-\lambda_0)t_0}\frac{1}{C(1-\lambda_0)t_0}e^{-C(1-\lambda_0)t_0}}{e^{\lambda_0 C(t-t_0)}} = \tilde{C}e^{-\lambda_0 Ct},\ \forall t \geq t_0. \end{aligned}$$

   i.e. une décroissance exponentielle.

2. Si $1 < P < \frac{3}{2}$ et $\xi(t) = C_0 > 0$

$$\begin{aligned} E_1^{2p-1}(t) &\leq C\left(\frac{1+\left(\int_0^t g^{1/2}(s)\,ds\right)^{2p-1} + \int_0^t g^{2-p}(s)\,ds}{tC_0}\right)^{\frac{1}{2p-1}} \\ &\leq C' t^{\frac{-1}{2p-1}}. \end{aligned}$$

Conclusion

1 Dans ce travail, on remarque que dans le problème de thermoelasticité avec deuxème son, perturbé avec un terme amortissant ou avec un terme viscoélastique (g décroit exponenciellement), on trouve un résultat de décroissance exponentielle.

Une question qui peut être posée est : qu'est ce qu'on peut obtenir lorsque nous n'ajoutons aucun terme et sans conditions sur la rotation ?

2 Quel sera le taux de décroissance si on ajoute un terme frictionnaire nonlineaire dans le premier problème ?

Bibliographie

[1] R.A. Adams and J.J.F. Fournier, Sobolev spaces, Academic Press, 2003.

[2] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle Théorie et Application, Dunod, Paris, 1999.

[3] H. Brezis, Opérateurs maximaux montones, North Holland puplishing company, London, 1973.

[4] M.S. Birman , M.Z. Solomyak, Spectral Theory of Self-Adjoint Operators in Hilbert Space, 1987.

[5] C. Cattaneo, Sulla conduzione del calore, Atti Sem. Math. Fis Univ. Modena 3 (1948), 83-101.

[6] B.D. Coleman, M. Fabrizio, and D.R. Owen, On the thermodynamics of second sound in dielectric crystals, Arch. Rational Mech. Anal. 80 (1982), 135—158.

[7] B.D. Coleman, W.J. Hrusa, and D. Owen, Stability of equilibrium for a nonlinear system describing heat propagation by second sound in solids, Arch. Rational Mech. Anal . 94 (1986), 267-289.

[8] H.D. Fernández Sare and R. Racke, On the stability of damped Timoshenko systems : Cattaneo versus Fourier' s law, Arch. Rational Mech. Anal. 194 # 1 (2009), 221—251.

[9] A. Guesmia and S. A. Messaoudi, On the stabilization of Timoshenko systems with memory and different speeds of wave propagation Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2012 (2012), No. 193, pp. 1–45.

[10] T. Irmscher and R. Racke, Sharp decay rates in parabolic and hyperbolic thermoelasticity, IMA J. Appl. Math. 71 no. 3 (2006), 459—478 6.

[11] H. Li and K. Sxton, Asymptotic behavior of solutions with nonlinear damping, Quarterly of Applied Math. 61 # 2 (2003), 295-313.

[12] S.A.Messaoudi, Formation of Singularities in Heat Propagation guided by Second Sound, J. Differential equations 130 (1996) 92-99.

[13] S.A. Messaoudi, On the existence and nonexistence of solutions of a nonlinear hyperbolic system describing heat propagation by second sound, Applicable Analysis 73 (1999) 485-496.

[14] S.A. Messaoudi, Decay of solutions of a nonlinear hyperbolic system describing heat propagation by second sound, Applicable Analysis 1 (2002), 201-210.

[15] S.A. Messaoudi, Local Existence and blow up in thermoelasticity with second sound, Comm. Partial Diff. Eqns. 26 # 8 (2002), 1681-1693.

[16] S.A. Messaoudi, Asymptotic stability of solutions of a systemfor heat propagation with second sound, J. Concrete Appl. Math. Vol. 2 # 3 (2004), 249-256.6

[17] S.A. Messaoudi and B. Said-Houari, Blow up of solutions with positive energy in nonlinear thermoelasticity with second sound, J. Appl. Math. 2004 # 3 (2004), 201-211.

[18] S.A. Messaoudi and A. Al Shehri, Gradient catastrophe in heat propagation with second sound, Mathematical models and methods for real world systems, Pure and Applied Mathematics 272, Chapman & Hall/CRC (2005), 273-282.

[19] S.A. Messaoudi and B. Said-Houari, Exponential Stability in one-dimensional nonlinear thermoelasticity with second sound, Math. Meth. Appl. Sci. 28 (2005), 205-232.

[20] S.A. Messaoudi and A. Al-Juhani, Breakdown of solutions of a system describing heat propagation with second sound, Arab J. Math. Sci. Vol. 12 # 1 (2006),31-42

[21] Messaoudi S., On the control of solutions of a viscoelastic equation, Journal of the Franklin Institute 334 (2007), 765-776.

[22] Messaoudi S.A. General decay of solutions of a viscoelastic equation, JMAA 341(2008), 1457-1467

[23] S.A. Messaoudi, M. Pokojovy and B. Said-Houari, Nonlinear Damped Timoshenko systems with second sound Global existence and exponential stability, Math. Meth. Appl. Sci. 32 (2009), 505-534

[24] Muñoz Rivera J.E. and R. Racke R., Mildly dissipative nonlinear Timoshenko systems-global existence and exponential stability, Journal ofMathematical Analysis and Applications 276 (2002), 248-278.

[25] Muñoz Rivera J.E. and R. Racke R., Global stability for damped Timoshenko systems, Discrete Contin. Dyn. Syst. 9 no. 6 (2003), 1625—1639.

[26] Y. Qin, Z. Ma, X. Yang, Exponential stability for nonlinear thermoelastic equations with second sound, Nonlinear Analysis : Real World Applications Vol. 11 # 4 (2010), 2502-25137

[27] R. Racke, Thermoelasticity with second sound-exponential stability in linear and nonlinear 1-d., Math. Meth. Appl. Sci. 25 (2002), 409-441.

[28] R. Racke, Asymptotic behavior of solutions in linear 2- or 3-d thermoelasticity with second sound, Quart. Appl. Math. 61 no. 2 (2003), 315—328.

[29] R. Racke and Y. Wang, Nonlinear well-posedness and rates of decay in thermoelasticity with second sound, J. Hyperbolic Differ. Equ. 5 no. 1 (2008),25—43.

[30] R. Racke and Y. Wang, Asymptotic behavior of discontinuous solutions in 3-D thermoelasticity with second sound, Quart. Appl. Math. 66 no. 4 (2008),707—724.

[31] K. Saxton, R. Saxton, and W. Kosinsky, On the second sound at the critical temperature, Quarterly Appl. Math. 57 # 4 (1999), 723-740

[32] K. Saxton and R. Saxton, Nonlinearity and memory effects in low temperature heat conduction, Arch. Rational Mech. Anal. 52 (2000), 127-142.

[33] M.A. Tarabek, On the existence of smooth solutions in one-dimensional thermoelasticity with second sound, Quart. Appl. Math. 50 (1992), 727-742.

ملخص : في هذا العمل، نعتبر نظام مرونة حرارية معطى بواسطة الموجة الثانية. هدفنا هو دراسة حالة إضافة حد الاحتكاك والحصول على نتيجة الوجود والوحدانية باستخدام نظرية المؤثرات الرتيبة وكذلك دراسة تناقص الحل. كما ندرس أيضا حالة كون التبديد يتم بواسطة حد اللزوجة في حالة التناقص العام والأسي لدالة الإسترخاء.

الكلمات المفتاحية : المرونة الحرارية، الذاكرة، الموجة الثانية، الوجود والوحدانية، التناقص الأسي، التناقص العام، دالة الاسترخاء، الاحتكاك، نظرية المؤثرات الرتيبة.

RÉSUMÉ :

Dans ce travail, on considère un système thermoélastique linéaire avec deuxième son. Notre objet d'étude est de traiter deux cas du système thermoélastique, avec deuxième son. Le premier perturbé avec un terme amortissant, on essayera d'obtenir des résultats d'existence et de comportement asymptotique. Le deuxième étant avec un terme viscoélastique. On essayera d'obtenir des résultats d'un comportement asymptotique dans le cas où la fonction de relaxation décroit d'une manière générale.

MOTS CLÉS : thermo-élasticité, deuxième son, existence et unicité, théorie des opérateurs monotones.

ABSTRACT

In this work, we consider thermoelasticity system with second sound.we study the existence and uniqueness of solutions to the problem of stabilization of the system of thermo-elasticity with second sound, using the theory of monotone operators.

KEYWORDS : Thermo-elastic system, second sound, existence and uniqueness, exponential decay, theory of monotone operators.