REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Kasdi Merbah - OUARGLA
Faculté des mathématiques et
des sciences de la matière

N° d'ordre :
N° de série :

Département des mathématiques

MEMOIRE

Présenté par :

AIDI MOHAMED

Pour l'obtention du diplôme de Magister en mathématiques

Option : Mathématiques Appliquées

THEME

Etude de quelques problèmes aux limites gouvernés par le système de Lamé

Soutenu publiquement le : 30/01/2014

Devant le jury composé de :

Mr.	D. A. Chacha	Prof. à l'université de KASDI MERBAH- Ouargla	Président.
Mme.	H. Hammouche	M. C. à l'université de GHARDAIA- Ghardaïa	Examinateur
Mr.	K. Guerbati	M. C. à l'université de GHARDAIA- Ghardaïa	Rapporteur
Mr.	M. Meflah	M. C. à l'université de KASDI MERBAH- Ouargla	Co-rapporteur

Dédicaces

A titre posthume pour mon père

A ma chère mère

A mon épouse, et enfants, maria, Maroua, Safaa, Nacir et Rafah

A mes frères, Hocine, Karim, Ahmed et Khaled

A mes sœurs, et belles sœurs

A mes beaux frères et leur sœurs

Je dédie mon mémoire de magister de mathématiques avec toute ma gratitude, ma reconnaissance et mon amour, pour tous aux qui m'ont aider, et que sans soutien et leur patience ce travail ne pourrait jamais voir le jour.

Aidi Med

Remerciement

Je tiens en premier lieu à exprimer mes plus vifs remerciements à Mr. **Guerbati Kaddour,** mon Directeur de thèse pour l'intéressant sujet qu'il m'a proposé, pour son aide ; sa patience, ses conseils, ses encouragements, sa grande disponibilité et son ouverture d'esprit qui m'ont aidé à mener à bien ce travail.

Et Mr. **Meflah Mabrouk,** Je lui suis également reconnaissant pour la confiance qu'il ma accordée. Il m'est impossible de lui exprimer toute ma gratitude en seulement quelques lignes.

J'adresse mes plus vifs remerciements aux Mme. **Hammouche Hadda** pour avoir accepté d'examiner ce travail et Prof. **Djamel Ahmed Chacha** qui me fait l'honneur d'être président de mon jury.

Je voudrais également remercier tous les membres du département de mathématique et tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin pour achever ce travail.

Que tous les enseignants qui ont contribué à ma formation reçoivent ma gratitude et en particulier ceux du département des mathématique et informatique à l'université de Kasdi Merbah de Ouargla.

Je tiens à remercier aussi tous mes amis et mes collègues et surtout **Mezabia Mohamed El Hadi.**

Mes remerciement vont également à tous mes camarades et à tous ceux qui m'ont aidé ou soutenu au cours de ce travail, en particulier Mr. **F. Messelmi.**

Ainsi qu'au Lycée Hobby Abdelmalek de N'goussa Ouargla surtout **Choaib Mohamed, Mazouni Walid, Faradj Seddik, Lamini Med Seddik....**

A la fin je ne pouvait clore cette partie des remerciements sans remercier de toute mon énergie mon professeur de collège **Chayeb Abdelkrim.**

Table des matières

Notations et Préliminaires

Dans toute la suite de ce mémoire, nous utiliserons les conventions suivantes :

Si Ω désigne un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$, on note par

$\overline{\Omega}$ l'adhérence de Ω,

Γ la frontière de l'ouvert Ω supposée régulière,

$\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables avec support compact contenu dans Ω, muni de la topologie de limite inductive de L. Schwartz [20],

$\mathcal{D}'(\Omega)$ le dual de $\mathcal{D}(\Omega)$: l'espace des distributions sur Ω,

$C^1(\overline{\Omega})$ l'espace des fonctions réelles continûment différentiables sur $\overline{\Omega}$,

$L^p(\Omega)$ l'espace des fonctions puissance p-ième sommable sur Ω pour la mesure de Lebesgue $dx = dx_1 dx_2 ... dx_n$,

- Si $1 \leq p < \infty$, $\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\mathbf{\Omega}} |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$,
- Si $p = \infty$, $\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \underset{x\in\Omega}{\sup ess} |f(x)|$,

$L^\infty(\Omega)$ l'espace des(classes) fonctions essentiellement bornées,

$H^m(\Omega)$ l'espace de Sobolev d'ordre m (défini ici pour $m \in N$; par convention d'écriture $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$).

$H_0^m(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$

Si X est un espace de Hilbert réel, on utilise les notations suivantes :

$(.,.)_X$ le produit scalaire de X,

$\|.\|_X$ la norme de X,

D^α la dérivée d'ordre α au sens des distributions,

$x_n \longrightarrow x$ la convergence forte de la suite (x_n) vers l'élément x dans X,

$x_n \rightharpoonup x$ la convergence faible de la suite (x_n) vers l'élément x dans X.

Si de plus $[0,T]$ est un intervalle de temps, $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq +\infty$, on note par

$\mathbf{\Sigma}_T = \Gamma \times]0,T[$	la frontière du cylindre ouvert $\mathbf{Q}_T = \Omega \times]0,T[$ supposée régulière,
$\mathcal{C}(0,T;X)$	l'espace des fonctions continues sur $[0,T]$ à valeurs dans X,
$\mathcal{D}(]0,T[,X)$	l'espace des fonctions de $]0,T[\longrightarrow X$ et à support compact dans $]0,T[$,
$\mathcal{D}'(]0,T[,X)$	l'espace des distributions,
$\mathbf{L}^p(0,T;X)$	l'espace de Lebesgue,
$\Vert\cdot\Vert_{\mathbf{L}^p(0,T;X)}$	la norme de $\mathbf{L}^p(0,T;X)$,
$\mathbf{W}^{k,p}(0,T;X)$	l'espace de Sobolev,
$\Vert\cdot\Vert_{\mathbf{W}^{k,\ p}(0,T;X)}$	la norme de $\mathbf{W}^{k,p}(0,T;X)$.

Pour une fonction $\mathbf{u}$, on note par

$\mathbf{u}'$, $\mathbf{u}''$	les dérivations première et seconde de u par rapport au temps,
Δ	l'opérateur de Laplace,
∇	l'opérateur de gradient,
L	l'opérateur de Lamé,
$div\mathbf{u}$	la divergence de $\mathbf{u}$,
$rot\ \mathbf{u}$	le rotationnel d'un champ de vecteurs $\mathbf{u}$,
$\overline{\mathbf{u}} = \frac{1}{T}\int_0^T \mathbf{u}(t)\,dt$	la valeur moyenne d'une fonction $\mathbf{u}$ périodique, de période T.

Autres notations

lim inf	la limite inférieure,
lim sup	la limite supérieure,
c, C, K, k_i	des constantes génériques strictement positives,
$p.p.$	presque partout.

Introduction

Ce travail concerne essentiellement l'étude de quelques problèmes aux limites gouvernès par le système de Lamé, de type hyperbolique non-linéaire, qui modélisent les petites vibrations dans un domaine borné Ω et à frontière régulière Γ de $\mathbb{R}^n$. A titre d'exemples, on peut citer les problèmes de propagation d'ondes de vibrations qui se propagent dans un milieu élastique isotrope, viscoélastique, liquide incompressible, électromagnétique...etc.), avec :

- une condition au limite de Dirichlet : $\mathbf{u} = 0$ sur Γ,
- et les données de Cauchy :

$$\text{déplacement initial } \mathbf{u}(0;x) = \mathbf{u}_0 \text{ et la vitesse initiale } \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(0;x) = \mathbf{u}_1.$$

Ajouté à ce là, la présence d'une force volumique de densité $\mathbf{f} = \mathbf{f}\,(x,t)$, et d'une perturbation $h(\mathbf{u}, \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t})$ suivant chaque cas comme suit :

$$h\,(\mathbf{u}) = \overbrace{|\mathbf{u}|^{\rho}\,\mathbf{u},\ \rho > 0}^{terme\ non\ linéaire}\ \ où\ \overbrace{-\int_{\mathbf{0}}^{t} g\,(t-s)\,\Delta\mathbf{u}\,(.,s)\,ds}^{terme\ viscoélastique},$$

$$h\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right) = \underbrace{\overbrace{\delta\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t},\ \delta > 0}^{linéaire}\quad où\ \overbrace{\left|\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right|^{\rho}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t},\quad \rho > 0}^{non\ linéaire}}_{terme\ frictionnaire}.$$

En pratique, la partie non-linéaire définie les changements des perturbations du phénomène.

Les techniques utilisées sont celles de la méthode de compacité et de la méthode de monotonie. Ce travail se compose de **quatre** chapitres.

Dans le premier chapitre, on rappelle quelques résultats classiques d'analyse fonctionnelle utilisés dans les **trois** autres chapitres.

L'étude de l'évolution au cours du temps des petits déplacements, perturbés avec un terme frictionnaire linéaire à partir de l'état naturel d'un corps solide homogène et isotrope, soumis à une densité volumique de force $\mathbf{f}$, constitue l'objet de la première partie du deuxième chapitre. Cette théorie est bâtie autour de la loi de Hooke au moyen des coefficients de Lamé, elle permet particulièrement de généraliser le système de Lamé classique à la vibration (voir J.M. THOMAS & P.A. RAVIART [8]), qui s'écrit

$$\varrho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \delta \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - L\mathbf{u} = \mathbf{f},$$

où

$\varrho : \Omega \to \mathbb{R}^+$ désigne la densité de masse (on suppose que $\varrho(x) = 1$);
L désigne le système de Lamé défini par $\mu\boldsymbol{\Delta} + (\lambda + \mu)\nabla\mathbf{div}$; λ et μ sont les constantes de Lamé (avec μ >0 et $\lambda + \mu > 0.$).
Notre problème consiste à étudier un exemple assez proche de l'équation des ondes donné par le système de Lamé, perturbé avec un terme frictionnaire linéaire. On démontre, en utilisant la méthode de Fædo-Galerkin, un théorème d'existence et d'unicité.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, par la méthode de compacité on essayera de démontrér un théorème d'existence et d'unicité, pour une équation hyperbolique non linéaire gouvernée par le système de Lamé. Notre problème consiste à étudier un modéle analogue à l'équation aux dérivées partielles, intervenant en mécanique quantique relativiste, perturbé avec un terme frictionnaire linéaire.

Dans le chapitre tois on s'intéresse, dans un premier temps à un modèle classique analogue à l'équation aux dérivées partielles, intervenant en mécanique quantique relativiste, perturbé par un facteur de viscoélasticité suivante :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - L\mathbf{u} + \int_{\mathbf{0}}^{t} \mathbf{g}\,(t-s)\,\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}\,(.,s)\,ds + |\mathbf{u}|^{\rho}\,\mathbf{u} = \mathbf{f},$$

avec g la fonction de relaxation. On établit alors facilement par la méthode de compacité un théorème d'existence et d'unicité.

Dans un second temps, on remplace le facteur non linéaire $|\mathbf{u}|^{\rho}\,\mathbf{u}$ du problème précédent par le facteur non linéaire $\left|\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right|^{\rho}\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$. Ce dernier traduit le modèle viscoélastique, perturbé avec un terme frictionnaire non linéaire

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - L\mathbf{u} + \int_{\mathbf{0}}^{t} \mathbf{g}\,(t-s)\,\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}\,(.,s)\,ds + \left|\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right|^{\rho}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{f}.$$

Pour cela, on introduit l'identité vectorielle suivante $\mathbf{rot\ rot\ u} = -\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u} + \nabla(div\mathbf{u})$. Dans les conditions $\mathbf{rot\ u} = 0$, on établit donc un théorème d'existence et d'unicité par la méthode de compacité.

Dans le dernier chapitre, on essayera de revoir le problème de la deuxième partie du chapitre précèdent sous un autre angle, à savoir sans le facteur de viscoélastique, mais sous des données initiales périodiques. Notre travail se focalisera essentiellement sur l'existence de la solution $T-$périodique- cas hyperbolique non linéaire gouverné par le système de Lamé. Ce problème a était déjà étudié par J.L Lions [6] par la méthode de régularisation elliptique avec l'opérateur de Laplace $\boldsymbol{\Delta}$, et que M. MEFLAH [14] a étudié par la même méthode avec l'opérateur de Lamé L. Cette dernière analyse fera l'objet de notre étude sous la méthode de Faedo-Galerkin. Pour résoudre ce problème, nous utilisons l'idée de G. PRODI, puis nous étudierons les deux problèmes aux limites suivants :

- problème périodique à valeur moyenne nulle,
- problème statique.

Lorsque l'opérateur non linéaire a des propriétés de monotonie dans le premier problème, on démontre, en utilisant la méthode de monotonie, pour des coefficients de Lamé particuliers, un théorème d'existence et d'unicité. Pour le deuxième problème, les résultats classiques sur l'existence et la régularité des solutions des systèmes elliptiques de Lamé permettent de conclure. Donc la somme des deux solutions des problèmes précédants, est une solution $T-$périodique.

On trouve que les problèmes généralisent qui est proposé par J.L Lions [6], on remplace l'opérateur de Laplace $\boldsymbol{\Delta}$ par l'opérateur de Lamé L, perturbé avec un terme frictionnaire linéaire ou avec un terme viscoélastique.

Chapitre 1

Rappels d'analyse fonctionnelle

Extraits de H. Brézis [2] *et J. – L. Lions – Magenes* [7]

Résumé

L'étude des équations aux dérivées partielles nécessite l'utilisation d'espaces de Sobolev d'ordre m. Ce sont donc ces espaces et leurs propriétés que l'on va rappeler dans ce premier chapitre, ainsi que d'autres résultats d'analyse fonctionnelle qui concerne la topologie faible, les opérateurs compacts ainsi que les résultats de compacité, qui seront d'une grande utilité dans notre travail.

1.1 Généralités et quelques notions de base

1.1.1 Topologie faible

Définition 1.1.1 *On note E un espace normé, E' son dual topologique. On appelle topologie faible sur E et que l'on note $\sigma(E,E')$, la topologie la moins fine rendant continues toutes les formes linéaires $f \in E'$. On peut recenser les ouverts qui doivent appartenir à la topologie faible de la manière suivante : Si $f \in E'$ et $U \subset \mathbb{R}$ un ouvert de $\mathbb{R}$. $f^{-1}(U)$ est nécessairement un ouvert de $\sigma(E,E')$. Mais comme les intervalles ouverts forment une base de la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$, on voit que ceci revient à dire que pour tout intervalle I et tout $f \in E'$, $f^{-1}(I)$ est dans $\sigma(E,E')$.*

On vient de montrer la proposition suivante

Proposition 1.1.1 *La topologie $\sigma(E,E')$ est la moins fine contenant tous les ensembles $f^{-1}(I)$ pour tout $f \in E'$ et tout intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. Donnons une base de voisinage commode pour $\sigma(E,E')$.*

Corollaire 1.1.1 *Les ouverts de la forme $\bigcap\limits_{i=1}^{k} f_i^{-1}(I_i)$, où $k \in \mathbb{N}$, $f_i \in E'$ et I_i sont des intervalles ouverts quelconques de $\mathbb{R}$, forment une base de voisinage de $\sigma(E,E')$.*
Les ouverts de la forme :
$U = \bigcap\limits_{i=1}^{k} f_i^{-1}(]f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon[)$, $k \in \mathbb{N}$, $f_i \in E'$, $\varepsilon > 0$,
forment une base de voisinage de $x_0 \in E$

Définition 1.1.2 *Si $x_n \longrightarrow x$ dans $\sigma(E,E')$, on notera $x_n \rightharpoonup x$ et on dira que x_n converge faiblement vers x dans E.*

Proposition 1.1.2 *Soit E un espace de Banach et (x_n) une suite d'éléments de E ; alors :*

$$x_n \rightharpoonup x \Leftrightarrow f(x_n) \to f(x), \forall f \in E'.$$

Preuve. (voir H. Brezis [2]). ■

1.1.2 Topologie *-faible

Soit E un espace de Banach, E' son dual (muni de la norme $\|f\|_{E'} = \sup\limits_{x\in E,\ \|x\|\leq 1} |\langle f,\ x\rangle|$), E'' son bidual topologique muni de la norme :

$$\|\xi\|_{E''} = \sup_{f\in E',\ \|f\|_{E'}\leq 1} |\xi\,(f)|\,.$$

On a une injection canonique $J : E \to E''$. En effet tout élément $x \in E$ définit un élément $J_x \in E''$ par :

$$J_x(f) = f(x),$$

J_x est bien une forme linéaire continue sur E' puisque :

$$|J_x(f)| = |f(x)| \leqslant \|x\|_E \, \|f\|_{E'}\,.$$

En fait $\|J_x\|_{E''} = \|x\|_E$ car :

$$\|J_x(f)\|_{E''} = \sup_{f\in E',\ \|f\|_{E'}\leq 1} |J_x\,(f)| = \sup |f\,(x)| = \|x\|_E\,.$$

On a donc $J\,(E\,)\subset E''$. Cela va nous permettre de définir une nouvelle topologie sur E'.

Définition 1.1.3 *La topologie $*-$ faible notée $*-\ \sigma(E, E')$ est la topologie la mois fine rendant continues les formes linéaires $f \mapsto f\,(x)$, pour tout $x \in E$. On a la base de voisinages de $f_0 \in E'$ pour la topologie $*-$faible.*

$$U = \{f \in E',\ \ |\langle\, f - f_0,\ x_i\rangle\,| < \epsilon,\ i = 1, ..., n,\ x_i \in E,\ n \in \mathbb{N}\,\}\,.$$

Proposition 1.1.3 *Soit E un espace de Banach ; si (f_n) est une suite de E', alors f_n converge vers f pour la topologie $*-$ faible si et seulement si $f_n\,(x) \longrightarrow f\,(x)$, pour tout $x \in E$.*

1.1.3 Espaces réflexifs, espaces séparables

Soit E un espace de Banach et $J : E \longrightarrow E''$ l'injection canonique de E dans E'', définie par $J_x(f) = f(x)$ pour tout $x \in E$, $f \in E'$.

Définition 1.1.4 *L'espace E est dit réflexif, si $J(E) = E''$.*

On a le résultat :

Théorème 1.1.1 *Soit E un espace de Banach réflexif; alors toute suite bornée dans E admet au moins une sous-suite faiblement convergente.*

Preuve. Voir H. Brezis[2](Théorème III.27, page 50). ∎

Définition 1.1.5 *Un espace métrique séparable est un espace métrique qui contient un sous ensemble dense et dénombrable.*

On donne le résultat

Théorème 1.1.2 *Soit E un espace de Banach séparable. Alors toute suite bornée $(f_n)_n$ dans E' admet au moins une sous-suite $*-$faiblement convergente.*

Preuve. Voir H. Brezis[2] (Corollaire III.26, page 50). ∎

1.2 Opérateurs compacts sur les espaces de Hilbert

Définition 1.2.1 *Soit H un espace de Hilbert, un opérateur linéaire continue T de H dans H est dit compact s'il transforme tout ensemble borné en un ensemble relativement compact.*

Proposition 1.2.1 *Un opérateur linéaire et compact si et seulement s'il transforme toute suite faiblement convergente en une suite admettant au moins une sous suite fortement convergente.*

Remarque 1.2.1 *Le résultat de la proposition 1.2.1 peut remplacer la définition précédente.*

Théorème 1.2.1 *On suppose que H est un espace de Hilbert séparable. Soit T un opérateur autoadjoint compact. Alors H admet une base Hilbertienne formée de vecteurs propres de T.*

Preuve. Voir H. Brezis[2] (Théorème VI.11, page 97). ■

Proposition 1.2.2 *Tout opérateur symétrique T défini sur un espace de Hilbert H, à valeurs dans ce même espace H est un opérateur borné et autoadjoint.*

Preuve. Voir K. Yosida[24] (Proposition VIII.3.2, page). ■

1.3 Les espaces de Sobolev.

1.3.1 L'espace de Sobolev d'ordre entier

Définition 1.3.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et m un entier naturel.*

On appelle espace de Sobolev d'ordre m et on note $\mathbf{H}^m(\Omega)$. L'ensemble :

$$\mathbf{H}^m(\Omega) = \left\{ u \in \mathbf{L}^2(\Omega) \ / \ D^\alpha u \in \mathbf{L}^2(\Omega),\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n,\ \ |\alpha| \leq m \right\},$$

où $D^\alpha \mathbf{u} = \dfrac{\partial^{|\alpha|}\mathbf{u}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ ... \ \partial x_n^{\alpha_n}}$, *désigne la dérivée d'ordre α au sens des distributions avec* $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n,\ \ |\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.$

1.3.2 Quelques propriétés des espaces $\mathbf{H}^m(\Omega)$

(i) On munit l'espace $\mathbf{H}^m(\Omega)$ du produit scalaire :

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha \mathbf{u},\ D^\alpha \mathbf{v})_{L^2},\ \forall \mathbf{u},\ \mathbf{v} \in \mathbf{H}^m(\Omega).$$

La norme associée étant donnée par :

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^m(\Omega)} := \sqrt{(\mathbf{u},\mathbf{u})_{\mathbf{H}^m(\Omega)}} = \left[\sum_{|\alpha|\leq m}\int_{\Omega}(D^{\alpha}\mathbf{u})^2dx\right]^{\frac{1}{2}}, \ \forall \mathbf{u}\in\mathbf{H}^m(\Omega),$$

de plus, il est bien connu que cet espace est un espace de Hilbert.

(ii) Pour $m=0$ on a $\mathbf{H}^0(\Omega)=\mathbf{L}^2(\Omega)$ et pour tout $m_1>m_2$, on a :

$$\mathbf{H}^{m_1}(\Omega)\subset\mathbf{H}^{m_2}(\Omega) \text{ avec injection continue.}$$

(iii) Pour tout $m\geq 0$, $\mathbf{H}^m(\Omega)$ est un espace séparable.

(iv) Pour tout $m\geq 0$, nous désignons par $\mathbf{H}_0^m(\Omega)$ la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathbf{H}^m(\Omega)$:

$$\mathbf{H}_0^m(\Omega)=\overline{\mathcal{D}(\Omega)} \text{ dans } \mathbf{H}^m(\Omega)\ ,$$

et par $\mathbf{H}^{-m}(\Omega)$ le dual topologique de $\mathbf{H}_0^m(\Omega)$.

(v) Grâce aux applications traces, que nous allons voir après, les espaces $\mathbf{H}_0^m(\Omega)$ peuvent être définis comme suit :

$$\mathbf{H}_0^m(\Omega)=\left\{u\in\mathbf{H}^m(\Omega)\diagup\ \frac{\partial^j\mathbf{u}}{\partial\ \eta^j}=0,\ \forall j=0,...,m-1.\right\},$$

où : $\dfrac{\partial}{\partial\ \eta}$ est la dérivée normale de u suivant la normale extérieure à $\Gamma=\partial\Omega$

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\ \eta}(x)=\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_i}(x)\,\eta_i,\ \forall x\in\Gamma.$$

1.3.3 Espaces de Sobolev d'ordre non entier

Définition 1.3.2 *Soit s un réel, $0<s<1$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on désigne par $\mathbf{H}^s(\Omega)$ l'espace :*

$$\mathbf{H}^s(\Omega)=\left\{\mathbf{u}\in\mathbf{L}^2(\Omega),\ \textit{tel que}\int\int_{\Omega\times\Omega}\frac{|\mathbf{u}(x)-\mathbf{u}(y)|^2}{|x-y|^{n\ +2s}}dxdy<\infty\right\},$$

muni de la norme :

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^s(\Omega)} = \left\{ \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \int\int_{\Omega\times\Omega} \frac{|\mathbf{u}(x) - \mathbf{u}(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dxdy \right\}^{\frac{1}{2}},$$

si s désigne un réel positif de partie entière $[s] = m$, *l'espace* $H^s(\Omega)$ *peut être défini de la manière suivante :*

$$\mathbf{H}^s(\Omega) = \left\{ \ u \in \mathbf{H}^m(\Omega), \ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \ \ |\alpha| = m, \ D^\alpha u \in \mathbf{H}^{s-m}(\Omega) \right\}.$$

Lorsque $\Omega = \mathbb{R}^n$, nous pouvons définir l'espace de Sobolev $\mathbf{H}^s(\mathbb{R}^n)$ au moyen de la transformation de Fourier. En effet,si $v \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$, sa transformée de Fourier est donnée par :

$$\widehat{v}(\zeta) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{s}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-ix\zeta)\, v(x)\, dx, \ \zeta \in \mathbb{R}^n,$$

et nous avons :

$$\mathbf{H}^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^n), \text{tel que } \left(1 + |\zeta|^2\right)^{\frac{s}{2}} \widehat{v}(\zeta) \in \mathbf{H}^{s-m}(\mathbb{R}^n) \right\},$$

muni de la norme :

$$\|v\|_{\mathbf{H}^s(\Omega)} = \left\| \left(1 + |\zeta|^2\right)^{\frac{s}{2}} \widehat{v}(\zeta) \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)},$$

qui est équivalente à la norme de $\mathbf{H}^s(\mathbb{R}^n)$, (voir P.A. Raviart et J.M. Thomas [8] page 28-33).

Théorème 1.3.1 (Inégalité de Poincaré -Friedrich) *Soit* Ω *un ouvert borné et lipschitzien de* $\mathbb{R}^n$. *Il existe une constante* $C \succ 0$*(dépendante seulement de* Ω*), telle que*

$$\|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}, \ \forall \mathbf{u} \in H_0^1(\Omega).$$

La semi-norme

$$\mathbf{u} \longrightarrow |\mathbf{u}|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} = \|\nabla \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)},$$

définit une norme sur $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$, *équivalente à la norme de* $u \longrightarrow \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$.

Preuve. La démonstration de ce théorème est détaillée dans P.A. Raviart et J.M Thomas [8] Théorème 1.2.5, page 18) ■

Remarque 1.3.1 *Cette inégalité montre que la norme* $\mathbf{L}^2$ *de* $\mathbf{u}$ *est contrôlée par la norme* $\mathbf{L}^2$ *de ses dérivées, ceci n'étant bien sur valable ici que pour les fonctions nulles au bord.*

1.3.4 Espace des fonctions à valeurs vectorielles

Dans la théorie des équations d'évolution, il y a lieu de faire jouer en général des rôles distincts à la variable temporelle et la variable d'espace, et donc on rencontre en particulier des espaces de fonction à valeurs vectorielles.

Définition 1.3.3 *Soit* $\mathbf{X}$ *un espace de Banach et* T *un réel strictement positif. Pour* $p \in [1, +\infty[$ *on note* $\mathbf{L}^p(0, T; \mathbf{X})$ *l'ensemble des (classes des) fonctions Lebesgue mesurables définies sur* $]0, T[$ *et à valeurs dans* X*, telles que* $t \longmapsto \|\mathbf{f}(t)\|_{\mathbf{X}}^p$ *est intégrable sur* $]0, T[$*. C'est un espace de Banach pour la norme*

$$\|\mathbf{f}\|_p = \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}^p(0,T;\mathbf{X})} = \left(\int_0^T \|\mathbf{f}(t)\|_{\mathbf{X}}^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

De la même façon, pour $p = +\infty$*, on définit un espace de Banach* $\mathbf{L}^\infty(0, T; \mathbf{X})$ *muni de la norme*

$$\|\mathbf{f}\|_\infty = \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}^\infty(0,T;\mathbf{X})} = \sup \, ess \|\mathbf{f}(t)\|_{\mathbf{X}} < +\infty.$$

Proposition 1.3.1 *Pour* $p \in [1, +\infty[$*, on a les résultats suivants :*

1. Si $\mathbf{X}$ *est séparable, alors* $\mathbf{L}^p(0, T, \mathbf{X})$ *est aussi séparable.*

2. Si $\mathbf{X}$ *est réflexif (respectivement de Hilbert), alors* $\mathbf{L}^p(0, T, \mathbf{X})$*est aussi réflexif (respectivement de Hilbert).*

On a alors $\mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{X})$ *est un espace de Hilbert.*

3. Si $\mathbf{X}$ *et* $\mathbf{Y}$ *désignent deux espaces de Banach,* $\mathbf{X}$ *inclus dans* $\mathbf{Y}$*, avec injection continue, alors il existe une injection continue de* $\mathbf{L}^p(0, T; \mathbf{X})$ *dans* $\mathbf{L}^p(0, T; \mathbf{Y})$*.*

Dualité. *Soient p et p' deux exposants conjugués, $p \in [1, +\infty[$.*

1. Le dual de $\mathbf{L}^p(0, T;\ \mathbf{X})$ s'identifie à $\mathbf{L}^{p'}(0, T;\ \mathbf{X}')$.

2. Si Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$, On a l'équivalence algébrique et topologique entre les espaces $\mathbf{L}^p(0, T;\ \mathbf{L}^p(\Omega))$ et $\mathbf{L}^p(]0, T[\times\Omega)$(naturellement identifiables).

1.3.5 Espaces de Sobolev à valeurs vectorielles

Soit $\mathbf{X}$ un espace de Bancah et T un réel strictement positif.

Définition 1.3.4 *On désigne par $\mathfrak{D}'(0, T; X)$ l'espace des applications linéaires continues de $\mathfrak{D}(]0; T[)$ (espace des fonctions numériques indéfiniment différentiables à support compact dans]0,T[) dans X. Un élément de $\mathfrak{D}'(]0; T[; X)$ est appelé une "distribution" et on note pour $f \in D'(0; T; X)$ et $\varphi \in \mathfrak{D}(]0; T[)$*

$$f(\varphi) = \langle f, \varphi \rangle .$$

Comme pour le cas réel, on donne la définition de la dérivée d'une distribution.

Définition 1.3.5 *Soit $f \in D'(0, T; X)$ et m un entier positif. La dérivée de f d'ordre m est donnée par la formule*

$$\left\langle \frac{d^m f}{dt^m}, \varphi \right\rangle = (-1)^m \left\langle f, \frac{d^m \varphi}{dt^m} \right\rangle .$$

1.3.6 Espace $\mathbf{W}^{1,p}(0, T; \mathbf{X})$

Définition 1.3.6 *Soit p un réel, $1 \leq p \leq \infty, \mathbf{X}$ un espace de Banach et T un réel strictement positif. On définit l'espace*

$$\mathbf{W}^{1,p}(0, T; \mathbf{X}) = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{L}^P(0, T; \mathbf{X}), \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \in \mathbf{L}^p(0, T; \mathbf{X}) \right\},$$

que l'on munit de la norme suivante :

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^{1,p}(0,T;\mathbf{X})} = \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^P(0,T;\mathbf{X})} + \left\|\tfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right\|_{\mathbf{L}^P(0,T;\mathbf{X})},$$

où de la norme équivalente, si p est fini, définie par :

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^{1,p}(0,T;\mathbf{X})} = \left(\|\mathbf{u}\|^p_{\mathbf{L}^p(0,T;\mathbf{X})} + \left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right\|^p_{\mathbf{L}^p(0,T;\mathbf{X})} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour $p \in [1, +\infty]$, l'espace $\mathbf{W}^{1,p}(0,T;\mathbf{X})$ est de Banach.

Proposition 1.3.2 *Si* $\mathbf{X}$ *est séparable et* $p < +\infty$*, alors l'espace* $\mathbf{W}^{1,p}(0,T;\mathbf{X})$ *est séparable*

Proposition 1.3.3 *Si 1<p<+∞ et* $\mathbf{X}$ *est séparable réflexif alors l'espace* $W^{1,p}(0,T;\ \mathbf{X})$ *est réflexif.*

Proposition 1.3.4 *Pour p=2, on note* $H^1(0,T;\ \mathbf{X}) = W^{1,2}(0,T;\ \mathbf{X})$, *on a alors* $H^1(0,T;\ \mathbf{X})$ *est de Hilbert.*

Lemme 1.3.1 *[cf. Lions [6]] Si* $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^p(0,T;\ \mathbf{X})$ *et* $\dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \in \mathbf{L}^p(0,T;\ \mathbf{X})$ $(1 \le p \le \infty)$. *Alors* $\mathbf{f}$ *est, après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle de* $(0,\ T)$*, continue de* $[0,\ T]$ *dans* $\mathbf{X}$.

1.3.7 Espace $\mathbf{H}^1(\mathbf{Q}_T)$

Définition 1.3.7 *Soient* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et* T *un réel strictement positif. On note* $\mathbf{Q}_T$ *le cylindre défini par* $\mathbf{Q}_T =]0,T[\times \Omega$.

On définit l'espace :

$$\mathbf{H}^1(\mathbf{Q}_T) = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\mathbf{Q}_T),\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \in \mathbf{L}^2(\mathbf{Q}_T) \right\},$$

qui l'on munit de la norme définie par :

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\mathbf{Q}_T)} = \left(\|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{L}^2(\mathbf{Q}_T)} + \left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right\|^2_{\mathbf{L}^2(\mathbf{Q}_T)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Théorème 1.3.2 *L'espace* $\mathbf{H}^1(\mathbf{Q}_T)$ *est de Hilbert pour la norme définie ci-dessus.*

Lemme 1.3.2 *Si*

$$\int_0^T \mathbf{u}dt = 0,$$

alors

$$\int_0^T \|\mathbf{u}\|^2 dt \leqslant C \int_0^T \left\|\mathbf{u}'\right\|^2 dt \;\; et \;\; \int_0^T \|\mathbf{u}\|^p_{\mathbf{L}^p(\mathbf{Q})} dt \leqslant C \int_0^T \left\|\mathbf{u}'\right\|^p_{\mathbf{L}^p(\mathbf{Q})} dt,$$

pour *u dérivable pour tout* $t \in [0,T]$, $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2\left(0,T;(\mathbf{H}_0^1(\Omega))^n\right)$

et $\mathbf{u}' \in \mathbf{L}^2\left(0,T;(\mathbf{H}_0^1(\Omega))^n\right) \cap \mathbf{L}^p(\mathbf{Q}_T)$.

Preuve. Voir J.L Lions [6], ou Medeiros [11]. ■

1.4 Résultats de compacité

Commençons par donner le théorème classique de Rellich- Kondrachov.

Théorème 1.4.1 *L'injection de* $\mathbf{H}^1(\mathbf{Q}_T)$ *dans* $\mathbf{L}^2(\mathbf{Q}_T)$*est compacte.*

Le résultat de compacité générale dans l'espace de fonction a valeurs vectorielles est donné par le célèbre théorème de Lions-Aubin.

Théorème 1.4.2 *Soient* $\mathbf{B}_0$, $\mathbf{B}$ *et* $\mathbf{B}_1$ *trois espaces de Banach avec* $\mathbf{B}_0 \subset \mathbf{B} \subset \mathbf{B}_1$ *(l'injection est algébrique et topologique). On suppose que l'injection* $\mathbf{B} \hookrightarrow \mathbf{B}_1$ *est continue. Soit* T *est fini et* $1 < p_0 < \infty$, $1 < p_1 < \infty$. *On suppose* $\mathbf{B}_0$ *et* $\mathbf{B}_1$ *sont réflexifs et on définit*

$$\mathbf{W} = \left\{\mathbf{u} : (0,T) \to \mathbf{B}_0, \quad \mathbf{u} \in \mathbf{L}^{p_0}(0,T;\ \mathbf{B}_0),\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \in \mathbf{L}^{p_1}(0,T;\ \mathbf{B}_1)\right\},$$

$\mathbf{W}$ *est un espace de Banach réflexif pour la norme*

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}} = \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^{p_0}(0,T;\mathbf{B}_0)} + \left\|\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right\|_{\mathbf{L}^{p_0}(0,T;\mathbf{B}_0)}.$$

Preuve. Ce théorème est classique, pour sa démonstration nous renvoyons le lecteur au livre de Lions-Magenes[7]. ■

On a alors le résultat suivant :

Lemme 1.4.1 *Si en plus des hypothèses de théorème 1.4.2 nous supposons que l'injection* $\mathbf{B}_0 \hookrightarrow \mathbf{B}$ *est compacte, alors pour tout* $\eta > 0$*, il existe une constante* $C_\eta > 0$ *dépendant seulement de* η*, telle que :*

$$\forall v \in \mathbf{B}_0, \|v\|_{\mathbf{B}} \leqslant \eta \|v\|_{\mathbf{B}_0} + C_\eta \|v\|_{\mathbf{B}_1}.$$

Comme conséquence, il existe une constante C_η *telle que :*

$$\forall v \in \mathbf{B}_0, \|v\|_{\mathbf{L}^{p_0}(0,T;\mathbf{B})} \leqslant \eta \|v\|_{\mathbf{L}^{p_0}(0,T;\mathbf{B}_0)} + C_\eta \|v\|_{\mathbf{L}^0(0,T;\mathbf{B}_1)}.$$

Théorème 1.4.3 *Sous les hypothèses du lemme1.4.1 et si* $1 < p_0,\ p_1 < \infty$*, alors l'injection de* $\mathbf{W}$ *dans* $\mathbf{L}^{P_0}(0,T;\mathbf{B})$ *est compacte.*

1.5 Application de traces sur $\mathbf{H}^m(\Omega)$ et formule de Green

Les résultats qui vont suivre seront utilisés de façon fondamentale dans les chapitres suivants.

1.5.1 Application de trace sur $\mathbf{H}^m(\Omega)$

Désignons par $\mathrm{D}(\overline{\Omega})$ l'espace des restrictions des fonctions de $\mathrm{D}(\mathbb{R}^n)$ à $\overline{\Omega}$. Nous pouvons alors parler de la trace d'une fonction de $D(\overline{\Omega})$ et nous définissons l'application :

$$\gamma_0 : \begin{cases} D(\overline{\Omega}) & \rightarrow \quad \mathbf{L}^2(\Gamma), \\ u & \mapsto \quad \gamma_0(u) = u\backslash_\Gamma, \end{cases}$$

et la continuité s'écrit :

$$\exists c > 0,\ \forall u \in \mathbf{H}^1(\Omega),\ \ \|\gamma_0(u)\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} \leq c \|u\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}.$$

L'application γ_0 est appelée "**application trace**". Il est bien connu qu'elle est linéaire est continue au sens de la norme de $\mathbf{H}^1(\Omega)$, est aussi connu que si Ω est régulier, alors $D(\overline{\Omega})$ est dense dans $\mathbf{H}^1(\Omega)$. Voir par exemple Raviart et Thomas[8].

Ceci nous permet d'énoncer le résultat suivant :

Théorème 1.5.1 *On suppose que Ω un ouvert borné de frontière Γ assez régulier. Alors l'application γ_1 de :*

$$D\left(\overline{\Omega}\right) \rightarrow \mathbf{L}^2(\Gamma),$$

se prolonge par continuité en une application linéaire continue de

$$\begin{cases} \mathbf{H}^s(\Omega) & \rightarrow \mathbf{L}^2(\Gamma) \\ u & \mapsto \gamma_1(u). \end{cases}$$

Preuve. Voir lions-Magenes[7]. ■

1.5.2 Formule de Green

Rappelons qu'un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^n$ et de frontière Γ est dit de classe C^k si Γ est une variété de dimension n-1 est de classe C^k.

Théorème 1.5.2 (Formule de Green) *Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$(par exemple Ω de classe C^1 avec Γ borné); alors pour tout u, $v \in H^1(\Omega)$, on a la formule de Green :*

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\, dx = -\int_{\Omega} v(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\, dx + \int_{\partial\Omega} u(x)\, v(x)\, \eta_i(x)\, d\Gamma, \; i = 1 \text{ à } n$$

où η_i est le $i^{\text{ème}}$ cosinus directeur de la normale n sortante.

Preuve. On pourra consulter Raviart et Thomas [8], (Théorème 1. 4. 5, page 27). Cette formule est une " intégration par partie généralisée ". Sont importance est extrême par la suite. ■

Comme conséquence de ce théorème, on a :

Corollaire 1.5.1 *Si u, $v \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ et si $\Delta u \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, alors :*

$$\int_{\Omega} \Delta u(x)\, v(x)\, dx = -\int_{\Omega} \nabla u(x) . \nabla v(x)\, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta}(x)\, v(x)\, d\Gamma,$$

où

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)_{1\leq i\leq n} \text{ est le vecteur gradient de } u,$$

et

$$\frac{\partial\ u}{\partial\ \eta} = \nabla u\ .\ \eta.$$

Finalement, on rappelle certains lemmes et concepts utilisé souvent dans la démonstration de l'existence et de l'unicité de la solution.

Lemme 1.5.1 ***(Gronwall)*** *Soient* $y \in L^{\infty}(]0;T[)$ *et* $x \in L^{1}(]0;T[)$ *deux fonctions positives et* y_0 *une constante positive, telles que :*

pour presque tout $t \in]0,\ T[$,

$$y(t) \leqslant y_0 + \int_{\mathbf{0}}^{t} x(s)\, y(s)\, ds.$$

Alors, on a : *pour presque tout* $t \in]0,\ T[$,

$$y(t) \leqslant y_0 \exp\left(\int_{\mathbf{0}}^{t} x(s)\, ds\right).$$

Preuve. La démonstration est détaillée dans le livre de J. P. Demailly[9]. ■

Lemme 1.5.2 *Soit* $\mathbf{\Theta}$ *un ouvert borné de* $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t$ *et* $\mathbf{g}_\mu$, $\mathbf{g}$ *des fonctions de* $\mathbf{L}^q(\mathbf{\Theta})$, $1 < q < \infty$ *telles que*

$$\|\mathbf{g}_\mu\|_{L^q(\mathbf{\Theta})} \leq c \text{ et } \mathbf{g}_\mu \longrightarrow \mathbf{g} \text{ p.p dans } \mathbf{\Theta},$$

alors

$$\mathbf{g}_\mu \longrightarrow \mathbf{g} \text{ dans } \mathbf{L}^q \text{ faible.}$$

Preuve. Voir le livre de J.L. lions [6] (page13). ■

Lemme 1.5.3 (*Inégalité de Young*) *Soient p et q deux réels vérifiant $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Alors*

$$\forall (a,\ b) \in \mathbb{R}_+^2,\ \forall \varepsilon > 0,\ ab \leq \frac{\varepsilon}{p}\ a^p + \frac{1}{q\varepsilon^{\frac{q}{p}}} b^q.$$

En particulier si $p=q=2$, on retrouver l'inégalité de Cauchy.

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^2,\ ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2},$$

En pratique pour deux réels positifs a et b et pour tout $\varepsilon > 0$

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^2,\ \forall \varepsilon > 0,\ ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} b^2.$$

Théorème 1.5.3 (*Inégalité de Hölder*) *Soient f et g deux fonctions respectivement dans $L^p(\Omega)$, $L^q(\Omega)$, avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.*

Alors, le produit fg est dans $L^1(\Omega)$ et l'on a

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Dans le cas particulier où $p=q=2$, on obtient ´egalité de Cauchy-Schwartz :

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

Preuve. Voir H.Brezis [2] (théorème 4.6 page 56) ■

Théorème 1.5.4 (*Théorème de convergence dominée de Lebesgue*) *Soit (f_n) une suite de fonction de L^1. On suppose que*

a) $f_n(x) \to f(x)$ p.p. sur Ω,

b) il existe une fonction $g \in L^1$ tel que pour chaque n,

$$|f_n(x)| \leq g(x)\ \text{ p.p. sur } \Omega.$$

Alors

$$f \in L^1(\Omega)\ \text{ et }\ \|f_n - f\|_{L^1} \to 0.$$

Théorème 1.5.5 (*Inégalité d'inclusion*) *Supposons que* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *est un ouvert avec* $|\Omega| = \int_\Omega dx < 1$. *Alors*

$$\mathbf{L}^q(\Omega) \subset \mathbf{L}^p(\Omega), \ \forall 1 \leqslant p \leqslant q < \infty,$$

i. e., il existe une constante C *(dans notre cas,* $C = |\Omega|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$*) telle que*

$$\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} \leqslant C \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}^q(\Omega)}, \quad \forall \mathbf{f} \in \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}^q(\Omega).}$$

Nous aurons besoin aussi dans la suite des quelques définitions et propriétés des opérateurs. Soit $\mathbf{V}$ un espace de Banach et $\mathbf{V}'$ son dual topologique.

1.6 Définitions

Définition 1.6.1 *On dit que l'opérateur* A*, définit de* $\mathbf{V}$ *dans* $\mathbf{V}'$*, est*

1) A est borné s'il existe C >0 tel que :

$$\|A(u)\|_{\mathbf{V}'} \leq C \|u\|_{\mathbf{V}}, \ \forall u \in \mathbf{V}.$$

2) Coercive s'il existe $\alpha > 0$ *tel que :*

$$(A(u), \ u) \geq \alpha \|u\|_{\mathbf{V}}^p, \ \forall u \in \mathbf{V}, \ \alpha > 0, \ 1 < p < \infty,$$

où bien

$$\frac{(A(u), \ u)}{\|u\|_{\mathbf{V}}} \longrightarrow +\infty, \quad \text{quand} \quad \|u\|_{\mathbf{V}} \longrightarrow +\infty.$$

3) Monotone de $\mathbf{V}$ *dans* $\mathbf{V}'$ *s'il vérifie :*

$$\forall u, \ v \in \mathbf{V} \ : \ (A(u) - A(v), \ u - v)_{\mathbf{V}', \mathbf{V}} \geq 0.$$

4) Hémicontinu de $\mathbf{V}$ *dans* $\mathbf{V}'$ *s'il vérifie la propriété suivante :*

$\forall \ u, v, w \in \mathbf{V}$ *la fonction* $\lambda \to (A(u + \lambda v), \ w)_{\mathbf{V}', \mathbf{V}}$ *est continue de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$.

Remarque 1.6.1 *La monotonie généralise la notion de fonction croissante de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$.

Chapitre 2

Une équation hyperbolique perturbé avec un terme frictionnaire

Résumé

Dans ce chapitre, nous étudions une équation hyperbolique gouvernée par le système de Lamé classique, perturbé avec un terme frictionnaire linéaire. Les techniques utilisées sont celles de la méthode de Fædo-Galerkin. Dans la deuxième partie de ce chapitre en utilisant la méthode de compacité, on démontre un théorème d'existence et d'unicité, pour un cas non linéaire analogue à l'équation aux dérivées partielles, qui intervient en mécanique quantique relativiste, perturbé avec un terme frictionnaire linéaire.

2.1 Généralités sur le problème et notations

Le modèle mathématique étudié dans ce mémoire, décrit l'évolution du corps matériel élastique homogène isotrope en petite vibration qui occupe un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n \,(n = 2, 3)$, avec une surface frontière régulière Γ. Le corps est encastré sur Γ. Soit $T > 0$ et soit $[0, T]$ l'intervalle de temps en question. Nous prenons en considération les propriétés mécaniques du corps. Notre objectif est d'étudier l'évolution de ces propriétés dans le temps, sous l'hypothèse des petites transformations. Les fonctions inconnues du problème sont le champ des déplacements $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et le champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \longrightarrow S^n$. On sait qu'en général, l'évolution d'un corps matériel, perturbé avec un terme frictionnaire linéaire est décrit par l'équation de mouvement de Cauchy

$$\varrho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \delta \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - div\sigma\,(x, t) = \mathbf{f} \; dans \; \Omega \times (0, T), \tag{2.1}$$

où $\varrho : \Omega \to \mathbb{R}^+$ désigne la densité de masse (on suppose que $\varrho(x) = 1$) ;

est δ un facteur traduisant les propriétés du matériaux avec δ >0,

ici "**div**" représente l'opérateur divergence pour les tenseurs,

$$\mathbf{div}\sigma = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sigma_{ij}\left(\mathbf{u}\right)\right).$$

L'équation (2.1) est l'équation générale de la dynamique des solides.

Or la théorie de **l'élasticité linéaire** se situe d'une part dans le cadre de la description des solides lentement déformables, et d'autre part on impose que la loi de comportement élastique reliant le tenseur des contraintes à celui des déformations est linéaire. Lorsque de plus le solide élastique a un comportement **isotrope** (c'est-à-dire ne privilégie aucune direction de l'espace), on obtient la loi de comportement de Hooke

$$\sigma_{ij}\left(\mathbf{u}\right) = 2\mu\varepsilon_{ij}\left(\mathbf{u}\right) + \lambda trace\left(\varepsilon\left(\mathbf{u}\right)\right)\delta_{ij}, \; 1 \leq i, j \leq n, \tag{2.2}$$

et $\lambda = \lambda(x)$, $\mu = \mu(x)$ désignent les coefficients de Lamé, Le ε_{ij} désigne le tenseur des déformations (linéaires) associé au champ des déplacements u.

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \ 1 \leq i, j \leq n. \tag{2.3}$$

Le système linéaire que constitue l'équation (2.2), s'inverse facilement on obtient

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij}(\mathbf{u}) - \frac{\nu}{E}\sigma_{ij}(\mathbf{u})\,\delta_{ij}, \tag{2.4}$$

et $E = \dfrac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}$ est le module de Young et $\nu = \dfrac{\lambda}{2(1+\nu)}$ le coefficient de Poisson.

En substituant (2.3) dans (2.2) et le résultat dans (2.1), on en déduit :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_i}{\partial t^2} + \delta\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \lambda trace\,(\varepsilon(\mathbf{u}))\ \delta_{ij}\right\} = \mathbf{f}_j \ dans\ \Omega \times (0, T), \tag{2.5}$$

On remarquera aussi que la *trace* $(\varepsilon(\mathbf{u}))$ est la divergence du déplacement :

$$trace\,(\varepsilon(\mathbf{u})) = \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_{ii}(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \mathbf{divu}. \tag{2.6}$$

Donc

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_i}{\partial t^2} + \delta\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \lambda\,(\mathbf{divu})\,\delta_{ij}\right\} = \mathbf{f}_j. \tag{2.7}$$

Dans le cas d'un **matériau homogène,** les différents coefficients introduits ci-dessus sont toujours des constantes. On en déduit

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_i}{\partial t^2} + \delta\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} - \left\{\mu\frac{\partial}{\partial x_j}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \mu\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u_j}{\partial^2 x_i} + \lambda\frac{\partial}{\partial x_j}(\mathbf{divu})\right\} = \mathbf{f}_j,$$

alors

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_i}{\partial t^2} + \delta\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} - \left\{\mu\Delta u_j + (\mu + \lambda)\frac{\partial}{\partial x_j}(\mathbf{divu})\right\} = \mathbf{f}_j.$$

On obtient pour sa partie EDP, l'équation hyperboliques gouvernée par le système de Lamé, perturbé avec un terme frictionnaire linéaire :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \delta \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mu \boldsymbol{\Delta} \mathbf{u} - (\lambda + \mu) \mathbf{grad}(\mathbf{divu}) = \mathbf{f}. \tag{2.8}$$

Remarquans que, si $\lambda + \mu \neq 0$ pour chaque composante u_j, les équations sont complet par le terme de divergence. Evidemment, en dimension $n = 1$, le système de Lamé na qu'une seule équation et se réduit aux équations des ondes, donc on a une extension des équations aux dérivées partielles elliptique a plus compliquées que le Laplacien. Supposons maintenant que Ω occupant un domaine ouvert borné et connexe de $\mathbb{R}^n$ à frontière $\boldsymbol{\Gamma}$ qui est assez régulière. Soit $\mathbf{Q}_T$ le cylindre de $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t$: $\mathbf{Q}_T = \boldsymbol{\Omega} \times]0,\ T[$; T est un réel fini, de frontière $\boldsymbol{\Sigma}_T = \Gamma \times]0,\ T[$; L désigne le système de Lamé défini par $\mu \boldsymbol{\Delta} + (\lambda + \mu) \nabla \mathbf{div}$; λ et μ sont les constantes de Lamé (avec $\mu > 0$ et $\lambda + \mu > 0$.). On désigne par $\mathbf{u} = \{u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n\}$ un vecteur sur $\mathbf{Q}_T = \boldsymbol{\Omega} \times]0,\ T[\longrightarrow \mathbb{R}^n$. On posera

$$\mathbf{u}' = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \left\{u_1',\ u_2',\ \ldots,\ u_n'\right\} = \left\{\frac{\partial u_1}{\partial t},\ \frac{\partial u_2}{\partial t},\ \ldots,\ \frac{\partial u_n}{\partial t}\right\},$$
$$\mathbf{u}'' = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \left\{u_1'',\ u_2'',\ \ldots,\ u_n''\right\} = \left\{\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2},\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2},\ \ldots,\ \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2}\right\}.$$

Le problème de Cauchy-Dirichlet pour sa partie EDP, se modélise mathématiquement par le système suivant : On cherche un vecteur $\mathbf{u}$ tel que

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \delta \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - L\mathbf{u} = \mathbf{f} \ dans\ \mathbf{Q}_T, \tag{2.9}$$

$$\mathbf{u} = 0 \ dans\ \boldsymbol{\Sigma}_T, \tag{2.10}$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \quad et \quad \mathbf{u}'(0) = \mathbf{u}_1, \tag{2.11}$$

u_0, u_1 et f sont des fonctions données,

$\delta > 0$ est un facteur traduisant les propriétés du matériaux.

Pour résoudre ce problème, on introduit les notations suivantes :
On pose

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}(t)\| &= \|\mathbf{v}(t)\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^n} \quad \text{pour} \quad \mathbf{v}(t) \in (\mathbf{H}_0^1(\Omega))^n, \\ |\mathbf{v}(t)| &= \|\mathbf{v}(t)\|_{(L^2(\Omega))^n} \quad \text{pour} \quad \mathbf{v}(t) \in (\mathbf{L}^2(\Omega))^n. \end{aligned}$$

Pour $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega)\right)^n$, on pose

$$\mathbf{A}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \mu \sum_{i,\, j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\mathbf{dx} + (\lambda+\mu)(\mathbf{div u},\mathbf{div v}).$$

Lemme 2.1.1 **A** *est une forme bilinéaire, continue, symétrique et coércive sur* $\left(\mathbf{H}_0^1(\Omega)\right)^n$.

Preuve.

Dans les deux cas, la bilinéarité et la symétrie sont triviales ; il suffit de prouver les autres propriétés.

- Soient $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega)\right)^n$. On a

$$|\mathbf{A}(\mathbf{u},\, \mathbf{v})| \leq \mu\left(|\nabla \mathbf{u}| \, . \, |\nabla \mathbf{v}| + |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\right) + (\lambda+\mu)\left|(\mathbf{div u},\, \mathbf{div v})\right| .$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy–Schwartz et le fait que $|\mathbf{div u}| \leq |\nabla \mathbf{u}|$, on trouve

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}(\mathbf{u},\, \mathbf{v})| &\leq c\,\|\mathbf{u}\| \, . \, \|\mathbf{v}\| + c\,|\mathbf{div u}| \, . \, |\mathbf{div v}| \\ &\leq c\,\|\mathbf{u}\| \, . \, \|\mathbf{v}\| \, . \end{aligned}$$

- D'autre part

$$|\mathbf{A}(\mathbf{u},\, \mathbf{u})| = \mu\,\|\nabla \mathbf{u}\|^2_{(L^2(\Omega))^n} + (\lambda+\mu)\,\|\mathbf{div u}\|^2_{L^2(\Omega)} \, ,$$

utilisons maintenant l'inégalité de Poincaré, on aura

$$|\mathbf{A}(\mathbf{u},\, \mathbf{u})| \geq \mu\,\|\nabla \mathbf{u}\|^2_{(L^2(\Omega))^n} \geq c\,\|\mathbf{u}\|^2_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^n} . \quad \blacksquare$$

2.2 Position du problème

On propose maintenant le problème suivant :

Problème $(\mathcal{P}_1)$ **:**

On donne

$$\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2\left(0,\ T;\ \left(\mathbf{L}^2(\Omega)\right)^n\right), \tag{2.12}$$

$$\mathbf{u}_0 \in \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega)\right)^n \quad et \quad \mathbf{u}_1 \in \left(\mathbf{L}^2(\Omega)\right)^n. \tag{2.13}$$

On cherche **u** tel que

$$\mathbf{u} \in \mathbf{L}^\infty\left(0,\ T;\ \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega)\right)^n\right), \tag{2.14}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \in \mathbf{L}^\infty\left(0,\ T;\ \left(\mathbf{L}^2(\Omega)\right)^n\right), \tag{2.15}$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \delta \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - L\mathbf{u} = \mathbf{f}, \tag{2.16}$$

$$\mathbf{u} = 0 \ dans\ \boldsymbol{\Sigma}, \tag{2.17}$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \quad et \quad \mathbf{u}^{'}(0) = \mathbf{u}_1. \tag{2.18}$$

La condition (2.17) n'est autre que la condition de Dirichlet homogène, correspond physiquement à des structures encastrées.

Notre problème est de déterminer l'évolution au cours du temps des petits déplacements **u** perturbés avec un terme frictionnaire linéaire $\delta \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$(force de freinage linéaire par rapport au module de la vitesse car $\delta > 0$), à partir de l'état naturel d'un corps solide homogène et isotrope soumis a une densité volumique de forces **f** a reformuler.

Proposition 2.2.1 *La condition (2.18) a un sens.*

Preuve :

De (2.14) et (2.15) et comme $\left(\mathbf{H}_0^1(\Omega)\right)^n \subset \left(\mathbf{L}^2(\Omega)\right)^n$ on a

$$\mathbf{u},\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \in \mathbf{L}^\infty\left(0,\ T;\ \ (\mathbf{L}^2(\Omega))^n\right)$$

Il résulte en particulier grâce au Lemme1.3.2 (cf. Lions[6]) que $\mathbf{u}$ continue de $[0,\ T]$ $\longrightarrow (\mathbf{L}^2(\Omega))^n$, de sorte que $\mathbf{u}(0)$ a un sens. et pour vérifier que la deuxième condition de (2.18) a un sens, on doit utiliser l'équation (2.16), qui s'écrit de la forme suivante :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = L\mathbf{u} - \delta\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{f}, \tag{2.19}$$

On a $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^\infty\left(0,\ T;\ \ (\mathbf{H}_0^1(\Omega))^n\right)$ alors $\mathbf{divu} \in \mathbf{L}^\infty\left(0,\ T;\ \mathbf{L}^2(\Omega)\right)$,
donc $\mathbf{grad}(\mathbf{divu}) \in \mathbf{L}^\infty\left(0,\ T;\ \ (\mathbf{H}^{-1}(\Omega))^n\right)$ et $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u} \in \mathbf{L}^\infty\left(0,\ T;\ \ (\mathbf{H}^{-1}(\Omega))^n\right)$,
c-à-d $\mu\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u} + (\lambda+\mu)\mathbf{grad}(\mathbf{divu}) \in \mathbf{L}^\infty\left(0,\ T;\ \ (\mathbf{H}^{-1}(\Omega))^n\right)$.
De sorte que (2.19) entraine :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \in \mathbf{L}^2\left(0,\ T;\ \ \left(\mathbf{L}^2(\Omega)\right)^n\right) + \mathbf{L}^\infty\left(0,\ T;\ \ \left(\mathbf{H}^{-1}(\Omega) + \mathbf{L}^2(\Omega)\right)^n\right), \tag{2.20}$$

d'où, en particulier

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \in \mathbf{L}^2\left(0,\ T;\ \ \left(\mathbf{H}^{-1}(\Omega)\right)^n\right), \tag{2.21}$$

ce qui, joint à 2.15 que la deuxième condition de (2.18) montre, grâce au lemme1.3.1(cf. Lions [6]), que $\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ est continue de $[0,\ T] \longrightarrow \left(\mathbf{H}^{-1}(\Omega)\right)^n$, ce qui justifie l'existence de $\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(0)$. Donc on verra qu'ils vérifient $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$ et $\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(0) = \mathbf{u}_1$.

2.3 Formulation variationnelle

Multiplions l'équation (2.16) par une fonction $\mathbf{v} \in (\mathbf{H}_0^1(\Omega))^n$, et intégrons sur Ω ; et grâce à la formule de Green et les conditions aux limites, il vient que

$$\left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \mathbf{v}\right) + \delta \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \mathbf{v}\right) + \mathbf{A}(\mathbf{u},\, \mathbf{v}) = (\mathbf{f},\, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in (\mathbf{H}_0^1(\Omega))^n .$$

On peut alors poser le problème de la façon suivante :

Problème $(\mathcal{PV}_1)$:

On donne

$$\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2\left(0,\ T;\ \left(\mathbf{L}^2(\Omega)\right)^n\right), \tag{2.22}$$

$$\mathbf{u}_0 \in \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega)\right)^n \quad et \quad \mathbf{u}_1 \in \left(\mathbf{L}^2(\Omega)\right)^n. \tag{2.23}$$

On cherche $\mathbf{u}$ tel que

$$\mathbf{u} \in \mathbf{L}^\infty\left(0,\ T;\ \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega)\right)^n\right), \tag{2.24}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \in \mathbf{L}^\infty\left(0,\ T;\ \left(\mathbf{L}^2(\Omega)\right)^n\right), \tag{2.25}$$

$$\left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \mathbf{v}\right) + \delta \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \mathbf{v}\right) + \mathbf{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega)\right)^n, \tag{2.26}$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \quad et \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(0) = \mathbf{u}_1. \tag{2.27}$$

Proposition 2.3.1 *Supposons que la solution* $\mathbf{u}$ *est assez régulière, alors les problèmes* $(\mathcal{P}_1)$, $(\mathcal{PV}_1)$ *sont équivalents.*

Preuve. Soit $\mathbf{u}$ une solution de $(\mathcal{P}_1)$, alors

$$\left(\mathbf{u}'', \varphi\right) + \delta\left(\mathbf{u}', \varphi\right) + \mathbf{A}(\mathbf{u},\varphi) = (\mathbf{f},\varphi), \quad \forall\varphi \in (\mathfrak{D}(\Omega))^n .$$

Par passage à la limite pour φ dans $(\mathbf{H}_0^1(\Omega))^n$. On déduit que $\mathbf{u}$ est la solution du problème $(\mathcal{PV}_1)$.

Réciproquement :

Supposons que $\mathbf{u}$ est la solution de $(\mathcal{PV}_1)$. Posons

$$\mathbf{u}'' + \delta\mathbf{u}' - L\mathbf{u} - \mathbf{f} = \mathbf{g} \in \left(\mathfrak{D}'(\mathbf{Q}_T)\right)^n .$$

Donc

$$\left(\mathbf{u}'', \varphi\right) + \delta\left(\mathbf{u}', \varphi\right) + \mathbf{A}(\mathbf{u},\varphi) - (\mathbf{f},\varphi) = (\mathbf{g},\varphi), \quad \forall\varphi \in (\mathfrak{D}(\Omega))^n .$$

Or $\mathbf{u}$ est solution de $(\mathcal{PV}_1)$, par suite

$$0 = (\mathbf{g},\varphi), \quad \forall\varphi \in (\mathfrak{D}(\Omega))^n .$$

Alors $\mathbf{g} = 0$ presque partout. Par conséquent $\mathbf{u}$ sera solution du problème $(\mathcal{P}_1)$. ■

2.4 Existence et unicité de la solution

Théorème 2.4.1 Le problème $(\mathcal{PV}_1)$ admet une unique solution.

Lemme 2.4.1 *Le problème spectral* $\mathbf{A}(\mathbf{e}_m, \mathbf{v}) = \lambda_m(\mathbf{e}_m, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in (\mathbf{H}_0^1(\Omega))^n$, *admet une suite de solutions non nulles* $\mathbf{e}_i$*, correspondantes à une suite de valeurs propres* $\lambda_i > 0$*. Les fonctions* $\mathbf{e}_j$ *seront utilisées comme bases spéciales dans la méthode de Fœdo-Galerkin.*

Preuve du théorème 2.4.1 :

1. Existence :

La méthode utilisée s'appelle la méthode Fædo-Galerkin, elle se décompose en quatre étapes.

Etape.1 Approximation (recherche de solutions approchées).

Comme l'espace $(\mathbf{H}_0^1(\Omega))^n$ étant séparable, alors on utilise les bases introduites dans le lemme (2.4.1). On définit $\mathbf{u}_m(t)$ une solution approchée par

$$\mathbf{u}_m(\mathbf{t}) \in [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_m] \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_m(t) = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{g}_{jm}(t)\mathbf{e}_j,$$

telle que les $\mathbf{g}_{jm}$ étant à déterminer par les conditions :

$$\left(\mathbf{u}_m''(t), \mathbf{e}_j\right) + \delta\left(\mathbf{u}_m'(t), \mathbf{e}_j\right) + \mathbf{A}(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{e}_j) = (\mathbf{f}, \mathbf{e}_j), \quad \forall j, 1 \leq j \leq m. \tag{2.28}$$

Avec les conditions initiales en particulier :

$$\mathbf{u}_m(0) = \mathbf{u}_{0m} \longrightarrow \mathbf{u}_0 \in \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega)\right)^n, \tag{2.29}$$

$$\mathbf{u}_m'(0) = \mathbf{u}_{1m} \longrightarrow \mathbf{u}_1 \in \left(\mathbf{L}^2(\Omega)\right)^n. \tag{2.30}$$

Le système (2.28) est un système différentiel ordinaire linéaire. Si on prend en considération les conditions (2.29), (2.30), le système va admettre une solution sur $[0,\ t_m]$, où $t_m \leq T$. On va obtenir des estimations à priori pour impliquer que $t_m = T$.

Etape.2 Estimation à priori.

Multiplions (2.28) par $\mathbf{g}'_{jm}(t)$ et sommons sur j dans $[1, m]$. On aura

$$\left(\mathbf{u}''_m(t),\ \mathbf{u}'_m(t)\right) + \mathbf{A}\left(\mathbf{u}_m(t),\ \mathbf{u}'_m(t)\right) + \delta\left(\mathbf{u}'_m(t),\ \mathbf{u}'_m(t)\right) = \left(\mathbf{f}\,(t)\,,\ \mathbf{u}'_m(t)\right).$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|\mathbf{u}'_m(t)\right|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\mathbf{u}_m(t)\right\|^2 + \delta\left|\mathbf{u}'_m(t)\right|^2 = (\mathbf{f}\,(t)\,, \mathbf{u}'_m(t)), \qquad (2.31)$$

On remarque que (2.31) donne

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left|\mathbf{u}'_m(t)\right|^2 + \left\|\mathbf{u}_m(t)\right\|^2\right) + \delta\left|\mathbf{u}'_m(t)\right|^2 = (\mathbf{f}\,(t)\,,\ \mathbf{u}'_m(t)).$$

On multiplie par 2, et on intègre sur l'intervalle $(0, t)$, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on aura

$$\left|\mathbf{u}'_m(t)\right|^2 + \left\|\mathbf{u}_m(t)\right\|^2 + 2\delta\int_0^t \left|\mathbf{u}'_m(\sigma)\right|^2 d\sigma \leq \left|\mathbf{u}_{1m}\right|^2 + \left\|\mathbf{u}_{0m}\right\|^2 + 2\int_0^t \left|\mathbf{f}\,(\sigma)\right|\left|\mathbf{u}'_m(\sigma)\right| d\sigma.$$

Comme $\mathrm{u}_0 = \mathbf{H}_0^1(\Omega) - \lim u_{0m}$, il existe une constante $C_0 > 0$ telle que l'on ait pour tout $m \in \mathbb{N}^\star$, $\|u_{0m}\| < C_0$, et comme $\mathrm{u}_1 = \mathbf{L}^2(\Omega) - \lim u_{1m}$, il existe une constante $C_1 > 0$ telle que l'on ait pour tout $m \in \mathbb{N}^\star$, $|u_{1m}| < C_1$, en utilisant l'inégalité $|ab| \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$, on en déduit

$$\left|\mathbf{u}'_m(t)\right|^2 + \left\|\mathbf{u}_m(t)\right\|^2 + 2\delta\int_0^t \left|\mathbf{u}'_m(\sigma)\right|^2 d\sigma \leq c + \int_0^t \left|\mathbf{f}(\sigma)\right|^2 d\sigma + \int_0^t \left|\mathbf{u}'_m(\sigma)\right|^2 d\sigma,$$

d'après (2.22)

$$\int_0^t \left|\mathbf{f}(\sigma)\right|^2 d\sigma \leq c,$$

on aura donc

$$\|\mathbf{u}_m(t)\|^2 + \left|\mathbf{u}_m^{'}(t)\right|^2 \leq c + (1-2\delta)\int_0^t \left|\mathbf{u}_m^{'}(\sigma)\right|^2 d\sigma,$$

on choisit $1-2\delta \leqslant 1$, et on applique le lemme de Gronwall, on a

$$\|\mathbf{u}_m(t)\|^2 + \left|\mathbf{u}_m^{'}(t)\right|^2 \leq c.$$

On déduit alors que $t_m = T$, de plus on a les estimations

$$\mathbf{u}_m \text{ demeure dans un borné de } \mathbf{L}^\infty\left(0,\ T;\ \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega)\right)^n\right), \tag{2.32}$$

$$\mathbf{u}_m^{'} \text{ demeure dans un borné de } \mathbf{L}^\infty\left(0,\ T;\ \left(\mathbf{L}^2(\Omega)\right)^n\right). \tag{2.33}$$

Etape.3 Passage à la limite

D'après (2.32) et (2.33), on peut extraire une suite $\mathbf{u}_\mu(t)$ vérifiant :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\mu &\longrightarrow \mathbf{u} \text{ dans } \mathbf{L}^\infty\left(0,\ T;\ (\mathbf{H}_0^1(\Omega))^n\right) \text{ faible étoile,} \\ \mathbf{u}_m^{'} &\longrightarrow \mathbf{u}^{'} \text{ dans } \mathbf{L}^\infty\left(0,\ T;\ \left(\mathbf{L}^2(\Omega)\right)^n\right) \text{ faible étoile.} \end{aligned}$$

On déduit que

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}_\mu,\, \mathbf{e}_j) \longrightarrow \mathbf{A}(\mathbf{u},\, \mathbf{e}_j) \text{ dans } \mathbf{L}^\infty(0,\, T),$$

et

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u}_\mu,\, \mathbf{e}_j\right) \longrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u},\, \mathbf{e}_j\right) \text{ dans } \mathbf{L}^\infty(0,\, T),$$

par conséquent

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{u}_\mu,\, \mathbf{e}_j\right) \longrightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{u},\, \mathbf{e}_j\right) \text{ dans } \mathfrak{D}^{'}(0, T). \tag{2.34}$$

Par passage à la limite pour les termes de l'équation (2.28) dans $\mathfrak{D}'(0,\ \tau)$, (par exemple), on aura

$$\left(\mathbf{u}''(t),\ \mathbf{e}_j\right) + \mathbf{A}\left(\mathbf{u}(t),\ \mathbf{e}_j\right) + \delta\left(\mathbf{u}'(t),\ \mathbf{e}_j\right) = \left(\mathbf{f}\left(t\right),\mathbf{e}_j\right),\quad j = 1,\ldots,m, \tag{2.35}$$

Alors

$$\left(\mathbf{u}''(t),\ \mathbf{v}\right) + \mathbf{A}\left(\mathbf{u}(t),\ \mathbf{v}\right) + \delta\left(\mathbf{u}'(t),\ \mathbf{v}\right) = \left(\mathbf{f}\left(t\right),\mathbf{v}\right),\quad \forall \mathbf{v} \in \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega)\right)^n.$$

Etape.4 Vérification des conditions aux limites.

D'après (2.32) et (2.33) et le lemme1.3.1 (cf. Lions[6]) on a, en particulier,

$$\mathbf{u}_\mu\left(0\right) \longrightarrow \mathbf{u}\left(0\right) \text{ dans } \left(\mathbf{L}^2(\Omega)\right)^n \text{ faible,}$$

or

$$\mathbf{u}_\mu\left(0\right) = \mathbf{u}_{0\mu} \longrightarrow \mathbf{u}_0 \ \ \textit{dans} \ \ \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega)\right)^n,$$

donc

$$\mathbf{u}\left(0\right) = \mathbf{u}_0.$$

Par ailleurs, d'après (2.34) on a ainsi obtenu que

$$\tfrac{d}{dt}\left(\mathbf{u}'_\mu,\mathbf{e}_j\right) = \left(\mathbf{u}''_\mu,\mathbf{e}_j\right) \longrightarrow \left(\mathbf{f},e_j\right) - \mathbf{A}\left(\mathbf{u},e_j\right) - \delta\left(\mathbf{u}',e_j\right) = \left(\mathbf{u}'',\mathbf{e}_j\right) = \tfrac{d}{dt}\left(\mathbf{u}',\ \mathbf{e}_j\right),$$

dans $L^\infty\left(0,T\right)$ faible étoile, donc (d'après par exemple le lemme1.3.1(cf. Lions[6]) avec $\mathbf{X} = \mathbb{R}$)

$$\left.\left(\mathbf{u}'_\mu,\mathbf{e}_j\right)\right|_{t=0} = \left(\mathbf{u}_{1\mu},\mathbf{e}_j\right) \longrightarrow \left(\mathbf{u}'\left(0\right),\mathbf{e}_j\right),$$

et par conséquent

$$\left(\mathbf{u}'_\mu\left(0\right),\mathbf{e}_j\right) = \left(\mathbf{u}_1,\ \mathbf{e}_j\right) \qquad \forall j,$$

donc

$$\mathbf{u}'\left(0\right) = \mathbf{u}_1.$$

2. Unicité :

Supposons que le problème admet deux solutions $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$.

Posons $\mathbf{U} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$. On a

$$\mathbf{u}_1^{''} + \delta \mathbf{u}_1^{'} - L\mathbf{u}_1 = \mathbf{f},$$

$$\mathbf{u}_2^{''} + \delta \mathbf{u}_2^{'} - L\mathbf{u}_2 = \mathbf{f}.$$

Faisons la différence des deux systèmes, on obtient le système

$$\mathbf{U}^{''} + \delta \mathbf{U}^{'} - L\mathbf{U} = 0, \tag{2.36}$$

Remarquons que (2.36) donne

$$\left(\mathbf{U}^{''}, \varphi\right) + \delta \left(\mathbf{U}^{'}, \varphi\right) + \mathbf{A}\left(\mathbf{U}, \varphi\right) = \mathbf{0}, \qquad \forall \varphi \in \mathbf{V}, \tag{2.37}$$

$$\begin{cases} \mathbf{U}_0 = \mathbf{U}(0) = 0, \\ \mathbf{U}_1 = \mathbf{U}'(0) = 0. \end{cases} \quad x \in \Omega. \tag{2.38}$$

Comme $\mathbf{U}^{'}(t)$ n'appartient pas à $\mathbf{H}_0^1(\Omega)^n$, on ne peut pas remplacer φ par $\mathbf{U}^{'}(t)$ dans (2.37). Donc il faut introduire une fonction auxiliaire : Soit $s \in]0, T[$. On pose

$$\mathbf{z}(t) = \begin{cases} -\int_t^s \mathbf{U}(\sigma)\, d\sigma & \text{si} \quad t \leq s, \\ 0 & \text{si} \quad t > s. \end{cases}$$

C.-à-d. nous fixons $s \in]0; T[$ et introduisons la primitive temporelle $\mathbf{z}$ de $-\mathbf{U}$, qui s'annule en s. Clairement

$$\mathbf{z}(t) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)^n \quad \text{et} \quad \mathbf{z}'(t) = \mathbf{U}(t) \quad \forall t \leqslant s,$$

on pose

$$\mathbf{U}_1(t) = \int_0^s \mathbf{U}(\sigma)\, d\sigma,$$

de sorte que $\mathbf{z}(t) = \mathbf{U}_1(t) - \mathbf{U}_1(s)$ si $t \leq s$, soit :

$$\left(\mathbf{U}'',\, \mathbf{z}\right) + \delta \left(\mathbf{U}',\, \mathbf{z}\right) + \mathbf{A}(\mathbf{U}, \mathbf{z}) = 0,$$

alors

$$\int_0^s \left(\mathbf{U}'',\, \mathbf{z}\right) dt + \delta \int_0^s \left(\mathbf{U}',\, \mathbf{z}\right) dt + \int_0^s \mathbf{A}(\mathbf{U}, \mathbf{z}) dt = 0,$$

toutes les intégrations étant maintenant loisibles, on obtient :

$$-\int_0^s \left(\mathbf{U}',\, \mathbf{z}'\right) dt - \delta \int_0^s \left(\mathbf{U},\, \mathbf{z}'\right) dt + \int_0^s \mathbf{A}(\mathbf{U}, \mathbf{z}) dt = 0. \tag{2.39}$$

Comme $\mathbf{z}'(t) = \mathbf{U}(t)$, $\mathbf{z}(0) = -\mathbf{U}_1(s)$ et $\mathbf{U}_1(0) = 0$ on a :

$$\begin{aligned}
-\int_0^s \left(\mathbf{U}', \mathbf{z}'\right) dt &= -\int_0^s \left(\mathbf{U}', \mathbf{U}\right) dt \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^s \frac{d}{dt} \left\|\mathbf{U}(t)\right\|^2_{\mathbf{L}^2(\boldsymbol{\Omega})^n} dt \\
&= -\frac{1}{2} \left\|\mathbf{U}(s)\right\|^2_{\mathbf{L}^2(\boldsymbol{\Omega})^n} + \frac{1}{2} \left\|\mathbf{U}(0)\right\|^2_{\mathbf{L}^2(\boldsymbol{\Omega})^n} \\
&= -\frac{1}{2} \left\|\mathbf{U}(s)\right\|^2_{\mathbf{L}^2(\boldsymbol{\Omega})^n},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_0^s \mathbf{A}\left(\mathbf{U}, \mathbf{z}\right) dt &= \int_0^s \mathbf{A}\left(\mathbf{z}', \mathbf{z}\right) dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^s \frac{d}{dt} \mathbf{A}\left(\mathbf{z}, \mathbf{z}\right) dt,
\end{aligned}$$

aussi

$$\begin{aligned}
-\int_0^s \left(\mathbf{U}, \mathbf{z}'\right) dt &= -\int_0^s \left(\mathbf{U}, \mathbf{U}\right) dt \\
&= -\int_0^s \left\|\mathbf{U}(t)\right\|^2_{\mathbf{L}^2(\boldsymbol{\Omega})^n} dt.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\int_0^s \mathbf{A}(\mathbf{U},\mathbf{z})\,dt &= \frac{1}{2}\int_0^s \frac{d}{dt}\mathbf{A}(\mathbf{U}_1(t)\,\mathbf{U}_1(t))\,dt - \int_0^s \frac{d}{dt}\mathbf{A}(\mathbf{U}_1(t),\mathbf{U}_1(s))\,dt \\
&= \frac{1}{2}\mathbf{A}(\mathbf{U}_1(s),\mathbf{U}_1(s)) - \frac{1}{2}\mathbf{A}(\mathbf{U}_1(0),\mathbf{U}_1(0)) - \mathbf{A}(\mathbf{U}_1(s),\mathbf{U}_1(s)) \\
&\quad +\mathbf{A}(\mathbf{U}_1(0),\mathbf{U}_1(s)) \\
&= -\frac{1}{2}\left\|\mathbf{U}_1(s)\right\|_1^2.
\end{aligned}$$

On déduit alors que

$$-\frac{1}{2}\left\|\mathbf{U}(s)\right\|^2_{\mathbf{L}^2(\boldsymbol{\Omega})^n} - \delta\int_0^s \left\|\mathbf{U}(t)\right\|^2_{\mathbf{L}^2(\boldsymbol{\Omega})^n} dt - \frac{1}{2}\left\|\mathbf{U}_1(s)\right\|_1^2 = 0 \Longrightarrow \mathbf{U}(s) = 0, \quad \forall s \in \left]0, T\right[.$$

On aura finalement $\mathbf{U} = 0$. D'où l'unicité de la solution.

2.5 Une équation hyperbolique non linéaire perturbé avec un terme frictionnaire

On propose maintenant à étudier un exemple analogue à l'équation aux dérivées partielles, qui intervient en mécanique quantique relativiste, perturbé avec un terme frictionnaire linéaire.

2.5.1 Position du problème

Soit $\rho > 0$ (on pourrait supposer seulement > -1), on propose maintenant le problème suivant :

Problème $(\mathcal{P}_2)$ **:** On donne

$$\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2\left(0,\ T;\ \left(\mathbf{L}^2(\Omega)\right)^n\right), \tag{2.40}$$

$$\mathbf{u}_0 \in \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{L}^{\rho+2}(\Omega)\right)^n, \tag{2.41}$$

$$\mathbf{u}_1 \in \left(\mathbf{L}^2(\Omega)\right)^n. \tag{2.42}$$

On cherche $\mathbf{u}$ tel que

$$\mathbf{u} \in \mathbf{L}^\infty\left(0,\ T;\ \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{L}^{\rho+2}(\Omega)\right)^n\right), \tag{2.43}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \in \mathbf{L}^\infty\left(0,\ T;\ \left(\mathbf{L}^2(\Omega)\right)^n\right), \tag{2.44}$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \delta\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - L\mathbf{u} + |\mathbf{u}|^\rho\, \mathbf{u} = \mathbf{f}, \tag{2.45}$$

$$\mathbf{u}(x,0) = \mathbf{u}_0\,(x) \quad et \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(x,0) = \mathbf{u}_1\,(x). \tag{2.46}$$

Notons que pour $\lambda + \mu = 0$ et $\delta = 0$; on retrouve le problème intervenant en mécanique quantique relativiste traité dans [6].

Proposition 2.5.1 *La condition (2.46) a un sens.*

Preuve. De (2.43) et (2.44) et de lemme1.3.1(cf. Lions [6]) il résulte en particulier que u est continue de $[0,\ T] \longrightarrow (\mathbf{L}^2(\Omega))^n$, de sorte que $\mathbf{u}(0)$ a un sens, pour vérifier que la deuxième condition de (2.46) a un sens, on doit utiliser l'équation (2.45), qui s'écrit sous la forme suivante

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = L\mathbf{u} - \delta \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{f} - |\mathbf{u}|^\rho \mathbf{u}, \tag{2.47}$$

comme

$$L \in \mathcal{L}\left(\left(\mathbf{H}_0^1(\Omega)\right)^n;\ \left(\mathbf{H}^{-1}(\Omega)\right)^n\right),$$

on a

$$L\mathbf{u} \in \mathbf{L}^\infty\left(0,\ T;\ \left(\mathbf{H}^{-1}(\Omega)\right)^n\right),$$

et comme $f \longrightarrow |f|^\rho f$ applique $L^{\rho+2}(\Omega) \longrightarrow L^q(\Omega)$, $\dfrac{1}{\rho+2} + \dfrac{1}{q} = 1,$
on vérifie sans peine que

$$|\mathbf{u}|^\rho \mathbf{u} \in \mathbf{L}^\infty\left(0,\ T;\ (\mathbf{L}^q(\Omega))^n\right).$$

De sorte que (2.47) entraine :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \in \mathbf{L}^2\left(0,\ T;\ \mathbf{L}^2(\Omega)^n\right) + \mathbf{L}^\infty\left(0,\ T;\ \left(\mathbf{H}^{-1}(\Omega) + \mathbf{L}^q(\Omega)\right)^n\right), \tag{2.48}$$

or $\left(\mathbf{H}^{-1}(\Omega) + \mathbf{L}^q(\Omega)\right)^n$ est muni de la structure de dual fort de $\left(\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{L}^{\rho+2}(\Omega)\right)^n$, d'où, en particulier

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \in \mathbf{L}^2\left(0,\ T;\ \left(\mathbf{H}^{-1}(\Omega) + \mathbf{L}^q(\Omega)\right)^n\right), \tag{2.49}$$

ce qui, joint à (2.44) que la deuxième condition de (2.45) montre, grâce au lemme1.3.1(cf. Lions [6]), que $\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ est continue de$[0,\ T] \longrightarrow \left(\mathbf{H}^{-1}(\Omega)\right)^n + (\mathbf{L}^q(\Omega))^n$, ce qui justifie l'existence de $\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(0)$. Donc on verra qu'ils vérifient $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$ et $\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(0) = \mathbf{u}_1$. ■

2.6 Formulation variationnelle

Multiplions l'équation (2.45) par une fonction $\mathbf{v} \in (\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{L}^{\rho+2}(\Omega))^n$ et intégrons sur Ω. On déduit, en utilisant la formule de Green que

$$\left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \mathbf{v}\right) + \delta\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \mathbf{v}\right) + \mathbf{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (|\mathbf{u}|^\rho\, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in (\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{L}^{\rho+2}(\Omega))^n.$$

On peut alors poser le problème de la façon suivante :

Problème $(\mathcal{PV}_2)$:

On donne

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &\in \mathbf{L}^2\left(0,\ T;\ \left(\mathbf{L}^2(\Omega)\right)^n\right), && (2.50)\\ \mathbf{u}_0 &\in \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{L}^{\rho+2}(\Omega)\right)^n, && (2.51)\\ \mathbf{u}_1 &\in \left(\mathbf{L}^2(\Omega)\right)^n. && (2.52) \end{aligned}$$

On cherche $\mathbf{u}$ tels que

$$\mathbf{u} \in \mathbf{L}^\infty\left(0,\ T;\ \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{L}^{\rho+2}(\Omega)\right)^n\right), \tag{2.53}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \in \mathbf{L}^\infty\left(0,\ T;\ \left(\mathbf{L}^2(\Omega)\right)^n\right), \tag{2.54}$$

$$\left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \mathbf{v}\right) + \delta\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \mathbf{v}\right) + \mathbf{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\,|\mathbf{u}|^\rho\, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{L}^{\rho+2}(\Omega)\right)^n, \tag{2.55}$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \quad et \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(0) = \mathbf{u}_1. \tag{2.56}$$

Remarque 2.6.1 *Supposons que la solution* $\mathbf{u}$ *est assez régulière, alors les problèmes* $(\mathcal{P}_2)$, $(\mathcal{PV}_2)$ *sont équivalents, (voir la proposition(2.3.1)*

2.7 Existence et unicité de la solution

Les techniques qu'on utilisera seront celles de la méthode de compacité.

Théorème 2.7.1 le problème $(\mathcal{PV}_2)$ admet une unique solution pour T fini quelconque si

$$\rho \leqslant \frac{2}{n-2}, (\rho \text{ fini quelconque si } n = 2). \tag{2.57}$$

Lemme 2.7.1 *L'espace* $\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{L}^{\rho+2}(\Omega)$ *est séparable, (voir [6]).*

Corollaire 2.7.1 *Il existe une suite* $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m, \ldots$ *ayant les propriétés suivantes*

$\mathbf{e}_i \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{L}^{\rho+2}(\Omega)$,

$\forall m \geq 0$, $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$ *sont linéairement indépendantes,*

les combinaisons linéaires finies des $\mathbf{e}_i$ *sont denses dans* $\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{L}^{\rho+2}(\Omega)$.

Preuve du théorème 2.7.1

Existence La preuve se fait en quatre étapes

Etape.1 Approximation.

On utilise les bases introduites dans le lemme 2.7.1 et le corollaire 2.7.1. On définit une solution approchée $\mathbf{u}_m(t)$ par

$$\mathbf{u}_m(\mathbf{t}) \in [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_m] \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_m(t) = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{g}_{jm}(t)\mathbf{e}_j,$$

telle que

$$\left(\mathbf{u}_m''(t), \mathbf{e}_j\right) + \delta\left(\mathbf{u}_m'(t), \mathbf{e}_j\right) + \mathbf{A}(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{e}_j) + (|\mathbf{u}_m(t)|^\rho\, \mathbf{u}_m(t), \mathbf{e_j}) = (\mathbf{f}, \mathbf{e}_j), \quad j = 1, \ldots, m, \tag{2.58}$$

avec

$$\mathbf{u}_m(0) = \mathbf{u}_{0m} \longrightarrow \mathbf{u}_0 \ dans \ \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{L}^{\rho+2}(\Omega)\right)^n, \tag{2.59}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(0) = \mathbf{u}_{1m} \longrightarrow \mathbf{u}_1 \ dans \ \left(\mathbf{L}^2(\Omega)\right)^n. \tag{2.60}$$

C'est un système différentiel ordinaire. Si on prend en considération les conditions (2.59), (2.60) le système va admettre une solution sur $[0, \ t_m]$, où $t_m \leq T$. Les estimations a priori qui suivent montrerons que $t_m = T$.

Etape.2 Estimation a priori I.

Multiplions (2.58) par $\mathbf{g}'_{jm}(t)$ et sommons sur j. On aura

$$\left(\mathbf{u}''_m(t), \mathbf{u}'_m(t)\right) + \delta\left(\mathbf{u}'_m(t), \mathbf{u}'_m(t)\right) + \mathbf{A}\left(\mathbf{u}_m(t), \ \mathbf{u}'_m(t)\right) + \left(\left|\mathbf{u_m}(t)\right|^{\rho} \mathbf{u}_m(t), \ \mathbf{u}'_m(t)\right)$$
$$= \left(\mathbf{f}(t), \ \mathbf{u}'_m(t)\right).$$

Alors

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left|\mathbf{u}'_m(t)\right|^2 + \mathbf{A}\left(\mathbf{u}_m(t), \ \mathbf{u}_m(t)\right)\right) + \delta\left|\mathbf{u}'_m(t)\right|^2 + \frac{1}{\rho+2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \left|\mathbf{u}_m(\mathbf{x}, \ t)\right|^{\rho+2} \mathbf{dx}$$
$$= \left(\mathbf{f}(t), \ \mathbf{u}'_m(t)\right), \tag{2.61}$$

Remarquons que (2.61) donne

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left|\mathbf{u}'_m(t)\right|^2 + \frac{1}{2}\left\|\mathbf{u}_m(t)\right\|^2 + \frac{1}{\rho+2}\int_\Omega \left|\mathbf{u}_m(\mathbf{x}, \ t)\right|^{\rho+2} \mathbf{dx}\right) + \delta\left|\mathbf{u}'_m(t)\right|^2 = \left(\mathbf{f}(t), \ \mathbf{u}'_m(t)\right). \tag{2.62}$$

Posons $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{A}(\mathbf{v}, \ \mathbf{v})}$ (=norme sur $\left(\mathbf{H}_0^1(\Omega)\right)^n$équivalente a $\|\mathbf{v}\|_{(\mathbf{H}^1(\Omega))^n}$).

.

Par conséquent

$$\frac{1}{2}\left|\mathbf{u}_m^{'}(t)\right|^2+\frac{1}{2}\left\|\mathbf{u}_m(t)\right\|^2+\frac{1}{\rho+2}\int_\Omega\left|\mathbf{u}_m(\mathbf{x},\ t)\right|^{\rho+2}dx\leq\frac{1}{2}\left|\mathbf{u}_{1m}\right|^2+\frac{1}{2}\left\|\mathbf{u}_{0m}\right\|^2$$
$$+\frac{1}{\rho+2}\left\|\mathbf{u}_m(0)\right\|^{\rho+2}_{(L^{\rho+2}(\Omega))^n}-\delta\int_0^t\left|\mathbf{u}_m^{'}(\sigma)\right|^2d\sigma+\int_0^t\left|\mathbf{f}(\sigma)\right|\left|\mathbf{u}_m^{'}(\sigma)\right|d\sigma, \tag{2.63}$$

D'après (2.41), (2.42) le deuxième membre de (2.63) est majoré par

$$\leq c-\delta\int_0^t\left|\mathbf{u}_m^{'}(\sigma)\right|^2d\sigma+\int_0^t\left|\mathbf{f}(\sigma)\right|\left|\mathbf{u}_m^{'}(\sigma)\right|d\sigma,$$

d'où

$$\left|\mathbf{u}_m^{'}(t)\right|^2+\left\|\mathbf{u}_m(t)\right\|^2+\frac{2}{\rho+2}\int_\Omega\left|\mathbf{u}_m(\mathbf{x},\ t)\right|^{\rho+2}\mathbf{dx}\leq 2c+\int_0^t\left|\mathbf{f}(\sigma)\right|^2d\sigma+(1-2\delta)\int_0^t\left|\mathbf{u}_m^{'}(\sigma)\right|^2d\sigma, \tag{2.64}$$

(car $2\sqrt{a}\sqrt{b}\leq a+b$), d'après (2.40)

$$\int_0^t\left|\mathbf{f}(\sigma)\right|^2d\sigma\leq c.$$

On déduit donc, en particulier, de (2.64, que

$$\left|\mathbf{u}_m^{'}(t)\right|^2\leq c+(1-2\delta)\int_0^t\left|\mathbf{u}_m^{'}(\sigma)\right|^2d\sigma,$$

on choisi $1-2\delta\leqslant 1$, et on applique le lemme de Gronwall, on en déduit

$$\left|\mathbf{u}_m^{'}(t)\right|\leq c.$$

Reprenant (2.64), nous obtiendrons l'estimation

$$\left|\mathbf{u}_m^{'}(t)\right|^2+\left\|\mathbf{u}_m(t)\right\|^2+\frac{2}{\rho+2}\int_\Omega\left|\mathbf{u}_m(\mathbf{x},\ t)\right|^{\rho+2}\mathbf{dx}\leq c.$$

On déduit que $t_m = T$; de plus on a les estimations

$$\mathbf{u}_m \textit{ demeure dans un borné de } \mathbf{L}^\infty\left(0,\ T;\ \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{L}^{\rho+2}(\Omega)\right)^n\right), \tag{2.65}$$

$$\mathbf{u}_m^{'} \textit{ demeure dans un borné de } \mathbf{L}^\infty\left(0,\ T;\ \left(\mathbf{L}^2(\Omega)\right)^n\right). \tag{2.66}$$

Etape.3 Passage à la limite.

D'après le théorème de Dunford Pettis (cf. par exemple K.Yosida[24]) l'espace $\mathbf{L}^\infty\left(0,\ T;\ (\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{L}^{\rho+2}(\Omega))^n\right)$ est le dual de $\mathbf{L}^1\left(0,\ T;\ \left(\mathbf{H}^{-1}(\Omega) + \mathbf{L}^{p'}(\Omega)\right)^n\right)$ avec $p^{'} = \dfrac{\rho+2}{\rho+1}$, (resp. $\mathbf{L}^\infty\left(0,\ T;\ (\mathbf{L}^2(\Omega))^n\right)$ est le dual de $\mathbf{L}^1\left(0,\ T;\ (\mathbf{L}^2(\Omega))^n\right)$)
et par conséquent d'après (2.65), (2.66), on peut extraire une suite $\mathbf{u}_\mu(t)$ telle que

$$\mathbf{u}_\mu \longrightarrow \mathbf{u} \textit{ dans } \mathbf{L}^\infty\left(0,\ T;\ \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{L}^{\rho+2}(\Omega)\right)^n\right) \textit{ faible étoile}, \tag{2.67}$$

$$\mathbf{u}_\mu^{'} \longrightarrow \mathbf{u}^{'} \textit{ dans } \mathbf{L}^\infty\left(0,\ T;\ \left(\mathbf{L}^2(\Omega)\right)^n\right) \textit{ faible étoile.} \tag{2.68}$$

On sait d'après (2.65) que

$$\mathbf{u}_m \text{ demeure dans un borné de } \mathbf{L}^\infty\left(0,\ T;\ (\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{L}^{\rho+2}(\Omega))^n\right),$$

or

$$\begin{aligned}\mathbf{L}^\infty\left(0,\ T;\ \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{L}^{\rho+2}(\Omega)\right)^n\right) &\subset \mathbf{L}^\infty\left(0,\ T;\ \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega)\right)^n\right) \\ &\subset \mathbf{L}^2\left(0,\ T;\ \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega)\right)^n\right).\end{aligned} \tag{2.69}$$

Alors (2.66) et (2.69), montrent que

$$\mathbf{u}_m \text{ demeure dans un borné de } \left(\mathbf{H}^1(\mathbf{Q}_T)\right)^n.$$

Or d'après le théorème de compacité, de Rellich (voir [8]).

L'injection de $\mathbf{H}^1(\mathbf{Q}_T)$ dans $\mathbf{L}^2(\mathbf{Q}_T)$ est compacte.

On peut alors supposer que la suite, ainsi extraite $\mathbf{u}_\mu$ vérifie en outre

$$\mathbf{u}_\mu \longrightarrow \mathbf{u} \textit{ dans } \left(\mathbf{L}^2(\mathbf{Q}_T)\right)^n \textit{ fort et presque partout.} \tag{2.70}$$

Et comme l'application $\mathbf{f} \longrightarrow |\mathbf{f}|^\rho |\mathbf{f}|$, applique $\mathbf{L}^{\rho+2}(\Omega)$ sur $\mathbf{L}^q(\Omega)$, avec $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{\rho+2} = 1$, alors

$$|\mathbf{u}_\mu|^\rho \mathbf{u}_\mu \text{ demeure dans un borné de } \mathbf{L}^\infty\left(0,\ T;\ (\mathbf{L}^q(\Omega))^n\right),$$

il existe donc $\mathbf{w} \in \mathbf{L}^\infty(0, T; (\mathbf{L}^q(\Omega))^n)$ telle que

$$|\mathbf{u}_\mu|^\rho \mathbf{u}_\mu \longrightarrow \mathbf{w} \textit{ dans } \mathbf{L}^\infty\left(0,\ T;\ (\mathbf{L}^q(\Omega))^n\right) \textit{ faibletoile.} \tag{2.71}$$

Pour cela, on applique le lemme1.5.2 avec

$$\mathbf{\Theta} = \mathbf{Q}_T,\ \mathbf{g}_\mu = |\mathbf{u}_\mu|^\rho \mathbf{u}_\mu, \text{ avec } q = p' = \frac{\rho+2}{\rho+1},$$

d'après (2.70)

$$\mathbf{u}_\mu \longrightarrow \mathbf{u} \text{ presque partout dans } \mathbf{\Theta},$$

par suite

$$\mathbf{g}_\mu \longrightarrow \mathbf{g} = |\mathbf{u}|^\rho \mathbf{u} \text{ presque partout dans } \mathbf{\Theta},$$

de plus (2.71) donne

$$\mathbf{g}_\mu \longrightarrow \mathbf{w} \text{ dans } \mathbf{L}^\infty\left(0,\ T;\ (\mathbf{L}^q(\Omega))^n\right) \text{ faible étoile,}$$

or

$$\mathbf{L}^{\infty}\left(0,\ T;\ (\mathbf{L}^{q}(\Omega))^{n}\right) \subset \mathbf{L}^{q}(\boldsymbol{\Theta}),$$

alors

$$\mathbf{g}_{\mu} \longrightarrow \mathbf{w} \text{ dans } \mathbf{L}^{q}(\boldsymbol{\Theta}) \text{ faible.}$$

Par conséquent

$$\mathbf{w} = \mathbf{g} = |\mathbf{u}|^{\rho}\, \mathbf{u}.$$

C'est à dire qu'on a la convergence suivante :

$$|\mathbf{u}_{\mu}|^{\rho}\, \mathbf{u}_{\mu} \longrightarrow |\mathbf{u}|^{\rho}\, \mathbf{u} \; \textit{dans} \; \mathbf{L}^{\infty}\left(0,\ T;\ (\mathbf{L}^{\rho+2}(\Omega))^{n}\right) \; \textit{faible étoile.} \tag{2.72}$$

On déduit de (2.66), (2.67), (2.68) et (2.72) que

$$\begin{array}{rcl}
\mathbf{A}(\mathbf{u}_{\mu}, \mathbf{e}_{j}) & \longrightarrow & \mathbf{A}(\mathbf{u}, \mathbf{e}_{j}) \; \textit{dans} \; \mathbf{L}^{\infty}(0,T), \\
\left(\mathbf{u}_{\mu}^{'}, \mathbf{e}_{j}\right) & \longrightarrow & \left(\mathbf{u}^{'}, \mathbf{e}_{j}\right) \; \textit{dans} \; \mathbf{L}^{\infty}(0,T), \\
\left(\mathbf{u}_{\mu}^{''}, \mathbf{e}_{j}\right) & = & \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{u}_{\mu}^{'}, \mathbf{e}_{j}\right) \longrightarrow \left(\mathbf{u}^{''}, \mathbf{e}_{j}\right) \; \textit{dans} \; \mathfrak{D}^{'}(0,T), \\
(\,|\mathbf{u}_{\mu}(t)|^{\rho}\, \mathbf{u}_{\mu}(t), \mathbf{e}_{j}) & \longrightarrow & (\,|\mathbf{u}(t)|^{\rho}\, \mathbf{u}(t), \mathbf{e}_{j}) \; \textit{dans} \; \mathbf{L}^{\infty}(0,T).
\end{array} \tag{2.73}$$

Par passage à la limite dans les termes d'équations (2.58) dans $\mathfrak{D}^{'}(0,\ T)$ (par exemple) ; on aura

$$\frac{d^{2}}{dt^{2}}\,(\mathbf{u},\, \mathbf{e}_{j}) + \delta \frac{d}{dt}\,(\mathbf{u},\, \mathbf{e}_{j}) + \mathbf{A}(\mathbf{u}(t),\, \mathbf{e}_{j}) + (\,|\mathbf{u}(t)|^{\rho}\, \mathbf{u}(t),\, \mathbf{e}_{j}) = (\mathbf{f},\, \mathbf{e}_{j}), \quad j = 1,\, \ldots,\, m.$$

Par conséquent

$$\frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{u},\,\mathbf{v})+\delta\frac{d}{dt}(\mathbf{u},\,\mathbf{v})+\mathbf{A}(\mathbf{u}(t),\,\mathbf{v})+(\,|\mathbf{u}(t)|^{\rho}\,\mathbf{u}(t),\,\mathbf{v})=(\mathbf{f},\,\mathbf{v}),$$
$$\forall \mathbf{v}\in\left(\mathbf{H}_0^1(\Omega)\cap\mathbf{L}^{\rho+2}(\Omega)\right)^n,$$

d'où l'existence de la solution.

Etape.4 Vérification des conditions aux limites.

D'après (2.67) et (2.68) et le Lemme 1.3.1(cf. Lions[6]) on a, en particulier,

$$\mathbf{u}_\mu(0)\longrightarrow\mathbf{u}(0)\text{ dans }\left(\mathbf{L}^2\left(\Omega\right)\right)^n\text{ faible},$$

or $\mathbf{u}_\mu(0)=\mathbf{u}_{0\mu}\longrightarrow\mathbf{u}_0$ dans $\left(\mathbf{H}_0^1(\Omega)\right)^n\cap\left(\mathbf{L}^{\rho+2}(\Omega)\right)^n$, donc on a $\mathbf{u}(0)=\mathbf{u}_0$. Par ailleurs, d'après (2.73) on a

$$(\mathbf{u}''_\mu(t),\,e_j)\longrightarrow(\mathbf{u}''(t),\,e_j)\text{ dans }\mathbf{L}^\infty(0,\,T)\text{ faible étoile},$$

donc (d'après par exemple le Lemme1.3.1(cf. Lions[6]) avec $\mathbf{X}=\mathbb{R}$)

$$(\mathbf{u}'_\mu(0),\,e_j)\longrightarrow(\mathbf{u}'(t),\mathbf{e}_j)\big|_{t=0}=(\mathbf{u}'(0),e_j).$$

et comme $(\mathbf{u}'_\mu(0),\,e_j)\longrightarrow(\mathbf{u}_1,e_j)$, on a :

$$(\mathbf{u}'(0),e_j)=(\mathbf{u}_1,e_j)\quad\forall j,$$

donc on a $\mathbf{u}'(0)=\mathbf{u}_1$.

Unicité : Supposons que le problème $(\mathcal{P}_2)$ admet deux solutions $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$. Posons $\mathbf{U} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$. On a

$$\mathbf{U}'' + \delta \mathbf{U}' - L\mathbf{U} = |\mathbf{v}|^{\rho}\, \mathbf{v} - |\mathbf{u}|^{\rho}\, \mathbf{u}, \tag{2.74}$$
$$\mathbf{U}(0) = 0; \quad \mathbf{U}'(0) = 0,$$
$$\mathbf{U} \in \mathbf{L}^{\infty}\left(0, T, \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{L}^p(\Omega)\right)^n\right),$$
$$\mathbf{U}' \in \mathbf{L}^{\infty}\left(0, T, \left(\mathbf{L}^2(\Omega)\right)^n\right)$$

Multiplions les deux membres de (2.74) par $\mathbf{U}'$, et intégrons sur Ω. On aura après l'utilisation de la formule de Green

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left|\mathbf{U}'(t)\right|^2 + \|\mathbf{U}(t)\|^2\right) + \delta\left|\mathbf{U}'\right|^2 = \int_{\Omega} \left(|\mathbf{v}|^{\rho}\, \mathbf{v} - |\mathbf{u}|^{\rho}\, \mathbf{u}\right).\mathbf{U}' dx, \tag{2.75}$$

Mais le deuxième membre de (2.75) est majoré en valeur absolue par

$$(\rho + 1)\int_{\Omega} \sup\left(|\mathbf{v}|^{\rho}, |\mathbf{u}|^{\rho}\right)|\mathbf{U}|\left|\mathbf{U}'\right| dx, \tag{2.76}$$

qui est majoré par

$$C\left(\left\||\mathbf{v}|^{\rho}\right\|_{(L^n(\Omega))^n}, \left\||\mathbf{u}|^{\rho}\right\|_{(L^n(\Omega))^n}\right)\|\mathbf{U}\|_{(L^q(\Omega))^n}\left\|\mathbf{U}'\right\|_{(L^2(\Omega))^n},$$

(ceci d'après l'inégalité de Hölder, $\frac{1}{q} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2} = 1$).
Pour $\mathbf{u} \in \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega)\right)^n$, on a $u_i \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, alors d'après le théorème de Sobolev (voir [7])

$$u_i \in \mathbf{L}^q(\Omega) \quad \text{avec } \frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \text{ si } n \geq 3, \ (q \text{ fini quelconque pour } n = 2),$$

donc

$$\mathbf{u} \in (\mathbf{L}^q(\Omega))^n.$$

On a

$$\frac{1}{q} = \frac{n-2}{2n},$$

alors

$$q = \frac{2n}{n-2}.$$

Mais d'après (2.57), on a

$$\rho n \leqslant \frac{2n}{n-2} = q.$$

Alors

$$\left\| |\mathbf{u}|^\rho \right\|_{(L^n(\Omega))^n} = \left(\int_\Omega |\mathbf{u}|^{\rho n} \right)^{\frac{1}{n}} = \|\mathbf{u}\|^\rho_{(L^{\rho n}(\Omega))^n} \leqslant \|\mathbf{u}\|^\rho_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^n}, \tag{2.77}$$

on a donc

$$\left| \int_\Omega \left(|\mathbf{v}|^\rho \mathbf{v} - |\mathbf{u}|^\rho \mathbf{u} \right) . \mathbf{U}' dx \right| \leqslant c \left(\|\mathbf{v}(t)\|^\rho_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^n} + \|\mathbf{u}_1(t)\|^\rho_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^n} \right) \|\mathbf{U}(t)\| \left| \mathbf{U}'(t) \right|, \tag{2.78}$$

et comme $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{L}^\infty \left(0,\ T;\ \ (\mathbf{H}_0^1(\Omega))^n\right)$, on a finalement

$$\left| \int_\Omega \left(|\mathbf{v}|^\rho \mathbf{v} - |\mathbf{u}|^\rho \mathbf{u} \right) . \mathbf{U}' dx \right| \leqslant c \|\mathbf{U}\| \left| \mathbf{U}' \right|, \tag{2.79}$$

par suite (2.75) devient

$$\|\mathbf{U}(t)\|^2 + \left| \mathbf{U}'(t) \right|^2 + \delta \int_0^t \left| \mathbf{U}'(\sigma) \right|^2 d\sigma \leqslant 2c \int_0^t \left(\|\mathbf{U}(\sigma)\| + \left| \mathbf{U}'(\sigma) \right| \right) d\sigma, \tag{2.80}$$

on déduit, en utilisant le lemme de Gronwall que

$$\mathbf{U} = \mathbf{0},$$

par suite

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}.$$

Ce qui prouve l'unicité de la solution.

Chapitre 3

Une équation hyperbolique non linéaire à terme viscoélastique

Résumé

On sait que les matériaux réels, possèdent une mémoire qui sauvegarde des séquelles lorsque ils sont soumis à des déformations. C'es le cas des milieux élastiques visqueux. Dans un premier moment, nous démontrons dans ce chapitre, en utilisant la méthode de compacité, un théorème d'existence et d'unicité de la solution d'une équation qui traduit ce phénomène (équation hyperbolique non linéaire à terme viscoélastique). Dans un second moment nous nous pencherons sur l'étude par la même méthode, mais avec un deuxième cas non linéaire (frictionnaire).

3.1 Généralités sur le problème et notations

Supposons maintenant que le corps Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière $\Gamma = \partial\Omega$ (régulière) ; occupée par un fluide viscoélastique incompressible qui se déplace. Notre problème est d'étudier l'existence et l'unicité du vecteur des déviations de déplacement. On désigne par $\mathbf{u} = \{u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n\}$ un vecteur sur $\mathbf{Q}_T = \Omega \times]0,\ T[$, où T est un réel fini, et posons $\mathbf{\Sigma}_T = \mathbf{\Gamma} \times]0,\ T[$; L désigne le système de Lamé défini par $\mu\mathbf{\Delta} + (\lambda+\mu)\nabla\mathbf{div}$; λ et μ sont les constantes de Lamé (avec $\mu > 0$ et $\lambda + \mu > 0$.). Le problème se modélise mathématiquement par le système suivant :

On cherche un vecteur $\mathbf{u}$ tel que

$$\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} - L\mathbf{u} + \int_{\mathbf{0}}^{t} \mathbf{g}\,(t-s)\,\mathbf{\Delta u}\,(.,s)\,ds + |\mathbf{u}|^{\rho}\,\mathbf{u} = \mathbf{f},$$

avec les conditions aux limites et initiales

$$\begin{gathered} \mathbf{u}\,(x,t) = 0, \text{ sur } \mathbf{\Sigma}, \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0,\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(0) = \mathbf{u}_1 \text{ données,} \end{gathered}$$

où

$$\mathbf{g}\,(t) \text{ est la fonction de relaxation.}$$

Ce genre d'équations vient de certains modèles mathématiques pour des matériaux avec mémoire.

Pour la fonction de relaxation g, on suppose :

$(G1)$ g : $\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction décroissante de classe C^2 telle que

$$g(0) > 0, \quad \mu - \int_0^{+\infty} g(s)\, ds = l > 0.$$

$(G2)$ Il existe deux constantes positives k_0, k_1 telles que

$$1) - k_0 \leqslant g'(t) \leqslant 0,$$

$$2)\ 0 \leqslant g''(t) \leqslant k_1.$$

Lemme 3.1.1 *Pour tout $t > 0$ on a :*

$$\int_{\mathbf{0}}^{t} \mathbf{g}(s)\, ds \leq \mu - l.$$

Preuve. Puisque g est positive alors :

$$\int_{\mathbf{0}}^{t} \mathbf{g}(s)\, ds \leq \int_{\mathbf{0}}^{+\infty} \mathbf{g}(s)\, ds,$$

d'où

$$-\int_{\mathbf{0}}^{t} \mathbf{g}(s)\, ds \geq -\int_{\mathbf{0}}^{+\infty} \mathbf{g}(s)\, ds,$$

donc

$$\mu - \int_{\mathbf{0}}^{t} \mathbf{g}(s)\, ds \geq \mu - \int_{\mathbf{0}}^{+\infty} \mathbf{g}(s)\, ds,$$

ce qui veut dire que

$$\mu - \int_{\mathbf{0}}^{t} \mathbf{g}(s)\, ds \geq l,$$

par conséquent

$$\int_{\mathbf{0}}^{t} \mathbf{g}(s)\, ds \leq \mu - l.$$

■

3.2 Position du problème

On propose maintenant une équation hyperbolique non linéaire gouvernée par le système de Lamé, perturbé avec un terme viscoélastique.

Problème $(\mathcal{P}_3)$ **:**

On donne

$$\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2\left(0,\ T;\ \left(\mathbf{L}^2(\Omega)\right)^n\right), \tag{3.1}$$

$$\mathbf{u}_0 \in \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{L}^p(\Omega)\right)^n, \quad p = \rho + 2 \tag{3.2}$$

$$\text{et} \quad \mathbf{u}_1 \in \left(\mathbf{L}^2(\Omega)\right)^n, \tag{3.3}$$

On cherche $\mathbf{u}$ à valeurs vectorielles tels que

$$\mathbf{u} \in \mathbf{L}^\infty\left(0,\ T; \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{L}^p(\Omega)\right)^n\right), \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \in \mathbf{L}^\infty\left(0,\ T;\ \left(\mathbf{L}^2(\Omega)\right)^n\right), \tag{3.5}$$

solution du problème

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - L\mathbf{u} + \int_{\mathbf{0}}^{t} \mathbf{g}(t-s)\, \boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}(s)\, ds + |\mathbf{u}(t)|^{p-2}\,\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(x,t), \text{ dans Q}, \tag{3.6}$$

$$\mathbf{u}(x,t) = 0, \text{ sur } \boldsymbol{\Gamma} \times]0,T[, \tag{3.7}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}(x,0) = \mathbf{u}_0, \\ \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(x,0) = \mathbf{u}_1. \end{array} \right. \qquad x \in \Omega, \tag{3.8}$$

Proposition 3.2.1 *La condition (3.8) a vraiment un sens. (voir la proposition 2.5.1)*

3.3 Formulation variationnelle

Multiplions l'équation (3.6) par une fonction $\mathbf{v} \in (\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{L}^{\rho+2}(\Omega))^n$ et intégrons sur Ω. On aura après utilisation de la formule de Green

$$\left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \mathbf{v}\right) + \mathbf{A}(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \int_{\mathbf{0}}^{t} \mathbf{g}\,(t-s)\,(\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}(s), \mathbf{v}\,(t))ds + (|\mathbf{u}|^{\rho}\,\mathbf{u},\ \mathbf{v}) = (\mathbf{f},\mathbf{v}),$$
$$\forall \mathbf{v} \in \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{L}^{\rho+2}(\Omega)\right)^n.$$

On peut alors poser le problème de la façon suivante :

Problème $(\mathcal{PV}_3)$:

On donne

$$\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2\left(0,\ T; \left(\mathbf{L}^2\,(\Omega)\right)^n\right), \tag{3.9}$$

$$\mathbf{u}_0 \in \left(\mathbf{H}_0^1\,(\Omega)\right)^n \cap \left(\ \mathbf{L}^{\rho+2}\,(\Omega)\right)^n, \tag{3.10}$$

$$et \quad \mathbf{u}_1 \in \left(\ \mathbf{L}^2\,(\Omega)\right)^n. \tag{3.11}$$

On cherche $\mathbf{u}$ à valeurs vectorielles tels que

$$\mathbf{u} \in \mathbf{L}^{\infty}\left(0,\ T; \left(\mathbf{H}_0^1\,(\Omega)\right)^n \cap \left(\ \mathbf{L}^{\rho+2}\,(\Omega)\right)^n\right), \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \in \mathbf{L}^{\infty}\left(0,\ T;\ \left(\ \mathbf{L}^2\,(\Omega)\right)^n\right), \tag{3.13}$$

$$\left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2},\mathbf{v}\right) + \mathbf{A}(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \int_{\mathbf{0}}^{t} \mathbf{g}\,(t-s)\,(\Delta\mathbf{u}(s), \mathbf{v}\,(t))\,ds + (|\mathbf{u}|^{\rho}\,\mathbf{u},\mathbf{v}) = (\mathbf{f},\mathbf{v}),$$
$$\forall \mathbf{v} \in \left(\mathbf{H}_0^1\,(\Omega) \cap\ \mathbf{L}^{\rho+2}\,(\Omega)\right)^n, \tag{3.14}$$

$$\mathbf{u}\,(x,0) = \mathbf{u}_0, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\,(x,0) = \mathbf{u}_1, \qquad x \in \Omega. \tag{3.15}$$

Remarque 3.3.1 *Supposons que la solution* $\mathbf{u}$ *est assez régulière, alors les problèmes* $(\mathcal{P}_3)$, $(\mathcal{PV}_3)$ *sont équivalents.*

3.4 Existence et unicité de la solution

Les techniques qu'on utilisera seront celles de la méthode de compacité.

Théorème 3.4.1 le problème $(\mathcal{PV}_3)$ admet une unique solution pour T fini quelconque si

$$\rho \leqslant \frac{2}{n-2}, \quad (\rho \text{ fini quelconque si } n=2). \tag{3.16}$$

Preuve du théorème

1. Existence :

La preuve se fait en trois étapes

Etape.1 Approximation.

On utilise les même bases introduites dans le lemme (2.7.1) et le corollaire (2.7.1)de chapitre 2. On définit une solution approchée $\mathbf{u}_m(t)$ par

$$\mathbf{u}_m(t) \in [\mathbf{e}_1,\, \mathbf{e}_2,\, \ldots,\, \mathbf{e}_m] \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_m(t) = \sum_{j=1}^{m} d_{jm}(t) e_j.$$

Telle que

$$\left(\mathbf{u}_m''(t),\mathbf{e}_j\right) + \mathbf{A}(\mathbf{u}_m(t),\mathbf{e}_j) + \int_{\mathbf{0}}^{t} \mathbf{g}\,(t-s)\,(\Delta \mathbf{u}_m(s),\mathbf{e}_j)ds + \left(\left|\mathbf{u_m}(t)\right|^{\rho}\mathbf{u}_m(t),\mathbf{e}_j\right)$$
$$= (\mathbf{f},\mathbf{e}_j),\ j=1,\ \ldots,\ m, \tag{3.17}$$

Avec

$$\mathbf{u}_m(0) \;=\; \mathbf{u}_{0m} \longrightarrow \mathbf{u}_0 \text{ dans } \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{L}^{\rho+2}(\Omega)\right)^n, \tag{3.18}$$

$$\mathbf{u}_m'(0) \;=\; \mathbf{u}_{1m} \longrightarrow \mathbf{u}_1 \text{ dans } \left(\mathbf{L}^2(\Omega)\right)^n. \tag{3.19}$$

C'est un système différentiel ordinaire non linéaire. Si on prend en considération les conditions (3.18), (3.19), le système va admettre une solution sur $[0,\ t_m]$, où $t_m \leq T$.

Etape.2 Estimation a priori .

Multiplions (3.17) par $d_{jm}^{'}(t)$ et sommons sur j dans $[1, m]$. On aura

$$\left(\mathbf{u}_m^{''}(t),\mathbf{u}_m^{'}(t)\right) + \mathbf{A}\left(\mathbf{u}_m(t),\ \mathbf{u}_m^{'}(t)\right) + \int_{\mathbf{0}}^{t} \mathbf{g}\,(t-s)\,(\Delta\mathbf{u}_m(s),\mathbf{u}_m^{'}(t))ds$$
$$+\left(|\mathbf{u_m}(t)|^{\rho}\,\mathbf{u}_m(t),\ \mathbf{u}_m^{'}(t)\right) = \left(\mathbf{f},\ \mathbf{u}_m^{'}(t)\right).$$

Alors

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left|\mathbf{u}_m^{'}(t)\right|^2 + \frac{1}{2}\left\|\mathbf{u}_m(t)\right\|^2 + \frac{1}{\rho+2}\left\|\mathbf{u}_m(t)\right\|_{(L^{\rho+2}(\Omega))^n}^{\rho+2}\right)$$
$$+\int_{\mathbf{0}}^{t} \mathbf{g}\,(t-s)\,(\Delta\mathbf{u}_m(s),\mathbf{u}_m^{'}(t))ds = (\mathbf{f}\,(t)\,,\mathbf{u}_m^{'}(t)). \tag{3.20}$$

En effet :

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbf{0}}^{t} \mathbf{g}\,(t-s)\,(\Delta\mathbf{u}_m(s),\mathbf{u}_m^{'}(t))ds \\
=\;& \int_{\mathbf{0}}^{t} \mathbf{g}\,(t-s)\int_{\Omega}\Delta\mathbf{u}_m(s)\mathbf{u}_m^{'}(t)dxds \\
=\;& -\int_0^t g\,(t-s)\int_{\Omega}\nabla\mathbf{u}_m^{'}(t)\,.\nabla\mathbf{u}_m(s)\,dxds \\
=\;& -\int_0^t g\,(t-s)\int_{\Omega}\nabla\mathbf{u}_m^{'}(t)\,.\left(\nabla\mathbf{u}_m(s)-\nabla\mathbf{u}_m(t)\right)dxds \\
& -\int_0^t g\,(t-s)\int_{\Omega}\nabla\mathbf{u}_m^{'}(t)\,\nabla\mathbf{u}_m(t)\,dxds \\
=\;& \int_0^t g\,(t-s)\,\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\left(\nabla\mathbf{u}_m(x,t)-\nabla\mathbf{u}_m(x,s)\right)^2 dxds \\
& -\int_0^t g\,(t-s)\,\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\left(\nabla\mathbf{u}_m(x,t)\right)^2 dxds \\
=\;& \frac{1}{2}\int_0^t g\,(t-s)\,\frac{d}{dt}\left\|\nabla\mathbf{u}_m(t)-\nabla\mathbf{u}_m(s)\right\|_{(L^2(\Omega))^n}^2 ds - \frac{1}{2}\int_0^t g\,(t-s)\,\frac{d}{dt}\left\|\mathbf{u}_m(t)\right\|^2 ds \\
=\;& \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_0^t g\,(t-s)\left\|\nabla\mathbf{u}_m(t)-\nabla\mathbf{u}_m(s)\right\|_{(L^2(\Omega))^n}^2 ds\right) \\
& -\frac{1}{2}\int_0^t g'\,(t-s)\left\|\nabla\mathbf{u}_m(t)-\nabla\mathbf{u}_m(s)\right\|_{(L^2(\Omega))^n}^2 ds \\
& -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_0^t g\,(s)\left\|\nabla\mathbf{u}_m(t)\right\|_{(L^2(\Omega))^n}^2\right) + \frac{1}{2}g\,(t)\left\|\nabla\mathbf{u}_m(t)\right\|_{(L^2(\Omega))^n}^2 .
\end{aligned} \tag{3.21}$$

En remplaçant (3.21) dans (3.20) on obtient :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left|\mathbf{u}_m^{'}(t)\right|^2 + \|\mathbf{u}_m(t)\|^2 - \int_{\mathbf{0}}^{t} \mathbf{g}\,(s)\,ds\,\|\nabla\mathbf{u}_m(t)\|^2_{(L^2(\Omega))^n} + (g\circ\nabla\mathbf{u}_m)\,(t)\right)$$
$$+\frac{1}{\rho+2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}|\mathbf{u_m}(\mathbf{x},\ t)|^{\rho+2}\,dx - \frac{1}{2}\,(g'\circ\nabla\mathbf{u}_m)\,(t) + \frac{1}{2}\mathbf{g}\,(t)\,\|\nabla\mathbf{u}_m(t)\|^2_{(L^2(\Omega))^n} = (\mathbf{f},\ \mathbf{u}_m^{'}(t)), \tag{3.22}$$

avec

$$(g\circ v)\,(t) = \int_{\mathbf{0}}^{t} g\,(t-s)\,\|v\,(t) - v\,(s)\|^2_{(L^2(\Omega))^n}\,ds, \forall v \in (\mathbf{L}^2(\Omega))^n).$$

Par suite

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left|\mathbf{u}_m^{'}(t)\right|^2 + \frac{1}{2}\,\|\mathbf{u}_m(t)\| - \frac{1}{2}\int_{\mathbf{0}}^{t}\mathbf{g}\,(s)\,ds\,\|\nabla\mathbf{u}_m(t)\|^2_{(L^2(\Omega))^n} \\
&+\frac{1}{2}\,(\mathbf{g}\circ\nabla\mathbf{u}_m)\,(t) + \frac{1}{\rho+2}\int_{\Omega}|\mathbf{u_m}(\mathbf{x},\ \sigma)|^{\rho+2}\,dx \\
&-\frac{1}{2}\int_0^t\left(\mathbf{g}^{'}\circ\nabla\mathbf{u}_m\right)(\sigma)d\sigma + \frac{1}{2}\int_0^t\mathbf{g}\,(\sigma)\,\|\nabla\mathbf{u}_m(\sigma)\|^2_{(L^2(\Omega))^n}\,d\sigma \\
\leq\ &\frac{1}{2}\,\|\mathbf{u_{0m}}\| + \frac{1}{2}\,|\mathbf{u}_{1m}|^2 + \frac{1}{\rho+2}\,\|\mathbf{u_{0m}}\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)} + \int_0^t(|\mathbf{f}\,(\sigma)|\ \left|\mathbf{u}_m^{'}(\sigma)\right|d\sigma.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Or $\|\mathbf{u}_m(t)\|^2 = \mu\,\|\nabla\mathbf{u}_m(t)\|^2_{(L^2(\Omega))^n} + (\mu+\lambda)\,\|\mathbf{u}_m(t)\|^2_{(L^2(\Omega))^n}$, utilisons maintenant l'inégalité de Poincaré, on aura

$$\begin{aligned}
&\|\mathbf{u}_m(t)\|^2 - \int_{\mathbf{0}}^{t} g\,(s)\,ds\,\|\nabla\mathbf{u}_m(t)\|^2_{(L^2(\Omega))^n} \\
&\geq \left(\mu - \int_{\mathbf{0}}^{t} g\,(s)\,ds\right)\|\nabla\mathbf{u}_m(t)\|^2_{(L^2(\Omega))^n} \\
&\geq lC_p\,\|\mathbf{u}_m(t)\|^2,
\end{aligned}$$

où C_p : constante de Poincaré, et

$$\left(\mu - \int_{\mathbf{0}}^{t} g\,(s)\,ds\right) \geq\ l.$$

Le deuxième membre de 3.23 est

$$\int_0^t |\mathbf{f}\,(\sigma)|\ \left|\mathbf{u}_m^{'}(\sigma)\right|d\sigma \leq \frac{1}{\alpha}\int_0^t|\mathbf{f}(\sigma)|^2\,d\sigma + \alpha\int_0^t\left|\mathbf{u}_m^{'}(\sigma)\right|^2 d\sigma.$$

par conséquent

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left|\mathbf{u}_m^{'}(t)\right|^2 + \frac{1}{2} l C_p \left\|\mathbf{u}_m(t)\right\|^2 + \left(\mathbf{g} \circ \nabla \mathbf{u}_m\right)(t) \\
&-\frac{1}{2}\int_0^t \left(\mathbf{g}^{'} \circ \nabla \mathbf{u}_m\right)(\sigma) d\sigma + \frac{1}{\rho+2}\int_{\mathbf{\Omega}} \left|\mathbf{u_m}(\mathbf{x},\ \sigma)\right|^{\rho+2} dx \\
&\leq \frac{1}{2}\left\|\mathbf{u}_{0m}\right\|^2 + \frac{1}{2}\left|\mathbf{u}_{1m}\right|^2 + \frac{1}{\rho+2}\left\|\mathbf{u_{0m}}\right\|^{\rho+2}_{(L^{\rho+2}(\Omega))^n} dx \\
&+\frac{1}{\alpha}\int_0^t \left|\mathbf{f}(\sigma)\right|^2 d\sigma + \alpha\int_0^t \left|\mathbf{u}_m^{'}(\sigma)\right|^2 d\sigma.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

On déduit donc, en particulier de (3.24), que

$$\left|\mathbf{u}_m'(t)\right|^2 \leqslant k + \int_0^t \left|\mathbf{u}_m'(\sigma)\right|^2 d\sigma, \tag{3.25}$$

d'où résulte que

$$\left|\mathbf{u}_m^{'}(t)\right|^2 + \left\|\mathbf{u}_m(t)\right\|^2 + \left(\mathbf{g} \circ \mathbf{u}_m\right)(t) + \int_{\mathbf{Q}} \left|\mathbf{u_m}(\mathbf{x},\ \sigma)\right|^{\rho+2} dx d\sigma \leqslant \ \textit{constante}. \tag{3.26}$$

On en déduit que $t_m = T$; de plus on a les mêmes estimations a priori du probléme $(\mathcal{P}_2)$ du chapitre 2 :

$$\mathbf{u}_m \textit{ demeure dans un borné de } \mathbf{L}^\infty\left(0,\ T;\ \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{L}^{\rho+2}(\Omega)\right)^n\right). \tag{3.27}$$

$$\mathbf{u}_m^{'} \textit{ demeure dans un borné de } \mathbf{L}^\infty\left(0,\ T; \left(\mathbf{L}^2(\Omega)\right)^n\right). \tag{3.28}$$

Etape.3 Passage à la limite

D'après (3.27) et (3.28), on peut extraire une suite $\mathbf{u}_\mu$ telle que

$$\begin{array}{rcl}
\mathbf{A}(\mathbf{u}_\mu, \mathbf{e}_j) & \longrightarrow & \mathbf{A}(\mathbf{u}, \mathbf{e}_j) \textit{ dans } \ \mathbf{L}^\infty(0, T), \\
\left(\mathbf{u}_\mu^{'},\, \mathbf{e}_j\right) & \longrightarrow & \left(\mathbf{u}^{'},\, \mathbf{e}_j\right) \textit{ dans } \mathbf{L}^\infty(0, T), \\
\left(\mathbf{u}_\mu^{''},\, \mathbf{e}_j\right) & = & \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{u}_\mu^{'},\, \mathbf{e}_j\right) \longrightarrow \left(\mathbf{u}^{''},\, \mathbf{e}_j\right) \textit{ dans } \mathfrak{D}^{'}(0, T), \\
\left(\left|\mathbf{u}_\mu(t)\right|^\rho \mathbf{u}_\mu(t), \mathbf{e}_j\right) & \longrightarrow & \left(\left|\mathbf{u}(t)\right|^\rho \mathbf{u}(t), \mathbf{e}_j\right) \textit{ dans } \mathbf{L}^\infty(0, T).
\end{array} \tag{3.29}$$

Appliquons (3.19) pour $m = \mu$ et j fixe, on voit que

$$\left(\mathbf{u}_\mu^{''}(t), \mathbf{e}_j\right) + \mathbf{A}(\mathbf{u}_\mu(t),\ e_j) + \int_{\mathbf{0}}^{t} \mathbf{g}\,(t-s)\,(\Delta \mathbf{u}_\mu(s), e_j) ds + (|\mathbf{u}_\mu|^\rho\, \mathbf{u}_\mu, e_j)$$
$$= (\mathbf{f},\ e_j),\ \forall e_j,\ j\ = 1, \ldots, m. \tag{3.30}$$

Par passage à la limite dans les termes des équations (3.30) dans $D^{'}(0, T)$ (par exemple), on aura :

$$\left(\mathbf{u}^{''}(t), \mathbf{e}_j\right) + \mathbf{A}(\mathbf{u}(t),\ e_j) + \int_{\mathbf{0}}^{t} \mathbf{g}\,(t-s)\,(\Delta \mathbf{u}(s), e_j) ds + (\chi, e_j)$$
$$= (\mathbf{f},\ e_j),\ \forall e_j,\quad j\ = 1, \ldots, m. \tag{3.31}$$

Par conséquent

$$\left(\mathbf{u}^{''}(t), \mathbf{v}\right) + \mathbf{A}(\mathbf{u}(t),\ \mathbf{v}) + \int_{\mathbf{0}}^{t} \mathbf{g}\,(t-s)\,(\Delta \mathbf{u}(s), \mathbf{v}) ds + (\chi,\ \mathbf{v})$$
$$= (\mathbf{f},\ v), \forall v \in \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega)\right)^n \cap \left(\mathbf{L}^{\rho+2}(\Omega)\right)^n, \tag{3.32}$$

et donc

$$\mathbf{u}^{''} + \mathbf{Tu} + \int_{\mathbf{0}}^{t} \mathbf{g}\,(t-s)\,\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}(s) ds + \chi = \mathbf{f}, \quad (\mathbf{T} = -\mathbf{L}\ ). \tag{3.33}$$

D'où l'existence de la solution.

2.Unicité :

Supposons que le problème admet deux solutions $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$. Posons $\mathbf{U} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$, on a

$$\mathbf{U}'' - \mathbf{LU} + \int_{\mathbf{0}}^{t} \mathbf{g}(t-s)\, \mathbf{\Delta U}(s)\, ds + |\mathbf{u}(t)|^{p-2}\, \mathbf{u}(t) - |\mathbf{v}(t)|^{p-2}\, \mathbf{v}(t) = \mathbf{0}, \tag{3.34}$$

$$\mathbf{U}(x,t) = \mathbf{0}, \text{ sur } \mathbf{\Gamma} \times]0,T[\,, \tag{3.35}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{U}(x,0) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{U}_1(x,0) = \mathbf{0}. \end{array} \right. \quad x \in \Omega. \tag{3.36}$$

Multiplions les deux membres de (3.34) par $\mathbf{U}'$, et intégrons sur Ω. On déduit, en utilisant la formule de Green que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left|\mathbf{U}'\right|^2 + \mathbf{A}(\mathbf{U},\mathbf{U})\right] + \int_{\mathbf{0}}^{t} \mathbf{g}(t-s)\left(\Delta\mathbf{U}(s), \mathbf{U}'(t)\right) ds$$
$$= \left(|\mathbf{v}|^{p-2}\, \mathbf{v} - |\mathbf{u}|^{p-2}\, \mathbf{u},\, \mathbf{U}'\right).$$

Nous montrons que

$$\int_{\mathbf{0}}^{t} \mathbf{g}(t-s)\left(\Delta\mathbf{U}(s), \mathbf{U}'(t)\right) ds$$

s'écrit comme la somme de la dérivée en temps d'une quantité plus un terme de dissipation positive

$$\int_{\mathbf{0}}^{t} \mathbf{g}(t-s)\left(\Delta\mathbf{U}(s), \mathbf{U}'(t)\right) ds = -\int_{\mathbf{0}}^{t} g(t-s) \int_{\mathbf{\Omega}} \nabla\mathbf{U}'(t) . \nabla\mathbf{U}(s)\, dxds$$
$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(g \circ \nabla\mathbf{U})(t) - \frac{1}{2}(g' \circ \nabla\mathbf{U})(t) - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_{\mathbf{0}}^{t} g(s)\, \|\nabla\mathbf{U}(t)\|^2_{(L^2(\Omega))^n}\, ds\right)$$
$$+ \frac{1}{2} g(t)\, \|\nabla\mathbf{U}(t)\|^2_{(L^2(\Omega))^n}\,.$$

Donc on obtient le système

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left|\mathbf{U}'\right|^2 + (g \circ \nabla\mathbf{U}_m)(t) + \left(\mu - \int_{\mathbf{0}}^{t} \mathbf{g}(s)\, ds\right) \|\mathbf{U}(t)\|^2\right)$$
$$-\frac{1}{2}(g' \circ \nabla\mathbf{U}_m)(t) + \frac{1}{2}\mathbf{g}(t)\, \|\mathbf{U}(t)\|^2 = \left(|\mathbf{v}|^{\rho}\, \mathbf{v} - |\mathbf{u}|^{\rho}\, \mathbf{u},\, \mathbf{U}'\right). \tag{3.37}$$

Mais le deuxième membre de (3.37) est majoré en valeur absolue par

$$(\rho+1)\int_{\Omega}\sup\left(|\mathbf{v}|^{\rho},|\mathbf{u}|^{\rho}\right)|\mathbf{U}|\left|\mathbf{U}^{'}\right|dx, \tag{3.38}$$

ce qui est majoré d'après l'inégalité de Hölder par

$$C\left(\left\||\mathbf{v}|^{\rho}\right\|_{(L^{n}(\Omega))^{n}},\left\||\mathbf{u}|^{\rho}\right\|_{(L^{n}(\Omega))^{n}}\right)\|\mathbf{U}\|_{(L^{p}(\Omega))^{n}}\left\|\mathbf{U}^{'}\right\|_{(L^{2}(\Omega))^{n}},\text{ avec }\frac{1}{q}+\frac{1}{n}+\frac{1}{2}=1.$$

Mais d'après (3.16), on a $\rho n\leqslant q$, alors

$$\left\||\mathbf{u}|^{\rho}\right\|_{(L^{n}(\Omega))^{n}}=\left(\int_{\Omega}|\mathbf{u}|^{\rho n}\right)^{\frac{1}{n}}=\|\mathbf{u}\|^{\rho}_{(L^{\rho n}(\Omega))^{n}}\leqslant\|\mathbf{u}\|^{\rho}_{\left(H_{0}^{1}(\Omega)\right)^{n}}$$

on a donc

$$\left|\int_{\Omega}\left(|\mathbf{v}|^{\rho}\mathbf{v}-|\mathbf{u}|^{\rho}\mathbf{u}\right).\mathbf{U}^{'}dx\right|\leqslant C\left(\|\mathbf{v}(t)\|^{\rho}_{\left(H_{0}^{1}(\Omega)\right)^{n}}+\|\mathbf{u}(t)\|^{\rho}_{\left(H_{0}^{1}(\Omega)\right)^{n}}\right)\|\mathbf{U}(t)\|_{\left(H_{0}^{1}(\Omega)\right)^{n}}\left|\mathbf{U}^{'}(t)\right|,$$

et comme $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}\in\mathbf{L}^{\infty}\left(0,\ T;\ \left(\mathbf{H}_{0}^{1}(\Omega)\right)^{n}\right)$ on a finalement

$$\left|\int_{\Omega}\left(|\mathbf{v}|^{\rho}\mathbf{v}-|\mathbf{u}|^{\rho}\mathbf{u}\right).\mathbf{U}^{'}dx\right|\leqslant C\|\mathbf{U}\|\left|\mathbf{U}^{'}\right|.$$

Par suite (3.37) devient

$$\begin{aligned}\|\mathbf{U}(t)\|^{2}+\left|\mathbf{U}^{'}(t)\right|^{2}-\frac{1}{2}\int_{\mathbf{0}}^{t}\left(g^{'}\circ\nabla\mathbf{U}_{m}\right)(s)\,ds+\frac{1}{2}\int_{\mathbf{0}}^{t}\mathbf{g}(s)\|\mathbf{U}(\sigma)\|^{2}d\sigma\\ \leqslant\int_{0}^{t}\left(\frac{C}{2}\|\mathbf{U}(\sigma)\|+\frac{C}{2}\left|\mathbf{U}^{'}(\sigma)\right|\right)d\sigma,\end{aligned} \tag{3.39}$$

d'après la condition (G_1), g' est négative et d'après la définition de $\left(g'\circ\nabla\mathbf{U}_{m}\right)(\sigma)$ on a :

$$\left(g'\circ\nabla\mathbf{U}_{m}\right)(\sigma)\leq 0.$$

On déduit donc, en particulier, de (3.39), que

$$\|\mathbf{U}(t)\|^{2}+\left|\mathbf{U}^{'}(t)\right|^{2}\leqslant\int_{0}^{t}\left(\frac{C}{2}\|\mathbf{U}(\sigma)\|+\frac{C}{2}\left|\mathbf{U}^{'}(\sigma)\right|\right)d\sigma. \tag{3.40}$$

Donc $\mathbf{U} = 0$, (ceci en utilisant l'équation (3.40)). Par conséquent

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}.$$

Ce qui achève le démonstration.

3.5 Un autre exemple d'équation hyperbolique non linéaire à terme viscoélastique

On propose maintenant une équation hyperbolique gouverne par le système de Lamé, perturbé avec un terme viscoélastique (mémoire) et un terme frictionnaire non linéaire suivant :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - L\mathbf{u} + \int_0^t g(t-s)\, \Delta \mathbf{u}(x,s)\, ds + \left|\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right|^\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{f},\ \textit{dans } \mathbf{Q}_T,$$
$$\mathbf{u} = 0 \ \textit{sur } \mathbf{\Sigma}_T,$$
$$\mathbf{u}(.,0) = u_0,\ \mathbf{u}_t(.,0) = u_{1,}\ \ \textit{dans } \Omega.$$

Il s'agit donc d'un problème quelque peu analogue à celui traité au problème $(\mathcal{P}_3)$ avec le terme $\left|\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right|^\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ au lieu du terme $|\mathbf{u}|^\rho \mathbf{u}$.

La non linéarité est ici ‹‹plus forte››, puisque la non linéarité est fonction de $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ au lieu d'être fonction de $\mathbf{u}$.

Nous allons prouver une existence global, dans les conditions $\mathbf{rotu} = 0$, pour cela, en introduisant l'identité vectorielle suivante :

$$\mathbf{rot\ rotu} = -\mathbf{\Delta u} + \nabla(\mathbf{div}(\mathbf{u})),$$

on déduit que

si $\mathbf{u} \in \left(\mathbf{H}^2(\mathbf{\Omega}) \cap \mathbf{H}^1_0(\mathbf{\Omega})\right)^n$ $(n = 2, 3)$, alors

$$\mathbf{\Delta u} = \nabla \mathbf{divu}\ \textit{et}\ \ \|\mathbf{divu}\| = \|\nabla \mathbf{u}\|,$$

et

$$L\mathbf{u} = \mu\mathbf{\Delta u} + (\lambda+\mu)\,\nabla.\mathbf{div u} = \alpha\ \mathbf{\Delta u}\ \text{où}\ \alpha = \lambda + 2\mu.$$

Le problème se modélise par le système suivant :

$$\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} - \alpha\mathbf{\Delta u} + \int_{\mathbf{0}}^{t}\mathbf{g}\,(t-s)\,\mathbf{\Delta u}\,(.,s)\,ds + \left|\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\right|^{\rho}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{f},$$

avec les conditions aux limites et initiales

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{sur } \mathbf{\Sigma}_T, \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0,\ \mathbf{u}^{'}(0) = \mathbf{u}_1 \text{ données},$$

et

$$\alpha = \lambda + 2\mu > 0 \ \ \textit{avec}\ \lambda,\ \mu \ \text{ sont les coefficients de Lamé.}$$

Pour $u,\ v \in \left(\mathbf{H}^2(\mathbf{\Omega}) \cap \mathbf{H}_0^1(\mathbf{\Omega})\right)^n$, on pose la fonctionnelle suivante :

$$\mathbf{A}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \sum_{i,\ j=1}^{n}\int_{\Omega}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\mathbf{dx}.$$

Posons

$$\|\varphi\| = \sqrt{\mathbf{A}\,(\varphi,\ \varphi)} = \|grad\varphi\|_{(L^2(\Omega))^n} = \left(\int_{\mathbf{\Omega}}(grad\varphi)^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

(norme sur $(\mathbf{H}_0^1(\Omega))^n$ équivalente à $\|\varphi\|^2_{(\mathbf{H}^1(\Omega))^n}$).

Lemme 3.5.1 **A** *est une forme bilinéaire, continue, symétrique et coercive sur* $\left(\mathbf{H}_0^1(\Omega)\right)^n$.

Preuve. voir le lemme(2.1.1). ■

3.5.1 Position du problème

Soit $\rho \in \left]0, +\infty\right[$, on propose maintenant le problème suivant :

Problème $(\mathcal{P}_4)$ **:**

On donne

$$\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2\left(0,\ T;\ \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega)\right)^n\right), \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \in \mathbf{L}^2(\mathbf{Q}_T), \tag{3.41}$$

$$\mathbf{u}_0 \in \left(\mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega)\right)^n, \tag{3.42}$$

$$et \quad \mathbf{u}_1 \in \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \ \mathbf{L}^{2(\rho+1)}(\Omega)\right)^n. \tag{3.43}$$

On suppose que Ω est borné, de frontière régulière, et on cherche $\mathbf{u}$ tels que

$$\mathbf{u} \in \mathbf{L}^\infty\left(0,\ T; \left(\mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega)\right)^n\right), \tag{3.44}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \in \mathbf{L}^\infty\left(0,\ T;\ \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega)\right)^n\right), \tag{3.45}$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \in \mathbf{L}^\infty\left(0,\ T;\ \left(\mathbf{L}^2(\Omega)\right)^n\right), \tag{3.46}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \in \mathbf{L}^{\rho+2}(\mathbf{Q}), \tag{3.47}$$

solution du problème

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \alpha \mathbf{\Delta u} + \int_{\mathbf{0}}^t \mathbf{g}(t-s)\, \mathbf{\Delta u}(s)\, ds + \left|\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t)\right|^\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t) = \mathbf{f}(x,t), \tag{3.48}$$

$$\mathbf{u}(x,t) = 0, \ \text{sur } \mathbf{\Gamma} \times \left]0, T\right[, \tag{3.49}$$

$$\mathbf{u}(.,0) = \mathbf{u}_0, \ \mathbf{u}'(.,0) = \mathbf{u}_1. \tag{3.50}$$

3.6 Formulation variationnelle

Multiplions l'équation (3.48) par une fonction $\mathbf{v} \in \left(\mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega)\right)^n$ et intégrons sur Ω. Grâce à la formule de Green, on trouve

$$\left(\mathbf{u}'', \mathbf{v}\right) + \alpha \mathbf{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \int_{\mathbf{0}}^{t} \mathbf{g}(t-s)\, \mathbf{A}(\mathbf{u}(s), \mathbf{v}(t))\, ds + \left(\left|\mathbf{u}'\right|^{\rho} \mathbf{u}', \mathbf{v}\right) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}),$$
$$\forall \mathbf{v} \in \left(\mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega)\right)^n.$$

On peut alors poser le problème de la façon suivante :

Problème $(\mathcal{PV}_4)$:

On donne

$$\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2\left(0,\ T;\ \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega)\right)^n\right), \quad \mathbf{f}' \in \mathbf{L}^2(\mathbf{Q}), \tag{3.51}$$

$$\mathbf{u}_0 \in \left(\mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega)\right)^n, \tag{3.52}$$

$$et \quad \mathbf{u}_1 \in \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{L}^{2(\rho+1)}(\Omega)\right)^n. \tag{3.53}$$

On cherche $\mathbf{u}$ à valeurs vectorielle tels que

$$\mathbf{u} \in \mathbf{L}^\infty\left(0,\ T; \left(\mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega)\right)^n\right), \tag{3.54}$$

$$\mathbf{u}' \in \mathbf{L}^\infty\left(0,\ T;\ \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega)\right)^n\right), \tag{3.55}$$

$$\mathbf{u}'' \in \mathbf{L}^\infty\left(0,\ T;\ \left(\mathbf{L}^2(\Omega)\right)^n\right), \tag{3.56}$$

$$\mathbf{u}' \in \mathbf{L}^{\rho+2}(\mathbf{Q}_T), \tag{3.57}$$

$$\left(\mathbf{u}'', \mathbf{v}\right) + \alpha \mathbf{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \int_{\mathbf{0}}^{t} \mathbf{g}(t-s)\, \mathbf{A}(\mathbf{u}(s),\ \mathbf{v}(t)) ds + \left(\left|\mathbf{u}'\right|^{p-2} \mathbf{u}', \mathbf{v}\right) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}),$$
$$\forall \mathbf{v} \in \left(\mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega)\right)^n, \tag{3.58}$$

$$\mathbf{u}(.,0) = \mathbf{u}_0,\ \mathbf{u}'(.,0) = \mathbf{u}_1. \tag{3.59}$$

Remarque 3.6.1 *Supposons que la solution* $\mathbf{u}$ *est assez régulière, alors les problèmes* $(\mathcal{P}_4)$, $(\mathcal{P}_4\mathcal{V})$ *sont équivalents, (voir la proposition2.3.1)*

3.7 Existence et unicité de la solution

Théorème 3.7.1 Le problème $(\mathcal{P}\mathcal{V}_4)$ admet une solution unique.

Lemme 3.7.1 *Le problème spectral de Dirichlet*

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{e}_j &= \lambda_j \mathbf{e}_j, \quad j = 1, \ \ldots, \ m, \\ \mathbf{e}_j &= 0 \qquad sur \ \ \Gamma. \end{aligned} \tag{3.60}$$

admet une suite de solutions non nulles $\mathbf{e}_i$,*correspondantes à une suite de valeurs propres* $\lambda_i > 0$. *Les fonctions* $\mathbf{e}_j$ *seront utilisées comme bases spéciales dans la méthode de Faedo-Galerkin.*

Lemme 3.7.2 *L'espace* $\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$ *est séparable.*

Corollaire 3.7.1 *Il existe une suite* $\mathbf{e}_1, \ \ldots, \ \mathbf{e}_m, \ \ldots$ *ayant les propriétés suivantes* $\mathbf{e}_i \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$, $\forall m \geq 0$, $\mathbf{e}_1, \ \ldots, \ \mathbf{e}_m$ *sont linéairement indépendantes, les combinaisons linéaires finies des* $\mathbf{e}_i$ *sont denses dans* $\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$. *On suppose la frontière* Γ *de* Ω *assez régulière pour que*

$$\mathbf{e}_i \in \mathbf{H}^2(\Omega) \quad et \ \ \mathbf{e}_i \in \mathbf{L}^{2(\rho+1)}(\Omega). \tag{3.61}$$

Preuve du théorème 3.7.1

1.Existence :

La preuve se fait en trois étapes

Etape.1 Approximation

Utilisons les bases spéciales introduites dans le lemme(3.7.1), le lemme(3.7.2) et corollaire(3.7.1).

On définit une solution approchée $\mathbf{u}_m(t)$ par

$$\mathbf{u}_m(t) \in [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_m] \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_m(t) = \sum_{j=1}^{m} d_{jm}(t) e_j,$$

telle que

$$\begin{aligned} &\left(\mathbf{u}_m^{''}(t), \mathbf{e}_j\right) + \alpha \mathbf{A}(\mathbf{u}_m(t),\ \mathbf{e}_j) - \int_{\mathbf{0}}^{t} \mathbf{g}\,(t-s)\,\mathbf{A}(\mathbf{u}_m(s),\ \mathbf{e}_j)ds \\ &\quad + \left(\left|\mathbf{u}_m^{'}(t)\right|^{\rho} \mathbf{u}_m^{'}(t), \mathbf{e}_j\right) = (\mathbf{f},\ \mathbf{e}_j), \quad j = 1,\ \ldots,\ m, \end{aligned} \tag{3.62}$$

avec

$$\mathbf{u}_m(0) = \mathbf{u}_{0m} \longrightarrow \mathbf{u}_0 \quad \text{dans } \left(\mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega)\right)^n, \tag{3.63}$$

$$\mathbf{u}_m^{'}(0) = \mathbf{u}_{1m} \longrightarrow \mathbf{u}_1 \text{ dans } \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{L}^{2(\rho+1)}(\Omega)\right)^n. \tag{3.64}$$

C'est un système différentiel ordinaire. Si on prend en considération les conditions (3.63), (3.64), le système va admettre une solution sur $[0, t_m]$; où : $t_m \leq T$.

Etape.2 Estimation a priori I.

Multiplions (3.62) d'indice j par $d_{jm}^{'}(t)$ et sommons sur j. On aura

$$\begin{aligned} &\left(\mathbf{u}_m^{''}(t), \mathbf{u}_m^{'}(t)\right) + \alpha \mathbf{A}\left(\mathbf{u}_m(t),\ \mathbf{u}_m^{'}(t)\right) - \int_{\mathbf{0}}^{t} g\,(t-s)\,\mathbf{A}\left(\mathbf{u}_m(s),\ \mathbf{u}_m^{'}(t)\right) ds \\ &\quad + \left(\left|\mathbf{u}_{\mathbf{m}}^{'}(t)\right|^{\rho} \mathbf{u}_m^{'}(t),\ \mathbf{u}_m^{'}(t)\right) = \left(\mathbf{f}\,(t)\,,\ \mathbf{u}_m^{'}(t)\right), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left|\mathbf{u}_m^{'}(t)\right|^2 + \alpha \mathbf{A}\left(\mathbf{u}_m(t),\ \mathbf{u}_m(t)\right)\right) - \int_{\mathbf{0}}^{t} g\,(t-s)\,\mathbf{A}\left(\mathbf{u}_m(s),\ \mathbf{u}_m^{'}(t)\right) ds \\ &\quad + \int_{\Omega} \left|\mathbf{u}_m^{'}(\mathbf{x},\ t)\right|^{\rho+2} dx = \left(\mathbf{f}\,(t)\,,\ u_m^{'}(t)\right). \end{aligned} \tag{3.65}$$

Alors

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left|\mathbf{u}_m^{'}(t)\right|^2+\alpha\left\|\mathbf{u}_m(t)\right\|^2\right)-\int_{\mathbf{0}}^{t}g\left(t-s\right)\mathbf{A}\left(\mathbf{u}_m(s),\ \mathbf{u}_m^{'}(t)\right)ds$$
$$+\int_{\Omega}\left|\mathbf{u}_m^{'}(\mathbf{x},\ t)\right|^{\rho+2}dx=\left(\mathbf{f}\left(t\right),\ u_m^{'}(t)\right). \tag{3.66}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} & -\int_0^t g\left(t-s\right)\mathbf{A}\left(\mathbf{u}_m(s),\ \mathbf{u}_m^{'}(t)\right)ds \\ = & -\int_0^t g\left(t-s\right)\int_{\Omega}\nabla\mathbf{u}_m^{'}\left(x,t\right).\nabla\mathbf{u}_m\left(x,s\right)dxds \\ = & \ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left(g\circ\nabla\mathbf{u}_m\right)(t)-\left(\int_0^t g\left(s\right)ds\right)\left\|\mathbf{u}_m\left(t\right)\right\|^2\right] \\ & -\frac{1}{2}\left(g'\circ\nabla\mathbf{u}_m\right)(t)+\frac{1}{2}g\left(t\right)\left\|\mathbf{u}_m\left(t\right)\right\|^2. \end{aligned} \tag{3.67}$$

En remplaçant (3.67) dans (3.66), on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left|\mathbf{u}_m^{'}\right|^2+\left(\alpha-\int_0^t g\left(s\right)ds\right)\left\|\mathbf{u}_m\left(t\right)\right\|^2+\left(g\circ\nabla\mathbf{u}_m\right)(t)\right] \\ & -\frac{1}{2}\left(g'\circ\nabla\mathbf{u}_m\right)(t)+\frac{1}{2}g\left(t\right)\left\|\mathbf{u}_m\left(t\right)\right\|^2+\int_{\Omega}\left|\mathbf{u}_{\mathbf{m}}^{'}(\mathbf{x},\ t)\right|^p dx \\ & \qquad =\left(\mathbf{f},\ \mathbf{u}_m^{'}(t)\right). \end{aligned} \tag{3.68}$$

Pour tout $t>0$, on a :

$$\mu-\int_{\mathbf{0}}^{t}\mathbf{g}\left(s\right)ds\geq\ l,$$

et comme $\lambda+\mu\geq 0$ on a

$$\alpha-\int_{\mathbf{0}}^{t}\mathbf{g}\left(s\right)ds\geq\ l,$$

où $\alpha=\lambda+2\mu$.

Par suite

$$\frac{1}{2}\left|\mathbf{u}_m'(t)\right|^2+\frac{l}{2}\left\|\mathbf{u}_m(t)\right\|^2+(\mathbf{g}\circ\mathbf{u}_m)(t)$$
$$+\int_0^t\int_\Omega\left|\mathbf{u}_\mathbf{m}'(\mathbf{x},\ \sigma)\right|^p dxd\sigma-\frac{1}{2}\int_0^t\left(\mathbf{g}'\circ\nabla\mathbf{u}_m\right)(\sigma)d\sigma+\frac{1}{2}\int_0^t\mathbf{g}(\sigma)\left\|\mathbf{u}_m(\sigma)\right\|^2 d\sigma$$
$$\leq\frac{l}{2}\alpha\left\|\mathbf{u}_{0m}\right\|^2+\frac{1}{2}\left|\mathbf{u}_{1m}\right|^2+\int_0^t\left|\mathbf{f}(\sigma)\right|\left|u_m'(\sigma)\right|d\sigma, \tag{3.69}$$

mais

$$\begin{aligned}\int_0^t\left|\mathbf{f}(\sigma)\right|\left|u_m'(\sigma)\right|d\sigma &\leq \left(\int_0^t\left|\mathbf{f}(\sigma)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\left|u_m'(\sigma)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}d\sigma\\ &\leq \frac{1}{2}\int_0^t\left|\mathbf{f}(\sigma)\right|^2 d\sigma+\frac{1}{2}\int_0^t\left|u_m'(\sigma)\right|^2 d\sigma.\end{aligned}$$

(ceci car $2ab\leq a^2+b^2$), et d'après (3.51)

$$\int_0^t\left|\mathbf{f}(\sigma)\right|^2 d\sigma\leqslant constante.$$

D'après la condition (G2), $\mathbf{g}'$ est négative donc $\mathbf{g}$ décroissant, et comme $\mathbf{g}(0)>0$ on a $\mathbf{g}$ est positive, et d'après la définition de $\left(\mathbf{g}'\circ\nabla\mathbf{u}_m\right)(t)$ on a :

$$\left(\mathbf{g}'\circ\mathbf{u}_m\right)(t)\leq 0,$$

on déduit donc, en particulier, de (3.69), que

$$\left|\mathbf{u}_m'(t)\right|^2\leqslant K+\int_0^t\left|\mathbf{u}_m'(s)\right|^2 ds, \tag{3.70}$$

d'où résulte

$$\left|\mathbf{u}_m'(t)\right|\leqslant \text{constante (indépendante de m)}.$$

Reprenant (3.69) on en déduit que

$$\left|\mathbf{u}_m'(t)\right|^2+\left\|\mathbf{u}_m(t)\right\|^2+(\mathbf{g}\circ\mathbf{u}_m)(t)\leqslant \text{constante (indépendante de m)}.$$
$$\int_\mathbf{Q}\left|\mathbf{u}_\mathbf{m}'\right|^{\rho+2}dxd\sigma\leqslant \text{constante (indépendante de m)}. \tag{3.71}$$

On déduit que $t_m = T$; de plus on a les estimations

$$\mathbf{u}_m \textit{ demeure dans un borné de } \mathbf{L}^\infty\left(0,\ T;\ \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega)\right)^n\right), \tag{3.72}$$

$$\mathbf{u}_m^{'} \textit{ demeure dans un borné de } \mathbf{L}^\infty\left(0,\ T;\ \left(\mathbf{L}^2(\Omega)\right)^n\right) \cap \mathbf{L}^{\rho+2}(\mathbf{Q}_T). \tag{3.73}$$

Cela suffit à montrer que $t_m = T,\ \forall m.$

Estimation a priori II.

Grâce à (3.60) on peut remplacer dans (3.62) $\mathbf{e}_j$ par $-\dfrac{1}{\lambda_j}\mathbf{\Delta}\ \mathbf{e}_j$

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{u}_m^{''}(t), -\frac{1}{\lambda_j}\Delta\mathbf{e}_j\right) - \alpha(\Delta\mathbf{u}_m(t), -\frac{1}{\lambda_j}\Delta\mathbf{e}_j) + \int_{\mathbf{0}}^t \mathbf{g}(t-\sigma)(\mathbf{\Delta u}_m(s),\ -\frac{1}{\lambda_j}\mathbf{\Delta e}_j)d\sigma \\ + \left(\left|\mathbf{u}_{\mathbf{m}}^{'}(t)\right|^\rho \mathbf{u}_m^{'}(t), -\frac{1}{\lambda_j}\Delta\mathbf{e}_j\right) = (\mathbf{f}(t), -\frac{1}{\lambda_j}\Delta\mathbf{e}_j),\end{aligned} \tag{3.74}$$

Et multipliant (3.74) encore par $\lambda_j d_{jm}^{'}(t)$ et sommant en j, on en déduit

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\left(\mathbf{u}_m^{''}(t),\mathbf{u}_m^{'}(t)\right) + \alpha\left(\mathbf{\Delta u}_m(t), \mathbf{\Delta u}_m^{'}(t)\right) - \int_{\mathbf{0}}^t \mathbf{g}(t-\sigma)(\mathbf{\Delta u}_m(s),\ \mathbf{\Delta u}_m^{'}(t))d\sigma \\ + \int_{\mathbf{\Omega}} \nabla\left(\left|\mathbf{u}_{\mathbf{m}}^{'}(t)\right|^\rho \mathbf{u}_m^{'}(t)\right).\nabla\mathbf{u}_m^{'}(t)dx = \mathbf{A}\left(\mathbf{f}(t), \mathbf{u}_m^{'}(t)\right).\end{aligned} \tag{3.75}$$

Avec

$$\nabla\left[\left|\mathbf{u}_m^{'}(t)\right|^\rho \mathbf{u}_m^{'}(t)\right] = \rho\left|\mathbf{u}_m^{'}(t)\right|^{\rho-1}\nabla\left|\mathbf{u}_m^{'}(t)\right|\left(\mathbf{u}_m^{'}(t)\right) + \left|\mathbf{u}_m^{'}(t)\right|^\rho \nabla u_m^{'}(t).$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left\|\mathbf{u}_m^{''}(t)\right\|^2 + \alpha\left\|\Delta\mathbf{u}_m(t)\right\|^2_{(L^2(\Omega))^n}\right) - \int_0^t g(t-s)\int_\Omega \mathbf{\Delta u}_m^{'}(x,t).\mathbf{\Delta u}_m(x,s)\,ds \\ + \left(\left|\mathbf{u}_{\mathbf{m}}^{'}(t)\right|^{\rho-1}\left[\rho\nabla\left|\mathbf{u}_m^{'}(t)\right|\left(\mathbf{u}_m^{'}(t)\right) + \left|\mathbf{u}_m^{'}(t)\right|\nabla\mathbf{u}_m^{'}(t)\right],\ \nabla\mathbf{u}_{\mathbf{m}}^{'}(t)\right) = \mathbf{A}\left(\mathbf{f}(t), \mathbf{u}_m^{'}(t)\right).\end{aligned} \tag{3.76}$$

D'autre part

$$
\begin{aligned}
& -\int_0^t g(t-s)\int_\Omega \mathbf{\Delta u}_m'(x,t)\,.\mathbf{\Delta u}_m(x,s)\,dxds \\
= & \int_0^t g(t-s)\int_\Omega \mathbf{\Delta u}_m'(x,t)\,.\left(\mathbf{\Delta u}_m(x,t)-\mathbf{\Delta u}_m(x,s)\right)dxds \\
& -\int_0^t g(t-s)\int_\Omega \mathbf{\Delta u}_m'(x,t)\,\mathbf{\Delta u}_m(x,t)\,dxds \\
= & \int_0^t g(t-s)\int_\Omega \frac{d}{dt}\left[\mathbf{\Delta u}_m(x,t)-\mathbf{\Delta u}_m(x,s)\right]\left[\mathbf{\Delta u}_m(x,t)-\mathbf{\Delta u}_m(x,s)\right]dxds \\
& -\int_0^t g(t-s)\int_\Omega \mathbf{\Delta u}_m'(x,t)\,\mathbf{\Delta u}_m(x,t)\,dxds \\
= & \frac{1}{2}\int_0^t g(t-s)\frac{d}{dt}\left\|\mathbf{\Delta u}_m(t)-\mathbf{\Delta u}_m(s)\right\|^2_{(L^2(\Omega))^n}ds-\frac{1}{2}\int_0^t g(t-s)\frac{d}{dt}\left\|\mathbf{\Delta u}_m(t)\right\|^2_{(L^2(\Omega))^n}ds \\
= & \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{dt}\left[g(t-s)\left\|\mathbf{\Delta u}_m(t)-\mathbf{\Delta u}_m(s)\right\|^2_{(L^2(\Omega))^n}\right]ds \\
& -\frac{1}{2}\int_0^t g'(t-s)\left\|\mathbf{\Delta u}_m(t)-\mathbf{\Delta u}_m(s)\right\|^2_{(L^2(\Omega))^n}ds-\left(\int_0^t g(t-s)\,ds\right)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\mathbf{\Delta u}_m(t)\right\|^2_{(L^2(\Omega))^n} \\
= & \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(g\circ\mathbf{\Delta u}_m\right)(t)-\frac{1}{2}\left(g'\circ\mathbf{\Delta u}_m\right)(t)-\frac{1}{2}\left(\int_0^t g(t-s)\,ds\right)\frac{d}{dt}\left\|\mathbf{\Delta u}_m(t)\right\|^2_{(L^2(\Omega))^n} \\
= & \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(g\circ\mathbf{\Delta u}_m\right)(t)-\frac{1}{2}\left(g'\circ\mathbf{\Delta u}_m\right)(t)-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left(\int_0^t g(s)\,ds\right)\left\|\mathbf{\Delta u}_m(t)\right\|^2_{(L^2(\Omega))^n}\right] \\
& +\frac{1}{2}g(t)\left\|\mathbf{\Delta u}_m(t)\right\|^2_{(L^2(\Omega))^n}.
\end{aligned} \tag{3.77}
$$

En remplaçant (3.77) dans (3.76), on obtient

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left\|\mathbf{u}_\mathbf{m}'(t)\right\|^2+\left(\alpha-\int_\mathbf{0}^t g(\sigma)\,d\sigma\right)\left\|\mathbf{\Delta u}_m(t)\right\|^2_{(L^2(\Omega))^n}+\left(g\circ\mathbf{\Delta u}_m\right)(t)\right) \\
& -\frac{1}{2}\left(g'\circ\mathbf{\Delta u}_m\right)(t)+\frac{1}{2}g(t)\left\|\mathbf{\Delta u}_m(t)\right\|^2_{(L^2(\Omega))^n}+G(t)=\mathbf{A}\left(\mathbf{f}(t),\mathbf{u}_m'(t)\right),
\end{aligned}
$$

avec

$$
G(t)=\left(\left|\mathbf{u}_\mathbf{m}'(t)\right|^{\rho-1}\left[\rho\nabla\left|\mathbf{u}_m'(t)\right|\left(\mathbf{u}_m'(t)\right)+\left|\mathbf{u}_m'(t)\right|\nabla\mathbf{u}_m'(t)\right],\ \nabla\mathbf{u}_\mathbf{m}'(t)\right),
$$

par conséquent

$$\frac{1}{2}\left\|\mathbf{u}_{\mathbf{m}}^{'}(t)\right\|^{2}+\frac{1}{2}\left(\alpha-\int_{\mathbf{0}}^{t}g\left(\sigma\right)d\sigma\right)\left\|\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}_{m}(t)\right\|_{(L^{2}(\Omega))^{n}}^{2}+\frac{1}{2}\left(g\circ\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}_{m}\right)(t)$$
$$+\frac{1}{2}\int_{\mathbf{0}}^{t}\mathbf{g}\left(\sigma\right)\left\|\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}_{m}(\sigma)\right\|_{(L^{2}(\Omega))^{n}}^{2}d\sigma-\frac{1}{2}\int_{\mathbf{0}}^{t}\left(g'\circ\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}_{m}\right)(\sigma)\,d\sigma+\int_{\mathbf{0}}^{t}G\left(x,\sigma\right)d\sigma$$
$$\leq\frac{1}{2}\left\|\mathbf{u}_{1m}\right\|^{2}+\frac{1}{2}\alpha\left\|\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}_{0m}\right\|_{(L^{2}(\Omega))^{n}}^{2}+\int_{\mathbf{0}}^{t}\left\|\nabla\mathbf{f}\left(\sigma\right)\right\|_{(L^{2}(\Omega))^{n}}\left\|\nabla\mathbf{u}_{m}^{'}(\sigma)\right\|_{(L^{2}(\Omega))^{n}}d\sigma. \tag{3.78}$$

D'après les conditions (3.63), (3.64) le deuxième membre est

$$\leq k+\int_{\mathbf{0}}^{t}\left\|\nabla\mathbf{f}\left(\sigma\right)\right\|_{(L^{2}(\Omega))^{n}}\left\|\nabla\mathbf{u}_{m}^{'}(\sigma)\right\|_{(L^{2}(\Omega))^{n}}d\sigma. \tag{3.79}$$

D'où

$$\frac{1}{2}\left\|\mathbf{u}_{\mathbf{m}}^{'}(t)\right\|^{2}+\frac{1}{2}l\left\|\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}_{m}(t)\right\|_{(L^{2}(\Omega))^{n}}^{2}+\frac{1}{2}\left(g\circ\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}_{m}\right)(t)$$
$$+\frac{1}{2}\int_{\mathbf{0}}^{t}\mathbf{g}\left(\sigma\right)\left\|\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}_{m}(\sigma)\right\|_{(L^{2}(\Omega))^{n}}^{2}d\sigma-\frac{1}{2}\int_{\mathbf{0}}^{t}\left(g'\circ\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}_{m}\right)(\sigma)\,d\sigma+\int_{\mathbf{0}}^{t}G(\sigma)d\sigma$$
$$\leq k+\frac{1}{2}\int_{\mathbf{0}}^{t}\left\|\nabla\mathbf{f}\left(\sigma\right)\right\|_{(L^{2}(\Omega))^{n}}^{2}d\sigma+\frac{1}{2}\int_{\mathbf{0}}^{t}\left\|\nabla\mathbf{u}_{\mathbf{m}}^{'}(\sigma)\right\|_{(L^{2}(\Omega))^{n}}^{2}d\sigma. \tag{3.80}$$

Or

$$\int_{\mathbf{0}}^{t}\left\|\nabla\mathbf{u}_{\mathbf{m}}^{'}(\sigma)\right\|_{(L^{2}(\Omega))^{n}}^{2}d\sigma=\int_{\mathbf{0}}^{t}\left\|\mathbf{u}_{\mathbf{m}}^{'}(\sigma)\right\|^{2}d\sigma.$$

D'après (3.51) que

$$\int_{0}^{t}\left\|\nabla\mathbf{f}(\sigma)\right\|_{(L^{2}(\Omega))^{n}}^{2}d\sigma\leqslant constante, \tag{3.81}$$

et d'après la condition (G2), $\mathbf{g}^{'}$ est négative donc $\mathbf{g}$ décroissant, et d'après la définition de $\left(\mathbf{g}\circ\nabla\mathbf{u}_{m}\right)(t)$ on a :

$$\left(\mathbf{g}^{'}\circ\mathbf{u}_{m}\right)(t)\leq0,\ \left(g\circ\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}_{m}\right)(t)\geq0,$$

et comme g $(0)>0$ on a :

$$\mathbf{g}\left(t\right)\geq0.$$

Montrons maintenant, pour le premier terme que $G(\sigma) \geq 0$; en effet on a :

$$\begin{aligned}
G(t) &= \left(\left|\mathbf{u}_m^{'}(t)\right|^{\rho-1} \left[\rho \mathbf{u}_m^{'}(t) \nabla \left|\mathbf{u}_m^{'}(t)\right| + \left|\mathbf{u}_m^{'}(t)\right|^{\rho} \nabla \mathbf{u}_m^{'}(t)\right],\ \nabla \mathbf{u}_m^{'}(t) \right) \\
&= \int_\Omega \left|\mathbf{u}_m^{'}(t)\right|^{\rho-1} \left[\rho \mathbf{u}_m^{'}(t) \nabla \left|\mathbf{u}_m^{'}(t)\right| . \nabla \mathbf{u}_m^{'}(t) + \left|\mathbf{u}_m^{'}(t)\right|^{\rho} \left(\nabla \mathbf{u}_m^{'}(t)\right)^2\right] dx \\
&= \frac{\rho}{2} \int_\Omega \left|\mathbf{u}_m^{'}(t)\right|^{\rho-1} \nabla \left|\mathbf{u}_m^{'}(t)\right| . \nabla \left(\mathbf{u}_m^{'}(t)\right)^2 dx + \int_\Omega \left|\mathbf{u}_m^{'}(t)\right|^{\rho} \left(\nabla \mathbf{u}_m^{'}(t)\right)^2 dx,
\end{aligned}$$

remarquons que

$$\int_\Omega \left|\mathbf{u}_m^{'}(t)\right|^{\rho} \left(\nabla \mathbf{u}_m^{'}(t)\right)^2 dx \geq 0, \tag{3.82}$$

et comme

$$\mathbf{u}_m^{'2}(t) = \left|\mathbf{u}_m^{'}(t)\right|^2,$$

on a

$$\nabla \mathbf{u}_m^{'2}(t) = \nabla \left|\mathbf{u}_m^{'}(t)\right|^2,$$

mais

$$\nabla \left|\mathbf{u}_m^{'}(t)\right|^2 = 2 \left|\mathbf{u}_m^{'}(t)\right| . \nabla \left|\mathbf{u}_m^{'}(t)\right|,$$

alors

$$\nabla \mathbf{u}_m^{'2}(t) = 2 \left|\mathbf{u}_m^{'}(t)\right| . \nabla \left|\mathbf{u}_m^{'}(t)\right|,$$

on déduit

$$\int_\Omega \left|\mathbf{u}_m^{'}(t)\right|^{\rho-1} \nabla \left|\mathbf{u}_m^{'}(t)\right| . \nabla \left(\mathbf{u}_m^{'}(t)\right)^2 dx = \int_\Omega \left|\mathbf{u}_m^{'}(t)\right|^{\rho-1} \left(\nabla \left|\mathbf{u}_m^{'}(t)\right|\right)^2 \left|\mathbf{u}_m^{'}(t)\right| dx \geq 0,$$

ce qui prouve l'inégalité $G(t) \geq 0$.

En déduit donc, en particulier de (3.80), que

$$\frac{1}{2} \left\|\mathbf{u}_{\mathbf{m}}^{'}(t)\right\|^2 \leq k + 2\alpha \int_0^t \left\|\mathbf{u}_{\mathbf{m}}^{'}(\sigma)\right\|^2 d\sigma,$$

d'où résulte

$$\left\|\mathbf{u}_m^{'}(t)\right\|^2 \leq k. \tag{3.83}$$

Reprenant (3.80), l'estimation se réduit à

$$\frac{1}{2}\left\|\mathbf{u}_m^{'}(t)\right\|^2 + l\left\|\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}_m(t)\right\|^2_{(L^2(\Omega))^n} + (g\circ\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}_m)(t) \leq c, \tag{3.84}$$

et comme $\|\boldsymbol{\Delta}\varphi\|^2_{(L^2(\Omega))^n} > c\|\varphi\|_{(\mathbf{H}^2(\Omega))^n}$ pour $\varphi \in (\mathbf{H}_0^1(\Omega))^n$, $\boldsymbol{\Delta}\varphi \in (\mathbf{L}^2(\Omega))^n$valable pour Γ étant assez régulier. On déduit que :

$$\left\|\mathbf{u}_m^{'}(t)\right\|^2 + \|\mathbf{u}_m(t)\|^2_{(\mathbf{H}^2(\Omega))^n} + (g\circ\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}_m)(t) \leq c. \tag{3.85}$$

On en déduit l'estimation

$$\mathbf{u}_m^{'} \textit{ demeure dans un borné de } \mathbf{L}^\infty\left(0,\ T;\ \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega)\right)^n\right), \tag{3.86}$$

$$\mathbf{u}_m \textit{ demeure dans un borné de } \mathbf{L}^\infty\left(0,\ T;\ \left(\mathbf{H}^2(\Omega)\right)^n\right). \tag{3.87}$$

En particulier

$$\mathbf{u}_m^{'} \textit{ demeure dans un borné de } \mathbf{L}^2\left(0,\ T; \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega)\right)^n\ \right). \tag{3.88}$$

Pour pouvoir appliquer la méthode de compacité, il nous faut une estimation sur $\mathbf{u}_m^{''}(t)$.

Estimation a priori III.

Dérivons l'équation (3.62) par rapport à t, multiplions le résultat par $d_{jm}^{''}(t)$, puis sommons sur j. On aura

$$\begin{gathered}\left(\mathbf{u}_m^{'''}(t),\mathbf{u}_m^{''}(t)\right) + \alpha\mathbf{A}\left(\mathbf{u}_m^{'}(t),\ \mathbf{u}_m^{''}(t)\right) - \int_{\mathbf{0}}^t \mathbf{g}^{'}(t-s)\,\mathbf{A}\left(\mathbf{u}_m(s),\mathbf{u}_m^{''}(t)\right)ds \\ -\mathbf{g}(0)\,\mathbf{A}(\mathbf{u}_m(t),\mathbf{u}_m^{''}(t)) + \left(\frac{d}{dt}\left[\left|\mathbf{u}_\mathbf{m}^{'}(t)\right|^\rho \mathbf{u}_m^{'}(t)\right],\ \mathbf{u}_m^{''}(t)\right) = \left(\mathbf{f}^{'}(t),\mathbf{u}_m^{''}(t)\right).\end{gathered} \tag{3.89}$$

Mais

$$\frac{d}{dt}\left[\left|\mathbf{u}_m^{'}(t)\right|^\rho \mathbf{u}_m^{'}(t)\right] = \rho\left|\mathbf{u}_m^{'}(t)\right|^{\rho-1}\frac{d}{dt}\left|\mathbf{u}_m^{'}(t)\right|\left(\mathbf{u}_m^{'}(t)\right) + \left|\mathbf{u}_m^{'}(t)\right|^\rho u_m^{''}(t),$$

alors

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left|\mathbf{u}_m^{''}(t)\right|^2+\alpha\left\|\mathbf{u}_m^{'}(t)\right\|^2\right)-\int_{\mathbf{0}}^{t}\mathbf{g}^{'}\left(t-s\right)\mathbf{A}\left(\mathbf{u}_m(s),\mathbf{u}_m^{''}(t)\right)ds$$
$$-\mathbf{g}\left(0\right)\mathbf{A}(\mathbf{u}_m(t),\mathbf{u}_m^{''}(t))+\left(\left|\mathbf{u}_{\mathbf{m}}^{'}(t)\right|^{\rho-1}\left[\rho\frac{d}{dt}\left|\mathbf{u}_m^{'}(t)\right|\left(\mathbf{u}_m^{'}(t)\right)+\left|\mathbf{u}_m^{'}(t)\right|\mathbf{u}_m^{''}(t)\right],\ \mathbf{u}_{\mathbf{m}}^{''}(t)\right)$$
$$=\left(\mathbf{f}^{'}(t),\mathbf{u}_m^{''}(t)\right). \tag{3.90}$$

D'autre part

$$-\frac{d}{dt}\int_{\mathbf{0}}^{t}\mathbf{g}^{'}\left(t-s\right)\mathbf{A}\left(\mathbf{u}_m(s),\mathbf{u}_m^{'}(t)\right)ds$$
$$=-\mathbf{g}^{'}\left(0\right)\mathbf{A}(\mathbf{u}_m(t),\mathbf{u}_m^{'}(t))+\int_{\mathbf{0}}^{t}\frac{d}{dt}\left[\mathbf{g}^{'}\left(t-s\right)\mathbf{A}(\mathbf{u}_m(s),\mathbf{u}_m^{'}(t))\right]ds,$$
$$=-\mathbf{g}^{'}\left(0\right)\mathbf{A}(\mathbf{u}_m(t),\mathbf{u}_m^{'}(t))+\int_{\mathbf{0}}^{t}\mathbf{g}^{''}\left(t-s\right)\mathbf{A}(\mathbf{u}_m(s),\mathbf{u}_m^{'}(t))ds$$
$$+\int_{\mathbf{0}}^{t}\mathbf{g}^{'}\left(t-s\right)\mathbf{A}(\mathbf{u}_m(s),\mathbf{u}_m^{''}(t))ds, \tag{3.91}$$

de sorte que

$$-\int_{\mathbf{0}}^{t}\mathbf{g}^{'}\left(t-s\right)\mathbf{A}(\mathbf{u}_m(s),\mathbf{u}_m^{''}(t))ds=-\mathbf{g}^{'}\left(0\right)\mathbf{A}(\mathbf{u}_m(t),\mathbf{u}_m^{'}(t))$$
$$+\frac{d}{dt}\int_{\mathbf{0}}^{t}\mathbf{g}^{'}\left(t-s\right)\mathbf{A}(\mathbf{u}_m(s),\mathbf{u}_m^{'}(t))ds+\int_{\mathbf{0}}^{t}\mathbf{g}^{''}\left(t-s\right)\mathbf{A}(\mathbf{u}_m(s),\mathbf{u}_m^{'}(t))ds. \tag{3.92}$$

Ainsi

$$\frac{d}{dt}\mathbf{A}(\mathbf{u}_m(t),\mathbf{u}_m^{'}(t))=\mathbf{A}(\mathbf{u}_m^{'}(t),\mathbf{u}_m^{'}(t))+\mathbf{A}(\mathbf{u}_m(t),\mathbf{u}_m^{''}(t), \tag{3.93}$$

donc

$$-\mathbf{g}\left(0\right)\mathbf{A}(\mathbf{u}_m(t),\mathbf{u}_m^{''}(t))=-\mathbf{g}\left(0\right)\frac{d}{dt}\mathbf{A}(\mathbf{u}_m(t),\mathbf{u}_m^{'}(t))+\mathbf{g}\left(0\right)\mathbf{A}(\mathbf{u}_m^{'}(t),\mathbf{u}_m^{'}(t)). \tag{3.94}$$

On aura finalement

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left|\mathbf{u}_m''(t)\right|^2+\frac{1}{2}\alpha\left\|\mathbf{u}_m'(t)\right\|^2\right)-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbf{0}}^{t}\mathbf{g}'(t-\sigma)\,\mathbf{A}(\mathbf{u}_m(\sigma),\mathbf{u}_m'(t))d\sigma$$
$$+\int_{\mathbf{0}}^{t}\mathbf{g}''(t-s)\,\mathbf{A}\left(\mathbf{u}_m(s),\mathbf{u}_m'(t)\right)ds+\mathbf{g}'(0)\,\mathbf{A}(\mathbf{u}_m(t),\mathbf{u}_m'(t))$$
$$-\mathbf{g}(0)\,\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\mathbf{A}(\mathbf{u}_m(t),\mathbf{u}_m'(t))+\mathbf{g}(0)\left\|\mathbf{u}_m'(t)\right\|^2+\mathbf{k}(t)=\left(\mathbf{f}'(t),\mathbf{u}_m''(t)\right), \tag{3.95}$$

avec

$$\mathbf{k}(t)=\left(\left|\mathbf{u}_\mathbf{m}'(t)\right|^{\rho-1}\left[\rho\frac{d}{dt}\left|\mathbf{u}_m'(t)\right|\left(\mathbf{u}_m'(t)\right)+\left|\mathbf{u}_m'(t)\right|\mathbf{u}_m''(t)\right],\ \mathbf{u}_\mathbf{m}''(t)\right).$$

On intègre sur l'intervalle $(0,t)$,on aura

$$\frac{1}{2}\left|\mathbf{u}_m''(t)\right|^2+\frac{1}{2}\alpha\left\|\mathbf{u}_m'(t)\right\|^2+\overbrace{\int_0^t\mathbf{k}(\sigma)d\sigma}^{1}$$
$$\leq\ \overbrace{\frac{1}{2}\left|\mathbf{u}_m''(0)\right|^2}^{2}+\overbrace{\frac{1}{2}\alpha\left\|\mathbf{u}_m'(0)\right\|^2-\mathbf{g}(0)\,\mathbf{A}(\mathbf{u}_m(0),\mathbf{u}_m'(0))}^{3}$$
$$\overbrace{\left|\int_{\mathbf{0}}^{t}\int_{\mathbf{0}}^{\tau}\mathbf{g}''(\tau-\sigma)\,\mathbf{A}(\mathbf{u}_m(\sigma),\mathbf{u}_m'(\tau))d\sigma d\tau\right|}^{4}+\overbrace{\left|\int_{\mathbf{0}}^{t}\mathbf{g}'(t-\sigma)\,\mathbf{A}(\mathbf{u}_m(\sigma),\mathbf{u}_m'(\sigma))d\sigma\right|}^{5}$$
$$+\overbrace{\left|\mathbf{g}'(0)\int_{\mathbf{0}}^{t}\mathbf{A}(\mathbf{u}_m(\sigma),\mathbf{u}_m'(\sigma))d\sigma\right|}^{6}+\overbrace{\left|\mathbf{g}'(0)\,\mathbf{A}(\mathbf{u}_m(t),\mathbf{u}_m'(t))\right|}^{7}$$
$$+\mathbf{g}(0)\int_{\mathbf{0}}^{t}\left\|\mathbf{u}_m'(\sigma)\right\|^2d\sigma+\overbrace{\int_0^t\left(\mathbf{f}'(\sigma),\mathbf{u}_m''(\sigma)\right)d\sigma}^{8}. \tag{3.96}$$

Montrons maintenant, pour le premier terme que $k(\sigma)\geq 0$; en effet on a :

$$\begin{aligned}
k(t) &= \left(\left|\mathbf{u}_m'(t)\right|^{\rho-1}\left[\rho\mathbf{u}_m'(t)\frac{d}{dt}\left|\mathbf{u}_m'(t)\right|+\left|\mathbf{u}_m'(t)\right|\mathbf{u}_m''(t)\right],\ \mathbf{u}_m''(t)\right)\\
&= \int_\Omega\left|\mathbf{u}_m'(t)\right|^{\rho-1}\left[\rho\mathbf{u}_m'(t)\frac{d}{dt}\left|\mathbf{u}_m'(t)\right|.\mathbf{u}_m''(t)+\left|\mathbf{u}_m'(t)\right|\left(\mathbf{u}_m''(t)\right)^2\right]dx\\
&= \frac{\rho}{2}\int_\Omega\left|\mathbf{u}_m'(t)\right|^{\rho-1}\frac{d}{dt}\left|\mathbf{u}_m'(t)\right|.\frac{d}{dt}\left(\mathbf{u}_m'(t)\right)^2dx+\int_\Omega\left|\mathbf{u}_m'(t)\right|^{\rho}\left(\mathbf{u}_m''(t)\right)^2dx,
\end{aligned}$$

remarquons que

$$\int_\Omega \left|\mathbf{u}_m^{'}(t)\right|^\rho \left(\mathbf{u}_m^{''}(t)\right)^2 dx \geq 0. \tag{3.97}$$

Soient maintenant $t,\ s \in [0,\ T]$, tels que $t > s$, alors

$$\mathbf{u}_m^{'2}(t) - \mathbf{u}_m^{'2}(s) = \left|\mathbf{u}_m^{'}(t)\right|^2 - \left|\mathbf{u}_m^{'}(s)\right|^2 = \left[\left|\mathbf{u}_m^{'}(t)\right| - \left|\mathbf{u}_m^{'}(s)\right|\right]\left[\left|\mathbf{u}_m^{'}(t)\right| + \left|\mathbf{u}_m^{'}(s)\right|\right],$$

cela signifie que les fonctions $\mathbf{u}_m^{'2}(t)$, $\left|\mathbf{u}_m^{'}(t)\right|$ ont le même sens de variation, donc

$$\int_\Omega \left|\mathbf{u}_m^{'}(t)\right|^{\rho-1} \frac{d}{dt}\left|\mathbf{u}_m^{'}(t)\right| . \frac{d}{dt}\left(\mathbf{u}_m^{'}(t)\right)^2 dx \geq 0,$$

ce qui prouve l'inégalité $k(\sigma) \geq 0$.

Pour le reste de ce chapitre, on note par k_i *avec* $i = 0, ..., 10$, différentes constantes strictement positives indépendantes de m, on a les estimations suivantes :

Pour le deuxième terme, nous multiplie (3.62) par $d_{jm}^{''}(0)$ et sommons sur j, et on choisira $t = 0$. On aura

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{u}_m^{''}(0),\mathbf{u}_m^{''}(0)\right) + \alpha\mathbf{A}(\mathbf{u}_m(0), \mathbf{u}_m^{''}(0)) + \left(\left|\mathbf{u}_m^{'}(0)\right|^\rho \mathbf{u}_m^{'}(0),\mathbf{u}_m^{''}(0)\right) \\ = (\mathbf{f}^{'}(0), \mathbf{u}_m^{''}(0)),\ j = 1,\ \ldots,\ m.\end{aligned} \tag{3.98}$$

D'après la formule de Green et les conditions aux limites, on trouve :

$$\left(\mathbf{u}_m^{''}(0),\mathbf{u}_m^{''}(0)\right) - \alpha\left(\mathbf{\Delta u}_{0m}, \mathbf{u}_m^{''}(0)\right) + \left(\left|\mathbf{u}_{1m}\right|^\rho \mathbf{u}_{1m},\mathbf{u}_m^{''}(0)\right) = (\mathbf{f}^{'}(0), \mathbf{u}_m^{''}(0)). \tag{3.99}$$

On déduit donc de (3.99) :

$$\left|\mathbf{u}_m^{''}(0)\right|^2 = (\mathbf{f}^{'}(0), \mathbf{u}_m^{''}(0)) + \alpha\left(\mathbf{\Delta u}_{0m}, \mathbf{u}_m^{''}(0)\right) - \left(\left|\mathbf{u}_{1m}\right|^\rho \mathbf{u}_{1m},\mathbf{u}_m^{''}(0)\right),$$

d'où

$$\left|\mathbf{u}_m^{''}(0)\right| \leq \left|\mathbf{f}(0)\right|^2 + \alpha\left|\mathbf{\Delta u}_{0m}\right|^2 + \left(\int_{\mathbf{\Omega}} \left|\left|\mathbf{u}_{1m}\right|^\rho \mathbf{u}_{1m}\right| dx\right)^{\dfrac{1}{2}},$$

et donc, grâce à (3.51), (3.52) et (3.53) :

$$\left|\mathbf{u}_m^{''}(0)\right| \leq k_2. \tag{3.100}$$

Pour le troisième terme,

$$\left|\frac{1}{2}\alpha\left\|\mathbf{u}_{1m}\right\|^{2}-\mathbf{g}\left(0\right)\mathbf{A}(\mathbf{u}_{0m},\mathbf{u}_{1m})\right|\leq k_{3}.$$

Le quatrième terme, d'après l'inégalité de Young que :

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbf{0}}^{t}\int_{\mathbf{0}}^{\tau}\mathbf{g}^{''}\left(\tau-s\right)\mathbf{A}(\mathbf{u}_{m}(x,s),\mathbf{u}_{m}^{'}(x,\tau))dsd\tau=\right|&\int_{\mathbf{\Omega}}\nabla\mathbf{u}_{m}\left(\tau\right).\left(\int_{\mathbf{0}}^{\tau}g^{''}\left(\tau-s\right)\nabla\mathbf{u}_{m}\left(s\right)ds\right)dx\\ \leq\frac{1}{2}\int_{\mathbf{\Omega}}\left|\nabla\mathbf{u}_{m}\left(\tau\right)\right|^{2}dx+\frac{1}{2}\int_{\Omega}&\left(\int_{\mathbf{0}}^{\tau}g^{''}\left(\tau-s\right)\nabla\mathbf{u}_{m}\left(s\right)ds\right)^{2}dx.\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, et puisque $0\leq g^{''}\left(s\right)\leq L_{1}$, on obtient

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega}\left(\int_{0}^{\tau}g^{''}\left(\tau-s\right)\left|\nabla u\left(s\right)\right|ds\right)^{2}dx\\ \leq\;&\int_{\Omega}\left(\left(\int_{0}^{\tau}\left|g^{''}\left(\tau-s\right)\right|^{2}ds\right)^{\frac{1}{2}}\times\left(\int_{0}^{\tau}\left|\nabla\mathbf{u}_{m}\left(s\right)\right|^{2}ds\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{2}dx\\ \leq\;&\int_{\Omega}\left(\int_{0}^{\tau}\left(g^{''}\left(\tau-s\right)\right)^{2}ds\times\int_{0}^{\tau}\left(\nabla\mathbf{u}_{m}\left(s\right)\right)^{2}ds\right)dx\\ \leq\;&L_{1}^{2}\int_{0}^{\tau}ds\times\int_{\Omega}\int_{0}^{\tau}\left(\nabla\mathbf{u}_{m}\left(s\right)\right)^{2}dsdx\\ \leq\;&L_{1}^{2}\int_{0}^{\tau}ds\times\int_{0}^{\tau}\left\|\nabla\mathbf{u}_{m}\left(s\right)\right\|_{(L^{2}(\Omega))^{n}}^{2}dsdx\\ \leq\;&TL_{1}^{2}\int_{0}^{\tau}\left\|\mathbf{u}_{m}\left(s\right)\right\|^{2}ds,\end{aligned}$$

et d'où, on trouve le résultat désiré

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\mathbf{0}}^{t}\int_{\Omega}\nabla\mathbf{u}_{m}^{'}\left(\tau\right).\left(\int_{0}^{\tau}g^{''}\left(\tau-s\right)\nabla\mathbf{u}_{m}\left(s\right)ds\right)dxd\tau\right|\\ \leq\;&\frac{1}{2}\int_{\mathbf{0}}^{t}\left\|\nabla\mathbf{u}_{m}^{'}\left(\tau\right)\right\|^{2}d\tau+\frac{1}{2}\int_{\mathbf{0}}^{t}\int_{\Omega}\left(\int_{0}^{\tau}g^{''}\left(\tau-s\right)\nabla\mathbf{u}_{m}\left(s\right)ds\right)^{2}dxd\tau\\ \leq\;&\frac{1}{2}\int_{\mathbf{0}}^{t}\left\|\mathbf{u}_{m}^{'}(\tau)\right\|^{2}d\tau+\frac{TL_{1}^{2}}{2}\int_{\mathbf{0}}^{t}\int_{0}^{\tau}\left\|\mathbf{u}_{m}\left(s\right)\right\|^{2}dsd\tau\\ \leq\;&\frac{1}{2}\int_{\mathbf{0}}^{t}\left\|\mathbf{u}_{m}^{'}(\tau)\right\|^{2}d\tau+k_{4}\left(T\right).\end{aligned}\tag{3.101}$$

Le cinquième terme, pour $\gamma > 0$; d'après l'inégalité de Young que :

$$\left|\int_{\mathbf{0}}^{t} \mathbf{g}^{'}(t-s)\,\mathbf{A}(\mathbf{u}_m(s),\mathbf{u}_m^{'}(t))ds\right| = \left|\left(\nabla \mathbf{u}_m^{'}(t)\,, \int_0^t g^{'}(\tau - s)\,\nabla \mathbf{u}_m(s)\,ds\right)\right|$$
$$\leq \gamma \int_{\Omega} \left(\nabla \mathbf{u}_m^{'}(t)\right)^2 dx + \frac{1}{4\gamma}\int_{\Omega}\left(\int_0^t g^{'}(t-s)\,\nabla \mathbf{u}_m(s)\,ds\right)^2 dx.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, et puisque $0 \leq \left|g^{'}(s)\right| \leq L_0$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^t g^{'}(\tau - s)\,\nabla \mathbf{u}_m(x,s)\,ds &\leq \sqrt{\int_0^t \left(g^{'}(\tau - s)\right)^2 ds}\sqrt{\int_0^t \left(\nabla \mathbf{u}_m(s)\right)^2 ds}, \\ &\leq L_0\sqrt{T}\sqrt{\int_0^t \left|\nabla \mathbf{u}_m(s)\right|^2 ds},\end{aligned}$$

et d'où, on trouve le résultat désiré

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{0}}^{t} \mathbf{g}^{'}(t-s)\,\mathbf{A}(\mathbf{u}_m(x,s),\mathbf{u}_m^{'}(x,t))dt &\leq \gamma \left\|\mathbf{u}_m^{'}(t)\right\|^2 + \frac{TL_0^2}{4\gamma}\int_{\mathbf{0}}^{t}\left\|\mathbf{u}_m(s)\right\|^2 ds \\ &\leq \gamma\left\|\mathbf{u}_m^{'}(t)\right\|^2 + k_5(T)\,. \qquad (3.102)\end{aligned}$$

Le sixième terme

$$\begin{aligned}\left|-\mathbf{g}^{'}(0)\int_{\mathbf{0}}^{t}\mathbf{A}(\mathbf{u}_m(s),\mathbf{u}_m^{'}(s))ds\right| &= \left|\int_{\mathbf{0}}^{t}\left(\nabla \mathbf{u}_m(s), \mathbf{g}^{'}(0)\,\nabla \mathbf{u}_m^{'}(s)\right)ds\right|, \\ &\leq \frac{1}{2}\int_{\mathbf{0}}^{t}\left\|\mathbf{g}^{'}(0)\,\mathbf{u}_m^{'}(s)\right\|^2 ds + \frac{1}{2}\int_{\mathbf{0}}^{t}\left\|\mathbf{u}_m(s)\right\|^2 ds, \\ &\leq \frac{k_0}{2}\int_{\mathbf{0}}^{t}\left\|\mathbf{u}_m^{'}(s)\right\|^2 ds + k_6(T)\,. \qquad (3.103)\end{aligned}$$

Le septième terme, et pour $\gamma > 0$; on a

$$\begin{aligned}
\left|\mathbf{g}(0)\left(\nabla \mathbf{u}_m(t), \nabla \mathbf{u}_m'(t)\right)\right| &\leq \gamma \int_{\mathbf{\Omega}} \left\|\nabla \mathbf{u}_m'(t)\right\|^2_{(L^2(\Omega))^n} dx + \frac{1}{4\gamma}\int_{\mathbf{\Omega}} \left\|\mathbf{g}(0)\nabla \mathbf{u}_m(t)\right\|^2_{(L^2(\Omega))^n} dx, \\
&\leq \gamma \left\|\mathbf{u}_m'(t)\right\|^2 + \frac{|\mathbf{g}(0)|}{4\gamma}\left\|\mathbf{u}_m(t)\right\|^2 \\
&\leq \gamma \left\|\mathbf{u}_m'(t)\right\|^2 + k_7(\gamma). \qquad (3.104)
\end{aligned}$$

Le huitième terme, comme $\int_0^t \left|\mathbf{f}'(\sigma)\right|^2 d\sigma \leq C$, on déduit donc

$$\begin{aligned}
\int_0^t \left|\mathbf{f}'(\sigma)\right| \left|\mathbf{u}_m''(\sigma)\right| d\sigma &\leq \frac{1}{2}\int_0^t \left|\mathbf{f}'(\sigma)\right|^2 d\sigma + \frac{1}{2}\int_0^t \left|\mathbf{u}_m''(\sigma)\right|^2 d\sigma \\
&\leq C + \frac{1}{2}\int_0^t \left|\mathbf{u}_m''(\sigma)\right|^2 d\sigma. \qquad (3.105)
\end{aligned}$$

A ce point, on choisit γ assez petit est combinant (3.99)-(3.105) on obtient

$$\left|\mathbf{u}_m''(t)\right|^2 + \left\|\mathbf{u}_m'(t)\right\|^2 \leq k_8\left(\int_{\mathbf{0}}^t \left|\mathbf{u}_m''(s)\right|^2 ds + \int_{\mathbf{0}}^t \left\|\mathbf{u}_m'(s)\right\|^2 ds\right) + k_9. \qquad (3.106)$$

Reprenant (3.106) on en déduit que

$$\left|\mathbf{u}_m''(t)\right|^2 + \left\|\mathbf{u}_m'(t)\right\|^2 \leq k_{10}. \qquad (3.107)$$

On en déduit l'estimation

$$\mathbf{u}_m' \textit{ demeure dans un borné de } \mathbf{L}^\infty\left(0,\ T;\ \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega)\right)^n\right), \qquad (3.108)$$

$$\mathbf{u}_m'' \textit{ demeure dans un borné de } \mathbf{L}^\infty\left(0,\ T;\ \left(\mathbf{L}^2(\Omega)\right)^n\right). \qquad (3.109)$$

En particulier

$$\mathbf{u}_m^{''} \ \textit{demeure dans un borné de } \mathbf{L}^2\left(0,\ T;\ \left(\mathbf{L}^2(\Omega)\right)^n\right). \tag{3.110}$$

Etape.3 Passage à la limite.

D'après (3.72), (3.73), (3.86), (3.87), (3.108) et (3.109), on peut extraire une suite $\mathbf{u}_\mu^{'}(t)$ telle que

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_\mu &\longrightarrow \mathbf{u} \ \textit{dans } \mathbf{L}^\infty\left(0,\ T;\ (\mathbf{H}^2(\Omega)\cap\mathbf{H}_0^1(\Omega))^n\right) \ \textit{faible étoile}, && (3.111)\\
\mathbf{u}_\mu^{'} &\longrightarrow \mathbf{u}^{'} \ \textit{dans } \mathbf{L}^\infty\left(0,\ T;\ (\mathbf{H}_0^1(\Omega))^n\right) \ \textit{faible étoile}, && (3.112)\\
\mathbf{u}_\mu^{''} &\longrightarrow \mathbf{u}^{''} \ \textit{dans } \mathbf{L}^\infty\left(0,\ T;\ \left(\mathbf{L}^2(\Omega)\right)^n\right) \ \textit{faible étoile}, && (3.113)\\
\left|\mathbf{u}_\mu^{'}\right|^\rho \mathbf{u}_\mu^{'} &\longrightarrow \psi \ \textit{dans } \mathbf{L}^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\mathbf{Q}) \ \textit{faible}. && (3.114)
\end{aligned}$$

On sait d'après (3.88) et (3.110) que

$$\begin{gathered}
\mathbf{u}_m^{'} \text{ demeure dans un borné de } \mathbf{L}^2\left(0,\ T;\ (\mathbf{H}_0^1(\Omega))^n\right),\\
\text{et } \mathbf{u}_m^{''} \text{ demeure dans un borné de } \mathbf{L}^2\left(0,\ T;\ (\mathbf{L}^2(\Omega))^n\right).
\end{gathered}$$

Et on sait que l'injection $\mathbf{H}_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\Omega)$ est compacte. On peut donc appliquer le théorème 1.4.3 de compacité, de Aubin (voir [8]), avec

$$\mathbf{B}_0 = (\mathbf{H}_0^1(\Omega))^n,\ \boldsymbol{B} = \mathbf{B}_1 = (\mathbf{L}^2(\Omega))^n \text{ et } p_0 = p_1 = 2,$$

c'est à dire qu'on peut extraire une suite $\mathbf{u}_\mu^{'}$ telle que

$$\mathbf{u}_\mu^{'} \longrightarrow \mathbf{u}^{'} \ \textit{dans } \ \mathbf{L}^2\left(0,\ T;\ \left(\mathbf{L}^2(\Omega)\right)^n\right) = \left(\mathbf{L}^2(\mathbf{Q}_T)\right)^n \ \textit{fort et presque partout}. \tag{3.115}$$

Et comme l'application $\mathbf{f} \longrightarrow |\mathbf{f}|^{\rho} |\mathbf{f}|$, applique $\mathbf{L}^{\rho+2}(\Omega)$ sur $\mathbf{L}^{p'}(\Omega)$, avec $\dfrac{1}{p'}+\dfrac{1}{\rho+2}=1$, alors

$$\left|\mathbf{u}_{\mu}'\right|^{\rho} \mathbf{u}_{\mu}' \text{ demeure dans un borné de } \mathbf{L}^{\infty}\left(0,\ T;\ (\mathbf{L}^{\rho+2}(\Omega))^{n}\right),$$

il existe donc $\psi \in \mathbf{L}^{\infty}(0, T; (\mathbf{L}^{p'}(\Omega))^{n})$ telle que

$$\left|\mathbf{u}_{\mu}'\right|^{\rho} \mathbf{u}_{\mu}' \longrightarrow \psi \ \ \textit{dans } \mathbf{L}^{\infty}\left(0,\ T;\ (\mathbf{L}^{p'}(\Omega))^{n}\right) \textit{ faible étoile.} \tag{3.116}$$

Pour cela, on applique le lemme1.5.2 avec

$$\mathbf{\Theta} = \mathbf{Q}_{T},\ \mathbf{g}_{\mu} = \left|\mathbf{u}_{\mu}'\right|^{\rho} \mathbf{u}_{\mu}', \text{ avec } q = p' = \frac{\rho+2}{\rho+1},$$

d'après (3.115)

$$\mathbf{u}_{\mu}' \longrightarrow \mathbf{u}' \text{ presque partout dans } \mathbf{\Theta},$$

par suite

$$\mathbf{g}_{\mu} \longrightarrow \mathbf{g} = \left|\mathbf{u}'\right|^{\rho} \mathbf{u}' \text{ presque partout dans } \mathbf{\Theta},$$

de plus (3.116) donne

$$\mathbf{g}_{\mu} \longrightarrow \mathbf{w} \ \text{ dans } \mathbf{L}^{\infty}\left(0,\ T;\ (\mathbf{L}^{q}(\Omega))^{n}\right) \text{ faible étoile,}$$

or

$$\mathbf{L}^{\infty}\left(0,\ T;\ (\mathbf{L}^{q}(\Omega))^{n}\right) \subset \mathbf{L}^{q}(\mathbf{\Theta}),$$

alors

$$\mathbf{g}_{\mu} \longrightarrow \psi \ \text{ dans } \mathbf{L}^{q}(\mathbf{\Theta}) \text{ faible.}$$

Par conséquent

$$\psi = \mathbf{g} = \left|\mathbf{u}'\right|^{\rho} \mathbf{u}'.$$

C'est à dire qu'on a l'estimation suivante

$$\left|\mathbf{u}_\mu^{'}\right|^\rho \mathbf{u}_\mu^{'} \longrightarrow \left|\mathbf{u}^{'}\right|^\rho \mathbf{u}^{'} dans\ \mathbf{L}^\infty\left(0,\ T;\ (\mathbf{L}^{\rho+2}(\Omega))^n\right)\ faible\ étoile. \tag{3.117}$$

On déduit de (3.70), (3.74) et (3.86) que

$$\left(\mathbf{u}_\mu^{'},\ \mathbf{e}_j\right) \longrightarrow \left(\mathbf{u}_\mu^{'},\ \mathbf{e}_j\right) \text{ dans } \mathbf{L}^\infty(0,\ T),$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}_\mu,\ \mathbf{e}_j) \longrightarrow \mathbf{A}(\mathbf{u},\ \mathbf{e}_j) \text{ dans } \mathbf{L}^\infty(0,\ T),$$

$$(\mathbf{u}_m^{''}(t),\ e_j) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u}_\mu^{'},\ \mathbf{e}_j\right) \longrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u}_\mu^{'},\ \mathbf{e}_j\right) \text{ dans } \mathfrak{D}^{'}(0,\ T),$$

$$(\ \left|\mathbf{u}_\mu^{'}(t)\right|^\rho \mathbf{u}_\mu^{'}(t),\ \mathbf{e}_j) \longrightarrow (\ \left|\mathbf{u}^{'}(t)\right|^\rho \mathbf{u}^{'}(t),\ \mathbf{e}_j) \text{ dans } \mathbf{L}^\infty(0,\ T).$$

Par passage à la limite pour les termes des équations (3.99) dans $\mathfrak{D}^{'}(0,\ T)$ (par exemple), pour $m = \mu$ et j fixe ; on va avoir

$$\begin{gathered}(\mathbf{u}^{''}(t), \mathbf{e}_j) + \mathbf{A}(\mathbf{u}(t), \mathbf{e}_j) - \int_\mathbf{0}^t \mathbf{g}^{'}\,(t-s)\,\mathbf{A}(\mathbf{u}_\mu(s), e_j)ds + (\ \left|\mathbf{u}^{'}(t)\right|^\rho \mathbf{u}^{'}(t), \mathbf{e}_j) \\ = (\mathbf{f}, \mathbf{e}_j), j = 1, ..m.\end{gathered}$$

Par conséquent

$$\begin{gathered}(\mathbf{u}^{''}(t), \mathbf{v}) + \mathbf{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \int_\mathbf{0}^t \mathbf{g}^{'}\,(t-s)\,\mathbf{A}(\mathbf{u}_\mu(s), \mathbf{v})ds + \left(\left|\mathbf{u}^{'}\right|^\rho \mathbf{u}^{'},\ \mathbf{v}\right) \\ = (\mathbf{f}, \mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in \left(\mathbf{H}^2\,(\Omega) \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega)\right)^n.\end{gathered}$$

D'où l'existence de la solution.

2.Unicité :

Supposons que le problème admet deux solutions $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$. Posant

$$\mathbf{U} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2.$$

On aura après soustraction, le système :

$$\mathbf{U}'' + \alpha \mathbf{\Delta U} - \int_{\mathbf{0}}^{t} \mathbf{g}\,(t-s)\,\mathbf{\Delta U}(.,s)ds + \left|\mathbf{u}'_2\right|^{p-2} \mathbf{u}'_2 - \left|\mathbf{u}'_1\right|^{p-2} \mathbf{u}'_1 = 0. \tag{3.118}$$

Prenant le produit scalaire des deux membres de (3.118) par $\mathbf{U}'\,(t)$, on obtient :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left|\mathbf{U}'\,(t)\right|^2 + \alpha \left\|\mathbf{U}\,(t)\right\|^2\right] - \int_{\mathbf{0}}^{t} \mathbf{g}\,(t-s)\,\mathbf{A}(\mathbf{U}(s),\ \mathbf{U}'\,(t))ds$$
$$+ \left(\left|\mathbf{u}'_2\right|^{p-2} \mathbf{u}'_2 - \left|\mathbf{u}'_1\right|^{p-2} \mathbf{u}'_1,\, \mathbf{U}'\right) = 0.$$

Mais

$$- \int_{\mathbf{0}}^{t} \mathbf{g}\,(t-s)\,\mathbf{A}(\mathbf{U}(s),\ \mathbf{U}'(t))ds = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\mathbf{g}\circ\nabla\mathbf{U}(t) - \left(\int_{\mathbf{0}}^{t} \mathbf{g}\,(s)\,ds\right)\left\|\mathbf{U}(t)\right\|^2\right)$$
$$-\frac{1}{2}\mathbf{g}' \circ \nabla\mathbf{U}(t) + \frac{1}{2}\mathbf{g}\,(t)\left\|\mathbf{U}_m(t)\right\|^2.$$

Alors

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left|\mathbf{U}'\,(t)\right|^2 + \left(\alpha - \int_{\mathbf{0}}^{t} \mathbf{g}\,(s)\,ds\right)\left\|\mathbf{U}\,(t)\right\|^2 + \mathbf{g}\circ\nabla\mathbf{U}(t)\right]$$
$$-\frac{1}{2}\mathbf{g}'\circ\nabla\mathbf{U}(t) + \frac{1}{2}\mathbf{g}\,(t)\left\|\mathbf{U}_m(t)\right\|^2 + \left(\left|\mathbf{u}'_1\right|^{\rho} \mathbf{u}'_1 - \left|\mathbf{u}'_2\right|^{\rho} \mathbf{u}'_2,\, \mathbf{U}'\right) = 0. \tag{3.119}$$

Remarquons que

$$\begin{aligned}\left(\left|\mathbf{u}_1^{'}\right|^{\rho}\mathbf{u}_1^{'}-\left|\mathbf{u}_2^{'}\right|^{\rho}\mathbf{u}_2^{'},\,\mathbf{U}^{'}\right) &= (\left|\mathbf{u}_1^{'}\right|^{\rho}\mathbf{u}_1^{'},\,\mathbf{u}_1^{'})+(\left|\mathbf{u}_2^{'}\right|^{\rho}\mathbf{u}_2^{'},\,\mathbf{u}_2^{'})-(\left|\mathbf{u}_1^{'}\right|^{\rho}\mathbf{u}_1^{'},\,\mathbf{u}_2^{'})-(\left|\mathbf{u}_2^{'}\right|^{\rho}\mathbf{u}_2^{'},\,\mathbf{u}_1^{'})\\ &= \int_{\Omega}\left[\left|\mathbf{u}_1^{'}\right|^{\rho+2}+\left|\mathbf{u}_2^{'}\right|^{\rho+2}-(\left|\mathbf{u}_1^{'}\right|^{\rho}+\left|\mathbf{u}_2^{'}\right|^{\rho})\mathbf{u}_1^{'}\cdot\mathbf{u}_2^{'}\right]dx,\end{aligned}$$

or

$$\mathbf{u}_1^{'}\cdot\mathbf{u}_2^{'}\leq\left|\mathbf{u}_1^{'}\cdot\mathbf{u}_2^{'}\right|\leq\left|\mathbf{u}_1^{'}\right|.\left|\mathbf{u}_2^{'}\right|,$$

alors

$$\begin{aligned}\left|\mathbf{u}_1^{'}\right|^{\rho+2}+\left|\mathbf{u}_2^{'}\right|^{\rho+2}-(\left|\mathbf{u}_1^{'}\right|^{\rho}+\left|\mathbf{u}_2^{'}\right|^{\rho})\mathbf{u}_1^{'}\cdot\mathbf{u}_2^{'} &\geq \left|\mathbf{u}_1^{'}\right|^{\rho+2}+\left|\mathbf{u}_2^{'}\right|^{\rho+2}-\left(\left|\mathbf{u}_1^{'}\right|^{\rho}+\left|\mathbf{u}_2^{'}\right|^{\rho}\right)\left|\mathbf{u}_1^{'}\right|.\left|\mathbf{u}_2^{'}\right|\\ &= \left|\mathbf{u}_1^{'}\right|^{\rho+1}(\left|\mathbf{u}_1^{'}\right|-\left|\mathbf{u}_2^{'}\right|)+\left|\mathbf{u}_2^{'}\right|^{\rho+1}(\left|\mathbf{u}_2^{'}\right|-\left|\mathbf{u}_1^{'}\right|)\\ &= \left(\left|\mathbf{u}_1^{'}\right|^{\rho+1}-\left|\mathbf{u}_2^{'}\right|^{\rho+1}\right)(\left|\mathbf{u}_1^{'}\right|-\left|\mathbf{u}_2^{'}\right|)\geq 0,\end{aligned}$$

en effet on sait que la fonction $x\in\mathbb{R}_+\longmapsto x^{\rho+1}$, est croissante, donc $\forall x,\, y\in\mathbb{R}_+$

$$\left(x^{\rho+1}-y^{\rho+1}\right)(x-y)\geq 0.$$

On en déduit l'inégalité

$$\int_{\Omega}\left[\left|\mathbf{u}_1^{'}\right|^{\rho+2}+\left|\mathbf{u}_2^{'}\right|^{\rho+2}-\left(\left|\mathbf{u}_1^{'}\right|^{\rho}+\left|\mathbf{u}_2^{'}\right|^{\rho}\right)\mathbf{u}_1^{'}\cdot\mathbf{u}_2^{'}\right]dx\geq 0,$$

c'est à dire

$$(\left|\mathbf{u}_1^{'}\right|^{\rho}\mathbf{u}_1^{'}-\left|\mathbf{u}_2^{'}\right|^{\rho}u_2^{'},\,\mathbf{U}^{'})\geq 0.$$

D'aprés la condition (G2), $\mathbf{g}^{'}$ est négative et d'aprés la définition de $(\mathbf{g}\circ\nabla\mathbf{u}_m)(t)$, on a :

$$\left(\mathbf{g}^{'}\circ\nabla\mathbf{u}_m\right)(t)\leq 0$$

et comme $\mathbf{g}(0)>0$ on a :

$$\frac{1}{2}\mathbf{g}\circ\nabla\mathbf{U}(t)\geq 0 \text{ et } \frac{1}{2}\mathbf{g}(t)\left\|\mathbf{U}_m(t)\right\|^2\geq 0,$$

de sorte que (3.119) donne

$$\frac{d}{dt}\left(\left|\mathbf{U}'(t)\right|^2 + l\left\|\mathbf{U}(t)\right\|^2 + \mathbf{g}\circ\nabla\mathbf{U}(t)\right) \leq 0. \tag{3.120}$$

Soit χ l'application définie par :

$$t \longrightarrow \psi(t) = \left|\mathbf{U}'(t)\right|^2 + l\left\|\mathbf{U}(t)\right\|^2 + \mathbf{g}\circ\nabla\mathbf{U}(t).$$

L'application χ est dérivable, et

$$\frac{d\psi(t)}{dt} \leqslant 0.\text{(en utilisant l'équation (3.120)).}$$

Donc l'application χ est décroissance sur $\mathbb{R}_+ - \{0\}$, et comme

$$\begin{aligned} \psi(0) &= \left|\mathbf{U}'(0)\right|^2 + l\left\|\mathbf{U}(0)\right\|^2 = 0, \\ &\Rightarrow \chi(t) = 0. \end{aligned}$$

On aura finalement $\mathbf{U}' = 0$ et $\mathbf{U} = 0$. Par conséquent $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$. D'où l'unicité de la solution.

Chapitre 4

Solution périodique - cas hyperbolique

Résumé

Des nombreuses applications de la physique mathématique reposent sur la simulation des régimes périodiques. On propose les systèmes qui représentent théoriquement la solution périodique cas hyperbolique non linéaire gouvernée par le système de Lamé. On s'intéresse à l'existence et l'unicité de la solution périodique. Les techniques utilisées seront celles de la méthode de monotonie.

4.1 Généralités sur le problème et notations

Soit Ω un corps élastique en déplacement soumis a une force extérieur $\mathbf{f}$ et avec les données initiales périodiques. Notre problème est de déterminer le vecteur de déplacement périodique en-temps (où T-périodique) en chaque point. Supposons maintenant que Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière régulière $\mathbf{\Gamma}$. On désigne par $\mathbf{u} = \{u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n\}$ un vecteur sur $\mathbf{Q}_T = \Omega \times]0,\ T[$, où T est un réel fini et posons $\mathbf{\Sigma}_T = \mathbf{\Gamma} \times]0,\ T[$.

Nous allons chercher une solution périodique en t de

$$\mathbf{u}^{''} - L\mathbf{u} + \left|\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\right|^{\rho} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{f},\ \text{dans } \mathbf{Q}_T, \tag{4.1}$$

$$\boldsymbol{u} = 0,\ \text{sur } \mathbf{\Sigma}_T, \tag{4.2}$$

$$\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}(T) \quad \text{et} \quad \mathbf{u}^{'}(0) = \mathbf{u}^{'}(T). \tag{4.3}$$

On introduit les notations suivantes :

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mu \sum_{i,\ j=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \mathbf{dx} + (\lambda + \mu)(\mathbf{divu}, \mathbf{divv}),$$

$$\|\mathbf{v}\| = \mathbf{A}(\mathbf{v}, \mathbf{v})^{\frac{1}{2}}.$$

On prend

$$h(\mathbf{u}) = |\mathbf{u}|^{p-2}\, \mathbf{u}, \text{ avec } p = \rho + 2.$$

On appelle valeur moyenne d'une fonction $\mathbf{u}(t)$ définie et continue sur l'intervalle $[0, T]$ l'expression :

$$\overline{\mathbf{u}(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{u}(t)\, dt.$$

On écrit

$$\varphi^{'}, \varphi^{''}, \ldots\text{au lieu de } \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 t}, \ldots$$

4.1.1 Orientation

Une difficulté essentielle est la suivante : Si l'on applique la méthode de Fædo-Galerkin avec une base $\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \ldots,\ \mathbf{e}_m, \ldots$de l'espace $\left(\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{L}^p(\Omega)\right)^n$. On définit $\mathbf{u}_m(t)$ une solution approchée par

$$\mathbf{u}_m(t) \in \mathbf{V}_m = [\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \ldots,\ \mathbf{e}_m] \text{ et } \mathbf{u}_m(t) = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{g}_{jm}(t)\mathbf{e}_j.$$

Telle que

$$(\mathbf{u}''_{\mathbf{m}}(\mathbf{t}), \mathbf{e}_j) + \mathbf{A}(\mathbf{u}, \mathbf{e}_j) + \left(h\left(\mathbf{u}'_m(t)\right), \mathbf{e}_j\right) = (\mathbf{f}, \mathbf{e}_j), \quad j = 1, \ldots, m. \tag{4.4}$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}(T) \quad \text{et} \quad \mathbf{u}'_m(0) = \mathbf{u}'_m(T). \tag{4.5}$$

Si l'on multiplie (4.4) par $\mathbf{g}'_{jm}(t)$ et sommons sur j. On aura

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|\mathbf{u}_m(t)\right|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\mathbf{u}_m(t)\right\|^2 + \left(h\left(\mathbf{u}'_m(t)\right), \mathbf{u}'_m(t)\right) = \left(\mathbf{f}(t), \mathbf{u}'_m(t)\right). \tag{4.6}$$

Remarquons que (4.6) donne

$$\left(\frac{1}{2}\left|\mathbf{u}_m(t)\right|^2 + \frac{1}{2}\left\|\mathbf{u}_m(t)\right\|^2\right)\Big|_0^T + \int_0^T \left(h\left(\mathbf{u}'_m(t)\right), \mathbf{u}'_m(t)\right) dt = \int_0^T \left(\mathbf{k}(t), \mathbf{u}'_m(t)\right) dt, \tag{4.7}$$

alors à cause de (4.5) :

$$\left(\frac{1}{2}\left|\mathbf{u}_m(t)\right|^2 + \frac{1}{2}\left\|\mathbf{u}_m(t)\right\|^2\right)\Big|_0^T = 0. \tag{4.8}$$

De sorte que l'on obtient

$$\int_{\mathbf{Q}_T} \left|\mathbf{u}_m^{'}(t)\right|^p dxdt = \int_{\mathbf{Q}_T} \mathbf{f}(t)\ \mathbf{u}_m^{'}(t)dxdt. \tag{4.9}$$

On pourra donc, dans une méthode convenable d'approximation obtenir une estimation a priori sur $\left\|\mathbf{u}_m^{'}\right\|_{\mathbf{L}^p(\mathbf{Q}_T)}$- mais cette estimation est insuffisante.

Pour trouver une solution au le problème. La situation s'améliore beaucoup si l'on travaille avec des fonctions $\mathbf{v}$ telles que $\int_0^T \mathbf{v}dt = 0$, d'où l'idée, due a G.PRODI, de chercher l'existence et l'unicité de $\mathbf{u}$ sous la forme

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{v} + \overline{\mathbf{u}}, \\ \overline{\boldsymbol{u}} \text{ indépendant de } t, \ (\ \overline{\boldsymbol{u}} = \dfrac{1}{T} \int_0^T \mathbf{u}\,(x,s)\,ds), \\ \int_0^T \mathbf{v}dt = 0. \end{cases} \tag{4.10}$$

On propose maintenant le problème $(\mathcal{P}_5)$ suivant :

Problème $(\mathcal{P}_5)$:

On suppose que Ω est un domaine ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, et que $p > 2$. On donne

$$\mathbf{f} \in \mathbf{L}^{p'}(\ \mathbf{Q}_T), \tag{4.11}$$

et on cherche $\mathbf{u}$ tels que

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \overline{\mathbf{u}}, \tag{4.12}$$

$$\overline{\mathbf{u}} \in \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega)\right)^n + \left(\mathbf{W}^{2,\,p'}(\Omega) \cap \mathbf{W}_0^{1,\,p'}(\Omega)\right)^n \tag{4.13}$$

$$\mathbf{v} \in \mathbf{L}^\infty\left(0,\ T;\ \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega)\right)^n\right),\ \mathbf{v}^{'} \in \mathbf{L}^p\left(\mathbf{Q}_T\right), \tag{4.14}$$

solution des problème

$$\mathbf{u}^{''} - L\mathbf{u} + h\left(\mathbf{u}^{'}\right) = \mathbf{f},\ \text{dans } \mathbf{Q}_T, \tag{4.15}$$

$$\boldsymbol{u} = 0,\ \text{sur } \boldsymbol{\Sigma}_T, \tag{4.16}$$

$$\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}\,(T) \quad \text{et} \quad \mathbf{u}^{'}(0) = \mathbf{u}^{'}(T). \tag{4.17}$$

Effectuons pour l'instant un calcul formulè à partir de (4.12), en portant dans (4.15), il vient

$$\mathbf{v}^{''} - L\mathbf{v} - L\overline{\mathbf{u}} + h\left(\mathbf{v}^{'}\right) = \mathbf{f}. \tag{4.18}$$

Pour éliminer $\overline{\mathbf{u}}$, on applique la valeur moyenne de deux membres de (4.15), (ce qu'il a certainement un sens), et le fait que $\mathbf{u}^{'} = \mathbf{v}^{'}$ d'où

$$-L\overline{\mathbf{u}} + \overline{h\left(\mathbf{v}'\right)} = \overline{\mathbf{f}}. \tag{4.19}$$

Faisant la différence membre à membre de (4.18) et (4.19), nous obtenons

$$\mathbf{v}^{''} - L\mathbf{v} + \left[h\left(\mathbf{v}^{'}\right) - \overline{h\left(\mathbf{v}'\right)}\right] = \mathbf{f} - \overline{\mathbf{f}}. \tag{4.20}$$

Donc pour résoudre le problème ($\mathcal{P}_5$), nous allons le plan suivante :

I) chercher une solution périodique en t à valeur moyenne nulle de

$$\mathbf{v}^{''} - L\mathbf{v} + \left[h\left(\mathbf{v}^{'}\right) - \overline{h\left(\mathbf{v}'\right)}\right] = \mathbf{f} - \overline{\mathbf{f}} \text{ , dans } \mathbf{Q}_T, \tag{4.21}$$

$$\mathbf{v} = 0, \text{ sur } \mathbf{\Sigma}_T, \tag{4.22}$$

$$\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}\left(T\right) \quad \text{et} \quad \mathbf{v}^{'}(0) = \mathbf{v}^{'}(T), \qquad x \in \Omega \tag{4.23}$$

$$\overline{v} = T^{-1}\int_0^T \mathbf{v}\left(t\right) dt) = 0. \tag{4.24}$$

II) Puis, si l'on trouve $\mathbf{v}$ solution (dans un sens convenable) de (4.21).....(4.24), On définira $\overline{\boldsymbol{u}}$ comme suit :

$$-L\overline{\boldsymbol{u}} = \overline{\mathbf{f}} - \overline{h\left(\mathbf{v}'\right)}, \text{ dans } \Omega, \tag{4.25}$$

$$\overline{\mathbf{u}} = 0, \text{ sur } \mathbf{\Gamma}. \tag{4.26}$$

III) Par conséquent, $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \overline{\boldsymbol{u}}$ est solution T-périodique du problème initial ($\mathcal{P}_5$).

Nous allons maintenant donner un sens précis à ce qui précède.

– **Résolution du problème hyperbolique** (4.21)..(4.24) **par la méthode de monotonie.**

On propose maintenant le problème $(\mathcal{P}_{5I})$ suivant :

4.2 Position du problème

Soit $p \in]2, +\infty[$.

Problème $(\mathcal{P}_{5I})$:

On donne

$$\mathbf{f} \in \mathbf{L}^{p'}(\mathbf{Q}_T). \tag{4.27}$$

On suppose que Ω est borné, de frontière régulière, et on cherche $\mathbf{v}$ tels que

$$\mathbf{v} \in \mathbf{L}^{\infty}\left(0,\ T;\ \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega)\right)^n\right), \tag{4.28}$$

$$\mathbf{v}' \in \mathbf{L}^p\left(0,\ T;\ \left(\mathbf{L}^p(\Omega)\right)^n\right). \tag{4.29}$$

Solution des problème

$$\mathbf{v}'' - L\mathbf{v} + h\left(\mathbf{v}'\right) - \overline{h(\mathbf{v}')} = \mathbf{f} - \overline{\mathbf{f}},\ dans\ \mathbf{Q}_T, \tag{4.30}$$

$$\mathbf{v} = 0,\ sur\ \ \mathbf{\Sigma}_T, \tag{4.31}$$

$$\mathbf{v}(x,0) = \mathbf{v}(x,T) \quad et \quad \mathbf{v}'(x,0) = \mathbf{v}'(x,T),\quad x \in \Omega. \tag{4.32}$$

$$\overline{v} = T^{-1}\int_0^T \mathbf{v}(t)\,dt) = 0. \tag{4.33}$$

Remarque 4.2.1 *1) La condition* (4.31) *est en fait entrainée par l'appartenance du* $\mathbf{v}$ *à* $\mathbf{L}^{\infty}\left(0,T;\left(\mathbf{H}_0^1(\Omega)\right)^n\right)$.

2) Il résulte de (4.30) *et de* (4.28), (4.29) *que*

$$\mathbf{v}'' \in \mathbf{L}^2\left(0,T;\left(\mathbf{H}^{-1}(\Omega)\right)^n\right) + \mathbf{L}^{p'}(\mathbf{Q}_T).$$

de sorte que $\mathbf{v}'(0)$ *a un sens et la deuxième* (4.32) *condiion à un sens.*

4.3 Formulation variationnelle

Multiplions l'équation (4.30) par une fonction $\mathbf{y} \in (\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{L}^p(\Omega))^n$ et intégrons sur Ω. On déduit, en utilisant la formule de Green que

$$(\mathbf{v}'', \mathbf{y}) + \mathbf{A}(\mathbf{v}, \mathbf{y}) + \left(h\left(\mathbf{v}'\right) - \overline{h(\mathbf{v}')}, \mathbf{y}\right) = (\mathbf{f} - \overline{\mathbf{f}}, \mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{y} \in (\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{L}^p(\Omega))^n.$$

On peut alors poser le problème de la façon suivante :

Problème $(\mathcal{PV}_{5I})$:

On donne

$$\mathbf{f} \in \mathbf{L}^{p'}(\mathbf{Q}_T). \tag{4.34}$$

On suppose que Ω est borné, de frontière regulière, et on cherche $\mathbf{v}$ tels que

$$\mathbf{v} \in \mathbf{L}^\infty\left(0,\ T;\ \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega)\right)^n\right), \tag{4.35}$$

$$\mathbf{v}' \in \mathbf{L}^p(\mathbf{Q}_T). \tag{4.36}$$

Solution des problème variationnel faible

$$(\mathbf{v}'', \mathbf{y}) + \mathbf{A}(\mathbf{v}, \mathbf{y}) + \left(h\left(\mathbf{v}'\right) - \overline{h(\mathbf{v}')}, \mathbf{y}\right) = (\mathbf{f} - \overline{\mathbf{f}}, \mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{y} \in \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{L}^p(\Omega)\right)^n, \tag{4.37}$$

$$\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}(T) \quad et \quad \mathbf{v}'(0) = \mathbf{v}'(T), \tag{4.38}$$

$$\overline{v} = T^{-1} \int_0^T \mathbf{v}(t)\, dt) = 0. \tag{4.39}$$

Remarque 4.3.1 *Supposons que la solution* $\mathbf{v}$ *est assez régulière, alors les problèmes* $(\mathcal{P}_{5I})$, $(\mathcal{PV}_{5I})$ *sont équivalents.*

4.4 Existence et unicité de la solution

Théorème 4.4.1 le problème $(\mathcal{PV}_{5I})$ admet une unique solution T-périodique à valeur moyenne nulle.

Preuve du théorème 4.4.1 :

Les techniques utilisées seront celles de la méthode de monotonie, la preuve se fait en trois étapes

Etape.1 Approximation.

On applique la méthode de Fædo-Galerkin avec une base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_m, ...$de l'espace $\left(\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{L}^p(\Omega)\right)^n$. On définit $\mathbf{v}_m(t)$ une solution approchée par

$$\mathbf{v}_m(t) \in \mathbf{V}_m = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_m] \text{ et } \mathbf{v}_m(t) = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{g}_{jm}(t)\mathbf{e}_j.$$

Telle que

$$(\mathbf{v}''_m(t),\mathbf{e}_j)+\mathbf{A}(\mathbf{v}_m(t),\mathbf{e}_j) + \left(h\left(\mathbf{v}'_m(t)\right) - \overline{h\left(\mathbf{v}'_m(t)\right)},\mathbf{e}_j\right) = (\mathbf{f} - \overline{\mathbf{f}}, \mathbf{e}_j), \quad j = 1, \ldots, m. \tag{4.40}$$

Avec les conditions initiales périodiques :

$$\mathbf{v}_m(0) = \mathbf{v}_m(T), \tag{4.41}$$

$$\mathbf{v}'_m(0) = \mathbf{v}'_m(T). \tag{4.42}$$

C'est un système différentiel ordinaire non linéaire. Si on prend en considération les conditions (4.41), (4.42), le système va admettre une (et une seule) solution périodique de période T. (noter que $det\ (e_i, e_j) \neq 0$, grâce à la linéaire indépendante de $e_1, e_2, ..., e_m$.)

Par intégration de (4.40) sur une période T, et le fait que $\overline{\mathbf{f}-\overline{\mathbf{f}}}=0$, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^T \left(h\left(\mathbf{v}_m^{'}(t)\right)-\overline{h\left(\mathbf{v}_m'(t)\right)},\mathbf{e}_j\right)dt &= \left(\int_0^T \left(h\left(\mathbf{v}_m^{'}(t)\right)-\overline{h\left(\mathbf{v}_m'(t)\right)}\right)dt,\mathbf{e}_j\right)\\ &= \left(\int_0^T h\left(\mathbf{v}_m^{'}(t)\right)dt - T\ \times\ \overline{h\left(\mathbf{v}_m'(t)\right)},\mathbf{e}_j\right)\\ &= 0,\end{aligned}$$

Nous obtenons :

$$\mathbf{A}(\overline{\mathbf{v}_m},\mathbf{e}_j)=0,\quad j=1,2,.....,n. \tag{4.43}$$

Et on deduire de (4.43) que la solution v_m a une valeur moyene nulle.

Pour passer à la limite, on commence par faire une estimation à priori de $\mathbf{v}_m$.

Etape.2 Estimation a priori I.

Multiplions (4.40) par $\mathbf{g}_{jm}^{'}(t)$ et sommons sur j. On aura

$$\begin{aligned}&\left(\mathbf{v}_m^{''}(t),\ \mathbf{v}_m^{'}(t)\right)+\mathbf{A}\left(\mathbf{v}_m(t),\ \mathbf{v}_m^{'}(t)\right)+\left(h\left(\mathbf{v}_m^{'}(t)\right)-\overline{h\left(\mathbf{v}_m'(t)\right)},\ \mathbf{v}_m^{'}(t)\right)\\ &\qquad=\left(\mathbf{f}-\overline{\mathbf{f}},\ \mathbf{v}_m^{'}(t)\right).\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|\mathbf{u}_m(t)\right|^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\mathbf{u}_m(t)\right\|^2+\left(h\left(\mathbf{v}_m^{'}(t)\right)-\overline{h\left(\mathbf{v}_m'(t)\right)},\ \mathbf{v}_m^{'}(t)\right)\\ &\qquad=\left(\mathbf{f}\left(t\right)-\overline{\mathbf{f}\left(t\right)},\ \mathbf{v}_m^{'}(t)\right).\end{aligned} \tag{4.44}$$

Remarquons que (4.44) donne

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{2}\left|\mathbf{u}_m(t)\right|^2+\frac{1}{2}\left\|\mathbf{u}_m(t)\right\|^2\right)\Bigg|_{t_1}^{t_2}+\int_{t_1}^{t_2}\left(h\left(\mathbf{v}_m^{'}(t)\right)-\overline{h\left(\mathbf{v}_m'(t)\right)},\ \mathbf{v}_m^{'}(t)\right)dt\\ &\qquad=\int_{t_1}^{t_2}\left(\mathbf{f}\left(t\right)-\overline{\mathbf{f}\left(t\right)},\ \mathbf{v}_m^{'}(t)\right)dt,\end{aligned} \tag{4.45}$$

dans un cas particulier, $t_1 = 0$, $t_2 = T$, nous obtenons

$$\int_0^T \left(h\left(\mathbf{v}_m'(t)\right), \mathbf{v}_m'(t)\right) dt = \int_0^T \left(\mathbf{f} - \overline{\mathbf{f}\,(t)},\, \mathbf{v}_m'(t)\right) dt, \tag{4.46}$$

et on aura

$$\begin{aligned} \int_0^T \left(\left|\mathbf{v}_m'(t)\right|^\rho \mathbf{v}_m'(t), \mathbf{v}_m'(t)\right) dt &= \int_0^T \int_\Omega \left|\mathbf{v}_m'(t)\right|^p dxdt \\ &= \int_0^T \left\|\mathbf{v}_m'(t)\right\|_p^p dt \\ &= \left\|\mathbf{v}_m'(t)\right\|_{\mathbf{L}^p(\mathbf{Q}_T)}^p, \end{aligned}$$

et comme $\overline{\mathbf{v'}} = 0$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^T \left(\mathbf{f}\,(t) - \overline{\mathbf{f}\,(\mathbf{t})}, \mathbf{v}'(t)\right) dt &= \int_0^T \left(\mathbf{f}\,(t), \mathbf{v}'(t)\right) dt - \int_0^T \left(\overline{\mathbf{f}\,(t)}, \mathbf{v}'(t)\right) dt \\ &= \int_0^T \left(\mathbf{f}\,(t), \mathbf{v}'(t)\right) dt. \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \left|\left(\mathbf{f}\,(t),\, \mathbf{v}_m'(t)\right)\right| &\le \int_\Omega |\mathbf{f}\,(t)| \left|\mathbf{v}_m'(t)\right| dx \\ &\le \left(\int_\Omega |\mathbf{f}\,(t)|^{p'} dx\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_\Omega \left|\mathbf{v}_m'(t)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right) \\ &\le \|\mathbf{f}\,(t)\|_{p'} \left\|\mathbf{v}_m'(t)\right\|_p, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^T \|\mathbf{f}\,(t)\|_q \left\|\mathbf{v}_m'(t)\right\|_p dt &\le \left(\int_0^T \|\mathbf{f}\,(t)\|_{p'}^{p'} dt\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_0^T \left\|\mathbf{v}_m'(t)\right\|_p^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\le \|\mathbf{f}\,(t)\|_{\mathbf{L}^{p'}(\mathbf{Q}_T)} \left\|\mathbf{v}_m'(t)\right\|_{\mathbf{L}^p(\mathbf{Q}_T)}, \end{aligned}$$

par conséquent

$$\left\| \mathbf{v}_m^{'}(t) \right\|_{\mathbf{L}^p(\mathbf{Q}_T)}^p \leq \left\| \mathbf{f}\,(t) \right\|_{\mathbf{L}^{p'}(\mathbf{Q}_T)} \left\| \mathbf{v}_m^{'}(t) \right\|_{\mathbf{L}^p(\mathbf{Q}_T)},$$

donc

$$\left\| \mathbf{v}_m^{'}(t) \right\|_{\mathbf{L}^p(\mathbf{Q}_T)}^{p-1} \leq \left\| \mathbf{f}\,(t) \right\|_{\mathbf{L}^{p'}(\mathbf{Q}_T)} \leq c_1,$$

c.-à-d

$$\int_0^T \left\| \ \mathbf{v}_m^{'}(t) \right\|_{(\mathbf{L}^p(\Omega))^n}^p dt \leq c_1, \ (c_1 \ \textit{indépendant de} \ \ m), \tag{4.47}$$

on déduit de (4.47) que

$$\mathbf{v}_m^{'} \ \textit{demeure dans un borné de } \mathbf{L}^p(\mathbf{Q}_T), \tag{4.48}$$

et comme

$$\int_0^T \mathbf{v}_m\,(t)\,dt = 0,$$

on a une résultat de (4.48) et Lemme1.3.2 que

$$\int_0^T \left\| \mathbf{v}_m(t) \right\|_{(L^p(\Omega))^n}^p dt \leq c_2, \ (\ c_2 \ \textit{indépendant de } m), \tag{4.49}$$

donc on a

$$\mathbf{v}_m \ \textit{demeure dans un borné de } \mathbf{L}^p(\mathbf{Q}_T). \tag{4.50}$$

Estimation a priori II.

Multiplions (4.40) par $\mathbf{g}_{jm}(t)$ et sommons sur j. On aura

$$\left(\mathbf{v}_m^{''}(t),\ \mathbf{v}_m(t)\right) + \mathbf{A}\left(\mathbf{v}_m(t),\ \mathbf{v}_m(t)\right) + \left(h\left(\mathbf{v}_m^{'}(t)\right) - \overline{h\left(\mathbf{v}_m^{'}(t)\right)},\, \mathbf{v}_m(t)\right) = \left(\mathbf{f}(t) - \overline{\mathbf{f}(t)},\ \mathbf{v}_m(t)\right),$$

d'où

$$\begin{aligned}\int_0^T \|\mathbf{v}_m(t)\|^2 dt &= \int_0^T \left(\mathbf{v}_m''(t),\ \mathbf{v}_m(t)\right) dt - \int_0^T \left(h\left(\mathbf{v}_m'(t) - \overline{h\left(\mathbf{v}_m'(t)\right)},\ \mathbf{v}_m(t)\right) dt \\ &+ \int_0^T \left(\mathbf{f}(t) - \overline{\mathbf{f}(t)},\ \mathbf{v}_m(t)\right) dt, \qquad (4.51)\end{aligned}$$

Par ailleurs

$$-\int_0^T \left(\mathbf{v}_m''(t),\ \mathbf{v}_m(t)\right) dt = \int_0^T \left|\mathbf{v}_m'(t)\right|^2 dt,$$

et grace au fait que $p = 2$, (4.48) montre que

$$-\int_0^T \left(\mathbf{v}_m''(t),\ \mathbf{v}_m(t)\right) dt \leq C_2. \qquad (4.52)$$

Et comme

$$\int_0^T \mathbf{v}_m(t) dt = 0,$$

on vérifie que :

$$\begin{aligned}\int_0^T \left(h\left(\mathbf{v}_m'(t)\right) - \overline{h\left(\mathbf{v}_m'(t)\right)},\ \mathbf{v}_m(t)\right) dt &= \int_0^T \left(h\left(\mathbf{v}_m'(t)\right),\ \mathbf{v}_m(t)\right) dt, \\ \text{et} \quad \int_0^T \left(\mathbf{f}(t) - \overline{\mathbf{f}(t)},\ \mathbf{v}_m(t)\right) dt &= \int_0^T \left(\mathbf{f}(t),\ \mathbf{v}_m(t)\right) dt.\end{aligned}$$

D'autre part (d 'après (4.48) et (4.50)) :

$$\int_0^T \left|\left(h\left(\mathbf{v}_m'(t)\right),\ \mathbf{v}_m(t)\right)\right| dt \leq \left\|h(\mathbf{v}_m'(t))\right\|_{\mathbf{L}^{p'}(\mathbf{Q}_T)} \|\mathbf{v}_m(t)\|_{\mathbf{L}^p(\mathbf{Q}_T)} \leq C_3. \qquad (4.53)$$

De plus (d'après (4.34) et (4.50)) :

$$\left|\int_0^T \left(\mathbf{f}(t),\ \mathbf{v}_m(t)\right) dt\right| \leq \|\mathbf{f}(t)\|_{\mathbf{L}^{p'}(\mathbf{Q}_T)} \|\mathbf{v}_m(t)\|_{\mathbf{L}^p(\mathbf{Q}_T)} \leq C_4, \qquad (4.54)$$

d'après (4.51), (4.52), (4.53) et (4.54) on en déduit que

$$\int_0^T \|\mathbf{v}_m(t)\|^2 dt \leq c,$$

$$\mathbf{v}_m \textit{ demeure dans un borné de } \mathbf{L}^2\left(0,\ T; \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega)\right)^n\right). \qquad (4.55)$$

On va voir que ces estimations, et la monotonie suffisent pour passer à la limite.

Etape.3 Passage àla limite.

D'après (4.50), (4.55), on peut extraire une suite $\mathbf{v}_\mu(t)$ telle que

$$\mathbf{v}_\mu \longrightarrow \mathbf{v} \;\; dons \;\; \mathbf{L}^2\left(0,\ T;\ (\mathbf{H}_0^1(\Omega))^n\right) \;\; faible, \tag{4.56}$$

$$\mathbf{v}_\mu^{'} \longrightarrow \mathbf{v}^{'} dans \;\; \mathbf{L}^p\left(\mathbf{Q}_T\right) \;\; faible, \tag{4.57}$$

$$\left(v_\mu^{''},\ \mathbf{e}_j\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{v}_\mu^{'},\ \mathbf{e}_j\right) \longrightarrow \left(\mathbf{v}^{''},\ \mathbf{e}_j\right) \;\; dans \;\; \mathfrak{D}^{'}(0,T), \tag{4.58}$$

$$h\left(\mathbf{v}_\mu^{'}(t)\right) \longrightarrow \chi\left(t\right) \quad dans \;\; \mathbf{L}^{p^{'}}\left(\mathbf{Q}_T\right) \quad faible, \tag{4.59}$$

$$\overline{h\left(\mathbf{v}_\mu^{'}(t)\right)} \longrightarrow \overline{\chi} \;\; dans \;\; \left(\mathbf{L}^{p^{'}}\left(\Omega\right)\right)^n \quad faible. \tag{4.60}$$

Puisque

$$\mathbf{v}_\mu\left(0\right) = \mathbf{v}_\mu\left(T\right) \text{ et } \int_0^T v_\mu\left(t\right)dt = 0,$$

on en déduit que

$$\mathbf{v}\left(0\right) = \mathbf{v}\left(T\right) \quad et \quad \int_0^T \mathbf{v}\left(t\right)dt = 0.$$

Appliquant (4.40) pour $m = \mu$ et j fixe, on voit que

$$(\mathbf{v}_\mu^{''}(t),\mathbf{e}_j)+\mathbf{A}(\mathbf{v}_\mu(t),\mathbf{e}_j) + \left(h\left(\mathbf{v}_\mu^{'}(t)\right) - \overline{h\left(\mathbf{v}_\mu^{'}(t)\right)},\mathbf{e}_j\right) = (\mathbf{f}(t) - \overline{\mathbf{f}(t)},\mathbf{e}_j), \quad j = 1,\ldots,m. \tag{4.61}$$

Par passage à la limite pour les termes des équations(4.61) dans $\mathfrak{D}^{'}(0,\ T)$ (par exemple) ;

$$\left(\mathbf{v}^{''}(t),\mathbf{e}_j\right) + \mathbf{A}(\mathbf{v}(t),e_j) + (\chi\left(t\right) - \overline{\chi},e_j) = (\mathbf{f}(t) - \overline{\mathbf{f}(t)}\left(t\right),\ e_j), \quad \forall e_j, \quad j = 1,\ \ldots,\ m. \tag{4.62}$$

Par conséquent

$$\left(\mathbf{v}^{''}(t),\mathbf{y}\right) + \mathbf{A}(\mathbf{v}(t),\ \mathbf{y}) + (\chi\left(t\right) - \overline{\chi},\ \mathbf{y}) = (\mathbf{f}(t) - \overline{\mathbf{f}(t)},\mathbf{y}),\ \forall \mathbf{y} \in \left(\mathbf{H}_0^1\left(\Omega\right) \cap \mathbf{L}^p(\Omega)\right)^n. \tag{4.63}$$

Et donc

$$\mathbf{v}^{''}\left(t\right) - L\mathbf{v}\left(t\right) + \chi\left(t\right) - \overline{\chi} = \mathbf{f}(t) - \overline{\mathbf{f}(t)}.$$

Par ailleurs on a ainsi obtenu que

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{v}_\mu',\mathbf{e}_j\right)\longrightarrow\left(\mathbf{f}(t)-\overline{\mathbf{f}(t)},e_j\right)-\mathbf{A}\left(\mathbf{v}_\mu,e_j\right)-\left(\chi\left(t\right)-\overline{\chi},e_j\right)=\frac{d}{dt}\left(\mathbf{v}',\,\mathbf{e}_j\right),$$

dans $\mathbf{L}^2(0,\,T)+\mathbf{L}^{p'}(0,T)$ faible, donc

$$\left(\mathbf{v}_\mu',\mathbf{e}_j\right)\Big|_{t=0}\longrightarrow\left(\mathbf{v}'\left(0\right),\,\mathbf{e}_j\right),\ \text{ et }\quad\left(\mathbf{v}_\mu',\mathbf{e}_j\right)\Big|_{t=T}\longrightarrow\left(\mathbf{v}'\left(T\right),\,\mathbf{e}_j\right),$$

mais comme

$$\left(\mathbf{v}_\mu',\mathbf{e}_j\right)\Big|_{t=0}=\left(\mathbf{v}_\mu',\mathbf{e}_j\right)\Big|_{t=T},$$

on en déduit que $\left(\mathbf{v}',\mathbf{e}_j\right)\Big|_{t=0}=\left(\mathbf{v}',\mathbf{e}_j\right)\Big|_{t=T}$ $\forall j$, donc

$$v'\left(0\right)=v'\left(T\right).$$

On aura donc démontré l'existence si l'on verifie que

$$\chi\left(t\right)=h\left(\mathbf{v}'\right).\tag{4.64}$$

Remarquons que (4.63) donne

$$\left(\frac{1}{2}\left|\mathbf{v}'(t)\right|^2+\frac{1}{2}\left\|\mathbf{v}(t)\right\|^2\right)\Bigg|_{t_1}^{t_2}+\int_{t_1}^{t_2}\left(\chi\left(t\right)-\overline{\chi},\,\mathbf{v}'(t)\right)dt=\int_{t_1}^{t_2}\left(\mathbf{f}(t)-\overline{\mathbf{f}(t)},\,\,\mathbf{v}'(t)\right)dt,\tag{4.65}$$

dans un cas particulier, $t_1=0$, $t_2=T$, nous obtenons

$$\int_0^T\left(\chi\left(t\right)-\overline{\chi},\,\mathbf{v}'(t)\right)d=\int_0^T\left(\mathbf{f}(t)-\overline{\mathbf{f}(t)},\mathbf{v}'(t)\right)dt,\tag{4.66}$$

et comme $\mathbf{v}\left(0\right)=\mathbf{v}\left(T\right)$, et on a

$$\int_0^T\left(\overline{\chi},\mathbf{v}'\right)dt=\left(\overline{\chi},\int_0^T\mathbf{v}'dt\right)=\left(\overline{\chi},\overline{\mathbf{v}'}\right)=0,$$

et

$$\begin{aligned}\int_0^T\left(\mathbf{f}(t)-\overline{\mathbf{f}(t)},\mathbf{v}'(t)\right)dt &= \int_0^T\left(\mathbf{f}\left(t\right),\mathbf{v}'(t)\right)dt-\int_0^T\left(\overline{\mathbf{f}\left(t\right)},\mathbf{v}'(t)\right)dt\\ &= \int_0^T\left(\mathbf{f}\left(t\right),\mathbf{v}'(t)\right)dt,\end{aligned}$$

d'où

$$\int_0^T \left(\chi\left(t\right),\, \mathbf{v}^{'}(t)\right) dt = \int_0^T \left(\mathbf{f}\left(t\right),\mathbf{v}^{'}(t)\right) dt. \tag{4.67}$$

De la propriété de la monotonie de h résulte que :

$$\mathbf{X}_\mu = \int_0^T \left(h\left(\mathbf{v}_\mu'\left(t\right)\right) - h\left(\varphi\right), \mathbf{v}_\mu' - \varphi\right) dt \geq 0,\ \forall \varphi \in L^p\left(0, T; \left(\mathbf{L}^p\left(\Omega\right)\right)^n\right). \tag{4.68}$$

Mais

$$\mathbf{X}_\mu = \int_0^T \left(h\left(\mathbf{v}_\mu^{'}\right), \mathbf{v}_\mu^{'}\right) dt - \int_0^T \left(h\left(\mathbf{v}_\mu^{'}\right), \varphi\right) dt - \int_0^T \left(h\left(\varphi\right), \mathbf{v}_\mu^{'} - \varphi\right) dt,$$

par conséquent

$$\mathbf{X}_\mu = \int_0^T \left(\mathbf{f}, \mathbf{v}_\mu^{'}\right) dt - \int_0^T \left(h\left(\mathbf{v}_\mu^{'}\right), \varphi\right) dt - \int_0^T \left(h\left(\varphi\right), \mathbf{v}_\mu^{'} - \varphi\right) dt,$$

d'où

$$\limsup_{\mu \longrightarrow +\infty} \mathbf{X}_\mu \leqslant \int_0^T \left(\mathbf{f}, \mathbf{v}^{'}\right) dt - \int_0^T \left(\chi\ , \varphi\right) dt - \int_0^T \left(h\left(\varphi\right), \mathbf{v}^{'} - \varphi\right) dt,$$

Utilisant (4.67) on voit que

$$\mathbf{X} = \int_0^T \left(\chi - h\left(\varphi\right), \mathbf{v}' - \varphi\right) dt.$$

Comme $\mathbf{X}_\mu \geqslant 0$ on a donc $\mathbf{X} \geqslant 0, \forall \varphi \in \mathbf{L}^p\left(\mathbf{Q}\right)$. Nous allons en déduire que

$$\int_0^T \left(\chi - h\left(\varphi\right), \mathbf{v}^{'} - \varphi\right) dt \geqslant 0. \tag{4.69}$$

On utilise maintenant l'hémicontinuité de h pour montrer que (4.69) entraîne $\chi = h\left(\mathbf{v}^{'}\right)$. On prend $\varphi = \mathbf{v}^{'} - \lambda \mathbf{w},\ \lambda > 0,\ \forall w \in \mathbf{L}^p\left(\mathbf{Q}_T\right)$, alors (4.69) implique :

$$\lambda \int_0^T \left(\chi - h\left(\mathbf{v}^{'} - \lambda \mathbf{w}\right), \mathbf{w}\right) dt \geqslant 0, \tag{4.70}$$

d'où

$$\int_0^T \left(\chi - h\left(\mathbf{v}^{'} - \lambda \mathbf{w}\right), \mathbf{w}\right) dt \geqslant 0. \tag{4.71}$$

Faisons λ tendre vers 0, nous obtenons

$$\int_0^T \left(\chi - h\left(\mathbf{v}^{'}\right), \mathbf{w}\right) dt \geqslant 0,\ \forall \mathbf{w} \in \mathbf{L}^p\left(\mathbf{Q}_T\right), \tag{4.72}$$

donc

$$\chi = h\left(\mathbf{v}^{'}\right).$$

Il résulte de (4.30)

$$\mathbf{v}^{''} - L\mathbf{v} + h\left(\mathbf{v}^{'}\right) - \mathbf{f} = \overline{h\left(\mathbf{v}^{'}\right)} - \overline{\mathbf{f}},\ \ \overline{\mathbf{f}} - \overline{h\left(\mathbf{v}^{'}\right)}\ \ \textit{independant de } t, \tag{4.73}$$

si $\varphi \in \mathcal{D}\left(]0, T[\right)$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}^{''}(\varphi) &= -\int_0^T \mathbf{v}^{'}\varphi^{'} dt \in \left(L^p\left(\Omega\right)\right)^n, \\
L\mathbf{v}(\varphi) &= \int_0^T \left(L\mathbf{v}\right)\varphi dt \in \left(\mathbf{H}^{-1}\left(\Omega\right)\right)^n, \\
h\left(\mathbf{v}^{'}\right)(\varphi) &= \int_0^T h\left(\mathbf{v}^{'}\right)\varphi dt \in \left(L^{p'}\left(\Omega\right)\right)^n, \\
\mathbf{f}(\varphi) &= \int_0^T \mathbf{f}\varphi dt \in \left(L^{p'}\left(\Omega\right)\right)^n.
\end{aligned}$$

Si $p > 2$ (i.e. $p \geqslant p^{'}$), $\left(\mathbf{L}^p\left(\Omega\right)\right)^n \subset \left(\mathbf{L}^{p'}\left(\Omega\right)\right)^n$, d'où

$$\left(\overline{\mathbf{f}} - \overline{h\left(\mathbf{v}^{'}\right)}\right) \int_0^T \varphi dt \in \left(\mathbf{H}^{-1}\left(\Omega\right)\right)^n + \left(\mathbf{L}^{p'}\left(\Omega\right)\right)^n,$$

et donc

$$\overline{\mathbf{f}} - \overline{h\left(\mathbf{v}^{'}\right)} \in \left(\mathbf{H}^{-1}\left(\Omega\right)\right)^n + \left(\mathbf{L}^{p'}\left(\Omega\right)\right)^n. \tag{4.74}$$

Alors (4.73) entraine que $\mathbf{v}^{''} = \mathbf{f} - \overline{\mathbf{f}} + \overline{h\left(\mathbf{v}^{'}\right)} + L\mathbf{v} - h\left(\mathbf{v}^{'}\right)$ verifie

$$\mathbf{v}^{''} \in \mathbf{L}^2\left(0, T; \left(\mathbf{H}^{-1}\left(\Omega\right)\right)^n\right) + \mathbf{L}^{p'}\left(\mathbf{Q}_T\right).$$

2. Unicité :

Soient $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ deux solutions éventuelles et $\mathbf{U} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$; alors

$$\mathbf{U}'' - L\mathbf{U} + h\left(\mathbf{v}_1'\right) - h\left(\mathbf{v}_2'\right) = 0. \tag{4.75}$$

Remarquons que (4.75) donne

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left|\mathbf{U}'\right|^2 + \left\|\mathbf{U}\right\|^2\right) = -\left(h\left(\mathbf{v}_1'\right) - h\left(\mathbf{v}_2'\right), \mathbf{U}'\right), \tag{4.76}$$

par conséquent, on déduit de (4.76) que:

$$\int_0^T \left(h\left(\mathbf{v}_1'\right) - h\left(\mathbf{v}_2'\right), \mathbf{v}_1' - \mathbf{v}_2'\right) dt = 0, \tag{4.77}$$

(par la monotonie de h) d'où

$$\mathbf{v}_1' = \mathbf{v}_2'.$$

Alors $\mathbf{U} = \mathbf{v_1} - \mathbf{v_2} = \theta$ et θ indépendant de t, et

$$\theta T = \int_0^T \left(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\right) dt = T\left(\overline{\mathbf{u}_1} - \overline{\mathbf{u}_2}\right) \text{ si } \mathbf{v}_i = \mathbf{u}_i - \overline{\mathbf{u}_i} \quad (cf.(4.12), (4.13)),$$

et donc on a

$$\theta \in \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega)\right)^n + \left(\mathbf{W}^{2,\,p'}(\Omega) \cap \mathbf{W}_0^{1,\,p'}(\Omega)\right)^n. \tag{4.78}$$

Mais l'on déduit de (4.75) que

$$-L\theta = 0,$$

ce qui, joint à (4.78), montrer que $\theta = 0$ d'où l'unicité.

– On définit maintenant $\overline{\mathbf{u}}$ par

$$-L\overline{\mathbf{u}} + \overline{h(\mathbf{v}')} = \overline{\mathbf{f}}, \tag{4.79}$$

Posons $\mathbf{l} = \overline{\mathbf{f}} - \overline{h(\mathbf{v}')}$, par suite (4.74) entraine

$$\mathbf{l} \in \left(\mathbf{H}^{-1}(\Omega)\right)^n + \left(\mathbf{L}^{p'}(\Omega)\right)^n. \tag{4.80}$$

L'équation (4.79) s'écrit donc

$$\begin{cases} -\mu\mathbf{\Delta}\overline{\mathbf{u}} - (\lambda+\mu)\nabla\mathbf{div}\ \overline{\mathbf{u}} = \mathbf{I} & \textit{dans } \Omega, \\ \overline{\mathbf{u}} = 0 & \textit{sur } \Gamma, \end{cases}$$

λ et μ sont les constantes de Lamé, avec

$$\mu > 0 \quad \textit{et} \quad \lambda + \mu > 0. \tag{4.81}$$

Sous les hypothèse (4.81) , l'operateur de Lamé est un opérateur fortement elliptique du second ordre. Par conséquent, les résultats classiques sur l'existence et la régularité des solutions des elliptiques s'appliquent. On sait que le système de Dirichlet recouvre tout systéme fortement elliptique (cf. AGMON [1]). Donc, d'après (4.80) on a

$$\overline{\mathbf{u}} \in \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega)\right)^n + \left(\mathbf{W}^{2,p'}(\Omega) \cap \mathbf{W}_0^{1,p'}(\Omega)\right)^n.$$

– Par conséquent $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \overline{\mathbf{u}}$ est solution du problème $(\mathcal{P}_5)$.

Conclusion et perspectives

Ce travail contient quelques problème d'évolution d'ordre deux en temps intervenant en mécanique des solides et fondamentale dans les applications du système de l'élasticité linéaire. Nous supposons que le coefficient de Lamé, du matériau soient constants, on vérifie alors que

$$\mathbf{div}\sigma\left(\mathbf{u}\right)=\left(\lambda+\mu\right)\nabla\left(div\mathbf{u}\right)+\mu\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}=L\mathbf{u}.$$

On a présenté quelques résultats d'existence et d'unicité des solutions du quelque problèmes aux limites gouvernés par le système de Lamé, perturbé avec un terme fractionnaire linéaire, non linéaire où avec un terme viscoélastique. Les résultats obtenus sont basés sur l'argument des théorèmes de J-L lions pour les équations hyperbolique non linéaire. Supposons de plus que $\lambda=-\mu$, alors l'équation se simplifie en

$$L\mathbf{u}=\mu\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}.$$

Les problèmes, sont réduits à l'équation des ondes perturbés avec des conditions de Dirichlet au bord. Donc les problèmes sont presque les problèmes des manières générales les propagations ondes perturbés (acoustique, électromagnétique,..., etc.). Néanmoins, une différence importante avec l'équation des ondes perturbés et que l'inconnue $\mathbf{u}(x,t)$ est désormais une fonction à valeur vectorielles dans $\Omega\subset\mathbb{R}^n$.

Or l'établissement d'équations d'ondes dans divers coordonnées, nous amène à penser à l'étude des phénomènes de propagation d'une perturbation (où déformation) dans un milieu élastique où visqueux élastique.

L'élaboration des équations de vibration, après l'application des conditions aux limites et les conditions initiales aux différentes coordonnées, est l'une des applications industrielles utiles dans la matière.

Avec les progrès technologiques, il est devenu nécessaire d'examiner en profondeur le comportement des matériaux, en particulier ceux à propriétés non isotropes. De ce fait, les recherches sont orientées dans ce sens vue l'importance et la diversité de leurs applications en science et technologie, géophysique, séismologique, certaines branches de l'acoustique et l'optique, l'astronomie, la physique des plasmas et les dispositifs médicaux.

- Des questions qui peuvent être posées sont :

  1. est ce qu'on peut étudier l'existence et l'unicité des solutions lorsque nous supposons l'élasticité non linéaire,
  2. est ce qu'on peut obtenir l'existence et l'unicité des solutions lorsque nous ajoutons la condition de Neumann, et sans la conditions sur la rotation dans le quatrième problème ?
  3. A- t- on des solution périodique pour l'équation

$$\mathbf{u}^{''} - \mu\mathbf{\Delta u} - (\lambda + \mu)\mathbf{grad}(\mathbf{divu}) + |\mathbf{u}|^{p-2}\,\mathbf{u} = \mathbf{f} \ ?$$

- Nous prévoyons dans le futur l'étude de l'existence et de l'unicité des solutions des problèmes de thermo viscoélastique avec deuxièmes son perturbé, par la méthode de compacité et par la méthode de monotonie.

Bibliographie

[1] S. AGMON, The L_p approach to the Dirichlet problem. Annali della Sc. Norm. Sup. di Pisa. ser. III, vol. 13, (1959).

[2] H. Brezis, Analyse fonctionnelle, théorie et application. Dunod, paris-1999.

[3] M. Dilmi, H. Benseridi and B. Merouani, Nonlinear and Oblique Boundary Value problems for the Lamé Equations, Applied Mathematical Sciences, Vol. 1, (2007), 2517-2528.

[4] G. Duvaut, J.L. Lions, Les inéquations en mécanique et en physique. Dunod. Paris. (1972).

[5] Prodi G, Solution periodiche dell'equazione delle onde con termine dissipativo non lineare.Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 36,n^0 1 (1966), p.37-49.

[6] J.L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Dunod. (1969).

[7] J. L. Lions-Magenes, Problèmes aux limites non homogènes et applications, volume1. Dunod Paris,1968.

[8] Raviart & J. M Thomas, Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles, Masson-1992.

[9] Demailly J.P., (1991) , Analyse numérique et Équations différentielles, Presses universitaires de Grenoble, 1991.J.

[10] J. Mawhin, Periodic solution of nonlinear telegraph equations, in : A.R. Bedlarek, L. Cesari(Eds.), Dynamical Systems, Academic Press, New Yo (1977).

[11] L.A. Medeiros, Applications of Monotony Method. Instituto de Matemática – UFRJ, LecturesNotes (2005).

[12] B. Merouani, M. Meflah, A. Boulaouad. The Generalized and perturbed Lamé system, Applied Mathematical Sciences, appear in summer of 2008.

[13] M. Meflah, Etude de quelque problème d'élasticité non linéaires couplés par la méthode de compacité, Mémoire de Magister, Juillet 2005, Université F. Abbas de Sétif.

[14] M. Meflah. Study of non linear elasticity by elliptic regularization with Lamé system, International Journal of Mathematical Archive-2(5), May- 2011, Page : 693-697.

[15] F. Messelimi, Etude de quelque problème aux limites non linéaires couplés par la méthode de compacité, Mémoire de Magister, Juillet 2005, Université F. Abbas de Sétif.

[16] S.A. Messaoudi, Decay and gradient estimate for solutions of a semilinear heat equation, Arab journal of Math. Sciences vol. 9] 2 (2003), 1-7.

[17] S.A. Messaoudi, General decay of solutions of a viscoelastic equation. J. Math. Anal. Appl. 341, 2008, 1457-1467.

[18] R. Racke, Thermoelasticity with second sound-exponential stability in linear andnonlinear 1-d., Math. Meth. Appl. Sci. 25 (2002), 409-441.

[19] V. Patron, P. Perline, Méthode de la théorie mathématique de l'élasticité, Editions Mir, Moscou, 1981.

[20] L. Schwartz, Théorie des Distributions, Hermann, Paris 1979.

[21] M. S. Said et B. Merouani ; Résolution d'un problème non linéaire par la méthode des approximations succesives, Annales de L.U.M.A, France accepté (Sept 2005).

[22] L. Tartar ; Topics in non linear analysis, Puplication mathematics d'Orsay. (1978), N^0 13.

[23] Marie-Thérèse, Distributions Espaces de Sobolev Applications. Lacroix-Sonrier, ellipses édition marketin S.A, Paris,1998.

[24] K. Yosida, Functional Analysis, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1968.

مـــــلخص

إن الهدف الأساسي لهذه المذكرة هو دراسة وجود ووحدانية الحل لبعض المسائل الحدية ذات معادلات تفاضلية من الدرجة الثانية من النوع الزائدية خطية وغير خطية ، بحيث يتحكم فيها مؤثر **لامـــي** مع وجـــود شـــرط ديريكلي.

حيث نتعرض لدراسة وجود ووحدانية حلول معادلات انتشار الأمواج المضطربة في الوسطين المرن والفسكو-الاستيكي (أي له حد ذاكرة)، والتقنية المتبعة هي تقنية التراص**.** و قمنا أيضا بدارسة حالة الحلول الدورية باستعمال تقنية الرتابة **.**

كلمات مفتاحيه : أمواج، حد ذاكرة ، وسط مرن متجانس ، وجود، وحدانية ، طريقة التراص ، طريقةالرتابة، دورية، فيسكو-الاستيكي، مؤثر **لامي**.

Résumé

Le principal objectif de ce mémoire est l'étude de l'existence, l'unicité de la solution de quelque problème limites à l'équation différentielle du second degré de type hyperbolique linéaire et non-linéaire, gouvernée par le système de **Lamé** avec la condition de Dirichlet,

on étudie donc l'existence et l'unicité et après avoir considéré la forme mathématique des ondes perturbé dans un milieu élastique et viscoélastique. En utilisant la méthode de compacité.

Et aussi nous avons étudié l'existence, l'unicité des solutions périodiques par la technique de monotonie.

Mots-clés: ondes, terme mémoire, existence de la solution unique, milieu élastique homogène, méthode compacité et la monotonie, périodique, viscoélastique, opérateur de **Lamé**

Abstract

The main aim of this memory the study of the existence and uniqueness of solution of some limited problems having second degree differential equation whose type is from hyperbolic: linear and non linear. And it is controlled by **Lamé** influence with the existence of Dirichlet condition. We study the spread; we use the compactness technique of turbulent waves non linear in elastic homogenous medium and turbulent waves in viscoelastic medium.

We have studied the existence and uniqueness of periodic solution using the monotony technique.

Key words: waves, memory term, existence, uniqueness, technique Compactness and monotony, periodic, elastic, viscoelastic, **Lamé** operator.