

مساهمة في دراسة توزيعات المشتقات الفضائية للحقول

الكهربائية الموضعية الأيونية في البلازما

CONTRIBUTION TO THE STUDY OF THE DISTRIBUTION FUNCTIONS OF SPATIAL DERIVATIVES OF ION MICROFIELD IN PLASMA

سليمة قريشة* و إسماعيل شيجي⁺ و محمد الطيب مفتاح^م

مخبر تطوير الطاقات الجديدة و المتجددة (LENREZA) - قسم الفيزياء - كلية العلوم و التكنولوجيا و علوم المادة - جامعة ورقلة

* gusalima@yahoo.com , ⁺ chihism@yahoo.com , ^م mewalid@yahoo.com

مختصر:

لقد تم في هذا العمل الحساب النظري لدوال توزيع المشتقات الفضائية لمركبات الحقل الكهربائي الأيوني داخل البلازما، باستخدام بعض التقريبات الفيزيائية. لقد قارنا نتائجنا النظرية بنتائج منشورة من قبل، فأبدت اختلافا واضحا، رجحنا فيه نتائجنا، و برزنا ذلك.

الكلمات المفتاحية: دوال التوزيع، الحقول الموضعية في البلازما، المشتقات الفضائية للحقول الموضعية.

Abstract:

In this work, the distribution functions of spatial derivatives of components of electric ionic microfield in plasma have been theoretically calculated, using some physical approximations. We compared our theoretical results with those found in the literature, and we marked a difference. We chose ours by reasonable arguments.

Key words: Distribution functions, microfield, plasma, spatial derivative.

1. المقدمة:

إن البحث في أشكال و إزاحات الخطوط الطيفية للهيدروجين المنبعثة عن البلازما أساسي للمطيافية الذرية للبلازما. هذه الدراسات مهمة أيضا بسبب تطبيقاتها في تشخيص البلازما و كذا في الفيزياء الفلكية، لتفسير الأطياف القادمة من النجوم؛ فالعرض عند منتصف خطوط الهيدروجين مثلا أداة بسيطة و جيدة لتعيين الكثافة الإلكترونية⁽¹⁾، كما أن الخطوط الطيفية الصادرة عن البلازما تُشخص درجة حرارتها⁽²⁾.

بسبب فعل ستارك، تؤثر الحقول الكهربائية الناشئة عن الجسيمات المشحونة في البلازما على خصائصها الضوئية و الترموديناميكية، فهي تتسبب في تعريض الخطوط الطيفية و انزياحها⁽³⁻⁵⁾.

إن المقارنة بين العروض التجريبية و النظرية و أشكال الخطوط الطيفية المتسعة بفعل ستارك شائعة الاستعمال لتشخيص البلازما⁽³⁻⁵⁾.

لقد أجريت عدة دراسات تجريبية و نظرية لمعرفة مصادر لانتاظر الخطوط الطيفية و شرح خصائصها، و مع ذلك فإنه لم تنجز أية معالجة مرضية و دقيقة و موفقة للمعطيات التجريبية، لحد الآن⁽⁶⁾.

يتم تضمين تأثير الحقل الكهربائي الموضعي الأيوني، وهو المعروف بفعل ستارك، في الصيغة الطيفية برتب مختلفة التقريب؛ فمن الرتبة الأولى يتم بما يُعرف بدوال توزيع الحقل الكهربائي الموضعي (microfield)، و أمّا من الرتبة الثانية فيتم بدوال توزيع المشتقات

سليمة قريشة* وإسماعيل شحيح⁺ و محمد الطيب مفتاح[‡]

الفضائية للحقل الموضعي الأيوني⁽⁷⁾. يُعدُّ فعل رباعي الأقطاب الكهربائي الأيوني المصدرَ الرئيسَ لِلاتناظر الخطوط الطيفية المعزولة، و كذا عند بعض شروط تزاوج البلازما، يكون بسبب لانتجانس الحقل الموضعي الأيوني⁽⁸⁾.

2. التوزيعات في البلازما:

تتألف البلازما من عدد كبير جدا من الجسيمات المتفاعلة فيما بينها، و لتوفير وصفٍ عيني لظواهر البلازما، من الملائم اعتماد تقريب إحصائي، مما يؤدي إلى انخفاض كبير في كمية المعلومات التي تتعين معالجتها. في النظرية الحركية من الضروري فقط معرفة دالة توزيع جملة الجسيمات⁽⁹⁾. في نموذج البلازما الحارة، تكون كل المقادير العينية ذات الأهمية الفيزيائية مختزلة في دالة التوزيع⁽⁹⁾.

3. وصف الجملة الفيزيائية:

يحدث اتساع ستارك للخطوط الطيفية الصادرة عن أيونات البلازما و ذراتها تحت تأثير مُركَّبتي الحقل الكهربائي، المركبة ذات التردد المنخفض و المركبة ذات التردد المرتفع. تُوصف مساهمة الإلكترونات في اتساع ستارك باستعمال نموذج التصادمات، بينما تُعالج مساهمة الأيونات غالبا باعتبارها شبه ساكنة⁽¹⁰⁻¹²⁾.

إذاً المعالجة مركبة الحقل الكهربائي الموضعي ذات التردد المنخفض نعتبر البلازما مجموعةً من N أيونا نقطيا مغمورا في حلقية متجانسة و مُعادلةً كهربائيا، تشغل حجما V ، و لها درجة حرارة مطلقة T و محجوبا، يتفاعل كل واحد منها مع الآخر من خلال جهد فعّال هو جهد ديبي-هوكل (Debye-Hückel). يتضمّن هذا الجهد تفاعلات الأيونات مع الإلكترونات. يُفترض أيضا أن البلازما متوازنة حراريا و متعادلة ماكروسكوبيا⁽¹³⁾.

4. الحساب النظري:

يمكن التعبير عن شدة الخط الطيفي المتضمن تأثير رباعي الأقطاب الأيوني بالمعادلة⁽¹⁴⁾:

$$I(\omega) = \int d\bar{\epsilon} \int d(\partial_{\mu}\epsilon_v) Q(\epsilon) P(\partial_{\mu}\epsilon_v | \epsilon) J(\omega, \epsilon, \partial_{\mu}\epsilon_v) \quad (1)$$

حيث: $Q(\epsilon)$ دالة احتمال الحقل الموضعي لقيمة ϵ للحقل الموضعي، $P(\partial_{\mu}\epsilon_v | \epsilon)$ دالة التوزيع المشروط لمشتقات مُركِّبات الحقل، و هي المقدار الذي نحن بصدد دراسته في هذا العمل، $J(\omega, \epsilon, \partial_{\mu}\epsilon_v)$ دالة شدة الخط لمشح، بوجود الحقل المتجانس ϵ و تدرجاته الممثلة بـ $\partial_{\mu}\epsilon_v$ ، و التي تمثل مشتقات مركبات الحقل بالنسبة للإحداثيات x, y, z .

4.1. دوال توزيع الحقل الكهربائي الموضعي الأيوني:

إذا عُرفت دالة التقسيم Z_N لهذه الجملة، فإن احتمال وجود شعاع حقل كهربائي \bar{E} عند المبدأ، سواء أكان مشحونا أم لا، هو $Q(\bar{E}) d\bar{E}$ ، حيث: ^(3, 15)

$$Q(\bar{E}) = \frac{1}{Z_N} \int \dots \int \exp[-\beta U_N(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_N)] \delta\left(\bar{E} - \sum_{i=1}^N \bar{E}_i\right) \prod_{j=1}^N d\bar{r}_j \quad (2)$$

حيث: $\beta = \frac{1}{kT}$ ، T درجة الحرارة المطلقة، k ثابت بولتزمان، U_N الطاقة الكامنة للجملة، $\delta\left(\bar{E} - \sum_{i=1}^N \bar{E}_i\right)$ دالة توزيع ديراك، $\sum_{i=1}^N \bar{E}_i$ المحصلة الشعاعية للحقول الكهربائية الناشئة عن جميع الأيونات عند موضع الأيون المشح،

و باعتبار الجملة متماثلة المناحي يمكن

$$Z_N = \iint \dots \int e^{-\beta U} \prod_{j=1}^N d\vec{r}_j$$
تُدعى دالة التقسيم، و هي مقدار يجعل دالة الإحتمال معياراً. و كتابة:

$$4\pi Q(\bar{E}) E^2 dE \equiv P(E) dE \quad (3)$$

يُدعى $P(E)$ دالة توزيع الحقل الموضعي ذي الطويلة E .
لقد انصبت جهود الباحثين حول إيجاد صيغة تحليلية أو عددية لدالة توزيع الحقل الكهربائي الموضعي، و هي مقداراً مطلوباً أصلاً يُدخَل في الصيغة الطيفية.

أول من بدأ العمل بحساب دالة التوزيع هذه هو J. Holtsmark⁽¹⁶⁾ عام 1919، إذ افترض الأيونات لا تتفاعل فيما بينها، حيث تهيمن الطاقة الحركية على الطاقة الكامنة تماماً؛ أي أن $U_N = 0$ ، و هو ما يكون كذلك فعلاً عند درجات الحرارة الكبيرة جداً، أي عندما $T \rightarrow \infty$ ، و يقابل ذلك معامل تزاوج ضئيل جداً $\Gamma \ll 1$ ، و هو يميز مدى الترابط بين مكونات البلازما، و هو للإلكترونات: $\Gamma_{ee} = \frac{e^2}{k T r_e}$ ، حيث r_e نصف قطر الكرة الإلكترونية، و هو يميز البعد المتوسط بين إلكترونين، و يُستخرج من:

$$\frac{4}{3} \pi r_e^3 n_e = 1 \Rightarrow r_e = \sqrt[3]{\frac{3}{4 \pi n_e}}$$

أمّا عندما يكون هذا المعامل $\Gamma \sim 0.1$ فإن هذا التقريب يصبح غير دقيق⁽¹⁷⁾. لقد أصبح هذا النموذج فيما بعد يُتخذ نهايةً تنتهي إليها جميع النماذج الأخرى، عند شروط الحرارة العالية و (أو) الكثافة الضئيلة. هذا و توجد نماذج عديدة استخدمت فيما بعد لمعالجة المسائل ذات التزاوجات الشديدة.

2.4. دوال توزيع المشتقات الفضائية للحقل الكهربائي الموضعي الأيوني:

تُعطى الطاقة الكامنة للتفاعل بين أيونين i و j بـ:

$$U(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = \frac{(Ze)^2}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} e^{-\frac{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}{\lambda}} \quad (4)$$

حيث λ طول ديبي المعروف كما يلي: $\lambda_D = \sqrt{\frac{kT}{4\pi e^2 n_e}} (SI) \cong 6,9 \sqrt{\frac{T}{n_e}} (cgs)$ ، و Ze هي الشحنة الفعلية للأيون. الحقل الكهربائي الناشئ عن أحد الأيونات عند موضع المشع، و هو معتبراً عند مبدأ الإحداثيات، هو:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -Ze \left(1 + \frac{r}{\lambda} \right) e^{-\frac{r}{\lambda}} \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (5)$$

حيث \vec{r} شعاع الموضع الممتد من المشع إلى الأيون.

إن المطلوب أساساً في الصيغة الطيفية هو مؤثر (تسور) دوال التوزيع للمشتقات الفضائية لمركبات الحقل الموضعي عند المشع، بالنسبة لكل الإحداثيات المكانية، و عند كل القيم الممكنة للحقل الموضعي، أي المؤثر

$$P \begin{pmatrix} \partial_x E_x & \partial_y E_x & \partial_z E_x \\ \partial_x E_y & \partial_y E_y & \partial_z E_y \\ \partial_x E_z & \partial_y E_z & \partial_z E_z \end{pmatrix}_\epsilon$$

الحقل، من الصفر حتى المالا نهاية، و لكننا سنحسب فقط دالة التوزيع لبعض مركبات هذا المؤثر، و لتكن $P(\partial_x E_z)$ ، $P(\partial_y E_z)$ ،

، $P(\partial_z E_z)$ ، لقيمة ما \mathcal{E} للحقل الكهربائي الموضعي، و نبدأ بحساب توزيع $\partial_z E_z$.

1.2.4. دالة توزيع المشتقة $\frac{\partial E_z}{\partial z}$:⁽¹⁸⁾

تُكتب العبارة العامة للتوزيع كالتالي⁽¹⁹⁾:

$$P(f, \varepsilon) = \left\langle \delta \left(f - \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \delta(\varepsilon - E) \right\rangle \quad (6)$$

حيث: $f = \frac{\partial E_z}{\partial z}$ ، و هي تعني التوزيع الاحتمالي للمشتقة $\frac{\partial E_z}{\partial z}$ ، المشروط بالحقل الموضعي ذي القيمة ε ، مهمًا كان اتجاهه.

$$P(f, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} du d\omega e^{i\omega f + iu\varepsilon} \left[\frac{2\pi}{Z_N} \int_0^R r^2 dr e^{-iuE(r)} \int_0^\pi \sin\theta d\theta e^{-i\omega \frac{\partial E_z}{\partial z}} e^{-\frac{U(r)}{kT}} \right]^N \quad (7)$$

حيث: $i^2 = -1$ ، R نصف قطر الكرة التي تحوي N أيونا بالكثافة n_i ، $E(r)$ حقل ديباي المعروف بالمعادلة (5) ، المشتقة $\frac{\partial E_z}{\partial z}$ الجزئية للمركبة E_z بالنسبة للإحداثي z ، و U طاقة التفاعل بين الأيون المشع و أحد الأيونات المتفاعلة، المعادلة (4)، أمّا:

$$Z_N = 4\pi \int_0^R r^2 e^{-\frac{U(r)}{kT}} dr \quad (8)$$

لقد استخدمنا التمثيل الهندسي في الشكل 1 للتعبير عن مركبة الحقل بالصيغة:

$$\cos\theta = \frac{z}{r} = \frac{E_z}{E(r)} \Rightarrow E_z = z \frac{E(r)}{r} \quad (9)$$

و بإجراء الاشتقاق و ترتيب العلاقات يمكن كتابة:

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{Ze}{r^3} \left[\left(1 + \frac{r}{\lambda}\right) - \left(\frac{r^2}{\lambda^2} + \frac{3r}{\lambda} + 3\right) \cos^2\theta \right] e^{-\frac{r}{\lambda}} \quad (10)$$

بالتعويض عن الحقل و مشتقة مركبته في صيغة التوزيع (7) نجد:

$$P(f, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} du d\omega e^{i\omega f + iu\varepsilon} \left[\frac{2\pi}{Z_N} \int_0^R r^2 dr e^{-iu \frac{Ze}{r^3} \left(1 + \frac{r}{\lambda}\right) e^{-\frac{r}{\lambda}}} \times \int_0^\pi \sin\theta d\theta e^{-i\omega \frac{Ze}{r^3} \left[\left(1 + \frac{r}{\lambda}\right) - \left(\frac{r^2}{\lambda^2} + \frac{3r}{\lambda} + 3\right) \cos^2\theta \right] e^{-\frac{r}{\lambda}}} e^{-\frac{U(r)}{kT}} \right]^N$$

$$P(f, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} du d\omega e^{i\omega f + iu\varepsilon} [\mathbb{Z}]^N \quad (11)$$

حيث:

$$\mathbb{Z} = \frac{2\pi}{Z_N} \int_0^R r^2 e^{-\frac{U(r)}{kT}} dr e^{-iA(u, \omega, r)} \int_0^\pi \sin\theta d\theta e^{iB(\omega, r) \cos^2\theta} \quad (12)$$

$$A(u, \omega, r) = \frac{Ze}{r^2} \left(1 + \frac{r}{\lambda}\right) \left(u + \frac{\omega}{r}\right) e^{-\frac{r}{\lambda}} , \quad B(\omega, r) = \omega \frac{Ze}{r^3} \left(3 + \frac{3r}{\lambda} + \frac{r^2}{\lambda^2}\right) e^{-\frac{r}{\lambda}} \quad \text{باعتبار:}$$

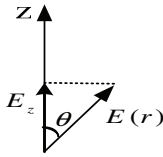
بإجراء تغيير للمتغير θ إلى المتغير t على اعتبار $\cos\theta = t$ يكون:

$$\cos\theta = t \Rightarrow dt = -\sin\theta d\theta \Rightarrow \int_0^\pi \sin\theta e^{iB(\omega, r) \cos^2\theta} d\theta = \int_{-1}^1 dt e^{iB(\omega, r) t^2} = 2 \int_0^1 dt e^{iB(\omega, r) t^2}$$

$$\mathbb{Z} = \frac{4\pi}{Z_N} \int_0^R r^2 e^{-\frac{U(r)}{kT}} dr (\cos A - i \sin A) \int_0^1 dt (\cos Bt^2 + i \sin Bt^2) \quad \text{و تصبح:}$$

$$= \frac{4\pi}{Z_N} \int_0^R r^2 e^{-\frac{U(r)}{kT}} dr (\cos A - i \sin A) \left[\int_0^1 dt \cos Bt^2 + i \int_0^1 dt \sin Bt^2 \right] \quad (13)$$

باعتبار $Bt^2 = \frac{\pi}{2} x^2$ يمكننا إجراء التحويل الآتي: $\sqrt{B}t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}x \Rightarrow \sqrt{B} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} dx$ و يكون:



الشكل 1: التمثيل الشعاعي للحقل

و مركبته على المحور

Z

$$\int_0^1 dt \cos Bt^2 = \sqrt{\frac{\pi}{2B}} \int_0^{\sqrt{\frac{2B}{\pi}}} \cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2B}} \text{FRES}C\left(\sqrt{\frac{2B}{\pi}}\right) = X_0$$

$$\int_0^1 dt \sin Bt^2 = \sqrt{\frac{\pi}{2B}} \int_0^{\sqrt{\frac{2B}{\pi}}} \sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2B}} \text{FRES}S\left(\sqrt{\frac{2B}{\pi}}\right) = Y_0$$

حيث $\text{FRES}C$ دالة خاصة تُعرَّفُ بتكامل جيب تمام فرينل، و تُعرَّفُ بـ: $\text{FRES}C(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) dt$

و $\text{FRES}S$ دالة خاصة أخرى تُعرَّفُ بتكامل جيب فرينل، و تُعرَّفُ بـ: $\text{FRES}S(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) dt$

إذا سُنكَب \mathbb{Z} كالتالي:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &= \frac{4\pi}{Z_N} \int_0^R r^2 e^{-\frac{U(r)}{kT}} dr (\cos A - i \sin A)(X_0 + iY_0) \\ &= \frac{4\pi}{Z_N} \int_0^R r^2 e^{-\frac{U(r)}{kT}} dr [(X_0 \times \cos A + Y_0 \times \sin A) + i(Y_0 \times \cos A - X_0 \times \sin A)] \\ \mathbb{Z} &= \left\{ \frac{4\pi}{Z_N} \int_0^R r^2 e^{-\frac{U(r)}{kT}} dr [X_0 \times \cos A + Y_0 \times \sin A] \right\} \\ &\quad + i \left\{ \frac{4\pi}{Z_N} \int_0^R r^2 e^{-\frac{U(r)}{kT}} dr [Y_0 \times \cos A - X_0 \times \sin A] \right\} \end{aligned} \quad (14)$$

$$= \text{Re}(\mathbb{Z}) + i \text{Im}(\mathbb{Z}) = |\mathbb{Z}|(\cos \Delta + i \sin \Delta) = |\mathbb{Z}|e^{i\Delta}$$

حيث $|\mathbb{Z}|$ طويلة العدد المركب \mathbb{Z} و Δ زاويته. إذا يمكن كتابة:

$$\mathbb{Z}^N = |\mathbb{Z}|^N [\cos(N \Delta) + i \sin(N \Delta)] \quad (15)$$

بالتعويض عن ذلك في المعادلة (11) يكون:

$$\begin{aligned} P(f, \varepsilon) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} du d\omega |\mathbb{Z}|^N [\cos(\omega f + u\varepsilon) + i \sin(\omega f + u\varepsilon)] [\cos(N \Delta) + i \sin(N \Delta)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} du d\omega |\mathbb{Z}|^N [\cos(\omega f + u\varepsilon + N \Delta) + i \sin(\omega f + u\varepsilon + N \Delta)] \end{aligned} \quad (16)$$

ملاحظات:

$$\text{I) رأينا أن: } \mathbb{Z} = \frac{2\pi}{Z_N} \int_0^R r^2 e^{-\frac{U(r)}{kT}} dr e^{-iA(u, \omega, r)} \int_0^\pi \sin \theta d\theta e^{iB(\omega, r) \cos^2 \theta}$$

$$\mathbb{Z} = \frac{\int_{\text{all space}} e^{-X(r)} d\vec{r} e^{iY(r, u, \omega, \theta)}}{\int_{\text{all space}} e^{-X(r)} d\vec{r}}$$

سليمة قريشة^{*} و إسماعيل شيجي⁺ و محمد الطيب مفتاح[‡]

$$\begin{aligned} \therefore |\mathbb{Z}| &= \left| \frac{\int e^{-X(r)} d\vec{r} e^{iY(r,\mu,\omega,\theta)}}{\int e^{-X(r)} d\vec{r}} \right| < \frac{\left| \int e^{-X(r)} d\vec{r} e^{iY(r,\mu,\omega,\theta)} \right|}{\left| \int e^{-X(r)} d\vec{r} \right|} = \frac{\int |e^{-X(r)} e^{iY(r,\mu,\omega,\theta)}| d\vec{r}}{\int |e^{-X(r)}| d\vec{r}} \\ &= \frac{\int |e^{-X(r)}| d\vec{r}}{\int |e^{-X(r)}| d\vec{r}} = 1 \end{aligned} \Rightarrow |\mathbb{Z}| < 1$$

$$P(f, \varepsilon) = \langle \delta(f - E') \delta(\varepsilon - E) \rangle \quad (\text{II})$$

و حيث أن $\delta(f - E') \delta(\varepsilon - E)$ مقدار حقيقي فإن القيمة المتوسطة له حقيقية أيضا:

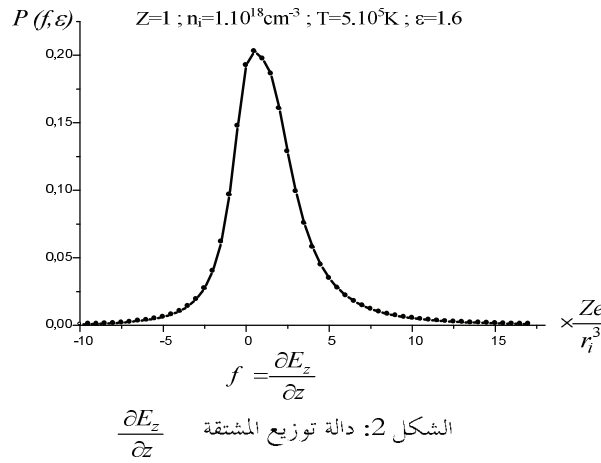
$$P(f, \varepsilon) = \frac{\int_{all\ space} d\vec{r} e^{-X(r)} \delta(f - E') \delta(\varepsilon - E)}{\int_{all\ space} d\vec{r} e^{-X(r)}} = \langle \delta(f - E') \delta(\varepsilon - E) \rangle$$

و عليه فإن $P(f, \varepsilon)$ حقيقي تماما، و هو ما يتفق مع كونه لا يحتمل قيما تخيلية، مما يقود إلى $\text{Im } \mathbb{Z} = 0$ ، و بالتالي تكون $\Delta = \tan^{-1} \left(\frac{\text{Im } \mathbb{Z}}{\text{Re } \mathbb{Z}} \right) = 0$ و تصبح (16):

$$P(f, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} du d\omega |\mathbb{Z}|^N [\cos(\omega f + u\varepsilon)] \quad (17)$$

و هي دالة توزيع مشتقة الحقل $f = \frac{\partial E_z}{\partial z}$ عند القيمة ε للحقل الموضعي.

لقد عالجتنا التكامل الأخير (17) عدديا، باستخدام البرمجة بلغة الفورتران 90، و تبين لنا بالفعل أن $\text{Im } \mathbb{Z}$ تقترب من الصفر و أن $|\mathbb{Z}| < 1$ كلما امتد التكامل على الفضاء بعيدا إلى المالا نهاية، و فيما يلي بعض النتائج التي حصلنا عليها⁽²⁰⁾، الشكل 2.



و على هذا المنوال يمكن حساب دوال التوزيع لبقية مركبات المؤثر.

2.2.4 دالة توزيع المشتقة $\frac{\partial E_z}{\partial x}$ (18):

مثلا كتبنا المعادلتين (6) و (7)، فإنه يمكن التعبير عن توزيع هذه المشتقة كما يلي:

$$P(f, \varepsilon) = \left\langle \delta \left(f - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \delta(\varepsilon - E) \right\rangle \quad (18)$$

$$P(f, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} du d\omega e^{i\omega f + iu\varepsilon} \left[\frac{1}{Z_N} \int_0^R r^2 e^{-\frac{U(r)}{kT}} e^{-iuE(r)} dr \times \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \sin \theta d\theta d\phi e^{-i\omega \frac{\partial E_z}{\partial x}} \right]^N \quad (19)$$

مشتقة المركبة E_z للحقل بالنسبة للإحداثي x . بإجراء الاشتقاق لمركبة الحقل E_z يمكن كتابة:

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{Ze}{r^3} \cos \theta \sin \theta \cos \varphi \left[3 \left(1 + \frac{r}{\lambda} \right) + \frac{r^2}{\lambda^2} \right] e^{-\frac{r}{\lambda}} \quad (20)$$

بالتعويض عن الحقل و مشتقة مركبته في صيغة التوزيع (19)، نجد:

$$P(f, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} du d\omega e^{i\omega f + iu\varepsilon} \left[\frac{1}{Z_N} \int_0^R r^2 e^{-\frac{U(r)}{kT}} dr e^{-i\omega \frac{Ze}{r^2} \left(1 + \frac{r}{\lambda} \right) e^{-\frac{r}{\lambda}}} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta d\varphi e^{i\omega \frac{Ze}{r^3} \cos \theta \sin \theta \cos \varphi \left[3 \left(1 + \frac{r}{\lambda} \right) + \frac{r^2}{\lambda^2} \right] e^{-\frac{r}{\lambda}}} \right]^N \quad (21)$$

لتبسيط حساب التكامل (21) سنعتبر:

$$B(\omega, r) = \omega \frac{Ze}{r^3} \left[3 \left(1 + \frac{r}{\lambda} \right) + \frac{r^2}{\lambda^2} \right] e^{-\frac{r}{\lambda}} \quad \text{و} \quad A(u, r) = u \frac{Ze}{r^2} \left(1 + \frac{r}{\lambda} \right) e^{-\frac{r}{\lambda}}$$

$$P(f, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} du d\omega e^{i\omega f + iu\varepsilon} \left[\frac{1}{Z_N} \int_0^R r^2 e^{-\frac{U(r)}{kT}} dr e^{-iA(u, r)} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta d\varphi e^{iB(\omega, r) \cos \theta \sin \theta \cos \varphi} \right]^N \quad (22)$$

$$P(f, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} du d\omega e^{i\omega f + iu\varepsilon} [Z]^N \quad (23)$$

$$Z = \frac{1}{Z_N} \int_0^R r^2 e^{-\frac{U(r)}{kT}} dr e^{-iA(u, r)} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta d\varphi e^{iB(\omega, r) \cos \theta \sin \theta \cos \varphi} \quad \text{حيث:}$$

$$Z = \frac{1}{Z_N} \int_0^R r^2 e^{-\frac{U(r)}{kT}} dr e^{-iA(u, r)} \int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta d\theta \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi e^{iBB(\omega, r, \theta) \cos \varphi} \quad (24)$$

و ذلك باعتبار : $BB(\omega, r, \theta) = B(\omega, r) \cos \theta \sin \theta$ يمكن كتابة:

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi e^{iBB(\omega, r, \theta) \cos \varphi} = \int_0^{2\pi} \cos [BB(\omega, r, \theta) \cos \varphi] d\varphi + i \int_0^{2\pi} \sin [BB(\omega, r, \theta) \cos \varphi] d\varphi$$

يكون التكامل $\int_0^{2\pi} \sin [BB(\omega, r, \theta) \cos \varphi] d\varphi$ معدوما مهما كانت $BB(\omega, r, \theta)$.

$$\therefore \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi e^{iBB(\omega, r, \theta) \cos \varphi} = \int_0^{2\pi} \cos [BB(\omega, r, \theta) \cos \varphi] d\varphi = 2\pi J_0 [BB(\omega, r, \theta)] \quad (25)$$

حيث J_0 تُدعى دالة بيسل من الرتبة صفر، و تُعرَّفُ بـ $J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \cos \theta) d\theta$

$$Z = \frac{2\pi}{Z_N} \int_0^R r^2 e^{-\frac{U(r)}{kT}} dr e^{-iA(u, r)} \int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta J_0 [BB(\omega, r, \theta)] d\theta$$

إذاً ستكون:

$$= \frac{2\pi}{Z_N} \int_0^R r^2 e^{-\frac{U(r)}{kT}} dr [\cos(A) - i \sin(A)] \int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta J_0 [BB(\omega, r, \theta)] d\theta$$

$$= \frac{2\pi}{Z_N} \int_0^R r^2 e^{-\frac{U(r)}{kT}} dr \cos(A) \int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta J_0 [BB(\omega, r, \theta)] d\theta$$

$$- i \frac{2\pi}{Z_N} \int_0^R r^2 e^{-\frac{U(r)}{kT}} dr \sin(A) \int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta J_0 [BB(\omega, r, \theta)] d\theta$$

$$\mathbb{Z} = \text{Re}(\mathbb{Z}) + i \text{Im}(\mathbb{Z}) = |\mathbb{Z}|(\cos \Delta + i \sin \Delta) = |\mathbb{Z}|e^{i\Delta} \quad (26)$$

$$\text{Re}(\mathbb{Z}) = \frac{2\pi}{Z_N} \int_0^R r^2 e^{-\frac{U(r)}{kT}} \cos(A) dr \int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta J_0 [BB(\omega, r, \theta)] d\theta$$

حيث:

$$\text{Im}(\mathbb{Z}) = \frac{2\pi}{Z_N} \int_0^R r^2 e^{-\frac{U(r)}{kT}} \sin(A) dr \int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta J_0 [BB(\omega, r, \theta)] d\theta$$

$$P(f, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} du d\omega e^{i\omega f + iu\varepsilon} |\mathbb{Z}|^N [\cos(N\Delta) + i \sin(N\Delta)] \quad (27)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathbb{Z}|^N du d\omega [\cos(\omega f + u\varepsilon) + i \sin(\omega f + u\varepsilon)] [\cos(N\Delta) + i \sin(N\Delta)]$$

بضرب الحدود ببعضها، وإعادة ترتيب العلاقات نحصل على ما يلي:

$$P(f, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} du d\omega |\mathbb{Z}|^N [\cos(\omega f + u\varepsilon + N\Delta) + i \sin(\omega f + u\varepsilon + N\Delta)] \quad (28)$$

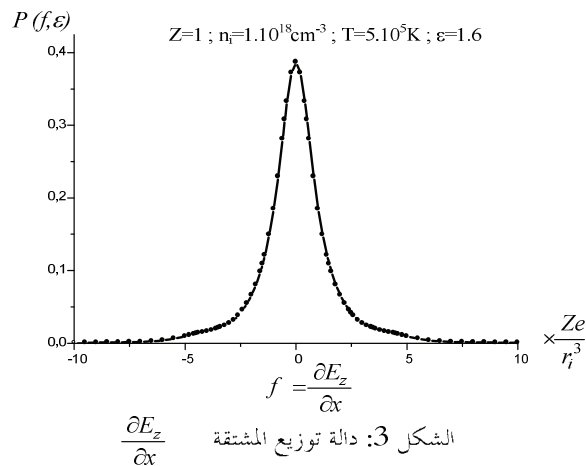
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} du d\omega |\mathbb{Z}|^N \cos(\omega f + u\varepsilon + N\Delta) +$$

$$i \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} du d\omega |\mathbb{Z}|^N \sin(\omega f + u\varepsilon + N\Delta)$$

للمبررات التي ذكرناها في البند السابق، فإن الجزء التخيلي يكون معدوماً، و عليه فإنه يمكن كتابة:

$$P(f, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} du d\omega |\mathbb{Z}|^N \cos(\omega f + u\varepsilon + N\Delta) \quad (29)$$

لقد حسنا التكامل (29) عددياً، فحصلنا على الشكل 3.



4. 2. 3. دالة توزيع المشتقة $\frac{\partial E_z}{\partial y}$ (18):

يكون الحساب كما في البند السابق تماماً، إلا أننا سنستبدل $\cos \varphi$ في العبارة (21) بـ $\sin \varphi$ ، و تصبح المعادلة (25):

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi e^{i BB(\omega,r,\theta)\sin\varphi} = \int_0^{2\pi} \cos[BB(\omega,r,\theta)\sin\varphi] d\varphi = 2\pi J_0[BB(\omega,r,\theta)] \quad (30)$$

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \cos \theta) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin \theta) d\theta \quad \text{إذ أن}$$

و عليه فإن دالة توزيع المشتقة $\frac{\partial E_z}{\partial y}$ تساوي دالة توزيع $\frac{\partial E_z}{\partial x}$ تماما، و هو ما يتفق مع تناظر المسألة، إذ لا يوجد ما يميز الاتجاه x عن الاتجاه y أو عن أي اتجاه آخر متعامد مع المحور z .
5. مناقشة:

لقد قمنا بتفحص دالة توزيع المشتقة $\frac{\partial E_z}{\partial z}$ ، الموصوفة في الشكل 2، فتبين لنا أنه من الممكن تفكيكها إلى دالتين غاوسيتين كما بالشكل 4.

أمّا دالة توزيع المشتقة $\frac{\partial E_z}{\partial x}$ فقد حاولنا مطابقتها، فتبين لنا أنها متطابقة تماما مع الشكل اللورنتزي، في حين كان انحرافها عن الشكل الغاوسي واضحا كما بالشكل 5.

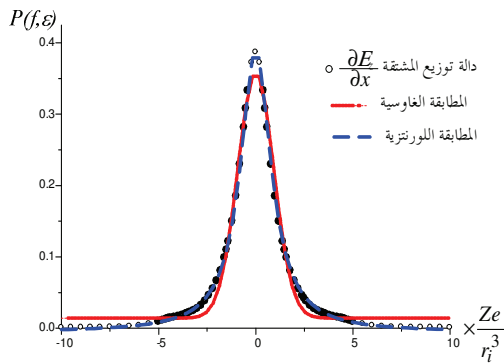
إن النتيجة التي توصلنا إليها تختلف عما ذكره kilcrease and Murillo⁽¹⁴⁾ في حساباتهما التقريبية، إذ قد انطلقا من بعض الاعتبارات المختلفة عما أخذناه؛ ففي حين قاما بحساب دالة دلنا للقيمة المتوسطة لمشتقة مركبة الحقل لهيئات لها الحقل نفسه،
 $\langle \partial_x E_z \rangle_\varepsilon$ و $\langle \partial_z E_z \rangle_\varepsilon$:

$$P(\partial_x E_z | \varepsilon) \equiv \delta(\partial_x E_z - \langle \partial_x E_z \rangle_\varepsilon) \quad \text{و} \quad P(\partial_z E_z | \varepsilon) \equiv \delta(\partial_z E_z - \langle \partial_z E_z \rangle_\varepsilon)$$

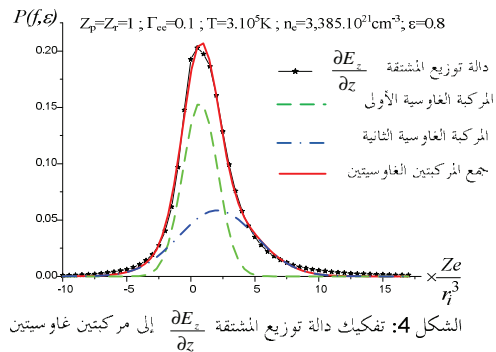
للمشتقتين $\frac{\partial E_z}{\partial x}$ ، $\frac{\partial E_z}{\partial z}$ ذاتهما:

$$P(f, \varepsilon) = \left\langle \delta\left(f - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) \delta(\varepsilon - E) \right\rangle \quad \text{و} \quad P(f, \varepsilon) = \left\langle \delta\left(f - \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) \delta(\varepsilon - E) \right\rangle$$

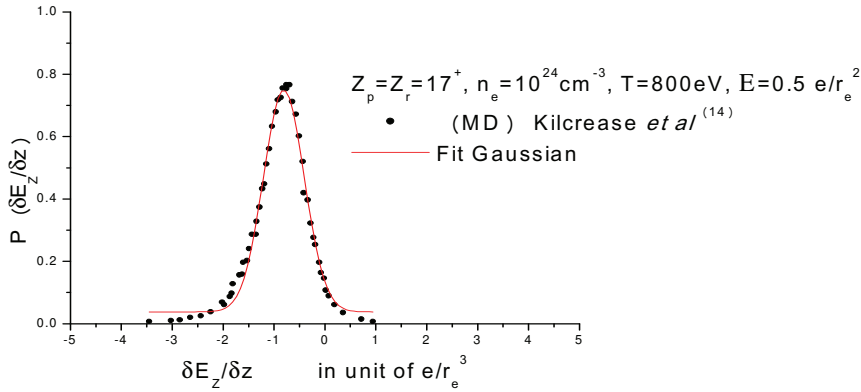
تقريباً و حسابنا مضبوطاً، و لعل نتائج المحاكاة العددية التي قاما بها تؤيد ما ذهبنا إليه⁽¹⁴⁾؛ ذلك أنه لو دققنا النظر في المنحنيات التي توصلنا إليها باستخدام المحاكاة العددية بطريقة التحريك الجزئي، فنلاحظ عدم تناظر، خاصة دالة توزيع المشتقة $\frac{\partial E_z}{\partial z}$ ، و هو ما يُظهره الشكلان 7 و 8 .



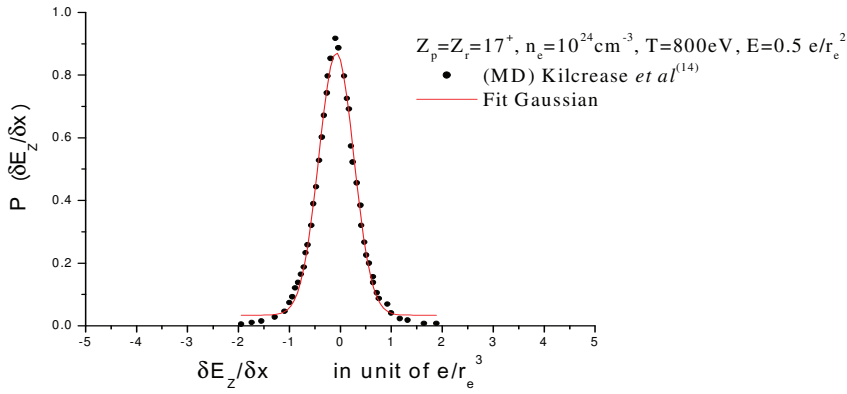
الشكل 5: مطابقة توزيع المشتقة $\frac{\partial E_z}{\partial x}$ بدالة غاوسية و دالة لورنتزية



الشكل 4: تفكيك دالة توزيع المشتقة $\frac{\partial E_z}{\partial z}$ إلى مركبتين غاوسيتين



الشكل 7: دالة توزيع المشتقة $\frac{\partial E_z}{\partial z}$ عند الحقل المختزل 0.5



الشكل 8: دالة توزيع المشتقة $\frac{\partial E_z}{\partial x}$ عند الحقل المختزل 0.5

6. خلاصة:

لقد عاجلنا في هذه المذكرة مسألة تدرجات الحقل الكهربائي الموضعي الأيوني حول المشع داخل البلازما؛ ذلك أنه من المعتقد لدى الباحثين أنها أحد الأسباب المؤدية إلى لاتناظر الخطوط الطيفية.

تحدّثنا باختصار عن توزيع الحقول الكهربائية الموضعية الأيونية، ثم ركّزنا عن توزيع المشتقات الفضائية لمركبات هذه الحقول، و هو المقدار الرئيس الذي عاجلناه في هذه المقال. لقد بيّنا مبرر ضرورة حساب مُوتّر (tensor) دوال توزيع مشتقات المركبات المختلفة للحقل الكهربائي الموضعي الأيوني بالنسبة للاتجاهات المختلفة، و على إثر ذلك باشرنا الحساب النظري انطلاقاً من العبارة الأساسية لدالة التوزيع، دون استخدام آية تقريبات حسابية.

لقد قادنا الحساب النظري إلى صيغة بسيطة لدوال توزيع المشتقات $\frac{\partial E_z}{\partial z}$ و $\frac{\partial E_z}{\partial x}$ و $\frac{\partial E_z}{\partial y}$ ، يمكن حسابها عددياً. لقد

تبين لنا أن دالة توزيع $\frac{\partial E_z}{\partial z}$ مؤلفة من جمع دالتين غاوسيتين، أمّا دالتنا توزيع المشتقتين $\frac{\partial E_z}{\partial x}$ و $\frac{\partial E_z}{\partial y}$ فهما متساويتان، ولهما شكل لورنتزي، و يظهر جلياً انحرافهما عن الشكل الغاوسي في كثير من أجزائهما، على خلاف ما ذكرته بعض المراجع الأخرى.

المراجع:

- (1) H. R. Griem, J. Halenka and W. Olchawa, J. Phys. **B 38**, 975 (2005).
- (2) I. O. Golosnoy, Plasma Physics Reports, **27**, 497(2001).
- (3) H. R. Griem, "*Spectral Line Broadening by Plasmas*", New York, Academic Press (1974).
- (4) D. Salzmann, "*Atomic Physics in Hot Plasmas*", Oxford University Press (1998).
- (5) H. B. Nersisyan, C. Toepffer and G. Zwicknagel, Phys. Rev. **E 72**, 036403 (2005).
- (6) A.V. Demura, G.V. Demchenko and D. Nikolic, Eur. Phys. J. **D 46**, 111 (2008).
- (7) شبيحي إسماعيل، رسالة دكتوراه دولة في الفيزياء، جامعة قسنطينة، (2005).
- (8) J. Halenka and W. Olchawa, Eur. Phys. J. **D 42**, 425 (2007).
- (9) Vladimir V. Uchaikin and Vladimir M. Zolotarev, "*CHANCE and STABILITY Stable Distributions and their Applications*", VSP (1999).
- (10) H.R. Griem, Contrib. Plasma. Phys. **40**, 46 (2000).
- (11) H.R. Griem, Contrib. Plasma. Phys. **41**, 223 (2001).
- (12) H.R. Griem, "*Principles of Plasma Spectroscopy*", Cambridge University Press (1997).
- (13) A. Calisti, L.A. Bureyeva, V.S. Lisitsa, D. Shuvaev and B. Talin, Eur. Phys. J. **D 42**, 387 (2007).
- (14) D. P. Kilcrease and M. S. Murillo, J. Quant. Spect. Radiat. Transf, **65**, 343 (2000).
- (15) R. Griem, Phys. Fluids, **B 4**, 2346 (1992).
- (16) J. Holtzmark, Ann. Phys. (Leipzig) **58**, 577 (1919).
- (17) A. Y. Potekhin, G. Chabrier and D. Gilles, Phys. Rev. **E 65** (2002).
- (18) قريشة سليمة، مذكرة ماجستير في فيزياء الإشعاع و البلازما، جامعة ورقلة، (2008).
- (19) L. E. REICHL, "*A Modern Course in Statistical Physics*", 2nd Edition, USA (1997).
- (20) S. Guerricha, S. Chihi and M.T. Meftah, in 19th International Conference on Spectral Line Shapes, edited by Manuel Á. González, 15-20 June 2008, Valladolid (Spain).