ETUDE ASYMPTOTIQUE D'UN PROBLEME DE CONTACT UNILATERAL D'UNE PLAQUE MINCE CONTRE UN OBSTACLE RIGIDE DANS L'ELASTICITE LINEAIRE

D. A. CHACHA[1] & A. BENSAYAH[2]

[1]M.C. Université Kasdi Merbah-Ouargla.

[2]M.A. Université Kasdi Merbah-Ouargla

Résumé: En 2002, J.C.Paumier a réalisé une modélisation asymptotique, d'un problème de contact unilatéral, d'une plaque mince de type de Kirchhoff-Love contre un obstacle rigide avec frottement de Coulomb. Il a prouvé que $u(\varepsilon)$, solution du problème variationnel tridimensionnel, converge vers $u(0)$ une limite caractérisée par un problème bidimensionnel sans frottement. Notre objectif est de valider ce résultat par le moyen d'une analyse asymptotique formelle en montrant que le terme dominant u^0 dans le développement asymptotique de $u(\varepsilon)$ est caractérisé par le même problème bidimensionnel.

Mots clés: plaque mince, contact unilatéral, Signorini, frottement de Coulomb, analyse asymptotique.

Abstract: In 2002, J.C.Paumier has studied a Signorini problem with Coulomb friction of a clamped Kirchhoff-Love thin plate model, where he has proved that $u(\varepsilon)$, the solution of the three-dimensional problem, converges to $u(0)$ characterized by a two-dimensional problem without friction. The aim of this paper is to valid this result using a formal asymptotic analysis approach, where we prove that the leading term u^0 in the asymptotic expansion of $u(\varepsilon)$ is characterized by the same two dimensional problem.

Key words: thin plate, unilateral contact, Signorini, Coulomb friction, asymptotic analysis.

1 Introduction

Le contact unilatéral des corps élastiques, avec ou sans frottement, est une contrainte mécanique souvent rencontrée en modélisation. La formulation de ce problème (sans frottement) a été décrite par Signorini en 1933. C'est en 1963 que Fichera [2] a réalisé l'analyse mathématiques de ce problème à travers un problème de minimisation équivalent (méthode d'énergie). De nouveaux résultats d'existence, pour une classe de problèmes de contact sans frottement, ont été proposés par Duvaut, Lions et d'autres pour le cas de frottement non local (loi de Tresca), paru en 1972 dans [1], où ils ont signalé un problème ouvert d'existence et d'unicité dans le cas avec frottement local (loi de Coulomb). Beaucoup de travaux traitant ce problème ont été publiés depuis.

Pour le cas des structures minces, i.e, les corps élastiques dont l'une des dimensions (l'épaisseur) est petite devant les autres, par exemples: plaques minces, coques minces et filaments. Ces modèles ont été proposés par Kirchhoff, Love, Reissner, Mindlin, Naghdi, Von Kàrmàn et Koiter en se basant sur quelques hypothèses. Parmi ces modèles on s'intéresse au modèle de plaque mince de Kirchhoff-Love qui a été justifié par une analyse asymptotique en 1979 par Ciarlet et Destyunder [7]. L'étude d'un problème de contact unilatéral d'une plaque mince contre un obstacle rigide avec frottement de Coulomb a été réalisée par Dhia [3] en utilisant une méthode de pénalisation. En 2002, J.C.Paumier [4] , [5] a réalisé une modélisation asymptotique d'un problème de contact unilatéral d'une plaque mince de type Kirchhoff-Love encastrée, contre un obstacle rigide où il a prouvé que ce problème tridimensionnel avec frottement tend vers un problème bidimensionnel sans frottement.

Ce présent travail présente l'étude asymptotique formelle d'un problème élasto-statique de contact unilatéral, avec frottement de Coulomb, d'une plaque mince élastique contre un obstacle rigide, avec les conditions de complémentarité dites les conditions de Signorini et ceci sur la partie condidate au contact. Ce qui reste du bord est divisé en deux parties, une subit une force surfacique, l'autre est encastrée. Enfin une conclusion qui comporte les résultats essentiels.

Dans toute la suite on utilise les conventions de notations suivantes: les indices ou exposants Latins prennent leurs valeurs dans {1,2,3} et les indices Grecs dans l'ensemble {1,2} à l'exception de ε et δ . La convention de sommation par rapport aux indices et exposants répétés est adoptée.

Soit ω un ouvert de R^2 de frontière γ lipschitzienne. Pour tout $\varepsilon > 0$, on considère $\Omega^\varepsilon = \omega \times \left]-\varepsilon, +\varepsilon\right[$ un ouvert borné de R^3 qui caractérise le domaine occupé par une plaque élastique d'épaisseur 2ε . On note par $\Gamma_0^\varepsilon = \gamma \times [-\varepsilon, \varepsilon]$, $\Gamma_+^\varepsilon = \omega \times \{+\varepsilon\}$ et $\Gamma_-^\varepsilon = \omega \times \{-\varepsilon\}$ la frontière latérale, la face supérieure et la face inférieure de Ω^ε respectivement.

On pose

$$V(\Omega^\varepsilon) = \{v \in H^1(\Omega^\varepsilon) \,/\, v = 0 \ \text{sur}\ \Gamma_0^\varepsilon\},$$

$$\overleftrightarrow{V}(\Omega^\varepsilon) = V(\Omega^\varepsilon)\times V(\Omega^\varepsilon)\times V(\Omega^\varepsilon)$$

l'espace des déplacements admissibles.

On note par $\bar{v}$ la trace de v sur Γ_+^ε et par $\underline{v}$ la trace de v sur Γ_-^ε, ou simplement par v s'il n'y a pas de confusion.

On suppose que le domaine Ω^ε est occupé par un matériau élastique isotrope et homogène de constantes de Lamé $\lambda > 0$, $\mu > 0$. Ce corps Ω^ε est encastré en Γ_0^ε, soumis à une force volumique f^ε, à une force surfacique g^ε sur Γ_-^ε et entre en contact unilatéral avec un obstacle rigide occupant le domaine $O^\varepsilon = \left\{x^\varepsilon \in R^3 / \left(x_1^\varepsilon, x_2^\varepsilon\right) \in \omega,\ x_3^\varepsilon > \varepsilon d\right\}$

avec d est une fonction d'interstice définie sur ω vérifiant $d \geq 0$ et $d \in H_0^2(\omega)$.

La condition de contact est définie par l'inégalité: $\bar{v}_3 \leq \varepsilon d$ d'où les notations :

$K(\Omega^\varepsilon) = \left\{v \in V(\Omega^\varepsilon) / \ \bar{v}_3 \leq \varepsilon d\right\}$,

$\overleftrightarrow{K}(\Omega^\varepsilon) = V(\Omega^\varepsilon)\times V(\Omega^\varepsilon)\times K(\Omega^\varepsilon)$ est l'espace des déplacements admissibles avec la condition de contact.

2 Problème classique $P^\varepsilon.C$

La modélisation du contact unilatéral d'un corps élastique occupant le domaine Ω^ε contre un obstacle rigide occupant le domaine O^ε est caractérisé par le problème classique suivant:

$$(P^\varepsilon C)\begin{cases} \text{Trouver } u^\varepsilon \text{ tel que} \\ -\partial_j^\varepsilon \sigma_{ij}^\varepsilon = f_i^\varepsilon \text{ dans } \Omega^\varepsilon \\ \sigma_{ij}^\varepsilon n_j^\varepsilon = g_i^\varepsilon \text{ sur } \Gamma_-^\varepsilon \\ u^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_0^\varepsilon \\ \bar{u}_3^\varepsilon \leq \varepsilon d, \sigma_{33}^\varepsilon \leq 0, \sigma_{33}^\varepsilon\left(\bar{u}_3^\varepsilon - \varepsilon d\right) = 0 \text{ sur } \Gamma_+^\varepsilon \\ \left|\sigma_T^\varepsilon\right| < \nu\left|\sigma_{33}^\varepsilon\right| \Rightarrow \bar{u}_T^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_+^\varepsilon,\ \nu \text{ est le coefficient de frottement} \\ \left|\sigma_T^\varepsilon\right| = \nu\left|\sigma_{33}^\varepsilon\right| \Rightarrow \exists \delta > 0, \bar{u}_T^\varepsilon = -\delta\sigma_T^\varepsilon,\ \sigma_T^\varepsilon = \left(\sigma_{\alpha 3}^\varepsilon\right) \text{ sur } \Gamma_+^\varepsilon \end{cases}$$

où: $n^\varepsilon = (n_i^\varepsilon)$ est la normale unitaire extérieure,

$u^\varepsilon = u^\varepsilon(x)$ représente le champ de déplacement,

$\sigma^\varepsilon = (\sigma_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon))$ le tenseur des contraintes et

$e^\varepsilon = (e_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon))$ est le tenseur des déformations linéarisées avec:

$$\begin{cases} \sigma_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon) = a_{ijkl} e_{kl}^\varepsilon(u^\varepsilon) \\ a_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kh} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jh} + \delta_{ih}\delta_{jk}),\ \text{les coefficients élastiques} \\ (\delta_{ij} \text{ est le symbole de Kroneker}) \\ e_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon) = \frac{1}{2}\left(\partial_i^\varepsilon u_j^\varepsilon + \partial_j^\varepsilon u_i^\varepsilon\right),\ \partial_i^\varepsilon = \frac{\partial}{\partial x_j^\varepsilon} \end{cases},$$

Remarque1:- σ_{33}^ε représente la densité de la force de pression et $\sigma_{\alpha 3}^\varepsilon$ les densités des forces de frottement.

3 Problème variationnel $(P^\varepsilon V)$

Théorème1:-

Si u^ε est solution de $(P^\varepsilon C)$ alors u^ε vérifie le problème $(P^\varepsilon V)$ suivant:

$$(P^\varepsilon V)\begin{cases} \text{Trouver } u^\varepsilon \in \overleftrightarrow{K}(\Omega^\varepsilon) \text{ tel que} \\ a^\varepsilon(u^\varepsilon, v^\varepsilon) = L^\varepsilon(v^\varepsilon) + \left\langle \sigma_{i3}^\varepsilon, \bar{v}_i^\varepsilon\right\rangle,\ \forall\ v^\varepsilon \in \overleftrightarrow{V}(\Omega^\varepsilon), \\ \left\langle \sigma_{33}^\varepsilon, \bar{v}_3^\varepsilon - \bar{u}_3^\varepsilon\right\rangle \geq 0,\ \forall\ v_3^\varepsilon \in K(\Omega^\varepsilon), \\ \left\langle \sigma_{\alpha 3}^\varepsilon, \bar{v}_\alpha^\varepsilon - \bar{u}_\alpha^\varepsilon\right\rangle + \left\langle \nu\left|\sigma_{33}^\varepsilon\right|, \left|\bar{v}_T^\varepsilon\right| - \left|\bar{u}_T^\varepsilon\right|\right\rangle \geq 0,\ \forall\ v_\alpha^\varepsilon \in V(\Omega^\varepsilon) \end{cases}$$

où

$$a^\varepsilon(u^\varepsilon, v^\varepsilon) = \int_{\Omega^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon)\partial_j^\varepsilon v_i^\varepsilon dx^\varepsilon$$

$$L^\varepsilon(v^\varepsilon) = \int_{\Omega^\varepsilon} f_i^\varepsilon v_i^\varepsilon dx^\varepsilon + \int_{\Gamma_-^\varepsilon} g_i^\varepsilon \underline{v_i^\varepsilon} d\Gamma^\varepsilon$$

$$\left\langle \sigma_{i3}^\varepsilon, \bar{v}_i^\varepsilon\right\rangle = \int_{\Gamma_+^\varepsilon} \sigma_{i3}^\varepsilon \bar{v}_i^\varepsilon d\Gamma^\varepsilon$$

Remarque2:- Pour u^ε assez régulier, les problèmes $(P^\varepsilon C)$ et $(P^\varepsilon V)$ sont équivalents

.

Remarque3:- Le problème $(P^\varepsilon V)$ est équivalent au problème suivant:

$$\begin{cases} \text{Trouver } u^\varepsilon \in \overleftrightarrow{K}(\Omega^\varepsilon) \text{ tel que :} \\ a^\varepsilon(u^\varepsilon, v^\varepsilon - u^\varepsilon) + J(v^\varepsilon) - J(u^\varepsilon) \geq L^\varepsilon(v^\varepsilon - u^\varepsilon), \forall v^\varepsilon \in \overleftrightarrow{K}(\Omega^\varepsilon), \\ \text{ou } J(v) = \int_{\Gamma_0^\varepsilon} \nu\left|\sigma_N\right|\left|v_T\right| d\Gamma^\varepsilon \end{cases}$$

qui admet une solution unique sous les conditions $f_i^\varepsilon \in L^2(\Omega^\varepsilon)$, $g_i^\varepsilon \in H^{-1/2}(\Gamma_-^\varepsilon)$ et ν assez petit. Cette solution réalise le minimum de la fonctionnelle:

$$F(v^\varepsilon) = \frac{1}{2}a^\varepsilon(v^\varepsilon, v^\varepsilon) + J(v^\varepsilon) - L^\varepsilon(v^\varepsilon), \forall v^\varepsilon \in \overleftrightarrow{K}(\Omega^\varepsilon).$$

4 Etude asymptotique

4.1 Mise à l'échelle des données

On utilise les principes généraux de l'analyse asymptotique formelle introduits par Ciarlet & Destuynder [7] . On définit l'ouvert fixe $\Omega=\omega\times]-1;+1[$ ainsi que les surfaces latérale $\Gamma_0=\gamma_0\times[-1,+1]$, supérieure $\Gamma_+=\omega\times\{+1\}$ et inférieure $\Gamma_-=\omega\times\{-1\}$.

On considère l'application bijective:

$$\chi^\varepsilon : \Omega\to\Omega^\varepsilon$$

$$x=(x_1,x_2,x_3)\to x^\varepsilon=(x_1^\varepsilon,x_2^\varepsilon,x_3^\varepsilon)/\, x_1^\varepsilon=x_1, x_2^\varepsilon=x_2, x_3^\varepsilon=\varepsilon x_3,$$

d'où $\partial_\alpha^\varepsilon=\partial_\alpha$ et $\partial_3^\varepsilon=\frac{1}{\varepsilon}\partial_3$.

Ainsi: $\chi^\varepsilon(\Omega)=\Omega^\varepsilon$, $\chi^\varepsilon(\Gamma_-)=\Gamma_-^\varepsilon$, $\chi^\varepsilon(\Gamma_+)=\Gamma_+^\varepsilon$ et $\chi^\varepsilon(\Gamma_0)=\Gamma_0^\varepsilon$.

Mise à l'échelle des déplacements: Pour tout u^ε défini sur Ω^ε on lui associe $u(\varepsilon)$ défini sur Ω via les relations:

$$\begin{cases} u_\alpha^\varepsilon\circ\chi^\varepsilon=\varepsilon^2 u_\alpha(\varepsilon), & u_3^\varepsilon\circ\chi^\varepsilon=\varepsilon u_3(\varepsilon) \\ v_\alpha^\varepsilon\circ\chi^\varepsilon=\varepsilon^2 v_\alpha(\varepsilon), & v_3^\varepsilon\circ\chi^\varepsilon=\varepsilon v_3(\varepsilon) \end{cases}$$

La condition de contact mise à l'échelle est définie pour un déplacement $v^\varepsilon\in\vec{V}(\Omega^\varepsilon)$ par: $\bar{v}_3\le d$

On note ainsi:

$$V(\Omega)=\{v\in H^1(\Omega)/\, v=0 \text{ sur } \Gamma_0\}$$
$$\vec{V}(\Omega)=V(\Omega)\times V(\Omega)\times V(\Omega)$$
$$K(\Omega)=\{v\in V(\Omega)/\ \bar{v}_3\le d \text{ sur } \Gamma_+\}$$
$$\vec{K}(\Omega)=V(\Omega)\times V(\Omega)\times K(\Omega)$$

Mise à l'échelle des forces:

$$\begin{cases} f_\alpha^\varepsilon\circ\chi^\varepsilon=\varepsilon^2 f_\alpha, & f_3^\varepsilon\circ\chi^\varepsilon=\varepsilon^3 f_3 \\ g_\alpha^\varepsilon\circ\chi^\varepsilon=\varepsilon^3 g_\alpha, & g_3^\varepsilon\circ\chi^\varepsilon=\varepsilon^4 g_3 \end{cases}$$

En appliquant les mises à l'échelle précédentes, on obtient:

$$L^\varepsilon(v^\varepsilon)=\varepsilon^5\ L(v) \text{ où } L(v)=\int_\Omega f_i v_i dx+\int_{\Gamma_-} g_i v_i d\Gamma$$

$$e_{\alpha\beta}^\varepsilon(u^\varepsilon)=\varepsilon^2 e_{\alpha\beta}(u(\varepsilon)),\ e_{\alpha3}^\varepsilon(u^\varepsilon)=\varepsilon e_{\alpha3}(u(\varepsilon)),\ e_{33}^\varepsilon(u^\varepsilon)=e_{33}(u(\varepsilon))$$

D'où:

$$\begin{cases} \sigma_{\alpha\beta}^\varepsilon=\sigma_{\alpha\beta}^\varepsilon(u^\varepsilon)=\varepsilon^2[\lambda e_{\gamma\gamma}(u(\varepsilon))\delta_{\alpha\beta}+2\mu e_{\alpha\beta}(u(\varepsilon))]+\lambda e_{33}(u(\varepsilon)) \\ \sigma_{\alpha3}^\varepsilon=\sigma_{\alpha3}^\varepsilon(u^\varepsilon)=\varepsilon 2\mu e_{\alpha3}(u(\varepsilon)) \\ \sigma_{33}^\varepsilon=\sigma_{33}^\varepsilon(u^\varepsilon)=(\lambda+2\mu)e_{33}(u(\varepsilon))+\varepsilon^2\lambda e_{\gamma\gamma}(u(\varepsilon)) \end{cases}$$

4.2 Mise à l'échelle du problème variationnel

Posons:

$$\sigma_{\alpha\beta}(\varepsilon)=\varepsilon^{-2}\sigma_{\alpha\beta}^\varepsilon(u^\varepsilon),\ \sigma_{\alpha3}(\varepsilon)=\varepsilon^{-3}\sigma_{\alpha3}^\varepsilon(u^\varepsilon),\ \sigma_{33}(\varepsilon)=\varepsilon^{-4}\sigma_{33}^\varepsilon(u^\varepsilon)$$

nous obtenons:

$$a^\varepsilon(u(\varepsilon),v)=\int_\Omega\sigma_{ij}(\varepsilon)\partial_j v_i dx$$

avec:

$$\begin{cases} \sigma_{\alpha\beta}(\varepsilon)=\lambda e_{\gamma\gamma}(u(\varepsilon))\delta_{\alpha\beta}+2\mu e_{\alpha\beta}(u(\varepsilon))+\varepsilon^{-2}\lambda e_{33}(u(\varepsilon))\delta_{\alpha\beta} \\ \sigma_{\alpha3}(\varepsilon)=\varepsilon^{-2}2\mu e_{\alpha3}(u(\varepsilon)) \\ \sigma_{33}(\varepsilon)=\varepsilon^{-4}(\lambda+2\mu)e_{33}(u(\varepsilon))+\varepsilon^{-2}\lambda e_{\gamma\gamma}(u(\varepsilon)) \end{cases}$$

Théorème2:- Si u^ε est solution du problème $(P^\varepsilon V)$ alors $u(\varepsilon)$ vérifie le problème mis à l'échelle $(P(\varepsilon)V)$ suivant:

$$(P(\varepsilon)V)\begin{cases} \text{Trouver } u(\varepsilon)\in\vec{K}(\Omega) \text{ tels que} \\ a^\varepsilon(u(\varepsilon),v)=L(v)+\langle\sigma_{i3}(\varepsilon),\bar{v}_i\rangle, \forall v\in\vec{V}(\Omega) \\ \langle\sigma_{33}(\varepsilon),\bar{v}_3-\bar{u}_3(\varepsilon)\rangle\ge0, \forall v_3\in K(\Omega) \\ \langle\sigma_{\alpha3}(\varepsilon),\bar{v}_\alpha-\bar{u}_\alpha(\varepsilon)\rangle+\varepsilon\langle\nu|\sigma_{33}(\varepsilon)|,|\bar{v}_T|-|\bar{u}_T(\varepsilon)|\rangle\ge0,\ \forall v_\alpha\in V(\Omega) \end{cases}$$

Ce problème admet au moins une solution $u(\varepsilon)$ sous les conditions $f_i\in L^2(\Omega)$, $g_i\in H^{-1/2}(\Gamma_-)$ et ν assez petit, cette solution réalise le minimum de la fonctionnelle:

$$F(v)=\frac{1}{2}a^\varepsilon(v,v)+J(v)-L(v), \forall v\in\vec{K}(\Omega).$$

4.3 Problème bidimensionnel

Nous postulons le développement asymptotique suivant:

$$u(\varepsilon)=u^0+\varepsilon u^1+\varepsilon^2u^2+\ldots \text{avec } u^q\in\vec{K}(\Omega),\ q\in\{0,1,2,..\}\quad(1)$$

Donc le développement du tenseur de déformation devient:

$$e_{ij}(\varepsilon)=e_{ij}(u^0)+\varepsilon e_{ij}(u^1)+\varepsilon^2 e_{ij}(u^2)+\ldots,\quad(2)$$

d'où:

$$\begin{cases} \sigma_{\alpha\beta}(\varepsilon)=\varepsilon^{-2}\sigma_{\alpha\beta}^{-2}+\varepsilon^{-1}\sigma_{\alpha\beta}^{-1}+\varepsilon^0\sigma_{\alpha\beta}^0+\ldots\ldots \\ \sigma_{\alpha3}(\varepsilon)=\varepsilon^{-2}\sigma_{\alpha3}^{-2}+\varepsilon^{-1}\sigma_{\alpha3}^{-1}+\varepsilon^0\sigma_{\alpha3}^0+\ldots\ldots \\ \sigma_{33}(\varepsilon)=\varepsilon^{-4}\sigma_{33}^{-4}+\varepsilon^{-3}\sigma_{33}^{-3}+\varepsilon^{-2}\sigma_{33}^{-2}+\varepsilon^{-1}\sigma_{33}^{-1}+\varepsilon^0\sigma_{33}^0+\ldots. \end{cases},$$

(3)

avec:

$$\begin{cases} \sigma_{\alpha\beta}^{-2}=\lambda\partial_3 u_3^0\delta_{\alpha\beta};\ \sigma_{\alpha\beta}^{-1}=\lambda\partial_3 u_3^1\delta_{\alpha\beta}; \\ \sigma_{\alpha\beta}^{0}=\lambda\partial_\gamma u_\gamma^0\delta_{\alpha\beta}+\mu\left(\partial_\alpha u_\beta^0+\partial_\beta u_\alpha^0\right)+\lambda\partial_3 u_3^2\delta_{\alpha\beta} \\ \sigma_{\alpha3}^{-2}=\mu\left(\partial_\alpha u_3^0+\partial_3 u_\alpha^0\right);\ \sigma_{\alpha3}^{-1}=\mu\left(\partial_\alpha u_3^1+\partial_3 u_\alpha^1\right);\ \sigma_{\alpha3}^{0}=\mu\left(\partial_\alpha u_3^2+\partial_3 u_\alpha^2\right) \\ \sigma_{33}^{-4}=(\lambda+2\mu)\partial_3 u_3^0;\ \sigma_{33}^{-3}=(\lambda+2\mu)\partial_3 u_3^1;\ \sigma_{33}^{-2}=(\lambda+2\mu)\partial_3 u_3^2+\lambda\partial_\gamma u_\gamma^0; \\ \sigma_{33}^{-1}=(\lambda+2\mu)\partial_3 u_3^3+\lambda\partial_\gamma u_\gamma^1;\ \sigma_{33}^{0}=(\lambda+2\mu)\partial_3 u_3^4+\lambda\partial_\gamma u_\gamma^2 \end{cases} \tag{4}$$

Lemme1: Si une fonction $\phi\in L^2(\Omega)$, vérifiant $\int_\Omega \phi\partial_3\psi dx=0$, pour tout $\psi\in\vec{V}(\Omega)$ tel que $\overline{\psi}=0$ sur Γ_+ (trace nulle sur Γ_+) $\cdot$ Alors, $\phi=0$ p.p sur Ω..

Preuve:- En effet, pour $\theta\in D(\Omega)$, posons

$$\psi(x_1,x_2,x_3)=-\int_{x_3}^{1}\theta(x_1,x_2,t)dt$$. Alors

$\psi\in\vec{V}(\Omega)$, $\overline{\psi}=0$ sur Γ_+ et $\partial_3\psi=\theta$. Ainsi: $\int_\Omega \phi\partial_3\psi dx=\int_\Omega \phi\theta dx=0 \quad \forall\theta\in D(\Omega)$ et $\phi\in L^2(\Omega)$, ceci implique que $\phi=0$ p.p sur Ω..

On introduit l'espace des déplacements de type Kirchhoff-Love V_{KL} défini par:

$$V_{KL}(\Omega)=\left\{v=(v_i)\in\vec{V}(\Omega)\ /\ e_{i3}(v)=0\right\} \tag{5}$$

Lemme2:- L'espace V_{KL} peut être défini par:

$$V_{KL}(\Omega)=\left\{\begin{matrix} v=(v_i)\in\left(H^1(\Omega)\right)^3/v_\alpha=\eta_\alpha-x_3\partial_\alpha\eta_3, v_3=\eta_3 \text{ telsque} \\ \eta_\alpha\in H_0^1(\omega), \eta_3\in H_0^2(\omega) \end{matrix}\right\}$$

De plus cet espace est isomorphe à l'espace:

$$V(\omega)=H_0^1(\omega)\times H_0^1(\omega)\times H_0^2(\omega).$$

Preuve:- Voir Ciarlet [8].

Théorème3:- Si $u(\varepsilon)$ définie par (1) est solution du problème variationnel $(P(\varepsilon)V)$ alors u^0 est solution du problème $(P_{KL}^0 V)$:

$$(P_{KL}^0 V)\begin{cases} \text{Trouver } u^0\in V_{KL}(\Omega)\cap\vec{K}(\Omega) \text{ telsque:} \\ \int_\Omega \sigma_{\alpha\beta}^0\partial_\beta v_\alpha dx = L(v)+\left\langle\sigma_{i3}^0,\bar{v}_i\right\rangle, \forall v\in V_{KL}(\Omega) \\ \left\langle\sigma_{33}^0,\bar{v}_3-\bar{u}_3^0\right\rangle\geq 0,\ \forall v_3\in K(\Omega) \\ \left\langle\sigma_{\alpha3}^0,\bar{v}_\alpha\right\rangle\geq 0, \forall v_\alpha\in V(\Omega) \end{cases}$$

Preuve : Voir [9].

On note $\overleftrightarrow{K}(\omega)=H_0^1(\omega)\times H_0^1(\omega)\times K(\omega)$ avec $K(\omega)=\left\{v\in H_0^2(\omega)/v\leq d\right\}$.

Remarque4:- D'après le lemme2, chercher u^0 dans $V_{KL}(\Omega)\cap\overleftrightarrow{K}(\Omega)$ revient à chercher (ξ_1,ξ_2,ξ_3) dans $\overleftrightarrow{K}(\omega)$. D'où on peut ramener notre problème tridimensionnel $(P_{KL}^0 V)$ à un problème bidimensionnel.

Théorème4:- Soit u^0 tel que $u_\alpha^0=\xi_\alpha-x_3\partial_\alpha\xi_3$, $u_3^0=\xi_3$ avec les fonctions ξ_i sont assez régulières. Si u^0 est solution du problème $P_{KL}^0.V$ alors ξ_α, ξ_3 vérifient le problème bidimensionnel (P^0B) suivant:

$$(P^0B)\begin{cases} \text{Trouver } \xi_\alpha\in H_0^1(\omega), \xi_3\in K(\omega) \text{ tels que} \\ k\Delta^2\xi_3=h_3^0+h_1^1+h_2^1+\sigma_{33}^0 \\ -\partial_\beta n_{\alpha\beta}=h_\alpha^0 \\ \left\langle\sigma_{33}^0,d-\xi_3\right\rangle=0, \sigma_{33}^0\leq 0 \text{ dans } H^{-2}(\omega) \\ \sigma_{\alpha3}^0=0 \text{ sur } \omega \end{cases}$$

où:

$$k=\frac{8}{3}\mu\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}, h_i^0=\int_{-1}^{1}f_i dx_3+g_i^-, h_i^1=\int_{-1}^{1}x_3\partial_i f_i dx_3-\partial_i g_i^-, g_i^-=g_i(x_1,x_2,-1)$$

$$n_{\alpha\beta}=\frac{4\lambda\mu}{\lambda+2\mu}e_{\gamma\gamma}(\xi)\delta_{\alpha\beta}+4\mu e_{\alpha\beta}(\xi)$$

Preuve : Voir [9].

5 Conclusion

Dans ce travail, on vient d'appliquer la méthode des développements asymptotiques formels à un problème de contact unilatéral avec frottement de Coulomb d'une plaque mince contre un obstacle rigide. Au premier ordre significatif, on obtient un problème unilatéral bidimensionnel sans frottement qui est le même résultat obtenu par Paumier [4],[5] avec la méthode de convergence. On remarque que dans le problème limite il ya une perte du terme frottement dû au fait que la force de frottement (en ε^3) est d'un ordre moins élevé que la force de pression de contact (en ε^4) et du fait que cette dernière contrôle la force de frottement. Afin de faire apparaître le terme de frottement il faut aller aux ordres suivants dans le développement asymptotique.

REFERENCES

[1] **G.Duvaut, J.L.Lions**, « Les inéquations en mécanique et en physique ». Dunod 1972.
[2] **G.Fichera**, « Problemi elastostatici con vincoli unilaterali: il problema di signorini con ambigue condizioni al contorno », Mem. Accad. Naz. Lincei Ser., VIII(7), 91-140 (1964).
[3] **H.B.Dhia**, « Equilibre d'une plaque mince élastique avec contact unilatéral et frottement de type Coulomb », C. R. Acad. Sci. Paris, Scr. I, 308 (1989) 293-296.
[4] **J.C. Paumier,** « Le problème de Signorini dans la théorie des plaques minces de Kirchhoff-Love », note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Série 1, t. 335, 2002, p. 567-570.
[5] **J.C.Paumier**, « Modélisation asymptotique d'un problème de plaque mince en contact unilatéral avec frottement sur un obstacle rigide », Rapport technique LMC-IMAG, juillet 2002
http : //www lmc. imag.fr/~pamier/signoplaque.ps

[6] **J.C.Paumier**, « Contact unilatéral des structures minces: modélisation, calcul et applications ». Annals of University of Craiova, Marth. Comp. Sci. Ser. Volume 30, 2003, Pages 177-187. Kikuchi, Oden, Contact problems in elasticity: a study of variaional inéqualities and finit element methods, SIAM, Studies in applied mathematics, 1988.
[7] **P.G.Ciarlet, P.Destuynder,** "A justification of the two dimensional plate model", J. Mécanique, 18 (1979) 315-344.
[8] **P.G.Ciarlet**, "Plates and Junctions in elastic multistrutures". Masson 1990.
[9] **A. Bensayah, "**Modélisation asymptotique du problème de Signorini avec frottement pour les plaques minces", Mémoire de Magister Université de Ouargla , 2006.