

PROBLEME INVERSE APPLIQUE AUX TURBOMACHINES ET AUX HELICES

N. SETTOU*, N. BOUZID**, S. SAOULI*

*Département de Génie Mécanique, Faculté des sciences de l'ingénieur, Université de Ouargla

E-mail : settou@hotmail.com

** Laboratoire de Physique des matériaux, Faculté des sciences de l'ingénieur, Université de Ouargla

Abstract

The paper presents an approach in perfect fluid model for the design of turbomachine blading or marine propeller by solving the inverse problem in which the boundary conditions are related to the bound vorticity distribution on the blades in order to produce the imposed deviation angle, with a given thickness distribution of the blade required by the structure analysis. In the case of turbomachine the 3D design is performed either by a two steps S2 (meridional flow)-S1 (blade to blade flow) approach. S2 step leads to the determination of axisymmetrical stream sheets as well as the approximate camber surface of the blades. In the S1 step, the inverse problem concerning blade to blade flow for turbomachines is carried out. The flow around the unshrouded propellers is rotationnal and tridimensionnal. An inverse computation method based on the model of inviscid and rotationnal fluid subdivided into two complementary steps (axisymmetric computation + 3D panel method) is proposed for design of the propellers.

Résumé

Une approche basée sur le calcul dynamique du rotationnel couplé au calcul de la vitesse est appliquée pour la conception des turbomachines ou des hélices marines ou aériennes. Dans le cas des turbomachines, l'écoulement 3D est analysé en deux étapes par l'approche quasi-tridimensionnelle S2 (écoulement méridien) -S1 (écoulement aube à aube). En première étape, les tourbillons liés et libres simulant les aubes sont étalés d'une façon homogène suivant le sens azimutal, l'écoulement devient axisymétrique et peut donc être analysé dans le plan méridien S2. En seconde étape, on analyse l'écoulement aube à aube supposé confiné dans chaque nappe de révolution définie par la première étape. Dans le cas d'une hélice marine ou aérienne non carénée l'écoulement est tridimensionnel et rotationnel. Une méthode de calcul inverse basée sur les modèles de fluide parfait et rotationnel, partagée en deux parties complémentaires (calcul axisymétrique + calcul 3D) est proposée en vue de concevoir des hélices.

Introduction

Pour définir la géométrie des aubages, les méthodes inverses conventionnelles prennent, jusqu'à présent, la distribution de vitesse sur les deux faces de l'aube comme données initiales. En appliquant cette approche, on perd le contrôle de l'épaisseur de l'aube. D'autres approches, voulant remédier à ce problème de fermeture des profils d'aubes, imposent cette fois-ci, la distribution de vitesse uniquement sur l'une des faces de l'aube. Mais il s'avère qu'en procédant ainsi, elles sont incapables de contrôler la déviation de l'écoulement liée au niveau d'échange énergétique souhaité.

L'approche proposée dans ce travail prend comme données initiales la loi d'épaisseur de l'aube exigée par la structure et la distribution du moment cinétique. Il faut toutefois noter que l'imposition d'une répartition de charge optimisée produit une distribution de pression statique sur l'aube permettant d'éviter soit la formation de la cavitation, soit le décollement de la couche limite au régime nominal. De plus, il est possible d'incorporer un schéma de pertes moyennant l'imposition d'une valeur plausible du rendement de chaque organe, valeur pouvant provenir bien évidemment de mesures expérimentales ou à partir de résultats d'analyse simulant l'écoulement réel.

L'écoulement tridimensionnel est analysé en deux étapes par l'approche tridimensionnelle S2-S1 proposée

par Wu pour la conception des turbomachines [1] et par un couplage S2 suivi d'un calcul tridimensionnel par la méthode des singularités pour les hélices non carénées [2].

Calcul axisymétrique

Dans cette première étape, on mène un calcul axisymétrique en étalant suivant le sens azimutal les tourbillons liés et libres que doivent engendrer les pales, et dans lequel le rotationnel provenant de l'infini amont est pris en compte. Ce calcul permet de déterminer la géométrie approximative des pales et la contraction et l'étirement des nappes tourbillonnaires du sillage dans le cas des hélices, et permet de déterminer la géométrie approchée du squelette et les surfaces de courant axisymétriques dans le cas des turbomachines. Dans cette étape, la résolution du champ est faite par la fonction de courant. En utilisant des coordonnées curvilignes épousant les frontières du domaine, et en se basant sur la formulation tensorielle, on écrit l'équation discrétisée régissant le rotationnel, et ceci en prenant la circulation de la vitesse méridienne sur un circuit fermé élémentaire du maillage, on obtient l'équation régissant la variation du flux rotationnel traversant ce circuit considéré. Ce type de formulation permet d'avoir un contrôle rigoureux sur la variation dynamique du flux rotationnel dans le champ [6].

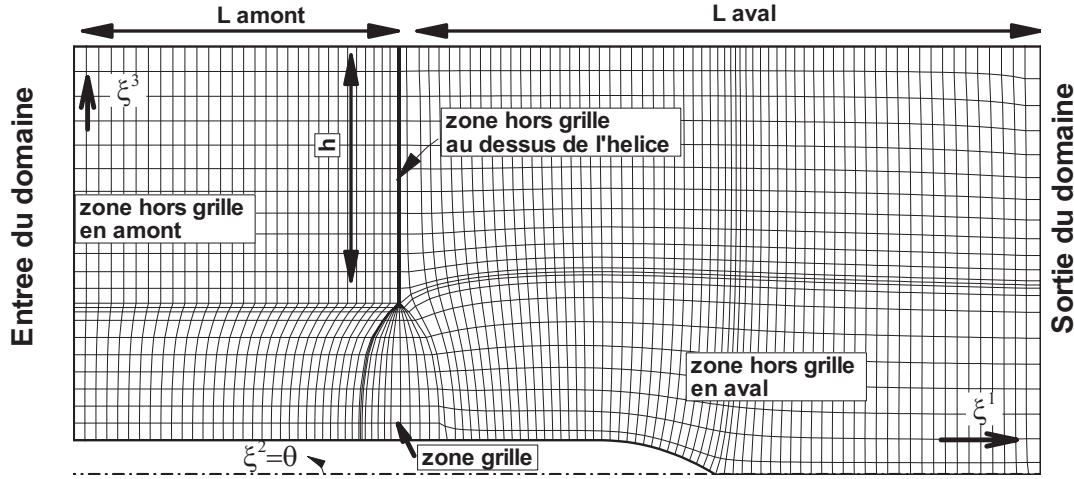


Figure 1 : Maillage et domaine de calcul pour une hélice fonctionnant derrière un corps axisymétrique

Formulation

Les équations régissant le problème sont écrites dans un système de coordonnées curvilignes. Ce dernier est choisi de manière à épouser les frontières du domaine de calcul, ce qui permet d'avoir plus de précision dans la résolution numérique. Le fluide est considéré non visqueux, l'écoulement est supposé incompressible et permanent.

D'autre part, l'hypothèse d'axisymétrie nous permet d'écrire : $(\partial(\cdot)/\partial\theta = 0)$. La figure 1 montre le maillage dans le plan méridien utilisé calculé par la méthode des singularités. Un maillage curviligne épousant les frontières du domaine du calcul ξ^1, ξ^3 est créée avec $\xi^2 = \theta$, la vitesse méridienne donnée par :

$\mathbf{U} = V^1 \mathbf{e}_1 + V^3 \mathbf{e}_3 = W^1 \mathbf{e}_1 + W^3 \mathbf{e}_3$. L'équation de continuité peut s'écrire :

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial \sqrt{g} U^1}{\partial \xi^1} + \frac{\partial \sqrt{g} U^3}{\partial \xi^3} \right] = 0 \quad (1)$$

où \sqrt{g} représente le tenseur métrique modifié due à la striction de la section de passage du fluide, qui compte tenu de la conservation du débit, entraîne une augmentation de la vitesse méridienne. Par conséquent \sqrt{g} représente le volume élémentaire du cube : $(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{e}_2$, dans l'espace hors grille $|\mathbf{e}_2| = \sqrt{g_{22}} = r$, par contre dans l'espace grille l'épaisseur des pales réduit la section de passage, si on représente par $r \delta \theta_e$ l'épaisseur d'une section mesurée dans la direction périphérique et par N_b le nombre de pales de l'hélice, le terme modifié \tilde{g}_{22} du tenseur métrique sera donnée par :

$$\tilde{g}_{22} = \left(1 - \frac{N_b \delta \theta_e}{2\pi} \right)^2 r^2$$

représente donc le volume élémentaire avec effet de striction utilisé seulement dans l'équation de continuité.

En utilisant la fonction de courant ψ pour représenter le champ de vitesses, on pourra écrire :

$$U^1 = \frac{1}{\rho \sqrt{g}} \frac{\partial \psi}{\partial \xi^3} \quad \text{et} \quad U^3 = -\frac{1}{\rho \sqrt{g}} \frac{\partial \psi}{\partial \xi^1} \quad (2)$$

L'équation gouvernant la fonction de courant ψ est obtenue à partir de la définition de la composante azimutale du rotationnel Ω^2 , qui s'écrit :

$$\frac{\partial U_1}{\partial \xi^3} - \frac{\partial U_3}{\partial \xi^1} = \sqrt{g} \Omega^2$$

où U_1 et U_3 sont les composantes covariantes de la vitesse s'exprimant à partir de la fonction de courant ψ , en utilisant les relations $U_m = g_{mn} U^n$ et la relation 2.

L'équilibre dynamique du rotationnel dans le sens radial permet d'avoir la composante azimutale du rotationnel. Soient H l'enthalpie et I la rothalpie données par :

$$H = \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} = \frac{p_t}{\rho} \quad \text{et} \quad I = \frac{p}{\rho} + \frac{W^2}{2} - \frac{\omega^2 r^2}{2} = H + \omega(V_\theta r)$$

L'équation de quantité de mouvement peut s'écrire :

$$\begin{cases} \Omega \times \mathbf{W} = -\nabla I + \frac{\mathbf{F}_b}{\rho} + \frac{\mathbf{F}_d}{\rho} & \text{rotor} \\ \Omega \times \mathbf{V} = -\nabla H + \frac{\mathbf{F}_b}{\rho} + \frac{\mathbf{F}_d}{\rho} & \text{stator} \end{cases}$$

Dans le cas réel, la présence des pales va créer une dépression sur l'extrados et une surpression sur l'intrados de chaque pale. Cette différence de pression se traduit dans l'espace inter-pales par un gradient de pression dans la direction azimutale qui donnera la déviation nécessaire à l'écoulement. Un schéma axisymétrique ne va retenir que le niveau de pression moyenné dans l'espace inter-pales, et il est alors bien clair qu'un gradient azimutal ne peut plus exister dans ce schéma. Il est nécessaire de traduire l'effort exercé par les pales sur le fluide par l'introduction d'une force de

pales qui devient une force volumique \mathbf{F}_b/ρ . Cette force est supposé dirigée suivant la direction normale au squelette des pales. L'approche inverse est développée dans le cadre de fluide non visqueux afin de pouvoir utiliser la notion de tourbillons liés pour schématiser les pales. Il est donc nécessaire d'introduire un schéma de pertes où l'on traduit les effets visqueux sur les pales par une force volumique de dissipation \mathbf{F}_d/ρ selon l'approche suggéré par Horlock [5], qui consiste à écrire que \mathbf{F}_d/ρ est un vecteur colinéaire et de sens opposé au vecteur vitesse relatif \mathbf{W} .

$$\frac{\mathbf{F}_d}{\rho} = -C_f \frac{|\mathbf{U}|^2}{d \cos \beta} \frac{\mathbf{U}}{|\mathbf{U}|}$$

où $d=r(2\pi/N_b - \delta\theta_e)$, β l'angle d'inclinaison du squelette et C_f un coefficient de frottement constant et ajustable en fonction du nombre de Reynolds de l'écoulement et de la rugosité des pales.

La répartition du moment cinétique $V_{\theta}r$ dans une nappe de courant est liée à la circulation produite par les tourbillons liés engendrés par les sections de pales. En effet, si on considère un circuit fermé autour d'une section de pale clé, et compte tenu de la périodicité des circuits inter-pales, la circulation de la vitesse absolue \mathbf{V} prise sur ce circuit fermé se réduisant aux contributions prises seulement à l'entrée et à la sortie de l'écoulement.

$$\frac{\partial}{\partial \xi^3} \left(\frac{g_{11}}{\rho \sqrt{g}} \frac{\partial \psi}{\partial \xi^3} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi^1} \left(\frac{g_{33}}{\rho \sqrt{g}} \frac{\partial \psi}{\partial \xi^1} \right) - \frac{\partial}{\partial \xi^3} \left(\frac{g_{13}}{\rho \sqrt{g}} \frac{\partial \psi}{\partial \xi^1} \right) - \frac{\partial}{\partial \xi^1} \left(\frac{g_{31}}{\rho \sqrt{g}} \frac{\partial \psi}{\partial \xi^3} \right) = \sqrt{g} \Omega^2$$

Conditions aux limites

Les conditions relatives au problème méridien sont les suivantes :

- à l'infini amont, l'écoulement est supposé à entrée axiale, le profil de vitesse est *a priori* connu. Le débit massique et l'enthalpie sont calculés, ceci nous conduira à imposer une condition de type Dirichlet sur la fonction de courant ψ ;
- le moyeu et la limite supérieure du domaine de calcul seront des lignes de courant ($\psi = cte$);
- à l'infini aval, l'écoulement est supposé redevenu axial ($\partial \psi / \partial n = 0$, où \mathbf{n} est la direction de la normale extérieure à la section de sortie de l'écoulement);
- au bord d'attaque, on impose une condition d'adaptation, c'est-à-dire que la vitesse sur l'extrados V^+ y est égale à celle sur l'intrados V^- , ceci se traduit par une pente nulle de la fonction de répartition de charge ;
- au bord de fuite, on impose une condition de Kutta-Joukowski qui revient à y imposer une égalité des pressions extrados et intrados, ce qui se traduit par la relation $\mathbf{W} \cdot \nabla(V_{\theta}r) = 0$.
- une condition de glissement sur les pales ($\mathbf{W} \cdot \mathbf{n} = 0$, où \mathbf{n} est la normale au squelette de la

La projection de l'équation de mouvement suivant \mathbf{e}_3 traduit l'équilibre dynamique du rotationnel suivant le sens radial, donnée par :

$$\begin{aligned} \sqrt{g} \Omega^2 &= \frac{1}{W^1} \frac{\partial I}{\partial \xi^3} - \frac{F_{d_3}}{\rho} + \frac{n_1}{n_2} \frac{\partial(V_{\theta}r)}{\partial \xi^3} - \frac{n_3}{n_2} \frac{\partial(V_{\theta}r)}{\partial \xi^1} && \text{rotor} \\ \sqrt{g} \Omega^2 &= \frac{1}{V^1} \frac{\partial H}{\partial \xi^3} - \frac{F_{d_3}}{\rho} + \frac{n_1}{n_2} \frac{\partial(V_{\theta}r)}{\partial \xi^3} - \frac{n_3}{n_2} \frac{\partial(V_{\theta}r)}{\partial \xi^1} && \text{stator} \\ \sqrt{g} \Omega^2 &= \frac{1}{V^1} \left(\frac{\partial H}{\partial \xi^3} - \frac{(V_{\theta}r)}{r^2} \frac{\partial(V_{\theta}r)}{\partial \xi^3} \right) && \text{hors grille} \end{aligned}$$

L'incorporation du schéma de pertes conduit à une dégradation de la rothalpie dans la zone grille. En prenant le produit scalaire de l'équation de mouvement par la vitesse \mathbf{W} , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial m} &= (1-\eta) \omega \frac{\partial(V_{\theta}r)}{\partial m} && \text{rotor} \\ \frac{\partial H}{\partial m} &= (\eta-1) \omega \frac{\partial(V_{\theta}r)}{\partial m} && \text{stator} \\ \frac{\partial H}{\partial m} &= 0 && \text{free space} \end{aligned}$$

Ces équations permettent la mise à jour de l'enthalpie H et de la rothalpie I au cours du calcul itératif. En écrivant $\nabla \times \mathbf{U} = \Omega^2 \mathbf{e}_2$, nous obtenons l'équation gouvernant la fonction de courant ψ :

pale), cette condition permet de définir la géométrie des pales.

Écoulement aube à aube, approche S1 :

L'écoulement aube à aube est analysé pour chaque nappe de courant axisymétrique dans le but de déterminer la géométrie finale des aubages ainsi que la distribution des pressions. Au début du calcul, le contour présumé de l'aube est crée à partir du squelette obtenu par le calcul S2 et ceci en utilisant la distribution d'épaisseur imposée. La transformation conforme $(m, \theta) \Rightarrow (x_1, x_2)$ donnée par :

$$\begin{cases} x_1 = r_0 \int_{m_0}^m \frac{dm}{r} \\ x_2 = r_0 (\theta - \theta_0) \end{cases}$$

transforme l'écoulement aube à aube pour les nappes de courant axisymétrique en un écoulement en cascade 2D dans le plan (x_1, x_2) . Un système curviligne basé sur le maillage constitué par les équipotentielles $\xi_1 = c n s t$ et les lignes de courant $\xi_2 = c n s t$ d'un écoulement 2D autour d'une cascade de profils est crée en utilisant la méthode des singularités [3]. Dans ce système, l'équation de continuité devient :

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial \xi^1} (\rho \sqrt{g} U^1) + \frac{\partial}{\partial \xi^2} (\rho \sqrt{g} U^2) \right] = 0 \quad (6)$$

où U_i représente les composantes covariantes de la vitesse absolue \mathbf{V} pour le stator et la vitesse relative \mathbf{W} pour le rotor et

$$\sqrt{g} = \frac{D(x_1, x_2)}{D(\xi^1, \xi^2)} \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \tau$$

où τ représente l'épaisseur locale de la nappe de courant. En introduisant la fonction de courant ψ avec :

$$\begin{aligned} - \left[\frac{\partial}{\partial \xi^1} \left(\frac{g_{22}}{\rho \sqrt{g}} \frac{\partial \psi}{\partial \xi^1} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left(\frac{g_{11}}{\rho \sqrt{g}} \frac{\partial \psi}{\partial \xi^2} \right) \right] = \\ - \frac{\partial g_{21} W^1}{\partial \xi^1} + \frac{\partial g_{12} W^2}{\partial \xi^2} + 2 \sqrt{g} \frac{\omega r}{\tau} \frac{d \log r}{dm} \end{aligned}$$

Conditions aux limites pour le problème inverse :

$$\begin{cases} \text{conservation de flux de pénétration :} \\ \text{charge imposée:} \end{cases} \quad \begin{cases} [\psi]^+ = 0 \\ W d\xi_1 - \omega r d\xi_2 = \Gamma dt \end{cases}$$

La solution du problème inverse nous conduit à la détermination du flux de pénétration sur le contour des aubes. La correction de l'inclinaison du squelette $\delta\vartheta$ est donné par :

$$\delta\vartheta = 0.5 \left[\tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{g} W_2}{\tau W_1} \right)^+ + \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{g} W_2}{\tau W_1} \right)^- \right]$$

La méthode décrite dans cet article concernant le couplage S2-S1 a été testé sur une configuration industrielle. Cette dernière repose sur une géométrie

$$\begin{cases} U^1 = \frac{1}{\rho \sqrt{g}} \frac{\partial \psi}{\partial \xi^2} \\ U^2 = -\frac{1}{\rho \sqrt{g}} \frac{\partial \psi}{\partial \xi^1} \end{cases}$$

la relation (6) est satisfaite. A partir de l'équation de mouvement, nous pouvons montrer que les tourbillons libres sont tangentiels aux nappes de courant axisymétriques. L'équation gouvernant la fonction de courant de l'écoulement aube à aube est déduite de cette condition. Pour l'écoulement relatif autour des aubages d'un rotor, nous pouvons écrire :

méridienne d'une turbopompe à Hydrogène liquide d'un moteur cryotechnique de propulsion. La figure 2 montre la géométrie de l'inducteur ayant 6 aubes dans une vue en perspective, obtenue par la méthode quasi-tridimensionnelle. La figure 3 présente la distribution de pression obtenue par le calcul S2-S1 pour les deux faces extrados et intrados des aubes. Une fonction de charge soigneusement choisie nous permet d'éviter tout phénomène de cavitation et la répartition du coefficient de pression sur l'extrados reste supérieure au nombre de cavitation. La figure 4 présente une comparaison des squelettes dans le plan transformé (x^1, x^2) de la roue obtenus par l'approche axisymétrique S2 et l'approche aube à aube S1. Les résultats obtenus des calculs S2 et S1 sont similaires, mais non identiques. Le besoin d'un calcul S1 pour l'obtention de la définition de la géométrie finale est confirmé.

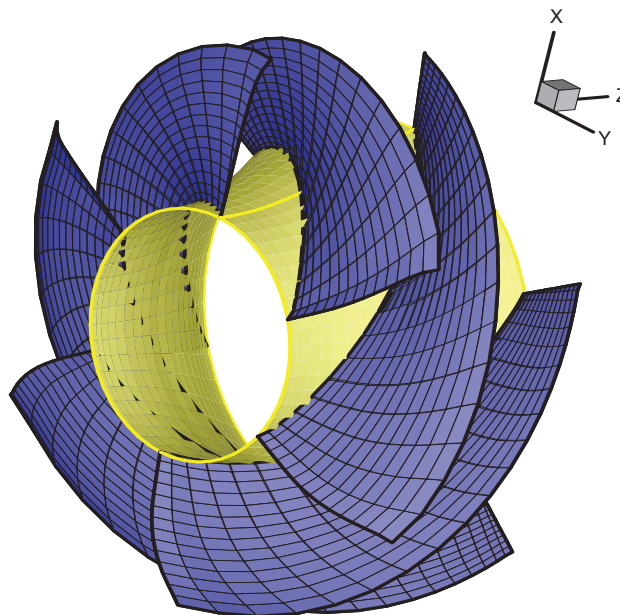


Figure 2 : Géométrie des aubages de l'inducteur

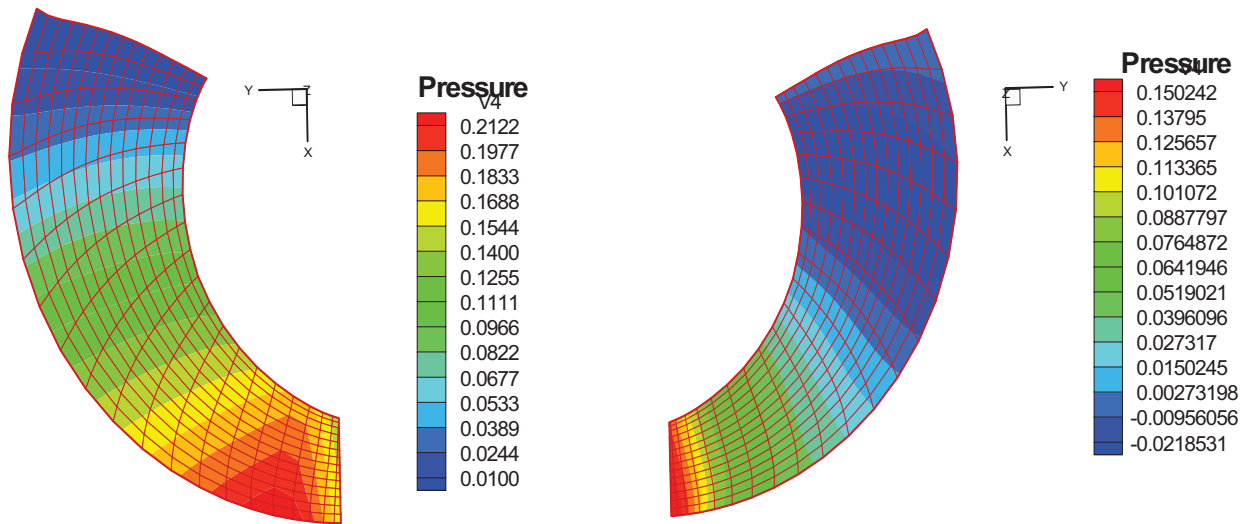


Figure 3 : Distribution des pressions sur les deux faces

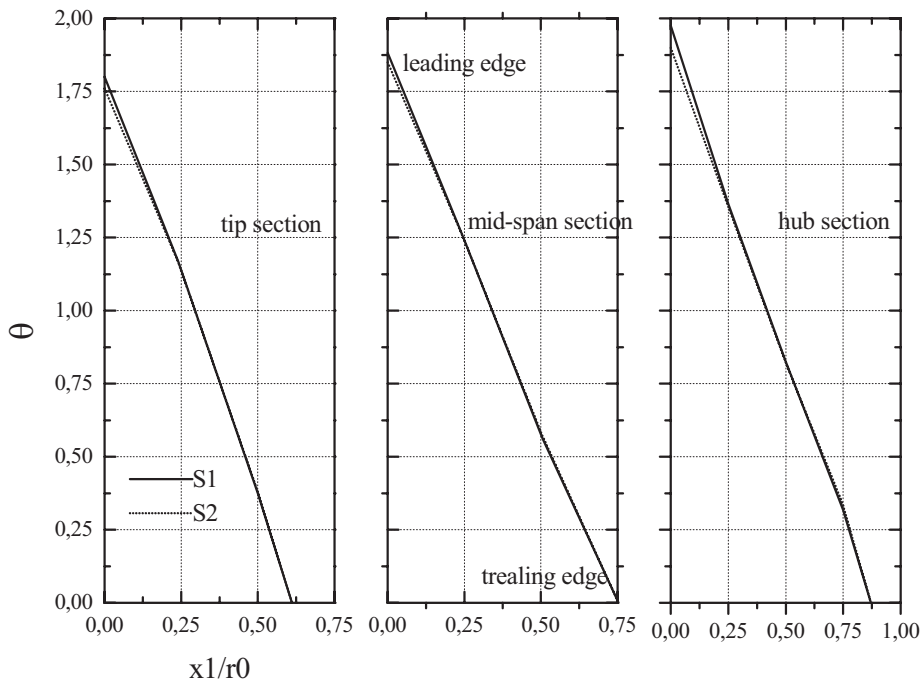


Figure 4 : Géométrie du squelette des aubages

Application au calcul d'hélices :

La détermination de la géométrie des pales d'une hélice en résolvant le problème inverse a été effectué jusqu'à ces jours par la formulation linéarisée [7],[8],[9]; afin de pouvoir prendre en compte l'effet d'épaisseur sans approximation, la méthode inverse actuellement développée est basée sur la théorie non linéaire. Dans cette méthode l'effet de l'état non uniforme du courant provenant de l'amont et de l'effet de la contraction et de l'étirement du sillage des tourbillons libres sont pris en compte. Pour avoir un problème inverse bien posé avec des conditions limites appliquées sur la surface des pales, il convient de schématiser les pales par des tourbillons liés, ainsi on introduit la notion d'association des éléments facettes sur les deux faces de la pale. Lorsque la répartition de la charge sur la pale est imposée, on peut déduire la répartition des tourbillons liés que la pale doit engendrer. On traduit cette répartition par une loi sur la différence de potentiel que

l'on impose aux éléments associés. D'autre part lorsque la géométrie de la pale n'est pas encore correctement définie, on doit admettre qu'il y a une pénétration de flux à travers la pale, on impose que le flux pénétrant les éléments associés est conservatif. Avec des données aux limites ainsi établies, le problème du champ est bien posé et admet une solution même au moment où la géométrie des pales n'est pas encore correcte. La détection du flux pénétrant va conduire à la rectification du squelette de la pale. Le calcul itératif conduit à la détermination géométrique lorsque la pénétration se trouve complètement éliminée et la condition de glissement sur les pales est respectée [2]. Afin de pouvoir utiliser la notion de tourbillon lié, la méthode est développée dans le cadre de fluide non visqueux avec l'incorporation d'un schéma de dissipation lié au coefficient de frottement pour simuler la perte. Si l'écoulement abordant l'hélice est axisymétrique et non uniforme, l'écoulement autour de l'hélice est donc

tridimensionnel et rotationnel. Pour traiter cet écoulement, on se propose d'effectuer le calcul en deux étapes. En première étape, on étale les tourbillons liés et libres engendrés par les pales dans le sens azimutal, l'écoulement devient axisymétrique et peut être analysé par un calcul méridien dans lequel l'évolution dynamique du rotationnel est pris en compte. Ce calcul en présence de l'hélice conduit à la détermination d'une part de la modification des tourbillons toriques liés au courant abordant, d'autre part la contraction et l'étirement du sillage tourbillonnaire. Ce calcul détermine également la géométrie des pales en première approximation. Dans la seconde étape, on traite l'écoulement tridimensionnel en admettant que le champ de vitesses est constitué par une partie rotationnelle (écoulement de base regroupant l'écoulement provenant de l'amont et les vitesses induites par le sillage éloigné de l'hélice), et une autre partie irrotationnelle induite par les tourbillons liés et libres du sillage proche de l'hélice. La partie rotationnelle déterminée par le calcul méridien est figée, elle reste axisymétrique. La méthode de singularités à répartition discrétisée conduit à la résolution et à la détermination de la géométrie définitive de la pale.

Calcul 3D singularités

En seconde étape, on ramène les tourbillons étalés précédemment sur les pales. On décompose le champ en une partie rotationnelle et une autre irrotationnelle, la partie rotationnelle vient du calcul méridien S_2 ; la partie irrotationnelle est caractérisée par un potentiel de vitesses induit par une distribution de sources et de doublets à axes normaux répartis sur l'extrados et l'intrados des pales, et une distribution de doublets à axes normaux sur le sillage proche. La géométrie des pales et des nappes tourbillonnaires étant assurée initialement par la première étape du calcul.

Formulation

Le champ de vitesses est constitué par deux parties, un écoulement de base axisymétrique déterminé par la première étape et désigné par V_{base} , et un écoulement irrotationnel induit par les singularités surfaciques réparties sur l'hélice et le sillage proche [7],[8]. La deuxième partie du champ de vitesses peut être définie par un potentiel scalaire des vitesses ϕ . Le champ total est donnée par :

$$V = V_{base} + \nabla \phi$$

L'équation de continuité implique que ϕ doit satisfaire à l'équation de Laplace ($\nabla^2 \phi = 0$).

Conditions aux limites

L'écoulement autour de l'hélice est calculé en fonction de l'imposition de la loi d'épaisseur normale à la pale, la répartition des tourbillons liés suivant l'envergure désignée par Γ , la loi de la charge le long de la corde désignée par f , ainsi que l'écoulement infini amont rotationnel dont le champ de vitesse est désigné par V_{base} . La géométrie de la pale est déterminée par un calcul itératif. La condition de charge et la condition de conservation de flux de pénétration sont considérées

comme conditions aux limites concernant le champ de l'écoulement.

- Condition de charge : On considère la répartition de charge en écrivant que la différence du potentiel des vitesses et la circulation produite par V_{base} prise entre deux points de contrôle P^+ et P^- d'éléments associés d'extrados et d'intrados, est une fonction de la corde s et du rayon r ,

$$(\phi_+ - \phi_-) + \int_{P^-}^{P^+} V_{base} \cdot dl = \Gamma(r) f(s)$$

- Condition de conservation de flux de pénétration: La condition de glissement ne peut être respectée que si le profil, après un certain nombre de cycles de calcul itératif, évolue vers sa forme définitive. Pour chaque cycle, il conviendrait d'admettre qu'il y a une pénétration de flux à travers les facettes de la pale. On se propose d'imposer, pour chaque couple d'éléments associés d'extrados et d'intrados, que le flux de pénétration se conserve, on peut donc écrire:

$$\left\{ (\phi_n d\Sigma)^+ + (\phi_n d\Sigma)^- \right\} + \left\{ (W_{base} \cdot n d\Sigma)^+ + (W_{base} \cdot n d\Sigma)^- \right\} = 0$$

où la première partie de l'équation représente le flux produit par les tourbillons liés et libres, et l'autre partie représente le flux produit par l'écoulement de base donnée par :

$$W_{base} = V_{base} + \omega \times r$$

- Condition sur le sillage: Comme le champ de tourbillons est conservatif, la condition sur le sillage se traduit par :

$$\mu_w(k) = \mu_{ext}(k) - \mu_{int}(k)$$

avec μ_{ext} et μ_{int} , les intensités de doublets

associés au bord de fuite, correspondant respectivement à l'extrados et à l'intrados, et ceci pour chaque section k donnée de la pale.

- Condition de glissement sur le moyeu: Sur la surface du moyeu, la condition de glissement implique que la vitesse relative est tangentielle à celui-ci, soit : $W \cdot n = 0$, n est la normale à un élément de surface pris sur le moyeu.

Expression matricielle des équations et mode de résolution

En appliquant les conditions aux limites traduites par les équations précédentes aux points de contrôle des facettes, celles-ci se traduisent finalement par un système d'équations linéaires dont les inconnues sont les densités de sources et de tourbillons sur la pale représentées par le vecteur $[\sigma]$. Le système linéaire d'équations s'écrit sous la forme matricielle suivante : $[A][\sigma] = [S]$. Afin de calculer les vecteurs inconnus $[\sigma_k]$ relatifs à l'ensemble des bandes (pale+sillage et moyeu), on utilise une procédure de résolution par blocs, un bloc correspond à une matrice $[A_{kk}]$ pour une bande k donnée. L'algorithme itératif utilisé sur les blocs est du type Gauss-Seidel. Supposant connus les vecteurs

$[\sigma]^{(n-1)}$ à l'itération (n-1), le calcul d'une nouvelle valeur $[\sigma]^{(n)}$ s'effectue en résolvant le système suivant:

$$[A_{kk} [\sigma_k]^{(n)} = [S_k] - \sum_{m \neq k} [A_{km} [\sigma_m]^{(n-1)}$$

La solution complète est obtenue en satisfaisant le système ci-dessus pour les différentes bandes y compris celles du moyeu. La résolution de ce système s'effectue lui aussi par la méthode itérative du type Gauss-Seidel.

Rectification de la forme du squelette

La condition de pénétration est définie de sorte que l'on puisse se référer à la valeur non nulle du flux pour rectifier la forme du squelette avant de passer au cycle de calcul suivant. Grâce à la notion d'association des éléments à l'extrados et à l'intrados avec l'élément squelette, on peut utiliser la relation suivante pour définir la modification $\delta\Theta$ liée aux éléments facettes du squelette :

$$\delta\Theta b = 0.5 \left[\tan^{-1} \left(\frac{|W_n|}{\sqrt{W_{t1}^2 + W_{t2}^2}} \right)^+ b_+ + \tan^{-1} \left(\frac{|W_n|}{\sqrt{W_{t1}^2 + W_{t2}^2}} \right)^- b_- \right]$$

où W_{t1} et W_{t2} les deux composantes tangentielles de la vitesse. $\delta\Theta$ est l'angle de correction pour une facette squelette, et calculé dans le plan perpendiculaire à b et orienté par ce même vecteur, b_{\pm} définis par :

$$b^{\pm} = \frac{W^{\pm} \times n^{\pm}}{|W^{\pm} \times n^{\pm}|}$$

Soit u_r un vecteur unitaire perpendiculaire au plan (X^1, X^2) défini par

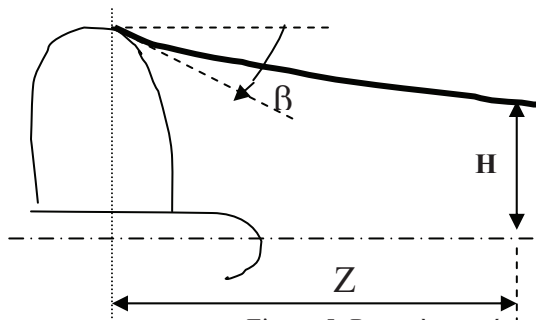


Figure 5: Paramètres géométriques définissant le sillage tourbillonnaire

: $u_r = (\delta m u_r - \delta r u_z) / \sqrt{(\delta m)^2 + (\delta r)^2}$, où m est l'abscisse curviligne. En projetant l'angle $\delta\Theta b$ sur u_r , on obtient l'angle de correction $\delta\mathcal{G}$ dans le plan (X^1, X^2) , soit : $\delta\mathcal{G} = \delta\Theta b \cdot u_r$. Dans le calcul méridien, les valeurs de $X_{i,k}^2$ ont été calculés par intégration à partir des valeurs $X_{ref,k}^2$ prises sur une colonne de référence et qui doivent rester inchangées dans la rectification de la forme du squelette. On distingue deux cas pour la correction de la valeur de X^2 suivant que la facette se trouve en amont ou en aval de la colonne de référence.

$$(X_{i\pm 1}^2 - X_i^2)^{(n+1)} = (X_{i\pm 1}^1 - X_i^1) \tan(\nu_i^{(n)} + \delta\nu_i)$$

Conclusion :

L'approche non linéaire développée pour traiter le problème inverse nous a permis de prendre en compte la contraction et l'étirement des nappes tourbillonnaires du sillage; la convection et la dissipation de tourbillons toriques provenant de l'écoulement amont. Cette approche présente plusieurs avantages qui résident essentiellement sur l'imposition correcte des conditions aux limites, et peuvent se résumer comme suit : (i) respect de la loi d'épaisseur des pales exigée par la structure, (ii) contrôle de la déviation de l'écoulement liée au niveau d'échange énergétique souhaité, (iii) optimisation du tracé des pales.

K_Q	$\beta_c(^{\circ})$	Z_{tw}	r_w
0.0503	9.67	2.56	0.905
0.0526	10.42	3.07	0.897
0.0547	15.28	3.29	0.874

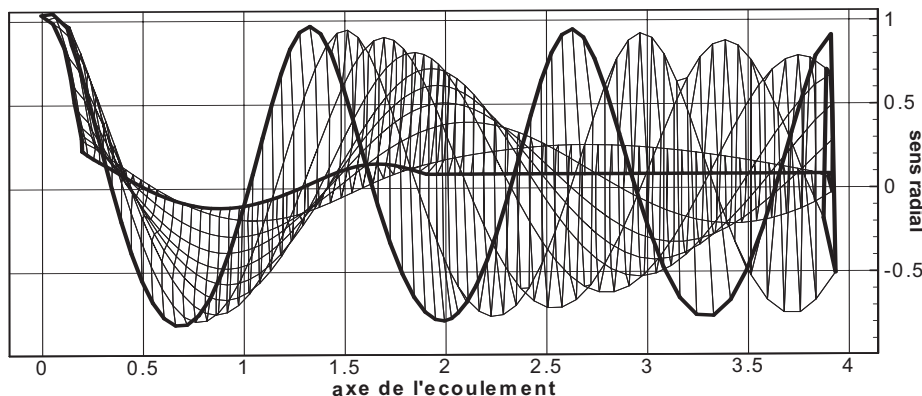


Figure 6 : Sillage tourbillonnaire d'une pale clé de l'hélice

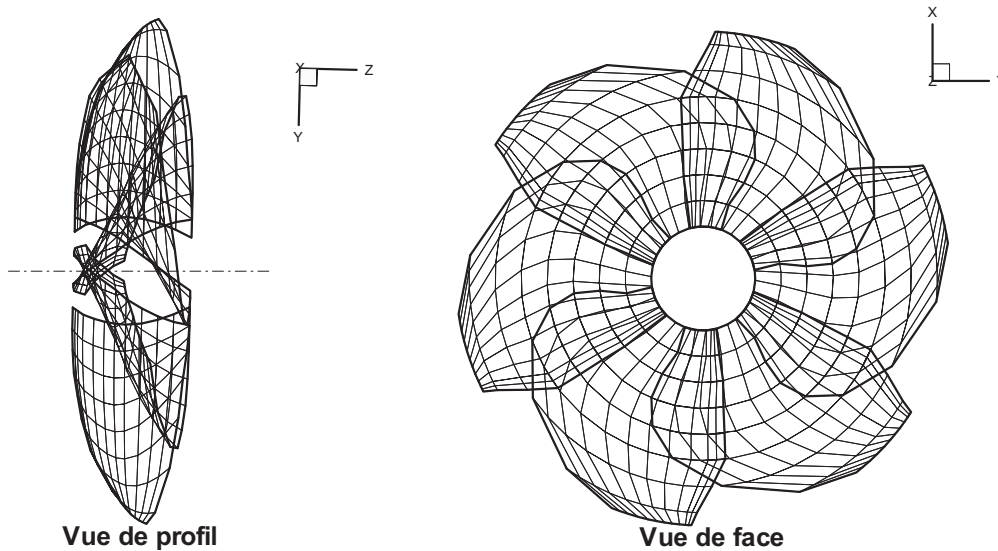


Figure 7 : Géométrie de l'hélice

Nomenclature

- V = vitesse absolue
- W = vitesse relative
- Ω = rotationnel de la vitesse absolue
- ψ = fonction de courant
- x, y, z = système de coordonnées cartésiennes
- z, θ, r = système de coordonnées cylindriques
- ξ^1, ξ^2, ξ^3 = système de coordonnées curvilignes bâti dans le plan méridien
- e_1, e_2, e_3 = base covariante du système curviligne
- e^1, e^2, e^3 = base contravariante du système curviligne
- ω = vitesse de rotation des pales ou des aubes
- U_1, U_2, U_3 = composantes covariantes de la vitesse absolue ou relative
- p = pression statique
- ρ = masse volumique
- H = enthalpie totale
- I = rothalpie, $H + \omega V_\theta r$
- F_b = force des pales ou des aubes
- F_d = force de dissipation
- C_f = coefficient de frottement
- g_{ij} = éléments du tenseur métrique
- g = déterminant du tenseur métrique
- η = rendement
- K_Q = coefficient du couple moteur, $Q / (\rho n^2 D^5)$
- K_T = coefficient de propulsion, $T / (\rho n^2 D^4)$
- R = rayon de référence
- n = propeller rotational speed, revolutions per unit time
- J_A = advance coefficient, V_A / nD
- n** = vector normal to blade camber surface
- N_b = number of blades
- Γ = circulation around blade section

Références:

[1]WU C.H., A general theory of three dimensional flow in subsonic and supersonic turbomachines

of axial, radial and mixed flow type, NACA TN 2604(1952).

[2]SETTOU N., LUU T.S., *Contribution à la conception des hélices marines*, Quatrièmes Journées de l'Hydrodynamique, 1-3 Mars 1993, Nantes, France.

[3]BORGES J.E., "A Three-dimensional Inverse Method for Turbomachinery: Part 1 Theory", *Journal of Turbomachinery*, ASME, (1994).

[4]LIN R.C. and PENG G.Y., "An Advanced Three-Dimensional Inverse Model for the Design of Hydraulic Machinery Runner", ASME Proc., FED-Vol. 245, FEDSM98-4867, pp.1-7.

[5]HORLOCK J.H., An entropy production in adiabatic flow in Turbomachines, J. of Basic Eng. Tr. ASME serie **D**, (1984).

[6]LUU T.S., VINEY B., BENCHERIF L., *The inverse Problem using S2-S1 Approach for the Design of the Turbomachine Blading*, International Symposium on "Recent Advances in Compressor and Turbine Aerothermodynamics", France, Nov. 24-25, 1992.

[7]KERWIN J.E., LEE C.S., *Prediction of Steady and Unsteady Marine Propeller Performance by Numerical Lifting Surface Theory*, Trans. SNAME, Vol. **86**, 1978.

[8]GREELY D.S., KERWIN J.E., *Numerical Methods for Propeller Design and Analysis in Steady Flow*, Trans. SNAME, Vol. 90, pp. 415-453, 1982

[9]MURRAY M.T., *Propeller Design and Analysis by Lifting Surface Theory*, International Shipbuilding Progress, Vol. **14**, n° 150, 1967.

[10] LOUKAKIS T.A., A new theory for the wake of marine propellers. MIT Departement of Ocean Engineering Report 71-1, Cambridge, Mass., May 1971.