ETUDE DE QUELQUES PROBLEMES AUX LIMITES GOUVERNES PAR LE SYSTEME DE LAME AFFECTE D'UN POIDS DANS UN POLYGONE

M.S. SAID

ملخص: ندرس في هذا العمل عدة مسائل قطع ناقصية تتحكم فيها جملة لامي المزودة بواسطة د الة وزن و ذلك داخل ساحة مفتوحة و مضلعة. .سنثبت إن دالة الوزن هذه تلعب دورا مهما في دراسة وجود الحلول لهذه المسائل. ان وجود الحل لمثل هذه المسائل في الحالة العادية يتعلق بزوايا المضلع حيث انه من اجل بعض القيم لهذه الزوايا فان الحل لا يكون موجود. لكن اذا زودنا مؤثر لامي بدالة وزن مختارة جيدا فان وجود الحل لا يكون متعلق بزوايا المضلع . هذه الدراسة متكاملة و هي تشمل الدراسة العادية.

Abstract : In this work, we study some problems controlled by the system of Lame disturbed by a weight function, in an open limited plan, with polygonal border. It will be shown that this weight function plays a very important part in the study of the existence of the solution of these problems. In the traditional case, the existence of the solution of these problems depends on the openings of the angles of the polygon, but if we affect the operator of Lame by a suitably selected weight function, one will show that the solution does not depend on the angles of the polygon. This study is more original and it covers the traditional case

Résumé : Dans ce travail, on étudie quelques problèmes aux limites gouvernés par le système de Lamé affecté d' une fonction poids, dans un ouvert plan borné, à frontière polygonale. On montrera que cette fonction poids jouent un rôle très important dans l'étude de l'existence de la solution de ces problèmes. Dans le cas classique, la solution de ces problèmes dépend des ouvertures des angles du polygone, par contre si on perturbe l'opérateur de Lamé par une fonction poids convenablement choisie, on montrera que l'existence de la solution ne dépend plus des angles, la solution sera dans un espace fonctionnel avec poids plus riche. Cette étude est plus originale et elle recouvre le cas classique.

1 INTRODUCTION

On considère le problème aux limites suivant:

$$\begin{cases} LU = \Delta U + \nu_0 grad(divU) = f \ dans\, \Omega \\ BU = 0 \quad sur\, \Gamma = \partial\Omega \end{cases} \qquad (1)$$

Où Ω est un ouvert plan de frontière polygonale, $f = (f_1, f_2)$ est donnée dans $(L^2(\Omega))^2$ B est un opérateur différentiel d'ordre 0 ou 1, défini sur la frontière de Ω, et $U = (u, v)$.

On commence par étudier le problème (1), dans un secteur plan infini d'ouverture φ et de sommet S, (S étant un des sommets du polygone Ω), par translation et par rotation on peut toujours ramener le sommet S de ce secteur à l'origine, on note par Ω_φ ce secteur , il est défini par:

$$\Omega_\varphi = \{(r,\theta) \ / \ r > 0 \ \ et \ \ 0 < \theta < \varphi < 2\pi\}$$

Par partition de l'unité de Ω, l'étude du problème sera ensuite étendue au polygone tout entier.

Vu les singularités qui se reproduisent au voisinage du sommet de Ω_φ , on multipliel'opérateur L par une fonction poids $\lambda(r)$, qui est une fonction de classe $C_0^\infty(\overline{\Omega}_\varphi)$ et ne s'annule pas dans Ω_φ , et vaut :

$$\lambda(r) = \begin{cases} r \quad si \quad r < r_0 \\ \delta(r) = (\delta_1(r), \delta_2(r)) \quad si \quad r_0 \le r < r_1 \\ 1 \quad si \quad r \ge r_1 \end{cases}$$

r_0 *et* r_1 des constantes strictement positives fixées. On utilisera cette fonction poids pour absorber les singularités qui se présentent aux sommets. Après multiplication par $\lambda(r)$, le problème (1), devient:

$$\begin{cases} \lambda(r)\, LU = \lambda(r)(\Delta U + \nu_0 grad(divU)) = \lambda(r)\, f = g \quad dans\, \Omega_\varphi \\ BU = 0 \quad sur\, \Gamma = \partial\Omega_\varphi \end{cases} \qquad (2)$$

Au voisinage du sommet de Ω_φ , c'est à dire au voisinage de l'origine, le problème (2) s'écrit:

$$\begin{cases} \{rLU = r[\Delta U + \nu_0 grad(divU)\ ] = rf = g \quad dans\, \Omega_\varphi \\ BU = 0 \quad sur\, \Gamma = \partial\Omega_\varphi \end{cases} \qquad (3)$$

En coordonnées polaires le problème (3) s'écrit:

$$\begin{cases} r\Delta u - \dfrac{2+\nu_0}{r}\dfrac{\partial v}{\partial\theta} - \dfrac{1+\nu_0}{r}u + \nu_0\left[\dfrac{\partial^2 v}{\partial r\partial\theta} + r\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{\partial u}{\partial r}\right] = g_1 \ dans\, \Omega_\varphi \\ r\Delta v + \dfrac{2+\nu_0}{r}\dfrac{\partial u}{\partial\theta} - \dfrac{1}{r}v + \nu_0\left[\dfrac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}\right] = g_2 \ dans\, \Omega_\varphi \\ Bu = Bv = 0 \quad sur\, \Gamma_\varphi \end{cases}$$

On cherche ensuite la solution du problème (3) dans un espace fonctionnel qu'on note $(E(\Omega_\varphi))^2$ et tel que l'espace $E(\Omega_\varphi)$ est défini par:

$$E(\Omega_\varphi) = \{u \in H^1(\Omega_\varphi),\ telles\, que\ r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\,;\ \frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}\,;\ \frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\ sont\, dans\ L^2(\Omega_\varphi)\ \}$$

où les fonctions u sont à support compact dans $\overline{\Omega}_\varphi$.

On muni l'espace $E(\Omega_\varphi)$ de la norme suivante, qui en fait un espace de Banach:

$$\|u\|_{E(\Omega\varphi)} = \|u\|_{H^1(\Omega\varphi)} + \sum_{|\alpha|=2} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega\varphi)}$$

Le symbole D désigne l'opérateur de dérivation par rapport aux variables r et η, (η étant le vecteur normal à la frontière Γ_φ et dirigé vers l' extérieure de celle-ci), à savoir $\frac{\partial}{\partial\eta} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}$

L'espace $E(\Omega_\varphi)$ vérifie les immersions suivantes:

$$H^2(\Omega_\varphi) \subset E(\Omega_\varphi) \subset H^1(\Omega_\varphi) \quad [\,]$$

On pose $E_0(\Omega_\varphi) = E(\Omega_\varphi) \cap H_0^1(\Omega_\varphi)$ et on vérifie que l'injection de l'espace $E_0(\Omega_\varphi)$ dans l'espace $H^1(\Omega_\varphi)$ est compacte. [ ]

Etude de l'existence de la solution

Pour étudier l'existence de la solution du problème (3) dans $(E(\Omega_\varphi))^2$, on appliquera le lemme de Peetre [8] suivant, aux espaces : $(E(\Omega_\varphi))^2$; $(L^2(\Omega_\varphi))^2$; $(H^1(\Omega_\varphi))^2$.

Lemme 3.1.1 (de Peetre).

Soient X, Y, Z trois espaces de Banach réflexifs tels que $X \subset Y$ avec injection compacte, et soit P un opérateur linéaire continu de X dans Z, alors les conditions suivantes sont équivalentes

a) l'image de P est fermée dans Z et le noyau de P est de dimension finie

b) il existe une constante C > 0 qui vérifie:

$$\|U\|_X \le C\,\{\,\|PU\|_Z + \|U\|_Y\,\}$$

Il est clair que toute les hypothèses du lemme de Peetre sont satisfaites, on a ici *P=L*,

L étant un opérateur linéaire continu de $(E(\Omega_\varphi))^2$ dans l'espace $(L^2(\Omega_\varphi))^2$.

Donc pour montrer que le problème (3) admet au moins une solution dans $(E(\Omega_\varphi))^2$; et que son noyau est de dimension finie, il est équivalent à établir l' inégalité suivante:

Il existe une constante *C>0,* telle que:

$$\|U\|_{(E(\Omega\varphi))^2} \le C\left\{\|r\Delta U\|_{(L(\Omega\varphi))^2} + \|U\|\right\}_{(H^2(\Omega\varphi))^2}$$

(4)

Pour ceci, on va appliquer au problème (3), une transformation de Mellin réduite, définie par:

$$h \to \tilde{h} = \int_0^\infty h(r)\, r^\sigma \frac{dr}{r} \qquad \text{avec}$$

$$\sigma = 1 + i\nu; \quad \nu \in IR \qquad (5)$$

On obtient donc:

$$\begin{cases} A(\sigma)\dfrac{\partial^2\tilde{U}}{\partial\theta^2} + B(\sigma)\dfrac{\partial\tilde{U}}{\partial\theta} + C(\sigma)\tilde{U} = \tilde{g} \\ \tilde{U}(\sigma,0) = \tilde{U}(\sigma,\varphi) = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

Avec $A(\sigma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+\nu_0 \end{bmatrix}$

$$B(\sigma) = \begin{bmatrix} 0 & -(2+\nu_0\sigma) \\ -(2+\nu_0\sigma) & 0 \end{bmatrix}$$

Et $C(\sigma) = \begin{bmatrix} (1+\nu_0)(\sigma^2 - 2\sigma) & 0 \\ 0 & (\sigma^2 - 2\sigma) \end{bmatrix}$

Le problème (6) est un problème différentiel ordinaire du second ordre par rapport à la variable θ et dépendant d'un paramètre complexe σ. Ce problème admet une fonction de Green , $K(r,\alpha,\theta) = (K_1(r,\alpha,\theta), K_2(r,\alpha,\theta))$ dont la trasformée de Mellin est $\tilde{K}(\sigma,\alpha,\theta)$. La solution du problème (6) s'écrit:

$$\tilde{u}(\sigma,\theta) = \int_0^\varphi \tilde{K}(\sigma,\alpha,\theta)\,\tilde{g}(\sigma,\alpha)\,d\alpha \qquad (7)$$

En appliquant la transformation de Mellin inverse à l'équation (7), et comme la fonction de Green $K(r,\alpha,\theta)$ est bornée [ ], donc il existe une constante *M > 0* telle que :

$$\|u\|_{(H^2(\Omega\varphi))^2} \le M\|g\|_{(L^2(\Omega\varphi))^2}$$

et comme l'injection de l'espace $H^2(\Omega_\varphi)$ dans $E(\Omega_\varphi)$ est continue [7], donc on en déduit qu'il existe une constante $M_2 > 0$ telle que:

$$\|u\|_{(E(\Omega\varphi))^2} \le M_2\|u\|_{(H^2(\Omega\varphi))^2}$$

d'où il existe une constante $M_3 > 0$; telle que $\|u\|_{(E(\Omega\varphi))^2} \le M_3\|g\|_{(L^2(\Omega\varphi))^2}$

et l'inégalité (4) est ainsi établie. Donc d'après le lemme de Peetre l'image de l'opérateur rL est fermée dans $(L^2(\Omega_\varphi))^2$ et son noyau est de dimension finie, d'où le problème (3) admet au moins une solution dans l'espace $(E(\Omega_\varphi))^2$.

Etude de l'unicité de la solution

Pour ceci , on va étudier le noyau du problème (3), comme *r* ne s'annule pas dans Ω_φ, les éléments du noyau du problème (3) sont donc solution du problème:

$$\begin{cases} \Delta U + \nu_0 \, grad(divU) = 0 \quad dans\, \Omega_\varphi \\ BU = 0 \quad sur\, \Gamma = \partial\Omega_\varphi \end{cases} \qquad (7)$$

en cherchant la solution du problème (7) sous la forme: $U = (u, v) = r^\alpha w(\theta) = r^\alpha (w_1(\theta), w_2(\theta))$, le problème (7) s'écrit:

$$\begin{cases} w_1''(\theta) + (1+\nu_0)(\alpha^2 - 1) w_1(\theta) + \rho_0 w_2'(\theta) = 0 \\ (1+\nu_0) w_2''(\theta) + (\alpha^2 - 1) w_2(\theta) + \rho_{1_0} w_1'(\theta) = 0 \\ Bw_1(0) = Bw_2(0) = 0 \\ Bw_1(\varphi) = Bw_2(\varphi) = 0 \end{cases} \qquad (8)$$

Le problème (8) est un problème différentiel ordinaire du second ordre par rapport à la variable θ et dépendant d'un paramètre complexe α. La solution générale du problème (8), s'écrit:

$$w(\theta) = \begin{cases} C_1\rho_0 \cos(\alpha-1)\theta + C_2\rho_1 \sin(\alpha-1)\theta - C_3 \sin(\alpha+1)\theta - C_4 \cos(\alpha+1)\theta \\ -C_1\rho_1 \sin(\alpha-1)\theta + C_2\rho_1 \cos(\alpha-1)\theta - C_3 \cos(\alpha+1)\theta - C_4 \sin(\alpha+1)\theta \end{cases}$$

avec $\rho_0 = \nu_0(\alpha-1) - 2 \; et \quad \rho_1 = \nu_0(\alpha+1) + 2$

On détermine les constantes $C_1; C_2; C_3 \; et \; C_4$ à l'aide des conditions aux limites contenues dans le problème (8), le détérminant du système linéaire ainsi obtenu est proportionnel à l'expression:

$$\sin^2 \alpha\varphi - \left(\frac{\alpha}{3-4\nu}\right)^2 \sin^2\varphi \quad où \quad \nu_0 = (1-2\nu)^{-1} \; \alpha \in C \quad et\, \alpha \notin \{0; 1, -1\}$$

pour la condition de Dirichlet, respectivement à l'expression:

$$\sin^2 \alpha\varphi - \alpha^2 \sin^2\varphi \quad où \alpha \in C \quad et\, \alpha \notin \{0; 1; -1\}$$

Pour la condition de Neumann. D'où la proposition suivante:

Proposition 3.2.2

Le problème (8) détermine U non nulle lorsque α est solution de l'équation suivante:

$$\sin^2 \alpha\varphi - \left(\frac{\alpha}{3-4\nu}\right)^2 \sin^2\varphi = 0 \quad avec \quad \alpha \in C \quad et\, \alpha \notin (0,1,-1) \qquad (9)$$

Pour la condition de Dirichlet, respectivement proportionnel à l'équation;

$$\sin^2 \alpha\varphi - \alpha^2 \sin^2\varphi = 0 \quad avec \quad \alpha \in C \quad et\, \alpha \notin (0,1,-1) \qquad (10)$$

pour la condition de Neumann.

Ce qui veut dire que le comportement singulier des solutions du problème (3), est gouverné par l'équation transcendante (9 ou (10) selon la condition aux limites utilisée.

R Lozi [9], a élaboré un algorithme de résolution numérique pour ce type d'équations, les solutions de cette équation déterminent les solutions singulières du problème (3).

Dans Merouani [11], on trouve un tableau qui récapitule suivant les valeurs de φ , et suivant les conditions aux limites, les termes les plus singuliers d'un développement de toute solution variationnelle du problème (10), au voisinage du sommet de Ωφ, pour plus de détails c.f. [11].

5 EXTENSION DE L'ETUDE DU PROBLEME AU POLYGONE ENTIER

Dans ce paragraphe on se propose d'étendre l'étude du problème (6), déjà faite dans un secteur plan infini Ω_φ d'ouverture φ au polygone Ω tout entier.

Pour étendre cette étude au polygone tout entier, on utilisera une partition de l'unité de celui-ci

Soit donc $(w_k)_{k=1,\dots,N}$ une partition de l'unité de classe C^∞ du polygone Ω, qui isole chacun des sommets S_k k=1..,N de Ω, S_k étant le sommet de l'angle de Ω d'ouverture φ_k k=1,…,N

On a donc U = $\sum_{k=1}^{N} w_k U = \sum_{k=1}^{N} U_k$

Le problème (4) initial défini dans Ω s'écrit:

$$\begin{cases} \lambda(r) L(\sum_{k=1}^{N} U_k) = g \; dans\, \Omega \\ B(\sum_{k=1}^{N} U_k) = 0 \; sur\, \Gamma \end{cases}$$

B étant un opérateur différentiel d'ordre 0 ou 1 , défini sur Γ. Au voisinage des sommets de Ω , ce problème devient:

$$\begin{cases} rL(\sum_{k=1}^{N} U_k) = g \; dans \bigcup_{k=1}^{N} S_k \\ B(\sum_{k=1}^{N} U_k) = 0 \; sur \bigcup_{k=1}^{N} \Gamma_{Sk} \end{cases}$$

En isolant chaque sommet S_k, du polygone on obtient le problème définie au voisinage de chaque sommet S_k du polygone Ω , est défini comme suit:

$$\begin{cases} rLU_k = g_k \ dans\, \Omega_{\varphi_k} \\ BU_k = 0 \ sur\, \Gamma_{\varphi_k} \end{cases}$$

Les fonctions U_k sont à support compact.

En chaque sommet S_k de Ω, la fonction de troncature w_k est définie dans $\Omega_{\varphi k}$ telle qu'au voisinage du sommet S_k elle vaut 1, et est nulle en dehors de $\Omega_{\varphi k}$.

Les fonctions de troncatures sont en outre à supports disjoints.

On a $1_\Omega - \sum_{k=1}^{N} w_k = X$ est une fonction de troncature et , $XU=V$, est une fonction définie dans un ouvert régulier O (qui est en fait le polygone Ω privés des voisinages de ses sommets) v vérifie le problème suivant:

$$\begin{cases} LV = f \ dans\, O \\ BV = 0 \ sur\, \Gamma_0 \end{cases} \qquad (11)$$

Où Γ_0 est la frontière de l'ouvert régulier O, et f est la fonction qui représente le second membre du problème initial (1). Pour ce problème il n'est pas nécessaire de l'affecter d'un poids puisqu'il est défini sur un ouvert régulier (d'ailleurs la fonction poids vaut 1 à ce niveau)

L'étude du problème (11) est totalement classique, et les résultats de cette étude sont connus, donc pour ce problème , les inégalités à priori sont vérifiées.

L'ouvert régulier O étant défini par

$O = \Omega - \bigcup_{k=1}^{N} V_{S_k}$ $avec V_{S_k}$ est un voisinage du sommet S_k de Ω.

Au voisinage de chaque sommet S_k, $k = 1,..,N$; et N étant le nombre de sommets du polygone, (c'est à dire dans $\Omega_{\varphi k}^{(1)}$ $k = 1, N$, on a l'inégalité à priori suivante est vérifiée:

$$\|U_k\|_{(E(\Omega\varphi k)^2} \leq C_{\varphi k} \left(\|rLU_k\|_{(L^2(\Omega\varphi))^2} + \|U_k\|_{(H^1(\Omega\varphi))^2} \right)$$

et dans

$A_k = \{(r,\theta) \ / \ r_0 \leq r \leq r_1, \ 0 < \theta < \varphi_k < 2\pi\}$, on a l'inégalité suivante est vérifiée:

$$\|U_k\|_{(E(A_k))^2} \leq C_{\varphi k} \left(\|\delta(r) U_k\|_{(L(^2 A_k))^2} + \|U_k\|_{(H^1(A_k))^2} \right)$$

et dans O qui est un ouvert régulier , on a l'inégalité suivante est vérifiée

$$\|U\|_{(E(O))^2} \leq C_{\varphi k} \left(\|LU\|_{(L^2(O))^2} + \|U\|_{(H(O))^2} \right)$$

En ajoutant toutes ces inégalités et en prenant la plus grande des constantes, on obtient une inégalité valable sur tout le polygone. On aura donc une inégalité du type:

$$\|\Psi\|_{(E(\Omega))^2} \leq C_{\max} \left(\|\lambda(r)\Psi\|_{(L^2(\Omega))^2} + \|\Psi\|_{(H^1(\Omega))^2} \right)$$

où C_{max} est la plus grande des constantes relatives à toutes les inégalités, et:

$$\Psi = \begin{cases} U & dans \quad \Omega - O \\ V & dans \quad O \end{cases}$$

REFERENCES

[1] AGMON S, *Lectures on elliptic boundary value problems*, Van Nostrand Mathematical studies, n.2 Princeton , 1965

[4] DAUGE .M *Problème de Dirichlet pour le Laplacien* Séminaire des E.D.P. Nantes 1982-1983

[5] H.REINHARD *équations aux dérivées partielles* DUNOD Paris 1991chap 8

[6] GRISVARD .P *Alternative de Fredholm relative au problème de Dirichlet dans un polygone ou un polyèdre* , Boll. Un. Mat. Italie,(4) . 5 1972 pp132-164

[7] GRISVARD .P *Singularités des solutions du problème de Stokes dans un polygone* Séminaire d'analyse fonctionnelle IREM , Nice 1979

[8] LIONS ,J.L et MAGENES. E, *Problèmes aux limites non homogènes et applications* Tome 1 Dunod 1968

[9] LOZI R, *Résultats numériques de régularité du problème de Stockes et du Laplacien itéré dans un polyg*one, Journal of Applied Mathematics, R.A.I.R.O, Nairobi , vol (12) 1978 pp267

[10] MERIGOT .M *Etude du problème Δ u = f dans un polygone plan, inégalités à priori* Boll Un,. Mat. Italie(4) 10 1974 pp577

[11] MEROUANI .B *Solutions Singulières du système de l'élasticité dans un polygone pour différentes conditions aux limites* Maghreb. Math Rev, . Vol 5, Nos 1&2, 1996, pp 95-112

[12 SAID .M.S Etude du problème adjoint du Laplacien avec poids dans un polygone thèse de Magister , université de Constantine Algérie 1993

[13] SAID .M.S MEROUANI B *Role des poids dans 1'étude de quelques problèmes aux limites gouvérnes par le sysème de Lamé av dans un polygone* Rev Roum des Sc Tech série Mec Appl. Volume 47 pp janv 2002)

[12 SAID .M.S Etude du problème adjoint du Laplacien avec poids dans un polygone thèse de Magister , université de Constantine Algérie 1993

[12 SAID .M.S Etude du problème adjoint du Laplacien avec poids dans un polygone thèse de Magister , université de Constantine Algérie 1993