REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE KASDI MERBEH OUARGLA

FACULTE DES SCIENCES ET SCIENCES DE L'INGENIEUR
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUE ET INFORMATIQUE

MEMOIRE

Présenté par

TEDJANI HADJ AMMAR

Pour l'obtention du diplôme de **Magister en Mathématiques** option

Analyse Numérique et EDP

Thème

ETUDE THEORIQUE ET NUMERIQUE D'UN PROBLEME DE CONTACT SANS FROTTEMENT ENTRE DEUX CORPS ELASTIQUES

Soutenu le 19/09/2006 devant le jury composé de :

Djamel Ahmed Chacha	**MC**	**Univ. K. Merbah**	**Ouargla**	**Président**
Boubakeur Merouani	**Prof**	**Univ. F.Abbas**	**Sétif**	**Examinateur**
Saïd Mohamed Saïd	**MC**	**Univ. K. Merbah**	**Ouargla**	**Examinateur**
Benyettou Ben Abderrahmane	**MC**	**Univ. A.Telidji**	**Laghouat**	**Encadreur**
Brahim Nouiri	**MACC**	**Univ. A.Telidji**	**Laghouat**	**Co-encadreur**

DEDICACES

Je dédie ce travail à . . .

Mes Parents

Ma Femme

Mon fils $\mathcal{R}$iad

Mon fils $\mathcal{R}$abie

Ma fille $\mathcal{R}$atiba

Ma fille $\mathcal{R}$ania

Mes sœurs et mes frères

REMERCIEMENT

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à mon encadreur Docteur BENABDERRAHMANE Benyattou maître de conférence à l'université de Laghouat qui m'a proposé le sujet de ce travail son aide et ses conseils ont été pour moi un soutien très précieux et pour m'avoir guidée le long de mon travail et avoir mis à ma disposition sa documentation . Qu'il trouve ici l'expression de mon respect et mes remerciements les plus profonds.

De même, je remercie vivement mon co-encadreur Monsieur NOUIRI Brahim chargé de cours à l'université de Laghouat pour son aide , on le remercie aussi à ses directions et ses conseils.

Je remercie le Docteur CHACHA Djamel Ahmed maître de conférence à l'université de Ouargla pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de ce mémoire . .

Mes remerciements vont également à Docteur MEROUANI Boubakeur, professeur à l'université de Sétif, SAID Mohamed Saïd maître de conférence à l'université de Ouargla, d'avoir accepter de juger mon travail.

Je tiens aussi à manifester toute ma gratitude envers tous les membres du conseil scientifique .

Mes remerciements aussi à toutes les personnes ayant contribué de prés ou de loin à l'élaboration de ce mémoire.

Table des matières

Introduction générale

La modélisation des problèmes de contact entre deux corps déformables, dépend essentiellement des propriétés mécaniques des matériaux considéré ainsi que des conditions aux limites de contact . Parmi les différents type des problèmes considérés, on peut citer les problèmes de contact bilatéral ou unilatéral avec ou sans frottement pour des corps élastiques ou viscoplastiques.

L'accumulation des données expérimentales montrent les limitations des lois classique de frottement aussi bien du point de vue mathématique que mécanique . Des formulations variationnelles et des résultats d'existence et d'unicité on été obtenus par S. Drabla [3] dans le cas d'un problème de contact sans frottement entre un corps élastique et une base rigide, et par Patrick Hild et Patrick Laborde [1], pour un problème de contact sans frottement entre deux corps déformables en utilisant la méthode des éléments finis quadratique.

Notre but dans ce mémoire est d'étudier théoriquement et numériquement un problème de contact sans frottement entre deux corps déformable, ce problème connu sous le nom de *problème de Signiorin*.

Notre objet ici est l'étude de ce même problème pour des matériaux ayant une loi de comportement élastique non linéaire de la forme :

$$\sigma^{\ell} = F^{\ell}\left(\varepsilon\left(u^{\ell}\right)\right)$$

Où σ^{ℓ}, u^{ℓ} et $\varepsilon(u^{\ell})$ représentent respectivement le champ des contraintes, le champ des déplacements et le tenseur des déformations linéarisé, on suppose que la frontière de Ω^{ℓ} est constituée de trois partie disjointe deux à deux $\Gamma^{\ell} = \Gamma_1^{\ell} \cup \Gamma_2^{\ell} \cup \Gamma_3^{\ell}, \Gamma_i^{\ell} \cap \Gamma_j^{\ell} = \phi, \ \forall i \neq j$. On suppose que les parties $\Gamma_1^{\ell}, \Gamma_2^{\ell}, \Gamma_3^{\ell}$ sont mesurables au sens de *Lebesgue* de $N-1$ dimensionnelle. La formulation classique du problème mécanique sera notée par *P*. Ce mémoire se divise en deux parties.

La première partie elle même se devise en deux chapitres, dans le premier on considère le problème mécanique *P* dans le cas où le loi de comportement est non linéaire. En utilisant la formule de *Green*, ainsi que l'inégalité de *Korn*, on propose deux formulations variationnelles P_1 et P_2. Le problème P_1 est la formulation variationnelle qui dépend uniquement de l'inconnue u^{ℓ}, tandis que le problème P_2 ne dépend que de σ^{ℓ}. En utilisant le théorème de *Stampachia* concernant les inéquations variationnelles elliptiques, ainsi que des hypothèses de régularité qu'on imposera par la suite, on démontre que P_1 possède une solution unique. Par le même résultat que dans le cas du problème P_1, nous prouvons l'existences et l'unicité d'une solution du problème P_2. Et on termine ce premier chapitre de la première partie par étudier le lien entre, d'une part les solutions des problèmes variationnels P_1 et P_2 , et d'autre part entre les problèmes P_1 , P_2 et le problème P.

Dans le second chapitre, on considère le problème P , où la relation entre σ^ℓ et u^ℓ sera donnée par une loi de comportement connue sous le nom de loi de *Hook*, qui modélise les phénomènes de l'élasticité linéaire. Pour ce problème on propose la formulation variationnelles mixte du problème mécanique P, où les inconnues dans ce cas, sont le champs de déplacement u^ℓ et le tenseur de contraintes σ^ℓ . On démontre en suite un résultat d'existence et d'unicité, en utilisant le théorème de *Lax-Milgram*, ainsi que le théorème de *Stampachia*.

Dans la seconde partie, on s'intéresse à l'étude numériquement d'un problème de contact sans frottement à deux corps surfaciques déformables, l'objet de cette partie est d'étudier numériquement de ce même problème précédent pour des matériaux surfaciques homogènes ayant une loi de comportement élastique linéaire. La formulation variationnelle de ce problème mécanique est donnée par le problème P_m établi dans le second chapitre de la première partie. On sait que ce problème admet une unique solution dans $V \times M$ de la forme $(u,-\sigma_\eta)$.

Pour étudier numériquement ce problème, on suppose que Ω^1,Ω^2 sont des polygones. En utilisant la méthode des éléments finis, le problème P_m (pour $N = 2$) se transforme à un problème variationnel approché, noté par P_m^h **.** Ceci nous permet d'approcher la solution exacte (u,λ) par une solution approchée (u_h,λ_h) . On introduit les deux ensembles V_h *et* M_h , où V_h , M_h désignent respectivement le sous espace, de dimension finie approchés , de V , M . Cette partie se devise en deux chapitres.

Le premier chapitre est consacré à la résolution numérique du problème P_m qui consiste à approcher la solution exacte (u,λ) par une solution approchée (u_h,λ_h) , on utilise la méthode des éléments finis telle que, la méthode des éléments finis de type linéaire, $M_h = L_h^{\ell,*}$, $\ell=1,2$; et celle de type quadratique $M_h = Q_h^{\ell,*}$, $\ell=1,2$. Pour cela, on aura besoin de quelques techniques telles que la méthode d'interpolations de *Lagrange* linéaire ou quadratique et celle de projections.

De plus, et comme dans la première partie, nous examinons la question d'existence et d'unicité d'une solution approchée du problème discrétisé.

Dans le second chapitre, on s'intéresse à l'analyse des erreurs. En utilisant les théorèmes des traces, les injections compactes et continues de *Sobolev*, ainsi que les inégalités d'interpolation et l'inégalité de *Cauchy-Schwartz*, on arrive à donner l'estimation de l'erreur. On termine par une comparaison entre la méthode des éléments finis de type linéaire et celle de type quadratique.

Finalement, ce mémoire se termine par une conclusion dont on résume les principaux résultats obtenus durant l'étude du problème considéré.

Notations

IN	Ensembles des entiers naturels
IR	Ensembles des nombres réels
c	Constante réelle strictement positive
$x \mapsto \psi(x)$	Application
$\nabla\psi$	Gradient de l'application ψ
Div ψ	Divergence de l'application ψ
$\partial\psi$	Sous-différentiel de ψ ;
(x, y)	Paire d'un espace produit $X \times Y$;
X^N	Espace définie par $X^N = \{x = (x_i) / x_i \in X \ ; i = \overline{1.N}\}$
$X_S^{N\times N}$	Espace défini par $X^{N\times N} = \{x = (x_{ij}) \ / \ x_{ij} = x_{ji} \in X ; \ \ i, j = \overline{1.N}\}$
S_N	Espace des tenseurs d'ordre deux symétrique sur IR^N
0_N	Elément zéro de IR^N ou S_N ;
I_N	Elément unité de S_N ;
$\cdot$	Produit scalaire sur IR^N ou S_N ;
$\lvert \cdot \rvert$	La norme euclidienne sur IR^N ou S_N ;
$\lVert \cdot \rVert_X$	La norme sur l'espace X ;
$\langle .,. \rangle_X$	Le produit scalaire sur l'espace X ;
$x_n \to x$	Convergence forte dans X ;
$x_n \xrightarrow{faible} x$	Convergence faible dans X ;
0_X	Elément zéro de X ;
X'	Espace dual topologique de l'espace X ;
X^*	Espace dual algébrique de l'espace X ;
$\langle .,. \rangle_{X' \times X}$	Produit dual entre X' et X ;
I_X	L'opérateur identité sur X ;
$p.p$	Presque partout

$\Omega^\ell \quad \ell = \overline{1.2}$ Ouvert de IR^N (N=1.2.3), parfois domaine Lipchitzien

$\overline{\Omega}^\ell$ L'adhérence de Ω^ℓ

Γ^ℓ La frontière de Ω^ℓ

Γ_i^ℓ (i=1.2.3) Les parties de frontière Γ^ℓ

mes(Γ_i^ℓ) Mesure de Lebesgue (N-1) dimensionnelle de Γ_i^ℓ

$d\Gamma_i^\ell$ Mesure superficielle sur Γ_i^ℓ

$\eta^\ell_.$ Normale extérieure unitaire à Γ_i^ℓ

v_η^ℓ , v_τ^ℓ Les composantes normales et tangentielles du champ vectoriel v^ℓ défini sur Ω^ℓ

$C^1(\Omega^\ell)$ L'espace des fonctions réelles continûment différentiables sur Ω^ℓ

$D(\Omega^\ell)$ L'espace des fonctions réelles indéfiniment différentiables et à support compact contenu dans Ω^ℓ

$D'(\Omega^\ell)$ Espace des distributions sur Ω^ℓ

$C_c^1(T)$ T segment ; Espace des fonctions de $C^1(T)$ avec support compact dans T

$D^\ell = \left\{ \varphi^\ell = (\varphi_i^\ell)_{i=\overline{1,N}} \ / \ \varphi_i^\ell \in D(\Omega^\ell), i=\overline{1,N} \right\} = (D(\Omega^\ell))^N$;

$D = D^1 \times D^2$

$D'^\ell = \left\{ T^\ell = (T_i^\ell)_{i=\overline{1,N}} \ / \ T_i^\ell \in D'(\Omega^\ell), i=\overline{1,N} \right\} = (D'(\Omega^\ell))^N$

$D' = D'^1 \times D'^2$

$\mathcal{D}^\ell = \left\{ \sigma^\ell = (\sigma_{ij}^\ell) \ / \ \sigma_{ij}^\ell = \sigma_{ji}^\ell \in D(\Omega^\ell); i.j = \overline{1,N} \right\} = (D(\Omega^\ell))_S^{N\times N}$

$\mathcal{D} = \mathcal{D}^1 \times \mathcal{D}^2$;

$\mathcal{D}'^\ell = \left\{ \phi^\ell = (\phi_{ij}^\ell) \ / \ \phi_{ij}^\ell = \phi_{ji}^\ell \in D(\Omega^\ell); i.j = \overline{1,N} \right\} = (D'(\Omega^\ell))_S^{N\times N}$;

$\mathcal{D}' = \mathcal{D}'^1 \times \mathcal{D}'^2$;

$IL^2(\Omega^\ell)$ Espace des fonctions u^ℓ mesurables sur Ω^ℓ telles que $\int_{\Omega^\ell} |u^\ell|^2 dx < +\infty$

$IL^\infty(\Omega^\ell)$ Espace des fonctions u^ℓ mesurables sur Ω^ℓ telles qu'il existe c > 0 :

$|u^\ell| \leq c$ p.p sur Ω^ℓ

$\mathrm{H}^\ell = (IL^2(\Omega^\ell))^N$;

$H_1^\ell = (H^1(\Omega^\ell))^N$;

$H = H^1 \times H^2$;

$H_1 = H_1^1 \times H_1^2$;

$\mathcal{H}^\ell = \left(IL^2(\Omega^\ell) \right)_S^{N\times N}$;

$\mathcal{H}_1^\ell = \left(H^1(\Omega^\ell) \right)_S^{N\times N}$;

$\mathcal{H} = \mathcal{H}^1 \times \mathcal{H}^2$

$\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_1^1 \times \mathcal{H}_1^2$

$H^{1/2}(\Gamma^\ell)$ Espace de Sobolev d'ordre ½ sur Γ^ℓ

$H_{\Gamma^\ell} = \left(H^{1/2}(\Gamma^\ell) \right)^N$;

$H^{-1/2}(\Gamma^\ell)$ Espace dual de $H^{1/2}(\Gamma^\ell)$;

H'_{Γ^ℓ} Eespace dual de H_{Γ^ℓ} , i.e , $H'_{\Gamma^\ell} = \left(H^{-1/2}(\Gamma^\ell) \right)^N$

$\gamma^\ell : H_1^\ell \to H_{\Gamma^\ell}$ L'application trace définie sur H_1^ℓ

$R^\ell : H_{\Gamma^\ell} \to H_1^\ell$ L'inverse à droite de l'application γ^ℓ

$\bar{\gamma}^\ell : \mathcal{H}_1^\ell \to \mathrm{H}'_{\Gamma^\ell}$ L'application trace définie sur $\mathcal{H}_1^\ell$

$\bar{R}^\ell : \mathrm{H}'_{\Gamma^\ell} \to \mathcal{H}_1^\ell$ L'inverse à droite de l'application $\bar{\gamma}^\ell$

$H^m(\Omega^\ell)$ $m \in \mathrm{N}$ Espace de Sobolev d'ordre m défini par :

$$H^m(\Omega^\ell) = \left\{ \psi \in IL^2(\Omega^\ell) \,/\, D^\alpha \psi \in IL^2(\Omega^\ell) \,;\, |\alpha| \le m \right\}$$

$\| \cdot \|_{H^m(\Omega^\ell)}$ La norme définie sur $H^m(\Omega^\ell)$ par $\|\psi\|_{H^m(\Omega^\ell)} = \left(\sum_{|\alpha|\le m} \|D^\alpha \psi\|^2_{IL^2(\Omega^\ell)} \right)^{1/2}$

$H^\tau(\Omega^\ell)$. $\tau \in \mathrm{IR}_+ - IN$; Espace de Sobolev d'ordre τ défini par ; si

$\tau = m + \theta \,/\, m \in N$ et $0 < \theta < 1$, alors

$$H^\tau(\Omega^\ell) = \left\{ \psi \in H^m(\Omega^\ell) \,/\, \iint_{\Omega\Omega} \frac{\left| D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y) \right|^2}{|x-y|^{N+2\theta}} dx.dy < +\infty \,;\, |\alpha| = m \right\}$$

$\| \cdot \|_{H^\tau(\Omega^\ell)}$ Norme d'espace $H^\tau(\Omega^\ell)$ avec $\tau \in R_+ - N$; définie par :

$$\|\psi\|_{H^\tau(\Omega^\ell)} = \left[\|\psi\|^2_{H^m(\Omega^\ell)} + \sum_{|\alpha|=m} \iint_{\Omega^\ell \Omega^\ell} \frac{\left| D^\alpha \psi(x) - D^\alpha \psi(y) \right|^2}{|x-y|^{N+2\theta}} dxdy \right]^{1/2}$$

$| \cdot |_{\mathrm{H}^m(\Omega^\ell)}$ Semi-norme définie sur $H^m(\Omega^\ell)$ comme suivant :

$$|\psi|_{H^m(\Omega^\ell)} = \left[\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha \psi\|^2_{I\!L^2(\Omega^\ell)} \right]^{1/2}$$

$\langle .,. \rangle_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\Gamma}$ Le produit de dualité entre $H^{-1/2}(\Gamma)$ et $H^{1/2}(\Gamma)$

$\|\cdot\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}$ La norme définie sur $H^{-1/2}(\Gamma)$ comme suivant

$$\|\psi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} = \sup_{\Phi \in H^{1/2}(\Gamma)} \frac{\langle \psi . \Phi \rangle_{-1/2,1/2,\Gamma}}{\|\Phi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}}$$

$C^{m.\nu}(\Gamma)$ $.m = 0,1 \,.\, 0 < \nu < 1$: Espace *Holderiénne* d'ordre m

$$C^{m,\nu}(\Gamma) = \left\{ f \in C^m(\Gamma) \;;\; \sup_{x,y \in \Gamma} \frac{|D^i f(x) - D^i f(y)|}{|x-y|^\nu} < +\infty \;:\; \forall i \leq m \right\}$$

$\|\cdot\|_{C^{m,\nu}(\Gamma)}$ La norme définie sur $C^{m.\nu}(\Gamma)$ par :

$$\|f\|_{C^{m,\nu}(\Gamma)} = \max_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Gamma} |D^\alpha f(x)| + \max_{|\alpha| \leq m} \sup_{x,y \in \Gamma} \frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|}{|x-y|^\nu}$$

$|\cdot|_{C^{m,\nu}(\Gamma)}$ Semi-norme définie sur $C^{m.\nu}(\Gamma)$ par :

$$|f|_{C^{m,\nu}(\Gamma)} = \max_{|\alpha|=m} \sup_{x,y \in \Gamma} \frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|}{|x-y|^\nu}$$

$\hookrightarrow$ Injection continue ;

$\overset{c}{\subset}$ Injection compacte ;

$\mathrm{L}(X,Y)$ L'espace des fonctions linéaires et continues de X *dans* Y

$P_m(K)$ L'espace des polynômes définis sur l'ensemble K de degré $\leq m$

$$V(\Omega^\ell) = \left\{ v^\ell \in H_1^\ell \,/\, v^\ell = 0 \text{ sur } \Gamma_1^\ell \right\}$$

$V = V(\Omega^1) \times V(\Omega^2)$

$\langle .,. \rangle_{V(\Omega^\ell)}$ Le produit scalaire sur $V(\Omega^\ell)$ défini par :

$$\langle v^\ell, \omega^\ell \rangle_{V(\Omega^\ell)} = \langle \varepsilon(v^\ell), \varepsilon(\omega^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell}$$

$\langle .,. \rangle_V$ Le produit scalaire sur V défini :

$$\langle v.\omega \rangle_V = \langle v^1.\omega^1 \rangle_{V(\Omega^1)} + \langle v^2.\omega^2 \rangle_{V(\Omega^2)}$$

$\mathrm{diam}(K)$ Le diamètre de l'ensemble K ; $\mathrm{diam}(K) = \sup_{x,y \in K} d(x,y)$

$\mathcal{T}_h^\ell$ Triangulation de Ω^ℓ d'un diamètre $\leq h$

ξ_h^ℓ Ensemble des nœuds dans Γ_3 de la triangulation $\mathcal{T}_h^\ell$

$M=\left\{ \mu\in H^{-1/2}(\Gamma_3) / \ \langle \mu.\psi\rangle_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\Gamma_3} \geq 0 : \forall\psi\in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_3) \text{ avec}\psi\geq 0 \ p.p \text{ sur}\Gamma_3 \right\}$

$V_h(\Omega^\ell)=\left\{ v^\ell \in \left(C(\Omega^\ell)\right)^2 / \ v^\ell\big|_K \in \left(P_2(K)\right)^2; \ \forall K\in \mathcal{T}_h^\ell \ \& \ v^\ell\big|_{\Gamma_1^\ell} = 0 \right\}$

$V_h = V_h(\Omega^1)\times V_h(\Omega^2)$

$W_h^\ell(\Gamma_3)=\left\{ \psi_h \in C(\overline{\Gamma}_3) / \ \exists v_h^\ell \in V_h(\Omega^\ell) \ \text{ tq: } v_h^\ell.\eta^\ell = \psi_h \ \text{ sur } \Gamma_3 \right\}$

$Q_h^\ell = \left\{ \mu_h \in W_h^\ell(\Gamma_3) / \ \mu_h \geq 0 \text{ sur } \Gamma_3 \right\}$

$L_h^\ell = \left\{ \mu_h \in W_h^\ell(\Gamma_3) / \ \mu_h(x) \geq 0 : \ \ \forall x\in \xi_h^\ell \right\}$

$Q_h^{\ell,*} = \left\{ \mu_h \in W_h^\ell(\Gamma_3) / \int_{\Gamma_3} \mu_h\psi_h d\Gamma_3 \geq 0 \ ; \ \forall\psi_h \in Q_h^\ell \right\}$

$L_h^{\ell,*} = \left\{ \mu_h \in W_h^\ell(\Gamma_3) / \int_{\Gamma_3} \mu_h\psi_h d\Gamma_3 \geq 0 \ ; \ \forall\psi_h \in L_h^\ell \right\}$

π_h^ℓ L'opérateur de projection sur $W_h^\ell(\Gamma_3)$

$K_h^Q = \left\{ v_h \in V_h \ / \ \pi_h^\ell[v_h\eta] \leq 0 \ ; sur\, \Gamma_3 \right\}$

$K_h^L = \left\{ v_h \in V_h \ / \ \pi_h^\ell[v_h\eta](x) \leq 0 \ \ ;\forall x\in \xi_h^\ell \right\}$

φ_i Fonctions de base de Lagrange sur Γ_3

i_h^ℓ Interpolation linéaire du Lagrange sur Γ_3 associée à la triangulation $\mathcal{T}_h^\ell$

ω_i^ℓ Fonctions de base de Lagrange sur Ω^ℓ associés à la triangulation $\mathcal{T}_h^\ell$

I_h^ℓ Interpolation surfacique du Lagrange sur Ω^ℓ associée à la triangulation $\mathcal{T}_h^\ell$

$I_K = I_h^\ell\big|_K \qquad \ell=\overline{1.2}$

$\mathit{\Pi}_h^\ell = \left(I_h^\ell, I_h^\ell\right) \qquad \ell=\overline{1.2}$

$X_h^\ell(\Gamma_3)$ Espace des fonctions continues par morceaux sur Γ_3 et constantes sur les segments Associés au triangulation $\mathcal{T}_h^\ell$ sur Γ_3

$\mathit{\Pi}_h^\ell$ L'opérateur de projection sur $X_h^\ell(\Gamma_3)$.

PARTIE I

ETUDE THEORIQUE D'UN PROBLEME DE CONTACT SANS FROTTMENT

INTRODUCTION

Dans cette partie, on s'intéresse à l'étude théorique d'un problème de contact sans frottement entre deux corps déformables. Ce problème, connu sous le nom du *problème de Signorin*.
Notre objet ici est l'étude de ce même problème pour des matériaux ayant une loi de comportement élastique non linéaire de la forme :

$$\sigma^{\ell} = F^{\ell}(\varepsilon(u^{\ell}))$$

σ^{ℓ}, u^{ℓ} et $\varepsilon(u^{\ell})$ représentent respectivement le champ des contraintes, le champ des déplacements et le tenseur des déformations linéarisé , on suppose que la frontière de Ω^{ℓ} est constituée de trois parties disjointes deux à deux $\Gamma^{\ell} = \Gamma_1^{\ell} \cup \Gamma_2^{\ell} \cup \Gamma_3^{\ell}, \Gamma_i^{\ell} \cap \Gamma_j^{\ell} = \phi, \ \forall i \neq j$. On suppose que les parties $\Gamma_1^{\ell}, \Gamma_2^{\ell}, \Gamma_3^{\ell}$ sont mesurables au sens de *Lebesgue* de $N-1$ dimensionnelle. La formulation classique du problème mécanique sera notée par ***P***.

Cette partie se divise en deux chapitres, dans le premier on considère le problème mécanique ***P*** dans le cas où la loi de comportement est non linéaire. En utilisant la formule de *Green*, ainsi que l'inégalité de *Korn*, on propose deux formulations variationnelles $\boldsymbol{P_1}$ et $\boldsymbol{P_2}$. Le problème $\boldsymbol{P_1}$ est la formulation variationnelle qui dépend uniquement de l'inconnue u^{ℓ}, tandis que le problème $\boldsymbol{P_2}$ ne dépend que de σ^{ℓ}. En utilisant le théorème de *Stampachia* concernant les inéquations variationnelles elliptiques, ainsi que des hypothèses de régularité qu'on imposera par la suite, on démontre que $\boldsymbol{P_1}$ possède une solution unique. Par le même résultat que dans le cas du problème $\boldsymbol{P_1}$, nous prouvons l'existence et l'unicité d'une solution du problème $\boldsymbol{P_2}$. Et on termine ce premier chapitre de la première partie par étudier le lien entre les solutions des problèmes variationnels $\boldsymbol{P_1}$ et $\boldsymbol{P_2}$.

Dans le second chapitre, on considère le problème ***P*** , où la relation entre σ^{ℓ} et u^{ℓ} sera donnée par une loi de comportement connue sous le nom la loi de *Hook*, qui modélise les phénomènes de l'élasticité linéaire. Pour ce problème on propose la formulation variationnelle mixte du problème mécanique ***P***, où les inconnues dans ce cas sont le champ de déplacement u^{ℓ} et le tenseur de contraintes σ^{ℓ} . On démontre en suite un résultat d'existence et d'unicité, en utilisant le théorème de *Lax-Milgram*, ainsi que le théorème de *Stampachia*.

CHAPITRE 1

ETUDE VARIATIONNELLE D'UN PROBLEME NON LINEAIRE DE CONTACT SANS FROTTMENT

Résumé :

Dans ce chapitre, on considère un problème statique de contact sans frottement entre deux corps déformables ayant une loi de comportement non linéaire. En utilisant la formule de *Green* et l'inégalité de *Korn*, on établit deux formulations variationnelles du problème considéré, (notés P_1, P_2) dont l'avantage est que la première formulation ne dépend que du champ de déplacement, tandis que la deuxième dépend uniquement de tenseur de contraintes. En utilisant le théorème de *Stampachia*, on démontre que chacun des problèmes P_1 et P_2, possèdent une solution unique. Et on termine ce chapitre par étudier le lien entre les solutions des problèmes variationnels P_1 et P_2.

Contenu :

1. Formulation du problème et hypothèses

1.1. Position du problème

Dans ce paragraphe, on considère le problème non linéaire suivant :

Problème *P*: Trouver les champs des déplacements $u=\left(u^1,u^2\right)$ avec $u^\ell : \Omega^\ell \rightarrow IR^N$ et les champs des contraintes $\sigma=\left(\sigma^1,\sigma^2\right)$ avec $\sigma^\ell : \Omega^\ell \rightarrow S_N$, $\ell=1{,}2$ tels que :

(1.1.1) $\sigma^\ell = F^\ell\left(\varepsilon\left(u^\ell\right)\right)$ dans Ω^ℓ

(1.1.2) $Div\sigma^\ell + f^\ell = 0$ dans Ω^ℓ

(1.1.3) $u^\ell = 0$ sur Γ_1^ℓ

(1.1.4) $\sigma^\ell\eta^\ell = g^\ell$ sur Γ_2^ℓ

(1.1.5) $$\begin{cases}(a):\sigma_\eta^1=\sigma_\eta^2=\sigma_\eta \ sur\ \Gamma_3\\ (b):[u.\eta]\le 0,\sigma_\eta \le 0\ \ et\ [u.\eta]\sigma_\eta=0\ sur\ \Gamma_3\\ (c):\sigma_\tau^1=\sigma_\tau^2=0\ sur\ \Gamma_3\end{cases}$$

Où σ_η désigne la contrainte normale (ou pression de contact), $[u.\eta]=u^1.\eta^1+u^2.\eta^2$ désigne l'arrête pour le saut relativement au champ du déplacement à travers Γ_3 et $\sigma_\tau^\ell=\sigma^\ell\eta^\ell-\sigma_\eta.\eta^\ell$ représente la composante tangentielle de contrainte. L'équation (1.1.1) représente la loi de comportement élastique, où F^ℓ est un opérateur linéaire ou non linéaire , l'équation(1.1.2) représente l'équation d'équilibre où f^ℓ désigne la densité des forces volumiques agissant sur le corps déformable occupant le domaine Ω^ℓ, les relations (1.1.3) et (1.1.4) sont des conditions aux limites classiques des déplacements-tractions. Les conditions aux limites (1.1.5) représentent les conditions de contact sans frottement, dit de *Signorini*, sur Γ_3 (voir Fig.1.).

1. 2. Hypothèses

Pour étudier le problème *P*, on aura besoin des hypothèses de régularité suivantes :

(1.1.6) $$\begin{cases}F^\ell:S_N\rightarrow S_N \text{ est un opérateur tel que :}\\ (a):\exists\, m>0:(F^\ell(\varepsilon_1)-F^\ell(\varepsilon_2)).(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\ge m\left|\varepsilon_1-\varepsilon_2\right|^2:\forall\varepsilon_1,\varepsilon_2\in S_N\\ (b):\exists L>0:\left|F^\ell(\varepsilon_1)-F^\ell(\varepsilon_2)\right|\le L\left|\varepsilon_1-\varepsilon_2\right|:\forall\varepsilon_1,\varepsilon_2\in S_N\\ (c):F^\ell(0)=0\end{cases}$$

(1.1.7) $f^\ell \in H^\ell$; $\ell=1.2$

(1.1.8) $g^\ell \in H'_{\Gamma_2^\ell}$

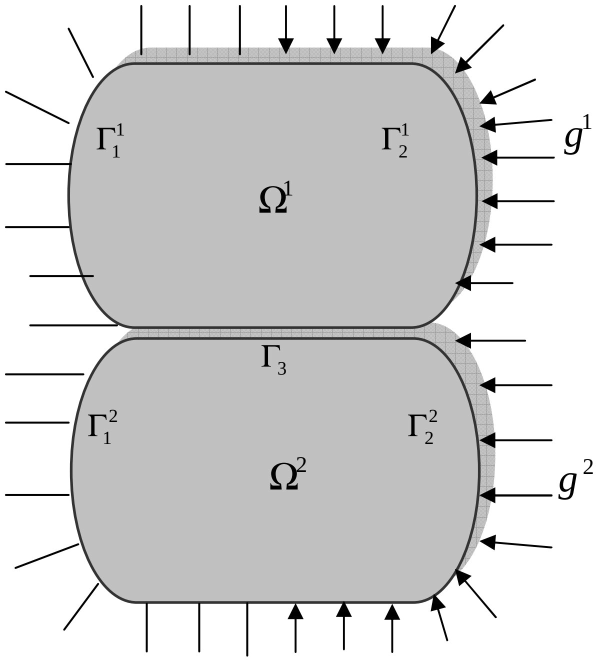


Fig.1. Contact sans frottement entre deux corps déformables

Remarque.1.1.1.

L'hypothèse (1.1.6) nous permet de considérer l'opérateur noté encore par F^ℓ défini par

$$\begin{cases} F^\ell : \mathcal{H}^\ell \to \mathcal{H}^\ell \\ F^\ell \varepsilon(x) = F^\ell(\varepsilon(x)) \ ;\forall \varepsilon \in \mathcal{H}^\ell \ \ p.p\ x \in \Omega^\ell \end{cases}$$

En effet, si $\varepsilon \in \mathcal{H}^\ell$ en utilisant (1.1.6.a), il résulte que $x \mapsto \varepsilon(x)$ est une fonction mesurable de Ω^ℓ à valeurs dans S_N et d'après (1.1.6.b.c), il résulte :

$$\int_{\Omega^\ell} \left|F^\ell \varepsilon(x)\right|^2 dx \ \le\ L^2 \int_{\Omega^\ell} \left|\varepsilon(x)\right|^2 dx \ < +\infty$$

On a donc $F^\ell(\varepsilon) \in \mathcal{H}^\ell$.

On remarque également que d'après (1.1.6.a.b), l'opérateur $F^\ell : \mathcal{H}^\ell \to \mathcal{H}^\ell$ est un opérateur fortement monotone et de *Lipchitz,* car il satisfait aux inégalités :

(1.1.9) $\left\langle F^\ell(\varepsilon_1) - F^\ell(\varepsilon_2), \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \right\rangle_{\mathcal{H}^\ell} \ge m\left\|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\right\|^2 \ ; \ \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathcal{H}^\ell$

(1.1.10) $\left\|F^\ell(\varepsilon_1) - F^\ell(\varepsilon_2)\right\|_{\mathcal{H}^\ell} \le L\left\|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\right\|_{\mathcal{H}^\ell} \ : \ \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathcal{H}^\ell$

Remarque.1.1.2. Etant donnée que l'opérateur $F^\ell : \mathcal{H}^\ell \to \mathcal{H}^\ell$ est fortement monotone et *Lipchitz,* l'opérateur F^ℓ est donc inversible et $(F^\ell)^{-1} : \mathcal{H}^\ell \to \mathcal{H}^\ell$ est également fortement monotone et *Lipchitz* .

Remarque.1.1.3. Les hypothèses (1.1.7), (1.1.8) sont des hypothèses de *régularité* sur les données f, g qui sont nécessaires pour que le problème (1.1.3)-(1.1.5) ait une solution de la régularité

$u \in H_1$, $\sigma \in \mathcal{H}_1$. En effet, puisque $\sigma^\ell \in \mathcal{H}_1^\ell$, $\ell = 1.2$ alors $Div\sigma^\ell \in H^\ell$ et d'après (1.1.2), il vient $f^\ell \in H^\ell$, de plus $\sigma^\ell \eta^\ell \in H'_{\Gamma^\ell}$ ce qui entraine que $g \in H'_{\Gamma_2^\ell}$ en utilisant (1.1.4).

Pour l'étude du problème P, on considère le sous espace fermé $V(\Omega^\ell)$ de H_1^ℓ défini par :

(1.1.11) $$V(\Omega^\ell) = \left\{ v^\ell \in H_1^\ell \ / \ v^\ell = 0 \ \text{ p.p sur } \ \Gamma_1^\ell \right\}$$

Et on considère l'espace V défini par :

(1.1.12) $$V = V(\Omega^1) \times V(\Omega^2)$$

Sur cet espace, on définit l'opérateur bilinéaire comme suit :

(1.1.13) $$\begin{cases} \langle .,. \rangle : V \times V \to IR \\ \langle v, \omega \rangle = \sum_{\ell=1}^{2} \langle \varepsilon(v^\ell), \varepsilon(\omega^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} \end{cases}$$

Lemme1.1.1. Si $\text{mes}(\Gamma_1^\ell) > 0$, $\ell = 1.2$, V est un espace du *Hilbert* muni du produit scalaire $\langle .,. \rangle$.

Démonstration : Il est clair que l'opérateur $\langle .,. \rangle$ est une forme bilinéaire positive, symétrique.

On pose

(1.1.14) $$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

En utilisant l'inégalité de *Korn*, il résulte qu'il existe une constante $m^\ell > 0$ telle que :

$$\|\varepsilon(v^\ell)\|_{\mathcal{H}^\ell} \geq m^\ell \|v^\ell\|_{H^1(\Omega^\ell)} \ : \ \forall v^\ell \in H_1^\ell$$

Pour $m = \min(m_1, m_2)$, on a $\|v\| \geq m \|v^\ell\|_{H^1(\Omega^\ell)}, \forall v^\ell \in H_1^\ell$ ce qui nous permet de conclure que si $\|v\| = 0$, alors $v = 0$, d'où il résulte que $\langle .,. \rangle$ est un opérateur défini positif et par conséquent $\langle .,. \rangle$ est un produit scalaire sur V. Il ne reste que de démontrer que V est complet. Ceci est claire en utilisant le fait que V est fermé dans H_1, ainsi que l'inégalité $\|v\| \geq m \|v\|_{H_1}$. D'où la démonstration.

Remarque.1.1.4. Les deux norme $\|.\|$ et $\|.\|_{H_1}$ sont équivalentes.

Il est facile de voir que l'application

$$v^\ell \mapsto \int_{\Omega^\ell} f^\ell . v^\ell d\Omega^\ell + \int_{\Gamma_2^\ell} g^\ell . v^\ell \eta^\ell d\Gamma_2^\ell$$

est une forme linéaire continue sur $V(\Omega^\ell)$. En appliquant le théorème de représentation du *Riez-Fréchet*, il résulte qu'il existe $\varphi^\ell \in V(\Omega^\ell)$ tel que :

(1.1.15) $$\langle \varphi^\ell, v^\ell \rangle_{V(\Omega^\ell)} = \int_{\Omega^\ell} f^\ell . v^\ell d\Omega^\ell + \int_{\Gamma_2^\ell} g^\ell . v^\ell \eta^\ell d\Gamma^\ell \ : \ \forall v^\ell \in V(\Omega^\ell)$$

En outre on définit respectivement les ensembles des << *déplacement admissible* >> et l'ensemble des <<*contrainte admissible* >> suivants :

(1.1.16) $U_{ad} = \{v = (v^1, v^2) \in V \ / [v.\eta] \leq 0 \ \text{ sur } \Gamma_3\}$

(1.1.17) $\Sigma_{ad} = \{\tau = (\tau_1, \tau_2) \in \mathcal{H} \ / \ \sum_{\ell=1}^{2} \langle \tau^\ell, \varepsilon(v^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} \geq \langle \varphi, v \rangle : \ \forall v \in U_{ad}\}$, où $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2)$.

Soit a l'application définie par :

(1.1.18) : $$\begin{cases} a : V \times V \to IR \\ a(v,w) = \sum_{\ell=1}^{2} \langle F^\ell(\varepsilon(v^\ell)), (\varepsilon(w^\ell)) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} = \sum_{\ell=1}^{2} \int_{\Omega^\ell} F^\ell(\varepsilon(v^\ell)).(\varepsilon(w^\ell)) d\Omega^\ell \end{cases}$$

1.3. Formulation variationnelle.

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à la formulation variationnelle du problème considéré qui consiste dans une première formulation, notée P_1, à trouver les champs des déplacements $u = (u^1, u^2)$ tandis que dans la seconde formulation, notée P_2 , on cherche les champs des contraintes $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2)$. Ces résultats sont basés sur le lemme suivant :

Lemme1.1.2. Si le couple des fonctions (u, σ) est une solution du problème *P* alors :

(1.1.19) $u \in U_{ad}$, $\sigma \in \Sigma_{ad}$

(1.1.20) $\sum_{\ell=1}^{2} \langle \sigma^\ell, \varepsilon(u^\ell) - \varepsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} \geq \langle \varphi, v - u \rangle \ ; \ \forall v \in U_{ad}$

(1.1.21) $\sum_{\ell=1}^{2} \langle \tau^\ell - \sigma^\ell, \varepsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} \geq 0 \ ; \ \forall \tau \in \Sigma_{ad}$

Démonstration. L'appartenance $u \in U_{ad}$ est clair en utilisant (1.1.3) et (1.1.5). Soit donc $v \in U_{ad}$, en appliquant la formule de *Green*, de (1.1.2), il vient :

$$\langle \sigma^\ell, \varepsilon(v^\ell) - \varepsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} = \langle f^\ell, v^\ell - u^\ell \rangle_{H^1} + \int_{\Gamma^\ell} \sigma^\ell \eta^\ell (v^\ell - u^\ell) \eta^\ell d\Gamma^\ell$$

En utilisant (1.1.3), (1.1.4) et (1.1.15), il en résulte :

(1.1.22) $\langle \sigma^\ell, \varepsilon(v^\ell) - \varepsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} = \langle \varphi^\ell, v^\ell - u^\ell \rangle + \int_{\Gamma_3^\ell} \sigma^\ell \eta^\ell (v^\ell - u^\ell) \eta^\ell d\Gamma_3^\ell \ ; \ \ell = 1.2$

Par sommation sur ℓ, il vient :

$$\sum_{\ell=1}^{2} \langle \sigma^\ell, \varepsilon(v^\ell) - \varepsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} = \langle \varphi, v - u \rangle + \int_{\Gamma_3^\ell} \sigma_\eta ([v.\eta] - [u.\eta]) d\Gamma_3 \text{ , où } \varphi = (\varphi^1, \varphi^2)$$

Ou encore

$$\sum_{\ell=1}^{2}\left\langle \sigma^{\ell},\varepsilon(v^{\ell})-\varepsilon(u^{\ell})\right\rangle_{\mathcal{H}^{\ell}}=\langle \varphi,v-u\rangle+\int_{\Gamma_3^{\ell}}\sigma_{\eta}\,([v.\eta]-[u.\eta])d\Gamma_3$$

Et du fait de (1.1.5), il en découle :

$$\sum_{\ell=1}^{2}\left\langle \sigma^{\ell},\varepsilon(v^{\ell})-\varepsilon(u^{\ell})\right\rangle_{\mathcal{H}^{\ell}}=\langle \varphi,v-u\rangle+\int_{\Gamma_3^{\ell}}\sigma_{\eta}\,[v.\eta]d\Gamma_3$$

On obtient alors

$$\sum_{\ell=1}^{2}\left\langle \sigma^{\ell},\varepsilon(v^{\ell})-\varepsilon(u^{\ell})\right\rangle_{\mathcal{H}^{\ell}}\geq\langle \varphi,v-u\rangle$$

D’où l’inégalité (1.1.20).

Pour $v=2u\in U_{ad}$ et pour $v=0\in U_{ad}$ dans (1.1.20), il résulte :

$$\sum_{\ell=1}^{2}\left\langle \sigma^{\ell},\varepsilon(u^{\ell})\right\rangle_{\mathcal{H}^{\ell}}=\langle \varphi,u\rangle \tag{1.1.23}$$

On a

$$\sum_{\ell=1}^{2}\left\langle \sigma^{\ell},\varepsilon(v^{\ell})\right\rangle_{\mathcal{H}^{\ell}}=\sum_{\ell=1}^{2}\left\langle \sigma^{\ell},\varepsilon(v^{\ell})-\varepsilon(u^{\ell})\right\rangle_{\mathcal{H}^{\ell}}+\sum_{\ell=1}^{2}\left\langle \sigma^{\ell},\varepsilon(u^{\ell})\right\rangle_{\mathcal{H}^{\ell}}$$

En utilisant (1.1.23), (1.1.17) et (1.1.20), il en découle :

$$\forall v\in U_{ad};\quad \sum_{\ell=1}^{2}\left\langle \sigma^{\ell},\varepsilon(v^{\ell})\right\rangle_{\mathcal{H}^{\ell}}\geq\langle \varphi,v-u\rangle+\langle \varphi,u\rangle$$

Ou encore :

$$\sum_{\ell=1}^{2}\left\langle \sigma^{\ell},\varepsilon(v^{\ell})\right\rangle_{\mathcal{H}^{\ell}}\geq\langle \varphi,v\rangle$$

Ce qui implique que $\sigma\in\Sigma_{ad}$.

On a

$$\forall \tau\in\Sigma_{ad},\quad \sum_{\ell=1}^{2}\left\langle \tau^{\ell}-\sigma^{\ell},\varepsilon(u^{\ell})\right\rangle_{\mathcal{H}^{\ell}}=\sum_{\ell=1}^{2}\left\langle \tau^{\ell},\varepsilon(u^{\ell})\right\rangle_{\mathcal{H}^{\ell}}-\sum_{\ell=1}^{2}\left\langle \sigma^{\ell},\varepsilon(u^{\ell})\right\rangle_{\mathcal{H}^{\ell}}$$

De (1.1.17), (1.1.23) il en résulte :

$$\sum_{\ell=1}^{2}\left\langle \tau^{\ell}-\sigma^{\ell},\varepsilon(u^{\ell})\right\rangle_{\mathcal{H}^{\ell}}\geq\langle \varphi,u\rangle-\langle \varphi,u\rangle=0$$

D’où l’inégalité (1.1.21).

En tenant compte la remarque.1.1.2, le lemme précédent nous permet de considérer les deux formulations faibles du problème *P*.

Problème *P_1* : Trouver les champs des déplacements $u = (u^1, u^2)$ tels que

$$(1.1.24)\qquad \begin{cases} u^\ell : \Omega^\ell \to IR^N \\ u \in U_{ad}, \quad \sum_{\ell=1}^{2} \left\langle F^\ell\left(\varepsilon(u^\ell)\right), \varepsilon(v^\ell) - \varepsilon(u^\ell) \right\rangle_{\mathcal{H}^\ell} \geq \langle \varphi, v - u \rangle, \quad \forall v \in U_{ad} \end{cases}, \quad \ell = 1,2$$

Problème *P_2* : Trouver les champs des contraintes $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2)$ tels que :

$$(1.1.25)\qquad \begin{cases} \sigma^\ell : \Omega^\ell \to S_N \\ \sigma \in \Sigma_{ad}, \quad \sum_{\ell=1}^{2} \left\langle \tau^\ell - \sigma^\ell, (F^\ell)^{-1}(\sigma^\ell) \right\rangle_{\mathcal{H}^\ell} \geq 0, \quad \forall \tau \in \Sigma_{ad} \end{cases}, \quad \ell = 1,2$$

Remarque.1.1.5. Le lemme1.1.2, nous permet de conclure facilement que si (u, σ) est une solution régulière du problème *P* alors u est une solution du problème *P_1* et σ est une solution du problème *P_2*

Dans la suite on s'intéresse à étudier le lien entre les problèmes variationnels qu'on a introduit et le problème *P*. On commence par

Théorème1.1.1. Pour $\sigma^\ell = F^\ell(\varepsilon(u^\ell))$, $\ell = 1,2$ et si $u = (u^1, u^2)$ est une solution du problème *P_1*, alors (u, σ) est une solution du problème *P*.

Démonstration.

a/(1.1.2) : Pour tout $\Phi^\ell \in D^\ell \left(\equiv (D(\Omega^\ell))^2\right)$, on pose $\Phi = (\Phi^1, \Phi^2)$ avec $\Phi^{3-\ell} = 0, \ell = 1,2$; en substituant $v = u \pm \Phi \in U_{ad}$ dans (1.1.24), on obtient :

$$\left\langle \sigma^\ell, \varepsilon(\Phi^\ell) \right\rangle_{\mathcal{H}^\ell} = \left\langle \varphi^\ell, \Phi^\ell \right\rangle_{V(\Omega^\ell)}$$

En utilisant la formule de *Green*, ainsi que l'inégalité (1.1.15), il en découle :

$$-\int_{\Omega^\ell} Div\, \sigma^\ell . \Phi^\ell d\Omega^\ell = \int_{\Omega^\ell} f^\ell . \Phi^\ell d\Omega^\ell : \quad \forall \Phi^\ell \in D^\ell$$

Ou encore :

$$Div\, \sigma^\ell + f^\ell = 0 \text{ sur } \Omega^\ell$$

b/(1.1.4) : Soit $v \in U_{ad}$, en appliquant la formule de *Green*, on obtient :

$$\sum_{\ell=1}^{2} \left\langle \sigma^\ell \eta^\ell, (v^\ell - u^\ell)\eta^\ell \right\rangle_{H'_{\Gamma^\ell} \times H_{\Gamma^\ell}} + \sum_{\ell=1}^{2} \left\langle f^\ell, v^\ell - u^\ell \right\rangle_{H^\ell}$$

$$= \sum_{\ell=1}^{2} \left\langle \sigma^\ell, \varepsilon(v^\ell) - \varepsilon(u^\ell) \right\rangle_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^{2} \left\langle Div\sigma^\ell, v^\ell - u^\ell \right\rangle_{H^\ell} + \sum_{\ell=1}^{2} \left\langle f^\ell, v^\ell - u^\ell \right\rangle_{H^\ell}$$

Pour $\sigma^\ell = F^\ell(\varepsilon(u^\ell))$, de l'équation d'équilibre, on conclut :

$$\sum_{\ell=1}^{2}\left\langle \sigma^{\ell}\eta^{\ell},(v^{\ell}-u^{\ell})\eta^{\ell}\right\rangle_{H'_{\Gamma^{\ell}}\times H_{\Gamma^{\ell}}}+\sum_{\ell=1}^{2}\left\langle f^{\ell},v^{\ell}-u^{\ell}\right\rangle_{H^{\ell}}=\sum_{\ell=1}^{2}\left\langle F^{\ell}\left(\varepsilon(u^{\ell})\right),\varepsilon(v^{\ell})-\varepsilon(u^{\ell})\right\rangle_{\mathcal{H}^{\ell}}$$

Ce qui implique en utilisant (1.1.24) :

$$\sum_{\ell=1}^{2}\left\langle \sigma^{\ell}\eta^{\ell},(v^{\ell}-u^{\ell})\eta^{\ell}\right\rangle_{H'_{\Gamma^{\ell}}\times H_{\Gamma^{\ell}}}+\sum_{\ell=1}^{2}\left\langle f^{\ell},v^{\ell}-u^{\ell}\right\rangle_{H^{\ell}}\geq\left\langle \varphi,v-u\right\rangle$$

Et de (1.1.15), on tire :

$$\sum_{\ell=1}^{2}\left\langle \sigma^{\ell}\eta^{\ell},(v^{\ell}-u^{\ell})\eta^{\ell}\right\rangle_{H'_{\Gamma^{\ell}}\times H_{\Gamma^{\ell}}}+\sum_{\ell=1}^{2}\left\langle f^{\ell},v^{\ell}-u^{\ell}\right\rangle_{H^{\ell}}$$

$$\geq\sum_{\ell=1}^{2}\left\langle f^{\ell},v^{\ell}-u^{\ell}\right\rangle_{H^{\ell}}+\sum_{\ell=1}^{2}\left\langle g^{\ell},(v^{\ell}-u^{\ell})\eta^{\ell}\right\rangle_{H'_{\Gamma_2^{\ell}}\times H_{\Gamma_2^{\ell}}}$$

Ou encore :

(1.1.26) $$\sum_{\ell=1}^{2}\left\langle \sigma^{\ell}\eta^{\ell},(v^{\ell}-u^{\ell})\eta^{\ell}\right\rangle_{H'_{\Gamma^{\ell}}\times H_{\Gamma^{\ell}}}\geq\sum_{\ell=1}^{2}\left\langle g^{\ell},(v^{\ell}-u^{\ell})\eta^{\ell}\right\rangle_{H'_{\Gamma_2^{\ell}}\times H_{\Gamma_2^{\ell}}}$$

Pour tout $w^{\ell}\in H_1^{\ell}$ avec $w^{\ell}=0$ sur $\Gamma_1^{\ell}\cup\Gamma_3$, on pose $w=(w^1,w^2)$ avec $w^{3-\ell}=0$, par substitution de $v=u\pm w\in U_{ad}$ dans (1.1.26), il vient :

$$\left\langle \sigma^{\ell}\eta^{\ell},w^{\ell}\eta^{\ell}\right\rangle_{H'_{\Gamma_2^{\ell}}\times H_{\Gamma_2^{\ell}}}=\left\langle g^{\ell},w^{\ell}\eta^{\ell}\right\rangle_{H'_{\Gamma_2^{\ell}}\times H_{\Gamma_2^{\ell}}}$$

D'où la condition (1.1.4)

c/ (1.1.5) : Pour tout $w^{\ell}\in H_1^{\ell}$ avec $w^{\ell}\eta^{\ell}=0$ sur $\Gamma_1^{\ell}\cup\Gamma_2^{\ell}$ et $w_{\eta}^{\ell}=0$ sur Γ_3, si on pose $w=(w^1,w^2)$ avec $w^{3-\ell}=0$, et pour $v=u\pm w\in U_{ad}$, de (1.1.26), on tire :

$$\left\langle \sigma^{\ell}\eta^{\ell},(v^{\ell}-u^{\ell})\eta^{\ell}\right\rangle_{H'_{\Gamma_3}\times H_{\Gamma_3}}=0$$

C'est à dire

$$\left\langle \sigma_{\tau}^{\ell},w_{\tau}^{\ell}\right\rangle_{H'_{\Gamma_3}\times H_{\Gamma_3}}=0$$

Et donc : $\sigma_{\tau}^{\ell}=0$ sur Γ_3, d'où la condition (1.1.5.c)

Soit $w^{\ell}\in H_1^{\ell}$ tel que $w^{\ell}=0$ sur $\Gamma_1^{\ell}\cup\Gamma_2^{\ell}$ et $w_{\tau}^{\ell}=0, w_{\eta}^{\ell}\leq 0$ sur Γ_3 ,si on pose $w=(w_1,w_2)$, $w^{3-\ell}=0$, en remplaçant $v=u\pm w\in U_{ad}$ dans (1.1.26), on trouve :

$$\left\langle \sigma^{\ell}\eta^{\ell},w^{\ell}\eta^{\ell}\right\rangle_{H'_{\Gamma_3^{\ell}}\times H_{\Gamma_3^{\ell}}}\geq 0$$

Et puisque $w_{\tau}^{\ell}=0, w_{\eta}^{\ell}\leq 0$ sur Γ_3, on a alors

$$\left\langle \sigma_{\eta}^{\ell}, w^{\ell}.\eta^{\ell} \right\rangle_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\Gamma_3} \geq 0$$

D'où on tire : $\sigma_{\eta}^{\ell} \leq 0$ sur Γ_3 ……………………...(1)

Pour tout $w \in H_1$ avec : $w^{\ell} = 0$ sur $\Gamma_1^{\ell} \cup \Gamma_2^{\ell}, \ell = 1.2$ $[w.\eta] = 0$ sur Γ_3 et $w_{\tau}^{\ell} = 0$ sur Γ_3 et pour $v = u \pm w \in U_{ad}$, de (1.1.26) on obtient :

$$\sum_{\ell=1}^{2} \left\langle \sigma_{\eta}^{\ell}, w^{\ell}.\eta^{\ell} \right\rangle_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\Gamma_3} = 0$$

Ou encore en utilisant le fait que $w^{\ell}.\eta^{\ell} = -w^{3-\ell}.\eta^{3-\ell}$, il en découle :

$$\left\langle \sigma_{\eta}^{1} - \sigma_{\eta}^{2}, w^{\ell}.\eta^{\ell} \right\rangle_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\Gamma_3} = 0$$

D'où l'égalité :

$$\left\langle \sigma_{\eta}^{1}, w^{\ell}.\eta^{\ell} \right\rangle_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\Gamma_3} = \left\langle \sigma_{\eta}^{2}, w^{\ell}.\eta^{\ell} \right\rangle_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\Gamma_3}$$

Ce qui entraîne la condition (1.1.5.a).

L'appartenance $u \in U_{ad}$ entraîne que $[u.\eta] \leq 0$ sur Γ_3 ………………...(2)

Pour $v = 2u \in U_{ad}$ et pour $v = 0 \in U_{ad}$ dans (1.1.26), il résulte :

$$\sum_{\ell=1}^{2} \left\langle \sigma^{\ell}\eta^{\ell}, u^{\ell}\eta^{\ell} \right\rangle_{H'_{\Gamma^{\ell}} \times H_{\Gamma^{\ell}}} = \sum_{\ell=1}^{2} \left\langle g^{\ell}, u^{\ell}\eta^{\ell} \right\rangle_{H_{\Gamma_2^{\ell}} \times H_{\Gamma_2^{\ell}}}$$

Et moyennant (1.1.4) avec $u^{\ell}\eta^{\ell} = 0$ sur Γ_1^{ℓ}, on a donc

$$\sum_{\ell=1}^{2} \int_{\Gamma_3} \sigma^{\ell}\eta^{\ell}.u^{\ell}\eta^{\ell} d\Gamma_3 = 0$$

En utilisant (1.1.5a) et (1.1.5c), on obtient :

$$\sum_{\ell=1}^{2} \int_{\Gamma_3} \sigma_{\eta} \left(u^{\ell}.\eta^{\ell} \right) d\Gamma_3 = 0$$

Ou encore :

$$\int_{\Gamma_3} \sigma_{\eta}.[u.\eta] d\Gamma_3 = 0$$

D'où $\sigma_{\eta}[u.\eta] = 0$ sur Γ_3 ………………………………..(3)

De (1),(2) et (3),on conclut (1.1.5b), d'où la condition (1.1.5). Par ceci on termine la démonstration.

Remarque1.1.6. U_{ad}, Σ_{ad}, sont deux sous-ensembles convexes, fermés et non vides respectivement dans V, $\mathscr{H}$ en remarquent ($0 \in U_{ad}$), ($\left(\varepsilon(\varphi^1), \varepsilon(\varphi^2)\right) \in \Sigma_{ad}$).

Théorème1.1.2. Pour $\sigma^{\ell} = F^{\ell}\left(\varepsilon\left(u^{\ell}\right)\right)$, $u \in V$, si $\sigma = \left(\sigma^1, \sigma^2\right)$ est une solution du P_2, alors u est une solution du problème P_1.

Démonstration. On suppose que $\sigma = \left(\sigma^1, \sigma^2\right)$ est une solution de (1.1.25), on commence par démontrer que $u \in U_{ad}$. On suppose que $u \notin U_{ad}$ et notons par $u_* = \left(u_*^1, u_*^2\right)$ la projection de u sur U_{ad} qui est caractérisée par :

(1.1.27) $\left\langle u_* - u, v \right\rangle \geq \left\langle u_* - u, u_* \right\rangle > \left\langle u_* - u, u \right\rangle, \quad \forall v \in U_{ad}$

Ce qui nous permet de conclure l'existence d'un nombre $\alpha \in IR$ tel que :

(1.1.28) $\left\langle u_* - u, v \right\rangle > \alpha > \left\langle u_* - u, u \right\rangle, \quad \forall v \in U_{ad}$

On introduit la fonction τ_* définie par :

(1.1.29) $\tau_* = \left(\tau_*^1, \tau_*^2\right) = \left(\varepsilon\left(u_*^1 - u^1\right), \varepsilon\left(u_*^2 - u^2\right)\right) \in \mathcal{H}$

En utilisant le produit scalaire défini par (1.1.13) dans (1.1.23.c), on déduit :

$$\left\langle \varepsilon\left(u_*^1 - u^1\right), \varepsilon\left(v^1\right)\right\rangle_{\mathcal{H}^1} + \left\langle \varepsilon\left(u_*^2 - u^2\right), \varepsilon\left(v^2\right)\right\rangle_{\mathcal{H}^2} > \alpha > \left\langle \varepsilon\left(u_*^1 - u^1\right), \varepsilon\left(u^1\right)\right\rangle_{\mathcal{H}^1} + \left\langle \varepsilon\left(u_*^2 - u^2\right), \varepsilon\left(u^2\right)\right\rangle_{\mathcal{H}^2}$$

En utilisant (1.1.5.b) dans l'inégalité précédente, on obtient :

(1.1.30) $\left\langle \tau_*^1, \varepsilon\left(v^1\right)\right\rangle_{\mathcal{H}^1} + \left\langle \tau_*^2, \varepsilon\left(v^2\right)\right\rangle_{\mathcal{H}^2} > \alpha > \left\langle \tau_*^1, \varepsilon\left(u^1\right)\right\rangle_{\mathcal{H}^1} + \left\langle \tau_*^2, \varepsilon\left(u^2\right)\right\rangle_{\mathcal{H}^2}$

Et, en prenant $v = 0 \in U_{ad}$ dans (1.1.5.a) , il vient :

(1.1.31) $\alpha < 0$

Il est aisé de vérifier que

(1.1.32) $\left\langle \tau_*^1, \varepsilon\left(v^1\right)\right\rangle_{\mathcal{H}^1} + \left\langle \tau_*^2, \varepsilon\left(v^2\right)\right\rangle_{\mathcal{H}^2} \geq 0 \;;\quad \forall v \in U_{ad}$

En effet, on suppose qu'il existe $v_* = \left(v_*^1, v_*^2\right) \in U_{ad}$ tel que :

$$\left\langle \tau_*^1, \varepsilon\left(v_*^1\right)\right\rangle_{\mathcal{H}^1} + \left\langle \tau_*^2, \varepsilon\left(v_*^2\right)\right\rangle_{\mathcal{H}^2} < 0$$

Puisque $\beta.v_* \in U_{ad} : \forall \beta > 0$, si on remplace $v = \beta.v_*$ dans (1.1.30), il vient :

$$\beta\left(\left\langle \tau_*^1, \varepsilon\left(v_*^1\right)\right\rangle_{\mathcal{H}^1} + \left\langle \tau_*^2, \varepsilon\left(v_*^2\right)\right\rangle_{\mathcal{H}^2}\right) > \alpha \qquad ; \quad \forall \beta > 0$$

Et en faisant tendre β vers $+\infty$, on déduit que $-\infty \geq \alpha$, ceci constitue une contradiction avec le fait que α est un réel. On déduit alors ;

$$\left\langle \tau_*^1, \varepsilon\left(v^1\right)\right\rangle_{\mathcal{H}^1} + \left\langle \tau_*^2, \varepsilon\left(v^2\right)\right\rangle_{\mathcal{H}^2} \geq 0 \;;\quad \forall v \in U_{ad}$$

Posons

(1.1.33) $\varepsilon_* = \left(\varepsilon_*^1, \varepsilon_*^2\right) = \left(\varepsilon\left(\varphi^1\right), \varepsilon\left(\varphi^2\right)\right)$

On vérifie que $\tau_* + \varepsilon_* \in \Sigma_{ad}$:

En utilisant (1.1.29), ainsi que (1.1.33), on obtient :

$$\sum_{\ell=1}^{2}\left\langle \tau_*^\ell + \varepsilon_*^\ell, \varepsilon(v^\ell)\right\rangle_{\mathcal{H}^\ell} = \sum_{\ell=1}^{2}\left\langle \tau_*^\ell, \varepsilon(v^\ell)\right\rangle_{\mathcal{H}^\ell} + \langle \varphi, v\rangle \geq 0 + \langle \varphi, v\rangle \quad : \quad \forall v \in U_{ad}$$

Donc $\tau_* + \varepsilon_* \in \Sigma_{ad}$.

En utilisant maintenant (1.1.25) pour $\tau = \tau_* + \varepsilon_*$, on a alors

$$\left\langle \tau_*^1 + \varepsilon_*^1 - \sigma^1, \varepsilon(u^1)\right\rangle_{\mathcal{H}^1} + \left\langle \tau_*^2 + \varepsilon_*^2 - \sigma^2, \varepsilon(u^2)\right\rangle_{\mathcal{H}^2} \geq 0$$

On a

$$\left\langle \tau_*^1, \varepsilon(u^1)\right\rangle_{\mathcal{H}^1} + \left\langle \tau_*^2, \varepsilon(u^2)\right\rangle_{\mathcal{H}^2} \geq \left\langle \sigma^1 - \varepsilon_*^1, \varepsilon(u^1)\right\rangle_{\mathcal{H}^1} + \left\langle \sigma^2 - \varepsilon_*^2, \varepsilon(u^2)\right\rangle_{\mathcal{H}^2}$$

ce qui implique, compte tenu de (1.1.30) et (1.1.31)

(1.1.34) $$\left\langle \sigma^1 - \varepsilon_*^1, \varepsilon(u^1)\right\rangle_{\mathcal{H}^1} + \left\langle \sigma^2 - \varepsilon_*^2, \varepsilon(u^2)\right\rangle_{\mathcal{H}^2} < 0$$

On vérifié que $2\sigma - \varepsilon_* \in \Sigma_{ad}$

$$\sum_{\ell=1}^{2}\left\langle 2\sigma^\ell - \varepsilon_*^\ell, \varepsilon(v^\ell)\right\rangle_{\mathcal{H}^\ell} = 2\sum_{\ell=1}^{2}\left\langle \sigma^\ell, \varepsilon(v^\ell)\right\rangle_{\mathcal{H}^\ell} - \langle \varphi, v\rangle \quad : \quad \forall v \in U_{ad}$$

Par ailleurs, comme $\sigma^\ell \in \Sigma_{ad}$, on a

$$\sum_{\ell=1}^{2}\left\langle 2\sigma^\ell - \varepsilon_*^\ell, \varepsilon(v^\ell)\right\rangle_{\mathcal{H}^\ell} \geq 2\langle \varphi, v\rangle - \langle \varphi, v\rangle = \langle \varphi, v\rangle \quad : \quad \forall v \in U_{ad}$$

C'est à dire $2\sigma - \varepsilon_* \in \Sigma_{ad}$.

A partir de (1.1.13), il vient :

$$\sum_{\ell=1}^{2}\left\langle \sigma^\ell - \varepsilon_*^\ell, \varepsilon(u^\ell)\right\rangle_{\mathcal{H}^\ell} \geq \sum_{\ell=1}^{2}\left\langle 2\sigma^\ell - \varepsilon_*^\ell, \varepsilon(u^\ell)\right\rangle_{\mathcal{H}^\ell} - \langle \varphi, v\rangle$$

Par ailleurs, comme $2\sigma - \varepsilon_* \in \Sigma_{ad}$, on a

$$\sum_{\ell=1}^{2}\left\langle \sigma^\ell - \varepsilon_*^\ell, \varepsilon(u^\ell)\right\rangle_{\mathcal{H}^\ell} \geq \langle \varphi, v\rangle$$

Alors :

(1.1.35) $$\left\langle \sigma^1 - \varepsilon_*^1, \varepsilon(u^1)\right\rangle_{\mathcal{H}^1} + \left\langle \sigma^2 - \varepsilon_*^2, \varepsilon(u^2)\right\rangle_{\mathcal{H}^2} \geq 0$$

Les relations (1.1.34) et (1.1.35) constituent une contradiction, on déduit alors que $u \in U_{ad}$.

Il ne reste que de montrer l'inéquation donnée dans (1.1.24).

Pour $\tau = \varepsilon_*$, En tenant compte (1.1.25), il vient

$$\left\langle \varepsilon_*^1 - \sigma^1, \varepsilon(u^1)\right\rangle_{\mathcal{H}^1} + \left\langle \varepsilon_*^2 - \sigma^2, \varepsilon(u^2)\right\rangle_{\mathcal{H}^2} \geq 0$$

Et de (1.1.33), (1.1.13), on tire :

$$\langle \varphi, u \rangle \geq \langle \sigma^1, \varepsilon(u^1) \rangle_{\mathcal{H}^1} + \langle \sigma^2, \varepsilon(u^2) \rangle_{\mathcal{H}^2}$$

Comme $\sigma \in \Sigma_{ad}$ et $u \in U_{ad}$, on a alors :

$$\langle \varphi, u \rangle \leq \langle \sigma^1, \varepsilon(u^1) \rangle_{\mathcal{H}^1} + \langle \sigma^2, \varepsilon(u^2) \rangle_{\mathcal{H}^2}$$

D'où l'égalité :

(1.1.36) $\langle \varphi, u \rangle = \langle \sigma^1, \varepsilon(u^1) \rangle_{\mathcal{H}^1} + \langle \sigma^2, \varepsilon(u^2) \rangle_{\mathcal{H}^2}$

Moyennant (1.1.36) et $\sigma \in \Sigma_{ad}$, donc

$$\forall v \in U_{ad} \;\; ; \;\; \langle F^1(\varepsilon(u^1)), \varepsilon(v^1) - \varepsilon(u^1) \rangle_{\mathcal{H}^1} + \langle F^2(\varepsilon(u^2)), \varepsilon(v^2) - \varepsilon(u^2) \rangle_{\mathcal{H}^2}$$
$$= \langle \sigma^1, \varepsilon(v^1) \rangle_{\mathcal{H}^1} + \langle \sigma^2, \varepsilon(v^2) \rangle_{\mathcal{H}^2} - \langle \varphi, u \rangle$$

C'est à dire

$$\forall v \in U_{ad} \;\; ; \;\; \langle F^1(\varepsilon(u^1)), \varepsilon(v^1) - \varepsilon(u^1) \rangle_{\mathcal{H}^1} + \langle F^2(\varepsilon(u^2)), \varepsilon(v^2) - \varepsilon(u^2) \rangle_{\mathcal{H}^2} \geq \langle \varphi, v - u \rangle$$

Donc u est une solution du problème P_1.

Les théorème.1.1.1, théorème.1.1.2, nous permet de conclure le résultat suivant :

Corollaire1.1.1. Pour $\sigma^\ell = F^\ell(\varepsilon(u^\ell))$, $u \in V$, si σ est une solution régulière du P_2 , alors (u, σ) est une solution du problème P.

Aussi le théorème.1.1.1. et la remarque.1.1.5., nous permet de déduire le résultat :

Corollaire1.1.2. Pour $\sigma^\ell = F^\ell(\varepsilon(u^\ell))$, si u est une solution du P_1 , alors σ est une solution du problème P_2.

2. Existence et unicité

Dans ce paragraphe, on donne des résultats d'existence et d'unicité pour les problèmes variationnels P_1 , P_2 et on étudie ensuite le lien entre les solutions de ces problèmes :

Théorème1.2.1. Sous les hypothèses (1.1.6)-(1.1.8), le problème variationnel P_1 possède une solution unique dans V .

Démonstration. Soit $\omega = (\omega^1, \omega^2) \in V$, il est facile de vérifier que l'application :

$$v = (v^1, v^2) \mapsto \langle F^1(\varepsilon(\omega^1)), \varepsilon(v^1) \rangle_{\mathcal{H}^1} + \langle F^2(\varepsilon(\omega^2)), \varepsilon(v^2) \rangle_{\mathcal{H}^2}$$

est une forme linéaire continue sur V (pour ω fixe), ce qui nous permet en utilisant le théorème représentation *de Riez- Fréchet* , de définir l'opérateur :

$$\begin{cases} A : V \to V \\ \omega \mapsto A\omega \end{cases} \text{ tel que}$$

$$\forall \omega, v \in V \; ; \; \langle A\omega, v\rangle = \left\langle F^1\left(\varepsilon\left(\omega^1\right)\right), \varepsilon\left(v^1\right)\right\rangle_{\mathcal{H}^1} + \left\langle F^2\left(\varepsilon\left(\omega^2\right)\right), \varepsilon\left(v^2\right)\right\rangle_{\mathcal{H}^2}$$

Moyennant (1.1.6) et l'inégalité de *Korn*, on déduit que l'opérateur A est fortement monotone et *Lipchitzien* sur V . Puisque U_{ad} est un convexe fermé non vide de V , le théorème de *Stampachia* nous permet d'avoir l'existence et l'unicité d'une solution $u = \left(u^1, u^2\right) \in V$ du problème P_1.

Théorème1.2.2. Sous les hypothèses (1.1.6)-(1.1.8), le problème variationnel P_2 possède une solution unique $\sigma \in \mathcal{H}_1$.

Démonstration. Soit $\tilde{\sigma} = \left(\tilde{\sigma}^1, \tilde{\sigma}^2\right)$ un élément fixé dans $\mathcal{H}$; on peut vérifier facilement que l'application :

$$\tau = \left(\tau^1, \tau^2\right) \mapsto \left\langle \tau^1, \left(F^1\right)^{-1}\left(\tilde{\sigma}^1\right)\right\rangle_{\mathcal{H}^1} + \left\langle \tau^2, \left(F^2\right)^{-1}\left(\tilde{\sigma}^2\right)\right\rangle_{\mathcal{H}^2}$$

est une forme linéaire continue sur $\mathcal{H}$ (pour $\tilde{\sigma}$ fixé); et par conséquent, le théorème *Riesz-Fréchet*, nous permet de définir l'opérateur :

$$\begin{cases} B : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \\ \quad \tilde{\sigma} \mapsto B\tilde{\sigma} \end{cases} \text{tel que}$$

$$\left\langle B\tilde{\sigma}, \tau\right\rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle \tau^1, \left(F^1\right)^{-1}\left(\tilde{\sigma}^1\right)\right\rangle_{\mathcal{H}^1} + \left\langle \tau^2, \left(F^2\right)^{-1}\left(\tilde{\sigma}^2\right)\right\rangle_{\mathcal{H}^2} \quad : \quad \forall \tau, \tilde{\sigma} \in \mathcal{H}$$

Tenant compte du fait que Σ_{ad} est un convexe, fermé et non vide dans $\mathcal{H}$, le théorème de *Stampachia* nous permet de déduire l'existence et l'unicité d'une solution $\sigma = \left(\sigma^1, \sigma^2\right) \in \Sigma_{ad}$ de P_2 . Il ne reste que de vérifier que $\sigma \in \mathcal{H}_1$.

Pour tout $\Phi^\ell \in D^\ell \left(\equiv D\left(\Omega^\ell\right)^2\right)$, on pose $\Phi = \left(\Phi^1, \Phi^2\right)$ avec $\Phi^{3-\ell} = 0$, par substitution de $v = \pm\Phi \in U_{ad}$ dans (1.1.17) avec $\tau = \sigma$, on obtient

$$\left\langle \sigma^\ell, \varepsilon\left(\Phi^\ell\right)\right\rangle_{\mathcal{H}^\ell} = \left\langle \varphi^\ell, \Phi^\ell\right\rangle_{V(\Omega^\ell)}$$

et compte tenu de (1.1.15) , on a alors :

$$\left\langle \sigma^\ell, \varepsilon\left(\Phi^\ell\right)\right\rangle_{\mathcal{H}^\ell} = \int_{\Omega^\ell} f^\ell \Phi^\ell d\Omega^\ell \quad : \quad \forall \Phi^\ell \in D^\ell$$

il en résulte que $Div\sigma^\ell + f^\ell = 0$ sur Ω^ℓ puisque $f^\ell \in H^\ell$ alors, $Div\sigma^\ell \in H^\ell$, et par conséquent $\sigma^\ell \in \mathcal{H}_1^\ell$.

3. Résultats d'équivalence

On étudie dans la suite le lien entre les solutions variationnelles $u = \left(u^1, u^2\right)$ et $\sigma = \left(\sigma^1, \sigma^2\right)$ des problèmes P_1 , P_2 et P .

Lemme1.3.1. Soit u la solution du problème P_1 donnée par théorème1.2.1. et soit σ la solution du problème P_2 donnée par théorème1.2.2, alors : $\sigma^\ell = F^\ell\left(\varepsilon\left(u^\ell\right)\right)$; $\ell = 1, 2$.

Démonstration. On pose $\sigma_*^{\ell} = F^{\ell}(\varepsilon(u^{\ell}))$, alors d'après le corollaire1.1.2., σ_* est une solution du problème P_2, et puisque la solution est unique, alors $\sigma_* = \sigma$

Théoréme1.3.1. Sous les hypothèses (1.1.6)-(1.1.8), soit $u \in V$ et soit $\sigma \in \mathcal{H}_1$, on considère les affirmations suivantes :

(i) : u est une solution du problème P_1 ;

(ii) : σ est une solution du problème P_2 ;

(iii): σ et u vérifient $\sigma^{\ell} = F^{\ell}(\varepsilon(u^{\ell}))$.

alors la vérification de deux assertions parmi celles ci-dessus entraîne la troisième .

Démonstration. La démonstration du ce théorème est un résultat de lemme.1.3.1, corollaire.1.1.2. et corollaire.1.1.1.

CHAPITRE 2

FORMULATION VARIATIONNELLE MIXTE D'UN PROBLEME LINEAIRE DE CONTACT SANS FROTTEMENT

Résumé.- Dans ce chapitre, on considère les deux matériaux homogènes muni d'une loi de comportement linéaire de la forme $\sigma^{\ell} = A^{\ell}.\varepsilon(u^{\ell})$, $\ell = 1,2$. Le problème qu'on va étudier est exactement le problème considéré dans le chapitre précédent en considérant la loi de comportement linéaire. On établit une nouvelle formulation variationnelle mixte du problème *P*, où les inconnues sont le champ de déplacement u et la fonction λ qui est n'est autre que la composante normale du tenseur de contrainte sur Γ_3, sachant que la composante tangentielle de contrainte sur Γ_3 est nulle. On démontre que ce problème possède une solution unique, en utilisant essentiellement le théorème de *Lax-Milgram* et le théorème de *Stampachia*.

Contenu :

1. Introduction ;
2. Position du problème ;
3. Formulation variatonnelle du problème ;
4. Existence et unicité

1. Introduction

Le problème qu'on va étudier dans ce chapitre est un problème de contact sans frottement entre deux corps homogènes, élastique et isotrope occupant un domaine borné de IR^N . Ces matériaux sont muni par une loi de comportement linéaire donnée par

$$\sigma^\ell = A^\ell.\varepsilon(u^\ell)$$

Où $\sigma_{ij}^\ell = A_{ijpq}^\ell \varepsilon_{pq}^\ell$ avec $A^\ell = (A_{ijpq}^\ell)$ est un tenseur d'ordre 4 qui est défini par :

$$A_{ijpq}^\ell = \lambda^\ell \delta_{ij}\delta_{pq} + \mu^\ell (\delta_{ip}\delta_{jq} + \delta_{iq}\delta_{jp})$$

Par substitution dans la loi de comportement, en tenant compte du fait que A^ℓ est un opérateur symétrique, elliptique, on trouve la loi de *Hook* suivante :

$$\sigma^\ell(u) = \lambda^\ell.tr(\varepsilon^\ell(u))I_N + 2\mu^\ell\varepsilon^\ell(u)$$

Ou encore sous forme vectorielle :

$$\sigma_{ij}^\ell(u^\ell) = \lambda^\ell\varepsilon_{pp}(u^\ell)\delta_{ij} + 2\mu^\ell\varepsilon_{ij}(u^\ell)$$

Où λ^ℓ, μ^ℓ sont les coefficients de *Lamé*. On peut vérifier facilement que A^ℓ est un opérateur continu sur les espaces $(H^r(\Omega^\ell))^{N\times N}$ $(r \geq 0)$. En conclusion l'opérateur A^ℓ a les propriétés suivantes :

$$(2.1.1)\quad \begin{cases} \text{(a) : } A^\ell \text{ linéaire, continu} \\ \text{(b) : } A^\ell \text{ symétrique } : \langle A^\ell\varepsilon_1, \varepsilon_2\rangle = \langle \varepsilon_1, A^\ell\varepsilon_2\rangle \\ \text{(c) : } A^\ell \text{ elliptique } : \exists m > 0; \langle A^\ell\varepsilon, \varepsilon\rangle \geq m\|\varepsilon\|^2 \end{cases}$$

2. Position du problème :

On considère le problème linéaire, noté par P , suivant :

Problème *P*: Trouver les champs des déplacements $u = (u^1, u^2)$ avec $u^\ell : \Omega^\ell \to IR^N$ et les champs des contraintes $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2)$ avec $\sigma^\ell : \Omega^\ell \to S_N$, $\ell = 1,2$ tels que :

$$(2.2.2)\qquad \sigma^\ell = A^\ell(\varepsilon(u^\ell)) \quad \text{dans } \Omega^\ell$$

$$(2.2.3)\qquad Div\sigma^\ell + f^\ell = 0 \quad \text{dans } \Omega^\ell$$

$$(2.2.4)\qquad u^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^\ell$$

$$(2.2.5)\qquad \sigma^\ell\eta^\ell = g^\ell \quad \text{sur } \Gamma_2^\ell$$

$$(2.2.6)\qquad \begin{cases} (a) : \sigma_\eta^1 = \sigma_\eta^2 = \sigma_\eta \ sur \ \Gamma_3 \\ (b) : [u.\eta] \leq 0, \sigma_\eta \leq 0 \ et \ [u.\eta]\sigma_\eta = 0 \ sur \ \Gamma_3 \\ (c) : \sigma_\tau^1 = \sigma_\tau^2 = 0 \ sur \ \Gamma_3 \end{cases}$$

Ce problème n'est autre que le problème considéré dans le premier chapitre en remplaçant la loi de comportement $\sigma^{\ell} = F^{\ell}\left(\varepsilon\left(u^{\ell}\right)\right)$ par $\sigma^{\ell} = A^{\ell}\left(\varepsilon\left(u^{\ell}\right)\right)$.

3. Formulation variatonnelle du problème :

Pour établir la formulation variationnelle mixte du problème posé, on commence par donner quelques définitions qui seront utiles par la suite :

On définit l'ensemble de λ-admissible suivant :

(2.3.1) $$M = \left\{\mu \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3) : \langle \mu,\psi \rangle_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\Gamma_3} \geq 0 : \forall \psi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_3), \text{ avec } \psi \geq 0 \quad p.p \text{ sur } \Gamma_3 \right\}$$

On définit les opérateurs suivants :

(2.3.3) $$\begin{cases} a : V \times V \mapsto IR \quad : \text{ tel que} \\ a(u,v) = \int_{\Omega^1} \left\langle A^1\varepsilon(u^1),\varepsilon(v^1)\right\rangle d\Omega^1 + \int_{\Omega^2} \left\langle A^2\varepsilon(u^2),\varepsilon(v^2)\right\rangle d\Omega^2 \end{cases}$$

(2.3.4) $$\begin{cases} b \; : V \times M \mapsto IR \quad : \text{ tel que} \\ b(u,\mu) = \langle \mu,[u.\eta]\rangle_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\Gamma_3} \overset{i.e}{=} \int_{\Gamma_3} \mu\left(u^1.\eta^1 + u^2.\eta^2\right) d\Gamma_3 \end{cases}$$

(2.3.5) $$\begin{cases} L : V \mapsto IR \quad : \text{ tel que} \\ L(v) = \int_{\Omega^1} f^1.v^1 d\Omega^1 + \int_{\Omega^2} f^2.v^2 d\Omega^2 + \int_{\Gamma_2^1} g^1.v^1\eta^1 d\Gamma^1 + \int_{\Gamma_2^2} g^2.v^2\eta^2 d\Gamma^2 \end{cases}$$

Remarque.2.3.1.

- M est un sous-ensemble *fermé , convexe , non vide* dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)$.
- a est une *forme bilinéaire continue , coercive , symétrique* .
- L est une *forme linéaire continue* sur V .

Remarque.2.3.2. Sous les hypothèse (2.1.1), (1.1.7) et (1.1.8) alors la problème P_1 admet une solution unique.

En effet, en tenant compte du fait que A^{ℓ} est un opérateur maximal monotone et *Lipchitzien*, le théorème.1.2.1, pour $\sigma^{\ell} = A^{\ell}\varepsilon(u^{\ell}), \ell = 1,2$, nous permet de déduire le résultat :

Lemme2.3.1. Pour $\sigma^{\ell} = A^{\ell}\varepsilon(u^{\ell})$, $\ell = 1,2$, $\lambda = -\sigma_{\eta}$, si u est une solution de P_1, alors :

(2.3.5) $\lambda \in M$

(2.3.6) $a(u,v) + b(v,\lambda) = L(v) : \quad \forall v \in V$

(2.3.7) $b(v,\mu - \lambda) \leq 0 : \quad \forall \mu \in M$

Démonstration. En utilisant le résultat du théoréme1.2.3, on déduit que (u,σ) est une solution de P, donc $\sigma_{\eta}^1 = \sigma_{\eta}^2 = \sigma_{\eta}$.

a/(2.3.5) : L'appartenance de u à $\mathcal{H}_1^\ell$, nous permet facilement de déduire que : $\sigma_\eta \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)$.

D'autre part, en tenant compte du fait que $\sigma_\eta \leq 0$ sur Γ_3, d'après la condition (2.2.5.b), on déduit que $\lambda \geq 0$ sur Γ_3, d'où $\forall \psi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_3), \psi \geq 0$ sur Γ_3, on a $\langle \lambda, \psi \rangle_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\Gamma_3} \geq 0$, et donc $\lambda \in M$.

b/(2.3.6) : $\forall\ v \in V$:

$$a(u,v) + b(v, -\sigma_\eta) = \int_{\Omega^1} \langle \sigma^1, \varepsilon(v^1) \rangle d\Omega^1 + \int_{\Omega^2} \langle \sigma^2, \varepsilon(v^2) \rangle d\Omega^2 - \int_{\Gamma_3} \sigma_\eta [v.\eta] d\Gamma_3$$

En utilisant la formule de *Green* avec (2.2.2), on tire :

$$a(u,v) + b(v, -\sigma_\eta) = \int_{\Omega^1} f^1 v^1 d\Omega^1 + \langle \sigma^1\eta^1, v^1\eta^1 \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^1)\times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^1)} +$$

$$\int_{\Omega^2} f^2 v^2 d\Omega^2 + \langle \sigma^2\eta^2, v^2\eta^2 \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^2)\times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^2)} - \int_{\Gamma_3} \sigma_\eta [v.\eta] d\Gamma_3$$

De (2.2.5.c), il vient :

$$a(u,v) + b(v, -\sigma_\eta) = \int_{\Omega^1} f^1 v^1 d\Omega^1 + \langle \sigma_\eta^1, v^1.\eta^1 \rangle_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\Gamma^1} + \int_{\Omega^2} f^2 v^2 d\Omega^2 + \langle \sigma_\eta^2, v^2.\eta^2 \rangle_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\Gamma^2} - \int_{\Gamma_3} \sigma_\eta [v.\eta] d\Gamma_3$$

En remarquant que $\sigma_\eta [v.\eta] = 0$ *sur* Γ_3 de plus $v^\ell = 0$ *sur* Γ_1^ℓ il en résulte:

$$a(u,v) + b(v, -\sigma_\eta) = \int_{\Omega^1} f^1 v^1 d\Omega^1 + \int_{\Gamma_2^1} \sigma_\eta^1 (v^1.\eta^1) d\Gamma_2^1 + \int_{\Omega^2} f^2 v^2 d\Omega^2 + \int_{\Gamma_2^1} \sigma_\eta^2 (v^2.\eta^2) d\Gamma_2^2$$

Ou encore en utilisant du fait que $\sigma^\ell \eta^\ell = g^\ell$ *sur* Γ_2^ℓ ; $\ell = 1,2$, on a :

$$a(u,v) + b(v, -\sigma_\eta) = \int_{\Omega^1} f^1 v^1 d\Omega^1 + \int_{\Gamma_2^1} g^1 (v^1.\eta^1) d\Gamma_2^1 + \int_{\Omega^2} f^2 v^2 d\Omega^2 + \int_{\Gamma_2^1} g^2 (v^2.\eta^2) d\Gamma_2^2$$

D'où l'égalité (2.3.6).

c/(2.3.7) : On a :

$$\forall \mu \in M : \quad b(u, \mu - \lambda) = b(u, \mu + \sigma_\eta)$$

Ce qui implique que :

$$b(u, \mu - \lambda) = \langle \mu + \sigma_\eta, [u.\eta] \rangle_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\Gamma_3} = \langle \mu, [u.\eta] \rangle_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\Gamma_3} + \langle \sigma_\eta, [u.\eta] \rangle_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\Gamma_3}$$

Moyennant les conditions $\sigma_\eta [u.\eta] = 0$ *sur* Γ_3 et $[u.\eta] \leq 0$ *avec* $\mu \in M$; *sur* Γ_3 , il découle :

$$b(u, \mu - \lambda) = \langle \mu, [u.\eta] \rangle_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\Gamma_3} \leq 0 \ .$$

D'où (2.3.7).

Le lemme précédent nous permet donc de donner la formulation variationnelle suivante :

Problème P_m **:** Trouver $u \in V$ et $\lambda \in M$ tels que :

(2.3.8) $a(u,v)+b(v,\lambda)=L(v), \quad \forall v \in V$

(2.3.9) $b(u,\mu-\lambda)\le 0 \;, \quad \forall \mu \in M$

Remarque2.3.3. Grâce au lemme précédent, il est facile de remarquer que P_m n'est autre qu'une formulation mixte de P_1, où si u est une solution P_1 alors $(u,-\sigma_\eta)$ est une solution du problème P_m.

Lemme2.3.2. On définit l'application suivante :

$$\begin{cases} \mathcal{L} \;: V \times M \to IR \\ \mathcal{L}(v,\mu)=\frac{1}{2}a(v,v)-L(v)+b(v,\mu) \quad : \forall v \in V, \forall \mu \in M \end{cases}$$

Si $(u,\lambda)\in V \times M$ est une solution du problème P_m, alors :

(2.3.10) $\mathcal{L}(u,\mu)\le \mathcal{L}(u,\lambda) \quad : \quad \forall \mu \in M$

(2.3.11) $\mathcal{L}(u,\lambda)\le \mathcal{L}(v,\lambda) \quad : \quad \forall v \in V$

Démonstration.

Moyennant de (2.3.3) et (2.3.9), on a alors :

$$\mathcal{L}(u,\mu)-\mathcal{L}(u,\lambda)=b(u,\mu)-b(u,\lambda)=b(u,\mu-\lambda)\le 0 \quad : \quad \forall \mu \in M$$

A l'autre face

$$\mathcal{L}(u,\lambda)-\mathcal{L}(v,\lambda)=\tfrac{1}{2}a(u,u)-L(u)+b(u,\lambda)-\tfrac{1}{2}a(v,v)+L(v)-b(v,\lambda)$$

On a donc

$$\mathcal{L}(u,\lambda)-\mathcal{L}(v,\lambda)=\tfrac{1}{2}a(u,u)-a(u,u)-\tfrac{1}{2}a(v,v)+a(u,v)$$

Ou encore :

$$\mathcal{L}(u,\lambda)-\mathcal{L}(v,\lambda)=a(u,v)-\tfrac{1}{2}a(u,u)-\tfrac{1}{2}a(v,v)$$

Ce qui implique que :

$$\mathcal{L}(u,\lambda)-\mathcal{L}(v,\lambda)=-\tfrac{1}{2}\left[a(u,u)-2a(u,v)+a(v,v)\right]$$

On obtient donc

$$\mathcal{L}(u,\lambda)-\mathcal{L}(v,\lambda)=-\tfrac{1}{2}\left[a(u-v,u-v)\right]\le 0$$

La lemme2.3.2. nous permet de réécrire P_m comme suit :

Problème $\widetilde{P}_m$ **:** Trouver $u \in V$ et $\lambda \in M$ tels que :

(2.3.12) $\mathcal{L}(u,\mu)\le \mathcal{L}(u,\lambda)\le \mathcal{L}(v,\lambda) \quad : \quad \forall v \in V \;, \; \forall \mu \in M$

Théoréme2.3.1. Soit $u \in V$ *et* $\lambda \in M$ alors les deux hypothèses suivantes sont équivalentes :

(i) (u,λ) est une solution du problème $P_{\boldsymbol{m}}$

(ii) (u,λ) est une solution du problème $\widetilde{P}_m$

Démonstration. L'implication $(i) \Rightarrow (ii)$ est évidente en tenant compte du lemme2.3.2.

Reste à démontrer l'implication inverse $(ii) \Rightarrow (i)$, soit donc (u,λ) une solution du problème $\widetilde{P}_m$ et $v \in V, \mu \in M$, en utilisant l'inégalité (2.3.10), il résulte:

$$\tfrac{1}{2}a(u,u) - L(u) + b(u,\mu) \leq \tfrac{1}{2}a(u,u) - L(u) + b(u,\lambda)$$

C'est à dire que :

$$b(u,\mu) \leq b(u,\lambda)$$

D'où l'inégalité (2.3.9) suivante :

$$b(u,\mu-\lambda) \leq 0$$

En appliquant le théorème de représentation de *Riesz-Frechet* sur la forme linéaire continue

$$v \mapsto L(v) - b(v,\lambda)$$

On déduit qu'il existe un unique élément $\varphi_\lambda \in V$ tel que :

$$L(v) - b(v,\lambda) = \langle \varphi_\lambda, v \rangle \ :\forall v \in V$$

Mais

$$\mathcal{L}(u,\lambda) \leq \mathcal{L}(v,\lambda)$$

C'est-à-dire :

$$\tfrac{1}{2}a(u,u) - \langle \varphi_\lambda, u \rangle \leq \tfrac{1}{2}a(v,v) - \langle \varphi_\lambda, v \rangle, \quad \forall v \in V$$

Ce qui n'est autre que le problème de minimisation de l'énergie $J(u) = \tfrac{1}{2}a(u,u) - \langle \varphi_\lambda, u \rangle$ qui est, dans le cas où $a(.,.)$ est symétrique, équivalant au problème variationnel

$$a(u,u) = \langle \varphi_\lambda, u \rangle$$

Et ceci, en utilisant le théorème du *Lax-Milgram*, on conclut que u est une solution de :

$$a(u,v) = \langle \varphi_\lambda, v \rangle \ : \quad \forall v \in V$$

D'où (2.3.8).

Lemme2.3.3. Si u est une solution du problème $P_{\boldsymbol{1}}$ alors :

(2.3.13) $u \in U_{ad}$

(2.3.14) $a(u, v-u) \geq L(v-u) : \forall v \in U_{ad}$.

Démonstration. Il est clair que $u \in U_{ad}$, (grâce aux hypothèses (1.1.3)-(1.1.5)). Alors il ne reste que de prouver l'inégalité (2.3.14). Pour $(u,-\sigma_\eta)$ solution du problème $\widetilde{P}_m$, on a :

$$\mathcal{L}(u,-\sigma_\eta) \le \mathcal{L}(v,-\sigma_\eta) \ : \quad \forall v \in U_{ad}$$

Ou bien :

(2.3.15) $\quad \frac{1}{2}a(u,u) - L(u) + b(u,-\sigma_\eta) \le \frac{1}{2}a(v,v) - L(v) + b(v,-\sigma_\eta): \quad \forall v \in U_{ad}$

Et puisque $\sigma_\eta[u.\eta] = 0$ sur Γ_3, il résulte :

$$b(u,-\sigma_\eta) = -\int_{\Gamma_3} \sigma_\eta [u.\eta] d\Gamma = 0$$

D'autre part, $\forall v \in U_{ad}$, on a alors $[v.\eta] \le 0$ ce qui nous permet en utilisant le théorème1.1.1. et (2.2.5.b) de conclure que $\sigma_\eta \le 0$, et par conséquent $b(v,-\sigma_\eta) \le 0$.

De (2.3.15), on tire :

$$\frac{1}{2}a(u,u) - L(u) \le \frac{1}{2}a(v,v) - L(v) \ : \quad \forall v \in U_{ad}$$

En appliquant le théorème de *Stampachia* on trouve :

$$a(u,v-u) \ge L(v-u) \ : \quad \forall v \in U_{ad}$$

Remarque2.3.4. Le lemme2.3.3. nous permet d'établir une autre formulation variationnelle classique faible de la forme :

(2.3. 16) $\begin{cases} \text{Trouver} \quad u \in V \quad \text{telque} \ : \\ u \in U_{ad} ; \ a(u,v-u) \ge L(v-u): \quad \forall v \in U_{ad} \end{cases}$

Il est aisé de vérifier que le problème (2.3.16) possède une solution unique, en utilisant le théorème de *Stampachia*.

4. Existence et unicité

Dans ce paragraphe, on donne des résultats d'existence et d'unicité pour le problème considéré :

Lemme1.4.1. Le problème P_m admet une unique solution dans $V \times M$.

Démonstration. En utilisant le théorème1.2.1. et le lemme2.3.1., il résulte que P_m admet au moins une solution de la forme $(u,-\sigma_\eta) \in V \times M$.

Reste à vérifier que cette solution est unique, pour cela on suppose que le problème P_m admet deux solutions (u_1,λ_1), (u_2,λ_2), on a alors :

$$a(u_1,v) + b(v,\lambda_1) = L(v) = a(u_2,v) + b(v,\lambda_2) \ : \quad \forall v \in V$$

Et par conséquent,

(2.4.1) $\quad a(u_1 - u_2, v) + b(v, \lambda_1 - \lambda_2) = 0$

Pour $v = u_1 - u_2 \in V$, de (2.4.1) il résulte :

(2.4.2) $a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) + b(u_1 - u_2, \lambda_1 - \lambda_2) = 0$

Et comme $a(.,.)$ est positive et de plus

$$b(u_1 - u_2, \lambda_1 - \lambda_2) = -(b(u_1, \lambda_2 - \lambda_1) + b(u_2, \lambda_1 - \lambda_2)) \geq 0$$

Il vient :

$$a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = b(u_1 - u_2, \lambda_1 - \lambda_2) = 0$$

Ce qui implique que :

(2.4.3) $u_1 = u_2$

Moyennant (2.4.3) et (2.4.1), on a alors

$$b(v, \lambda_1 - \lambda_2) = 0 \ : \ \forall\, v \in V$$

Il en résulte donc que $\lambda_1 = \lambda_2$.

Théorème2.4.1. Pour $\sigma^\ell = A^\ell \varepsilon(u^\ell), \ell = 1,2$ soient $u \in V$ et $\lambda \in M$, les hypothèses suivantes sont équivalentes :

(i) u est une solution du problème P_1 avec $\lambda = -\sigma_\eta$.

(ii) (u, λ) est une solution du problème P_m .

Démonstration. L'implication $(i) \Rightarrow (ii)$ est claire en utilisant le lemme2.3.1.

Pour l'implication inverse $(ii) \Rightarrow (i)$. Soit $\tilde{u} = (\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$ une solution du problème P_1 ;

Pour $\tilde{\sigma}^\ell = A^\ell \varepsilon(\tilde{u}^\ell)$: $\ell = 1,2$, grâce au lemme2.3.1. on conclut que $(\tilde{u}, -\tilde{\sigma}_\eta)$ est une solution du problème P_m . Ceci nous permet de conclure que $u = \tilde{u}$, en tenant compte du fait que la solution de P_m est unique , donc u est une solution du problème P_1, avec $\lambda = -\sigma_\eta$.

PARTIE II

ETUDE NUMERIQUE D'UN PROBLEME DE CONTACT SANS FROTTEMENT

INTRODUCTION

Dans cette partie, on s'intéresse à l'étude numérique d'un problème de contact sans frottement entre deux corps surfaciques déformables, l'objet de cette partie est d'étudier numériquement de ce même problème précédent pour des matériaux surfaciques homogènes ayant une loi de comportement élastique linéaire.

La formulation variationnelle de ce problème mécanique est donnée par le problème P_m établi dans le second chapitre de la première partie. On sait que ce problème admet une unique solution dans $V \times M$ de la forme $(u, -\sigma_\eta)$.

Pour étudier numériquement ce problème, on suppose que Ω^1, Ω^2 sont des polygones. En utilisant la méthode des éléments finis, le problème P_m (pour $N = 2$) se transforme à un problème variationnel approché, noté par P_m^h **.** Ceci nous permet d'approcher la solution exacte (u, λ) par une solution approchée (u_h, λ_h). On introduit les deux ensembles V_h *et* M_h, où V_h, M_h désignent respectivement le sous espace, de dimension finie approché, de V, M. Cette partie se divise en deux chapitres.

Le premier chapitre est consacré à la résolution numérique du problème $\boldsymbol{P_m}$ qui consiste à approcher la solution exacte (u, λ) par une solution approchée (u_h, λ_h), on utilise la méthode des éléments finis à savoir :

- Eléments finis de type linéaire, $M_h = L_h^{\ell,*}$, $\ell = 1,2$;
- Eléments finis de type quadratique $M_h = Q_h^{\ell,*}$, $\ell = 1,2$.

Pour cela, on aura besoin de quelques techniques telles que :

- Interpolations de *Lagrange* linéaire ou quadratique ;
- Projections.

De plus, et comme dans le chapitre.2, nous examinons la question d'existence et d'unicité d'une solution approchée du problème discrétisé.

Dans le second chapitre, on s’intéresse à l’analyse des erreurs. En utilisant les théorèmes des traces, les injections compactes et continues de *Sobolev*, ainsi que les inégalités d’interpolation et l’inégalité de *Cauchy-Schwartz,* on arrive à donner l’estimation de l’erreur.

CHAPITRE 1

ETUDE VARIATIONNELLE ET NUMERIQUE

Résumé :

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude théorique et numérique d'un problème de contact sans frottement entre deux corps déformables ayant une loi de comportement élastique linéaire. On commence par établir la formulation variationnelle mixte discrétisée du problème mixte P_m considéré dans le deuxième chapitre de la première partie. En suite, on s'intéresse à la résolution numérique du problème P_m qui consiste à approcher la solution exacte (u,λ) par une solution approchée (u_h,λ_h), en utilisant la méthode des éléments finis linéaire et quadratique. Pour cela on aura besoin de quelques techniques de l'analyse numérique telles que la méthode d'interpolation de *Lagrange* linéaire ou quadratique et la méthode de projection.

Contenu :

1. Triangulation des domaines :

Pour chaque corps Ω^ℓ et pour chaque $h_\ell > 0$ $(h_\ell \to 0^+)$, on associe la triangulation $\mathcal{T}_h^\ell$ de Ω^ℓ telle que : $\overline{\Omega^\ell} = \bigcup_{K\in\mathcal{T}_h^\ell} K$ où h_ℓ est un paramètre défini par : $h_\ell = \max\{\mathrm{diam}(K)\ ; K \in \mathcal{T}_h^\ell\}$, on pose que $h = \max(h_1, h_2)$.

On note par ρ_K le diamètre de grand cycle fermée contenu dans K, on suppose que la famille de triangulation $\mathcal{T}_h^\ell, (h_\ell > 0)$ est *régulière*, c'est à dire qu'il existe une constante strictement positive $\alpha > 0$ indépendante du paramètre h telle que :

(3.1.1) $\dfrac{\rho_K}{h_K} \geq \alpha : \quad \forall K \in \bigcup_{h>0} \mathcal{T}_h^\ell \qquad \ell = 1,2 \quad$ où $\quad h_K = \mathrm{diam}(K) = \sup_{x,y\in K} d(x,y)$

Il est clair que les sommets du polygone Ω^ℓ sont des nœuds dans les triangulations $\mathcal{T}_h^\ell$, pour tous entier $q \geq 0$. On note aussi par $P_q(K)$ l'espace des polynômes définies sur K de degré inférieur où égale à q. L'ensemble des nœuds sur Γ_3 de triangulation $\mathcal{T}_h^\ell$ est noté par ξ_h^ℓ, où

$\xi_h^\ell = \left\{ c_1 = x_0^\ell, x_1^\ell, x_2^\ell, \ldots, x_{N_h^\ell+1}^\ell = c_2 \right\}$.

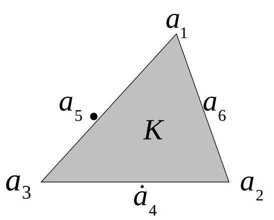
2. Eléments finis. Pour tout $K \in \mathcal{T}_h^1 \cup \mathcal{T}_h^2$, on associe le triple (K, P_K, Σ_K) comme suivant :

i. $P_K = P_2(K)$.

ii. $\sum_K$ est un ensemble des formes linéaires Φ_i défini sur P_K par :

$$\sum_K = \left\{ \Phi_i : P_K \to IR \quad / \quad p \mapsto p(a_i),\ i = \overline{1,6} \right\}$$

iii. On considère pour P_K la base $(p_i)_{i=1,6}$ définie par $p_i(a_j) = \delta_{ij}$, où les $(a_i)_{i=\overline{1,6}}$ désigne les nœuds dans K.



$$\begin{cases} P_K = P_2(K)\ ;\ \dim P_K = 6 \\ \sum_K = \{\Phi_i : P_K \to IR\ /\ p \mapsto p(a_i)\ ;\ 1 \leq i \leq 6\} \end{cases}$$

Figure2. Triangle de *Lagrange*.

Les $(p_i)_{i=1,6}$ sont des polynômes de *Lagrange* tels que $d^0 p_i \leq 2$ qui sont appelés les fonctions de base des éléments finis (K, P_K, Σ_K) et on a alors :

$$p=\sum_{i=1}^{6} p(a_i).p_i \ : \quad \forall p\in P_K$$

On suppose que tous les $K\in \mathcal{T}_h^1 \cup \mathcal{T}_h^2$, sont *affine-équivalents*, c'est-à-dire que tous les K ayant le même élément fini, $(\hat{K},\hat{P},\hat{\Sigma})$, de référence de la famille $\mathcal{T}_h^1 \cup \mathcal{T}_h^2$, autrement dit, pour tous $K\in \mathcal{T}_h^1 \cup \mathcal{T}_h^2$, il existe une application affine inversible définie par :

(3.2.1) $$\begin{cases} F_K : \hat{K} \to K \\ F_K(\hat{x}) = x = B_K\hat{x} + b_K \end{cases}$$

Et telle que :

(3.2.2) $$\begin{cases} K = F_K(\hat{K}) \\ P_K = \left\{ p : K \to IR \ / \quad p = \hat{p}.F_K^{-1} \ \& \ \hat{p}\in \hat{P} \right\} \\ a_i = F_K(\hat{a}_i), \ i = \overline{1,6} \end{cases}$$

Où les $\hat{a}_i$ sont les sommets de $\hat{K}$.

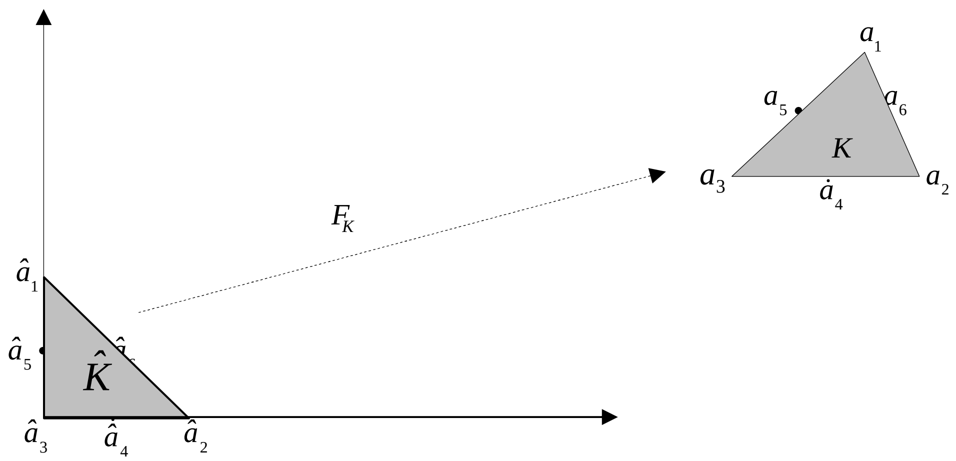


Figure3. Paramétrisation des faces $K\subset \overline{\Omega}^1 \cup \overline{\Omega}^2$

Dans la suite on aura besoin de la propriété suivante :

(3.2.3) $\hat{P} = P_2(\hat{K}) \subset H^1(\hat{K})$.

3. Espaces discrets.

On définit les espaces approchés sur Ω^ℓ comme suit :

(3.3.1) $V_h(\Omega^\ell) = \left\{ v_h^\ell \in C(\overline{\Omega}^\ell)^2 \ / \ v_h^\ell\big|_K \in (P_2(K))^2 ; \quad \forall K\in \mathcal{T}_h^\ell \ et \quad v_h^\ell\big|_{\Gamma_1^\ell} = 0 \right\}$

(3.3.2) $V_h = V_h(\Omega^1)\times V_h(\Omega^2)$.

(3.3.3) $W_h^\ell(\Gamma_3) = \left\{ \psi_h \in C(\overline{\Gamma}_3) \ / \ \exists v_h^\ell \in V_h(\Omega^\ell); \ v_h^\ell.\eta^\ell = \psi_h \ \ p.p \ \text{ sur } \Gamma_3 \right\}$

Il est clair que les sous espaces V_h, $W_h^\ell(\Gamma_3)$ sont des sous-espace fermés de dimensions finis de V, $IL^2(\Gamma_3)$ respectivement.

On approxime le cône fermé convexe M de $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)$ par sous ensemble de $W_h^\ell(\Gamma_3)$, pour cela on définie les ensembles Q_h^ℓ (respectivement : L_h^ℓ) des fonctions dans $W_h^\ell(\Gamma_3)$ non négatif sur Γ_3 (respectivement : sur ξ_h^ℓ) c'est-à-dire :

(3.3.4) $Q_h^\ell = \{\mu_h \in W_h^\ell(\Gamma_3) \ / \ \mu_h \geq 0 \ sur \ \Gamma_3\}$

(3.3.5) $L_h^\ell = \{\mu_h \in W_h^\ell(\Gamma_3) \ / \ \mu_h(x) \geq 0 \ : \ \forall x \in \xi_h^\ell\}$

on définie les cônes polaires positives $Q_h^{\ell,*}$ (respectivement $L_h^{\ell,*}$)de cône Q_h^ℓ (respectivement L_h^ℓ) comme suivant :

(3.3.6) $Q_h^{\ell,*} = \left\{ \mu_h \in W_h^\ell(\Gamma_3) \ / \ \int_{\Gamma_3} \mu_h \psi_h \geq 0 \quad \forall \psi_h \in Q_h^\ell \right\}$

(3.3.7) $L_h^{\ell,*} = \left\{ \mu_h \in W_h^\ell(\Gamma_3) \ / \ \int_{\Gamma_3} \mu_h \psi_h \geq 0 \quad \forall \psi_h \in L_h^\ell \right\}$

Puisque $Q_h^\ell \subset L_h^\ell$, on alors immédiatement que $L_h^{\ell,*} \subset Q_h^{\ell,*}$.

Le cône convexe $Q_h^{\ell,*}$ l'approximation de type quadratique de M et le cône convexe $L_h^{\ell,*}$ l'approximation de type linéaire de M .

4. Problème discret.

Dans ce paragraphe, on va utiliser tous les sous espaces qu'on a construit auparavant et qui sont de dimensions finies. On considère la formulation variationnelle discrétisée du problème mixte P_m qui sera notée par P_m^h et elle est donnée par :

Problème P_m^h **:** trouver $u_h \in V_h$ et trouver $\lambda_h \in M_h$ tel que :

(3.4.1) $a(u_h, v_h) + b(v_h, \lambda_h) = L(v_h) : \ \forall v_h \in V_h$.

(3.4.2) $b(u_h, \mu_h - \lambda_h) \leq 0 : \ \forall \mu_h \in M_h$.

Avec $M_h = Q_h^{\ell,*}$ ou $M_h = L_h^{\ell,*}$, les fonctions $a(.,.), b(.,.)$ et $L(.)$ sont données respectivement par les relations (2.3.3), (2.3.4) et (2.3.5).

On note par (u_h, λ_h) la solution du problème discrétisé P_m^h**,** qui désigne aussi la solution approchée de (u, λ) en utilisant la méthode des éléments finis.

Remarque3.4.1. Soit $\mu_h \in W_h^\ell(\Gamma_3)$ tel que $b(v_h, \mu_h) = 0 : \ \forall v_h \in V_h$

Par définition on a :

$$\forall \mu_h \in W_h^\ell(\Gamma_3)\ ;\ \exists v_h^\ell \in V_h(\Omega^\ell) \text{ tel que } v_h^\ell.\eta^\ell = \mu_h \text{ sur } \Gamma_3$$

En posant : $v_h = \begin{cases} (v_h^1, 0) : \text{si } \ell = 1 \\ (0, v_h^2) : \text{si } \ell = 2 \end{cases}$,

Il vient $[v_h.\eta] = v_h^\ell.\eta^\ell = \mu_h$, et comme $b(v_h, \mu_h) = 0$

On a

$$\langle \mu_h, v_h^\ell.\eta^\ell \rangle_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\Gamma_3} = 0$$

D'où

$$\int_{\Gamma_3} |\mu_h|^2 \, d\Gamma_3 = 0$$

On en déduit que $\mu_h = 0$ $p.p$ sur Γ_3

Cette remarque nous permet de conclure le résultat suivant :

(3.4.3) $\{\mu_h \in W_h^\ell(\Gamma_3)\ /\ b(v_h, \mu_h) = 0 : \forall v_h \in V_h\} = \{0\}$.

Lemme3.4.1. Il existe une constante $\beta_h > 0$ qui dépend de h telle que :

(3.4.4) $$\inf_{\mu_h \in W_h^\ell(\Gamma_3)} \sup_{v_h \in V_h} \frac{b(v_h, \mu_h)}{\|v_h\| \|\mu_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)}} \geq \beta_h$$

Démonstration : On observe que $\displaystyle \inf_{\mu_h \in W_h^\ell(\Gamma_3)} \sup_{v_h \in V_h} \frac{b(v_h, \mu_h)}{\|v_h\| \|\mu_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)}} = \inf_{\substack{\mu_h \in W_h^\ell(\Gamma_3) \\ \|\mu_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)} = 1}} \sup_{v_h \in V_h} \frac{b(v_h, \mu_h)}{\|v_h\|}$

Le sous espace $\left\{\mu_h \in W_h^\ell(\Gamma_3)\ /\ \|\mu_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)} = 1\right\}$ est compact en tenant compte du fait qu'il est fermé et borné dans l'espace du dimension fini $W_h^\ell(\Gamma_3)$,On démontre l'inégalité (3.4.4) par absurde, en effet si on suppose que l'inégalité en question est fausse, on a alors

$$\inf_{\substack{\mu_h \in W_h^\ell(\Gamma_3) \\ \|\mu_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)} = 1}} \sup_{v_h \in V_h} \frac{b(v_h, \mu_h)}{\|v_h\|} = 0$$

Donc il existe $\mu_h \in W_h^\ell(\Gamma_3)$ tel que ;

$$\|\mu_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)} = 1 \text{ et } \sup_{v_h \in V_h} \frac{b(v_h, \mu_h)}{\|v_h\|} = 0$$

C'est à dire $b(v_h, \mu_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h$

En utilisant (3.4.3), on a alors $\mu_h = 0$, ceci constitue une contradiction avec le fait $\|\mu_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)} = 1$.

D'où la démonstration.

Il est clair que $a(.,.)$ est un forme bilinéaire V_h-elliptique.

On sait que l'espace $W_h^\ell(\Gamma_3)$ est fermé dans $IL^2(\Gamma_3)$, d'où on déduit l'existence d'une projection notée par π_h^ℓ définie par :

$$\begin{cases} \pi_h^\ell : IL^2(\Gamma_3) \to W_h^\ell(\Gamma_3) \\ \quad \psi \mapsto \pi_h^\ell(\psi) \end{cases}$$

Telle que :

(3.4.5) $\int_{\Gamma_3} (\pi_h^\ell \psi - \psi)\mu_h \, d\Gamma_3 = 0 \ : \ \forall \mu_h \in W_h^\ell(\Gamma_3).$

La fonction $\pi_h^\ell \lambda$ désigne projection de la fonction λ sur l'espace $W_h^\ell(\Gamma_3)$.

Soient K_h^Q *et* K_h^L les deux sous espaces de V_h qui sont donnés comme suivant :

(3.4.6) $K_h^Q = \{ v_h = (v_h^1, v_h^2) \in V_h \ \ / \ \ \pi_h^\ell [v_h.\eta] \le 0 \ \text{ sur } \ \Gamma_3 \}$

(3.4.7) $K_h^L = \{ v_h = (v_h^1, v_h^2) \in V_h \ \ / \ \ \pi_h^\ell [v_h.\eta](x) \le 0, \ \ \forall x \in \xi_h^\ell \}$

Définition.3.4.1.

L'ensemble X est appelé cône si et seulement si,

$$\forall x \in X \ ; \ \ \forall \lambda \ge 0 \ : \ \lambda . x \in X$$

Soit X un cône, on note par X^* le cône polaire positif du cône X défini par :

(3.4.8) $X^* = \left\{ \mu_h \in W_h^\ell(\Gamma_3) \ \ / \ \ \int_{\Gamma_3} \mu_h \psi_h \, d\Gamma_3 \ge 0 \quad : \forall \psi_h \in X \right\}$

Lemme.3.4.2. Soit X est un cône convexe fermé de $W_h^\ell(\Gamma_3)$, alors :

(3.4.9) $(X^*)^* = X$

Démonstration.

a) On commence par l'inclusion $X \subset (X^*)^*$ **:**

Pour $\mu_h \in X$, on a $\int_{\Gamma_3} \psi_h \mu_h \, d\Gamma_3 \ge 0 \quad : \forall \psi_h \in X^*$

Ce qui implique que $\mu_h \in (X^*)^*$, d'où l'inclusion $X \subset (X^*)^*$

b) Reste à vérifier l'inclusion inverse : $(X^*)^* \subset X$ **:**

Soit $\mu_h \notin X$, d'après le théorème de *Hahn-Banach* (deuxième forme géométrie), il résulte qu'ils existent une forme linéaire F_h et un nombre $\alpha \in IR$, tels que

(3.4.10) $F_h(\mu_h) < \alpha < F_h(\psi_h) \;:\; \forall \psi_h \in X$

En appliquant le théorème de représentation du *Riez-Fréchet*, il résulte qu'il existe $\phi_h \in W_h^{\ell}(\Gamma_3)$ tel que:

(3.4.11) $F_h(\psi_h) = \int_{\Gamma_3} \phi_h \psi_h d\Gamma_3 \;:\forall \psi_h \in W_h^{\ell}(\Gamma_3)$

Et, en prenant $\psi_h = 0 \in X$ dans (3.4.10), il vient :

(3.4.12) $\alpha < 0$

On vérifie que $F_h(\psi_h) \geq 0 \;:\; \forall \psi_h \in X$

On suppose à présent qu'il existe $\phi_h \in X$ tel que

$$F_h(\psi_h) = \int_{\Gamma_3} \phi_h \psi_h d\Gamma_3 < 0$$

Puisque $\beta\psi_h \in X \;, \forall \beta > 0$, si on remplace ψ_h par $\beta\psi_h$ dans (3.4.12), il vient

$$\alpha < \beta F_h(\psi_h) \qquad \forall \beta > 0$$

Et en faisant tendre β *vers* $+\infty$, on déduit que $\alpha \leq -\infty$ ceci constitue une contradiction avec le fait que α soit un réel. On déduit alors ;

$$F_h(\psi_h) = \int_{\Gamma_3} \phi_h \psi_h d\Gamma_3 \geq 0, \quad \forall \psi_h \in X$$

C'est à dire

(3.4.13) $\phi_h \in X^*$

Moyennant (3.4.11)-(3.4.14), on a alors

$$\int_{\Gamma_3} \phi_h \mu_h d\Gamma_3 < 0$$

De plus de (3.4.13), on a $\mu_h \notin (X^*)^*$

D'où on tire $(X^*)^* \subset X$.

Par ceci on termine la démonstration.

On déduit que le cône polaire positive de cône $Q_h^{\ell,*}$ (respectivement de $L_h^{\ell,*}$) vérifie

(3.4.14) $(Q_h^{\ell,*})^* = Q_h^{\ell}$ et $(L_h^{\ell,*})^* = L_h^{\ell}$

Proposition.3.4.1. Soit $M_h = Q_h^{\ell,*}$ ou $M_h = L_h^{\ell,*}$, $\ell = 1,2$.

S'il existe une solution $(u_h, \lambda_h) \in V_h \times M_h$ du problème discrétisé P_m^h alors u_h est une solution d'inéquation variationnelle discrétisée classique suivante :

(3.4.15) $u_h \in K_h \ : a(u_h, v_h - u_h) \geq L(v_h - u_h) : \forall v_h \in K_h$

Avec $K_h = K_h^Q$ si $M_h = Q_h^{\ell,*}$ et $K_h = K_h^L$ si $M_h = L_h^{\ell,*}$

Démonstration. Pour $\mu_h = 0 \in M_h$ et pour $\mu_h = 2\lambda_h \in M_h$ dans (3.4.2), il résulte :

(3.4.16) $b(u_h, \lambda_h) = 0$

En utilisant (3.4.2), (3.4.16) et (3.4.5), il en découle :

$$b(u_h, \mu_h - \lambda_h) = b(u_h, \mu_h) = \int_{\Gamma_3} \mu_h [u_h.\eta] d\Gamma_3 = \int_{\Gamma_3} \mu_h \pi_h^{\ell} [u_h.\eta] d\Gamma_3 \leq 0 \ : \ \forall \mu_h \in M_h$$

Ou encore :

$$b(u_h, \mu_h - \lambda_h) \leq 0 \ : \forall \mu_h \in M_h$$

Ce qui implique que

(3.4.17) $-\pi_h^{\ell}[u_h.\eta] \in M_h^*$

a). pour $M_h = Q_h^{\ell,*}$:

En utilisant (3.4.9) et (3.4.17), on obtient :

(3.4.18) : $-\pi_h^{\ell}[u_h.\eta] \in Q_h^{\ell}$ ce qui implique que $u_h \in K_h^Q$

Et de (3.4.1)-(3.4.16), on tire :

(3.4.19) $a(u_h, u_h) = L(u_h)$

Posant $v_h \in K_h^Q$: et puisque $\lambda_h \in M_h = Q_h^{\ell,*}$, on a alors

(3.4.20) $a(u_h, v_h) - L(v_h) = -b(v_h, \lambda_h) = -\int_{\Gamma_3} \lambda_h [v_h.\eta] d\Gamma_3 = -\int_{\Gamma_3} \lambda_h \pi_h^{\ell} [v_h.\eta] d\Gamma_3 \geq 0$

On déduire que

(3.4.21) $a(u_h, v_h) \geq L(v_h) : \ \forall v_h \in K_h^Q$

Moyennant de (3.4.19) et (3.4.21), on a alors

$$a(u_h, v_h - u_h) \geq L(v_h - u_h) : \forall v_h \in K_h^Q$$

Donc u_h est une solution du problème discret classique (3.4.15) pour $K_h = Q_h^{\ell,*}$.

b). pour $M_h = L_h^{\ell,*}$:

Moyennant (3.4.9) et (3.4.17) on a :

(3.4.22) $-\pi_h^{\ell}[u_h.\eta] \in L_h^{\ell}$, c'est à dire $u_h \in K_h^L$

En utilisant (3.4.1)-(3.4.16), on déduit :

(3.4.23) $a(u_h, u_h) = L(u_h)$

Pour tous $v_h \in K_h^L$: puisque $\lambda_h \in M_h = L_h^{\ell,*}$, on a alors :

(3.4.24) : $a(u_h,v_h)-L(v_h)=-b(v_h,\lambda_h)=-\int_{\Gamma_3}\lambda_h[v_h.\eta]d\Gamma_3=-\int_{\Gamma_3}\lambda_h\pi_h^\ell[v_h.\eta]d\Gamma_3\geq 0$

On a donc

(3.4.25) $a(u_h,v_h)\geq L(v_h)\ :\forall v_h\in K_h^L$

En moyennant de (3.4.23) et (3.4.25) , on a alors

$$a(u_h,v_h-u_h)\geq L(v_h-u_h)\ :\forall v_h\in K_h^L$$

Donc u_h est un solution du problème discret classique (3.4.15) pour $K_h=L_h^{\ell,*}$.

Remarque.3.4.2. Si les deux mèches est convenable (i.e : $\xi_h^1=\xi_h^2$) alors $W_h^1(\Gamma_3)=W_h^2(\Gamma_3)$ et par conséquent, pour tout $v_h=(v_h^1,v_h^2)\in V_h$ on a $[v_h.\eta]=v_h^1.\eta^1+v_h^2.\eta^2\in W_h^1(\Gamma_3)$, le relation (3.4.15) peut réécrire comme suit :

$$a(u_h,v_h)-L(v_h)=-\int_{\Gamma_3}\lambda_h[v_h.\eta]d\Gamma_3\leq 0 \text{ si } v_h\in K_h^Q$$

Remarque.3.4.3. Lorsque l'ensemble K_h est un convexe, fermé et non vide dans V_h et puisque $a(.,.)$ est une forme bilinéaire continue V_h-elliptique et $L(.)$ est un forme linéaire continue sur V_h alors l'inéquation variationnelles (3.4.15) admet unique solution $u_h\in K_h$ (grâce théorème du *Stampachia*) .

Proposition.3.4.2. Pour $\sigma_h^\ell=A^\ell\varepsilon(u_h^\ell)$, si u_h est une solution du problème discrétisé classique (3.4.15), alors le couple (u_h,σ_h) satisfaisant les hypothèses suivantes :

(3.4.26) $Div\sigma_h^\ell+f^\ell=0$ sur Ω^ℓ

(3.4.27) $u_h^\ell=0$ sur Γ_1^ℓ

(3.4.28) $\sigma_h^\ell\eta^\ell=g^\ell$ sur Γ_2^ℓ

(3.4.29) $\begin{cases}(a):(\sigma_h^1)_{\eta^1}=(\sigma_h^2)_{\eta^2}=\sigma_\eta^h\\(b):\sigma_\eta^h\leq 0\end{cases}$ sur Γ_3

Démonstration.

a).(3.4.26) : Pour tout $\Phi^\ell\in D^\ell\left(\equiv D(\Omega^\ell)^2\right)$, on pose $\Phi=(\Phi^1,\Phi^2)$ avec $\Phi^{3-\ell}=0$; en substituant $v_h=u_h\pm\Phi\in K_h$ dans (3.4.15), on obtient :

$$\left\langle A^\ell\varepsilon(u_h^\ell),\varepsilon(v_h^\ell-u_h^\ell)\right\rangle_{\mathcal{H}^\ell}=\int_{\Omega^\ell}f^\ell(v_h^\ell-u_h^\ell).d\Omega^\ell$$

En utilisant la formule de *Green* avec $\sigma_h^\ell=A^\ell\varepsilon(u_h^\ell)$, il découle :

$$-\left\langle Div\sigma_h^{\ell},\varphi^{\ell}\right\rangle_{H^{\ell}}=\left\langle f^{\ell},\varphi^{\ell}\right\rangle_{H^{\ell}}$$

D’où la condition (3.4.26) ;

b).(3.4.27) : Immédiatement grâce $u_h \in V_h$;

c).(3.4.28) : Soit $\omega^{\ell} \in H_1^{\ell}$ telle que $\omega^{\ell}=0$ sur $\Gamma_1^{\ell}\cup\Gamma_3$ et $\omega_{\tau}^{\ell}=0$ sur Γ_1^{ℓ} ; $\ell=1,2$,

Si on pose $\omega=\left(\omega^1,\omega^2\right)$ avec $\omega^{3-\ell}=0$ et pour $v_h=u_h\pm\omega\in K_h$, de (3.4.15), on tire :

$$\left\langle A^{\ell}\varepsilon\left(u_h^{\ell}\right),\varepsilon\left(\omega^{\ell}\right)\right\rangle_{\mathcal{H}^{\ell}}=\left\langle f^{\ell},\omega^{\ell}\right\rangle_{H^{\ell}}+\left\langle g^{\ell},\omega^{\ell}\eta^{\ell}\right\rangle_{H'_{\Gamma_2^{\ell}}\times H_{\Gamma_2^{\ell}}}$$

En utilisant la formule de *Green* avec $\sigma_h^{\ell}=A^{\ell}\varepsilon\left(u_h^{\ell}\right)$, il en découle :

$$\left\langle \sigma_h^{\ell}\eta^{\ell},\omega^{\ell}\eta^{\ell}\right\rangle_{H'_{\Gamma^{\ell}}\times H_{\Gamma^{\ell}}}-\left\langle Div\sigma_h^{\ell},\omega^{\ell}\right\rangle_{H^{\ell}}=\left\langle f^{\ell},\omega^{\ell}\right\rangle_{H^{\ell}}+\left\langle g^{\ell},\omega^{\ell}\eta^{\ell}\right\rangle_{H'_{\Gamma_2^{\ell}}\times H_{\Gamma_2^{\ell}}}$$

Ou encore :

$$\left\langle \sigma_h^{\ell}\eta^{\ell},\omega^{\ell}\eta^{\ell}\right\rangle_{H'_{\Gamma_2^{\ell}}\times H_{\Gamma_2^{\ell}}}=\left\langle g^{\ell},\omega^{\ell}\eta^{\ell}\right\rangle_{H'_{\Gamma_2^{\ell}}\times H_{\Gamma_2^{\ell}}}$$

D’où la hypothèse (3.4.28) ;

d).(3.4.29.a) : on a

$\forall\omega_h^{\ell}\in \mathrm{H}_1^{\ell}$ / $\omega_h^{\ell}=0$ sur $\Gamma_1^{\ell}\cup\Gamma_2^{\ell}$ et $\left(\omega_h^{\ell}\right)_{\tau}=0$ sur Γ_3 : $\ell=1,2$, avec $[\omega.\eta]=0$

Pose $\omega=\left(\omega^1,\omega^2\right)$ et pose : $v_h=u_h\pm\omega\in K_h$, on utilise l’inégalité (3.4.15),

On a alors

$$\sum_{\ell=1}^{2}\left\langle A^{\ell}\varepsilon\left(u_h^{\ell}\right),\varepsilon\left(\omega^{\ell}\right)\right\rangle_{\mathcal{H}^{\ell}}=\sum_{\ell=1}^{2}\left\langle f^{\ell},\omega^{\ell}\right\rangle_{H^{\ell}}$$

On utilise la *formule de Green* avec $\sigma_h^{\ell}=A^{\ell}\varepsilon\left(u_h^{\ell}\right)$, on a

$$\sum_{\ell=1}^{2}\left\langle \sigma_h^{\ell}\eta^{\ell},\omega^{\ell}\eta^{\ell}\right\rangle_{H'_{\Gamma^{\ell}}\times H_{\Gamma^{\ell}}}-\sum_{\ell=1}^{2}\left\langle Div\,\sigma_h^{\ell},\omega^{\ell}\right\rangle_{H^{\ell}}=\sum_{\ell=1}^{2}\left\langle f^{\ell},\omega^{\ell}\right\rangle_{H^{\ell}}$$

C'est à dire

$$\sum_{\ell=1}^{2}\left\langle \sigma_h^{\ell}\eta^{\ell},\omega^{\ell}\eta^{\ell}\right\rangle_{H'_{\Gamma^{\ell}}\times H_{\Gamma^{\ell}}}=0$$

On obtient ainsi

$$\left\langle \sigma_h^{1}\eta^{1},\omega^{1}\eta^{1}\right\rangle_{H'_{\Gamma_3}\times H_{\Gamma_3}}=\left\langle \sigma_h^{2}\eta^{2},\omega^{1}\eta^{1}\right\rangle_{H'_{\Gamma_3}\times H_{\Gamma_3}}$$

Il résulte (3.4.29.a)

e).(3.4.29.b) Pour tout $\omega_h^1\in H_1^1$ avec $\omega_h^1=0$ sur $\Gamma_1^1\cup\Gamma_2^1$, $\left(\omega_h^1\right)_{\tau}=0$ sur Γ^1 et $\left(\omega_h^1\right)_{\eta}=0$ sur Γ_3 , et pour $v_h=u_h+\left(\omega_h^1,0\right)\in K_h$, de(3.4.15) , on tire :

$$\sum_{\ell=1}^{2}\left\langle A^{\ell}\varepsilon\left(u_h^{\ell}\right),\varepsilon\left(\omega^{\ell}\right)\right\rangle_{\mathcal{H}^{\ell}} \geq \sum_{\ell=1}^{2}\left\langle f^{\ell},\omega^{\ell}\right\rangle_{H^{\ell}}$$

On obtient donc

$$\left\langle \sigma_h^1\eta^1,\omega^1\eta^1\right\rangle_{H'_{\Gamma^1}\times H_{\Gamma^1}} - \left\langle Div\sigma_h^1,\omega^1\right\rangle_{H^1} \geq \left\langle f^1,\omega^1\right\rangle_{H^1}$$

On a alors

$$\left\langle \sigma_h^1\eta^1,\omega^1\eta^1\right\rangle_{H'_{\Gamma^1}\times H_{\Gamma^1}} \geq 0$$

Il vient (3.4.29.b).

Par ceci on termine la démonstration.

Théorème.3.4.1. Si $M_h = Q_h^{\ell,*}$ ou $M_h = L_h^{\ell,*}$; $\ell = 1,2$**,** le problème P_m^h possède une solution unique $\left(u_h,\lambda_h\right)$ dans $V_h \times M_h$**.**

Démonstration.

1^er^ étape : <u>Existence</u>

En appliquant le théorème du *Stampachia* pour le problème (3.4.15), on déduit l'existence et l'unicité d'une solution u_h de K_h telle que (3.4.15) .On pose $\sigma_h^{\ell} = A^{\ell}\varepsilon\left(u_h^{\ell}\right)$, (3.4.29) et pour $\lambda_h = -\sigma_\eta^h$ sur Γ_3 ; on vérifie que $\left(u_h,\lambda_h\right)$ est une solution du problème P_m^h ;

a)-(3.4.1). Par définition, on a

$$a\left(u_h,v_h\right)+b\left(v_h,\lambda_h\right)=\sum_{\ell=1}^{2}\int_{\Omega^{\ell}} A^{\ell}\varepsilon\left(u_h^{\ell}\right).\varepsilon\left(v_h^{\ell}\right)d\Omega^{\ell} + \int_{\Gamma_3}\lambda_h\left[v_h.\eta\right]d\Gamma_3$$

En utilisant la loi de comportement $\sigma_h^{\ell} = A^{\ell}\varepsilon\left(u_h^{\ell}\right)$, avec $\lambda_h = -\sigma_\eta^h$, il en découle :

$$a\left(u_h,v_h\right)+b\left(v_h,\lambda_h\right)=\sum_{\ell=1}^{2}\int_{\Omega^{\ell}}\sigma_h^{\ell}.\ \varepsilon\left(v_h^{\ell}\right)d\Omega^{\ell} - \int_{\Gamma_3}\sigma_\eta\left[v_h.\eta\right]d\Gamma_3$$

En appliquant la formule de *Green*, on obtient :

$$a\left(u_h,v_h\right)+b\left(v_h,\lambda_h\right)=\sum_{\ell=1}^{2}\int_{\Gamma^{\ell}}\sigma_h^{\ell}\eta^{\ell}.v_h^{\ell}\eta^{\ell}d\Gamma^{\ell} - \sum_{\ell=1}^{2}\int_{\Omega^{\ell}}Div\sigma_h^{\ell}.\ v_h^{\ell}d\Omega^{\ell} - \int_{\Gamma_3}\sigma_\eta\left[v_h.\eta\right]d\Gamma_3$$

En utilisant (3.4.29.a), (3.4.28) et (3.4.26), on obtient :

$$a\left(u_h,v_h\right)+b\left(v_h,\lambda_h\right)=\sum_{\ell=1}^{2}\int_{\Gamma_2^{\ell}}g^{\ell}.v_h^{\ell}\eta^{\ell}d\Gamma^2 + \sum_{\ell=1}^{2}\int_{\Omega^{\ell}}f^{\ell}.\ v_h^{\ell}d\Omega^{\ell}$$

D'où la condition (3.4.1).

b)-(3.4.2). Par définition de l'ensemble K_h, on a $-\pi_h^{\ell}\left[u_h.\eta\right]\in M_h^*$, et de $\mu_h^{\ell} \in M_h$,on tire :

(3.4.30) $$\left\langle \mu^h,\left[u_h.\eta\right]\right\rangle_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\Gamma_3} = \int_{\Gamma_3}\mu^h\pi_h^{\ell}\left[u_h.\eta\right]d\Gamma_3 \leq 0$$

De (3.4.29.b), on tire $-\sigma_h^\ell \in M_h^*$, et de (3.4.30) pour $\lambda_h = \mu_h^\ell$, on conclut :

(3.4.31) $$\left\langle \sigma_h^\ell, [u_h.\eta] \right\rangle_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\Gamma_3} = \int_{\Gamma_3} \sigma_h^\ell \pi_h^\ell [u_h.\eta] d\Gamma_3 \le 0$$

Moyennant (3.4.30) et (3.4.31) , on obtient la condition (3.4.2).

2er étape ; **Unicité** ;

Soient $(u_h, \lambda_h), (\tilde{u}_h, \tilde{\lambda}_h)$ deux solution du problème P_m^h , on a alors :

$$a(u_h, v_h) + b(v_h, \lambda_h) = L(v_h) = a(\tilde{u}_h, v_h) + b(v_h, \tilde{\lambda}_h), \quad \forall v_h \in V_h$$

Il vient

(3.4.32) $a(u_h - \tilde{u}_h, v_h) + b(v_h, \lambda_h - \tilde{\lambda}_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h$

En prend $v_h = u_h - \tilde{u}_h$, d'où par (3.4.32) ,on a

$$a(u_h - \tilde{u}_h, u_h - \tilde{u}_h) + b(u_h - u_h, \lambda_h - \tilde{\lambda}_h) = 0$$

En utilisant (3.4.2), on a

$$b(u_h - \tilde{u}_h, \lambda_h - \tilde{\lambda}_h) = -\left[b(u_h, \tilde{\lambda}_h - \lambda_h) + b(\tilde{u}_h, \lambda_h - \tilde{\lambda}_h) \right] \ge 0$$

Et grâce la positivité de l'opérateur $a(.,.)$, on a alors :

$$a(u_h - \tilde{u}_h, u_h - \tilde{u}_h) = 0$$

On a alors $u_h - \tilde{u}_h = 0$, c'est à dire $u_h = \tilde{u}_h$.

En utilisant maintenant l'égalité (3.4.32) avec $u_h = \tilde{u}_h$, on déduit que :

$$b(v_h, \lambda_h - \tilde{\lambda}_h) = 0; \quad \forall v_h \in V_h$$

Et de (3.4.3), on obtient : $\lambda_h = \tilde{\lambda}_h$.

Maintenant on approche λ par la solution interpolée comme suivant :

5. Interpolation du Lagrange :

5.1. Interpolation surfacique :

Soit $T_i^\ell = [x_i^\ell, x_{i+1}^\ell]$: $(0 \le i \le N_h^\ell)$ les segments des triangulations Ω^ℓ dans Γ_3 .Soit les $\varphi_i^\ell : 0 \le i \le N_h^\ell + 1$, les fonctions de base du *Lagrange* sur Γ_3 qui sont continues et telles que :

$$\begin{cases} \varphi_i^\ell (x_j^\ell) = \delta_{ij} \\ \varphi_i^\ell \big|_{T_i^\ell} \in P_1(T_j^\ell) \quad \text{si} \quad |j - i| \le 1 \\ \varphi_i^\ell \big|_{T_j^\ell} \equiv 0 \quad \text{si} \quad |j - i| \ge 2 \end{cases}$$

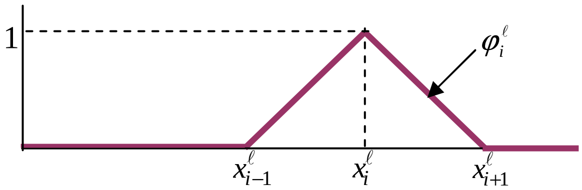


Figure 2. Graphe représentant la fonction de base *du Lagrange* φ_i^ℓ .

On note par i_h^ℓ l'interpolation du *Lagrange* sur Γ_3 associée aux segments T_i^ℓ, $i=\overline{1,N_h^\ell}$. Alors la solution approchée interpolé de λ est donnée par :

(3.5.1) $\quad i_h^\ell \lambda = \sum_{k=0}^{N_h^\ell+1} \lambda(x_k^\ell)\varphi_k^\ell$

Remarque.3.5.1. Soit $\overline{\Gamma}_1^\ell \cap \overline{\Gamma}_3 = \phi$. On pose $h < des(\Gamma_1^\ell, \Gamma_3)$. Alors pour chaque $k=\overline{0,N_h^\ell+1}$, il existe une fonction v_k^ℓ telle que :

$$v_k^\ell \in C(\overline{\Omega}^\ell)^2 \;\; ; \; v_k^\ell\big|_{\Gamma_1^\ell} = 0 \quad : \forall k = 0,\ldots,N_h^\ell+1; \text{ avec } v_k^\ell.\eta^\ell = \varphi_k^\ell \text{ sur } \Gamma_3 \quad \text{(voir Fig.3)}$$

C'est à dire

$$\varphi_k^\ell \in W_h^\ell(\Gamma_3) \; : \quad \forall k = o,\ldots,N_h^\ell+1.$$

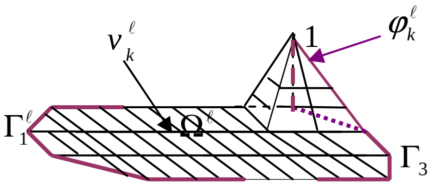


Figure3. représenté la fonction v_k^ℓ pour la condition $\overline{\Gamma}_1^\ell \cap \overline{\Gamma}_3 = \phi$

On conclut que pour toute fonction ψ définie sur Γ_3, on a : $i_h^\ell \psi \in W_h^\ell(\Gamma_3)$, ou encore :

(3.5.2) $\quad \pi_h^\ell(i_h^\ell \psi) = i_h^\ell \psi$

Remarque.3.5.2. Il existe une constante $c=c(m)>0$ tel que :

(3.5.3) $\quad \|\psi\|_{H^m(\Gamma_3)} \le \varepsilon \|\psi\|_{H^{m+1}(\Gamma_3)} + c\varepsilon^{-1} \|\psi\|_{H^{m-1}(\Gamma_3)} \; : \forall \psi \in H^{m+1}(\Gamma_3), \; \forall \varepsilon > 0$

Justification: En utilisant l'inégalité d'interpolation, on a alors

$$\|\psi\|_{H^m(\Gamma_3)} \le c\|\psi\|_{H^{m+1}(\Gamma_3)}^{\frac{1}{2}} \times \|\psi\|_{H^{m-1}(\Gamma_3)}^{\frac{1}{2}}$$

Maintenant en appliquant la relation $a.b \le \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} b^2$, on a (3.5.3) **.**

Proposition.3.5.1. Les opérateurs i_h^ℓ sont stables sur $H^1(\Gamma_3)$, autrement dit, il existe une constante $c > 0$ telle que :

(3.5.4) $\quad \left\| i_h^\ell \psi \right\|_{H^1(\Gamma_3)} \le c \left\| \psi \right\|_{H^1(\Gamma_3)} \quad \forall \psi \in H^1(\Gamma_3) \;\; \forall h > 0 \quad .$

Démonstration. La démonstration de ce théorème se faite on deux étapes :

1^er^ étape: vérifions qu'il existe une constante $c > 0$ telle que :

(3.5.5) $\quad \left\| \varphi_i^\ell \right\|_{H^1(\Gamma_3)} \le c \quad : \quad \forall h > 0$

De l'inégalité (3.5.3) pour $m = 1, \varepsilon = \frac{1}{2}$, il résulte qu'il existe une constante $c_1 > 0$ telle que

$$\left\| \varphi_i^\ell \right\|_{H^1(\Gamma_3)} \le \frac{1}{2} \left\| \varphi_i^\ell \right\|_{H^2(\Gamma_3)} + c_1 \left\| \varphi_i^\ell \right\|_{IL^2(\Gamma_3)} \qquad \forall h > 0$$

Et puisque $\left\| \varphi_i^\ell \right\|_{H^1(\Gamma_3)} = \left\| \varphi_i^\ell \right\|_{H^2(\Gamma_3)}$, on a alors

$$\left\| \varphi_i^\ell \right\|_{H^1(\Gamma_3)} \le \frac{1}{2} \left\| \varphi_i^\ell \right\|_{H^1(\Gamma_3)} + c_1 \left\| \varphi_i^\ell \right\|_{IL^2(\Gamma_3)}$$

D'où on tire :

(3.5.6) $\quad \left\| \varphi_i^\ell \right\|_{H^1(\Gamma_3)} \le c_2 \left\| \varphi_i^\ell \right\|_{IL^2(\Gamma_3)}$

Mais $\quad \left\| \varphi_i^\ell \right\|_{IL^2(\Gamma_3)} = \sqrt{\int_{\Gamma_3} \left| \varphi_i^\ell \right|^2 dx} \le \sqrt{2h} \le \sqrt{2.\mathrm{mes}\,(\Gamma_3)}$, on a alors

(3.5.7) $\quad \left\| \varphi_i^\ell \right\|_{IL^2(\Gamma_3)} \le c_3$

De(3.5.6) et (3.5.7), on conclut (3.5.5).

2^eme^ étape : Reste à vérifier (3.5.4) :

On utilise la définition de $i_h^\ell \psi$, on a alors

$$i_h^\ell \psi \big|_{T_i^\ell} = \psi(x_i^\ell) \varphi_i^\ell \big|_{T_i^\ell} + \psi(x_{i+1}^\ell) \varphi_{i+1}^\ell \big|_{T_i^\ell}$$

D'où on tire :

(3.5.8) $\quad \left\| i_h^\ell \psi \right\|_{H^1(T_i^\ell)} \le \left| \psi(x_i^\ell) \right| . \left\| \varphi_i^\ell \right\|_{H^1(T_i^\ell)} + \left| \psi(x_{i+1}^\ell) \right| . \left\| \varphi_{i+1}^\ell \right\|_{H^1(T_i^\ell)} \qquad , i = \overline{0, N_h^\ell}$

En utilisant maintenant l'injection continue *du Sobolev* $H^1(T_i^\ell) \hookrightarrow C(T_i^\ell)$, on a alors

$$\left| \psi(x_i^\ell) \right| \le c_4 \left\| \psi \right\|_{H^1(T_i^\ell)} \;\text{ et }\; \left\| \varphi_i^\ell \right\|_{IL^2(\Gamma_3)} \le c_3$$

De plus , et moyennant (3.5.5) et (3.5.8) , on obtient :

$$\left\| i_h^{\ell}\psi \right\|_{H^1(T_i^{\ell})} \leq c_5 \left\| \psi \right\|_{H^1(T_i^{\ell})} \quad ; \ i = \overline{0,N_h^{\ell}}$$

Par sommation sur $i = 0,N_h^{\ell}$, il vient :

$$\left\| i_h^{\ell}\psi \right\|^2_{H^1(\Gamma_3)} = \sum_{i=0}^{N_h^{\ell}} \left\| i_h^{\ell}\psi \right\|^2_{H^1(T_i^{\ell})} \leq c_5^2 \sum_{i=0}^{N_h^{\ell}} \left\| \psi \right\|^2_{H^1(T_i^{\ell})} = c_5^2 \left\| \psi \right\|^2_{H^1(\Gamma_3)}$$

D’où le résultat .

Lemme.3.5.1. Pour $\tilde{h}_{\ell} = \max\limits_{0\leq i\leq N_h^{\ell}} \left(\text{mes}(T_i^{\ell})\right)$. Alors existe une constante, indépendante de $\tilde{h}_{\ell}$, $c > 0$ telle que :

(3.5.9) $\quad \left\| \psi \right\|_{H^1(\Gamma_3)} \leq c\tilde{h}_{\ell}^{-1} \left\| \psi \right\|_{IL^2(\Gamma_3)} \quad ; \quad \forall \psi \in W_h^{\ell}(\Gamma_3)$

Démonstration. Pour toute $\psi \in W_h^{\ell}(\Gamma_3)$, on a $\psi|_{T_i^{\ell}} \in P_2(T_i^{\ell})$, et par conséquent :

(3.5.10) $\quad \left\| \psi \right\|_{H^2(T_i^{\ell})} = \left\| \psi \right\|_{H^3(T_i^{\ell})}$

En utilisant(3.5.3) pour $m = 1$ et $\varepsilon < 1$, il en découle :

$$\left\| \psi \right\|_{H^2(T_i^{\ell})} \leq \varepsilon \left\| \psi \right\|_{H^1(T_i^{\ell})} + c\varepsilon^{-1} \left\| \psi \right\|_{H^3(T_i^{\ell})}$$

Et de(3.5.10), on tire :

(3.5.11) $\quad \left\| \psi \right\|_{H^2(T_i^{\ell})} \leq \varepsilon \left\| \psi \right\|_{H^2(T_i^{\ell})} + c_1\varepsilon^{-1} \left\| \psi \right\|_{H^1(T_i^{\ell})}$

Ou encore :

$$\left\| \psi \right\|_{H^2(T_i^{\ell})} \leq \frac{c_1}{1-\varepsilon} \varepsilon^{-1} \left\| \psi \right\|_{H^1(T_i^{\ell})}$$

Et pour $\varepsilon = \dfrac{\tilde{h}}{1 + \text{mes}\ (\Gamma_3)} < 1$, on a donc :

$$\left\| \psi \right\|_{H^2(T_i^{\ell})} \leq c_1 \frac{\left(1+\text{mes}(\Gamma_3)\right)^2}{1+\text{mes}(\Gamma_3)-\tilde{h}_{\ell}} \times \tilde{h}_{\ell}^{-1} \left\| \psi \right\|_{H^1(T_i^{\ell})}$$

C'est à dire :

$$\left\| \psi \right\|_{H^2(T_i^{\ell})} \leq c_1\left(1+\text{mes}(\Gamma_3)\right)^2 \tilde{h}_{\ell}^{-1} \left\| \psi \right\|_{H^1(T_i^{\ell})}$$

D’où :

(3.5.12) $\quad \left\| \psi \right\|_{H^2(T_i^{\ell})} \leq c_2\tilde{h}_{\ell}^{-1} \left\| \psi \right\|_{H^1(T_i^{\ell})}$

En utilisant (3.5.3) pour $m = 1$ et $\varepsilon = \dfrac{\tilde{h}_{\ell}}{2c_2}$, on obtient :

(3.5.13) $\qquad \|\psi\|_{H^1(T_i^\ell)} \leq \dfrac{1}{2c_2}\tilde{h}_\ell\|\psi\|_{H^2(T_i^\ell)} + c_3\tilde{h}_\ell^{-1}\|\psi\|_{IL^2(T_i^\ell)}$

Et moyennant (3.5.12) et (3.5.13), on a donc :

$$\|\psi\|_{H^1(T_i^\ell)} \leq \frac{1}{2}\|\psi\|_{H^1(T_i^\ell)} + c_3\tilde{h}_\ell^{-1}\|\psi\|_{IL^2(T_i^\ell)}$$

On en déduire que :

$$\|\psi\|_{H^1(T_i^\ell)} \leq c\tilde{h}_\ell^{-1}\|\psi\|_{IL^2(T_i^\ell)}$$

Par sommation carrée il en résulte :

$$\sum_{i=0}^{N_h^\ell}\|\psi\|^2_{H^1(T_i^\ell)} \leq c^2\tilde{h}_\ell^{-1}\sum_{i=0}^{N_h^\ell}\|\psi\|^2_{IL^2(T_i^\ell)}$$

Ou encore :

$$\|\psi\|^2_{H^1(\Gamma_3)} \leq c^2\tilde{h}_\ell^{-2}\|\psi\|^2_{IL^2(\Gamma_3)}$$

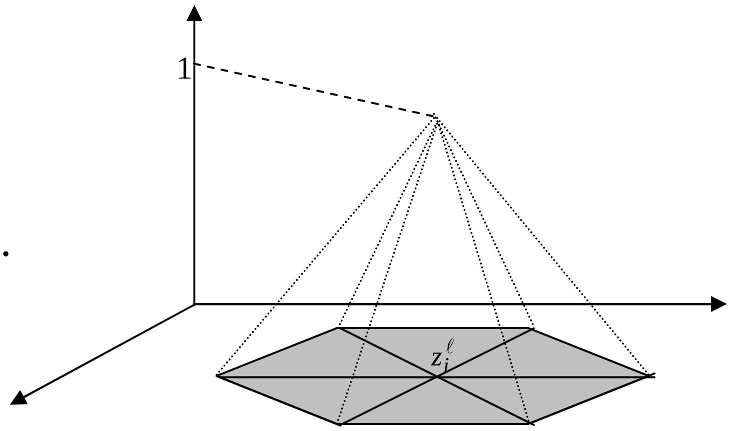
D'où la condition (3.5.9) .

5.2. Interpolation volumique.

Soient $\left(z_i^\ell\right)_{i\in I}$ les nœuds des triangulations $\mathcal{T}_h^\ell$. Les fonctions des base du *Lagrange* sur Ω^ℓ (notées par $\omega_i^\ell; i\in I$) sont des fonctions continues sur Ω^ℓ satisfaisant :

- $\omega_i^\ell\left(z_i^\ell\right) = \delta_{ij}$;
- Si K est un ensemble de voisinage du nœud z_i^ℓ , alors $\omega_i^\ell\big|_K \in P_1(K)$;
- Sinon $\omega_i^\ell\big|_K = 0$.

Figure 4. Graphe représentant la fonction de base *de Lagrange* ω_i^ℓ **.** **(**Fonction chapeaux**)**



L'interpolation du *Lagrange* sur Ω^ℓ associée à la triangulation $\mathcal{T}_h^\ell$ est un opérateur I_h^ℓ défini comme suivant :

(3.5.14) $I_h^\ell u_j^\ell = \sum_i u_j^\ell\left(z_i^\ell\right).\omega_i^\ell \quad : \quad j = \overline{1,2}$.

Où $I_h^\ell u_j^\ell$ désigne la solution interpolée de la composante u_i^ℓ .

On note par $II_h^\ell = \left(I_h^\ell, I_h^\ell\right)$ l'interpolation à l'intérieur de Ω^ℓ du champs du déplacement donnée par : $II_h^\ell u^\ell = \left(I_h^\ell u_1^\ell, I_h^\ell u_2^\ell\right)$.

Proposition.3.5.2. Si $\overline{\Gamma}_1^\ell \cap \overline{\Gamma}_3 = \phi$, il existe une constante strictement positive $c > 0$ indépendante de h, telle que pour toute fonction ψ dans $H^{\frac{1}{2}}\left(\Gamma_3\right)$, on a

(3.5.15) $\left\|\pi_h^\ell \psi\right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_3)} \leq c\left\|\psi\right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_3)}$

Démonstration. La démonstration de ce proposition passe par les trois étapes suivantes :

1er étape : On vérifie que π_h^ℓ est stable sur $IL^2\left(\Gamma_3\right)$:

Soit $\psi \in IL^2\left(\Gamma_3\right)$, on utilise (3.4.5) pour $\mu_h^\ell = \pi_h^\ell \psi_3$, il vient :

$$\left\|\pi_h^\ell \psi\right\|^2_{IL^2(\Gamma_3)} = \int_{\Gamma_3} \left|\pi_h^\ell \psi\right|^2 d\Gamma_3 = \int_{\Gamma_3} \psi\left(\pi_h^\ell \psi\right) d\Gamma_3$$

En appliquant le théorème de *Cauchy-Schwartz* , il en résulte :

$$\left\|\pi_h^\ell \psi\right\|^2_{IL^2(\Gamma_3)} \leq \left\|\psi\right\|_{IL^2(\Gamma_3)} . \left\|\pi_h^\ell \psi\right\|_{IL^2(\Gamma_3)}$$

Ou encore la stabilité :

(3.5.16) $\left\|\pi_h^\ell \psi\right\|_{IL^2(\Gamma_3)} \leq \left\|\psi\right\|_{IL^2(\Gamma_3)}$

2^{em}étape : on vérifie que

(3.5.17) $\left\|\psi - i_h^\ell \psi\right\|_{IL^2(\Gamma_3)} \leq c_1 \tilde{h}_\ell \left\|\psi\right\|_{H^1(\Gamma_3)}$

Comme l'espace $C^1\left(\overline{\Gamma}_3\right)$ est dense dans $H^1\left(\Gamma_3\right)$,il suffit d'établir ces résultes pour toute fonction $\psi \in C^1\left(\overline{\Gamma}_3\right)$, on définie la fonction Ψ comme suivante $\Psi(x) = \psi(x) - i_h^\ell \psi(x)$, grâce à la condition $\Psi\left(x_i^\ell\right) = 0;\ i = \overline{0, N_h^\ell}$, on a alors

$$\Psi(x) = \int_{x_i}^{x} \psi'(s) ds ; \quad \forall x \in T_i^\ell$$

On en déduit la double inégalité

$$\left|\Psi(x)\right| \leq \int_{T_i^\ell} \left|\Psi'(s)\right| ds \leq \left[\int_{T_i^\ell} \left|\Psi'(s)\right|^2 ds\right]^{\frac{1}{2}} \times \left[\int_{T_i^\ell} 1^2 ds\right]^{\frac{1}{2}} \quad : \quad \forall x \in T_i^\ell$$

Qui entraîne

$$|\Psi(x)|^2 \leq \tilde{h}_\ell |\Psi|^2_{H^1(T_i^\ell)} : \quad \forall x \in T_i^\ell$$

D'où :

$$\int_{T_i^\ell} |\Psi(x)|^2 dx \leq \tilde{h}_\ell |\Psi|^2_{H^1(T_i^\ell)} \int_{T_i^\ell} dx \leq \tilde{h}_\ell^{\,2} \|\Psi\|^2_{H^1(T_i^\ell)}$$

D'où l'on déduit :

$$\|\Psi\|_{IL^2(T_i^\ell)} \leq \tilde{h}_\ell \|\Psi\|_{H^1(T_i^\ell)}$$

On en déduit que :

$$\|\psi - i_h^\ell \psi\|_{IL^2(T_i^\ell)} \leq \tilde{h}_\ell \|\psi - i_h^\ell \psi\|_{H^1(T_i^\ell)}$$

De telle sorte que :

$$(3.5.18) \qquad \|\psi - i_h^\ell \psi\|_{IL^2(T_i^\ell)} \leq \tilde{h}_\ell \left[\|\psi\|_{H^1(T_i^\ell)} + \|i_h^\ell \psi\|_{H^1(T_i^\ell)} \right]$$

Moyennant (3.5.43) et (3.5.18) on a alors :

$$\|\psi - i_h^\ell \psi\|_{IL^2(T_i^\ell)} \leq c_1 \tilde{h}_\ell \|\psi\|_{H^1(T_i^\ell)}$$

En utilisant la somme carré sur $i = \overline{0, N_h^\ell}$, on a :

$$\sum_{i=0}^{N_h^\ell} \|\psi - i_h^\ell \psi\|^2_{IL^2(T_i^\ell)} \leq c_1^{\,2} \tilde{h}_\ell^{\,2} \sum_{i=0}^{N_h^\ell} \|\psi\|^2_{H^1(T_i^\ell)}$$

D'où l'inégalité (3.5.17) .

3[em]étape : on vérifie que π_h^ℓ est stable sur $H^1(\Gamma_3)$

Soit $\psi \in H^1(\Gamma_3)$, on utilise (3.5.2) , on a alors ;

$$(3.5.19) \qquad \|\pi_h^\ell \psi\|_{H^1(\Gamma_3)} \leq \|\pi_h^\ell (\psi - i_h^\ell \psi)\|_{H^1(\Gamma_3)} + \|i_h^\ell \psi\|_{H^1(\Gamma_3)}$$

De (3.5.9), il en résulte :

$$\|\pi_h^\ell(\psi - i_h^\ell \psi)\|_{H^1(\Gamma_3)} \leq c_1 \tilde{h}_\ell^{-1} \|\pi_h^\ell(\psi - i_h^\ell \psi)\|_{IL^2(\Gamma_3)}$$

En suite en utilisant l'inégalité (3.5.11), il vient :

$$(3.5.20) \qquad \|\pi_h^\ell(\psi - i_h^\ell \psi)\|_{H^1(\Gamma_3)} \leq c_1 \tilde{h}_\ell^{-1} \|\psi - i_h^\ell \psi\|_{IL^2(\Gamma_3)}$$

De la relation (3.5.5) , on tire :

$$(3.5.21) \qquad \|\pi_h^\ell(\psi - i_h^\ell \psi)\|_{H^1(\Gamma_3)} \leq c_1 \tilde{h}_\ell^{-1} \|\pi_h^\ell(\psi - i_h^\ell \psi)\|_{IL^2(\Gamma_3)}$$

Et moyennant (3.5.19) ,(3.5.21) et (3.5.4), on obtient :

$$\|\pi_h^\ell \psi\|_{H^1(\Gamma_3)} \leq c_1 \tilde{h}_h^{-1} \|\pi_h^\ell(\psi - i_h^\ell \psi)\|_{IL^2(\Gamma_3)} + c\|\psi\|_{H^1(\Gamma_3)}$$

De plus en utilisant maintenant (3.5.16) pour $\psi - i_h^\ell \psi$, on a

$$\left\|\pi_h^\ell \psi\right\|_{H^1(\Gamma_3)} \le c_1 \tilde{h}_h^{-1} \left\|\psi - i_h^\ell \psi\right\|_{IL^2(\Gamma_3)} + c\left\|\psi\right\|_{H^1(\Gamma_3)}$$

En utilisant (3.5.17), il vient :

(3.5.22) $\left\|\pi_h^\ell \psi\right\|_{H^1(\Gamma_3)} \le c_2 \left\|\psi\right\|_{H^1(\Gamma_3)}$

4^{em}étape : Fin de démonstration :

En appliquant l'inégalité d'interpolation avec , on a :

$$\left\|\pi_h^\ell\right\|_{L(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_3))} \le \left\|\pi_h^\ell\right\|_{L\left(H^1(\Gamma_3)\right)}^{\frac{1}{2}} . \left\|\pi_h^\ell\right\|_{L\left(IL^2(\Gamma_3)\right)}^{\frac{1}{2}}$$

Et de (3.5.16)-(3.5.22), on tire :

$$\left\|\pi_h^\ell\right\|_{L(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_3))} \le c^{\frac{1}{2}} 1^{\frac{1}{2}} = c^*$$

Ou encore la stabilité(3.5.15) .

($L(H)$: noté l'espace des applications linéaire continue sur H) .

$X_h^\ell(\Gamma_3)$ désigne le sous espace des fonctions continues par morceau sur Γ_3 et il défini comme suit :

$$X_h^\ell(\Gamma_3) = \left\{\psi \in IL^2(\Gamma_3) \ / \ \psi|_{T_i^\ell} = \text{constante} \ , \ \forall i = \overline{0, N_h^\ell}\right\}$$

Lemme.3.5.2. $X_h^\ell(\Gamma_3)$ est fermé dans $IL^2(\Gamma_3)$.

Démonstration. Soit $(\psi_n)_{n\ge 0}$ est un suite dans $X_h^\ell(\Gamma_3)$ avec $\psi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \psi$ dans $IL^2(\Gamma_3)$,

D'où on tire : $\left\|\psi - \psi_n\right\|_{IL^2(T_i^\ell)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \qquad \forall i = \overline{0, N_h^\ell}$

Soit $\varphi \in C_c^1(\overset{0}{T}{}_i^\ell)$ avec

$$\int_{T_i^\ell} \psi \varphi' dx = \int_{T_i^\ell} (\psi - \psi_n)\varphi' dx + \int_{T_i^\ell} \psi_n \varphi' dx \qquad ; \quad \forall n \in IN$$

En utilisant l'inégalité de *Cauchy- Schwartz* , on obtient :

$$\left|\int_{T_i^\ell} (\psi - \psi_n)\varphi' dx\right| \le \left\|\psi - \psi_n\right\|_{IL^2(T_i^\ell)} . \left\|\varphi'\right\|_{IL^2(T_i^\ell)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Et puisque les fonctions ψ_n constante sur T_i ,on a alors

$$\int_{T_i} \psi_n \varphi' dx = -\int_{T_i} \psi_n' \varphi dx = 0 \qquad \forall n \in IN$$

On a $\displaystyle\int_{T_i} \psi_n \varphi' . dx = 0 \qquad \forall \varphi \in C_c^1(\overset{o}{T_i}) \quad \forall n \in IN$

Et en faisant tendre n vers $+\infty$, on déduit que :

$$\int_{T_i} \psi\, \varphi' dx = 0 \qquad \forall \varphi \in C_c^1(\overset{o}{T}_i)$$

C'est à dire ψ est une constante p.p sur T_i^ℓ . On pose $\psi = c_i$ $p.p$ sur T_i^ℓ ,

En supposant $\tilde{\psi} = \sum_{i=1}^{N_h^\ell} c_i \chi_{T_i^\ell} \in X_h^\ell(\Gamma_3)$, il vient : $\psi_n \to \tilde{\psi}$ dans $IL^2(\Gamma_3)$

C'est à dire $\psi = \tilde{\psi}$ $p.p$ sur Γ_3 .

Grâce à la fermeture de l'espace $X_h^\ell(\Gamma_3)$ dans l'espace $IL^2(\Gamma_3)$, alors il existe d'opérateur de projection sur l'espace $X_h^\ell(\Gamma_3)$.

Notation. On note par Π_h^ℓ l'opérateur de projection sur l'espace fermé $X_h^\ell(\Gamma_3)$.

La fonction $\Pi_h^\ell \lambda$ est une solution approché par projection du fonction λ sur l'espace $X_h^\ell(\Gamma_3)$

Proposition.3.5.3. On suppose que $\overline{\Gamma}_1^\ell \cap \overline{\Gamma}_3 = \phi$, alors il existe une constante $\beta > 0$ (indépendante de h_ℓ) telle que :

(3.5.23) $$\inf_{\mu_h \in W_h^\ell(\Gamma_3)} \sup_{v_h \in V_h} \frac{b(\mu_h, v_h)}{\|\mu_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)} . \|v_h\|} \geq \beta$$

Démonstration. Pour tout $\mu_h \in W_h^\ell(\Gamma_3)$ avec $\mu_h \neq 0$, on a

$$\|\mu_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)} = \sup\left\{ \langle \mu_h, \psi \rangle_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\Gamma_3} \,/\, \psi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_3) \text{ et } \|\psi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_3)} = 1 \right\}$$

Alors il existe une suite $(\psi_n)_{n \geq 0}$ (dépend de μ_h) dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_3)$ telle que :

$$\|\psi_n\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_3)} = 1 \text{ et } \langle \mu_h, \psi_n \rangle_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\Gamma_3} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \|\mu_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)}$$

Puisque $(\psi_n)_{n\geq 0}$ est bornée dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_3)$, alors il existe une sous-suite notée encore $(\psi_n)_{n\geq 0}$ et il existe $\psi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_3)$ telles que : $\psi_n \xrightarrow{faible} \psi$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_3)$,

D'où :

(3.5.24) $\|\psi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_3)} \leq 1$ et $\|\mu_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)} = \langle \mu_h, \psi \rangle_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\Gamma_3}$

En utilisant (3.4.5) , on a :

(3.5.25) $$\int_{\Gamma_3} \mu_h \pi_h^\ell \psi d\Gamma_3 = \int_{\Gamma_3} \mu_h \psi d\Gamma_3$$

Grâce à la surjective de l'opérateur de trace:

$$\begin{cases} \gamma_\eta^\ell : \left(H^1\left(\Omega^\ell\right)\right)^2 \to H^{\frac{1}{2}}\left(\Gamma_3\right) \\ u^\ell \mapsto u_\eta^\ell = \left(u^\ell \eta^\ell\right).\eta^\ell \end{cases}$$

Et grâce à l'égalité $\gamma_\eta^\ell\left(V_h\left(\Omega^\ell\right)\right) = W_h^\ell\left(\Gamma_3\right)$, Alors il existe une relèvement de l'opérateur γ_η^ℓ , noté par R_η^ℓ vérifie : $R_\eta^\ell\left(W_h^\ell\left(\Gamma_3\right)\right) = V_h^\ell\left(\Omega^\ell\right)$,et par conséquent, il existe une constante $c > 0$ (indépendant de h , $c = \left\|R_\eta^\ell\right\|_{L(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_3),(H^1(\Omega^\ell))^2)}$) telle que ;

(3.5.26) $\left\|R_\eta^\ell \psi_h^\ell\right\|_{(H^1(\Omega^\ell))^2} \leq c\left\|\psi_h^\ell\right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_3)} \quad \forall \psi_h^\ell \in W_h^\ell\left(\Gamma_3\right)$

On pose $\omega_h^\ell = R_\eta^\ell\left(\pi_h^\ell \psi\right) \in V_h\left(\Omega^\ell\right)$, il vient : $\omega_h^\ell.\eta^\ell = \pi_h^\ell \psi$

Si on pose $\omega_h = \left(\omega_h^1, \omega_h^2\right)$, avec $\omega^{3-\ell} = 0$, puisque les deux normes $\|.\|$ *et* $\|.\|_{H^1}$ sont équivalentes, on a alors l'inégalité $\left\|\omega_h\right\| \leq c_1\left\|\omega_h^\ell\right\|_{(H^1(\Omega^\ell))^2} = c_1\left\|R_\eta^\ell\left(\pi_h^\ell \psi\right)\right\|_{(H^1(\Omega^\ell))^2}$

Et de (3.5.26), on tire :

$$\left\|\omega_h\right\| \leq c_2\left\|\pi_h^\ell \psi\right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_3)}$$

En utilisant (3.5.10) et (3.5.24), il sorte que :

(3.5.27) $\left\|\omega_h\right\| \leq c_3\left\|\psi\right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_3)} \leq c_3$

Et, pour $\beta = \dfrac{1}{c_3}$, on a :

$$\beta\left\|\mu_h\right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)} \leq \frac{\left\|\mu_h\right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)}}{\left\|\omega_h\right\|}$$

Et, de (3.5.19), on a :

$$\beta\left\|\mu_h\right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)} \leq \frac{\int_{\Gamma_3} \mu_h \psi d\Gamma_3}{\left\|\omega_h\right\|}$$

De plus, on utilise (3.5.20), il vient :

$$\beta\left\|\mu_h\right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)} \leq \frac{\int_{\Gamma_3} \mu_h.\pi_h^\ell \psi d\Gamma_3}{\left\|\omega_h\right\|}$$

D'où :

$$\beta\left\|\mu_h\right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)} \leq \frac{\int_{\Gamma_3} \mu_h.\left(\omega_h^\ell.\eta^\ell\right) d\Gamma_3}{\left\|\omega_h\right\|}$$

C'est à dire

$$\beta \left\| \mu_h \right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)} \leq \frac{b(\mu_h, \omega_h)}{\left\| \omega_h \right\|}$$

On obtient alors :

$$\beta \left\| \mu_h \right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)} \leq \sup_{v_h \in V_h} \frac{b(\mu_h, v_h)}{\left\| v_h \right\|}$$

D’où l’inégalité (3.5.23) .

CHAPITRE 2

D'ANALYSE D' ERREURS

Résumé :

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'analyse des erreurs. En utilisant les théorèmes des traces, les injections compactes et continues de *Sobolev*, ainsi que les inégalités d'interpolation et l'inégalité de *Cauchy-Schwartz* , on arrive à évaluer les erreurs commissent.

Contenu :

1. Estimation abstraite de l'erreur ;
2. Estimation de l'erreur des solutions interpolées ;
3. Estimation de l'erreur des solutions approchées par projection ;
4. Estimation de l'erreur des solutions approchées par discrétisation quadratique ;
5. Estimation de l'erreur des solutions approchées par discrétisation linéaire ;
6. Conclusion.

1. Estimation abstraite de l'erreur.

Pour préparer l'obtention d'estimations explicites de l'erreur, nous donnons dans le théorème suivant une majoration abstraite de l'erreur :

Lemme4.1.1. Soit (u,λ) la solution du problème mixte P_m avec $u^\ell \in \left(H^r\left(\Omega^\ell\right)\right)^2$ où $r \geq \frac{3}{2}$. Alors, il existe une constante $c > 0$ dépendant de r, telle que ;

(4.1.1) $\|\lambda\|_{H^{r-\frac{3}{2}}(\Gamma_3)} \leq c\|u^\ell\|_{\left(H^r(\Omega^\ell)\right)^2}$.

Démonstration . En utilisant la continuité du l'opérateur :

$$\begin{cases} \gamma_\eta^\ell;\left(H^{r-\frac{3}{2}}(\Gamma_3)\right)^2 \to H^{r-\frac{3}{2}}(\Gamma_3); \\ \psi = (\psi_1,\psi_2) \mapsto \psi_\eta = \psi.\eta^\ell = \psi_1.\eta_1^\ell + \psi_2.\eta_2^\ell \end{cases}$$

Alors, il existe une constante $c_1 > 0$, telle que

(4.1.2) $\|\lambda\|_{H^{r-\frac{3}{2}}(\Gamma_3)} = \left\|\left(\sigma^\ell\eta^\ell\right).\eta^\ell\right\|_{H^{r-\frac{3}{2}}(\Gamma_3)} \leq c_1\|\sigma^\ell\eta^\ell\|_{(H^{r-\frac{3}{2}}(\Gamma_3))^2}$

En appliquant le théorème de trace, alors il existe une constante $c_2 > 0$ telle que

(4.1.3) $\|\sigma^\ell\eta^\ell\|_{(H^{r-\frac{3}{2}}(\Gamma_3))^2} \leq c_2\|\sigma^\ell\|_{\left(H^{r-1}(\Omega^\ell)\right)^{2\times 2}}$

En utilisant maintenant la continuité de A^ℓ , alors, il existe une constante $c_3 > 0$ telle que

(4.1.4) $\left\|A^\ell\varepsilon\left(u^\ell\right)\right\|_{\left(H^{r-1}(\Omega^\ell)\right)^{2\times 2}} \leq c_3\left\|\varepsilon\left(u^\ell\right)\right\|_{\left(H^{r-1}(\Omega^\ell)\right)^{2\times 2}}$

De plus, on utilise la continuité d'application $\varepsilon : \left(H^r\left(\Omega^\ell\right)\right)^2 \to \left(H^{r-1}\left(\Omega^\ell\right)\right)^{2\times 2}$. Alors, il existe une constante $c_4 > 0$ telle que :

(4.1.5) $\left\|\varepsilon\left(u^\ell\right)\right\|_{\left(H^{r-1}(\Omega^\ell)\right)^{2\times 2}} \leq c_4\|u^\ell\|_{\left(H^r(\Omega^\ell)\right)^2}$

Et de (4.1.2), (4.1.3), (4.1.4), (4.1.4) et (4.1.5), avec $\sigma^\ell = A^\ell\varepsilon\left(u^\ell\right)$, on tire (4.1.1)

Théorème.4.1.1. Soit (u,λ) est une solution du problème P_m et (u_h,λ_h) la solution du problème P_m^h avec $M_h = Q_h^{\ell,*}$ ou $M_h = L_h^{\ell,*}$. Alors , il existe une constante $c > 0$ indépendant de h telle que :

(4.1.6) $\|u-u_h\| + \|\lambda-\lambda_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)} \leq c\left\{\operatorname{Inf}_{v_h\in V_h}\|u-v_h\|_V + \operatorname{Inf}_{\mu_h\in W_h^\ell(\Gamma_3)}\|\lambda-\mu_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)} + \left[\max\left(b(u,\lambda_h),0\right)\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\max\left(b(u_h,\lambda),0\right)\right]^{\frac{1}{2}}\right\}$

Démonstration. Soit $v_h \in V_h$, on a :

$$a(u-u_h,u-u_h) = a(u-u_h,u-v_h) + a(u,v_h-u_h) - a(u_h,v_h-u_h)$$

Moyennant (2.3.8), (3.4.1) et (3.4.2), il résulte :

$$a(u-u_h,u-u_h) = a(u-u_h,u-v_h) - b(v_h-u_h,\lambda) + b(v_h-u_h,\lambda_h)$$

Ou encore :

(4.1.7) $a(u-u_h,u-u_h)=a(u-u_h,u-v_h)-b(v_h-u,\lambda-\lambda_h)-b(u-u_h,\lambda-\lambda_h)$

Pour $\mu=2\lambda\in M$ (resp. $\mu_h=2\lambda_h\in M_h$) et pour $\mu=0\in M$ (resp. $\mu_h=0\in M_h$) dans (2.3.9), (resp. dans (3.4.2)), il résulte :

(4.1.8) $b(u,\lambda)=0$ (resp. $b(u_h,\lambda_h)=0$)

En utilisant (4.1.7) et (4.1.8), il vient ;

(4.1.9) $a(u-u_h,u-u_h)=a(u-u_h,u-v_h)+b(u-v_h,\lambda-\lambda_h)+b(u_h,\lambda)+b(u,\lambda_h)$

En désignant par α la constante de l'ellipticité, on a :

$$\alpha\|u-u_h\|^2\leq a(u-u_h,u-u_h)$$

Et de (4.1.9), on déduit que

(4.1.10) $\alpha\|u-u_h\|^2\leq a(u-u_h,u-v_h)+b(u-v_h,\lambda-\lambda_h)+b(u_h,\lambda)+b(u,\lambda_h)$

De telle sorte que la continuité de la forme bilinéaire $a(.,.)$ entraîne, en désignant par M la constante de continuité :

$$\alpha\|u-u_h\|^2\leq M\|u-u_h\|.\|u-v_h\|+c\|\lambda-\lambda_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)}.\|(u^1-v_h^1).\eta^1+(u^2-v_h^2).\eta^2\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_3)}+b(u_h,\lambda)+b(u,\lambda_h)$$

En utilisant le théorème du trace , nous déduisons :

(4.1.11) $\alpha\|u-u_h\|^2\leq M\|u-u_h\|.\|u-v_h\|+c\|\lambda-\lambda_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)}.\|u-v_h\|+b(u_h,\lambda)+b(u,\lambda_h)$

On considère la problème (2.3.8), avec $V_h\subset V$, on a alors

$$a(u,v_h)+b(v_h,\lambda)=L(v_h)\qquad\forall v_h\in V_h$$

Et de (3.4.1) , on tire ;

(4.1.12) $a(u-u_h,v_h)+b(v_h,\lambda-\lambda_h)=0\quad\forall v_h\in V_h$

Puisque :

$$b(v_h,\lambda_h-\mu_h)=a(u-u_h,v_h)+b(v_h,\lambda-\mu_h)$$

Nous avons :

(4.1.13) $b(v_h,\lambda_h-\mu_h)\leq M\|u-u_h\|.\|v_h\|+c\|\lambda-\mu_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)}.\|v_h\|$; $\forall\mu_h\in W_h^\ell(\Gamma_3),\quad\forall v_h\in V_h$

De (3.5.23) , il en résulte :

$$\beta\|\lambda_h-\mu_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)}\leq\sup_{v_h\in V_h}\frac{b(v_h,\lambda_h-\mu_h)}{\|v_h\|}$$

Et de(4.1.13) , on tire :

(4.1.14) $\beta\|\lambda_h-\mu_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)}\leq M\|u-u_h\|+c\|\lambda-\mu_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)}\quad\forall\mu_h\in W_h^\ell(\Gamma_3),\ \forall v_h\in V_h$

En utilisant l'inégalité triangulaire suivante :

$$\|\lambda-\lambda_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)} \le \|\lambda-\mu_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)} + \|\mu_h-\lambda_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)} \; \forall \mu_h \in W_h^{\ell}(\Gamma_3)$$

Nous obtenons :

(4.1.15) $$\|\lambda-\lambda_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)} \le c\left\{\|u-u_h\| + \operatorname*{Inf}_{\mu_h\in W_h^{\ell}(\Gamma_3)}\|\lambda-\mu_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)}\right\}$$

Et de (4.1.15),(4.1.11), on tire :

(4.1.16) $$\|u-u_h\|^2 \le c\left\{\|u-u_h\|\|u-v_h\| + \operatorname*{Inf}_{\mu_h\in W_h^{\ell}(\Gamma_3)}\|\lambda-\mu_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)}.\|u-v_h\| + b(u_h,\lambda)+b(u,\lambda_h)\right\}$$

Et, utilisons la relation $a.b \le \frac{a^2}{2c}+\frac{c}{2}.b^2$ ou encore :

$$\|u-u_h\|^2 \le c\left\{\frac{1}{2c}\|u-u_h\|^2+\frac{c}{2}\|u-v_h\|^2+\frac{1}{2}\operatorname*{Inf}_{\mu_h\in W_h^{\ell}(\Gamma_3)}\|\lambda-\mu_h\|^2_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)}+\frac{1}{2}\|u-v_h\|^2+b(u_h,\lambda)+b(u,\lambda_h)\right\} \quad \forall v_h\in V_h$$

On déduit qu'il existe une autre constante $c>0$ telle que :

$$\|u-u_h\|^2 \le c\left\{\operatorname*{Inf}_{v_h\in V_h}\|u-v_h\|^2 + \operatorname*{Inf}_{\mu_h\in W_h^{\ell}(\Gamma_3)}\|\lambda-\mu_h\|^2_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)} + b(u_h,\lambda)+b(u,\lambda_h)\right\}$$

D'où :

$$\|u-u_h\|^2 \le c\left\{\operatorname*{Inf}_{v_h\in V_h}\|u-v_h\| + \operatorname*{Inf}_{\mu_h\in W_h^{\ell}(\Gamma_3)}\|\lambda-\mu_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)} + [max\,(b(u_h,\lambda),0)]^{\frac{1}{2}} + [max\,(b(u,\lambda_h),0)]^{\frac{1}{2}}\right\}^2$$

Ou encore :

(4.1.17) $$\|u-u_h\| \le c\left\{\operatorname*{Inf}_{v_h\in V_h}\|u-v_h\| + \operatorname*{Inf}_{\mu_h\in W_h^{\ell}(\Gamma_3)}\|\lambda-\mu_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)} [\max\,(b(u_h,\lambda),0)]^{\frac{1}{2}} + [\max\,(b(u,\lambda_h),0)]^{\frac{1}{2}}\right\}$$

De (4.1.17) et (4.1.15), on conclut (4.1.6).

2. Estimation des solutions interpolées.

Proposition.4.2.1. Il existe une constante $c>0$ indépendant de $\tilde{h}_\ell$ telle que :

(4.2.1) $$\|\lambda-i_h^{\ell}\lambda\|_{IL^2(\Gamma_3)} \le c\tilde{h}_\ell\|\lambda\|_{H^1(\Gamma_3)}$$

Autrement dit, $\lim\limits_{h\to 0}\|\lambda-i_h^{\ell}\lambda\|_{IL^2(\Gamma_3)} = 0$

Démonstration. Similairement au démonstration de l'inégalité (3.5.17).

Lemme.4.2.1. Soit $\varepsilon>0$, alors l'application définie par :

(4.2.2) $$\dot{v}\in H^{1+\varepsilon}(\Omega^{\ell})/P_1(\Omega^{\ell}) \mapsto \|\dot{v}\|_{1+\varepsilon} = \operatorname*{Inf}_{p\in P_1(\Omega^{\ell})}\|v+p\|_{H^{1+\varepsilon}(\Omega^{\ell})}$$

est une norme sur l'espace quotient $H^{1+\varepsilon}(\Omega^{\ell})/P_1(\Omega^{\ell})$.

Démonstration.

a). On commence par vérifier l'inégalité triangulaire **:**

Pour tout $\dot{v},\dot{w}\in H^{1+\varepsilon}(\Omega^{\ell})/P_1(\Omega^{\ell})$, on a

$$\|\dot{v}+\dot{w}\|_{1+\varepsilon} \leq \|v+w+p+q\|_{H^{1+\varepsilon}(\Omega^\ell)} \leq \|v+p\|_{H^{1+\varepsilon}(\Omega^\ell)} + \|w+q\|_{H^{1+\varepsilon}(\Omega^\ell)} : \forall p,q \in P_1(\Omega^\ell)$$

On obtient

$$\|\dot{v}+\dot{w}\|_{1+\varepsilon} \leq \operatorname*{Inf}_{p\in P_1(\Omega^\ell)} \|v+p\|_{H^{1+\varepsilon}(\Omega^{1+\varepsilon})} + \operatorname*{Inf}_{q\in P_1(\Omega^\ell)} \|w+q\|_{H^{1+\varepsilon}(\Omega^\ell)}$$

D'où la démonstration.

b). on démontre que **:** $\forall\alpha\in IR, \forall\dot{v}\in H^{1+\varepsilon}(\Omega^\ell)/P_1(\Omega^\ell)$: $\|\alpha.\dot{v}\|_{1+\varepsilon} = |\alpha|\|\dot{v}\|_{1+\varepsilon}$

Pour $\alpha\in IR$, $\dot{v}\in H^{1+\varepsilon}(\Omega^\ell)/P_1(\Omega^\ell)$, on a :

$$\|\alpha.\dot{v}\|_{1+\varepsilon} = \operatorname*{Inf}_{p\in P_1(\Omega^\ell)} \|\alpha.v+p\|_{H^{1+\varepsilon}(\Omega^\ell)} = \operatorname*{Inf}_{q\in P_1(\Omega^\ell)} \|\alpha.v+\alpha.q\|_{H^{1+\varepsilon}(\Omega^\ell)}$$

Ou encore :

$$\|\alpha.\dot{v}\|_{1+\varepsilon} = \operatorname*{Inf}_{q\in P_1(\Omega^\ell)} |\alpha|.\|v+q\|_{H^{1+\varepsilon}(\Omega^\ell)} = |\alpha|\|\dot{v}\|_{1+\varepsilon}$$

c). Il ne reste que de vérifier que **:** $\forall\dot{v}\in H^{1+\varepsilon}(\Omega^\ell)/P_1(\Omega^\ell)$: $\|\dot{v}\|_{1+\varepsilon} = 0 \Rightarrow \dot{v}=0$ **:**

Si $v\in H^{1+\varepsilon}(\Omega^\ell)$, avec $\|\dot{v}\|_{1+\varepsilon} = 0$, on a $\operatorname*{Inf}_{p\in P_1(\Omega^\ell)} \|v+p\|_{H^{1+\varepsilon}(\Omega^\ell)} = 0$,

Alors il existe une suite $(p_n)_{n\geq 0}$ dans $P_1(\Omega^\ell)$ avec $\|v+p_n\|_{H^{1+\varepsilon}(\Omega^\ell)} \to 0$;quant $n\to+\infty$

En appliquant le théorème d'injection continue du *Sobolev* $H^{1+\varepsilon}(\Omega^\ell) \hookrightarrow C^0(\Omega^\ell)$, Alors existe une constante $c>0$ telle que :

$$\|v+p_n\|_{C^0(\Omega^\ell)} \leq c\|v+p_n\|_{H^{1+\varepsilon}(\Omega^\ell)} \quad \forall n\in IN$$

D'où l'égalité :

$$\|v+p_n\|_{C^0(\Omega^\ell)} \leq c\|v+p_n\|_{H^{1+\varepsilon}(\Omega^\ell)} \to 0 : \text{ quant } \quad n\to+\infty$$

Donc : $p_n \to -v$ dans $C^0(\Omega^\ell)$

Mais $P_1(\Omega^\ell)$ est fermé dans $\mathrm{C}^0(\Omega^\ell)$, on a alors $v\in P_1(\Omega^\ell)$, c'est à dire que $\dot{v}=0$.

Remarque.4.2.1. Soit $\varepsilon>0$, alors l'application :

$$\text{(4.2.3)} \qquad \dot{v}\in H^{1+\varepsilon}(\Omega^\ell)/P_1(\Omega^\ell) \mapsto |\dot{v}|_{1+\varepsilon} = \left[\sum_{|\alpha|=1} \iint_{\Omega^\ell\Omega^\ell} \frac{\left(D^\alpha v(x)-D^\alpha v(y)\right)^2}{|x-y|^{2+2\varepsilon}} dxdy\right]^{\frac{1}{2}}$$

est une semi norme sur l'espace quotient $H^{1+\varepsilon}(\Omega^\ell)/P_1(\Omega^\ell)$.

Proposition.4.2.2. Si $0<\varepsilon<1$, alors, il existe une constante $c>0$ telle que :

$$\text{(4.2.4)} \qquad \operatorname*{Inf}_{p\in P_1(\Omega^\ell)} \|v+p\|_{H^{1+\varepsilon}(\Omega^\ell)} \leq c|v|_{H^{1+\varepsilon}(\Omega^\ell)} \quad : \forall v\in H^{1+\varepsilon}(\Omega^\ell)$$

Démonstration. Soit $N = \dim P_1(\Omega^\ell)$, et $q_i;\ 1 \le i \le N$ une base du $P_1(\Omega^\ell)$, on suppose que les $f_i; 1 \le i \le N$ forment une base duale de $q_i;\ 1 \le i \le N$, c'est à dire que pour $f_i \in \mathrm{L}(P_1(\Omega^\ell), IR)$, on a $f_i(q_j) = \delta_{ij}$.

Le théorème de prolongement de *Hahn Banach* entrain l'existence des formes linéaires continues sur l'espace $H^{1+\varepsilon}(\Omega^\ell)$ notées encore $f_i; 1 \le i \le N$ telles que pour tout $p \in P_1(\Omega^\ell)$, nous avons $f_i(p) = 0; \forall i = \overline{1, N}$, si et seulement si $p = 0$.

Nous allons montrer qu'il existe une constante $c = c(\Omega^\ell) > 0$ telle que :

(4.2.5) $$\|v\|_{H^{1+\varepsilon}(\Omega^\ell)} \le c\left[|v|_{H^{1+\varepsilon}(\Omega^\ell)} + \sum_{i=1}^{N} |f_i(v)|\right], \qquad \forall v \in H^{1+\varepsilon}(\Omega^\ell)$$

Si cette inégalité et fausse. Alors il existe une suite $(v_n)_{n\ge 0}$ des fonctions $v_n \in H^{1+\varepsilon}(\Omega^\ell)$, telle que ;

(4.2.6) $$\forall n \in IN : \|v_n\|_{H^{1+\varepsilon}(\Omega^\ell)} = 1 \text{ et } \quad \lim_{n\to+\infty}\left[|v_n|_{H^{1+\varepsilon}(\Omega^\ell)} + \sum_{i=1}^{N} |f_i(v_n)|\right] = 0$$

Etant donnée que La suite $(v_n)_{n\ge 0}$ est bornée dans $H^{1+\varepsilon}(\Omega^\ell)$, il existent une sous-suite de $(v_n)_{n\ge 0}$, que l'on note encore $(v_n)_{n\ge 0}$ et une fonction $v \in H^1(\Omega^\ell)$ telles que ;

(4.2.7) $$\lim_{n\to+\infty}\|v_n - v\|_{H^1(\Omega^\ell)} = 0$$

Ce résulta est une conséquence du théorème de *Rellich* ($H^{1+\varepsilon}(\Omega^\ell) \overset{c}{\subset} H^1(\Omega^\ell)$).

Les relations dans (4.2.6) entraînant notamment :

(4.2.8) $$\lim_{n\to+\infty}|v_n|_{H^{1+\varepsilon}(\Omega^\ell)} = 0$$

L'espace $H^{1+\varepsilon}(\Omega^\ell)$ étant complet, les relations (4.2.7) et (4.2.8) entraînent la convergence forte de la suite $(v_n)_{n\ge 0}$ dans l'espace $H^{1+\varepsilon}(\Omega^\ell)$. Soit v la limite de cette suite dans $H^{1+\varepsilon}(\Omega^\ell)$ telle que :

$$\left[\iint_{\Omega^\ell\Omega^\ell} \frac{[D^\alpha v(x) - D^\alpha v(y)]^2}{|x-y|^{2+2\varepsilon}}\,dxdy\right]^{\frac{1}{2}} = |v|_{H^{1+\varepsilon}(\Omega^\ell)} = \lim_{n\to+\infty}|v_n|_{H^{1+\varepsilon}(\Omega^\ell)} = 0, \quad \forall \alpha \text{ avec } |\alpha| = 1;$$

Alors :

$$D^\alpha v(x) = D^\alpha v(y); \quad p.p\ x,y \in \Omega^\ell; \forall \alpha\ /\ |\alpha| = 1$$

Donc les fonctions $D^\alpha v$ sont constantes pour tout milti-indice α telque $|\alpha| = 1$. La connexité de l'ouverte Ω^ℓ en utilisant la théorie des distributions, entraînent que la fonction v est un polynôme de degré inférieur ou égale à 1. En utilisant (4.2.6), nous avons : $f_i(v) = \lim_{n\to+\infty} f_i(v_n) = 0\ ; \forall i = \overline{1,N}$

D'où $v = 0$, compte tenu des propriétés des formes linéaires $f_i ; 1 \le i \le N$. Mais ce résultat contredit l'égalité $\|v_n\|_{H^{1+\varepsilon}(\Omega^\ell)} = 1$; $\forall n \ge 1$, l'inégalité (4.2.5) est donc établie.

L'inégalité (4.2.4) est une conséquence immédiate de l'inégalité (4.2.5): pour toute fonction $v \in H^{1+\varepsilon}(\Omega^\ell)$, désignons par $q \in P_1(\Omega^\ell)$ le polynôme tel que : $q = -\sum_{i=1}^{N} f_i(v) q_i$. On a alors

$$\forall i = \overline{1, N} \ : \ f_i(v+q) = f_i(v) + f_i(q) = f_i(v) - \sum_{k=1}^{N} f_k(v).f_i(q_k) = f_i(v) - f_i(v) = 0$$

Et de (4.2.5), on obtient :

$$\operatorname*{Inf}_{p \in P_1(\Omega^\ell)} \|v + p\|_{H^{1+\varepsilon}(\Omega^\ell)} \le \|v+q\|_{H^{1+\varepsilon}(\Omega^\ell)} \le c|v+q|_{H^{1+\varepsilon}(\Omega^\ell)}$$

D'où la démonstration en utilisant l'égalité $|v+q|_{H^{1+\varepsilon}(\Omega^\ell)} = |v|_{H^{1+\varepsilon}(\Omega^\ell)}$.

Proposition.4.2.3. Soit $s > 1$ et $m = 0.1$. Soit $\pi \in \mathrm{L}(H^S(K), H^m(K))$ un opérateur linéaire continu vérifiant :

(4.2.9) $\forall p \in P_1(K): \ \ \pi.p = p$.

Alors, il existe une constante c telle que :

(4.2.10) $\|v - \pi v\|_{H^m(K)} \le c\|I_K - \pi\|_{\mathrm{L}(H^S(K), H^m(K))} . |v|_{H^s(K)} \qquad \forall v \in H^S(K)$

Démonstration.

Pour chaque $v \in H^S(K)$ et pour chaque $p \in P_1(K)$, nous pouvons écrire :

$$v - \pi.v = (I_K - \pi)(v+p) \quad : \forall p \in P_1(K)$$

Ainsi, pour tout $p \in P_1(K)$, il vient :

$$\|v - \pi.v\|_{H^m(K)} \le \|I_K - \pi\|.\|v+p\|_{H^S(K)}$$

D'où :

$$\|v - \pi v\|_{H^m(K)} \le \|I_K - \pi\|. \operatorname*{Inf}_{p \in P_1(K)} \|v+p\|_{H^S(K)}$$

Par suite, en utilisant l'inégalité (4.2.4), il vient :

$$\|v - \pi v\|_{H^m(K)} \le c\|I_K - \pi\|.|v|_{H^S(K)} .$$

Le résultat suivant donne une majoration de $|v|_{H^m(K)}$ en fonction de $|\hat{v}|_{H^m(\hat{K})}$, et inversement .

Proposition.4.2.4. Soit $m \in IN$. Alors, il existe des constantes $c > 0$, $\hat{c} > 0$ telles :

(4.2.11) $|\hat{v}|_{H^m(\hat{K})} \le c\|B_K\|^m . \left|dét\left(B_K^{-1}\right)\right|^{\frac{1}{2}} . |v|_{H^m(K)}, \forall v \in H^m(K)$

(4.2.12) $\quad |v|_{H^m(K)} \leq \hat{c}\left\|B_K^{-1}\right\|^m .\left|dét\left(B_K\right)\right|^{\frac{1}{2}}.|\hat{v}|_{H^m(\hat{K})}, \forall \hat{v} \in H^m(\hat{K})$

Où B_K est la matrice inversible définie par la relation (3.2.1) et $\left\|B_K\right\| = \sup_{\|\xi\|=1}\left\|B_K \xi\right\|$ où $\|\,.\,\|$ est la norme euclidienne.

Démonstration. Comme l'espace $D(\overline{K})$ est dense dans $H^m(K)$, il suffit d'établir ces résultats pour toute fonction $v \in D(\overline{K})$. Il est commode d'utiliser ici les dérivées de *Fréchet* .

Pour tout multi-indice α avec $|\alpha| = m$, il vient :

$$\partial^\alpha \hat{v}(\hat{x}) = D^m \hat{v}(\hat{x}).(e_{1\alpha},..., e_{m\alpha})$$

Où les vecteurs $e_{i\alpha}$, $1 \leq i \leq m$, sont les vecteurs de base (e_1, e_2) de IR^2 répétés respectivement, α_1, α_2 fois. Ainsi

$$\left|\partial^\alpha \hat{v}(\hat{x})\right| = \left|D^m \hat{v}(\hat{x}).(e_{1\alpha},...., e_{m\alpha})\right| \leq \operatorname*{Sup}_{\|\xi_i\|\leq 1}\left|D^m \hat{v}(\hat{x}).(\xi_{1\alpha},...., \xi_{m\alpha})\right| = \left\|D^m \hat{v}(\hat{x})\right\|$$

On a

(4.2.13) $\quad \left|\partial^\alpha \hat{v}(\hat{x})\right| \leq \left\|D^m \hat{v}(\hat{x})\right\|$

D'où l'existence d'une constante $c_1 > 0$ ne dépendant que de m et telle que :

(4.2.14) $\quad |\hat{v}|^2_{H^m(\hat{K})} = \sum_{|\alpha|=m}\int_{\hat{K}}\left|\partial^\alpha \hat{v}(\hat{x})\right|^2 d\hat{x} \leq c_1 \int_{\hat{K}}\left\|D^m \hat{v}(\hat{x})\right\|^2 d\hat{x}$

Les propriétés de différentiation des fonctions composées, (voir J.L.Lions [11]) appliquées à la relation è $\hat{v} = v.F_K$, donnent pour tous les vecteurs $\xi_i \in IR^2, i = \overline{1,m}$:

$$D^m \hat{v}(\hat{x}).(\xi_1, \xi_2,..., \xi_m) = D^m v(x).(B_K\xi_1, B_K\xi_2,..., B_K\xi_m)$$

Ou encore :

$$D^m \hat{v}(\hat{x}).(\xi_1, \xi_2,..., \xi_m) = \left\|B_K\right\|^m D^m v(x).\left(\frac{B_K\xi_1}{\left\|B_K\right\|}, \frac{B_K\xi_2}{\left\|B_K\right\|},..., \frac{B_K\xi_m}{\left\|B_K\right\|}\right)$$

De telle sorte que :

(4.2.15) $\quad \left\|D^m \hat{v}(\hat{x})\right\| \leq \left\|B_K\right\|^m .\left\|D^m v(x)\right\|$

D'où :

(4.2.16) $\quad \int_{\hat{K}}\left\|D^m \hat{v}(\hat{x})\right\|^2 d\hat{x} \leq \left\|B_K\right\|^{2.m}\int_{\hat{K}}\left\|D^m v(x)\right\|^2 d\hat{x} = \left\|B_K\right\|^{2.m}.\left|\mathrm{dét} B_K^{-1}\right|.\int_K\left\|D^m v(x)\right\|^2 dx$

En utilisant les propriétés de changement de variables dans le calcul des intégrales multiples.

Mais : $\quad D^m v(x) = \sum_{|\alpha|=1}\partial^\alpha v(x).e_\alpha^*$; telque $\left\|e_\alpha^*\right\| = 1$

Il résulte qu'il existe une constante $c_2 = c_2(m) > 0$ telle que :

$$\left\| D^m v(x) \right\| \leq c_2(m). \max_{|\alpha|=m} \left| \partial^\alpha v(x) \right|$$

D'où l'on déduit ;

$$\left[\int_K \left\| D^m v(x) \right\|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \leq c_3(m) |v|_{H^m(K)} \tag{4.2.17}$$

On obtient alors l'inégalité (4.2.11) en rassemblant les inégalités (4.2.14) à (4.2.17) .

La démonstration de l'inégalité (4.2.12) est entièrement analogue.

Proposition.4.2.5. Soit $r \in IR^+ - IN$. Alors, il existe une constante $c > 0$ indépendante de h_K telle que pour tout $\hat{v} \in H^r(\hat{K})$

$$|\hat{v}|_{H^r(\hat{K})} \leq c \left\| B_K \right\|^{r+1} . \left| \text{dét}\left(B_K^{-1} \right) \right| . |v|_{H^r(K)} \tag{4.2.18}$$

Démonstration. Posons $r = m + \theta$: $0 < \theta < 1$, $m \in IN$;

Comme l'espace $D(\overline{\hat{K}})$ est dense dans $H^r(\hat{K})$, il suffit d'établir ces résultats pour toute fonction $v \in D(\overline{\hat{K}})$. Il est commode d'utiliser ici les dérivées de *Fréchet*.

Pour tout multi indice α avec $|\alpha| = m$, il vient :

$$\partial^\alpha \hat{v}(\hat{x}) - \partial^\alpha \hat{v}(\hat{y}) = \left(D^m \hat{v}(\hat{x}) - D^m \hat{v}(\hat{y}) \right) . \left(e_{1\alpha}, \ldots, e_{2\alpha} \right)$$

Ainsi :

$$\left| \partial^\alpha \hat{v}(\hat{x}) - \partial^\alpha \hat{v}(\hat{y}) \right| \leq \left\| D^m \hat{v}(\hat{x}) - D^m \hat{v}(\hat{y}) \right\|$$

D'où l'existence d'une constante $c_1 = c_1(m) > 0$ ne dépendant que de m et telle que :

$$|\hat{v}|^2_{H^r(\hat{K})} = \sum_{|\alpha|=m} \iint_{\hat{K}\hat{K}} \frac{\left| \partial^\alpha \hat{v}(\hat{x}) - \partial^\alpha \hat{v}(\hat{y}) \right|^2}{|\hat{x} - \hat{y}|^{2+2\theta}} d\hat{x} d\hat{y} \leq c_1(m) \iint_{\hat{K}\hat{K}} \frac{\left\| D^m \hat{v}(\hat{x}) - D^m \hat{v}(\hat{y}) \right\|^2}{|\hat{x} - \hat{y}|^{2+2\theta}} d\hat{x} d\hat{y} \tag{4.2.19}$$

Et comme (4.2.15), on a

$$\left\| D^m \hat{v}(\hat{x}) - D^m \hat{v}(\hat{y}) \right\| \leq \left\| B_K \right\|^m . \left\| D^m v(x) - D^m v(y) \right\| \tag{4.2.20}$$

Mais il existe une constante $c_2 = c_2(m) > 0$, telle que :

$$\left\| D^m v(x) - D^m v(y) \right\| \leq c_2(m). \max_{|\alpha|=m} \left| \partial^\alpha v(x) - \partial^\alpha v(y) \right|$$

Et, de (4.2.20), on a alors

$$\iint_{\hat{K}\hat{K}} \frac{\left\| D^m \hat{v}(\hat{x}) - D^m \hat{v}(\hat{y}) \right\|^2}{|\hat{x} - \hat{y}|^{2+2\theta}} d\hat{x} d\hat{y} \leq c_2(m). \left\| B_K \right\|^{2m} . \sum_{|\alpha|=m} \iint_{\hat{K}\hat{K}} \frac{\left| \partial^\alpha v(x) - \partial^\alpha v(y) \right|^2}{|\hat{x} - \hat{y}|^{2+2\theta}} d\hat{x} d\hat{y} \tag{4.2.21}$$

Mais : $|x-y| = |B_K\hat{x} - B_K\hat{y}| \le \|B_K\|.|\hat{x}-\hat{y}|$, on a alors ;

$$\frac{1}{|\hat{x}-\hat{y}|} \le \frac{\|B_K\|}{|x-y|}$$

Et, de (4.2.19),(4.2.21) , il vient :

$$\text{(4.2.22)} \quad \begin{cases} |\hat{v}|^2_{H^r(\hat{K})} \le c_2(m)\|B_K\|^{2m}.\|B_K\|^{2+2\theta}.\sum_{|\alpha|=m}\iint_{\hat{K}\hat{K}} \dfrac{\left|\partial^\alpha v(x) - \partial^\alpha v(y)\right|^2}{|x-y|^{2+2\theta}} d\hat{x}d\hat{y} \\ \qquad = \left|\text{dét}\left(B_K^{-1}\right)\right|^{-2} \sum_{|\alpha|=m}\iint_{\hat{K}\hat{K}} \dfrac{\left|\partial^\alpha v(x) - \partial^\alpha v(y)\right|^2}{|x-y|^{2+2\alpha}} dx.dy \end{cases}$$

En utilisant les propriétés de changement de variables dans le calcul des intégrales multiples .
De plus, en utilisant maintenant (4.2.22), il vient

$$|\hat{v}|^2_{H^r(\hat{K})} \le c\|B_K\|^{2+2r}.\left|\text{dét}\left(B_K^{-1}\right)\right|^{-2}.|v|^2_{H^r(K)}$$

D'où le résultat.

Pour utiliser les propositions 4.2.4, 4.2.5, il convient d'évaluer les normes $\|B_K\|, \|B_K^{-1}\|$ et les expressions $|\det(B_K)|, |\det(B_K^{-1})|$ en fonction de caractéristiques géométriques des K et $\hat{K}$. Nous notons :

$$\begin{cases} h_K = \text{diam}(K), \quad \hat{h} = \text{diam}(\hat{K}) \\ \rho_K = \sup\{\text{diam}(S) \text{ ; } S \text{ est une boule contenue dans } K\} \\ \hat{\rho} = \sup\{\text{diam}(\hat{S}) \text{ ; } \hat{S} \text{ est une boule contenue dans } \hat{K}\} \end{cases}$$

Lemme.4.2.2. Si $\hat{\rho} > 0$ (ou de même $\rho_K > 0$), on a les majorations :

$$\text{(4.2.23)} \quad \|B_K\| \le \frac{h_K}{\hat{\rho}}, \quad \|B_K^{-1}\| \le \frac{\hat{h}}{\rho_K}.$$

$$\text{(4.2.24)} \quad \left|\text{dét}(B_K)\right| = \frac{\text{mes}(K)}{\text{mes}(\hat{K})}, \quad \left|\text{dét}(B_K^{-1})\right| = \frac{\text{mes}(\hat{K})}{\text{mes}(K)}$$

Démonstration. Nous pouvons écrire :

$$\|B_K\| = \frac{1}{\hat{\rho}}\sup_{\|\xi\|=\hat{\rho}}\|B_K\xi\|$$

Par définition de $\hat{\rho}$, il existe une boule de diamètre $\hat{\rho}$ contenue dans $\hat{K}$, i.e :

$$\forall \xi \in IR^2 \text{ avec } \|\xi\| = \hat{\rho},\ \exists \hat{x},\hat{y} \in \hat{K} \text{ tels que } \xi = \hat{x} - \hat{y}$$

Alors :

$$B_K\xi = B_K\hat{x} - B_K\hat{y} = (B_K\hat{x} + b_K) - (B_K\hat{y} + b_K) = x - y$$

Avec $x, y \in K$. Comme h_K désigne le diamètre de K , on a $\|x - y\| \leq h_K$, d'où :

$$\forall \xi \in IR^2 \text{ avec ; } \|\xi\| = \hat{\rho} \ : \ \|B_K \xi\| \leq h_K$$

Ainsi $\|B_K\| = \frac{1}{\hat{\rho}} \sup_{\|\xi\|=\hat{\rho}} \|B_K \xi\| \leq \frac{h_K}{\hat{\rho}}$ et l'on obtiendrait la seconde inégalité (4.2.23) de manière similaire.

Les inégalités (4.2.24) sont des conséquences directes des propriétés de changement de variables dans les intégrales multiples.

Nous sommes maintenant en mesure d'établir le résultat principal de ce paragraphe :

Théorème.4.2.1. Soit $m = 0{,}1$ et $1 < r \leq 3$, il existe une constante $c = c(\hat{K}) > 0$ indépendante de h telle que, pour tout $K \in \mathcal{T}_h^\ell$ et toute fonction $v \in H^r(K)$, on ait :

(4.2.25) $\left|v - I_K^\ell v\right|_{H^m(K)} \leq c \dfrac{h_K^r}{\rho_K^m} |v|_{H^r(K)}$

Où $I_K^\ell v$ désigne la fonction P_K -interpolante de la fonction v .

Démonstration. Soit $\hat{I}$ l'opérateur $\hat{P}$ -d'interpolation associé à l'élément fini $\left(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma}\right)$, par définition on a $\hat{I}\hat{p} = \hat{p} \ ; \ \forall \hat{p} \in \hat{P}$, d'où grâce à l'inclusion (3.2.3) :

(4.2.26) $\hat{I}\hat{p} = \hat{p} \ : \ \forall \hat{p} \in P_1\left(\hat{K}\right)$

Soit alors $\hat{v}$ une fonction de l'espace $H^r\left(\hat{K}\right)$, on peut écrire :

$$\hat{I}\hat{v} = \sum_{i=1}^{3} \hat{v}\left(\hat{a}_i\right)\hat{p}_i$$

Montrons que $\hat{I}$ est un opérateur linéaire continu de $H^r\left(\hat{K}\right)$ dans $H^m\left(\hat{K}\right)$.

L'hypothèse (3.2.3) entraîne que toutes les fonctions de base $\left(\hat{p}_i\right)_{i=1.2.3}$ sont dans l'espace $H^m\left(\hat{K}\right)$.

Ainsi :

$$\left\|\hat{I}\hat{v}\right\|_{H^m(\hat{K})} \leq \sum_{i=1}^{3} \left|\hat{v}\left(\hat{a}_i\right)\right| . \left\|\hat{p}_i\right\|_{H^m(\hat{K})}$$

L'inclusion avec injection continue $H^r\left(\hat{K}\right) \hookrightarrow C\left(\hat{K}\right)$ entraîne :

$$\hat{v}\left(\hat{a}_i\right) \leq \|\hat{v}\|_{C(\hat{K})} \leq c_1 \|\hat{v}\|_{H^r(\hat{K})}$$

D'où :

$$\left\|\hat{I}\hat{v}\right\|_{H^m(\hat{K})} \leq c_1 \sum_{i=1}^{3} \left\|\hat{p}_i\right\|_{H^m(\hat{K})} . \|\hat{v}\|_{H^r(\hat{K})}$$

Alors, existe une constante $c_2 = c_2\left(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma}\right) > 0$ telle que :

$$\left\|\hat{I}\hat{v}\right\|_{H^m(\hat{K})} \leq c_2 \|\hat{v}\|_{H^r(\hat{K})}$$

D'où

$$\hat{I} \in \mathrm{L}\left(H^{r}\left(\hat{K}\right), H^{m}\left(\hat{K}\right)\right)$$

Et, de relations (4.2.26), l'opérateur $\hat{I}$ vérifie les hypothèses du proposition.4.2.3. Par suite, il existe une constante $c = c\left(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma}\right) > 0$ telle que :

(4.2.27) $\quad \forall \hat{v} \in H^{r}\left(\hat{K}\right), \quad \left|\hat{v} - \hat{I}\hat{v}\right|_{H^{m}(\hat{K})} \leq c\left|\hat{v}\right|_{H^{r}(\hat{K})}$

Par définition :

$$\hat{I}\hat{v} = \sum_{i=1}^{3} \hat{v}\left(\hat{a}_{i}\right)\hat{p}_{i} = \sum_{i=1}^{3} v.F_{K}\left(\hat{a}_{i}\right)p_{i}.F_{K} = \left(\sum_{i=1}^{n} v\left(a_{i}\right)p_{i}\right).F_{K} = \left(I_{K}^{h}v\right).F_{K} = \widehat{I_{K}^{h}v}$$

De la même manière, on démontre que : $\quad \hat{v} - \hat{I}\hat{v} = \left(\widehat{v - I_{K}^{h}v}\right)$

1^er cas : Pour $r = 2,3$, le résultat de proposition.4.2.4. donne :

(4.2.28) $\quad \left|v - I_{K}^{\ell}v\right|_{H^{m}(K)} \leq c_{1}\left\|B_{K}^{-1}\right\|^{m}.\left|\text{dét}\left(B_{K}\right)\right|^{\frac{1}{2}}.\left|\hat{v} - \hat{I}\hat{v}\right|_{H^{m}(\hat{K})}$

(4.2.29) $\quad \left|\hat{v}\right|_{H^{r}(\hat{K})} \leq c_{2}\left\|B_{K}\right\|^{r}.\left|\text{dét}\left(B_{K}^{-1}\right)\right|^{\frac{1}{2}}.\left|v\right|_{H^{r}(K)}$

En combinant les inégalités (4.2.28), (4.2.27) et (4.2.29) et les résultats du lemme4.2.2., on obtient la majoration (4.2.25).

2^eme cas : Pour $1 < r < 3$ avec $r \notin IN$; ((4.2.28) reste valable)

En combinant les inégalités (4.2.28) et (4.2.27), on obtient :

$$\left|v - I_{K}^{\ell}v\right|_{H^{m}(K)} \leq c_{3}\left\|B_{K}^{-1}\right\|^{m}.\left|\text{dét}\left(B_{K}\right)\right|^{\frac{1}{2}}.\left|\hat{v}\right|_{H^{r}(K)}$$

Et, de (4.2.18), on tire :

$$\left|v - I_{K}^{\ell}v\right|_{H^{m}(K)} \leq c_{4}\left\|B_{K}^{-1}\right\|^{m}.\left|\text{dét}\left(B_{K}\right)\right|^{\frac{1}{2}}.\left\|B_{K}\right\|^{r+1}.\left|\text{dét}\left(B_{K}^{-1}\right)\right|.\left|v\right|_{H^{r}(K)}$$

En utilisant (4.2.23), (4.2.24), il en résulte :

$$\left|v - I_{K}^{\ell}v\right|_{H^{m}(K)} \leq c_{5}\,\frac{\hat{h}^{m}}{\rho_{K}^{m}}.\left[\frac{\text{mes}\left(\hat{K}\right)}{\text{mes}\left(K\right)}\right]^{\frac{1}{2}}.\frac{h_{K}^{r+1}}{\hat{\rho}^{r+1}}.\left|v\right|_{H^{r}(K)} \quad ,$$

Ou encore :

$$\left|v - I_{K}^{\ell}v\right|_{H^{m}(K)} \leq c_{6}\,\frac{h_{K}^{r+1}}{\left[\text{mes}\left(K\right)\right]^{\frac{1}{2}}\rho_{K}^{m}}\left|v\right|_{H^{r}(K)} \qquad \text{où,} \qquad c_{6} = c_{6}\left(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma}\right)$$

Puisque $\text{mes}\left(K\right) \geq c\rho_{K}^{2}$, avec (4.1.1), alors $\text{mes}\left(K\right) \geq c_{7}h_{K}^{2}$, et par conséquent :

$$\left|v - I_{K}^{\ell}v\right|_{H^{m}(K)} \leq c_{8}\,\frac{h_{K}^{r+1}}{h_{K}.\rho_{K}^{m}}\left|v\right|_{H^{r}(K)} = c_{9}\,\frac{h_{K}^{r}}{\rho_{K}^{m}}\left|v\right|_{H^{r}(K)}.$$

Théorème.4.2.2. Soit $1 < r \le 3$, alors il existe une constante $c = c(\hat{K}) > 0$ indépendante de h telle que :

(4.2.30) $\left\| u^\ell - \Pi_h^\ell u^\ell \right\|_{(H^1(\Omega^\ell))^2} \le c h_\ell^{r-1} \left\| u^\ell \right\|_{(H^r(\Omega^\ell))^2} \quad \forall u^\ell \in \left(H^r(\Omega^\ell)\right)^2$ où $\Pi_h^\ell = \left(I_h^\ell, I_h^\ell\right)$

Autrement dit, $\lim\limits_{h\to 0} \left\| u^\ell - \Pi_h^\ell u^\ell \right\|_{(H^1(\Omega^\ell))^2} = 0$

Démonstration. En utilisant la relation (4.2.25), on obtient :

$$\begin{cases} \left| u_i^\ell - I_K^\ell u_i^\ell \right|_{IL^2(K)} \le c_1 h_K^r \left| u_i^\ell \right|_{H^r(K)} \\ \left| u_i^\ell - I_K^\ell u_i^\ell \right|_{H^1(K)} \le c_2 \dfrac{h_k^r}{\rho_K} \left| u_i^\ell \right|_{H^r(K)} \end{cases} : \forall K \in \mathcal{T}_h^\ell$$

On a donc

$$\left\| u_i^\ell - I_K^\ell u_i^\ell \right\|_{H^1(K)}^2 \le c_1^2 h_K^{2r} \left| u_i^\ell \right|_{H^r(K)}^2 + c_2^2 \frac{h_K^{2r}}{\rho_K^2} \left| u_i^\ell \right|_{H^r(K)}^2 : \forall K \in \mathcal{T}_h^\ell$$

De (4.1.1), on a $\dfrac{h_K}{\rho_K} \le \dfrac{1}{\alpha}$, et de $h_K \le \mathrm{diam}(\Omega^\ell)$, il vient :

$$\left\| u_i^\ell - I_K^\ell u_i^\ell \right\|_{H^1(K)}^2 \le \left[c_1^2 \left(diam(\Omega^\ell)\right)^2 + \frac{c_2^2}{\alpha^2} \right] h_K^{2r-2} \left| u_i^\ell \right|_{H^r(K)} : \forall K \in \mathcal{T}_h^\ell$$

Ou encore :

(4.2.31) $\left\| u_i^\ell - I_K^\ell u_i^\ell \right\|_{H^1(K)} \le c_3 h_K^{r-1} \left| u_i^\ell \right|_{H^r(K)} : \forall K \in \mathcal{T}_h^\ell$

D'où on déduit finalement

$$\left\| u_i^\ell - I_h^\ell u_i^\ell \right\|_{H^1(\Omega^\ell)} = \left[\sum_K \left\| u_i^\ell - I_K^\ell u_i^\ell \right\|_{H^1(K)}^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

C'est à dire

$$\left\| u_i^\ell - I_h^\ell u_i^\ell \right\|_{H^1(\Omega^\ell)} \le c_3 h_K^{r-1} \left[\sum_K \left| u_i^\ell \right|_{H^r(K)}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \le c_3 h_K^{r-1} \left| u_i^\ell \right|_{H^r(\Omega^\ell)}$$

Pour $h_K \le h_\ell$, alors pour tout $K \in \mathcal{T}_h^\ell$, on a

$$\left\| u^\ell - \Pi_h^\ell u^\ell \right\|_{(H^1(\Omega^\ell))^2} = \left[\left\| u_1^\ell - I_h^\ell u_1^\ell \right\|_{H^1(\Omega^\ell)}^2 + \left\| u_2^\ell - I_h^\ell u_2^\ell \right\|_{H^1(\Omega^\ell)}^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

On en déduit :

$$\left\| u^\ell - \Pi_h^\ell u^\ell \right\|_{(H^1(\Omega^\ell))^2} \le c_3 h_\ell^{r-1} \left[\left| u_1^\ell \right|_{H^r(\Omega^\ell)}^2 + \left| u_2^\ell \right|_{H^r(\Omega^\ell)}^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

D'où l'inégalité (4.2.30).

Corollaire.4.2.1. Soient $0 \le s \le 1$, $1 < r \le 3$, alors, il existe une constante $c = c(s,r) > 0$ indépendante de h telle que :

(4.2.32) $\left\| u^{\ell} - \Pi_h^{\ell} u^{\ell} \right\|_{(H^s(\Omega^{\ell}))^2} \le ch^{r-s} \left\| u^{\ell} \right\|_{(H^r(\Omega^{\ell}))^2}$, $\forall u^{\ell} \in (H^r(\Omega^{\ell}))^2$

Démonstration. On peut écrire :

$$\left\| u^{\ell} - \Pi_h^{\ell} u^{\ell} \right\|_{(H^s(\Omega^{\ell}))^2} = \left(\sum_{i=1}^{2} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\| u_i^{\ell} - I_K^{\ell} u_i^{\ell} \right\|_{H^s(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

En utilisant (4.2.25), pour $m = 0.1$, ainsi que l'inégalité d'interpolation, on trouve :

$$\left\| u_i^{\ell} - I_K^{\ell} u_i^{\ell} \right\|_{H^S(K)} \le c_1 \left\| u_i^{\ell} - I_K^{\ell} u_i^{\ell} \right\|_{IL^2(K)}^{1-S} \left\| u_i^{\ell} - I_K^{\ell} u_i^{\ell} \right\|_{H^1(K)}^{S}$$

D'où il découle :

$$\left\| u_i^{\ell} - I_K^{\ell} u_i^{\ell} \right\|_{H^S(K)} \le c_2 h_K^{(1-s)r + s(r-1)} . \left| u_i^{\ell} \right|_{H^r(K)} = c_2 h_K^{r-s} . \left| u_i^{\ell} \right|_{H^r(K)}$$

Corollaire.4.2.2. Soit $\frac{1}{2} < r \le \frac{5}{2}$, alors il existe une constante $c = c(r) > 0$ indépendante de h telle que :

(4.2.33) $\left\| \lambda - i_h^{\ell} \lambda \right\|_{IL^2(\Gamma_3)} + h^{\frac{1}{2}} \left\| \lambda - i_h^{\ell} \lambda \right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_3)} \le ch^r \left\| \lambda \right\|_{H^r(\Gamma_3)}$; $\forall \lambda \in \mathrm{H}^r(\Gamma_3)$

Enfin, $\lim_{h \to +\infty} \left\| \lambda - i_h^{\ell} \lambda \right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_3)} = 0$

Démonstration. Nous utilisons dans la démonstration l'extension définie sur $H^r(\Gamma_3)$ par :

$$\begin{cases} R^{\ell} : H^r(\Gamma_3) \to H^{r+\frac{1}{2}}(\Omega^{\ell}) \\ \psi \mapsto R^{\ell} \psi \end{cases}$$

Posons $v^{\ell} = R^{\ell} \lambda$, on a

$$v^{\ell} - I_h^{\ell} v^{\ell} = R^{\ell}(\lambda - i_h^{\ell} \lambda) , \quad (v^{\ell} - I_h^{\ell} v^{\ell}) \eta^{\ell} = \lambda - i_h^{\ell} \lambda$$

D'après le théorème du trace on a :

$$\left\| \lambda - i_h^{\ell} \lambda \right\|_{IL^2(\Gamma_3)} \le c_1 \left\| v^{\ell} - \mathrm{I}_h^{\ell} v^{\ell} \right\|_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\Omega^{\ell})} \text{ et } \left\| \lambda - i_h^{\ell} \lambda \right\|_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_3)} \le c_2 \left\| v^{\ell} - \mathrm{I}_h^{\ell} v^{\ell} \right\|_{\mathrm{H}^1(\Omega^{\ell})}$$

Et donc :

(4.2.34) $\left\| \lambda - i_h^{\ell} \lambda \right\|_{IL^2(\Gamma_3)} + h^{\frac{1}{2}} \left\| \lambda - i_h^{\ell} \lambda \right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_3)} \le c_1 \left\| v^{\ell} - I_h^{\ell} v^{\ell} \right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Omega^{\ell})} + c_2 h^{\frac{1}{2}} \left\| v^{\ell} - I_h^{\ell} v^{\ell} \right\|_{H^1(\Omega^{\ell})}$

Pour $s = \frac{1}{2}, 1$ et $r + \frac{1}{2}$, en utilisant (4.2.30), il vient :

(4.2.35) $$\begin{cases} \left\| v^{\ell} - I_h^{\ell} v^{\ell} \right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Omega^{\ell})} \le c_3 h^r \left\| v^{\ell} \right\|_{H^{r+\frac{1}{2}}(\Omega^{\ell})} \\ \left\| v^{\ell} - I_h^{\ell} v^{\ell} \right\|_{H^1(\Omega^{\ell})} \le c_4 h^{r-\frac{1}{2}} \left\| v^{\ell} \right\|_{H^{r+\frac{1}{2}}(\Omega^{\ell})} \end{cases}$$

Et, de (4.2.34), (4.2.35), on tire :

$$\left\| \lambda - i_h^{\ell} \lambda \right\|_{IL^2(\Gamma_3)} + h^{\frac{1}{2}} \left\| \lambda - i_h^{\ell} \lambda \right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_3)} \le c_6 h^r \|v\|_{H^{r+\frac{1}{2}}(\Omega^{\ell})} + c_7 h^r \|v\|_{H^{r+\frac{1}{2}}(\Omega^{\ell})} \le c_8 h^r \|v\|_{H^{r+\frac{1}{2}}(\Omega^{\ell})}$$

De plus, en utilisant la continuité de R^{ℓ} , on déduit finalement

$$\left\| \lambda - i_h^{\ell} \lambda \right\|_{IL^2(\Gamma_3)} + h^{\frac{1}{2}} \left\| \lambda - i_h^{\ell} \lambda \right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_3)} \le c h^r \|\lambda\|_{H^r(\Gamma_3)}$$

Remarque.4.2.2. Soient $\frac{1}{2} < r \le \frac{5}{2}$, $0 \le s \le \frac{1}{2}$, alors existe une constante $c = c(r,s) > 0$ indépendante de h telle que, pour $\lambda \in H^r(\Gamma_3)$, on ait :

$$\left\| \lambda - i_h^{\ell} \lambda \right\|_{IL^2(\Gamma_3)} \le c h^r \|\lambda\|_{H^r(\Gamma_3)} \quad \text{et} \quad \left\| \lambda - i_h^{\ell} \lambda \right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_3)} \le c h^{r-\frac{1}{2}} \|\lambda\|_{H^r(\Gamma_3)} ,$$

On déduit que

$$\left\| I - i_h^{\ell} \right\|_{\mathrm{L}\left(H^r(\Gamma_3), IL^2(\Gamma_3)\right)} \le c h^r , \quad \text{et} \quad \left\| I - i_h^{\ell} \right\|_{\mathrm{L}\left(H^r(\Gamma_3), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_3)\right)} \le c h^{r-\frac{1}{2}}$$

On applique le théorème d'interpolation, on a

$$I - i_h^{\ell} \in \mathrm{L}\left(H^r(\Gamma_3), H^s(\Gamma_3)\right)$$

De plus :

$$\left\| I - i_h^{\ell} \right\|_{\mathrm{L}\left(H^r(\Gamma_3), H^s(\Gamma_3)\right)} \le \left\| I - i_h^{\ell} \right\|_{\mathrm{L}\left(H^r(\Gamma_3), IL^2(\Gamma_3)\right)}^{1-2s} . \left\| I - i_h^{\ell} \right\|_{\mathrm{L}\left(H^r(\Gamma_3), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_3)\right)}^{2s}$$

On a alors :

$$\left\| I - i_h^{\ell} \right\|_{\mathrm{L}\left(H^r(\Gamma_3), H^s(\Gamma_3)\right)} \le c\left(h^r\right)^{1-2s} . \left(h^{r-\frac{1}{2}}\right)^{2s} = c h^{r-s}$$

D'où :

$$\left\| \lambda - i_h^{\ell} \lambda \right\|_{H^s(\Gamma_3)} \le c h^{r-s} \|\lambda\|_{H^r(\Gamma_3)}$$

Ou encore sous forme plus générale, pour toute $\psi \in H^r(\Gamma_3)$, on ait :

(4.2.36) $$\left\| \psi - i_h^{\ell} \psi \right\|_{H^s(\Gamma_3)} \le c h^{r-s} \|\psi\|_{H^r(\Gamma_3)} .$$

3. Estimation de l'erreur des solutions approchées par projection:

Théorème.4.3.1. Si $0 \le r \le \frac{5}{2}$. Alors il existe une constante $c = c(r) > 0$ indépendante de h , telle que, si $\lambda \in H^r(\Gamma_3)$, on ait :

(4.3.1) $h^{-\frac{1}{2}}\left\|\lambda-\pi_h^\ell\lambda\right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)}+\left\|\lambda-\pi_h^\ell\lambda\right\|_{IL^2(\Gamma_3)}\le ch^r\left\|\lambda\right\|_{H^r(\Gamma_3)}$

Démonstration. La démonstration se faite par deux étapes :

1ère étape : On vérifie que :

(4.3.2) $\left\|\lambda-\pi_h^\ell\lambda\right\|_{IL^2(\Gamma_3)}\le ch^r\left\|\lambda\right\|_{H^r(\Gamma_3)}$;

En utilisant la propriété de projection, $0\in W_h^\ell(\Gamma_3)$, il vient :

(4.3.3) $\left\|\lambda-\pi_h^\ell\lambda\right\|_{IL^2(\Gamma_3)}\le\left\|\lambda\right\|_{IL^2(\Gamma_3)}$

De même la propriété de projection avec $i_h^\ell\lambda\in W_h^\ell(\Gamma_3)$, entraîne :

$$\left\|\lambda-\pi_h^\ell\lambda\right\|_{IL^2(\Gamma_3)}\le\left\|\lambda-i_h^\ell\lambda\right\|_{IL^2(\Gamma_3)}$$

En utilisant l'inégalité (4.2.33), pour $r=\frac{5}{2}$, il résulte :

$$\left\|\lambda-i_h^\ell\lambda\right\|_{IL^2(\Gamma_3)}\le c_2h^{\frac{5}{2}}\left\|\lambda\right\|_{H^{\frac{5}{2}}(\Gamma_3)}$$

Par ailleurs :

(4.3.4) $\left\|\lambda-\pi_h^\ell\lambda\right\|_{IL^2(\Gamma_3)}\le c_2h^{\frac{5}{2}}\left\|\lambda\right\|_{H^{\frac{5}{2}}(\Gamma_3)}$

En combinant les inégalités (4.3.3) ,(4.3.4), il en découle :

$$\left\|I-\pi_h^\ell\right\|_{\mathrm{L}\left(IL^2(\Gamma_3),IL^2(\Gamma_3)\right)}\le 1,\quad\text{et}\quad\left\|I-\pi_h^\ell\right\|_{\mathrm{L}\left(H^{\frac{5}{2}}(\Gamma_3),IL^2(\Gamma_3)\right)}\le c_2h^{\frac{5}{2}}$$

On applique le théorème d'interpolation, on a

$$I-\pi_h^\ell\in\mathrm{L}\left(H^r(\Gamma_3),IL^2(\Gamma_3)\right)$$

De plus si $r=\frac{5}{2}\theta$, on a

$$\left\|I-\pi_h^\ell\right\|_{\mathrm{L}\left(H^r(\Gamma_3),IL^2(\Gamma_3)\right)}\le\left\|I-\pi_h^\ell\right\|^{1-\theta}_{\mathrm{L}\left(IL^2(\Gamma_3),IL^2(\Gamma_3)\right)}.\left\|I-\pi_h^\ell\right\|^{\theta}_{\mathrm{L}\left(H^{\frac{5}{2}}(\Gamma_3),IL^2(\Gamma_3)\right)}$$

Ou encore :

$$\left\|I-\pi_h^\ell\right\|_{\mathrm{L}\left(H^r(\Gamma_3),IL^2(\Gamma_3)\right)}\le 1^{1-\theta}\left(c_2h^{\frac{5}{2}}\right)^\theta=c_2h^r$$

D'où l'inégalité (4.3.2).

2eme étape : on démontre que :

(4.3.5) $\left\|\lambda-\pi_h^\ell\lambda\right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)}\le ch^{r+\frac{1}{2}}\left\|\lambda\right\|_{H^r(\Gamma_3)}$:

On utilise (3.4.5) pour $\mu_h=\pi_h^\ell q$, on a donc

$$\left\langle \lambda - \pi_h^{\ell}\lambda \,, q \right\rangle_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\Gamma_3} = \left\langle \lambda - \pi_h^{\ell}\lambda \,, q - \pi_h^{\ell} q \right\rangle_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\Gamma_3}$$

On a alors

$$\left\| \lambda - \pi_h^{\ell}\lambda \right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)} = \sup_{0 \neq q \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_3)} \frac{\left\langle \lambda - \pi_h^{\ell}\lambda \,, q - \pi_h^{\ell} q \right\rangle_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\Gamma_3}}{\left\| q \right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_3)}}$$

En utilisant l'inégalité de *Cauchy-Schwartz*, on a :

(4.3.6) $$\left\| \lambda - \pi_h^{\ell}\lambda \right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)} \leq \left\| \lambda - \pi_h^{\ell}\lambda \right\|_{IL^2(\Gamma_3)} . \sup_{0 \neq q \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_3)} \frac{\left\| q - \pi_h^{\ell} q \right\|_{IL^2(\Gamma_3)}}{\left\| q \right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_3)}}$$

Moyennant (4.3.2) avec $r = \frac{1}{2}$ ' on a donc :

$$\left\| q - \pi_h^{\ell} q \right\|_{IL^2(\Gamma_3)} \leq c_1 h^{\frac{1}{2}} \left\| q \right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_3)} \quad : \quad \forall q \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_3)$$

C'est à dire

$$\sup_{0 \neq q \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_3)} \frac{\left\| q - \pi_h^{\ell} q \right\|_{IL^2(\Gamma_3)}}{\left\| q \right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_3)}} \leq c_1 h^{\frac{1}{2}}$$

Maintenant de (4.3.6), on tire

$$\left\| \lambda - \pi_h^{\ell}\lambda \right\|_{\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)} \leq c_1 h^{\frac{1}{2}} \left\| \lambda - \pi_h^{\ell}\lambda \right\|_{IL^2(\Gamma_3)}$$

Et, on utilise encore (4.3.4), on conclut (4.3.5).

En combinant les inégalités (4.3.2) et (4.3.5), on obtient la majoration (4.3.1).

Remarque.4.3.1. Soient $0 \leq r \leq \frac{5}{2}$, $-\frac{1}{2} \leq s \leq 0$ .Alors il existe une constante, $c = c(r,s) > 0$ indépendante de h telle que, si $\lambda \in H^r(\Gamma_3)$, on ait :

$$\left\| \lambda - \pi_h^{\ell}\lambda \right\|_{H^s(\Gamma_3)} \leq c h^{r-s} \left\| \lambda \right\|_{H^r(\Gamma_3)} .$$

En effet, soit $\theta = 2s - 1$, on a

$$\left\| \lambda - \pi_h^{\ell}\lambda \right\|_{H^s(\Gamma_3)} \leq \left\| \lambda - \pi_h^{\ell}\lambda \right\|_{IL^2(\Gamma_3)}^{\theta} \left\| \lambda - \pi_h^{\ell}\lambda \right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)}^{1-\theta}$$

D'où le résultat en utilisant les inégalités (4.3.2), (4.3.5).

Ou encore sous forme plus générale :

(4.3.7) $$\left\| \psi - \pi_h^{\ell}\psi \right\|_{\mathrm{H}^s(\Gamma_3)} \leq c h^{r-s} \left\| \psi \right\|_{\mathrm{H}^r(\Gamma_3)}, \forall \psi \in H^r(\Gamma_3)$$

Remarques.4.3.2.

1. En tenant compte du fait que $[u.\eta] \leq 0$ sur Γ_3, il résulte

(4.3.8) $i_h^\ell[u.\eta] \leq 0$ sur Γ_3

2. D'après la définition de l'opérateur d'interpolation surfacique $\psi \mapsto i_h^\ell \psi$, alors pour toute $\psi \in C\left(T_i^\ell\right)$, on ait :

$$\begin{cases} \left\| i_h^\ell \psi \right\|_{IL^\infty(T_i^\ell)} \leq \sup\limits_{x \in T_i^\ell} \left(\left|\psi\left(x_i^\ell\right)\right| . \left|\varphi_i^\ell(x)\right| + \left|\psi\left(x_{i+1}^\ell\right)\right| . \left|\varphi_{i+1}^\ell(x)\right| \right) \\ \qquad \leq \left\|\psi\right\|_{IL^\infty(T_i^\ell)} . \sup\limits_{x \in T_i^\ell} \left(\varphi_i^\ell(x) + \varphi_i^\ell(x) \right) \leq \left\|\psi\right\|_{IL^\infty(T_i^\ell)} \end{cases}$$

D'où :

(4.3.9) $\left\| i_h^\ell \psi \right\|_{IL^\infty(T_i^\ell)} \leq \left\|\psi\right\|_{IL^\infty(T_i^\ell)}$

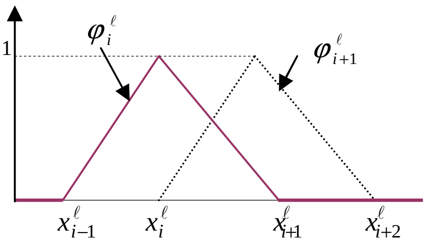


Figure5. Graphe des fonctions de base du *Lagrange* $\left(\varphi_i^\ell\right)_{i=\overline{0,N_h^\ell}}$ telles que :

$$\begin{cases} \cdot \sum\limits_{i=0}^{N_h^\ell+1} \varphi_i^\ell = 1 \\ \cdot\ 0 \leq \varphi_h^\ell \leq 1 : \quad \forall i = \overline{0, N_h^\ell + 1} \\ \cdot \sum\limits_{i=0}^{N_h^\ell+1} \left\|\varphi_i^\ell\right\|_{IL^2(\Gamma_3)} \leq \text{mes}\left(\Gamma_3\right) \end{cases}.$$

Proposition.4.3.1. Si $0 \leq r \leq 1$, Alors il existe une constante $c = c(r) > 0$ indépendante de h , telle que :

(4.3.10) $\left\|\lambda - \Pi_h^\ell \lambda\right\|_{IL^2(\Gamma_3)} \leq h_\ell^r \left\|\lambda\right\|_{H^r(\Gamma_3)}$; $\forall \lambda \in H^r\left(\Gamma_3\right)$

Démonstration. Comme l'epace $C^1\left(\overline{\Gamma}_3\right)$ est dense dans $H^1\left(\Gamma_3\right)$, il suffit d'établir ces résultats pour $\lambda \in C^1\left(\overline{\Gamma}_3\right)$;

1^er^etape : Lorsque $0 \in X_h^\ell\left(\Gamma_3\right)$, on ait :

$$\left\|\lambda - \Pi_h^\ell \lambda\right\|_{IL^2(\Gamma_3)} \leq \left\|\lambda - 0\right\|_{IL^2(\Gamma_3)} ,$$

D'où

(4.3.11) $\left\|\lambda - \Pi_h^\ell \lambda\right\|_{IL^2(\Gamma_3)} \leq \left\|\lambda\right\|_{IL^2(\Gamma_3)}$

2^ème^étape : On vérifie qu'il existe un élément $a_i \in \overline{T}_i^\ell$ tel que :

(4.3.12) $\lambda\left(a_i\right) = \Pi_h^\ell \lambda$ sur T_i^ℓ

Si on suppose que cette égalité est fausse, c'est-à-dire :

$$\forall x \in \overline{T}_i^\ell : \lambda(x) \neq \Pi_h^\ell \lambda$$

Puisque la fonction λ est continue sur T_i^ℓ, on suppose par exemple que alors $\lambda > \Pi_h^\ell \lambda$ sur T_i^ℓ

Soit $\inf\limits_{x \in T_i^\ell} \lambda(x) = m \in X_h^\ell$, on a $\lambda \geq m \geq \Pi_h^\ell \lambda :$ sur T_i^ℓ

On a alors

$$0 \leq \lambda(x) - m \leq \lambda(x) - \Pi_h^\ell \lambda \quad \forall x \in T_i^\ell$$

On déduit que

$$\|\lambda - m\|_{IL^2(T_i^\ell)} \leq \|\lambda - \Pi_h^\ell \lambda\|_{IL^2(T_i^\ell)}$$

Puisque $m \in X_h^\ell(\Gamma_3)$, le résultat d'unicité dans le théorème de projection, entraîne que

$\Pi_h^\ell \lambda = m$ sur T_i^ℓ, ou encore $\operatorname{Inf}\limits_{x \in T_i^\ell} \lambda(x) = \Pi_h^\ell \lambda$

Et puisque la fonction λ est continuité sur $\overline{\Gamma}_3$, alors il existe un élément $x \in \overline{T}_i^\ell$ tel que $\lambda(x) = \operatorname{Inf}\limits_{x \in T_i^\ell} \lambda(x)$, ou encore $\lambda(x) = \Pi_h^\ell \lambda$

Ce qui contredit la supposition.

3ème étape : on vérifie que :

(4.3.13) $\quad \|\lambda - \Pi_h^\ell \lambda\|_{IL^2(T_i)} \leq h|\lambda|_{H^1(T_i)}$;

Soit la fonction Φ définie sur T_i^ℓ par :

$$\Phi(x) = \lambda(x) - \Pi_h^\ell \lambda(x)$$

De (4.3.12), $\lambda \in C^1(\overline{\Gamma}_3)$, on tire :

$$\Phi(x) = \int_{a_i}^{x} \lambda'(s) ds \quad : \forall x \in T_i^\ell$$

On a, grâce à l'inégalité de *Cauchy-Schwarz* :

$$|\Phi(x)| \leq \int_{T_i^\ell} |\lambda'(s)| ds \leq \left[\int_{T_i^\ell} |\lambda'(s)|^2 ds \right]^{\frac{1}{2}} . \left[\int_{T_i^\ell} ds \right]^{\frac{1}{2}} \quad ; \; \forall x \in T_i^\ell$$

C'est à dire

$$|\Phi(x)| \leq h^{\frac{1}{2}} |\lambda|_{H^1(T_i^\ell)} \; ; \; \forall x \in T_i^\ell$$

Par intégration relativement à la variable $x \in T_i^\ell$, on obtient :

$$\int_{T_i} |\Phi(x)|^2 dx \leq h . |\lambda|^2_{H^1(T_i)} . \int_{T_i} dx \leq h^2 |\lambda|^2_{H^1(T_i)}$$

D'où on déduit :

$$\|\Phi\|_{IL^2(T_i)} \leq h|\lambda|_{H^1(T_i)}$$

D'où l'inégalité (4.3.13) .

4

4[eme]étape ; résulta

On utilise l'inégalité (4.3.13), on a alors :

$$\left\|\lambda - \Pi_h^{\ell}\lambda\right\|_{IL^2(\Gamma_3)} = \left[\sum_{i=0}^{N_h^{\ell}} \left\|\lambda - \Pi_h^{\ell}\lambda\right\|^2_{IL^2(T_i^{\ell})}\right]^{\frac{1}{2}} \leq h\left[\sum_{i=0}^{N_h^{\ell}-1} |\lambda|^2_{H^1(T_i^{\ell})}\right]^{\frac{1}{2}}$$

D'où l'inégalité :

(4.3.14) $\left\|\lambda - \Pi_h^{\ell}\lambda\right\|_{IL^2(\Gamma_3)} \leq h\|\lambda\|_{H^1(\Gamma_3)}$

En combinant les inégalités (4.3.11) ,(4.3.14), on déduit que

$$\left\|I - \Pi_h^{\ell}\right\|_{\mathrm{L}\left(IL^2(\Gamma_3), IL^2(\Gamma_3)\right)} \leq 1, \quad \text{et} \quad \left\|I - \Pi_h^{\ell}\right\|_{\mathrm{L}\left(H^1(\Gamma_3), IL^2(\Gamma_3)\right)} \leq h$$

On applique le théorème d'interpolation, on a

$$I - \Pi_h^{\ell} \in \mathrm{L}\left(H^r(\Gamma_3), IL^2(\Gamma_3)\right)$$

De plus :

$$\left\|I - \Pi_h^{\ell}\right\|_{\mathrm{L}\left(H^r(\Gamma_3), IL^2(\Gamma_3)\right)} \leq \left\|I - \Pi_h^{\ell}\right\|^{1-r}_{\mathrm{L}\left(L^2(\Gamma_3), IL^2(\Gamma_3)\right)} \cdot \left\|I - \Pi_h^{\ell}\right\|^{r}_{\mathrm{L}\left(H^1(\Gamma_3), IL^2(\Gamma_3)\right)}$$

Ou encore :

$$\left\|I - \Pi_h^{\ell}\right\|_{\mathrm{L}\left(H^r(\Gamma_3), IL^2(\Gamma_3)\right)} \leq 1^{1-r}(h)^r = h^r$$

D'où l'inégalité (4.3.10).

Ou encore sous forme plus générale, pour toute $\psi \in H^r(\Gamma_3)$, on ait :

(4.3.15) $\left\|\psi - \Pi_h^{\ell}\psi\right\|_{IL^2(\Gamma_3)} \leq h_{\ell}^r \|\psi\|_{H^r(\Gamma_3)}$ où $0 \leq r \leq 1$.

4. Estimation de l'erreur des solutions approchées par discrétisation quadratique

Théorème.4.4.1. Pour $M_h = Q_h^{\ell,*}$, $0 < \nu < 1$. Soient (u_h, λ_h) la solution de P_m^h et (u, λ) la solution de P_m avec $u^{\ell} \in \left(H^{\frac{3}{2}+\nu}(\Omega^{\ell})\right)^2$, alors on a l'estimation d'erreur :

(4.4.1) $\|u - u_h\| + \|\lambda - \lambda_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)} \leq c(u) h^{\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2}}$

Où $c(u)$ est une constante linéairement dépendante de $\|u^{\ell}\|_{(H^{\frac{3}{2}+\nu}(\Omega^{\ell}))^2}$; $\ell = 1,2$

Démonstration. On utilise l'estimation (4.2.6), avec la notation $I_h u = \left(\Pi_h^1 u^1, \Pi_h^2 u^2\right)$, alors :

$$\|u-u_h\| + \|\lambda-\lambda_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)} \le c\left\{\|u-I_h u\| + \|\lambda-\pi_h^\ell\lambda\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)} + \left[\max\left(b(u,\lambda_h),0\right)\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\max\left(b(u_h,\lambda),0\right)\right]^{\frac{1}{2}}\right\}$$

Et, de (4.2.30), (4.3.5) et (4.1.1), on tire :

(4.4.2) $$\|u-u_h\| + \|\lambda-\lambda_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)} \le c\left\{c(u)h^{\frac{1}{2}+\nu} + \left[\max\left(b(u,\lambda_h),0\right)\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\max\left(b(u_h,\lambda),0\right)\right]^{\frac{1}{2}}\right\}$$

1$^{\text{ère}}$étape :

(4.4.3) $$b(u,\lambda_h) = \int_{\Gamma_3} \lambda_h.[u.\eta]d\Gamma_3 = \int_{\Gamma_3} \lambda_h.\left([u.\eta]-i_h^\ell[u.\eta]\right)d\Gamma_3 + \int_{\Gamma_3} \lambda_h.i_h^\ell[u.\eta]d\Gamma_3$$

D'après (3.1.5.b) on a $i_h^\ell[u.\eta] \le 0$ sur Γ_3 , et donc $-i_h^\ell[u.\eta] \in Q_h^\ell$, et par conséquent, en utilisant le théorème1.4.1 pour $\lambda_h \in M_h = Q_h^{\ell,*}$ il vient :

$$\int_{\Gamma_3} \lambda_h i_h^\ell[u.\eta]d\Gamma_3 \le 0$$

Et de (4.4.3) , on tire :

$$b(u,\lambda_h) \le \int_{\Gamma_3} \lambda_h\left([u.\eta]-i_h^\ell[u.\eta]\right)d\Gamma_3$$

D'où l'on déduit :

$$b(u,\lambda_h) \le \int_{\Gamma_3} \lambda\left([u.\eta]-i_h^\ell[u.\eta]\right)d\Gamma_3 + \int_{\Gamma_3} (\lambda_h-\lambda).\left([u.\eta]-i_h^\ell[u.\eta]\right)d\Gamma_3$$

Ou encore :

(4.4.4) $$b(u,\lambda_h) \le \int_{\Gamma_3} \lambda\left([u.\eta]-i_h^\ell[u.\eta]\right)d\Gamma_3 + \|\lambda_h-\lambda\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)}.\left\|[u.\eta]-i_h^\ell[u.\eta]\right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_3)}$$

En prenant $\psi = [u.\eta]$ dans (4.2.36), il vient :

(4.4.5) $$\left\|[u.\eta]-i_h^\ell[u.\eta]\right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_3)} \le ch^{\frac{1}{2}+\nu}\left\|[u.\eta]\right\|_{H^{1+\nu}(\Gamma_3)}$$

En appliquant l'inégalité de *Cauchy Schwartz,* on conclut

$$\int_{\Gamma_3} \lambda\left([u.\eta]-i_h^\ell[u.\eta]\right)d\Gamma_3 \le \|\lambda\|_{IL^2(\Gamma_3)}.\left\|[u.\eta]-i_h^\ell[u.\eta]\right\|_{IL^2(\Gamma_3)}$$

Et de (4.4.5), on a

$$\int_{\Gamma_3} \lambda\left([u.\eta]-i_h^\ell[u.\eta]\right)d\Gamma_3 \le ch^{1+\nu}\left\|[u.\eta]\right\|_{H^{1+\nu}(\Gamma_3)}.\|\lambda\|_{IL^2(\Gamma_3)}$$

On utilise le théorème de trace, on a alors

$$\left\|[u\eta]\right\|_{H^{1+\nu}(\Gamma_3)} = \left\|u^1.\eta^1+u^2.\eta^2\right\|_{H^{1+\nu}(\Gamma_3)} \le \left\|u^1.\eta^1\right\|_{H^{1+\nu}(\Gamma_3)} + \left\|u^2.\eta^2\right\|_{H^{1+\nu}(\Gamma_3)}$$

D'où

$$\left\|[u.\eta]\right\|_{H^{1+\nu}(\Gamma_3)} \le c_1\left\|u^1\right\|_{(H^{\nu+\frac{3}{2}}(\Omega^1))} + c_2\left\|u^2\right\|_{(H^{\nu+\frac{3}{2}}(\Omega^2))}$$

C'est à dire

(4.4.6) $\left\|[u.\eta]\right\|_{H^{1+\nu}(\Gamma_3)} \leq c(u)$

On applique l'inégalité (4.1.1) pour $r=\frac{3}{2}$, on obtient $\|\lambda\|_{IL^2(\Gamma_3)} \leq c\left\|u^\ell\right\|_{(H^{\frac{3}{2}}(\Omega^\ell))^2}$

De plus, en utilisant le théorème d'injection continue $H^{\frac{3}{2}+\nu}(\Omega^\ell) \hookrightarrow H^{\frac{3}{2}}(\Omega^\ell)$, on a

(4.4.7) $\|\lambda\|_{IL^2(\Gamma_3)} \leq c(u)$

Moyennant (4.4.4)-(4.4.7), on a alors ;

(4.4.8) $b(u,\lambda_h) \leq c(u)\left(h^{\frac{1}{2}+\nu}\|\lambda-\lambda_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)} + c(u)h^{1+\nu}\right)$

2^eme^étape :

Compte tenant de $\lambda \geq 0;(\lambda=-\sigma_\eta)$, $\pi_h^\ell[u_h.\eta] \leq 0$ sur Γ_3 , il résulte

$$\int_{\Gamma_3} \lambda \pi_h^\ell [u_h.\eta] d\Gamma_3 \leq 0$$

Ainsi

$$b(u_h,\lambda) = \int_{\Gamma_3} \lambda[u_h.\eta]d\Gamma_3 = \int_{\Gamma_3} \lambda\left([u_h.\eta]-\pi_h^\ell[u_h.\eta]\right)d\Gamma_3 + \int_{\Gamma_3} \lambda\pi_h^\ell[u_h.\eta]d\Gamma_3$$

On obtient :

(4.4.9) $b(u_h,\lambda) \leq \int_{\Gamma_3} \lambda\left([u_h.\eta]-\pi_h^\ell[u_h.\eta]\right)d\Gamma_3$

Soit ℓ' ,$(\ell'+\ell=3)$, en utilisant (3.4.5) et $u_h^\ell.\eta^\ell \in W_h^\ell(\Gamma_3)$; $\left(\pi_h^\ell(u_h^\ell.\eta^\ell)=u_h^\ell.\eta^\ell\right)$, on trouve

$$\int_{\Gamma_3} \lambda\left((u_h^\ell.\eta^\ell)-\pi_h^\ell(u_h^\ell.\eta^\ell)\right)d\Gamma_3 = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\Gamma_3} (\pi_h^\ell\lambda)\left(u_h^{\ell'}.\eta^{\ell'}-\pi_h^\ell(u_h^{\ell'}.\eta^{\ell'})\right)d\Gamma_3 = 0$$

De plus, en utilisant (4.4.9), on a alors

$$b(u_h,\lambda) \leq \int_{\Gamma_3} \lambda\left(u_h^{\ell'}.\eta^{\ell'}-\pi_h^\ell(u_h^{\ell'}.\eta^{\ell'})\right)d\Gamma_3 \leq \int_{\Gamma_3} (\lambda-\pi_h^\ell\lambda)\left(u_h^{\ell'}.\eta^{\ell'}-\pi_h^\ell(u_h^{\ell'}.\eta^{\ell'})\right)d\Gamma_3$$

C'est à dire

$$b(u_h,\lambda) \leq \int_{\Gamma_3} (\lambda-\pi_h^\ell\lambda)\left((u_h^{\ell'}-u^{\ell'}).\eta^{\ell'}-\pi_h^\ell((u_h^{\ell'}-u^{\ell'}).\eta^{\ell'})\right)d\Gamma_3 + \int_{\Gamma_3} (\lambda-\pi_h^\ell\lambda)\left(u^{\ell'}.\eta^{\ell'}-\pi_h^\ell(u^{\ell'}.\eta^{\ell'})\right)d\Gamma_3$$

D'où on déduit que

$$b(u_h,\lambda) \leq \|\lambda-\pi_h^\ell\lambda\|_{IL^2(\Gamma_3)}.\left\|(u^{\ell'}-u_h^{\ell'}).\eta^{\ell'}-\pi_h^\ell(u^{\ell'}-u_h^{\ell'}).\eta^{\ell'}\right\|_{IL^2(\Gamma_3)} + \|\lambda-\pi_h^\ell\lambda\|_{IL^2(\Gamma_3)}.\left\|u^{\ell'}.\eta^{\ell'}-\pi_h^\ell(u^{\ell'}.\eta^{\ell'})\right\|_{IL^2(\Gamma_3)}$$

En utilisant relation (4.3.7), il en découle

$$b(u_h,\lambda) \leq c.h^{\nu+\frac{1}{2}}.\|\lambda\|_{H^\nu(\Gamma_3)}.\left\|(u^{\ell'}-u_h^{\ell'}).\eta^{\ell'}\right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_3)} + c.h^{1+2\nu}.\|\lambda\|_{H^\nu(\Gamma_3)}.\left\|u^{\ell'}.\eta^{\ell'}\right\|_{H^{\nu+1}(\Gamma_3)}$$

En appliquant le théorème de trace avec l'inégalité (4.1.1), on obtient

$$b(u_h,\lambda) \leq c(u).h^{\nu+\frac{1}{2}}.\left\|u^{\ell'} - u_h^{\ell'}\right\|_{(H^1(\Omega^{\ell'}))^2} + c(u).h^{1+2\nu}.\|u\|_{(H^{\nu+\frac{3}{2}}(\Omega^{\ell'}))^2}$$

On a alors

$$b(u_h,\lambda) \leq c(u).h^{\nu+\frac{1}{2}}.\|u-u_h\| + (c(u))^2.h^{1+2\nu}$$

C'est à dire

(4.4.10) $\quad b(u_h,\lambda) \leq c(u).\left[h^{\frac{1}{2}+\nu}.\|u-u_h\| + c(u).h^{1+2\nu}\right]$

3$^{\text{ème}}$étape :

En utilisant (4.4.2), (4.4.8) et (4.4.10), on a alors ;

$$\|u-u_h\| + \|\lambda-\lambda_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)} \leq c(u)h^{\frac{1}{2}+\nu} + \left[c(u)\left(h^{\frac{1}{2}+\nu}\|\lambda-\lambda_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)} + c(u)h^{1+\nu}\right)\right]^{\frac{1}{2}} + \left[c(u)\left(h^{\frac{1}{2}+\nu}\|u-u_h\| + c(u)h^{1+2\nu}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

En utilisant l'inégalité $a.b \leq \varepsilon.a^2 + \frac{1}{4\varepsilon}.b^2$, pour $\varepsilon = d^{\frac{\nu}{2}}.h^{\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2}}$, avec $d = \max_{\ell=1,2}\{\mathrm{diam}(\Omega^\ell)\}$, il en découle

$$\left\{\begin{array}{l} \|u-u_h\| + \|\lambda-\lambda_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)} \leq c(u)h^{\frac{1}{2}+\nu} + c(u)d^{\frac{\nu}{2}}.h^{\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2}} + \frac{1}{4}\left(\frac{h}{d}\right)^{\frac{\nu}{2}}\|\lambda-\lambda_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)} + \\ \qquad \frac{1}{4}c(u).\frac{h^{\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2}}}{d^{\frac{\nu}{2}}} + c(u)d^{\frac{\nu}{2}}.h^{\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2}} + \frac{1}{4}\left(\frac{h}{d}\right)^{\frac{\nu}{2}}\|u-u_h\| + \frac{1}{4}c(u)\frac{h^{\frac{1}{2}+\frac{3\nu}{2}}}{d^{\frac{\nu}{2}}} \end{array}\right.$$

Ou encore :

$$\left(1-\frac{1}{4}\left(\frac{h}{d}\right)^{\frac{\nu}{2}}\right)\left(\|u-u_h\| + \|\lambda-\lambda_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)}\right) \leq c(u)h^{\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2}} + c(u)h^{\frac{1}{2}+\nu} + c(u)h^{\frac{1}{2}+\frac{3\nu}{2}}$$

Et du fait que $h \leq \max_{\ell=1,2}\{\mathrm{diam}(\Omega^\ell)\} \equiv d$, il en résulte :

$$\left\{\begin{array}{l} \left(1-\frac{1}{4}\right)\left(\|u-u_h\| + \|\lambda-\lambda_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)}\right) \leq \left(1-\frac{1}{4}\left(\frac{h}{d}\right)^{\frac{\nu}{2}}\right)\left(\|u-u_h\| + \|\lambda-\lambda_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)}\right) \\ \qquad \leq c(u)h^{\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2}} + c(u)h^{\frac{1}{2}+\nu} + c(u)h^{\frac{1}{2}+\frac{3\nu}{2}} \\ \qquad \leq c(u)h^{\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2}}\left(1+h^{\frac{\nu}{2}}+h^{\nu}\right) \leq c(u)h^{\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2}}\left(1+d^{\frac{\nu}{2}}+d^{\nu}\right) \end{array}\right.$$

D'où l'inégalité (4.4.1).

Théorème.4.4.2. Soit $M_h = Q_h^{\ell,*}$, $\frac{1}{2} < \nu < 1$. Soient (u_h,λ_h) la solution de P_m^h et (u,λ) de P_m avec $u^\ell \in \left(H^{\frac{3}{2}+\nu}(\Omega^\ell)\right)^2$; Alors, on a l'estimation d'erreur :

(4.4.11) $\left\|u-u_h\right\|+\left\|\lambda-\lambda_h\right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)} \leq c(u)h^{\frac{1}{2}+\nu}$

Où $c(u)$ est une constante linéairement dépendante de $\left\|u^{\ell}\right\|_{(H^{\frac{3}{2}+\nu}(\Omega^{\ell}))^2}; \ell=1,2$

Démonstration. L'hypothèse $\frac{1}{2}<\nu<1$ et le théorème de *Sobolev* entraînent l'injection continue $H^{\frac{3}{2}+\nu}(\Omega^{\ell}) \hookrightarrow C_b^1(\Omega^{\ell})$, ce qui implique que $u^{\ell} \in (C_b^1(\Omega^{\ell}))^2$. En appliquant le théorème de trace, on trouve $[u.\eta] \in H^{1+\nu}(\Gamma_3)$, et par conséquent $[u.\eta] \in C^1(\Gamma_3)$.

Et puisque $\|\lambda\|_{H^{r-\frac{3}{2}}(\Gamma_3)} \leq c\left\|u^{\ell}\right\|_{(H^r(\Omega^{\ell}))^2}$, on a alors $\lambda \in H^{\nu}(\Gamma_3)$.

Ceci, en utilisant l'injection continue $H^{\nu}(\Gamma_3) \hookrightarrow C(\Gamma_3)$, nous permet de déduire que λ est continue sur Γ_3 .

On note par :

- * $N_1(h)$ le nombre des T_i $(1 \leq i \leq N_1(h))$ dans $\mathcal{T}_h^{\ell}$ sur Γ_3 tel que $[u.\eta]<0$ et $[u.\eta]=0$ sur T_i ;
- * $N_2(h)$ le nombre des segments T_i' $(1 \leq i \leq N_2(h))$ dans $\mathcal{T}_h^{\ell}$ sur Γ_3 et tel que $[u.\eta]<0$ sur T_i' ;
- * $N_3(h)$ le nombre des segments T_i'' $(1 \leq i \leq N_3(h))$ dans $\mathcal{T}_h^{\ell}$ sur Γ_3 et tel que $[u.\eta]=0$ sur T_i'' .

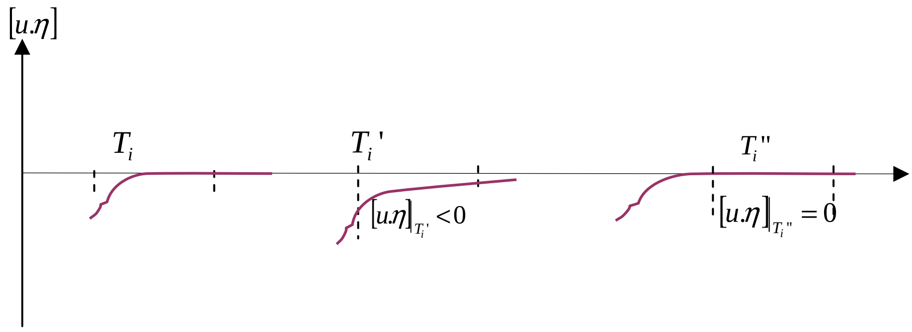


Figure 5. Segments T_i , T_i' et T_i''

1ère étape : Estimation de $\int_{T_i}|\lambda|\left|i_h^{\ell}[u.\eta]\right|dx$, $1 \leq i \leq N_1(h)$:

On a :

$$\int_{T_i}|\lambda|\left|i_h^{\ell}[u.\eta]\right|dx \leq \|\lambda\|_{IL^{\infty}(T_i)}\left\|i_h^{\ell}[u.\eta]\right\|_{IL^{\infty}(T_i)}\int_{T_i}dx$$

D'où :

$$\int_{T_i}|\lambda|\left|i_h^{\ell}[u.\eta]\right|dx \leq h_{\ell}\|\lambda\|_{IL^{\infty}(\Gamma_3)}.\left\|i_h^{\ell}[u.\eta]\right\|_{IL^{\infty}(T_i)}$$

Mais :

$$\left\|i_h^{\ell}[u.\eta]\right\|_{IL^{\infty}(T_3)}=\left\|\sum_{j=0}^{N_h^{\ell}+1}[u.\eta](x_j)\varphi_j\right\|_{IL^{\infty}(T_i)} \leq \left|[u.\eta](x_i^{\ell})\right|\left\|\varphi_i\right\|_{IL^{\infty}(T_i)}+\left|[u.\eta](x_{i+1}^{\ell})\right|\left\|\varphi_{i+1}\right\|_{IL^{\infty}(T_i)}$$

Ceci, en utilisant les inégalités

$$\left|[u.\eta](x_j^{\ell})\right| \leq \|[u.\eta]\|_{IL^{\infty}(T_i)}, \qquad \|\varphi_i\|_{IL^{\infty}(T_i)} + \|\varphi_{i+1}\|_{IL^{\infty}(T_i)} \leq 1$$

Entraîne :

$$\left\|i_h^{\ell}[u.\eta]\right\|_{IL^{\infty}(T_3)} \leq \|[u.\eta]\|_{IL^{\infty}(T_i)}$$

On en déduire que

(4.4.12) $\displaystyle\int_{T_i} |\lambda| \left|i_h^{\ell}[u.\eta]\right| dx \leq h_l \|\lambda\|_{IL^{\infty}(T_i)} \|[u.\eta]\|_{IL^{\infty}(T_i)}$

Puisque $\lambda.[u.\eta]=0$ sur Γ_3, alors il existe un élément $y_i \in T_i$ tel que $\lambda(y_i)=0$, et par conséquent en utilisant la continuité de λ sur Γ_3, on a alors

$$\|\lambda\|_{L^{\infty}(T_i)} = \sup_{x\in T_i}|\lambda(x)| = \sup_{x\in T_i}|\lambda(x)-\lambda(y_i)| \leq h_l^{\nu-\frac{1}{2}} \sup_{x\neq y\in T_i} \frac{|\lambda(x)-\lambda(y)|}{|x-y|^{\nu-\frac{1}{2}}}$$

D'où

(4.4.13) $\|\lambda\|_{IL^{\infty}(T_i)} \leq h_l^{\nu-\frac{1}{2}} \|\lambda\|_{C^{0,\nu-\frac{1}{2}}(T_i)}$

La définition de T_i nous permet de conclure qu'il existe $z_i \in T_i$ tel que $[u.\eta](z_i)=0$, où $[u.\eta]\in C^1(\Gamma_3)$ et d'après le théorème des valeurs moyennes, on pour $\forall x \in T_i$, $\exists \overline{x} \in T_i$ tel que :

$$|[u.\eta](x)| = -[u.\eta](x) = [u.\eta](z_i) - [u.\eta](x) \leq \|z_i - x\| \left|D^1[u.\eta](\overline{x})\right|$$

On a alors

$$|[u.\eta](x)| \leq \|z_i - x\| \left\|D^1[u.\eta]\right\|_{IL^{\infty}(T_i)} \quad : \quad \forall x \in T_i$$

D'où il vient

(4.4.14) $\|[u.\eta]\|_{IL^{\infty}(T_i)} \leq h_l \left\|D^1[u.\eta]\right\|_{IL^{\infty}(T_i)}$

De plus, il existe un élément $x_i \in T_i$, $D^1[u.\eta](x_i)=0$ (x_i est un valeur maximale de $[u.\eta]$), tel que

$$\left\|D^1[u.\eta]\right\|_{IL^{\infty}(T_i)} = \sup_{x\in T_i}\left|D^1[u.\eta](x) - D^1[u.\eta](x_i)\right|$$

On déduit alors :

$$\left\|D^1[u.\eta]\right\|_{IL^{\infty}(T_i)} \leq h^{\nu-\frac{1}{2}} \sup_{x\neq y\in T_i} \frac{\left|D^1[u.\eta](x) - D^1[u.\eta](y)\right|}{|x-y|^{\nu-\frac{1}{2}}}$$

C'est à dire $\left\|D^1[u.\eta]\right\|_{IL^{\infty}(T_i)} \leq h^{\nu-\frac{1}{2}} \|[u.\eta]\|_{C^{1,\nu-\frac{1}{2}}(T_i)}$

Et, de (4.4.12), (4.4.13) et (4.4.14), on tire :

$$\begin{cases} \int_{T_i} |\lambda| \left| i_h^{\ell}[u.\eta] \right| dx \le h \|\lambda\|_{IL^\infty(T_i)} \left\| [u.\eta] \right\|_{IL^\infty(T_i)} \le h.h^{\nu-\frac{1}{2}} \|\lambda\|_{C^{0,\nu-\frac{1}{2}}(T_i)} .h_\ell \left\| D^1 [u.\eta] \right\|_{IL^\infty(T_i)} \\ \qquad \le h.h^{\nu-\frac{1}{2}} \|\lambda\|_{C^{0,\nu-\frac{1}{2}}(T_i)} .h.h^{\nu-\frac{1}{2}} \left\| D^1 [u.\eta] \right\|_{C^{1,\nu-\frac{1}{2}}(T_i)} \end{cases}$$

Il en résulte :

(4.4.15) $\int_{T_i} |\lambda| . \left| i_h^{\ell}[u.\eta] \right| dx \le h_l^{1+2\nu} \|\lambda\|_{C^{0,\nu-\frac{1}{2}}(T_i)} \left\| [u.\eta] \right\|_{C^{1,\nu-\frac{1}{2}}(T_i)}$

2ème étape : Estimation de $\int_{T_i'} |\lambda| \left| i_h^{\ell}[u.\eta] \right| dx$; $1 \le i \le N_2(h)$

Sur T_i' , on $[u.\eta]_{T_i'} < 0$, et comme $\sigma_\eta [u.\eta] = 0$, donc $\lambda = 0$ sur T_i', on alors :

(4.4.16) $\int_{T_i'} |\lambda| \left| i_h^{\ell}[u.\eta] \right| dx = 0 \quad ; \quad 1 \le i \le N_2(h)$

3ème étape : Estimation de $\int_{T_i''} |\lambda| \left| i_h^{\ell}[u.\eta] \right| dx$; $1 \le i \le N_3(h)$

Sur T_i'' on a $[u.\eta] = 0$, et donc $i_h^{\ell}[u.\eta] = 0$ sur T_i'', d'où il vient :

(4.4.17) $\int_{T_i''} |\lambda| \left| i_h^{\ell}[u.\eta] \right| dx = 0$; $1 \le i \le N_3(h)$

4eme étape :

En utilisant (4.4.15), (4.4.16) et (4.4.17), il en résulte :

$$\int_{\Gamma_3} \lambda \left([u.\eta] - i_h^{\ell}[u.\eta] \right) dx = -\int_{\Gamma_3} \lambda \left(i_h^{\ell}[u.\eta] \right) dx \le \sum_{i=0}^{N_1(h)} h_\ell^{1+2\nu} \|\lambda\|_{C^{0,\nu-\frac{1}{2}}(T_i)} . \left\| [u.\eta] \right\|_{C^{1,\nu-\frac{1}{2}}(T_i)}$$

On obtient alors

$$\int_{\Gamma_3} \lambda \left([u.\eta] - i_h^{\ell}[u.\eta] \right) dx \le N_1(h) h_\ell^{1+2\nu} \|\lambda\|_{C^{0,\nu-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)} \left\| [u.\eta] \right\|_{C^{1,\nu-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)}$$

Les inclusions continues de *Sobolev* ; $H^\nu(\Gamma_3) \hookrightarrow C^{0,\nu-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)$ et $H^{1+\nu}(\Gamma_3) \hookrightarrow C^{1,\nu-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)$ entraînent :

(4.4.18) $\int_{\Gamma_3} \lambda \left([u\eta] - i_h^{\ell}[u\eta] \right) dx \le c N_1(h) h_\ell^{1+2\nu} \|\lambda\|_{H^\nu(\Gamma_3)} \left\| [u\eta] \right\|_{H^{1+\nu}(\Gamma_3)}$

On applique l'inégalité (4.2.36), pour $\psi = [u.\eta]$, on a

$$\left\| [u.\eta] - i_h^{\ell}[u.\eta] \right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_3)} \le c h^{\nu+\frac{1}{2}} \left\| [u.\eta] \right\|_{H^{\nu+1}(\Gamma_3)}$$

De plus, on utilise les inégalités (4.4.8) et (4.4.9), on a alors

$$\left\| [u.\eta] - i_h^{\ell}[u.\eta] \right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_3)} \le c(u) h^{\nu+\frac{1}{2}}$$

Et, de (4.4.4), (4.4.18), (4.4.8) et (4.4.9), on tire :

$$b(u,\lambda_h) \leq c(u)\left(h^{\frac{1}{2}+\nu} \|\lambda - \lambda_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)} + c(u)h^{1+2\nu} \right)$$

Et, en utilisant (4.4.2) et (4.4.10), il vient :

$$\begin{cases} \|u-u_h\| + \|\lambda - \lambda_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)} \leq c(u)h^{\frac{1}{2}+\nu} + \left[c(u)\left(h^{\frac{1}{2}+\nu} \|\lambda - \lambda_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)} + c(u)h^{1+2\nu} \right)\right]^{\frac{1}{2}} \\ \qquad + \left[c(u)\left(h^{\frac{1}{2}+\nu} \|u - u_h\| + c(u)h^{1+2\nu} \right)\right]^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

D'après l'inégalité $a.b \leq \varepsilon.a^2 + \frac{1}{4.\varepsilon} b^2$, pour $\varepsilon = h^{\frac{1}{2}+\nu}$, on a

$$\|u-u_h\| + \|\lambda - \lambda_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)} \leq c(u)h^{\frac{1}{2}+\nu} + c(u)h^{\frac{1}{2}+\nu} + \frac{1}{4}\|\lambda - \lambda_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)} + c(u)h^{\frac{1}{2}+\nu} + \frac{1}{4}\|u-u_h\| + \frac{c(u)}{4} h^{\frac{1}{4}+\nu}$$

D'où l'estimation (4.4.11).

5. Estimation de l'erreur des solutions approchées par discrétisation linéaire

Théorème.4.5.1. Pour $M_h = L_h^{\ell,*}$ $\ell = 1,2$, $0<\nu<1$. Soient (u_h, λ_h), (u,λ) deux solutions de P_m^h, P_m respectivement $u^\ell \in \left(H^{\frac{3}{2}+\nu}(\Omega^\ell)\right)^2$, alors, on a l'estimation :

(4.5.1) $\quad \|u-u_h\| + \|\lambda - \lambda_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)} \leq c(u)h^{\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2}}$

Où $c(u)$ est une constante linéairement dépendante de $\|u^1\|_{(H^{\frac{3}{2}+\nu}(\Omega^1))^2}$ et de $\|u^2\|_{(H^{\frac{3}{2}+\nu}(\Omega^2))^2}$

Démonstration.

1^er^étape : Estimation de $b(u,\lambda_h)$

$$b(u,\lambda_h) = \int_{\Gamma_3} \lambda_h [u.\eta]dx = \int_{\Gamma_3} \lambda_h \left([u.\eta] - i_h^\ell [u.\eta]\right)dx + \int_{\Gamma_3} \lambda_h i_h^\ell [u.\eta]dx$$

En utilisant la première inégalité de (3.1.5.b), on a $i_h^\ell [u.\eta] = \sum_{j=0}^{N_h^\ell+1} [u.\eta](x_i^\ell)\varphi_i^\ell \leq 0$

Ce qui implique que $\quad -i_h^\ell [u.\eta] \in L_h^\ell$

De plus le théorème3.4.1, donne $\lambda_h \in M_h = L_h^{\ell,*}$, d'où finalement :

$$\int_{\Gamma_3} \lambda_h . i_h^\ell [u.\eta].dx \leq 0$$

Par ailleurs :

$$b(u,\lambda_h) \leq \int_{\Gamma_3} \lambda_h \left([u.\eta] - i_h^\ell [u.\eta]\right)dx$$

On obtient alors :

$$b(u,\lambda_h) \leq \int_{\Gamma_3} \lambda\left([u.\eta] - i_h^\ell [u.\eta]\right)dx + \int_{\Gamma_3} (\lambda_h - \lambda).\left([u.\eta] - i_h^\ell [u.\eta]\right)dx$$

On déduit que

(4.5.2) $$b(u,\lambda_h)=\int_{\Gamma_3}\lambda\left([u.\eta]-i_h^{\ell}[u.\eta]\right)dx+\left\|\lambda_h-\lambda\right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)}.\left\|[u.\eta]-i_h^{\ell}[u.\eta]\right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_3)}$$

En appliquant l'inégalité de *Cauchy Schwartz*, on a

$$\int_{\Gamma_3}\lambda\left([u.\eta]-i_h^{\ell}[u.\eta]\right)d\Gamma_3\leq\|\lambda\|_{IL^2(\Gamma_3)}.\left\|[u.\eta]-i_h^{\ell}[u.\eta]\right\|_{IL^2(\Gamma_3)}$$

En prenant $\psi=[u.\eta]$ dans (4.2.36), il vient :

$$\left\|[u.\eta]-i_h^{\ell}[u.\eta]\right\|_{IL^2(\Gamma_3)}\leq ch^{\nu+1}\left\|[u.\eta]\right\|_{H^{1+\nu}(\Gamma_3)}$$

En combinant les deux inégalités précédentes, on en déduit :

$$\int_{\Gamma_3}\lambda\left([u.\eta]-i_h^{\ell}[u.\eta]\right)d\Gamma_3\leq ch^{1+\nu}\left\|[u.\eta]\right\|_{H^{1+\nu}(\Gamma_3)}.h^{\nu}\|\lambda\|_{H^{h}(\Gamma_3)}$$

Ou encore :

(4.5.3) $$\int_{\Gamma_3}\lambda\left([u.\eta]-i_h^{\ell}[u.\eta]\right)d\Gamma_3\leq ch^{1+2\nu}\left\|[u.\eta]\right\|_{H^{1+\nu}(\Gamma_3)}.\|\lambda\|_{H^{\nu}(\Gamma_3)}$$

On utilise l'inégalité(4.1.1), on a alors

(4.5.4) $$\|\lambda\|_{H^{\nu}(\Gamma_3)}\leq c\left\|u^{\ell}\right\|_{\left(H^{\nu+\frac{3}{2}}(\Omega^{\ell})\right)^2}\leq c(u)$$

En moyennant (4.5.2), (4.4.5), (4.5.3), (4.4.6) et (4.5.4), on a alors

(4.5.5) $$b(u,\lambda_h)\leq c(u)\left(h^{\frac{1}{2}+\nu}\left\|\lambda-\lambda_h\right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)}+c(u)h^{1+2\nu}\right)$$

2^em^étape : Estimation de $b(u_h,\lambda)$:

En utilisant (3.4.17), il vient : $-\pi_h^{\ell}[u_h.\eta]\in L_h^{\ell}$

On a

$$\forall\mu_h\in L_h^{\ell,*}\ :\ \int_{\Gamma_3}\mu_h\left(\pi_h^{\ell}[u_h.\eta]\right)d\Gamma_3\leq 0$$

De plus, en utilisant la propriété du projection , il en découle :

$$\forall\mu_h\in L_h^{\ell,*}\quad :\ \int_{\Gamma_3}\mu_h\Pi_h^{\ell}\left(\pi_h^{\ell}[u_h.\eta]\right)d\Gamma_3\leq\int_{\Gamma_3}\mu_h\left(\pi_h^{\ell}[u_h.\eta]\right)d\Gamma_3\leq 0\ ,$$

D'où :

$$-\Pi_h^{\ell}\left(\pi_h^{\ell}[u_h.\eta]\right)\in\left(L_h^{\ell,*}\right)^*=L_h^{\ell}$$

Ou encore :

$$\Pi_h^{\ell}\left(\pi_h^{\ell}[u_h.\eta]\right)(a)\leq 0\quad ;\ \forall a\in\xi_h^{\ell}$$

Puisque $\Pi_h^{\ell}\left(\pi_h^{\ell}[u_h.\eta]\right)$ est constante sur les mèches de Ω^{ℓ} dans Γ_3, on déduit que

$$\Pi_h^\ell\left(\pi_h^\ell[u_h.\eta]\right)\leq 0 \text{ sur } \Gamma_3$$

D'où, on tire :

$$b(u_h,\lambda)=\int_{\Gamma_3}\lambda[u_h.\eta]d\Gamma_3=\int_{\Gamma_2}\lambda\left([u_h.\eta]-\pi_h^\ell[u_h.\eta]\right)d\Gamma_3+\int_{\Gamma_3}\lambda\left(\pi_h^\ell[u_h.\eta]-\Pi_h^\ell\left(\pi_h^\ell[u_h.\eta]\right)\right)d\Gamma_3+\int_{\Gamma_3}\lambda\Pi_h^\ell\left(\pi_h^\ell[u_h.\eta]\right)d\Gamma_3$$

On obtient :

$$(4.5.6)\quad b(u_h,\lambda)\leq\int_{\Gamma_3}\lambda\left([u_h.\eta]-\pi_h^\ell[u_h.\eta]\right)d\Gamma_3+\int_{\Gamma_3}\lambda\left(\pi_h^\ell[u_h.\eta]-\Pi_h^\ell\left(\pi_h^\ell[u_h.\eta]\right)\right)d\Gamma_3$$

i). Estimation du premier terme: posons $\ell'=3-\ell$,

En utilisant $u_h^\ell.\eta^\ell\in W_h^\ell(\Gamma_3)$ (voir définition de $W_h^\ell(\Gamma_3)$ où $u_h^\ell\in V_h(\Omega^\ell)$) et la propriété de projection, on obtient :

$$\int_{\Gamma_3}\lambda\left(u_h^\ell.\eta^\ell-\pi_h^\ell\left(u_h^\ell.\eta^\ell\right)\right)d\Gamma_3=0 \text{ et } \int_{\Gamma_3}\left(\pi_h^\ell\lambda\right)\left(u_h^{\ell'}.\eta^{\ell'}-\pi_h^\ell\left(u_h^{\ell'}.\eta^{\ell'}\right)\right)d\Gamma_3=0$$

Mais :

$$\int_{\Gamma_3}\lambda\left([u_h.\eta]-\pi_h^\ell[u_h.\eta]\right)d\Gamma_3=\int_{\Gamma_3}\lambda\left(u_h^\ell.\eta^\ell-\pi_h^\ell\left(u_h^\ell.\eta^\ell\right)\right)d\Gamma_3+\int_{\Gamma_3}\lambda\left(u_h^{\ell'}.\eta^{\ell'}-\pi_h^\ell\left(u_h^{\ell'}.\eta^{\ell'}\right)\right)d\Gamma_3$$

On a alors

$$\int_{\Gamma_3}\lambda\left([u_h.\eta]-\pi_h^\ell[u_h.\eta]\right)d\Gamma_3=\int_{\Gamma_3}\lambda\left(u_h^{\ell'}.\eta^{\ell'}-\pi_h^\ell\left(u_h^{\ell'}.\eta^{\ell'}\right)\right)d\Gamma_3$$

Ou encore

$$\int_{\Gamma_3}\lambda\left([u_h.\eta]-\pi_h^\ell[u_h.\eta]\right)d\Gamma_3=\int_{\Gamma_3}\left(\lambda-\pi_h^\ell\lambda\right)\left(u_h^{\ell'}.\eta^{\ell'}-\pi_h^\ell\left(u_h^{\ell'}.\eta^{\ell'}\right)\right)d\Gamma_3$$

De sorte que

$$\int_{\Gamma_3}\lambda\left([u_h.\eta]-\pi_h^\ell[u_h.\eta]\right)d\Gamma_3=\int_{\Gamma_3}\left(\lambda-\pi_h^\ell\lambda\right)\left(\left(u_h^{\ell'}-u^{\ell'}\right).\eta^{\ell'}-\pi_h^\ell\left(\left(u_h^{\ell'}-u^{\ell'}\right).\eta^{\ell'}\right)\right)d\Gamma_3+\int_{\Gamma_3}\left(\lambda-\pi_h^\ell\lambda\right)\left(u^{\ell'}.\eta^{\ell'}-\pi_h^\ell\left(u^{\ell'}.\eta^{\ell'}\right)\right)d\Gamma_3$$

On déduit que

$$\int_{\Gamma_3}\lambda\left([u_h.\eta]-\pi_h^\ell[u_h.\eta]\right)d\Gamma_3\leq\left\|\lambda-\pi_h^\ell\lambda\right\|_{IL^2(\Gamma_3)}.\left\|\left(u_h^{\ell'}-u^{\ell'}\right).\eta^{\ell'}-\pi_h^\ell\left(\left(u_h^{\ell'}-u^{\ell'}\right).\eta^{\ell'}\right)\right\|_{IL^2(\Gamma_3)}+\left\|\lambda-\pi_h^\ell\lambda\right\|_{IL^2(\Gamma_3)}.\left\|u^{\ell'}\eta^{\ell'}-\pi_h^\ell\left(u^{\ell'}\eta^{\ell'}\right)\right\|_{IL^2(\Gamma_3)}$$

Pour $\psi=\lambda$, $\psi=\left(u_h^{\ell'}-u^{\ell'}\right).\eta^{\ell'}$ et $\psi=u^{\ell'}.\eta^{\ell'}$, en utilisant l'inégalité (4.3.7) , on conclut

$$\int_{\Gamma_3}\lambda\left([u_h.\eta]-\pi_h^\ell[u_h.\eta]\right)d\Gamma_3\leq ch^\nu\|\lambda\|_{H^\nu(\Gamma_3)}.h^{\frac{1}{2}}\left\|\left(u_h^{\ell'}-u^{\ell'}\right).\eta^{\ell'}\right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_3)}+ch^{1+2\nu}\|\lambda\|_{H^\nu(\Gamma_3)}.\left\|u^{\ell'}.\eta^{\ell'}\right\|_{H^{1+\nu}(\Gamma_3)}$$

De plus en appliquant le théorème de trace avec (4.1.1), on a alors

$$\int_{\Gamma_3}\lambda\left([u_h.\eta]-\pi_h^\ell[u_h.\eta]\right)d\Gamma_3\leq c(u)h^{\nu+\frac{1}{2}}\left\|u_h^{\ell'}-u^{\ell'}\right\|_{\left(H^1(\Omega^{\ell'})\right)^2}+c(u)h^{1+2\nu}\left\|u^{\ell'}\right\|_{H^{\nu+\frac{3}{2}}(\Omega^{\ell'})}$$

D'où l'on déduit :

(4.5.7) $\int_{\Gamma_3} \lambda\left(\left[u_h.\eta\right]-\pi_h^{\ell}\left[u_h.\eta\right]\right)d\Gamma_3 \leq c(u)\left(h^{\frac{1}{2}+\nu}\left\|u-u_h\right\|+c(u)h^{1+2\nu}\right)$

ii).Estimation du deuxième terme: on a

$$\int_{\Gamma_3} \lambda\left(\pi_h^{\ell}\left[u_h.\eta\right]-\Pi_h^{\ell}\left(\pi_h^{\ell}\left[u_h.\eta\right]\right)\right)d\Gamma_3 = \int_{\Gamma_3} \lambda\left\{\left(\pi_h^{\ell}\left[u_h.\eta\right]-\left[u_h.\eta\right]\right)-\Pi_h^{\ell}\left(\pi_h^{\ell}\left[u_h.\eta\right]-\left[u_h.\eta\right]\right)\right\}d\Gamma_3 + \int_{\Gamma_3} \lambda\left(\left[u_h.\eta\right]-\Pi_h^{\ell}\left[u_h.\eta\right]\right)d\Gamma_3$$

En utilisant les propriétés de projection, on a

$$\int_{\Gamma_3} \left(\Pi_h^{\ell}\lambda\right)\left\{\left(\pi_h^{\ell}\left[u_h.\eta\right]-\left[u_h.\eta\right]\right)-\Pi_h^{\ell}\left(\pi_h^{\ell}\left[u_h.\eta\right]-\left[u_h.\eta\right]\right)\right\}d\Gamma_3 = \int_{\Gamma_3} \left(\Pi_h^{\ell}\lambda\right)\left(\left[u_h.\eta\right]-\Pi_h^{\ell}\left[u_h.\eta\right]\right)d\Gamma_3 = 0$$

D'où :

$$(4.5.8)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{\Gamma_3} \lambda\left(\pi_h^{\ell}\left[u_h.\eta\right]-\Pi_h^{\ell}\left(\pi_h^{\ell}\left[u_h.\eta\right]\right)\right)d\Gamma_3 = \int_{\Gamma_3} \left(\lambda-\Pi_h^{\ell}\lambda\right)\left\{\left(\pi_h^{\ell}\left[u_h.\eta\right]-\left[u_h.\eta\right]\right)-\Pi_h^{\ell}\left(\pi_h^{\ell}\left[u_h.\eta\right]-\left[u_h.\eta\right]\right)\right\}d\Gamma_3 \\ \displaystyle\qquad\qquad + \int_{\Gamma_3} \left(\lambda-\Pi_h^{\ell}\lambda\right)\left(\left[u_h.\eta\right]-\Pi_h^{\ell}\left[u_h.\eta\right]\right)d\Gamma_3 \end{cases}$$

On a, grâce à l'inégalité de *Cauchy-Schwarz* :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\Gamma_3} \lambda\left(\pi_h^{\ell}\left[u_h.\eta\right]-\Pi_h^{\ell}\left(\pi_h^{\ell}\left[u_h.\eta\right]\right)\right)d\Gamma_3 \leq \left\|\lambda-\Pi_h^{\ell}\lambda\right\|_{IL^2(\Gamma_3)}.\left\|\left(\pi_h^{\ell}\left[u_h.\eta\right]-\left[u_h.\eta\right]\right)-\Pi_h^{\ell}\left(\pi_h^{\ell}\left[u_h.\eta\right]-\left[u_h.\eta\right]\right)\right\|_{IL^2(\Gamma_3)} \\ \displaystyle\qquad + \int_{\Gamma_3} \left(\lambda-\Pi_h^{\ell}\lambda\right)\left\{\left(\left[u_h.\eta\right]-\left[u.\eta\right]\right)-\Pi_h^{\ell}\left(\left[u_h.\eta\right]-\left[u.\eta\right]\right)\right\}d\Gamma_3 + \int_{\Gamma_3} \left(\lambda-\Pi_h^{\ell}\lambda\right)\left(\left[u.\eta\right]-\Pi_h^{\ell}\left[u.\eta\right]\right)d\Gamma_3 \end{cases}$$

De plus, on utilise (4.3.15), pour $\psi=\pi_h^{\ell}\left[u_h.\eta\right]-\left[u_h.\eta\right]$, on a alors ;

$$(4.5.9)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{\Gamma_3} \lambda\left(\pi_h^{\ell}\left[u_h.\eta\right]-\Pi_h^{\ell}\left(\pi_h^{\ell}\left[u_h.\eta\right]\right)\right)d\Gamma_3 \leq c\left\|\lambda-\Pi_h^{\ell}\lambda\right\|_{IL^2(\Gamma_3)}\left\|\left(\pi_h^{\ell}\left[u_h.\eta\right]-\left[u_h.\eta\right]\right)\right\|_{IL^2(\Gamma_3)} \\ \displaystyle\qquad + \int_{\Gamma_3} \left(\lambda-\Pi_h^{\ell}\lambda\right)\left\{\left(\left[u_h.\eta\right]-\left[u.\eta\right]\right)-\Pi_h^{\ell}\left(\left[u_h.\eta\right]-\left[u.\eta\right]\right)\right\}dx + \int_{\Gamma_3} \left(\lambda-\Pi_h^{\ell}\lambda\right)\left(\left[u.\eta\right]-\Pi_h^{\ell}\left[u.\eta\right]\right)dx \end{cases}$$

En utilisant aussi l'approximation (4.3.15) avec ; $0<\nu<1$, on a alors

$$\left\|\lambda-\Pi_h^{\ell}\lambda\right\|_{IL^2(\Gamma_3)} \leq c_1 h^{\nu}\left\|\lambda\right\|_{H^{\nu}(\Gamma_3)}$$

De plus, on utilise l'inégalité (4.1.1) , on a

(4.5.10) $\left\|\lambda-\Pi_h^{\ell}\lambda\right\|_{IL^2(\Gamma_3)} \leq c(u)h^{\nu}$

On aura besoin de l'inégalité suivante :

$$\left\|\pi_h^{\ell}\left[u_h.\eta\right]-\left[u_h.\eta\right]\right\|_{IL^2(\Gamma_3)} \leq \left\|\pi_h^{\ell}\left(\left[u_h.\eta\right]-\left[u.\eta\right]\right)-\left(\left[u_h.\eta\right]-\left[u.\eta\right]\right)\right\|_{IL^2(\Gamma_3)} + \left\|\pi_h^{\ell}\left[u.\eta\right]-\left[u.\eta\right]\right\|_{IL^2(\Gamma_3)}$$

Et, pour $\psi=\left[u_h.\eta\right]-\left[u.\eta\right]$ et pour $\psi=\left[u.\eta\right]$ dans (4.3.7), on a

$$\left\|\pi_h^{\ell}\left[u_h.\eta\right]-\left[u_h.\eta\right]\right\|_{IL^2(\Gamma_3)} \leq ch^{\frac{1}{2}}\left\|\left(\left[u_h.\eta\right]-\left[u.\eta\right]\right)\right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_3)} + ch^{\nu+1}\left\|\left[u.\eta\right]\right\|_{H^{\nu+1}(\Gamma_3)}$$

En appliquant le théorème de trace, on déduit :

(4.5.11) $\left\|\pi_h^\ell[u_h.\eta]-[u_h.\eta]\right\|_{IL^2(\Gamma_3)} \le ch^{\frac{1}{2}}\|u-u_h\|+c(u)h^{\nu+1}$

On utilise l'inégalité de *Cauchy-Schwartz*, on a

$$\int_{\Gamma_3}(\lambda-\Pi_h^\ell\lambda).\{([u_h.\eta]-[u.\eta])-\Pi_h^\ell([u_h.\eta]-[u.\eta])\}d\Gamma_3 \le \left\|\lambda-\Pi_h^\ell\lambda\right\|_{IL^2(\Gamma_3)}.\left\|([u_h.\eta]-[u.\eta])-\Pi_h^\ell([u_h.\eta]-[u.\eta])\right\|_{IL^2(\Gamma_3)}$$

On utilise les inégalités (4.5.10), (4.3.15) pour $\psi=[u_h.\eta]-[u.\eta]$, on a alors

$$\int_{\Gamma_3}(\lambda-\Pi_h^\ell\lambda).\{([u_h.\eta]-[u.\eta])-\Pi_h^\ell([u_h.\eta]-[u.\eta])\}d\Gamma_3 \le c(u)h^{\nu+\frac{1}{2}}\left\|[u_h.\eta]-[u.\eta]\right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_3)}$$

Et, du théorème de trace, on tire

(4.5.12) $\int_{\Gamma_3}(\lambda-\Pi_h^\ell\lambda).\{([u_h.\eta]-[u.\eta])-\Pi_h^\ell([u_h.\eta]-[u.\eta])\}d\Gamma_3 \le c(u)h^{\nu+\frac{1}{2}}\|u-u_h\|$

En appliquant l'inégalité (4.3.7) pour $\psi=[u_h.\eta]-[u.\eta]$, on a alors

$$\left\|\pi_h^\ell([u_h.\eta]-[u.\eta])-([u_h.\eta]-[u.\eta])\right\|_{IL^2(\Gamma_3)} \le c_1 h^{\frac{1}{2}}\left\|[u_h.\eta]-[u.\eta]\right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_3)}$$

En appliquant le théorème de trace, on déduit

(4.5.13) $\left\|\pi_h^\ell([u_h.\eta]-[u.\eta])-([u_h.\eta]-[u.\eta])\right\|_{IL^2(\Gamma_3)} \le c\ h^{\frac{1}{2}}\|u_h-u\|$

En appliquant aussi l'inégalité (4.3.7) pour $\psi=[u.\eta]$, on a alors

$$\left\|\pi_h^\ell[u.\eta]-[u.\eta]\right\|_{IL^2(\Gamma_3)} \le ch^{\nu+1}\left\|[u.\eta]\right\|_{H^{1+\nu}(\Gamma_3)}$$

Ou encore :

(4.5.14) $\left\|\pi_h^\ell[u.\eta]-[u.\eta]\right\|_{IL^2(\Gamma_3)} \le c(u)h^{\nu+1}$

Et, de (4.5.9)-(4.5.14), on tire :

(4.5.15) $\int_{\Gamma_3}\lambda(\pi_h^\ell[u_h.\eta]-\Pi_h^\ell(\pi_h^\ell[u_h.\eta]))d\Gamma_3 \le c(u)\left(h^{\frac{1}{2}+\nu}\|u-u_h\|+c(u)h^{1+2\nu}\right)+\int_{\Gamma_3}(\lambda-\Pi_h^\ell\lambda)([u.\eta]-\Pi_h^\ell[u.\eta])d\Gamma_3$

Maintenant on estime le premier membre de l'inégalité précédente, pour cela on utilise l'inégalité de *Cauchy Schwartz*, pour avoir l'inégalité :

$$\int_{\Gamma_3}(\lambda-\Pi_h^\ell\lambda)([u.\eta]-\Pi_h^\ell[u.\eta])d\Gamma_3 \le \left\|\lambda-\Pi_h^\ell\lambda\right\|_{IL^2(\Gamma_3)}.\left\|[u.\eta]-\Pi_h^\ell[u.\eta]\right\|_{IL^2(\Gamma_3)}$$

En utilisant les inégalités (4.5.10), (4.3.15) pour $\psi=[u.\eta]$, on conclut

$$\int_{\Gamma_3}(\lambda-\Pi_h^\ell\lambda)([u.\eta]-\Pi_h^\ell[u.\eta])d\Gamma_3 \le ch^\nu\|\lambda\|_{H^\nu(\Gamma_3)}.h^1\left\|[u.\eta]\right\|_{H^1(\Gamma_3)}$$

En appliquant le théorème de trace avec $H^{1+\nu}(\Gamma_3)\hookrightarrow H^1(\Omega^\ell)$, on a

$$\int_{\Gamma_3}\left(\lambda-\Pi_h^{\ell}\lambda\right)\left([u.\eta]-\Pi_h^{\ell}[u.\eta]\right)d\Gamma_3 \le ch^{\nu}\|\lambda\|_{H^{\nu}(\Gamma_3)}.h^{1}\|[u.\eta]\|_{H^{\nu+1}(\Gamma_3)} \le (c(u))^2 h^{\nu+1}$$

Ou encore

$$\int_{\Gamma_3}\left(\lambda-\Pi_h^{\ell}\lambda\right)\left([u.\eta]-\Pi_h^{\ell}[u.\eta]\right)d\Gamma_3 \le (c(u))^2 h^{\nu+1}$$

Et, de (4.5.6), (4.5.7) et (4.5.15), on a alors

$$b(u_h,\lambda)\le c(u)\left(h^{\frac{1}{2}+\nu}\|u-u_h\|+c(u)h^{1+2\nu}\right)+c(u)\left(h^{\frac{1}{2}+\nu}\|u-u_h\|+c(u)h^{1+2\nu}\right)+(c(u))^2h^{1+\nu}$$

En utilisant $h\le d$ de sorte que

(4.5.16) $\quad b(u_h,\lambda)\le c(u)\left(h^{\frac{1}{2}+\nu}\|u-u_h\|+c(u)h^{1+\nu}\right)$

3ème étape :

On utilise les inégalités (4.5.5) et (4.5.16) dans l'estimation (4.4.2), on a

$$\begin{cases}\|u-u_h\|+\|\lambda-\lambda_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)}\le c(u)h^{\nu+\frac{1}{2}}+\left[c(u)\left(h^{\nu+\frac{1}{2}}\|\lambda-\lambda_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)}+c(u)h^{1+2\nu}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\\ \qquad\qquad +\left[c(u)\left(h^{\nu+\frac{1}{2}}\|u-u_h\|+c(u)h^{1+\nu}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\end{cases}$$

Et puisque $h\le d$, on a

$$\begin{cases}\|u-u_h\|+\|\lambda-\lambda_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)}\le c(u)d^{\frac{\nu}{2}}h^{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}}+\left[c(u)\left(h^{\nu+\frac{1}{2}}\|\lambda-\lambda_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)}+c(u)d^{\nu}h^{1+\nu}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\\ \qquad\qquad +\left[c(u)\left(h^{\nu+\frac{1}{2}}\|u-u_h\|+c(u)h^{1+\nu}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\end{cases}$$

On utilise l'inégalité $a.b\le \varepsilon.a^2+\dfrac{1}{4\varepsilon}b^2$ pour $\varepsilon=d^{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}}.h^{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}}$ dans les deux termes,

$$\begin{cases}\|u-u_h\|+\|\lambda-\lambda_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)}\le c(u)d^{\frac{\nu}{2}}.h^{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}}+c(u)h^{\frac{\nu}{2}+\frac{\nu}{2}}+\dfrac{h^{\frac{\nu}{2}}}{4d^{\frac{\nu}{2}}}\|\lambda-\lambda_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)}\\ \qquad\qquad +c(u)h^{\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2}}+c(u)h^{\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2}}+\dfrac{h^{\frac{\nu}{2}}}{4d^{\frac{\nu}{2}}}\|u-u_h\|+c(u)h^{\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2}}\end{cases}$$

On a alors

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(\|u-u_h\|+\|\lambda-\lambda_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)}\right)\le\|u-u_h\|+\|\lambda-\lambda_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)}-\frac{h^{\frac{\nu}{2}}}{4d^{\frac{\nu}{2}}}\|u-u_h\|-\frac{h^{\frac{\nu}{2}}}{4d^{\frac{\nu}{2}}}\|\lambda-\lambda_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)}\le c(u)h^{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}}$$

D'où l'estimation (4.5.1).

Théorème.4.5.2. Pour $M=L_h^{\ell,*}$, $\ell=1,2$, $\frac{1}{2}<\nu<1$. Soient (u_h,λ_h), (u,λ) les solutions de P_m^h, P_m respectivement, $u^{\ell}\in\left(H^{\frac{3}{2}+\nu}(\Omega^{\ell})\right)^2$, on a alors l'estimation suivante :

(4.5.17) $\left\| u - u_h \right\| + \left\| \lambda - \lambda_h \right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)} \leq c(u) h^{\frac{1}{2}+\nu}$

Où $c(u)$ est une constante linéairement dépendante de $\left\| u^\ell \right\|_{(H^{\frac{3}{2}+\nu}(\Omega^\ell))^2}; \ell = 1,2$

Démonstration. En appliquant le théorème d'injection continue de *Sobolev* pour $(\nu + \frac{1}{2})2 > 2$, on alors $H^{\frac{3}{2}+\nu}(\Omega^\ell) \hookrightarrow C(\Omega^\ell)$, ce qui implique que $u^\ell \in \left(C_b^1(\Omega^\ell)\right)^2$.

Et puisque $[u.\eta] \in H^{1+\nu}(\Gamma_3)$,en utilisant l'injection continue $H^{1+\nu}(\Gamma_3) \hookrightarrow C^1(\Gamma_3)$, il vient $[u.\eta] \in C^1(\Gamma_3)$

Puisque : $\left\| \lambda \right\|_{H^{r-\frac{3}{2}}(\Gamma_3)} \leq c \left\| u^\ell \right\|_{(H^r(\Omega^\ell))^2}$ (voir :(4.1.1)), il vient : $\lambda \in H^\nu(\Gamma_3)$.

Et de l'injection continue $H^\nu(\Gamma_3) \hookrightarrow C(\Gamma_3)$, on conclut que λ est continue sur Γ_3 .

1ère étape : l'estimation de $b(u, \lambda_h)$ est évidente.

2ème étape : Estimation de $b(u_h, \lambda)$:

En utilisant la propriété de projection, on déduit que :

$$\int_{\Gamma_3} \left(\Pi_h^\ell \lambda \right) \left([u.\eta] - \Pi_h^\ell [u.\eta] \right) d\Gamma_3 = 0$$

Et puisque $\lambda [u.\eta] = 0$, on a alors :

(4.5.18) $\int_{\Gamma_3} \left(\lambda - \Pi_h^\ell \lambda \right) \left([u.\eta] - \Pi_h^\ell [u.\eta] \right) d\Gamma_3 = -\int_{\Gamma_3} \lambda . \Pi_h^\ell [u.\eta] d\Gamma_3$

Ou encore en tenant compte du fait que $\lambda = 0$ sur T_i' :

$$\int_{T'_i} \lambda \Pi_h^\ell [u.\eta] dx = 0 \quad \text{et} \quad \int_{T_i''} \lambda \Pi_h^\ell [u.\eta] dx = 0$$

Maintenant en utilisant l'inégalité (4.5.18), il résulte :

$$\int_{\Gamma_3} \left(\lambda - \Pi_h^\ell \lambda \right) \left([u.\eta] - \Pi_h^\ell [u.\eta] \right) d\Gamma_3 \leq \sum_{i=1}^{N_1(h)} \int_{T_i} |\lambda| . \left| \Pi_h^\ell [u.\eta] \right| dx$$

On obtient donc

$$\int_{\Gamma_3} \left(\lambda - \Pi_h^\ell \lambda \right) \left([u.\eta] - \Pi_h^\ell [u.\eta] \right) d\Gamma_3 \leq h_\ell \sum_{i=1}^{N_1(h)} \left\| \lambda \right\|_{IL^\infty(T_i)} . \left\| \Pi_h^\ell [u.\eta] \right\|_{IL^\infty(T_i)}$$

En utilisant la propriété (4.3.12), alors il existe un élément $a_i \in T_i$ tel que:

$$\Pi_h^\ell [u.\eta] = [u.\eta](a_i) \text{ sur } T_i$$

De plus, en utilisant la continuité de $[u.\eta]$, il vient :

$$\left\| \Pi_h^\ell [u.\eta] \right\|_{IL^\infty(T_i)} = \left| [u.\eta](a_i) \right| \leq \left\| [u.\eta] \right\|_{IL^\infty(T_i)}$$

Ce qui donne finalement

$$\int_{\Gamma_3}\left(\lambda-\Pi_h^{\ell}\lambda\right)\left([u.\eta]-\Pi_h^{\ell}[u.\eta]\right)d\Gamma_3\leq h_\ell\sum_{i=1}^{N_1(h)}\|\lambda\|_{IL^\infty(T_i)}.\|[u.\eta]\|_{IL^\infty(T_i)}$$

D'où l'on déduit, en combinant cette inégalité avec les inégalité (4.4.13) et (4.4.14) :

(4.5.19) $$\int_{\Gamma_3}\left(\lambda-\Pi_h^{\ell}\lambda\right)\left([u.\eta]-\Pi_h^{\ell}[u.\eta]\right)d\Gamma_3\leq h_\ell^{2\nu+1}.N_1(h).\|\lambda\|_{C^{0,\nu-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)}.\|[u.\eta]\|_{C^{1,\nu-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)}$$

Les injections continues $H^\nu(\Gamma_3)\hookrightarrow C^{0,\nu-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)$ et $H^{1+\nu}(\Gamma_3)\hookrightarrow C^{1,\nu-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)$, entraînent :

$$\|\lambda\|_{C^{0,\nu-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)}\leq c\|\lambda\|_{H^\nu(\Gamma_3)}\ \text{et}\ \ \|[u.\eta]\|_{C^{1,\nu-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)}\leq c\|[u.\eta]\|_{H^{1+\nu}(\Gamma_3)}$$

Par suite, en utilisant l'inégalité (4.5.19), il vient :

$$\int_{\Gamma_3}\left(\lambda-\Pi_h^{\ell}\lambda\right)\left([u.\eta]-\Pi_h^{\ell}[u.\eta]\right)d\Gamma_3\leq ch_\ell^{2\nu+1}.N_1(h).\|\lambda\|_{H^\nu(\Gamma_3)}.\|[u.\eta]\|_{H^{1+\nu}(\Gamma_3)}$$

De (4.1.1) et (4.4.6) on en déduit : $\|\lambda\|_{H^\nu(\Gamma_3)}\leq c(u)$ et $\|[u.\eta]\|_{H^{1+\nu}(\Gamma_3)}\leq c(u)$

Ce qui implique :

$$\int_{\Gamma_3}\left(\lambda-\Pi_h^{\ell}\lambda\right)\left([u.\eta]-\Pi_h^{\ell}[u.\eta]\right)d\Gamma_3\leq (c(u))^2\,h_\ell^{2\nu+1}$$

Et, de (4.5.6), (4.5.7) et (4.5.15), on tire :

$$b(u_h,\lambda)\leq c(u)\left(h^{\frac{1}{2}+\nu}\|u-u_h\|+c(u)h^{1+2\nu}\right)+c(u)\left(h^{\frac{1}{2}+\nu}\|u-u_h\|+c(u)h^{1+2\nu}\right)+(c(u))^2\,h^{2\nu+1}$$

D'où l'estimation :

(4.5.20) $$b(u_h,\lambda)\leq c(u).\left(h^{\frac{1}{2}+\nu}\|u-u_h\|+c(u)h^{1+2\nu}\right)$$

3ème étape :

En combinant les inégalité (4.5.10), (4.5.14) et (4.4. 2), il résulte :

$$\|u-u_h\|+\|\lambda-\lambda_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)}\leq c(u)h^{\nu+\frac{1}{2}}+\left[c(u)\left(h^{\nu+\frac{1}{2}}\|\lambda-\lambda_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)}+c(u)h^{1+2\nu}\right)\right]^{\frac{1}{2}}+\left[c(u)\left(h^{\nu+\frac{1}{2}}\|u-u_h\|+c(u)h^{1+2\nu}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

Et de l'inégalité $a.b\leq\varepsilon.a^2+\frac{1}{4\varepsilon}b^2$ pour $\varepsilon=h^{\nu+\frac{1}{2}}$, on tire :

$$\begin{cases}\|u-u_h\|+\|\lambda-\lambda_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)}\leq c(u)h^{\nu+\frac{1}{2}}+c(u)h^{\frac{1}{2}+\nu}+\frac{1}{4}\|\lambda-\lambda_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3)}\\ \qquad\qquad +\frac{c(u)}{4}h^{\frac{1}{2}+\nu}+c(u)h^{\frac{1}{2}+\nu}+\frac{1}{4}\|u-u_h\|+\frac{c(u)}{4}h^{\frac{1}{2}+\nu}\end{cases}$$

D'où l'estimation (4.5.17).

6. Conclusion

En termine par donner un tableau qui résume les résultats essentiels concernant les estimations des erreurs commises lors de l'application des différentes méthodes. Ces résultats sont obtenus dans la partie numérique.

Pour $u^\ell \in \left(H^\nu(\Omega^\ell)\right)^2$, $\nu \geq \frac{3}{2}$, alors $\sigma_\eta = -\lambda \in H^{\nu-\frac{3}{2}}(\Gamma_3)$ (voir (4.1.1)).

Valeurs ν	**Interpolation**		**Projection**		**Discrétisation**	
	Surfacique	**Volumique**	**sur $W_h^\ell(\Gamma_3)$**	**sur $X_h^\ell(\Gamma_3)$**	**Linéaire**	**Quadratique**
$1 < \nu \leq 3$		$II_h^\ell u^\ell$ C, V : $h^{\nu-1}$				
$2 < \nu \leq 4$	$i_h^\ell \lambda$ C, V : $h^{\nu-1}$					
$\frac{3}{2} \leq \nu \leq 4$			$\pi_h^\ell \lambda$ C, V : $h^{\nu-\frac{3}{2}}$			
$\frac{3}{2} \leq \nu \leq \frac{5}{2}$				$\Pi_h^\ell \lambda$ C, V : $h^{\nu-\frac{3}{2}}$		
$0 < \nu < 1$					(u_h, λ_h) C, V : $h^{\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2}}$	(u_h, λ_h) C, V : $h^{\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2}}$
$\frac{1}{2} < \nu < 1$					(u_h, λ_h) C, V : $h^{\frac{1}{2}+\nu}$	(u_h, λ_h) C, V : $h^{\frac{1}{2}+\nu}$
En utilisant :	Corl.4.2.2. Inég. (4.1.1)	Thm.4.2.2	Thm.4.3.1. Inég. (4.1.1)	Prop.4.3.1. Inég. (4.1.1)	Thm4.5.1 Thm4.5.2	Thm4.4.1. Thm4.4.2

C : Convergence vers la solution exacte,

V : la vitesse de cette convergence.

Annexe

Afin de rendre aisée la lecture de ce manuscrit, il nous est paru utile de rappeler des notions principales de la théorie de la mécanique des milieux continus , des résultats classiques en analyse fonctionnelle restreints au seul cadre hilbertien, ainsi que les propriétés de base de quelques espaces fonctionnels .C'est l'objet de cette annexe qui est divisée en trois parties : La première est consacrée aux rappels de quelques notions de base tels que le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations linéarité . On y introduit les lois de comportement du type élastique. On y trouve aussi des conditions aux limites de contact sans frottement entre deux corps déformables. La seconde section est consacrée à des rappels sur les espaces de Banach et les espaces de Hilbert de plus à quelques éléments d'analyse non linéaire et particulièrement des résultats d'existence et d'unicité concernant les inéquations variationnelles elliptiques . La dernière section concerne les espaces fonctionnels. on y introduit des espaces de type Hölderiennes et de type Sobolev associés à l'opérateur déformation et à l'opérateur divergence et on présente leurs principales propriétés , et particulièrement des résultats d'injections continue et d'injection compact , notamment les théorèmes de trace et les théorèmes d'interpolation .

Contenu.

A.1.Rappels de mécanique des milieux continus

Il s'agit dans cette section de présenter quelques rappels de mécanique des milieux continus. Pour plus de détails sur ce sujet nous citons par exemple les ouvrages [23], [17], [12] et [30] .

A.1.1.Contraintes, déformations :

On considère un corps déformable occupant un domaine Ω de IR^N $(N=1,2,3)$ de frontière Γ supposée assez régulière, rapporté à un système d'axes orthonormés Ox_i $\left(i=\overline{1,N}\right)$. l'objet du problème, du point de vue mécanique, est d'étudier le nouvel état d'équilibre du corps matériel, résultant de l'application des forces volumiques sur Ω et des forces de traction sur une partie de la frontière Γ . les inconnues du problème sont *le champ des déplacements* $u : \Omega \to IR^N$ et *le champ des contraintes* $\sigma : \Omega \to S_N$.

La loi fondamentale de la mécanique des milieux continus exprimant l'équivalence du torseur des efforts extérieurs et du torseur des accélérations pour un systèmes matériel quelconque, conduit à *l'équation d'équilibre* :

(A.1.1) $Div\,\sigma + f = 0$ dans Ω

Où $f : \Omega \to IR^N$ représente la densité des forces volumiques sur Ω et $Div\,\sigma$ est la divergence du tenseur σ .

L'équation(A.1.1) équivaut à N relations scalaires ; il est évident du simple point de vue mathématique que cette équation ne suffit pas à modéliser le problème d'équilibre d'un corps élastique car, par exemple, les N composantes u_i du champ des déplacements ne figurent pas dans cette équation. Du point de vue physique par ailleurs, il faut remarquer que l'équation (A.1.1) exprime une loi universelle valable pour tous les solides. Si donc cette équation suffisait à déterminer tous les paramètres, cela signifierait que, soumis à des conditions identiques, les divers milieux continus auraient des comportements identiques. Ceci est naturellement absurde.

L'équation (A.1.1) est donc insuffisante, à elle seule, à décrire l'équilibre des corps matériels ; elle doit être complétée par d'autres relations que l'on désigne sous le vocable général de *lois de comportement*, caractérisant le comportement de chaque type de solide .

Dans la suite, on considérera que des *solides élastiques* dans *l'hypothèse des petites transformations*. dans ce cas , la loi de comportement est exprimée par une relation entre le champ des contraintes et *le champ des déformations linéarités* $\varepsilon : \Omega \to S_N$ défini par :

(A.1.2) $\varepsilon = (\varepsilon_{ij}),\ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\partial_i u_j + \partial_j u_i\right)$ dans Ω

où ∂_i et ∂_j représentent les opérateurs de dérivation partielle respectivement par rapport aux variables x_i et x_j. Dans la suite, on va appeler ε champ des déformations; pour tout $x \in \Omega$ le tenseur $\varepsilon(x) \in S_N$ s'appelle *tenseur des déformations* en x. Des fois , pour marquer la dépendance du champ ε par rapport au champ des déplacements u on va noter $\varepsilon(u)$ au lieu de ε .

A.1.2.Lois de comportement.

Les lois de comportement caractérisent le comportement de chaque type de milieu continu. Bien qu'elles doivent respecter certaines propriétés d'invariance, leur origine est souvent expérimentale et c'est toute une série d'essais qu'il faut imaginer et réaliser pour établir une loi de comportement .

Nous présentons ci-dessous les lois de comportement élastique dans cette thèse :

a). Lois de comportement linéaire : c'est la lois de comportement donnée par :

(A.1.3) $\sigma = A\varepsilon$ i,e $\left(\sigma_{ij} = A_{ijkh}\varepsilon_{kh}\right)$

Où $A=\left(A_{ijkh}\right)$ est un tenseur d'ordre quatre. ses composantes A_{ijkh} s'appellent *coefficients d'élasticité* et sont indépendants du tenseur des déformations . Dans le cas non-homogène les composantes A_{ijkh} dépendant du point $x \in \Omega$ et dans le cas homogène les composantes A_{ijkh} sont des constantes .

Plaçons nous dans la suite dans le cas homogène; dans la théorie de l'élasticité linéaire on suppose d'habitude que A est un tenseur symétrique et positivement défini c'est-à-dire :

(A.1.4) $$\begin{cases} (a): \langle A\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle = \langle \varepsilon_1, A\varepsilon_2 \rangle \ : \ \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S_N \\ (b): \exists m > 0 \ : \ \langle A\varepsilon, \varepsilon \rangle \geq m|\varepsilon|^2 \ : \ \forall \varepsilon \in S_N \end{cases}$$

La condition de symétrique (A.1.4.a) est équivalente aux égalités $A_{ijkh} = A_{khij} = A_{ijhk}$. La condition (1.1.4.b) est dite également *condition d'ellipticité* ; elle entraîne l'inversibilité du tenseur A donc (A.1.3) équivaut à $\varepsilon = A^{-1}\sigma$, où A^{-1} est l'inverse du tenseur A. Remarque enfin que les propriétés (A.1.4) sur le tenseur A entraînent des propriétés similaires pour le tenseur A^{-1}.

b). Lois de comportement univoque : c'est une lois de comportement de la forme

(A.1.5) $\sigma = F(\varepsilon(u))$

Où $F : S_N \to S_N$ est une application linéaire ou non linéaire. Cette loi peut modeler quelques propriétés mises en évidence par les expériences de chargement monotone : linéarité de la courbe $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ (suivant que F soit linéaire ou non), durcissement ou adoucissement de la courbe $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ (suivant que F soit monotone ou non). Par contre, ni *le fluage* , ni *la relaxation* ne peuvent être décrits par la loi (A.1.5) . En effet, si par exemple à l'instant $t=0$ on a $\varepsilon(0)=\varepsilon_0$ et on maintient la déformation constante $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \quad \forall t > 0$ il résulte $\sigma(t) = F(\varepsilon_0), \forall t > 0$. Par conséquent le modèle (A. 1.5) ne peut pas décrire le phénomène de relaxation mis en évidence par les essais expérimentaux. De même, pour l'équation (A.1.5) les courbes charge-décharge $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ coïncident. Ce modèle ne peut donc pas décrire les déformations résiduelles ce qui justifie l'introduction d'autre lois constitutives capables de modeler ces phénomènes.

A.1.3. Conditions aux limites

a). Conditions aux limites de déplacement-traction :

Supposons maintenant que la frontière du domaine est constituée de trois parties disjointes deux à deux : $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$; $\Gamma_i \cup \Gamma_j = \phi$ pour $i \neq j$ .Soit $\eta = (\eta_i)$ le vecteur unitaire extérieur à Γ . Pour simplifier, nous nous plaçons dans le cas statique et par conséquent le temps n'interviendra pas par la suite .

Nous considérons les conditions aux limites suivantes

(A.1.6) $\quad u = \xi$ sur Γ_1

(A.1.7) $\quad \sigma\eta = g$ sur Γ_2

La condition(A.1.6)est appelée *condition aux limites de déplacement*; sa signification consiste en ce que le champ des déplacements est imposé sur la partie Γ_1 de la frontière Γ,la fonction ξ étant une donnée du problème , (par exemple, si $\xi = 0$ le solide est encastré sur la partie Γ_1 de sa frontière) .

La condition(A.1.7) est appelée *condition aux limites de traction* . Elle signifie que le vecteur des contraintes de Cauchy $\sigma\eta$ est imposé sur la partie Γ_2 de la frontière, g représentant la densité des forces appliquées de surface et constituant une donnée du problème. Si $\Gamma_1 = \phi$ le problème aux limites est un *problème de traction pure* et si $\Gamma_2 = \phi$ le problème aux limites est un *problème de déplacement pur*. Si le parties Γ_1 et Γ_2 sont toutes les deux de mesure de *Lebesgue* $N-1$ dimensionnelle strictement positive, le problème considéré est un *problème mixte déplacement-traction* .

b).Condition aux limites de contact sans frottement .

On suppose maintenant la contact entre deux corps élastiques occupant les domaines $\Omega^1, \Omega^2 \subset IR^N$ et pose Γ_3 la partie de contact . Nous considérons les conditions aux limites suivantes :

On dit que le contact entre deux corps est sans frottement si les mouvements tangentiels sont libres , ce qui traduit par :

(A.1.8) $\quad \sigma_\tau^1 = \sigma_\tau^2 = 0$ sur Γ_3

où σ_{τ}^{ℓ} représenté la composante tangentielle du tenseur des contraintes de Cauchy $\sigma^{\ell}\eta^{\ell}$.

Puisque les deux corps Ω^1, Ω^2 représentent deux corps déformables, cette propriété se traduit mathématiquement par l'inégalité :

(A.1.9) $[u.\eta] = u^1.\eta^1 + u^1.\eta^1 \leq 0$ sur Γ_3

Dans les pointes de Γ_3 tels que $[u.\eta] < 0$, il n'existe pas de contact entre Ω^1 et Ω^2 donc le vecteur des contraintes de Cauchy s'annule, on a

(A.1.10) $[u.\eta] < 0 \Rightarrow \sigma_{\eta}^{1} = \sigma_{\eta}^{2} = 0$ sur Γ_3

Aux points de Γ_3 tels que $[u.\eta] = 0$, le contact entre Ω^1, Ω^2 se produit , on a

(A.1.11) $[u.\eta] = 0 \Rightarrow \sigma_{\eta}^{1} = \sigma_{\eta}^{2} \leq 0$ sur Γ_3

Pour résumer , les conditions de contact (A.1.8)-(A.1.11) s'écrivent d'une manière combinée de la façon suivante :

(A.1.12) $$\begin{cases} (a): & \sigma_{\eta}^{1} = \sigma_{\eta}^{2} \quad (\text{noté par } \sigma_{\eta}) \\ (b): & [u.\eta] \leq 0, \quad \sigma_{\eta} \leq 0, \quad [u.\eta].\sigma_{\eta} = 0 \qquad : \text{ sur } \Gamma_3 \\ (c): & \sigma_{\tau}^{1} = \sigma_{\tau}^{2} = 0 \end{cases}$$

Les conditions aux limites de la forme(A.1.12) sont aussi appelés conditions de contact de *Signorini*

A.2.Analyse non linéaire dans les espaces de Banach.

A.2.1.Rappels sur les espaces de Banach .

Dans la suite, E, F désigne un espace de Banach réel muni des normes par suite notées par $\|\cdot\|_E$, $\|\cdot\|_F$. On note aussi par E', (resp F') l'espace dual de E (resp F).

DéfinitionA.2.1 . une partie K d'un espace vectoriel E est convexe si pour tout $x, y \in K$ on a $[x,y] \subset K$ où $[x,y] = \{\alpha x + (1-\alpha) y \ : \ \alpha \in [0,1]\}$.

. Un sous-ensemble K de E est un cône si quels que $x \in K$ et $\alpha \geq 0$, alors $\alpha x \in K$.

DéfinitionA.2.2. Soit G un sous-espace fermé d'un espace de Banach E .on dit qu'un sous-espace L de E est un supplémentaire topologique de G si

(i) L est fermé.

(ii) $G \cap L = \{0\}$ et $G + L = E$

Exemples

1- Tout sous-espace G de dimension finie admet un supplémentaire topologique .

2- Dans un espace de Hilbert tout sous-espace fermé G admet un supplémentaire topologique.

DéfinitionA.2.3. Soit $x_0 \in IR^N$ et v une fonction définie sur un voisinage ouvert de x_0 à valeur de IR^m. Nous dirons que v est différentiable en x_0 au sens de Fréchet s'il existe un opérateur linéaire continu $Dv(x_0) \in L(IR^N, IR^m)$ tel que

$$\lim_{\|x\|_{IR^N} \to 0} \frac{\|v(x_0 + x) - v(x_0) - Dv(x_0)x\|_{IR^m}}{\|x\|_{IR^N}} = 0$$

L'opérateur $Dv(x_0)$ dit la dérivation de v en x_0 au sens de Fréchet.

Par suite définie la n^{em} dérivation de fonction v au sens de Fréchet en point x_0 comme suit

$$D^n v(x_0) = D(D^{n-1} v(x_0))(x_0)$$

PropositionA.2.1. Soit $v \in C^n(\Omega)$ et $x_0 \in \Omega$. Alors v dérivable n fois au sens de Fréchet en point x_0, la dérivée n^{em} au sens de *Fréchet* de fonction v au point x_0 définie comme suivant :

(A.2.1) $$D^n v(x_0) = \sum_{|\alpha|=n} \partial^\alpha v(x_0).e^*_\alpha \in L(\underbrace{IR^2 \times IR^2 \times ... \times IR^2}_{\text{n } fois}.\ IR) = (IR_2^n)^* \ ;$$

tel que si $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ avec $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 = n$, on a

(A.2.2) $$\begin{cases} e^*_\alpha(\underbrace{e_1,.., e_1}_{\alpha_1\, fois}, \underbrace{e_2,.., e_2}_{\alpha_2\, fois}) = 1 \\ e^*_\alpha(\underbrace{e_{i_1},..,e_{i_{\alpha_1}}}_{\alpha_1\, fois}, \underbrace{e_{j_1},..,e_{j_{\alpha_2}}}_{\alpha_2\, fois}) = 0 \ \text{ si } \ (i_1,.., i_{\alpha_1}, j_1,.., j_{\alpha_2}) \neq (1,..,1,2,..,2) \end{cases}$$

Notation. Soit $m \in IN \cup \{+\infty\}$ on désigne par $C_c^m(\Omega)$ l'espace des fonctions dérivable continûment m fois sur Ω à support compact, i.e, $C_c^m(\Omega) = \{f \in C^m(\Omega) / \text{suppor}(f) \text{ est compact dans } \Omega\}$.

ThéorèmeA.2.1. Soit $m \in IN^* \cup \{+\infty\}$, l'espace $C_c^m(\Omega)$ est dense dans $IL^2(\Omega)$.

LemmeA.2.1. Soit $f \in IL^1_{loc}(\Omega)$, i.e , $f.1_K \in IL^1(\Omega)$ pour tout compact $K \subset \Omega$, tel que $\int_\Omega f.ud\Omega = 0 \, ; \forall u \in C_c(\Omega)$, alors $f = 0$ $p.p$ sur Ω .

LemmeA.2.2. Soit $f \in IL^1_{loc}(\Omega)$, tel que $\int_\Omega f.\partial u.d\Omega = 0 \, ; \forall u \in C_c^1(\Omega)$, alors il existe une constante c telle que $f = c$ $p.p$ sur Ω .

ThéorèmeA.2.2. Soit T un opérateur linéaire, continu et surjective de E sur F.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) T admet un inverse à droite

(ii) $KerT$ admet un supplémentaire topologique dans E .

ThéorèmeA.2.3.(théorème de l'application ouverte)

Soient E et F deux espaces d Banach et soit T un opérateur linéaire, continu et surjectif de E sur F, Alors T transformé tout ouverte de E en un ouvert de F **.**

CorollaireA.2.1. Soient E et F deux espaces de Banach et soit T un opérateur linéaire, continu et bijectif de E sur F**.** Alors T^{-1} est continu de E dans F**.**

ThéorèmeA.2.4.(théorème de graphe fermé)

Soient E et F deux espaces de Banach et soit T un opérateur linéaire de E dans F,on suppose que le graphe de T fermé dans $E \times F$. Alors T est continu **.**

RemarqueA.2.1. Bien entendu la réciproque est vraie puisque toute application continue (linéaire ou non linéaire) a un graphe fermé **.**

Définition.A.2.4. Soit E est un espace normé, un hyperplan (affine) de E est un ensemble de la forme $H = \{x \in E \ ; \ f(x) = \alpha\}$ où f et un forme linéaire sur E, non identiquement nulle et $\alpha \in IR$. On dit que H est l'hyperplan d'équation $[f = \alpha]$.

Définition.A.2.5. Soient E un espace normé, $f \in E' - \{0\}$, $\alpha \in IR$. et soient $A \subset E$ et $B \subset E$

1- On dit que l'hyperplan H d'équation $[f = \alpha]$ sépare A et B au sens large si l'on a

$$f(x) \leq \alpha \leq f(y) \ ; \ \ \forall x \in A, \ \ \forall y \in B$$

2- On dit que l'hyperplan H d'équation $[f = \alpha]$ sépare A et B au sens strict s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que ; $f(x) \leq \alpha - \varepsilon \quad \forall x \in A$ et $\alpha + \varepsilon \leq f(y) \quad \forall y \in B$

ThéorèmeA.2.5.(*Hahn-Banach* , forme analytique) :

Soient E est un espaces de Banach, G un sous-espace vectoriel de E et soit $g : G \to IR$ une forme linéaire et continue. Alors il existe $f \in E'$ qui prolonge g et tel que $\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'}$.

ThéorèmeA.2.6.(*Hahn-Banach* , première forme géométrique) :

Soit E est un espace vectoriel sur IR, soient $A \subset E$ et $B \subset E$ deux ensembles convexes, non vides et disjoints, on suppose que A est ouvert. Alors il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens large **.**

ThéorèmeA.2.7.(*Hahn-Banach* , deuxième forme géométrique) :

Soient $A \subset E$ et $B \subset E$ deux ensembles convexes, non vides, disjoint. On suppose que A est fermé et que B est compact. Alors il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens strict**.**

A.2.2.Rappels sur les espaces de Hilbert .

Dans la suite, H désigne un espace de Hilbert réel muni de son produit scalaire ainsi que la norme associée notée respectivement par $\langle .,. \rangle_H$ et $\|.\|_H$ .On note aussi par H' l'espace dual de H et par $\langle .,. \rangle_{H' \times H}$ la dualité entre H' et H .

a) propriétés élémentaires.

ThéorèmeA.2.8.(théorème de représentation de *Riesz-Fréchet*)

Etant donné $\eta \in H'$, il existe $f \in H$ unique tel que :

(A.2.3) $\langle \eta, v \rangle_{H' \times H} = \langle f, v \rangle_H : \forall v \in H$

De plus on a $\|\eta\|_{H'} = \|f\|_H$.

Ce théorème montre que toute forme linéaire continue sur H peut se représenter de manière unique à l'aide du produit scalaire. L'application $\eta \mapsto f$ est un isomorphisme isométrique qui permet d'identifier H et son dual H' .

Définition.A.2.6. On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in IN}$ de vecteurs d'un espace de Hilbert H *convergente faiblement* vers $u \in H$, et on note $u_n \xrightarrow{faible} u$ si

$$\langle u_n, v \rangle_H \xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle u, v \rangle_H \text{ ; pour tout } v \in H .$$

Dans ce cas, u s'appelle limite faible de la suite $(u_n)_{n\in IN}$.En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, il résulte que si $u_n \to u$ dans H alors $u_n \xrightarrow{faible} u$ dans H . la réciproque n'est pas en général vraie. De plus, puisque tout espace de Hilbert est *réflexif*, on a le résultat suivant

ThéorèmeA.2.9. Soit $(u_n)_{n\in IN}$ une suite *bornée* de H, Alors la suite $(u_n)_{n\in IN}$ possède une sous-suite faiblement convergente.

PropositionA.2.2. Soit $(u_n)_{n\in IN}$ une suite de H , on a

$$\left[u_n \xrightarrow{faible} u \right] \Rightarrow \left[\|u\|_H \text{ borné et } \|u\|_H \le \liminf \|u_n\|_H \right]$$

Un élément $u \in H$ qui est la limite faible d'une sous-suite de la suite $(u_n)_{n\in IN}$ s'appelle *point faiblement adhérent* à la suite $(u_n)_{n\in IN}$. On prouve que :

ThéorèmeA.2.10. Si la suite $(u_n) \subset H$ possède un unique point faiblement adhèrent $u \in H$, alors $u_n \xrightarrow{faible} u$.

Autrement dit, le théorème précédent affirme que si *toutes* les sous-suites faiblement convergentes d'une suite $(u_n)_{n\in IN}$ ont la même limite faible u , alors toute la suite $(u_n)_{n\in IN}$ converge faiblement vers u .

ThéorèmeA.2.11. (Projection sur un convexe fermé)

Soit $K \subset H$ un *convexe fermé non vide* . Alors pour tout $f \in H$, il existe $u \in K$ unique tel que

(A.2.4) $\|f - u\|_H = \min_{v\in K} \|f - v\|_H$

De plus, u est caractérisé par la propriété :

(A.2.5) $u \in K \quad , \quad \langle u, v-u \rangle_H \geq \langle f, v-u \rangle_H : \forall v \in K$.

Etant donné $K \subset H$ un convexe fermé non vide, le théorème précédent nous permet d'associer à chaque élément $f \in H$ l'élément u définie par (A.2.4) ou (A.2.5) . On note $u = P_K f$. on a mis ainsi en évidence l'opérateur $P_K : H \to K$ qui s'appelle opérateur *projection* de H sur K .

LemmeA.2.3. Soit H, H deux espaces *Hilbertienne* et soit , $T \in \mathrm{L}(\mathrm{H}, H)$ avec T surjective. Alors, il existe $R \in \mathrm{L}(H, \mathrm{H})$ vérifie $T \circ R = \mathrm{Id}_H$ (R dit *relèvement* de T) .

b)Théorèmes des Lax-Milgram, Stampachia et Korn :

Soit maintenant $a : H \times H \to IR$ une forme bilinéaire sur $H \times H$. la forme $a(.)$ est dite :

1- symétrique si $a(u,v) = a(v,u) \ \forall u, v \in H$;

2- continue s'il existe un réel $M > 0$ tel que $a(u,v) \leq M \|u\|_H . \|v\|_H \quad \forall u, v \in H$;

3- coercive s'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $a(u,u) \geq \alpha \|u\|_H^2 \quad \forall u \in H$.

Soit $A : H \to H$ opérateur définie sur H .l'opérateur A est dite :

1- fortement monotone s'il existe un réel $m > 0$ tel que:

$$\langle Au - Av, u - v \rangle_H \geq m \|u - v\|_H^2 ; \quad \forall u, v \in H$$

2- Lipchitzienne s'il existe un réel $L > 0$ tel que :

$$\|Au - Av\|_H \leq L \|u - v\|_H \ : \forall u, v \in H$$

3- Posons que l'opérateur A est linéaire ; A est dit *continue* s'il existe un réel $M > 0$ tel que :

$$\|Au\|_H \leq M \|u\|_H \quad \forall u \in H$$

4- Posons aussi que l'opérateur A est linéaire: A est dit *positivement défini* s'il existe un réel $m > 0$ tel que : $\langle Au, u \rangle_H \geq m \|u\|_H^2 \quad \forall u \in H$

RemarqueA.2.2. Soient $A : H \to H$ un opérateur et $a : H \times H \to IR$ la forme définie par :

(A.2.6) $a(u,v) = \langle Au, v \rangle_H \quad \forall u, v \in H$

On a alors les propriétés suivantes :

(i) a est bilinéaire si et seulement si A linéaire.

(ii) a est continue si et seulement si A continu.

(iii) a est coércive si et seulement si A est défini positif.

LemmeA.2.4. si $A : H \to H$ est un opérateur fortement monotone et Lipchitz , Alors A est inversible et A^{-1} fortement monotone et Lipschitz.

ThéorèmeA.2.12. (théorème de *Lax-Milgram*)

Soit $a(.,.)$ une forme bilinéaire continue et coercive, Alors pour tout $f \in H$, il existe $u \in H$ unique tel que

(A.2.7) $a(u,v) = \langle f, v \rangle_H \quad , \forall v \in H$

De plus, si a est *symétrique*, alors u est caractérisé par la propriété

(A.2.8) $u \in H$ et $\frac{1}{2}a(u,u) - \langle f,u \rangle_H \le \frac{1}{2}a(v,v) - \langle f,v \rangle_H \quad , \forall v \in H$

ThéorèmeA.2.13. (théorème de *Stampachia*)

Soit $a(.,.)$ une forme bilinéaire continue et coercive, soit $K \subset H$ un sous-ensemble *convexe fermé et non vide*, Alors pour tout $f \in \mathrm{H}$, il existe $u \in K$ *unique* tel que

(A.2.9) $a(u, v-u) \ge \langle f, v-u \rangle_H \quad \forall v \in K$

De plus, si a est *symétrique*, alors u est caractérisé par la propriété

(A.2.10) $u \in K$ et $\frac{1}{2}a(u,u) - \langle f,u \rangle_H \le \frac{1}{2}a(v,v) - \langle f,v \rangle_H \quad , \forall v \in K$

On note à présent par $\mathfrak{R}$ l'ensemble des *déplacements rigides* défini par

(A.2.11) $\mathfrak{R} = \{u \in \mathrm{H}_1 \,/\, \varepsilon(u) = 0\}$

Et soit V un sous-espace fermé de H_1. On a alors le résultat suivant

ThéorèmeA.2.14. (l'inégalité de *Korn*)

Si le sous-espace V est tel que $\mathfrak{R} \cap V = \{0\}$, Alors

(A.2.12) $\|\varepsilon(u)\|_{\mathcal{H}} \ge c\|u\|^2_{H_1} \quad : \forall u \in V$

où c est une constante strictement positive ne dépendant que de Ω et V.

Supposant maintenant que $\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ avec $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \phi$, est une partition de Γ et soit V le sous-espace fermé de H_1, définie par :

(A.2.13) $V = \{u \in \mathrm{H}_1 \,/\, \gamma u = 0 \; p.p \text{ sur } \Gamma_1\}$

CorollaireA.2.2. Si $mes(\Gamma_1) > 0$, alors l'inégalité de *Korn* (A.2.10) est vérifiée sur les sous-espace V définie par (A.2.11) .

En utilisant ce résultat, il vient

RemarqueA.2.3. si $mes(\Gamma_1) > 0$, alors l'application $u \mapsto \|\varepsilon(u)\|_{\mathcal{H}}$ est un norme sur les sous-espace V définie par(A.2.11), équivalente à la norme canonique $\|.\|_{H_1}$.

A.2.3.Inéquations variationnelles elliptiques.

Soient $A: H \to H$ un opérateur non linéaire, $\varphi: H \to \left]-\infty,+\infty\right]$ une fonction propre $(\varphi \neq +\infty)$ et $f \in H$. Un nombre de problèmes aux limites en équations aux dérivées partielles ainsi qu'en mécanique des milieux continus ont un rapport avec des problèmes mathématiques de la forme suivante :

Trouver u tel que :

(A.2.14) $u \in H, \langle Au, v-u \rangle_H + \varphi(v) - \varphi(u) \geq \langle f, v-u \rangle_H \quad : \forall v \in H$

Le problème (A.2.12) est appelé *inéquation variationnelles elliptique* de seconde espèce sur H . D'autre problèmes rencontrés en mécanique ont un rapport avec des problèmes mathématiques similaires de la forme suivante :

Trouver u tel que :

(A.2.15) $u \in K, \langle Au, v-u \rangle_H \geq \langle f, v-u \rangle_H \quad : \forall v \in K$

où K est un sous-ensemble non vide de H . Le problème(A.2.13) est appelé *inéquation variationnelle elliptique* de première espèce sur H .

Remarquons que si $\varphi \equiv 0$ (ou $K = H$) , alors(A.2.12) (resp.(A.2.13)) est équivalente au problème suivant :

Trouver u tel que :

(A.2.16) $u \in H, \langle Au, v \rangle_H = \langle f, v \rangle_H \quad : \forall v \in H$

On obtient ainsi une *équation variationnelle*.

En ce qui concerne les problèmes (A.2.12)et (A.2.13), on a les résultats d'existence et d'unicité suivants :

ThéorèmeA.2.15. si A est un opérateur fortement monotone et de Lipchitz et si φ est une fonction propre, convexe et semi-continue inférieurement (S.C.I), alors l'inéquation variationnelle elliptique (A.2.14) admet une solution unique.

ThéorèmeA.2.16. Si A est un opérateur fortement monotone et de Lipchitz et K est un convexe fermé non vide de H ,alors l'inéquation variationnelle elliptique(A.2.15) admet une solution unique.

A.3. Espaces fonctionnels

On introduit dans cette section des espaces du type Sobolev utilisés en mécanique et associés aux opérateurs divergence et déformation. On présente de plus leurs principales propriétés, notamment les théorèmes de trace. On rappelle aussi quelques espaces définis sur un intervalle réel et à valeurs dans un espace de Hilbert. On adopte ici la convention de l'indice muet et on précise aussi que toutes les notations ainsi que les espaces fonctionnels utilisés dans cette thèse sont introduits dans cette section. En outre, dans la rédaction de cette section nous avons suivi [6] et [8]. Pour plus de détails sur les espaces de Sobolev et les espaces de distributions, on renvoi par exemple à [11], [10], [1] et [12].

A.3.1. Espaces de distributions

Soit Ω^ℓ, $\ell = \overline{1,2}$ deux ouverts de IR^N. On note par $D(\Omega^\ell)$ l'espace des fonctions réelles sur Ω^ℓ, indéfiniment dérivables et à support compact inclus dans Ω^ℓ et par $D'(\Omega^\ell)$ l'espace des distributions sur Ω^ℓ, le produit de dualité entre $D'(\Omega^\ell)$ et $D(\Omega^\ell)$ sera noté par $\langle .,. \rangle_{D'(\Omega^\ell)\times D(\Omega^\ell)}$. On précise en outre que le produit scalaire canonique ainsi que la norme euclidienne sur IR^N seront respectivement notées par "." et $|\,.\,|$. Nous introduisons également les espaces suivants :

$$D^\ell = \left\{\varphi^\ell = \left(\varphi_i^\ell\right)_{i=\overline{1,N}} \ / \ \varphi_i^\ell \in D(\Omega^\ell), \overline{i=1,N}\right\} = \left(D(\Omega^\ell)\right)^N \ ; \quad \ell = 1,2$$

$$D = D^1 \times D^2$$

$$D'^\ell = \left\{\Phi^\ell = \left(\Phi_i^\ell\right)_{i=\overline{1,N}} \ / \ \Phi_i^\ell \in D'(\Omega^\ell), \overline{i=1,N}\right\} = \left(D'(\Omega^\ell)\right)^N$$

$$D' = D'^1 \times D'^2$$

$$\mathcal{D}^\ell = \left\{\sigma^\ell = \left(\sigma_{ij}^\ell\right) \ / \ \sigma_{ij}^\ell = \sigma_{ji}^\ell \in D(\Omega^\ell); \ i.j = \overline{1,N}\right\} = \left(D(\Omega^\ell)\right)_S^{N\times N}$$

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}^1 \times \mathcal{D}^2 \ ;$$

$$\mathcal{D}'^\ell = \left\{\phi^\ell = \left(\phi_{ij}^\ell\right) \ / \ \phi_{ij}^\ell = \phi_{ji}^\ell \in D(\Omega^\ell); \ i.j = \overline{1,N}\right\} = \left(D'(\Omega^\ell)\right)_S^{N\times N} \ ;$$

$$\mathcal{D}' = \mathcal{D}'^1 \times \mathcal{D}'^2 \ ;$$

Les dualités entre les espaces D' et D, $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}$ seront notées respectivement par $\langle \cdot,\cdot \rangle_{D'\times D}$ et $\langle \cdot,\cdot \rangle_{\mathcal{D}'\times \mathcal{D}}$. Plus précisément on a :

$$\langle \Phi, \varphi \rangle_{D'\times D} = \langle \Phi_i^1, \varphi_i^1 \rangle + \langle \Phi_i^2, \varphi_i^2 \rangle$$

$$\langle \phi, \sigma \rangle_{\mathcal{D}'\times \mathcal{D}} = \langle \phi_{ij}^1, \sigma_{ij}^1 \rangle + \langle \phi_{ij}^2, \sigma_{ij}^2 \rangle$$

Pour tout $\Phi \in D'$, $\varphi \in D$, $\phi \in \mathcal{D}'$ et $\sigma \in \mathcal{D}$ avec la convention de l'indice muet .

Considérons maintenant l'opérateur défini pour les fonctions et pour les distributions $\partial_i = \partial_i / \partial x_i$, $i = \overline{1,N}$. on a

(A.3.1) $\quad \langle \partial_i \theta^\ell, \psi^\ell \rangle = -\langle \theta^\ell, \partial_i \psi^\ell \rangle$, $\forall \theta^\ell \in D'(\Omega^\ell), \forall \psi^\ell \in D(\Omega^\ell) \quad ; \ell = \overline{1,2}$

On introduit également les opérateurs différentiels du premier ordre définis par :

(A.3.2) $$\begin{cases} \varepsilon : D^{\ell} \to \mathcal{D}^{\ell} \\ \varepsilon(\varphi^{\ell}) = (\varepsilon_{ij}(\varphi^{\ell}))\ ;\ \varepsilon_{ij}(\varphi^{\ell}) = \dfrac{1}{2}(\partial_j \varphi_i^{\ell} + \partial_i \varphi_j^{\ell})\ ,\ \ \forall i, j = \overline{1.N}. \end{cases}$$

(A.3.3) $$\begin{cases} Div : \mathcal{D}^{\ell} \to D^{\ell} \\ Div\,\phi^{\ell} = (\partial_i \phi_{ij}^{\ell})_{i=\overline{1,N}} \end{cases}$$

On va utiliser les mêmes notations pour les opérateurs correspondants définis sur les espaces de distributions :

(A.3.4) $$\begin{cases} \varepsilon : D'^{\ell} \to \mathcal{D}'^{\ell} \\ \varepsilon(T^{\ell}) = (\varepsilon_{ij}(T^{\ell}));\varepsilon_{ij}(T^{\ell}) = \dfrac{1}{2}(\partial_j T_i^{\ell} + \partial_i T_j^{\ell})\ ,\ \forall i, j = \overline{1.N} \quad ,\mathrm{T}^{\ell} \in D'^{\ell}. \end{cases}$$

(A.3.5) $$\begin{cases} Div : \mathcal{D}'^{\ell} \to D'^{\ell} \\ Div\,\sigma^{\ell} = (\partial_i \sigma_{ij}^{\ell})_{i=\overline{1,N}} \end{cases}$$

En utilisant (A.3.1), on obtient facilement

(A.3.6) $$\langle \varepsilon(\Phi^{\ell}), \phi^{\ell} \rangle_{\mathcal{D}'^{\ell} \times \mathcal{D}^{\ell}} = -\langle \Phi^{\ell}, Div\,\phi^{\ell} \rangle_{D'^{\ell} \times D^{\ell}}\ ,\ \ \forall \Phi^{\ell} \in D'^{\ell}, \forall \phi^{\ell} \in \mathcal{D}^{\ell}$$

(A.3.7) $$\langle Div\,\sigma^{\ell}, \varphi^{\ell} \rangle_{D'^{\ell} \times D^{\ell}} = -\langle \sigma^{\ell}, \varepsilon(\varphi^{\ell}) \rangle_{\mathcal{D}'^{\ell} \times \mathcal{D}^{\ell}}\ ,\ \ \forall \varphi^{\ell} \in D'^{\ell}, \forall \sigma^{\ell} \in \mathcal{D}'^{\ell}$$

L'opérateur ε défini par (A.3.2) pour les fonctions et par (A.3.4) pour les distributions s'appelle opérateur déformation. l'opérateur Div défini par (A.3.3) pour les fonctions et par (A.3.5) pour les distributions s'appelle *opérateur divergence.*

A.3.2.Espaces de Sobolev.

Dans tout ce paragraphe, Ω désignera désormais un ouvert de IR^N, avec

(A.3.8) $$\begin{cases} \text{la frontière } \Gamma \text{ de } \Omega \text{ est une variété indéfiniment différentiable de} \\ \text{dimension (N-1), } \Omega \text{ étant localement d'un seul coté de } \Gamma. \end{cases}$$

(A.3.9) Ω est borné

a).L'espace $IL^2(\Omega)$ **:** On désigne par $IL^2(\Omega)$ l'espace des (classes de) fonctions u de carré sommable sur Ω , i.e mesurables et telles que

(A.3.10) $$\|u\|_{IL^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty$$

On posera souvent $IL^2(\Omega) = \mathrm{H}^0(\Omega)$.

Comme il est classique , $IL^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

(A.3.11) $$\langle u, v \rangle_{IL^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x).\overline{v(x)}dx$$

b).Les espaces $H^m(\Omega)$: Soit maintenant m un entier ≥ 1 . En bref, l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ d'ordre m sur Ω est défini par

(A.3.12) $H^m(\Omega)=\{u \ / \ D^\alpha u \in IL^2(\Omega) \quad \forall\alpha, \ |\alpha| \leq m\}$

où $D^\alpha = \dfrac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_N}}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_N^{\alpha_N}}, \quad \alpha = (\alpha,\ldots,\alpha_N), \quad |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_N$

les dérivées $D^\alpha u$ sont prises au sens des distributions sur Ω.

On munit $H^m(\Omega)$ de la norme

(A.3.13) $\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m}\|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}$

et l'on a le

ThéorèmeA.3.1. Pour la norme (A.3.13) l'espace $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert, le produit scalaire de deux élément u,v de $H^m(\Omega)$ étant donné par

(A.3.14) $\langle u,v\rangle_{\mathrm{H}^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m}\langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle_{IL^2(\Omega)}$

RemarqueA.3.1. L'application suivante :

(A.3.15) $\begin{cases} |\cdot|_{H^m(\Omega)} : H^m(\Omega) \to IR_+ \\ u \mapsto |u|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=m}\|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}} \end{cases}$

Est un semi-norme sur l'espace $H^m(\Omega)$

ThéorèmeA.3.2. Si Ω vérifie(A.3.8), (A.3.9), l'espace $C^m(\overline{\Omega})$est dense dans $H^m(\Omega)$.

ThéorèmeA.3.3. $m\in IN$, posons que la domaine Ω est un ouvert convexe dans IR^N , et soit $v\in H^{1+m}(\Omega)$ tel que $\partial^\alpha v = 0\,;\ \ p.p$ sur Ω , pour tout multi-indice α tq $|\alpha| = m+1$, alors $v\in P_m(\Omega)$.

c).Les espaces $H^s(\Omega)$, $\mathrm{s}>0$: Soit maintenant $s = m+\theta,$ avec $m\in IN$ et $0<\theta<1$, l'espace de Sobolev $H^s(\Omega)$ d'ordre s sur Ω est défini par

(A.3.16) $H^s(\Omega) = \{u\in \mathrm{H}^m(\Omega) / \forall\alpha; |\alpha| = m : D^\alpha u \in H^\theta(\Omega)\}$

on munit $H^s(\Omega)$ de la norme :

(A.3.17) $\|u\|_{H^s(\Omega)} = \left[\|u\|^2_{H^m(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=m}\iint_{\Omega\Omega}\dfrac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^2}{|x-y|^{N+2\theta}}\,dx.dy\right]^{\frac{1}{2}}$

et l'on a le

ThéorèmeA.3.4. Pour la norme (A.3.17) l'espace $H^s(\Omega)$, $s = m + \theta$, avec $m \in IN$ et $0 < \theta < 1$ est un espace de Hilbert, le produit scalaire de deux élément u,v de $H^s(\Omega)$ étant donné par

(A.3.18) $$\langle u,v\rangle_{H^s(\Omega)} = \langle u,v\rangle_{H^m(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=m} \iint_{\Omega\Omega} \frac{\left(D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)\right).\left(\overline{D^\alpha v(x)} - \overline{D^\alpha v(y)}\right)}{|x-y|^{N+2\theta}} dx.dy$$

RemarqueA.3.2. L'application suivante :

(A.3.19) $$\begin{cases} |\,.\,|_{H^s(\Omega)} : H^s(\Omega) \to IR_+ \\ u \mapsto |u|_{H^s(\Omega)} = \left[\sum_{|\alpha|=m} \iint_{\Omega\Omega} \frac{\left|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)\right|^2}{|x-y|^{N+2\theta}} dx.dy \right]^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

Est un semi-norme sur l'espace $H^s(\Omega)$

ThéorèmeA.3.5. Si Ω vérifié (A.3.8), (A.3.9), l'espace $D(\overline{\Omega})$ dense dans $H^s(\Omega)$.

d).Les espaces $H_0^s(\Omega)$: Soit $s \geq 0$ l'espace de Sobolev $H_0^s(\Omega)$ est l'adhérence de $D(\Omega)$ dans l'espace $H^s(\Omega)$.

ThéorèmeA.3.6. Soit Ω vérifié (A.3.8), (A.3.9), Alors $|\,.\,|_{H^s(\Omega)}$ est une norme sur $H_0^s(\Omega)$ qui est équivalente à la norme $|\,.\,|_{H^s(\Omega)}$.

e).Les espaces $H^{-s}(\Omega)$, s > 0 .

Soit maintenant $s > 0$, l'espace de Sobolev $H^{-s}(\Omega)$ d'ordre s sur Ω est défini par :

$$H^{-s}(\Omega) = \left(H_0^s(\Omega)\right)' = \mathrm{L}\left(H_0^s(\Omega), IR\right)$$

On munit $H^{-s}(\Omega)$ de la norme :

(A.3.20) $$\|u\|_{H^{-s}(\Omega)} = \sup_{\varphi \in H_0^s(\Omega)} \frac{\langle u, \varphi\rangle}{\|\varphi\|_{H^s(\Omega)}}$$

Soit u,v deux éléments dans $H^{-s}(\Omega)$, on applique le théorème de Riesz, il existe deux éléments φ,ψ dans $H_0^s(\Omega)$ où vérifient

$$\forall g \in H_0^s(\Omega): \ \langle u,g\rangle = \langle \varphi,g\rangle_{H^s(\Omega)}; \qquad \langle v,g\rangle = \langle \psi,g\rangle_{H^s(\Omega)}$$

On définit l'opérateur $\langle .,.\rangle_{H^{-s}(\Omega)}$ comme suivant :

(A.3.21) $$\langle u,v\rangle_{H^{-s}(\Omega)} = \langle \varphi,\psi\rangle_{H^s(\Omega)}$$

ThéorèmeA.3.7. Pour la norme (A.3.20), l'espace $H^{-s}(\Omega)$ est un espace de Hilbert, le produit scalaire de deux élément u,v de $H^{-s}(\Omega)$ étant donné par (A.3.20) .

ThéorèmeA.3.8. En identifiant $H^0(\Gamma)$ à son dual, on a

(A.3.22) $H^s(\Gamma)=H_0^s(\Gamma)$

ThéorèmeA.3.9. Soit Ω un ouvert borné et $s\le \frac{1}{2}$, alors $H^s(\Omega)=H_0^s(\Omega)$

A.3.3.Les espaces des Höldériennes.

Soit Ω un ouvert dans IR^N, soit $m\in IN$ et $0<s<1$

a).Les espaces $C^{0,s}(\overline{\Omega})$: L'espace Höldérienne d'ordre s sur $\overline{\Omega}$ est un espace désigné par $C^{0,s}(\overline{\Omega})$ défini comme suivant : $C^{0,s}(\overline{\Omega})=\left\{ f\in C(\Omega) \quad / \sup\limits_{x,y\in\Omega}\dfrac{|f(x)-f(y)|}{\|x-y\|^s}<+\infty \right\}$

On munit $C^{0,s}(\overline{\Omega})$ de la norme

(A.3.23) $\|f\|_{C^{0,s}(\overline{\Omega})}=\sup\limits_{x\in\Omega}|f(x)|+\sup\limits_{x,y\in\Omega}\dfrac{|f(x)-f(y)|}{\|x-y\|^s}$

RemarqueA.3.3. L'application suivante :

(A.3.24) $\begin{cases} |\cdot|_{C^{0,s}(\overline{\Omega})} : C^{0,s}(\overline{\Omega})\to IR_+ \\ f\mapsto |f|_{C^{0,s}(\overline{\Omega})}=\sup\limits_{x,y\in\Omega}\dfrac{|f(x)-f(y)|}{\|x-y\|^s} \end{cases}$

Est un semi-norme sur l'espace $C^{0,s}(\overline{\Omega})$

b).Les espaces $C^{m,s}(\overline{\Omega})$: On désigne par $C^{m,s}(\overline{\Omega})$ l'espace des fonctions $f\in C^m(\overline{\Omega})$ tel que $D^\alpha f\in C^{0,s}(\overline{\Omega}), \forall|\alpha|\le m$,

On munit $C^{m,s}(\overline{\Omega})$ de la norme

(A.3.25) $\|f\|_{C^{m,s}(\overline{\Omega})}=\max\limits_{|\alpha|\le m}\sup\limits_{x\in\Omega}|D^\alpha f(x)|+\max\limits_{|\alpha|\le m}\sup\limits_{x,y\in\Omega}\dfrac{|D^\alpha f(x)-D^\alpha f(y)|}{\|x-y\|^s}$

RemarqueA.3.4. L'application suivante :

(A.3.26) $\begin{cases} |\cdot|_{C^{m,s}(\overline{\Omega})} : C^{m,s}(\overline{\Omega})\to IR_+ \\ f\mapsto |f|_{C^{0,s}(\overline{\Omega})}=\max\limits_{|\alpha|\le m}\sup\limits_{x,y\in\Omega}\dfrac{|D^\alpha f(x)-D^\alpha f(y)|}{\|x-y\|^s} \end{cases}$

Est un semi-norme sur l'espace $C^{m,s}(\overline{\Omega})$

A.3.4.les espaces H et $\mathcal{H}$:

Soient Ω^1,Ω^2 deux ouvert de IR^N .

a).Les espaces H^ℓ et $\mathcal{H}^\ell$: On utilise les notations :

(A.3.27) $H^\ell=\left\{u=(u_i)_{i=\overline{1,N}} \ / \ u_i\in IL^2(\Omega^\ell), i=\overline{1,N}\right\}=\left(IL^2(\Omega^\ell)\right)^N$;

(A.3.28) $\mathcal{H}^\ell=\left\{\sigma^\ell=(\sigma^\ell_{ij})_{ij=\overline{1,N}} \ / \ \sigma^\ell_{ij}=\sigma^\ell_{ji}\in IL^2(\Omega^\ell), ij=\overline{1,N}\right\}=\left(IL^2(\Omega^\ell)\right)_S^{N\times N}$;

Les espaces H^ℓ et $\mathcal{H}^\ell$ sont des espaces de *Hilbert* réels munis des produits scalaires canoniques

$$\langle u^\ell, v^\ell \rangle_{H^\ell} = \int_{\Omega^\ell} u_i . v_i d\Omega^\ell, \quad \forall u, v \in H^\ell$$

$$\langle \sigma^\ell, \tau^\ell \rangle_{\mathcal{H}^\ell} = \int_{\Omega^\ell} \sigma^\ell_{ij} . \tau^\ell_{ij} d\Omega^\ell \qquad \forall \sigma^\ell, \tau^\ell \in \mathcal{H}^\ell$$

Les normes associées à ces produits scalaires seront notées respectivement par $\|.\|_{H^\ell}$ et $\|.\|_{\mathcal{H}^\ell}$.

b).Les espaces H et $\mathcal{H}$ **:** On utilise aussi les notations

(A.3.29) $H = \{u = (u^1, u^2) \ / \ u^\ell \in H^\ell ; \ell = 1,2\} = H^1 \times H^2$

(A.3.30) $\mathcal{H} = \{\sigma = (\sigma^1, \sigma^2) / \ \sigma^\ell \in \mathcal{H}^\ell ; \ell = \overline{1,2}\} = \mathcal{H}^1 \times \mathcal{H}^2$

Les espaces H et $\mathcal{H}$ sont des espaces de *Hilbert* réels munis des produits scalaires canoniques :

$$\langle u, v \rangle_H = \langle u^1, v^1 \rangle_{H^1} + \langle u^2, v^2 \rangle_{H^2} = \int_{\Omega^1} u^1_i . v^1_i d\Omega^1 + \int_{\Omega^2} u^2_i . v^2_i d\Omega^2 \ ; \ \forall u, v \in H$$

$$\langle \sigma, \tau \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \sigma^1, \tau^1 \rangle_{\mathcal{H}^1} + \langle \sigma^2, \tau^2 \rangle_{\mathcal{H}^2} = \int_{\Omega^1} \sigma^1_{ij} . \tau^1_{ij} d\Omega^1 + \int_{\Omega^2} \sigma^2_{ij} . \tau^2_{ij} d\Omega^2 \ ; \ \forall \sigma, \tau \in \mathcal{H}$$

Les normes associées à ces produits scalaires seront notées respectivement par $\| . \|_H$ *et* $\| . \|_{\mathcal{H}}$.

c).Les espaces H_1^ℓ et $\mathcal{H}_1^\ell$ **:** On utiliser aussi les notations

(A.3.31) $H_1^\ell = \{u = (u_i)_{i=\overline{1,N}} / u_i \in H^1(\Omega^\ell), i = \overline{1,N}\} = (H^1(\Omega^\ell))^N \ ; \quad (\ell = 1.2)$

(A.3.32) $\mathcal{H}_1^\ell = \{\sigma^\ell = (\sigma^\ell_{ij})_{ij=\overline{1,N}} \ / \ \sigma^\ell_{ij} = \sigma^\ell_{ji} \in H^1(\Omega^\ell), ij = \overline{1,N}\} = (H^1(\Omega^\ell))_S^{N\times N}$

Les espaces H_1^ℓ et $\mathcal{H}_1^\ell$ sont des espaces de *Hilbert* réels munis des produits scalaires canoniques :

$$\langle u^\ell, v^\ell \rangle_{H_1^\ell} = \sum_{|\alpha|\le 1} \int_{\Omega^\ell} D^\alpha u^\ell_i . D^\alpha v^\ell_i d\Omega^\ell \ ; \ \forall u^\ell, v^\ell \in H_1^\ell$$

$$\langle \sigma^\ell, \tau^\ell \rangle_{\mathcal{H}_1^\ell} = \sum_{|\alpha|\le 1} \int_{\Omega^\ell} D^\alpha \sigma^\ell_{ij} . D^\alpha \tau^\ell_{ij} d\Omega^\ell \quad ; \ \forall \sigma^\ell, \tau^\ell \in \mathcal{H}_1^\ell$$

Les normes associées à ces produits scalaires seront notées respectivement par $\|.\|_{H_1^\ell}$ et $\|.\|_{\mathcal{H}_1^\ell}$.

d).Les espaces H_1 et $\mathcal{H}_1$ **:** On utilise les notations

(A.3.33) $H_1 = \{u = (u^1, u^2) \ / \ u^\ell \in H_1^\ell ; \ell = 1,2\} = H_1^1 \times H_1^2$

(A.3.34) $\mathcal{H}_1 = \{\sigma = (\sigma^1, \sigma^2) / \ \sigma^\ell \in \mathcal{H}_1^\ell ; \ell = \overline{1,2}\} = \mathcal{H}_1^1 \times \mathcal{H}_2^2$

Les espaces H_1 et $\mathcal{H}_1$ sont des espaces de *Hilbert* réels munis des produits scalaires canoniques :

$$\langle u, v \rangle_{H_1} = \langle u^1, v^1 \rangle_{H_1^1} + \langle u^2, v^2 \rangle_{H_1^2} \ : \ \forall u, v \in H_1$$

$$\langle \sigma,\tau\rangle_{\mathcal{H}_1} = \langle \sigma^1,\tau^1\rangle_{\mathcal{H}_1^\ell} + \langle \sigma^2,\tau^2\rangle_{\mathcal{H}_2^\ell} \quad : \quad \forall \sigma,\tau \in \mathcal{H}_1$$

Les normes associées à ces produits scalaires seront notées respectivement par $\| \, . \, \|_{H_1}$ et $\| \, . \, \|_{\mathcal{H}_1}$.

e).Les espaces H_Γ *et* H'_Γ **:** On pose que Γ est une partie quelconque de $\partial\Omega^1$ ou $\partial\Omega^2$, on utilise les notations :

(A.3.35) $H_\Gamma = \left\{ \varphi = (\varphi_i)_{i=\overline{1,N}} / \varphi_i \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \, ; \, i = \overline{1,N} \right\} = \left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \right)^N$

(A.3.36) $H'_\Gamma = \left\{ \Psi = (\Psi_i)_{i=\overline{1,N}} / \Psi_i \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \, ; \, i = \overline{1,N} \right\} = \left(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \right)^N$

Les espaces H_Γ et H'_Γ sont des espaces de *Hilbert* réels munis des produits scalaires canoniques :

$$\langle \varphi,\psi\rangle_{H_\Gamma} = \sum_{i=1}^{N} \langle \varphi_i,\psi_i\rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} : \quad \forall \varphi,\psi \in H_\Gamma$$

$$\langle \Phi,\Psi\rangle_{H'_\Gamma} = \sum_{i=1}^{N} \langle \Phi_i,\Psi_i\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} : \quad \forall \Phi,\Psi \in H'_\Gamma$$

Les normes associées à ces produits scalaires seront notées respectivement par $\| \, . \, \|_{H_\Gamma}$ et $\| \, . \, \|_{H'_\Gamma}$.

A.3.5.Espaces liés à l'opérateur déformation.

Pour l'opérateur déformation défini par (A.4.4) , il est naturel d'introduire l'espace

$$H_1^\ell = \left\{ u^\ell \in H^\ell \; / \; \varepsilon(u^\ell) \in \mathcal{H}^\ell \right\}.$$

On considère sur H_1^ℓ le produit scalaire

(A.3.37) $\langle u^\ell, v^\ell\rangle_{H_1^\ell} = \langle u^\ell, v^\ell\rangle_{H^\ell} + \langle \varepsilon(u^\ell), \varepsilon(v^\ell)\rangle_{\mathcal{H}^\ell}$

Et on note la norme associée à ce produit scalaire par $|\cdot|_{H_1^\ell}$.On obtient ainsi que l'injection $H_1^\ell \subset H^\ell$ et l'opérateur déformation $\varepsilon : H_1^\ell \to \mathcal{H}^\ell$ sont des opérateurs continus.

De même, compte tenu de l'identification de H^ℓ et $\mathcal{H}^\ell$ à deux sous-espaces de D'^ℓ et $\mathcal{D}'^\ell$:

(A.3.38) $\langle \varepsilon(u^\ell), \sigma^\ell\rangle_{\mathcal{D}'^\ell \times \mathcal{D}^\ell} + \langle u^\ell, Div\sigma^\ell\rangle_{H^\ell} = 0 \quad : \forall u^\ell \in H^\ell, \sigma^\ell \in \mathcal{D}^\ell$

(A.3.39) $\langle \varepsilon(u^\ell), \sigma^\ell\rangle_{\mathcal{H}^\ell} + \langle u^\ell, Div\sigma^\ell\rangle_{H^\ell} = 0 \; : \; \forall u^\ell \in H_1^\ell, \sigma^\ell \in \mathcal{D}^\ell$

ThéorèmeA.3.16. Muni du produit scalaire $\langle .,. \rangle_{H_1^\ell}$ l'espace H_1^ℓ est un espace de Hilbert réel.

On munit maintenant l'espace produit $\left(H^1(\Omega^\ell)\right)^N$ du produit scalaire canonique et de la norme associée à ce produit scalaire, et on les note respectivement par $\langle .,. \rangle_{(H^1(\Omega^\ell))^N}$ et $\| . \|_{H^1(\Omega^\ell)^N}$. On a alors le résultat suivant :

ThéorèmeA.3.11. On a l'égalité algébrique $H_1^\ell = \left(H^1(\Omega^\ell)\right)^N$,de plus $\|\cdot\|_{H_1^\ell}$, $\|\cdot\|_{H^1(\Omega^\ell)^N}$ sont des normes équivalentes sur H_1^ℓ .

A.3.6. Les espaces liés à l'opérateur divergence.

Comme dans le cas de l'opérateur déformation, il est naturel d'introduire l'espace $\mathcal{H}_1^\ell$ lié à l'opérateur divergence et défini par : $\mathcal{H}_1^\ell = \left\{ \sigma^\ell \in \mathcal{H}^\ell \ / \ Div\,\sigma^\ell \in H^\ell \right\}$

Sur lequel on considère le produit scalaire

(A.3.40) $\left\langle \sigma^\ell, \tau^\ell \right\rangle_{\mathcal{H}_1^\ell} = \left\langle \sigma^\ell, \tau^\ell \right\rangle_{\mathcal{H}^\ell} + \left\langle Div\sigma^\ell, Div\tau^\ell \right\rangle_{H^\ell} \ : \ \forall \sigma^\ell, \tau^\ell \in \mathcal{H}_1^\ell$

On note la norme associée par $\| \cdot \|_{\mathcal{H}_1^\ell}$. On obtient ainsi que l'injection $\mathcal{H}_1^\ell \subset \mathcal{H}^\ell$ et l'opérateur divergence $Div\sigma^\ell : \mathcal{H}_1^\ell \rightarrow H^\ell$ sont des opérateurs continus. De plus, compte tenu de l'identification de H^ℓ et $\mathcal{H}^\ell$ à des sous-espaces de D'^ℓ et $\mathcal{D}'^\ell$, en utilisant (A.3.4.7) , il résulte

(A.3.41) $\left\langle Div(\sigma^\ell), \varphi^\ell \right\rangle_{D'^\ell \times D^\ell} + \left\langle \sigma^\ell, \varepsilon(\varphi^\ell) \right\rangle_{\mathcal{H}^\ell} = 0 \ : \ \forall \sigma^\ell \in \mathcal{H}^\ell, \varphi^\ell \in D^\ell$

(A.3.42) $\left\langle Div(\sigma^\ell), \varphi^\ell \right\rangle_{H^\ell} + \left\langle \sigma^\ell, \varepsilon(\varphi^\ell) \right\rangle_{\mathcal{H}^\ell} = 0 \ : \ \forall \sigma^\ell \in \mathcal{H}_1^\ell, \varphi^\ell \in D^\ell$

ThéorèmeA.3.12. Muni du produit scalaire $\langle .,. \rangle_{\mathcal{H}_1^\ell}$ l'espace $\mathcal{H}_1^\ell$ est un espace de Hilbert réel .

On peut prouver que l'espace $\left(C^1(\overline{\Omega}^\ell)\right)_s^{N\times N}$ est dense dans $\mathcal{H}_1^\ell$.

A.3.7.Théorèmes d'injection contenue et d'injection compact.

ThéorèmeA.3.13. (théorème d'injection continue de *Sobolev*)

Soit $\Omega \subset IR^N$ un ouvert ayant la propriété du cône(en particulier un ouvert borné Lipchitzienne). Soit $p \in [1,+\infty[$; $j \geq 0, s > 0$

a). Si $s.p < N$, on a $W^{j+s,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,r}(\Omega)$; pour tout $p \leq r \leq \frac{Np}{N-sp}$.

En particulier pour $j = 0$: $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$; pour tout $p \leq r \leq \frac{Np}{N-sp}$.

b). Si $s.p = N$, on a $W^{j+s,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,r}(\Omega)$; pour tout $p \leq r < +\infty$.

En particulier pour $j = 0$: $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$; pour tout $p \leq r < +\infty$.

c). Si $s.p > N$, on a $W^{j+s,p}(\Omega) \hookrightarrow C^j(\overline{\Omega})$.

RemarqueA.3.5. On prend le cas $p = 2$;

a) Si $s_1 \leq s_2$, on a $H^{s_2}(\Omega) \hookrightarrow H^{s_1}(\Omega)$.

b) Si $s > \frac{N}{2}$, on a $H^{j+s}(\Omega) \hookrightarrow C_b^j(\overline{\Omega})$.

ThéorèmeA.3.14. Soit Λ un ouvert borné de classe C^∞ de dimension N , soit $s > \frac{N}{2}$, $0<\alpha<1$ et $m \in IN$; on a $H^{s+\alpha+m}(\Lambda) \hookrightarrow C^{m,\alpha}(\overline{\Lambda})$.

ThéorèmeA.3.15. (théorème d'injection compact de *Rellich*)

Soit $\Omega \subset IR^N$ un ouvert borné ayant la propriété du cône (en particulier un ouvert borné Lipchitzienne) , soit $p \in [1,+\infty[$; $j \geq 0, s > 0$;

a). Si $s.p \leq N$, on a $W^{j+s,p}(\Omega) \overset{C}{\subset} W^{j,r}(\Omega)$; pour tout $p \leq r \leq \frac{Np}{N-sp}$.

En particulier pour $j = 0$: $W^{j+s,p}(\Omega) \overset{C}{\subset} L^2(\Omega)$; pour tout $p \leq r \leq \frac{Np}{N-sp}$.

b). Si $s.p > N$, on a $W^{j+s,p}(\Omega) \overset{C}{\subset} W^{j,r}(\Omega)$ et , $W^{j+s,p}(\Omega) \overset{C}{\subset} C_b^j(\overline{\Omega})$; pour tout $1 \leq r \leq +\infty$

En particulier pour $j = 0$: $W^{s,p}(\Omega) \overset{C}{\subset} L^r(\Omega)$; pour tout $1 \leq r \leq +\infty$

CorollaireA.3.1. Soit Ω un ouvert borné de classe C^∞, soit $s \in IR$ quelconque , Alors quelque soit $\varepsilon > 0$, on a $H^s(\Omega) \overset{C}{\subset} H^{s-\varepsilon}(\Omega)$.

RemarqueA.3.6. Si $s > \frac{N}{2}$, on a $H^{j+s}(\Omega) \overset{C}{\subset} C_b^j(\overline{\Omega})$.

A.3.8.Rappels sur les applications des traces.

ThéorèmeA.3.16. (théorème du Trace sur $H^s(\Omega)$)

Soit $\Omega \subset IR^N$ un ouverte borné Lipchitzien de frontière Γ , soit $s \geq 0$, alors il existe une application linéaire continue surjective unique

(A.3.43) $\begin{cases} \gamma : H^s(\Omega) \to H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma) \text{ telleque:} \\ \gamma u = u|_\Gamma : \forall u \in C(\overline{\Omega}) \end{cases}$

RemarquesA.3.7.

a). Il existe une application linéaire et continue : $R : H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma) \to H^s(\Omega)$ vérifiant :

(A.3.44) $\gamma.R(\xi) = \xi \;:\; \forall \xi \in H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma)$

b). Le noyau de l'application trace est $H_0^s(\Omega)$.

ThéorèmeA.3.17. (théorème du Trace sur $(H^s(\Omega))^N$)

Soit $\Omega \subset IR^N$ un ouvert borné Lipchitzien de frontière Γ , soit $s \geq 0$, alors il existe une application linéaire continue surjective unique

(A.3.45) $\begin{cases} \gamma : (H^s(\Omega))^N \to \left(H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)^N \text{ telle que}: \\ \gamma.u = u|_\Gamma ; \forall u \in (C(\overline{\Omega}))^N \end{cases}$

RemarqueA.3.8. Il existe une application linéaire et continue $R : \left(H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)^N \to (H^s(\Omega))^N$; vérifiant :

(A.3.48) $\gamma.R(\xi) = \xi \quad : \forall \xi \in \left(H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)^N$

RemarqueA.3. 9. En notant par $\eta=(\eta_i)$ la normale sortante unitaire à Γ :

a). On définit pour tout $\xi\in\left(H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)^N$ les composantes normale et tangentielle de ξ respectivement par :

(A.3.47) $\xi_\eta=\xi.\eta\in H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et $\xi_\tau=\xi-\xi_\eta\eta\in H_\tau$

où H_τ est le sous-espace fermé dans $\left(H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)^N$ définie par :

(A.3.48) $H_\tau=\left\{\xi\in\left(H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)^N \,/\, \xi_\eta=0 \ \ p.p \ \text{ sur } \Gamma\right\}$

b). On peut prouver de plus que l'application $\xi\mapsto(\xi_\eta,\xi_\tau)$ est un isomorphisme de $\left(H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)^N$ dans

$H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma)\times H_\tau$, il résulte

(A.3.49) $\langle\xi,\zeta\rangle_{H'_\Gamma\times H_\Gamma}=\langle\xi_\eta,\zeta_\eta\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}+\langle\xi_\tau,\zeta_\tau\rangle_{H'_\tau\times H_\tau} \qquad \forall\xi\in H'_\Gamma \quad ,\forall\zeta\in H_\Gamma$

RemarqueA.3.10. Moyennant l'application de trace et l'isomorphisme précèdent , il résulte :

a). Il existe une application linéaire continue surjective

(A.3.50) $\begin{cases}\gamma_\eta:\left(H^s(\Omega)\right)^N\to H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma), \text{telle que}:\\ \gamma_\eta(u)=u_\eta\overset{\text{i.e}}{=}(u\eta).\eta\end{cases}$

b). Il existe une application linéaire et continue $R_\eta: H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma)\to\left(H^s(\Omega)\right)^N$, vérifiant

(A.3.51) $\begin{cases}R_\eta: H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma)\to\left(H^s(\Omega)\right)^N \quad \text{telleque:}\\ \gamma_\eta.R_\eta(\xi)=\xi \ : \ \forall\xi\in H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma)\end{cases}$

R_η ; est un relèvement de γ_η.

ThéorèmeA.3.18. (théorème du Trace sur $\mathcal{H}_1=\left(H^1(\Omega)\right)^{N\times N}$)

Soit $\Omega\subset IR^N$ un ouvert borné Lipchitzien de frontière Γ, alors il existe une application linéaire continue surjective unique :

(A.3.52) $\begin{cases}\overline{\gamma}:H_1\to\left(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)^N \quad \textit{telle que:}\\ \langle\overline{\gamma}\sigma,\xi\rangle_{H'_\Gamma\times H_\Gamma}=\int_\Gamma\sigma\eta.\xi.d\Gamma \ :\forall\xi\in H_\Gamma=\left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)^N,\forall\sigma\in C^1(\overline{\Omega})^{N\times N}\end{cases}$

Avec $\sigma\eta=\left(\sigma_{ij}\eta_j\right)_{i=\overline{1,N}}$

Pour tout $\sigma\in\mathcal{H}_1$, l'image $\overline{\gamma}\sigma\in H'_\Gamma=\left(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)^N$ est élément de H'_Γ vérifiant l'égalité :

(A.3.53) $\langle \bar{\gamma}\sigma, \gamma u \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = \langle \sigma, \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} + \langle Div\sigma, u \rangle_H, \forall u \in H_1$

La formule (A.3.47) dit la formule de *Green* .

RemarqueA.3.11. Il existe une application linéaire et continue : $\bar{R} : \left(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \right)^N \to \mathcal{H}_1$; vérifiant :

(A.3.54) $\bar{\gamma}.\bar{R}(\psi) = \psi \;\; ; \;\; \forall \psi \in \left(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \right)^N$

$\bar{R}$; est un relèvement de $\bar{\gamma}$.

RemarquesA.3.12.

a). Il existe une application linéaire continue surjective :

(A.3.55) $\begin{cases} \bar{\gamma}_\eta : \mathcal{H}_1 \to H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ \sigma \mapsto \bar{\gamma}_\eta \sigma = \sigma_\eta \overset{i.e}{=} (\bar{\gamma}\sigma).\eta \end{cases}$

b). Il existe une application linéaire continue $\bar{R}_\eta : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \to \mathcal{H}_1$, vérifiant

(A.3.56) $\bar{\gamma}_\eta.\bar{R}_\eta(\psi) = \psi : \forall \psi \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$

$\bar{R}_\eta$; est un relèvement de $\bar{\gamma}_\eta$.

c). Rappelons que si $\sigma \in C^1(\overline{\Omega})_s^{N\times N}$, on définit pour tout $\sigma \in \mathcal{H}_1$, les éléments

$$\bar{\gamma}\sigma = \sigma|_\Gamma \eta \overset{i.e}{=} \left(\sum_{j=1}^N \sigma_{ij} \eta_j \Big|_\Gamma \right)_{i=\overline{1,N}} , \;\; \bar{\gamma}_\eta \sigma = \left(\sigma|_\Gamma \eta \right)_\eta \;\; , \;\; \bar{\gamma}_\tau \sigma = \sigma|_\Gamma \eta - \left(\sigma|_\Gamma \eta \right)\eta .$$

Afin de simplifier les notations, on utilisera dans la suite la notation $\sigma\eta = \bar{\gamma}\sigma , \sigma_\eta = \bar{\gamma}_\eta \sigma \;, \sigma_\tau = \bar{\gamma}_\tau \sigma$.

Pour tout $\sigma \in \mathcal{H}_1$ et $u \in H_1$, moyennant (A.1.12) et(A.1.15), on peut alors énoncer la double égalité suivante :

(A.3.57) $\begin{cases} \langle \sigma\eta \;, \gamma u \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = \langle \sigma_\eta \;, u_\eta \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \langle \sigma_\tau \;, u_\tau \rangle_{H'_\tau \times H_\tau} \\ \qquad = \langle \sigma \;, \varepsilon(u) \rangle_{(IL^2(\Omega))^{N\times N}} + \langle Div\, \sigma \;, u \rangle_H \end{cases}$

d). Supposons maintenant que $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 , \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \phi$ est une partition de Γ et $H_1 = H^1(\Omega)^N$, soit $\sigma \in \mathcal{H}_1$. on introduit les définitions suivantes :

(A.3.58) $[\sigma\eta = 0 \text{ sur } \;\Gamma_1] \Leftrightarrow \left[\langle \sigma\eta, u\eta \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = 0 \;, \forall u \in H_1 \;\; \text{tel que} \;\; u = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \right]$

(A.3.59) $[\sigma_\eta = 0 \;\text{ sur } \;\Gamma_1] \Leftrightarrow \langle \sigma\eta, u\eta \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = 0 \;\; ,\forall u \in H_1 \;\; \text{tel que :} \begin{cases} u_\eta = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \\ u_\tau = 0 \text{ sur } \Gamma \end{cases}$

(A.3.60) $\left[\sigma_\eta \leq 0 \text{sur } \Gamma_1\right] \Leftrightarrow \langle \sigma\eta, u\eta \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} \geq 0 \ , \forall u \in H_1$ tel que : $\begin{cases} u_\eta \leq 0 \text{ sur } \Gamma_2 \\ u_\tau = 0 \text{ sur } \Gamma \end{cases}$

(A.3.61) $\left[\sigma_\tau = 0 \text{sur } \Gamma_1\right] \Leftrightarrow \langle \sigma\eta, u\eta \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = 0, \forall u \in H_1$ tel que $\begin{cases} u_\tau = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \\ u_\eta = 0 \text{ sur } \Gamma \end{cases}$

e). On suppose maintenant le cas de contact entre deux corps Ω^1, Ω^2 dans la partie Γ_3, on pose $\Gamma^\ell = \partial\Omega^\ell = \Gamma_3 \cup \Gamma_1^\ell \cup \Gamma_2^\ell$ et $H_1 = H^1(\Omega^1)^N \times H^1(\Omega^2)^N$ soit $\sigma^\ell \in \mathcal{H}_1^\ell = \left(H^1(\Omega^\ell)\right)^{N\times N}$, on introduit la définition suivante :

(A.3.62) $\left[\sigma_\eta^1 = \sigma_\eta^2 \text{ sur } \Gamma_3\right] \Leftrightarrow$

$$\langle \sigma^1\eta^1, u^1\eta^1 \rangle_{H'_{\Gamma^1} \times H_{\Gamma^1}} = \langle \sigma^2\eta^2, u^2\eta^2 \rangle_{H'_{\Gamma^2} \times H_{\Gamma^2}} : \forall u = (u^1, u^2) \in H_1 \text{ tel que} : \begin{cases} u_\eta^\ell = 0 \text{ sur } \Gamma_1^\ell \cup \Gamma_2^\ell \\ u_\tau^\ell = 0 \text{ sur } \Gamma^\ell & \ell = \overline{1,2} \\ [u.\eta] = 0 \text{ sur } \Gamma_3 \end{cases}$$

A.3.9.Rappels sur les espaces interpolés.

ThéorèmeA.3.19. Soit Ω un ouvert borné de classe C^∞, le bord étant Γ soit $s_1 > s_2$,on a

$\left[H^{s_1}(\Gamma), H^{s_2}(\Gamma)\right]_\theta = H^{(1-\theta)s_1 + \theta s_2}(\Gamma)$, avec équivalence des normes.

ThéorèmeA.3.20. (l'inégalité d'interpolation généralement)

Soit X,Y deux espaces de Banach , avec $\overline{Y} = X$ et $Y \hookrightarrow X$, $0 < \theta < 1$, il existe une constante $c = c(X,Y,\theta) > 0$ telle que :

(A.3.63) $\|u\|_{[X,Y]_\theta} \leq c\|u\|_X^{1-\theta}.\|u\|_Y^\theta \ : \ \forall u \in Y$

ThéorèmeA.3.21. (théorème principale d'interpolation)

Soit $\{X, Y\}$, $\{\mathsf{X}, \mathsf{Y}\}$ deux couple espaces de Hilbert , avec $\overline{Y} = X$ et $Y \hookrightarrow X$, aussi $\overline{\mathsf{Y}} = \mathsf{X}$ et $\mathsf{Y} \hookrightarrow \mathsf{X}$, $0 < \theta < 1$, soit $\pi \in \mathrm{L}(X,\mathsf{X}) \cap \mathrm{L}(Y,\mathsf{Y})$ alors $\pi \in \mathrm{L}([X,Y]_\theta, [\mathsf{X},\mathsf{Y}]_\theta)$

De plus, il existe une constante $c = c(\theta) > 0$ telle que :

(A.3.64) $\|\pi\|_{\mathrm{L}([X,Y]_\theta, [X,Y]_\theta)} \leq c\|\pi\|_{\mathrm{L}(X,\mathsf{X})}^{1-\theta}.\|\pi\|_{\mathrm{L}(Y,\mathsf{Y})}^\theta$

Quelques espaces interpolés

(1).L'interpolation entre $IL^p(\Omega)$:

Soit Ω borné $\in C^\infty$, et soit $1 \leq p < r < q \leq +\infty$, avec : $\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{q}$, $0 < \theta < 1$. Alors :

$$\left[IL^p(\Omega), IL^q(\Omega)\right]_\theta = IL^r(\Omega)$$

De plus

(A.3.65) $\|u\|_{IL^r(\Omega)} \le c\|u\|^{\theta}_{IL^p(\Omega)}.\|u\|^{1-\theta}_{IL^q(\Omega)} \qquad \forall u \in IL^p(\Omega) \cap IL^q(\Omega)$

(2). L'interpolation entre $IL^2(\Gamma)$, $H^1(\Gamma)$:

Soit Γ Lipchitzien borné et soit $0<\theta<1$, Alors :

$$\left[IL^2(\Gamma), H^1(\Gamma)\right]_{\theta} = H^{\theta}(\Gamma)$$

De plus

(A.3.66) $\|u\|_{H^{\theta}(\Gamma)} \le c\|u\|^{\theta}_{IL^2(\Gamma)}.\|u\|^{1-\theta}_{H^1(\Gamma)} \qquad \forall u \in H^1(\Gamma)$

(3) L'interpolation entre $H^s(\Gamma)$:

Soit Γ Lipchitzien borné et soit $s_1 < s_2$ $0<\theta<1$ pose : $s=(1-\theta)s_1+\theta s_2$. Alors

$$\left[H^{s_1}(\Gamma), H^{s_2}(\Gamma)\right]_{\theta} = H^{s}(\Gamma)$$

De plus

(A.3.67) $\|u\|_{H^s(\Gamma)} \le c\|u\|^{1-\theta}_{H^{s_1}(\Gamma)}.\|u\|^{\theta}_{H^{s_2}(\Gamma)} \qquad \forall u \in H^{s_2}(\Gamma)$

(4). L'interpolation entre $C^0(\overline{\Omega}), C^1(\overline{\Omega})$: Soit $\Omega \in C^1; 0<\theta<1$. Alors

$$\left[C(\overline{\Omega}), C^1(\overline{\Omega})\right]_{\theta} = C^{0,\theta}(\overline{\Omega}) .$$

De plus :

(A.3.68) $\|u\|_{C^{0.\theta}(\overline{\Omega})} \le c\|u\|^{1-\theta}_{C(\overline{\Omega})}.\|u\|^{\theta}_{C^1(\overline{\Omega})} \quad ; \forall u \in C(\overline{\Omega})$

(5) L'interpolation entre $C^{0,\theta_1}(\overline{\Omega}), C^{0,\theta_2}(\overline{\Omega})$: Soit $\Omega \in C^1$: $0<\theta_1<1$,$0<\theta_2<1$, et soit $0<\theta<1$. On pose $\tilde{\theta} = (1-\theta)\theta_1 + \theta\theta_2$. Alors

$$\left[C^{0,\theta_1}(\overline{\Omega}), C^{0,\theta_2}(\overline{\Omega})\right]_{\theta} = C^{0,\tilde{\theta}}(\overline{\Omega})$$

De plus :

(A.3.69) $\|u\|_{C^{0.\tilde{\theta}}(\overline{\Omega})} \le c\|u\|^{1-\theta}_{C^{\theta_1}(\overline{\Omega})}.\|u\|^{\theta}_{C^{1\theta_2}(\overline{\Omega})} \quad : \quad \forall u \in C^{\theta_1}(\overline{\Omega}) \cap C^{\theta_2}(\overline{\Omega})$

(6) L'interpolation entre $\mathrm{L}\left(H^{s_1}(\Gamma), H^{r_1}(\Lambda)\right)$ et $\mathrm{L}\left(H^{s_2}(\Gamma), H^{r_2}(\Lambda)\right)$:

Soient $\Gamma, \Lambda \in C^1$, $s_i, r_i \ge 0$, $i=\overline{1,2}$ avec: $0<\theta<1$, on pose $s=(1-\theta)s_1+\theta s_2$ et $r=(1-\theta)r_1+\theta r_2$.

Alors, si $\pi \in \mathrm{L}\left(H^{s_1}(\Gamma), H^{r_1}(\Lambda)\right) \cap \mathrm{L}\left(H^{s_2}(\Gamma), H^{r_2}(\Lambda)\right)$. On a :

$$\pi \in \mathrm{L}\left(H^{s}(\Gamma), H^{r}(\Lambda)\right)$$

De plus :

(A.3.70) $\|\pi\|_{\mathrm{L}\left(H^{s}(\Gamma),H^{r}(\Lambda)\right)} \leq c\|\pi\|^{1-\theta}_{\mathrm{L}\left(H^{s_1}(\Gamma),H^{r_1}(\Lambda)\right)} \cdot \|\pi\|^{\theta}_{\mathrm{L}\left(H^{s_2}(\Gamma),H^{r_2}(\Lambda)\right)}$.

Bibliographies

[1] Patrick Hild et Patrick Laborde, *Quadratic finite element methods for unilateral contact problems,* Appl. Num. Maths. 41 (**2002**) 401-421.

[2] Joan R. Ionescu et Quoc-Lan Nguyen, *Dynamic contact problems with slip-dependent friction in viscoelasticity,* Int J. appl. Maths. Comput., Sci., (**2002**), Vol. 12, n° 1, 71-80.

[3] S. Drabla, *Régularité de quelques problèmes aux limites gouvernés par L'opérateur de Lamé dans un domaine polygonal et polyédral,* Thèse de Doctorat D'Etat, U.F.A., Sétif, Algérie, Avril (**2002**).

[4] A.Amassad, M.Shillor et M.Sofonea, *A quasistatic contact problem for an elastic perfectly plastic body with Tresca's friction,* Nonlinear Analysis, 35, 95-109, (**1999**).

[5] P.Hild, *A propos d'approximation par éléments finis optimale pour les problèmes de contact unilatéral,* C.R.Acad. Sci .Paris, Série I 326 (**1998**) 1233-1236.

[6] S.Djabi, M. Sofonia et B. Teniou, *Analysis of some Frictionless Contact Problemes for Elastic Bodies,* Annales Polonici Mathematici IXIX.1 (**1998**), 75 -88.

[7] M.Cocu, *Unilateral contact problems with friction for an elastoviscoplastic material with internal state variable,* Proc .Contact Mechanics Int. Symp .Edt .A.Curnier ,PPUR (**1992**), 207-216.

[8] P.G.Ciarlet, *The finite element method for elliptic problems*, in: P.G.Ciarlet, J.L.Lions (Eds) Handbook of Numerical analysis, Vol. II .part1, North-Holland,Amsterdam, **1991**, P.17-352.

[9] M.Sofonea, *Prolèmes Mathématiques en Elasticité et Viscoplasticité,* Cours de D.E.A. de Mathématiques Appliquées, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand (**1991**).

[10] A.Amassad, M.Sofonea, *Analysis of a quasistatic viscoplastic problem involving Tresca friction law,* Discrete and Continuous Dynamical Systems , 4? 1? P.55-72, (**1988**).

[11] J.L.Lions, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques,* Vol. 6 P.704-761 (**1988**).

[12] N.Kikuchi, J.T Oden, *Contact Problems in Elasticity,* A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods, SIAM, Philadelphia, PA, (**1988**).

[13] H.Brezis, *Analyse Fonctionnelle – Théorie et Applications*, Masson, Paris (**1987**).

[14] N. Cristescu, I.Suliciu, *Viscoplasticity*, Martinus Nirjhoff, Editura Tehnica, Bucharest (**1982**).

[15] N.Kikuchi, Y.J.Song, *Penalty/finite-element approximations of a class of unilateral Problems in linear elasticity,* Quart.Appl.Math.39 (**1981**)1-22.

[16] I.Hlavacek, J.Necas, M*athematical theory of elastic and elastoplastic bodies:* an Introduction, Elswier, Amsterdam (**1981**).

[17] N. Kikuchi, J.T.Oden, *Theory of variational inequalities with applications to problems flow through porous media*, International Journal of Engineering Sciences, 18 (**1980**), 1173-1184.

[18] B.Beauzamy,Espces d'interpolation réels: topologie et géométrie, Springer Verlag , Berlin (**1978**).

[19] H.Triebel, *Interpolation Theory, function Spaces, Differential Operators*, North-Holland, Amsterdam (**1978**).

[20] V. Barbu , *Nonlinear Semi-groups and Differential Equations in Banach Spaces* , Editura Academiei, Bucharest-Noordhoff, Leyden (**1976**).

[21] J.Bergh, J.Löfström, *Interpolation Spaces*. An Introduction, Springer Verlag, Berlin (**1976**).

[22] R.S.Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York (**1975**).

[23] W.Rudin, *Functional Analysis*, Mc Graw-Hill, New York (**1973**).

[24] G.Fichera, *Boundary value problem unilateral constraints*, Encycl . of Physics, Editeur: S.Flugge, Springer-Verlag, Berlin, VI a/2 (**1972**).

[25] J.L.Lions, J.Peetre, *Sur une classe d'espaces d'interpolation*, Publ. I.H.E.S.19 (**1964**), P.5-68.

[26] J.L.Lions, *Théoremes de traces et d'interpolation*, (I), ...,(V); (I),(II) Ann.Sc.Norm. Sup .Pisa 13(**1959**), 389-403; 14(**1960**), 317-331; (III) J.Maths. Pures Appl. 42 (**1963**) , 196-203 ; (IV) Math. Annalen 151 (**1963**), 42-56; (V) Anais de acad. Brasileira de Ciencias 35(**1963**),1-110.

ملخص: تحتوي هذه المذكرة على الدراسة النظرية والعددية لحركة جسمين مرنين يلتقيان بدون احتكاك في جزء من سطحي الجسمين . تنقسم هذه الدراسة إلى جزأين, في الجزء الأول من المذكرة تمت الدراسة النظرية حيث نعتبر الجسمان مرنان مزودان بقانون سلوك غير خطي , هذا الجزء مقسم إلى فصلين فالفصل الأول نعتبر الشكل الرياضي لهذه الدراسة يرمز لها بالرمز P ثم باستعمال شكل قرين و متراجحة كورن فنحصل على شكلين متغايرين:P_1 متعلق بالحركة فقط و P_2 متعلق بالكونترانت فقط .ثم ندرس مسالة الوجود والوحدانية والعلاقة بين P_1،P_2 و P؛ وأما الفصل الثاني فنعتبر قانون سلوك خطي , باستعمال شكل قرين فنحصل على شكل مغاير مختلط للمسالة P متعلق بحقل الحركة ودالة المركبة الناظمة للكونترانت يرمز له بالرمز P_m . أما الجزء الثاني من المذكرة نخص الدراسة العددية مع كون الجسمان مستويان , فهذا الجزء مقسم إلى فصلين فالفصل الأول نستعمل طريقة العناصر المنتهية من اجل ذالك نحتاج لتقنيات استقطاب لاغرانج والإسقاط أما الفصل الثاني من هذا الجزء فخصص لتحليل مقادير الأخطاء .

كلمات مفتاحية : حركة, كونترانت, وجود, وحدانية , مرونة , قانون السلوك , القوة, قطع ناقص , الاحتكاك , الإسقاط , الاستقطاب .

Résumé: Cette mémoire contient une étude théoriquement et numériquement du contact sans frottement enter deux corps élastiques. cette étude se compose en deux parties . La première partie l'étude théorique, sois considère que les deux corps élastique muni loi de comportement nom linéaire, cette partie se compose en deux chapitres. Le premier chapitre considère la forme mathématique cet problème noté par P ainsi, on utilise la forme de Green et l'inégalité de Korn on obtient à deux forme variationnelle, P_1 qui dépend uniquement de déplacement et P_2 qui dépend uniquement de contrainte, aussi on étudie l'existence et l'unicité avec le lient entre P_1, P_2 et P . Le second chapitre on considère la loi de comportement linéaire, par l'utilisation de la forme de Green on obtient aussi une forme variationnelle mixte dépend de champs de déplacements et fonction de la composante normale de contrainte désigne par P_m . La deuxième partie étudie numériquement le problème considéré a condition que les deux corps surfacique , cette partie a divisé à deux chapitre le premier chapitre on utilise la méthode des éléments fini, pour cela nous avons besoin d'une technique d'interpolation de Lagrange et la projection . Le seconde chapitre de cette partie, on s'intéresse à l'analyse des erreurs .

Mots clefs: déplacement, contrainte, existence, unicité, élastique, loi de comportement, force, type elliptique, frottement, projection, interpolation.

Abstract: This memory contains a survey theoretically and numerically of contact without friction to splice two elastic , this survey is composed in two parts. The first part the theoretical survey, which consider that the two elastic bodies provided law of behavior non linear , this part is composed in two chapters The first chapter considers the mathematical shape this problem noted by P so, one uses the Green shape and the inequality of Korn one also gets to two shapes variationnelle P_1 ,that depends solely on the displacement and P_2 that depend solely on constraint, one studies the existence and the uniqueness with the tie between P, P_1 and P_2 . The second chapter, considers the linear behavior law, by use of the forms Green one gets a shape mixed variationnelle depends of fields of displacement and function the normal component of constraint designated by P_m . The second part, we study the problem numerically provided that the two bodies surfacique, this part divided to two chapters the first chapter the method of the elements finished for it we need a technique of the interpolation of the barn the projection. The second chapter of this part, we target to the analysis of the mistakes .

Words keys: displacement, constraint, existence, uniqueness, elastic, law of behavior, strength, elliptic types, friction, projection, interpolation.