REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

UNIVERSITÉ KASDI MERBAH - OUARGLA

N°d' Ordre :
N°de Série :

Faculté des Sciences et de la Technologie et des Science de la Matière

Département des mathématique et informatique

Mémoire

Présenté pour l'obtention du diplôme de

MAGISTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse (EDO-EDP)

Préparé par : Tellab Brahim

THÈME

Etude de quelques équations de chaleur avec mémoire

Soutenu publiquement le : …/…/2011

Devant le jury composé de :

Med. Tayeb Meftah	Prof. Université KASDI MERBAH – Ouargla	**Président**
Med. Saïd Saïd	M.C(A). Université KASDI MERBAH – Ouargla	**Examinateur**
Djamal Ahmed Chacha	Prof. Université KASDI MERBAH – Ouargla	**Examinateur**
Salim Messaoudi	Prof. KFUPM – Dhahran, Arabie Seoudite,	**Rapporteur**

Remerciements

Je remercie Dieu le tout puissant qui m'a permis d'achever ce modeste travail.

Je tiens à remercier infiniment le professeur **SALIM MESSAOUDI**, qui a encadré cette thèse avec beaucoup de patience et de gentillesse. Il a su motiver chaque étape de mon travail par des remarques pertinentes et a su me faire progresser dans mes recherches. Je le remercie très sincèrement pour sa disponibilité (même à distance).

Je remercie tous les membres du jury d'avoir participé au jury de soutenance et pour leur remarques très pertinentes.

Je remercie tous mes amis et mes collègues, qui ont été très importants pour moi pendant ces années de travail.

Je profite aussi de cette occasion pour remercier tous les enseignents du département de mathématique et informatique de **L'Université Kasdi Merbah Ouargla**.

Dédicas

Je dédis le fruit de mon modeste travail à ma famille, qui était toujours à mes cotés et qui m'a beaucoup encouragé : mes parents, ma femme, mes enfants (Ines, Hind, Aya, Kais, Siradj eddine), mes frères et mes soeurs sans oublier tous mes amis.

Notations

Ω : ouvert de $\mathbb{R}^n$
$\partial\Omega$: frontière topologique de Ω
$x = (x_1, ...x_n)$: point générique de $\mathbb{R}^n$
$dx = dx_1 dx_2.....dx_n$: mesure de Lebesgue sur Ω
$d\sigma$: mesure de surface sur $\partial\Omega$
$\sum$: $(0, T) \times \partial\Omega$
η : normale unitaire extérieure à Ω
∇u : gradient de u
Δu : laplacien de u
$D(\Omega)$, $D(Q)$: espace des fonctions infiniment différentiables et à support compact dans Ω, Q,....
$C^k(\Omega)$, $C^k(Q)$: espace des fonctions k-fois contiûment différentible dans Ω, Q
$C_0(\Omega)$, $C_0(Q)$: espace des fonctions continues nulles au bord dans Ω, Q
$L^p(\Omega)$: espace des fonctions pe puissance p-ème intégrables sur Ω pour la mesure dx ; $\quad \| f \|_p = (\int_\Omega \mid f(x) \mid^p dx)^{\frac{1}{p}}$
$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega),\ Du \in (L^p)^n\}; \quad \| u \|_{1,p} = (\| u \|_p^p + \| \nabla u \|_p^p)^{\frac{1}{p}}$
$W_0^{1,p}(\Omega)$:adhérence de $D(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$
$W^{-1,p'}(\Omega)$: espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$
$W^{\frac{-1}{p'},p}(\partial\Omega)$: espace des traces des fonctions de $W^{1,p}(\Omega)$
$W^{\frac{-1}{p'},p'}(\partial\Omega)$: espace duale de $W^{\frac{1}{p'},p}(\Omega)$
Si X est un espace de Banach
$L^p(0, T, X) = \{f : (0, T) \longrightarrow X\ \ mesurable;\ \int_0^T \| f(t) \|_X^p dt < \infty\}$
$L^\infty(0, T, X) = \{f : (0, T) \longrightarrow X\ \ mesurable;\ \exists C > 0, \| f(t) \|_X \leq Cp.p.t\}$
$C^k([0, T]; X)$: espace des fonctions k-fois contiûment différentiables de $[0, T] \longrightarrow X$
$D([0, T]; X)$: espace des fonctions contiûment différentiables à support compact dans $[0, T]$

Table des matières

Chapitre 1

Introduction générale

L'équation de la chaleur en une dimension d'espace est donnée par l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0,$$

où $c > 0$ est une constante donnée, u est une fonction inconnue réelle de deux variables x et t. Cette fonction $u = u(x,t)$ représente la température dans un conducteur d'une dimension. La valeur de $u(x,t)$ dépend du temps $t \geq 0$ et de la position de x. L'équation de la chaleur est l'exemple le plus simple d'une équation parabolique : en effet, si on applique l'opérateur de la chaleur aux fonctions

$$u : (x,t) \rightarrow exp(\lambda t + \mu x)$$

on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = (\lambda - c\mu^2)exp(\lambda t + \mu x) = 0,$$

c'est à dire $\lambda = c\mu^2$ qui représente une parabole. En général, les équations aux dérivées partielles sont classées en trois catégories : elliptique, parabolique et hyperbolique. En général, la valeur de $u(x,t)$ en $t = 0$ est donnée. On veut donc résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1.1}$$

Physiquement, considérons une barre de longueur illimitée. Pour décrire l'équation de la chaleur, supposons que le conducteur a une petite section d'aire Δs. La quantité de chaleur à travers la section au point x est approximativement proportionnelle au gradient $\frac{\partial u}{\partial x}$ en x. La quantité de chaleur dans la direction des x croissants pendant un court temps Δt est

$$-k\frac{\partial u}{\partial x}\Delta s \Delta t,$$

où k est une constante strictement positive dépendant du matériau. Notons que la positivité de k est en accord avec le fait que la chaleur circule du chaud vers le froid.

Evidemment, supposons que u et $\frac{\partial u}{\partial x}$ ne changent pas rapidement, $k\frac{\partial u}{\partial x}$ est la quantité de chaleur par seconde et par unité d'espace circulant le long des x dans la direction négative.
Cherchons comment varie au cours du temps la température u aux différents points de la barre. Ecrivons l'équation des échanges de chaleur dans l'intervalle $[a, b]$. quantité totale de chaleur sortant de $[a, b]$ au temps Δt est approximativement égale à :

$$-k[(\frac{\partial u}{\partial x})(b,t) - \frac{\partial u}{\partial x}(a,t)]\Delta s \Delta t. \tag{1.2}$$

D'un autre coté, supposons que $(b-a)$ est petit et que $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$ est presque constant por $x \in [a, b]$, l'augmentation de température étant $\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t$, la même quantité totale de chaleur sortante est approximativement égale à :

$$-k_1(b-a)\Delta s \frac{\partial u}{\partial t}\Delta t, \tag{1.3}$$

où k_1 est une constante strictement positive et qui exprime la chaleur spécifique par unité de volume. En générale, la quantité spécifique c_g est donnée par unité de masse, donc si le matériau a la densité ρ alors $k_1 = \rho c_g$.
On écrit ensuite que les deux termes (2) et (3) sont égaux, on divise par $\Delta s \Delta t(b-a)$ et on fait tendre $(b-a)$ vers zd'où :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{k_1}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Travaux liés à nos problèmes

Considérons le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + \int_0^t g(t-s)\Delta u(x,s)ds = \mid u \mid^{p-2} u, & x \in \Omega, t > 0 \\ u(x,t) = 0, \qquad x \in \partial\Omega, t \geq 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in \Omega, \end{cases} \tag{1.4}$$

où $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction décroissante de classe C^1, $p > 2$, et Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ $(n >\geq 1)$, de bord régulier $\partial\Omega$.
Cette équation découle d'une varieté de modèles mathématiques en génie et en sciences physiques. Par exemple, dans l'étude de la conduction de chaleur dans les matériaux à mémoire, la loi classique de Fourier du flux de chaleur est remplacée par la formule suivante :

$$q = -d\nabla u - \int_{-\infty}^{t} \nabla[k(x,t)u(x,\tau)], \tag{1.5}$$

où u est la température, d est le coéfficient de diffusion et le terme intégrale représente l'effet mémoire dans le matériau. L'étude de ce type d'équations a attiré une attention considérable [13], [29], [30], [33]. D'un point de vue mathématique, on peut s'attendre au terme intégrale à être dominé par le premier terme de l'équation. Par conséquent, la théorie des équations paraboliques s'applique à ce type d'équations.

En l'absence du terme mémoire, le problème (1.4) a été étudié par divers auteurs, et plusieurs résultats concernant l'existence globale et non globale ont été établis. Par exemple au début des années 1970, Levine [16] a introduit la méthode de concavité et a montré que les solutions à énergie négative s'explosent en temps fini. Plus tard, cette méthode a été améliorée par Kalantarov et Ladyzhenskaya [15] pour tenir compte des situations plus générales.
Ball [7] a également étudié (1.4) avec $f(u, \nabla u)$ au lieu de $\mid u \mid^{p-2} u$ et a établi résultat d'existence global dans un domaine borné. Ce resultat avait été étendu à des domaines non bornés par Alfonsi et Weissler [3].
Pour le cas quasi-linéaire, Juning [34] a étudié

$$\begin{cases} u_t - div(\mid \nabla u \mid^{m-2} \nabla u) = f(u), & x \in \Omega, \ t > 0, \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega, t \geq 0 \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{1.6}$$

où $m \geq 2$, et a établi un résultat d'existence globale. il a également démontré un résultat d'existence non globale sous la condition

$$\frac{1}{m}\int_\Omega \mid \nabla u_0(x) \mid^m dx - \int_\Omega F(u_0(x))dx \leq -\frac{4(m-1)}{mT(m-2)^2}\int_\Omega u_0^2(x)dx, \tag{1.7}$$

où $F(u) = \int_0^u f(s)ds$. Plus précisément, il a montré que s'il existe $T > 0$, pour lequel la formule (1.5) est verifiée, alors les solutions s'explosent en temps inferieur à T. Ce type de résultats a été largement généralisé et amélioré par Levine, Park, et Serrin [17], où les auteurs ont démontré certains théorèmes d'existence globale et non globale. Leur résultat, lorsqu'il est appliqué au problème (1.6), exige que

$$\frac{1}{m}\int_\Omega \mid \nabla u_0(x) \mid^m dx - \int_\Omega F(u_0(x))dx < 0. \tag{1.8}$$

Nous constatons que l'inégalité (1.8) implique (1.7). Dans une note, Messaoudi [21] a étendu le résultat d'explosion de la solution avec une donnée initiale satisfaisant à :

$$\frac{1}{m}\int_\Omega \mid \nabla u_0(x) \mid^m dx - \int_\Omega F(u_0(x))dx < 0. \tag{1.9}$$

Pucci et Serrin [31] ont discuté le système parabolique quasi-linéaire suivant :

$$A(t) \mid u_t \mid^{m-2} u_t = \Delta u - f(x,u),$$

pour $m > 1$ et f satisfait $(f(x,u), u) \geq 0$, et ont établit l'existence globale des solutions.
Berrimi et Messaoudi [4] ont discuté un problème similaire de la forme :

$$\begin{cases} A(t) \mid u_t \mid^{m-2} u_t - \Delta u = \mid u \mid^{p-2} u, & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega, t \geq 0 \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{1.10}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.

Ce résultat est ettendu par les mêmes auteurs [5] dans le cas où un terme viscélastique intervient et ils ont considéré le système suivant :

$$\begin{cases} A(t) \mid u_t \mid^{m-2} u_t - \Delta u + \int_0^t g(t-s)\Delta u(x,s)ds = \mid u \mid^{p-2} u, & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, t \geq 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \end{cases} \tag{1.11}$$

où g est une fonction continûment différentiable qui satisfait aux conditions suivantes :
(H_1) $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction bornée de C^1 telle que :

$$g(0) > 0, \qquad 1 - \int_0^{+\infty} g(s)ds = l > 0.$$

(H_2) il existe une constante positive ξ telle que :

$$g'(t) \leq -\xi g(t), \qquad t \geq 0.$$

Ils ont montré que l'énergie des solutions du problème (1.11) décroit exponentiellement si $m = 2$ et décroit polynomialement si $m > 2$.
Ce mémoire, qui est composé de cinq chapitres, présente des résultats de décroissance des solutions de quelques problèmes paraboliques linéaires et quasilinéaires.Nous allons présenter ici brièvement le contenu de chacun d'eux.
LE CHAPITRE 1 est consacré à l'historique et la citation de quelques travaux liés à nos problèmes.
LE CHAPITRE 2 est entièrement consacré à l'exposé des définitions et résultats nécessaires à la suite de ce travail. Nous rappelons tout d'abord quelques résultats de base sur les espaces de Sobolev et quelques résultas principaux. par exemple : les inégalités de Young, Poincaré, Formule de Green.....etc. Ces derniers résultats sont utilisés en particulier dans les calculs des chapitres 3, 4 et 5
LE CHAPITRE 3 est consacré pour établir des résultats de décroissance des solutions du système linéaire homogène suivant :

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + \int_0^t g(t-s)\Delta u(x,s)ds = 0, & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, t \geq 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \end{cases} \tag{1.12}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ $(n > 1)$ de frontière lipschitizienne $\partial\Omega$.
g est une fonction continûment différentiable qui satisfait aux conditions :
(G_1) $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction bornée de C^1 telle que :

$$g(0) > 0, \qquad 1 - \int_0^{+\infty} g(s)ds = l > 0$$

(G_2) il existe deux constantes positives ξ et p telles que :

$$g'(t) \leq -\xi g^p(t), \qquad t \geq 0, \quad 1 \leq p < \frac{3}{2}$$

LE CHAPITRE 4 est consacré pour obtenir un résultat de décroissance des solutions du système (1.4).
où g est une fonction continûment différentiable qui satisfait aux conditions (G_1) et
(G_3) : il existe une fonction ξ continûment différentiable satisfaisant à :

$$g'(t) \leq -\xi(t)g(t), \quad t \geq 0$$

où

$$\xi(t) > 0, \ \xi'(t) \leq 0, \ \forall t > 0 \ et \ \int_0^{+\infty} \xi(t)dt = +\infty.$$

LE CHAPITRE 5 est consacré à la discussion de la décroissance des solutions du système quasi-linéaire homogène suivant :

$$\begin{cases} A(t) \mid u_t \mid^{m-2} u_t - \Delta u + \int_0^t g(t-s)\Delta u(x,s)ds = 0, & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, t \geq 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \end{cases} \tag{1.13}$$

où g est une fonction qui vérifie (G_1) et (G_3).

Chapitre 2

Rappels et notations générales

L'objectif de ce chapitre est de rappeler l'essentiel des notions et résultat utilisés tout au long de ce travail. En premier lieu, nous rappelons quelques définitions et résultats sur les espaces de Sobolev et les espaces $L^p(0,T,X)$ puis la citation de quelques théorèmes importants dans la discussion des problèmes à étudier et en fin quelques notations utilisées tout au long de ce mémoire.

2.1 Espaces fonctionnels

Les espaces de Sobolev sont un outil omniprésent dans l'étude des équations aux dérivées partielles. Leur compréhention est donc une étape nécessaire avant d'aborder les équations en question. Nous reprenons dans cette section certains énoncés de H. Brezis [9] sur le sujet. Pour une présentation plus complète des espaces de Sobolev, on pourra consulter $[1-2]$. Par la suite, Ω est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$.

L'espace $L^1(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions mesurables (pour la tribu de Borel) intégrables (pour la mesure de Lebesgue dx) sur Ω. On note :

$$\| f \|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega | f(x) | \, dx$$

On définit ensuite pour tout $1 \leq p < \infty$ l'espace :

$$L^p(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R}, \ f mesurable \ \ et \ \ | f |^p \in L^1(\Omega) \}$$

que l'on munit de la norme :

$$\| f \|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega | f(x) |^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Lorseque $p = \infty$, on a la définition suivante :

$$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R}, \ f \ mesurable \ \ et \ \exists C \in \mathbb{R}_+, \ | f(x) | \leq C \ p.p \}$$

dont la norme est :

$$\| f \|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \{ C, \ | f(x) | \leq C \ p.p \}$$

Pour tout $1 \leq p < \infty$, on note p' le conjugué de p, c'est à dire le réel p' tel que :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

2.1.1 Espace $H^1(\Omega)$

definition 2.1.1

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est défini par :

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega),\ tel\ que, \forall i \in \{1, 2, ..., n\}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)\}$$

où $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ est la dérivée partielle faible de v au sens des distributions.
Muni du produit scalaire :

$$< u, v >= \int_\Omega (u(x)v(x) + \nabla u(x).\nabla v(x))dx \tag{2.1}$$

et de la norme :

$$\| u \|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega (| u(x) |^2 + | \nabla u(x) |^2)dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

2.1.2 Espace $H_0^1(\Omega)$

Définissons maintenant un autre espace de Sobolev qui est un sous-espace de $H^1(\Omega)$ et qui nous sera très utile pour les problèmes avec conditions aux limites de Dirichlet.

definition 2.1.2

Soit $C_c^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact dans Ω. L'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ est défini comme l'adhérence de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.
On verra un peu plus loin que $H_0^1(\Omega)$ est en fait le sous-espace de $H^1(\Omega)$ constitué des fonctions de trace nulle sur le bord $\partial\Omega$.
Muni du produit scalaire (2.1) l'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

2.1.3 Inégalité de Poincaré

Théorème 2.1.1

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ borné dans au moins une direction de l'espace. Il existe une constante $C > 0$ (dépend seulement de Ω) telle que, pour toute fonction $v \in H_0^1(\Omega)$:

$$\| v \|_{L^2(\Omega)} \leq C \| \nabla v \|_{L^2(\Omega)}$$

Preuve : Pour la démonstration, il suffit d'utiliser le théorème (1.2.5 *page* 18)[32].

□

corollaire 2.1.1

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ borné dans au moins une direction de l'espace. Alors la semi-norme :

$$\mid v \mid_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega \mid \nabla v(x) \mid^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

est une norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalente à la norme usuelle induite par celle de $H^1(\Omega)$.
Preuve : Pour la démonstration, il suffit d'utiliser le corollaire (4.3.12 *page* 91)[2].

□

Théorème 2.1.2 *(Théorème de la trace)*

Soit Ω un ouvert borné régulier de classe C^1, ou bien $\Omega = \mathbb{R}_+^n$ on définit l'application trace γ_0 par :

$$H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \longrightarrow L^2(\partial\Omega) \cap C(\overline{\partial\Omega})$$
$$v \longrightarrow \gamma_0(v) = v|_{\partial\Omega}$$

Cette application γ_0 se prolonge par continuité en une application linéaire continue telle que, pour toute fonction $v \in H^1(\Omega)$, on a :

$$\parallel v \parallel_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \parallel v \parallel_{H^1(\Omega)}$$

Preuve : Pour la démonstration, il suffit d'utiliser le théorème (4.3.14 *page* 92)[2].

□

Remarque 2.1.1

Grâce au théorème de la trace on peut parler de la valeur d'une fonction de $H^1(\Omega)$ sur le bord $\partial\Omega$). Ce résultat est remarquable car il n'est pas vrais pour toute fonction de $L^2(\Omega)$.

Théorème 2.1.3

Soit Ω un ouvert borné régulier de classe C^1. Si u et v sont des fonctions de $H^1(\Omega)$, alors elles vérifient :

$$\int_\Omega u(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) dx = - \int_\Omega v(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) dx + \int_{\partial\Omega} u(x) v(x) \eta_i ds$$

où $\eta = (\eta_i)_{1 \leq i \leq n}$ est la normale unité extérieure à $\partial\Omega$
Preuve : Pour la démonstration, il suffit d'utiliser le théorème (1.4.2 *page* 27)[32].

□

2.1.4 Espace $H^m(\Omega)$

definition 2.1.3

Pour un entier $m \geq 0$, l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ est défini par :

$$H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \ \ tel \ \ que \ \ D^\alpha v \in L^2(\Omega), \ \ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \ \ \mid \alpha \mid \leq m\}$$

où la dérivée partielle $D^\alpha v$ est à prendre au sens faible :

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha 1} \partial x_2^{\alpha 2} .... \partial x_n^{\alpha n}}, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n, \quad \mid \alpha \mid = \alpha_1 + \alpha_2 + ...\alpha_n.$$

Muni du produit scalaire :

$$< u, v >= \int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx$$

et de la norme :

$$\| u \|_{H^m(\Omega)} = \sqrt{< u, v >}$$

l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

2.1.5 Les espace $L^p(0, T, X)$

Dans cette section, on présente brièvement quelques résultats utiles sur les espaces de fonctions à valeurs dans un espace de Banach. Ici et dans toute la suite X désigne un espace de Banach et $T > 0$. On définit les espaces suivants :

$$C([0, T]; X) = \{u : [0, T] \longrightarrow X \ \ continue\},$$

$$L^p(0, T, X) = \{u : (0, T) \longrightarrow X \ \ mesurable; \ \ \int_0^T \| u(t) \|_X \, dt < \infty\}, \quad 1 \leq p < \infty$$

muni de la norme :

$$\| u \|_{L^p(0,T,X)} = \left(\int_0^T \| u(t) \|_X^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

et

$$L^\infty(0, T, X) = \{u : (0, T) \longrightarrow X \ \ mesurable; \ \ \exists C > 0, \ \ \| u(t) \|_X < C \ \ p.p.t\}$$

muni de la norme :

$$\| u \|_{L^\infty(0,T,X)} = \inf\{C > 0, \| u(t) \|_X < C \ \ p.p.t\}$$

Remarque 2.1.2

Pour tout $1 \leq p < \infty$, $L^p(0, T, X)$ est un espace de Banach et $C([0, T]; X)$ est dense dans $L^p(0, T, X)$.

2.1.6 Inégalité de Hölder

Théorème 2.1.4

Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$ avec $1 \leq p < \infty$, alors $fg \in L^1(\Omega)$ et on a :

$$\| fg \|_{L^1(\Omega)} \leq \| f \|_{L^p(\Omega)} \| g \|_{L^{p'}(\Omega)}$$

lorsque $p = p' = 2$, on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwartz.

Preuve : Pour la démonstration, il suffit d'utiliser le théorème (4.6 *page* 56)[9].

□

2.1.7 Inégalité d'interpolation

Si $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, alors $f :\in L^r(\Omega)$, quel que soit $r \in [p, q]$ et

$$\| f \|_{L^r(\Omega)} \leq \| f \|^{\alpha}_{L^p(\Omega)} \| f \|^{1-\alpha}_{L^q(\Omega)}$$

avec

$$\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q} \;\; pour \;\; un \;\; certain \;\; 0 \leq \alpha \leq 1$$

2.1.8 Inégalité de Young

Théorème 2.1.5

Pour tous réels positifs a et b et tous réels strictement positifs p et q tels que, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $1 < p < \infty$, on a :

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Preuve : La fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x^p}{p} - x$$

atteint son minimum au point $x = 1$ en effet :

$$y' = x^{p-1} - 1 \;\; et \;\; y'' = (p-1)x^{p-2} > 0$$

d'où

$$f(ab^{1-q}) \geq f(1)$$

c'est-à-dire

$$\frac{\left(ab^{1-q}\right)^p}{p} - ab^{1-q} \geq \frac{1}{p} - 1 = -\frac{1}{q}$$

donc :

$$\frac{a^p}{p} b^{(1-q)p} - ab^{1-q} + \frac{1}{q} \geq 0$$

En divisant les deux membres par $b^{(1-q)p}$ on obtient :

$$\frac{a^p}{p} - ab^{(1-q)-p+pq} + \frac{b^q}{q} \geq 0$$

c'est-à-dire que :

$$\frac{a^p}{p} - ab + \frac{b^q}{q} \geq 0$$

d'où :

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

□

Remarque 2.1.3

Un cas simple de l'inégalité de Young est l'inégalité pour $p = q = 2$:

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

qui donne également l'inégalité de Young pour tout $\delta > 0$:

$$ab \leq \delta a^2 + \frac{1}{4\delta} b^2$$

Remarque 2.1.4

L'inégalité de Young peut s'écrire parfois sous la forme :

$$ab \leq \delta a^p + C(\delta) b^q, \quad C(\delta) = \delta^{-\frac{1}{p-1}}$$

voir [9] (page 56)

2.1.9 Fonctions convexes

definition 2.1.4

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, f est convexe si et seulement si, pour tout $(x, y) \in I^2$ et tout $\lambda \in [0, 1]$,

$$f[(1-\lambda)x + \lambda y] \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

proposition 1
Une fonction f continue sur un intervalle I est convexe si et seulement si quelque soient les éléments a et b de I ême

$$f(\frac{a+b}{2}) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Preuve : On va utiliser une démonstration par l'absurde.
Soit f une fonction continue non convexe sur I. On peut alors trouver un intervalle $[a, b]$ inclus dans I tel qu'il existe dans cet intervalle un point c avec $(c, f(c))$ strictement au-dessus de la corde qui joint $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. Quitte à soustraire à f la fonction affine qui prend les mêmes valeurs qu'elle en a et en b, on peut supposer $f(a) = f(b) = 0$, l'information sur c se réduiseant alors à $f(c) > 0$. Soit A le maximum atteint par la fonction continue sur le compact $[a, b]$. Ce maximum est donc strictement positif. Soit maintenant m le plus petit élément de $[a, b]$ en lequel f prend la valeur A.

Pour $\varepsilon > 0$ assez petit pour qu'on reste dons $[a,b]$, posons $x_1 = m - \varepsilon$ et $x_2 = m + \varepsilon$, alors $f(x_1) < f(m)$ et $f(x_2) \leq f(m)$, ce qui veut dire que :

$$f(x_1) < f(\frac{x_1+x_2}{2}) \quad et \quad f(x_2) \leq f(\frac{x_1+x_2}{2})$$

d'où

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} < f(\frac{x_1+x_2}{2})$$

donc l'inégalité de la proposition n'est pas vérifiée pour ces valeurs de x_1 et x_2.

$\square$

2.1.10 Inégalité de convexité

Lemme 2.1.1

Soient a et b deux réels positifs. Pour tout réel $p \geq 1$ on a :

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$$

Preuve : Soit $p \geq 1$, la fonction :

$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

$$x \longmapsto x^p$$

est convexe, ce qui implique notamment que pour tout a, $b \geq 0$

$$f(\frac{a+b}{2}) \leq \frac{1}{2}(f(a)+f(b))$$

c'est-à-dire que :

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^p \leq \frac{1}{2}(a^p + b^p)$$

autrement dit :

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$$

$\square$

Chapitre 3

Etude de la décroissance des solutions d'un problème parabolique linéaire(1)

3.1 Préliminaires

Ce chapitre est consacré à l'étude du problème parabolique linéaire homogène à terme viscoélastique suivant :

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + \int_0^t g(t-s)\Delta u(x,s)ds = 0, & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ $n \geq 1$ de frontière lipschitizienne $\partial\Omega$, g est une fonction continûment différentiable qui satisfait aux conditions suivantes :
(G_1) $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction décroissante de classe C^1 telle que :

$$g(0) > 0, \quad 1 - \int_0^{+\infty} g(s)ds = l > 0$$

(G_2) il existe deux constantes positives ξ et p telles que :

$$g'(t) \leq -\xi g^p(t), \quad t \geq 0, \quad 1 \leq p < \frac{3}{2}$$

Remarque 3.1.1

La condition $p < \frac{3}{2}$ implique que :

$$\int_0^{+\infty} g^{2-p}(s)ds < +\infty$$

Preuve : D'après la condition (G_2) ona :

$$g'(t) \leq -\xi g^p(t)$$

c'est-à-dire que :

$$g^p(t) \leq -\frac{1}{\xi} g'(t)$$

alors

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} g^{2-p}(s)ds &= \int_0^{+\infty} g^{2-2p}(s)g^p(s)ds \\ &\leq -\frac{1}{\xi}\int_0^{+\infty} g^{2-2p}(s)g'(s)ds \\ &\leq -\frac{1}{\xi}.\frac{1}{3-2p}\Big[g^{3-2p}(+\infty) - g^{3-2p}(0)\Big] \\ &\leq \frac{1}{(3-2p)\xi}\Big[g^{3-2p}(0) - g^{3-2p}(+\infty)\Big] \\ &\leq \frac{1}{(3-2p)\xi} g^{3-2p}(0) < +\infty \end{aligned} \tag{3.2}$$

puisque $p < \frac{3}{2}$.

Proposition

Soit $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ donné et g satisfait (G_1). Alors le problème (3.1) admet une solution globale

$$u \in C\Big([0,+\infty); H_0^1(\Omega)\Big), \quad u_t \in C\Big([0,+\infty); L^2(\Omega)\Big).$$

De plus si $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, la solution de (3.1) satisfait

$$u \in C\Big([0,+\infty); H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\Big), \cap C^1\Big([0,+\infty); H_0^1(\Omega)\Big).$$

On définit l'énergie des solutions comme suit :

$$E(t) = \frac{1}{2}(go\nabla u)(t) + \frac{1}{2}\left(1 - \int_0^t g(s)ds\right) \| \nabla u(t) \|_2^2, \tag{3.3}$$

où

$$(gov)(t) = \int_0^t g(t-s) \| v(t) - v(s) \|_2^2 \, ds$$

□

3.2 Décroissance des solutions

Théorème 3.2.1

Si u est solution de (3.1) alors :

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\left(\frac{1}{2}g(t) \parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 - \frac{1}{2}(g'o\nabla u)(t) + \int_\Omega \mid u_t \mid^2 dx\right) \leq 0 \tag{3.4}$$

Preuve : En multipliant l'équation (3.1) par u_t et on intègre sur Ω on obtient :

$$\int_\Omega u_t u_t dx - \int_\Omega u_t \Delta u dx + \int_\Omega u_t \int_0^t g(t-s)\Delta u(x,s) ds dx = 0. \tag{3.5}$$

Calculons :

$$\int_\Omega u_t \Delta u dx$$

D'après la formule de Green on a :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u_t \Delta u dx &= -\int_\Omega \nabla u_t . \nabla u dx + \int_{\partial\Omega} u_t . \frac{\partial u}{\partial \eta} ds \\
&= -\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}(\nabla u).(\nabla u) dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t} \mid \nabla u \mid^2 dx \\
&= -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \mid \nabla u \mid^2 dx \\
&= -\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel \nabla u(t) \parallel_2^2
\end{aligned} \tag{3.6}$$

calculons maintenant :

$$\int_\Omega u_t \int_0^t g(t-s)\Delta u(x,s) ds dx$$

on a :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u_t \int_0^t g(t-s)\Delta u(x,s) ds dx &= \int_\Omega \int_0^t g(t-s) u_t(t) \Delta u(s) ds dx \\
&= \int_0^t \int_\Omega g(t-s) u_t(t) \Delta u(s) dx ds \\
&= \int_0^t g(t-s) \int_\Omega u_t(t) \Delta u(s) dx ds \\
&= -\int_0^t g(t-s) \int_\Omega \nabla u_t(t) . \nabla u(s) dx ds
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\int_0^t g(t-s)\int_\Omega \nabla u_t(t).[\nabla u(s)-\nabla u(t)]dxds \\
&- \int_0^t g(t-s)\int_\Omega \nabla u_t(t).\nabla u(t)dxds \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_0^t g(t-s)\int_\Omega \mid \nabla u(s)-\nabla u(t)\mid^2 dxds\right] \\
&= -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_0^t g(s)\int_\Omega \mid \nabla u(t)\mid^2 dxds\right] \\
&- \frac{1}{2}\int_0^t g'(t-s)\int_\Omega \mid \nabla u(s)-\nabla u(t)\mid^2 dxds \\
&+ \frac{1}{2}g(t)\int_\Omega \mid \nabla u(t)\mid^2 dx \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^t g(t-s)\parallel \nabla u(s)-\nabla u(t)\parallel_2^2 ds \\
&- \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^t g(s)\parallel \nabla u(t)\parallel_2^2 ds \\
&- \int_0^t g'(t-s)\parallel \nabla u(s)-\nabla u(t)\parallel_2^2 ds \\
&+ \frac{1}{2}g(t)\parallel \nabla u(t)\parallel_2^2
\end{aligned}
$$

donc :

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega u_t\int_0^t g(t-s)\Delta u(x,s)dsdx &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(go\nabla u)(t)+\frac{1}{2}g(t)\parallel \nabla u(t)\parallel_2^2 \\
&- \frac{1}{2}(g'o\nabla u)(t)-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^t g(s)\parallel \nabla u(t)\parallel_2^2 ds
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

par substitution de (3.5) et (3.6) dans (3.4) on obtient :

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega u_t u_t dx &+ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\parallel \nabla u(t)\parallel_2^2 +\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(go\nabla u)(t) \\
&- \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^t g(s)\parallel \nabla u(t)\parallel_2^2 ds \\
&- \frac{1}{2}(g'o\nabla u)(t)+\frac{1}{2}g(t)\parallel \nabla u(t)\parallel_2^2 = 0
\end{aligned}
$$

c'est-à-dire que :

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(go\nabla u)(t) &+ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\parallel \nabla u(t)\parallel_2^2 -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^t g(s)\parallel \nabla u(t)\parallel_2^2 ds \\
&= -\frac{1}{2}g(t)\parallel \nabla u(t)\parallel_2^2 +\frac{1}{2}(g'o\nabla u)(t)-\int_\Omega \mid u_t\mid^2 dx
\end{aligned}
$$

autrement dit :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}(go\nabla u)(t)\right. &+ \left.\frac{1}{2}\left(1-\int_0^t g(s)ds\right) \parallel \nabla u(t) \parallel_2^2\right] \\ &= -\left[\frac{1}{2}g(t) \parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 - \frac{1}{2}(g'o\nabla u)(t) + \int_\Omega \mid u_t \mid^2 dx\right],\end{aligned}$$

alors :

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\left[\frac{1}{2}g(t) \parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 - \frac{1}{2}(g'o\nabla u)(t) + \int_\Omega \mid u_t \mid^2 dx\right]$$

d'après la condition (G_2), g' est négative et d'après la définition de $(g'o\nabla u)(t)$ on a :

$$(g'o\nabla u)(t) \leq 0$$

donc :

$$\frac{d}{dt}E(t) \leq 0$$

□

Lemme 3.2.1

Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, la fonctionnelle

$$F(t) = E(t) + \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega u^2 dx$$

et $E(t)$ sont équivalentes. Autrement dit, il existe α_1, $\alpha_1 > 0$ tels que :

$$\alpha_1 E(t) \leq F(t) \leq \alpha_2 E(t) \tag{3.8}$$

Preuve : On a d'une part :

$$\begin{aligned}F(t) &= \frac{1}{2}\left(1-\int_0^t g(s)ds\right) \parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 + \frac{1}{2}(go\nabla u)(t) \\ &+ \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega u^2 dx \\ &\leq \frac{1}{2}\left(1-\int_0^t g(s)ds + \varepsilon C_p\right) \parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 + \frac{1}{2}(go\nabla u)(t) \\ &\leq \alpha_2 E(t)\end{aligned}$$

et d'autre part :

$$F(t) \geq \frac{1}{2}\left(1-\int_0^t g(s)ds - \varepsilon C_p\right) \parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 + \frac{1}{2}(go\nabla u)(t).$$

En choisissant ε assez petit, on obtient :

$$\begin{aligned}F(t) &\geq \frac{1}{4}\left(1-\int_0^t g(s)ds\right) \parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 + \frac{1}{4}(go\nabla u)(t) \\ &\geq \alpha_1 E(t)\end{aligned}$$

d'où on conclut que :

$$\alpha_1 E(t) \leq F(t) \leq \alpha_2 E(t), \quad \forall t \geq 0$$

□

Lemme 3.2.2

Pour $r > 1$ et $0 < \theta < 1$, on a :

$$\int_0^t g(t-s) \parallel w(s) \parallel^2 ds \leq$$

$$\left(\int_0^t g^{1-\theta}(t-s) \parallel w(s) \parallel^2 ds \right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_0^t g^{\frac{r-1+\theta}{r-1}}(t-s) \parallel w(s) \parallel^2 ds \right)^{\frac{r-1}{r}}$$

pour tout $w \in L^2(\Omega)$

Preuve : On a :

$$\frac{1-\theta}{r} + \frac{r-1+\theta}{r} = 1 \quad et \quad \frac{2}{r} + \frac{2(r-1)}{r} = 2$$

d'où :

$$g(t-s) = g^{\frac{1-\theta}{r}}(t-s) g^{\frac{r-1+\theta}{r}}(t-s)$$

et

$$\parallel w(s) \parallel^2 = \parallel w(s) \parallel^{\frac{2}{r}} \parallel w(s) \parallel^{\frac{2(r-1}{r}}$$

donc on peut écrire :

$$\int_0^t g(t-s) \parallel w(s) \parallel^2 ds =$$

$$\int_0^t g^{\frac{1-\theta}{r}}(t-s) \parallel w(s) \parallel^{\frac{2}{r}} g^{\frac{r-1+\theta}{r}}(t-s) \parallel w(s) \parallel^{\frac{2(r-1)}{r}} ds$$

on remarque que r et $\frac{r}{r-1}$ sont des exposants conjugués car :

$$\frac{1}{r} + \frac{r-1}{r} = 1$$

en appliquant l'inégalité de Hölder on arrive à :

$$\int_0^t g(t-s) \parallel w(s) \parallel^2 ds \leq$$

$$\left[\int_0^t \left(g^{\frac{1-\theta}{r}}(t-s) \parallel w(s) \parallel^{\frac{2}{r}} \right)^r ds \right]^{\frac{1}{r}} \left[\int_0^t \left(g^{\frac{r-1+\theta}{r}}(t-s) \parallel w(s) \parallel^{\frac{2(r-1)}{r}} \right)^{\frac{r}{r-1}} ds \right]^{\frac{r-1}{r}}$$

c'est-à-dire que :

$$\int_0^t g(t-s) \parallel w(s) \parallel^2 ds \leq$$

$$\left(\int_0^t g^{1-\theta}(t-s) \parallel w(s) \parallel^2 ds \right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_0^t g^{\frac{r-1+\theta}{r-1}}(t-s) \parallel w(s) \parallel^2 ds \right)^{\frac{r-1}{r}}$$

□

Lemme 3.2.3

Soient $v \in L^\infty(0,T,H_0^1(\Omega))$ et g une fonction continue sur $[0,T]$, supposons que $0<\theta<1$ et $p>1$, alors il existe une constante $C>0$ telle que :

$$gov \leq C\left(\sup_{0<s<T} \| \nabla v(s) \|^2 \int_0^t g^{1-\theta}(s)ds\right)^{\frac{p-1}{p-1+\theta}} .(g^p ov)^{\frac{\theta}{p-1+\theta}}$$

Preuve : En utilisant le lemme 3.2.2, avec $r=\frac{p-1+\theta}{p-1}$ et $w(s)=v(t)-v(s)$ on trouve :

$$\frac{1}{r}=\frac{p-1}{p-1+\theta}, \qquad \frac{r-1+\theta}{r-1}=p, \qquad \frac{r-1}{r}=\frac{\theta}{p-1+\theta}$$

donc :

$$gov \leq \left(\int_0^t g^{1-\theta}(t-s) \| v(t)-v(s) \|^2 \, ds\right)^{\frac{p-1}{p-1+\theta}} (g^p ov)^{\frac{\theta}{p-1+\theta}} \tag{3.9}$$

on a aussi :

$$\begin{aligned}
\int_0^t g^{1-\theta}(t &- s) \| v(t)-v(s) \|^2 \, ds \\
&\leq C_p^2 \int_0^t g^{1-\theta}(t-s) \| \nabla v(t)-\nabla v(s) \|^2 \, ds \\
&\leq 2C_p^2 \int_0^t g^{1-\theta}(t-s)\left(\| \nabla v(t) \|^2 + \| \nabla v(s) \|^2 \right)ds \\
&\leq 4C_p^2 \int_0^t g^{1-\theta}(t-s) \sup_{0<s<T} \| \nabla v(s) \|^2 \, ds \\
&\leq 4C_p^2 \sup_{0<s<T} \| \nabla v(s) \|^2 \int_0^t g^{1-\theta}(t-s)ds \\
&\leq 4C_p^2 \sup_{0<s<T} \| \nabla v(s) \|^2 \int_0^t g^{1-\theta}(s)ds \\
&\leq C \sup_{0<s<T} \| \nabla v(s) \|^2 \int_0^t g^{1-\theta}(s)ds \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

une combinaison de (3.8) et (3.9) nous donne :

$$gov \leq C\left(\sup_{0<s<T} \| \nabla v(s) \|^2 \int_0^t g^{1-\theta}(s)ds\right)^{\frac{p-1}{p-1+\theta}} .(g^p ov)^{\frac{\theta}{p-1+\theta}}$$

□

Lemme 3.2.4

Soient $v \in L^\infty(0,T,H_0^1(\Omega))$ et g une fonction continue sur $[0,T]$, supposons que $p>1$, alors

$$gov \leq \left[2\left(t \parallel \nabla v(t) \parallel^2 + \int_0^t \nabla v(s) \parallel^2 ds\right)\right]^{\frac{p-1}{p}} (g^p ov)^{\frac{1}{p}}$$

Preuve : En utilisant (3.8) pour $\theta = 1$, l'inégalité de Poincaré on obtient :

$$gov \leq \left(\int_0^t \parallel \nabla v(t) - \nabla v(s) \parallel^2 ds\right)^{\frac{p-1}{p}} (g^p ov)^{\frac{1}{p}}$$

on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^t \parallel \nabla v(t) - \nabla v(s) \parallel^2 ds &\leq 2\int_0^t \Big(\parallel \nabla v(t) \parallel^2 + \nabla v(s) \parallel^2 \Big) ds \\
&\leq 2\int_0^t \parallel \nabla v(t) \parallel^2 ds + 2\int_0^t \parallel \nabla v(s) \parallel^2 ds \\
&\leq 2\left(t \parallel \nabla v(t) \parallel^2 + \int_0^t \nabla v(s) \parallel^2 ds\right)
\end{aligned}$$

d'où :

$$gov \leq \left[2\left(t \parallel \nabla v(t) \parallel^2 + \int_0^t \nabla v(s) \parallel^2 \right) ds\right]^{\frac{p-1}{p}} (g^p ov)^{\frac{1}{p}}$$

□

Théorème 3.2.2

Soit $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ donné, g satisfait les conditions G_1 et G_2, alors il existe deux constantes strictement positives λ et K telles que, $\forall t \geq 0$,

$$E(t) \leq K e^{-\lambda t}, \qquad p = 1$$

$$E(t) \leq K(1+t)^{-\frac{1}{p-1}}, \qquad p > 1$$

Preuve : Posons

$$\psi(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega u^2 dx \tag{3.11}$$

alors :

$$\psi'(t) = \int_\Omega u u_t dx$$

en utilisant (3.1) on arrive à :

$$\begin{aligned}
\psi'(t) &= \int_\Omega u\left(\Delta u - \int_0^t g(t-s)\Delta u(s) ds\right) dx \\
&= \int_\Omega u \Delta u dx - \int_\Omega u(t) \int_0^t g(t-s)\Delta u(s) ds dx
\end{aligned}$$

en utilisant la formule de Greenon obtient :

$$\begin{aligned}
\psi'(t) &= \int_\Omega u\Delta u dx - \int_0^t \left(\int_\Omega g(t-s)u(t)\Delta u(s)dx\right)ds \\
&= -\int_\Omega \mid \nabla u(t) \mid^2 dx - \int_\Omega g(t-s)\left(\int_\Omega u(t)\Delta u(s)dx\right)ds \\
&= -\int_\Omega \mid \nabla u(t) \mid^2 dx + \int_\Omega \int_0^t g(t-s)\nabla u(t).\nabla u(s)dsdx \\
&- \int_\Omega \mid \nabla u(t) \mid^2 dx \\
&+ \int_\Omega \int_0^t g(t-s)\nabla u(t).\Big(\nabla u(s) - \nabla u(t) + \nabla u(t)\Big)dsdx \\
&= \int_\Omega \mid \nabla u(t) \mid^2 dx + \int_\Omega \int_0^t g(t-s) \mid \nabla u(t) \mid^2 dsdx \\
&+ \int_\Omega \nabla u(t). \int_0^t g(t-s)\Big(\nabla u(s) - \nabla u(t)\Big)dsdx \\
&= -\left(1 - \int_0^t g(s)ds\right)\int_\Omega \mid \nabla u(t) \mid^2 dx \\
&+ \int_\Omega \nabla u(t). \int_0^t g(t-s)\Big(\nabla u(s) - \nabla u(t)\Big)dsdx. \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

Posons

$$I = \int_\Omega \nabla u(t). \int_0^t g(t-s)\Big(\nabla u(s) - \nabla u(t)\Big)dsdx$$

d'après l'inégalité de Young on a :

$$I \leq \delta \int_\Omega \mid \nabla u(t) \mid^2 dx + \frac{1}{4\delta}\int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s)(\nabla u(s) - \nabla u(t))ds\right)^2 dx, \quad \forall \delta > 0.$$

En estimant :

$$\int_0^t g(t-s)(\nabla u(s) - \nabla u(t))ds = \int_0^t g^{1-\frac{p}{2}}(t-s)g^{\frac{p}{2}}(t-s)(\nabla u(s) - \nabla u(t))ds$$

$$\leq \left(\int_0^t g^{2-p}(t-s)ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(g^p(t-s) \mid \nabla u(s) - \nabla u(t) \mid^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

on arrive à :

$$\int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s)(\nabla u(s) - \nabla u(t))ds\right)^2 dx \leq C_0 g^p o \nabla u(t)$$

où :

$$C_0 = \int_0^t g^{2-p}(t-s)ds < +\infty.$$

Alors nous obtenons l'inégalité :

$$\psi'(t) \leq -l\int_\Omega \mid \nabla u \mid^2 dx + \delta \int_\Omega \mid \nabla u \mid^2 dx + \frac{1}{4\delta}C_0 g^p o \nabla u(t), \quad \forall \delta > 0.$$

En prenant $\delta = \frac{1}{2}$ on aura :

$$\psi'(t) \leq -\frac{l}{2} \parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 + \frac{C_0}{2l} g^p o \nabla u(t).$$

Puisqu'on a :

$$F(t) = E(t) + \varepsilon\psi(t)$$

alors :

$$\begin{aligned} F'(t) &= E'(t) + \varepsilon\psi'(t) \\ &\leq \frac{1}{2} g' o \nabla u(t) + \varepsilon\Big(-\frac{l}{2} \parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 + C_1 g^p o \nabla u(t)\Big) \\ &\leq -\frac{\varepsilon l}{2} \parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 - \frac{\xi}{2} g^p o \nabla u(t) + \varepsilon C_1 g^p o \nabla u(t) \\ &\leq -\frac{\varepsilon l}{2} \parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 - (\frac{\xi}{2} - \varepsilon C_1) g^p o \nabla u(t). \end{aligned}$$

Choisissons $\varepsilon > 0$ assez petit tel que (3.7) soit vérifiée et que

$$F'(t) \leq -\frac{\varepsilon l}{2} \parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 - \frac{\xi}{4} g^p o \nabla u(t)$$

alors :

$$F'(t) \leq -\alpha_0 \Big(\parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 + g^p o \nabla u(t) \Big), \quad \forall \geq > 0 \tag{3.13}$$

pour un certain $\alpha_0 > 0$.

<u>Cas 1</u> : $p = 1$

En exploitant (3.7), l'estimation (3.12) donne :

$$\begin{aligned} F'(t) &\leq -\alpha_0 \Big(\parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 + g o \nabla u(t) \Big) \\ &\leq -\beta_1 E(t) \\ &\leq -\frac{\beta_1}{\alpha_2} F(t), \quad \forall t \geq 0 \end{aligned} \tag{3.14}$$

l'estimation (3.13) peut s'écrire sous la forme :

$$F'(t) + \frac{\beta_1}{\alpha_2} F(t) \leq 0, \quad \forall t \geq 0$$

ce qui implique que :

$$e^{\frac{\beta_1}{\alpha_2}} (F'(t) + \frac{\beta_1}{\alpha_2} F(t)) \leq 0, \quad \forall t \geq 0$$

autrement dit :

$$\frac{d}{dt} (e^{\frac{\beta_1}{\alpha_2} t} F(t)) \leq 0, \quad \forall t \geq 0$$

une simple intégration sur $[0, t]$ donne :

$$e^{\frac{\beta_1}{\alpha_2} t} F(t) - F(0) \leq 0, \quad \forall t \geq 0$$

ce qui veut dire que :

$$F(t) \leq F(0)e^{-\frac{\beta_1}{\alpha_2}t}, \quad \forall t \geq 0.$$

En utilisant (3.7) on obtient :

$$E(t) \leq \frac{1}{\alpha_1}F(0)e^{-\frac{\beta_1}{\alpha_2}t}, \quad \forall t \geq 0$$

c'est-à-dire que :

$$E(t) \leq ke^{-\lambda t}, \quad \forall t \geq 0.$$

<u>**Cas 2**</u> : $p > 1$
En utilisant (G_1) et (G_2) on obtient :

$$\int_0^t g^{1-\theta}(s)ds < +\infty \quad pour \quad \theta < 2-p.$$

En effet :

$$\begin{aligned}
\int_0^t g^{1-\theta}(s)ds &= \int_0^t g^{1-\theta-p}(s)g^p(s)ds \\
&\leq -\frac{1}{\xi}\int_0^t g^{1-\theta-p}(s)g'(s)ds \\
&\leq -\frac{1}{\xi}.\frac{1}{2-\theta-p}\Big[g^{2-\theta-p}(+\infty) - g^{2-\theta-p}(0)\Big] \\
&\leq \frac{1}{(2-\theta-p)\xi}\Big[g^{2-\theta-p}(0) - g^{2-\theta-p}(+\infty)\Big] \\
&= \frac{1}{(2-\theta-p)\xi}g^{2-\theta-p}(0) < +\infty,
\end{aligned}$$

puisque $\theta < 2-p$.
D'après (3.9) on a :

$$\begin{aligned}
go\nabla v &\leq gov \leq \left(\int_0^t g^{1-\theta}(t-s) \parallel \nabla u(t) - \nabla u(s) \parallel^2 ds\right)^{\frac{p-1}{p-1+\theta}} (g^p ov)^{\frac{\theta}{p-1+\theta}} \\
&\leq \left[2\int_0^t g^{1-\theta}(t-s)\Big(\parallel \nabla u(t) \parallel^2 + \parallel \nabla u(s) \parallel^2 \Big)ds\right]^{\frac{p-1}{p-1+\theta}} \Big(g^p o\nabla u\Big)^{\frac{\theta}{p-1+\theta}} \\
&\leq \left[4C_1\Big(\int_0^t g^{1-\theta}(t-s)ds\Big)E(0)\right]^{\frac{p-1}{p-1+\theta}} \Big(g^p o\nabla u\Big)^{\frac{\theta}{p-1+\theta}} \\
&\leq C\left[\Big(\int_0^t g^{1-\theta}(t-s)ds\Big)E(0)\right]^{\frac{p-1}{p-1+\theta}} \Big(g^p o\nabla u\Big)^{\frac{\theta}{p-1+\theta}} \\
&\leq C\left[\Big(\int_0^\infty g^{1-\theta}(t-s)ds\Big)E(0)\right]^{\frac{p-1}{p-1+\theta}} \Big(g^p o\nabla u\Big)^{\frac{\theta}{p-1+\theta}},
\end{aligned} \tag{3.15}$$

puisque

$$\int_0^t g^{1-\theta}(s)ds \leq \int_0^\infty g^{1-\theta}(s)ds < +\infty.$$

D'après la définition de $E(t)$ on a :

$$E(t) \leq C_2 \parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 + (go\nabla u)(t)$$

et en utilisant le lemme 3.2.3, pour $\sigma > 1$ on trouve :

$$\begin{aligned} E^\sigma(t) &\leq C \parallel \nabla u(t) \parallel_2^{2\sigma} + \Big[(go\nabla u)(t)\Big]^\sigma \\ &\leq C \parallel \nabla u(t) \parallel_2^{2(\sigma-1)} \parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 + \Big[(go\nabla u)(t)\Big]^\sigma \\ &\leq CE^{\sigma-1}(t) \parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 + \Big[(go\nabla u)(t)\Big]^\sigma \\ &\leq CE^{\sigma-1}(0) \parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 + \Big[(go\nabla u)(t)\Big]^\sigma. \end{aligned} \tag{3.16}$$

En utilisant (3.14) alors (3.15) devient :

$$\begin{aligned} E^\sigma(t) &\leq CE^{\sigma-1}(0) \parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 \\ &+ C\Big[(\int_0^\infty g^{1-\theta}(t-s)ds)E(0)\Big]^{\frac{\sigma(p-1)}{p-1+\theta}} (g^p o\nabla u)^{\frac{\sigma\theta}{p-1+\theta}}. \end{aligned}$$

On choisit $\theta = \frac{1}{2}$ et $\sigma = 2p-1$ on trouve : $\frac{\sigma\theta}{p-1+\theta} = 1$, d'où :

$$\begin{aligned} E^{2p-1}(t) &\leq C \parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 + C(g^p o\nabla u)(t) \\ &\leq C\Big[\parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 + (g^p o\nabla u)(t)\Big]. \end{aligned} \tag{3.17}$$

la combinaison de (3.12) et (3.16) donne :

$$F'(t) \leq -\frac{\alpha_0}{C} E^{2p-1}(t)$$

où par (3.7),

$$F'(t) \leq -\beta F^{2p-1}(t), \quad \forall t \geq 0 \tag{3.18}$$

pour un certain $\beta > 0$. Une simple intégration de (3.17) de 0 à t nous donne :

$$\int_0^t F'(s)F^{1-2p}(s)ds \leq \int_0^t -\beta ds$$

c'est-à-dire que :

$$F^{2-2p}(t) - F^{2-2p}(0) \geq \beta(2p-2)t$$

d'où :

$$F^{2p-2}(t) \leq \frac{1}{\beta(2p-2)t + F^{2-2p}(0)}$$

ce qui implique :

$$\begin{aligned} F(t) &\leq \frac{1}{\left(\beta(2p-2)t + F^{2-2p}(0)\right)^{\frac{1}{2p-2}}} \\ &\leq \left[\beta(2p-2)\right]^{-\frac{1}{2p-2}} \left[t + \frac{F^{2-2p}(0)}{\beta(2p-2)}\right]^{-\frac{1}{2p-2}} \\ &\leq k_1\left(t+1\right)^{-\frac{1}{2p-2}} \end{aligned} \tag{3.19}$$

où :

$$k_1 = \left[\beta(2p-2)\min(1, \frac{F^{2-2p}(0)}{\beta(2p-2)})\right]^{-\frac{1}{2p-2}}.$$

L'inégalité (3.18) implique que :

$$\int_0^{+\infty} F(t)dt + tF(t) < +\infty. \tag{3.20}$$

En effet :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} F(t)dt + tF(t) &\leq \int_0^{+\infty} k_1\left(1+t\right)^{-\frac{1}{2p-2}} dt + k_1 t\left(1+t\right)^{-\frac{1}{2p-2}} \\ &\leq k_1 \frac{2p-2}{2p-3}\left[(1+t)^{\frac{2p-3}{2p-2}}\right]_0^{+\infty} + \frac{k_1 t}{(1+t)^{\frac{1}{2p-2}}} \end{aligned}$$

on sait que : $1 < p < \frac{3}{2}$
d'où : $2p-2 > 0$ et $2p-3 < 0$
alors :

$$\frac{2p-3}{2p-2} < 0 \quad et \quad \frac{1}{2p-2} > 1$$

donc :

$$\left[(1+t)^{\frac{2p-3}{2p-2}}\right]_0^{\infty} < +\infty \tag{3.21}$$

et

$$\frac{t}{(1+t)^{\frac{1}{2p-2}}} < \frac{t}{1+t}, \quad \forall t \geq 0$$

or la fonction $\frac{t}{1+t}$ est croissante et prend ses valeurs dans $[0,1]$ d'où :

$$\frac{t}{t+1} < 1, \quad \forall t \geq 0,$$

par conséquent :

$$\frac{t}{(1+t)^{\frac{1}{2p-2}}} < +\infty. \tag{3.22}$$

De (3.20) et (3.21) on conclut que :

$$\int_0^{+\infty} F(t)dt + tF(t) < +\infty, \quad \forall t \geq 0$$

et en utilisant le lemme 3.2.4 on obtient :

$$go\nabla u \leq \left[2\left(t \parallel \nabla u(t) \parallel^2 + \int_0^t \nabla u(s) \parallel^2 ds\right)\right]^{\frac{p-1}{p}} (g^p o\nabla u)^{\frac{1}{p}}.$$

D'après la définition de $E(t)$on a :

$$\parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 \leq \alpha E(t)$$

où α est une constante strictement positive, d'où :

$$\begin{aligned} go\nabla u &\leq \left[2\left(t\alpha E(t) + \alpha \int_0^t E(s)ds\right)\right]^{\frac{p-1}{p}} (g^p o\nabla u)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C_3\left[2\left(tE(t) + \int_0^t E(s)ds\right)\right]^{\frac{p-1}{p}} (g^p o\nabla u)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

En utilisant (3.7) et (3.19) on arrive à :

$$\begin{aligned} go\nabla u &\leq C_3\left[\frac{1}{\alpha_1} tF(t) + \frac{1}{\alpha_1}\int_0^t F(s)ds\right]^{\frac{p-1}{p}} (g^p o\nabla u)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C_4\left[tF(t) + \int_0^t F(s)ds\right]^{\frac{p-1}{p}} (g^p o\nabla u)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C_5 (g^p o\nabla u)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

puisque $tF(t) + \int_0^t F(s)ds < +\infty$, alors :

$$(go\nabla u)^p \leq C_6 g^p o\nabla u. \tag{3.23}$$

Une combinaison de (3.12) et (3.22) donne :

$$F'(t) \leq -C_7\left[\parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 (go\nabla u)^p\right] \tag{3.24}$$

on procède de la même manière que (3.16) on obtient :

$$E^p(t) \leq C_8\left[\parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 (go\nabla u)^p\right]. \tag{3.25}$$

Une combinaison de (3.23), (3.24) et (3.7) donne :

$$\begin{aligned} F'(t) &\leq -C_9 E^p(t) \\ F'(t) &\leq -C_{10} F^p(t), \quad \forall t \geq 0. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Une simple intégration de (3.25) de 0 à t, comme celle de (3.17, nous donne :

$$F(t) \leq k_2(1+t)^{-\frac{1}{p-1}}. \tag{3.27}$$

Encore une fois, en utilisant (3.7), l'inégalité (3.26) devient :

$$\alpha_1 E(t) \leq k_2(1+t)^{-\frac{1}{p-1}}$$

c'est-à-dire que :

$$E(t) \leq K(1+t)^{-\frac{1}{p-1}}$$

□

Chapitre 4

Etude de la décroissance des solutions d'un problème parabolique linéaire(2)

4.1 Préliminaires

Ce chapitre est consacré à l'étude du problème parabolique linéaire homogène (3.1) mais pour g, une fonction continûment différentiable qui satisfait aux conditions suivantes :
(G_1) $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction décroissante de classe C^1 telle que :

$$g(0) > 0, \quad 1 - \int_0^{+\infty} g(s)ds = l > 0$$

(G_3) Il existe une fonction ξ continûment différentiable qui satisfait :

$$g'(t) \leq -\xi(t)g(t) \quad , t \geq 0$$

où :

$$\xi(t) > 0, \quad \xi'(t) \leq 0, \quad \forall t > 0, \quad et \quad \int_0^{+\infty} \xi(t)dt = +\infty.$$

Remarque 4.1.1

Puisque ξ est décroissante alors : $\xi(t) \leq \xi(0) = M$

4.2 Décroissance des solutions

Dans ce chapitre on pose :

$$F(t) = E(t) + \varepsilon\psi(t), \quad \varepsilon > 0$$

avec

$$\psi(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega u^2 dx$$

Remarque 4.2.1

Pour tout $t > 0$ on a :

$$\int_0^t g(s)ds \leq 1 - l$$

Preuve : Puisque g est positive alors :

$$\int_0^t g(s)ds \leq \int_0^\infty g(s)ds$$

d'où :

$$-\int_0^t g(s)ds \geq -\int_0^\infty g(s)ds$$

donc :

$$1 - \int_0^t g(s)ds \geq 1 - \int_0^\infty g(s)ds$$

ce qui veut dire que :

$$1 - \int_0^t g(s)ds \geq l$$

par conséquent :

$$\int_0^t g(s)ds \leq 1 - l.$$

□

Lemme 4.2.1

Pour $u \in H_0^1(\Omega)$ on a :

$$\int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s)(\nabla u(s) - \nabla u(t))ds \right)^2 dx \leq (1-l)(go\nabla u)(t) \tag{4.1}$$

Preuve : Posons :

$$j = \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s)(\nabla u(s) - \nabla u(t))ds \right)^2 dx,$$

puisque g est positive, alors on peut écrire j sous la forme :

$$j = \int_\Omega \left(\int_0^t \sqrt{g(t-s)}\sqrt{g(t-s)}(\nabla u(s) - \nabla u(t))ds \right)^2 dx$$

et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient :

$$\begin{aligned} j &\leq \int_\Omega \left(\int_0^t g(s)ds \right) \left(\int_0^t g(t-s)(\nabla u(s) - \nabla u(t))^2 ds \right) dx \\ &\leq \left(\int_0^t g(s)ds \right) \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s)(\nabla u(s) - \nabla u(t))^2 ds \right) dx \end{aligned}$$

c'est-à-dire que :

$$j \leq (1-l)(go\nabla u)(t)$$

□

Lemme 4.2.2

Sous les conditions (G_1) et (G_3) on a :

$$F'(t) \leq -(l-\delta)\varepsilon \parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 + \frac{(1-l)}{4\delta}\varepsilon(go\nabla u)(t) \tag{4.2}$$

Preuve :

On a :

$$\psi(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega u^2 dx$$

d'où :

$$\psi'(t) = \int_\Omega u u_t dx$$

et d'après (3.11) on a :

$$\begin{aligned} \int_\Omega u u_t dx &= -\left(1 - \int_0^t g(s)ds\right)\int_\Omega \mid \nabla u \mid^2 dx \\ &+ \int_\Omega \nabla u(t) \int_0^t g(t-s)\Big(\nabla u(s) - \nabla u(t)\Big) ds dx \end{aligned} \tag{4.3}$$

posons :

$$j = \int_\Omega \nabla u(t) \int_0^t g(t-s)\Big(\nabla u(s) - \nabla u(t)\Big) ds dx$$

d'après l'inégalité de Young on a :

$$j \leq \delta \int_\Omega \mid \nabla u \mid^2 dx + \frac{1}{4\delta}\int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s)(\nabla u(s) - \nabla u(t))ds\right)^2 dx$$

et en utilisant (4.1) et (4.3) on obtient :

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= -\left(1 - \int_0^t g(s)ds\right) \parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 \\ &+ \int_\Omega \nabla u(t) \int_0^t g(t-s)\Big(\nabla u(s) - \nabla u(t)\Big) ds dx \\ &\leq -l \parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 + \delta \parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 + \frac{1-l}{4\delta}(go\nabla u)(t) \end{aligned}$$

c'est-à-dire que :

$$\psi'(t) \leq (\delta - l) \parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 + \frac{1-l}{4\delta}(go\nabla u)(t). \tag{4.4}$$

De la définition de $F(t)$, on a :

$$F'(t) = E'(t) + \varepsilon\psi'(t)$$

et en utilisant (4.4) on arrive à :

$$F'(t) \leq E'(t) + (\delta - l)\varepsilon \parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 + \frac{\varepsilon(1-l)}{4\delta}(go\nabla u)(t).$$

Puisque $E'(t) \leq 0$ alors :

$$F'(t) \leq (\delta - l)\varepsilon \parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 + \frac{\varepsilon(1-l)}{4\delta}(go\nabla u)(t)$$

c'est-à-dire que :

$$F'(t) \leq -(l - \delta)\varepsilon \parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 + \frac{\varepsilon(1-l)}{4\delta}(go\nabla u)(t)$$

□

Théorème 4.2.1

Soit $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ donné. Si de plus g et ξ satisfont (G_1) et (G_3), alors il existe deux constantes strictement positives λ et K telles que :

$$E(t) \leq K e^{-\lambda \int_0^t \xi(s)ds} \quad , \quad \forall t \geq 0$$

Preuve : D'après (4.2) on a :

$$F'(t) \quad \leq \quad -(l - \delta)\varepsilon \parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 + \frac{\varepsilon(1-l)}{4\delta}(go\nabla u)(t)$$

et en choisissant δ tel que $\delta < l$ $\left(\text{par exemple } \delta = \frac{l}{2}\right)$ on arrive à :

$$F'(t) \quad \leq \quad -\frac{l\varepsilon}{2} \parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 + \frac{\varepsilon(1-l)}{2l}(go\nabla u)(t),$$

or

$$\frac{l}{2} > 0 \quad et \quad \frac{1-l}{2l} > 0$$

d'où on peut écrire :

$$F'(t) \quad \leq \quad -\beta E(t) + C(go\nabla u)(t) \tag{4.5}$$

où, β et C sont deux constantes positives. En multipliant (4.5) par $\xi(t)$ on trouve :

$$\begin{aligned}
\xi(t)F'(t) &\leq -\beta\xi(t)E(t) + C\xi(t)(go\nabla u)(t) \\
&\leq -\beta\xi(t)E(t) + C\xi(t)\int_0^t g(t-s) \parallel \nabla u(t) - \nabla u(s) \parallel_2^2 ds \\
&\leq -\beta\xi(t)E(t) + C\int_0^t \xi(t)g(t-s) \parallel \nabla u(t) - \nabla u(s) \parallel_2^2 ds
\end{aligned}$$

puisque ξ est décroissante alors $\xi(t) \leq \xi(t-s)$, donc pour cela on peut écrire :

$$\xi(t)F'(t) \leq -\beta\xi(t)E(t) + C\int_0^t \xi(t-s)g(t-s) \parallel \nabla u(t) - \nabla u(s) \parallel_2^2 ds$$

et en utilisant la condition (G_3) on obtient :

$$\xi(t)F'(t) \leq -\beta\xi(t)E(t) - C\int_0^t g'(t-s) \parallel \nabla u(t) - \nabla u(s) \parallel_2^2 ds$$

c'est-à-dire que :

$$\xi(t)F'(t) \leq -\beta\xi(t)E(t) - C(g'o\nabla u)(t).$$

Par définition de $E'(t)$ on peut écrire :

$$\xi(t)F'(t) \leq -\beta\xi(t)E(t) - C_1E'(t), \ \forall t \geq 0 \tag{4.6}$$

ou encore :

$$\xi(t)F'(t) + C_1E'(t) \leq -\beta\xi(t)E(t), \quad \forall t \geq 0$$

ce qui veut dire encore que :

$$\Big(\xi(t)F(t) + C_1E(t)\Big)' - \xi'(t)F(t) \leq -\beta\xi(t)E(t), \ \forall t \geq 0. \tag{4.7}$$

Posons maintenant

$$A(t) = \xi(t)F(t) + C_1E(t) \tag{4.8}$$

la relation (4.8) implique que $A(t)$ est equivalent à $E(t)$, en effet :
d'une part, on a :

$$\begin{aligned} A(t) &= \xi(t)F(t) + C_1E(t) \\ &\leq \xi(t)\alpha_2E(t) + C_1E(t) \\ &\leq \xi(0)\alpha_2E(t) + C_1E(t) \\ &\leq \beta_1E(t) \end{aligned} \tag{4.9}$$

où β_1 est une constante strictement positive, et d'autre part :

$$\begin{aligned} A(t) &= \xi(t)F(t) + C_1E(t) \\ &\geq C_1E(t) \end{aligned} \tag{4.10}$$

où C_1 est une constante strictement positive. Donc de (4.9) et (4.10) on trouve :

$$C_1E(t) \leq A(t) \leq \beta_1E(t). \tag{4.11}$$

Puisque $\xi'(t) \leq 0$ $\Big($la condition $(G_3)\Big)$, la relation (1.7) s'écrit :

$$A'(t) \leq -\beta\xi(t)E(t), \quad \forall t \geq 0$$

et en utilisant (4.11,) on arrive à :

$$A'(t) \leq -\lambda\xi(t)A(t), \quad \forall t \geq 0 \tag{4.12}$$

où λ est une constante strictement positive.
La relation (4.12) peut s'écrire aussi sous la forme :

$$A'(t) + \lambda\xi(t)A(t) \leq 0, \ \ \forall t \geq 0. \tag{4.13}$$

En multipliant les deux membres de (4.13) par $e^{\int_0^t \lambda\xi(s)ds}$ on trouve :

$$e^{\int_0^t \lambda\xi(s)ds}\Big(A'(t) + \lambda\xi(t)A(t)\Big) \leq 0, \ \ \forall t \geq 0$$

c'est-à-dire que :

$$\frac{d}{dt}\Big(e^{\int_0^t \lambda\xi(s)ds}A(t)\Big) \leq 0, \ \ \forall t \geq 0.$$

En intégrant sur $[0;t]$ on obtient :

$$A(t)e^{\int_0^t \lambda\xi(s)ds} - A(0) \leq 0, \ \ \forall t \geq 0$$

ce qui veut dire que :

$$A(t) \leq A(0)e^{-\lambda\int_0^t \xi(s)ds}, \ \ \forall t \geq 0. \tag{4.14}$$

Une combinaison de (4.11) et (4.13) donne :

$$C_1E(t) \ \ \leq \ \ A(0)e^{-\lambda\int_0^t \xi(s)ds}$$

autrement dit :

$$E(t) \ \ \leq \ \ \frac{A(0)}{C_1}e^{-\lambda\int_0^t \xi(s)ds}$$

c'est-à-dire que :

$$E(t) \ \ \leq \ \ Ke^{-\lambda\int_0^t \xi(s)ds}, \ \ \ \forall t \geq 0 \tag{4.15}$$

où K est une constante strictement positive.

$\square$

Remarque 4.2.2

Si $\xi(t) = a$, $(a > 0)$ la relation (4.15) prend la forme :

$$E(t) \leq Ke^{-\lambda\int_0^t ads}, \quad \forall t \geq 0,$$

c'est-à-dire que :

$$E(t) \leq Ke^{-\lambda as}, \quad \forall t \geq 0.$$

Si $\xi(t) = \frac{b}{1+t}$, la relation (4.15) devient :

$$E(t) \leq Ke^{-\lambda\int_0^t \frac{b}{1+s}ds}, \quad \forall t \geq 0,$$

c'est-à-dire que :

$$\begin{aligned}
E(t) &\leq Ke^{-\lambda b \ln(1+t)}, \quad \forall t \geq 0,\\
&\leq Ke^{\ln(1+t)^{-\lambda b}}, \quad \forall t \geq 0,\\
&\leq \frac{K}{(1+t)^{\lambda b}}, \quad \forall t \geq 0.
\end{aligned}$$

Exemples :

Nous citons maintenant quelques fonctions qui verifient les conditions (G_1) et (G_3), pour a et b bien choisis de telle sorte que :

$$1 - \int_0^{+\infty} g(s)ds > 0.$$

$$\begin{aligned}
g_1(t) &= \frac{ae^{-t}}{1+t}.\\
g_2(t) &= ae^{-b(1+t)^{\mu}}, \quad 0 < \mu \leq 1\\
g_3(t) &= \frac{a}{(1+t)^{\nu}}, \quad \nu > 1
\end{aligned}$$

Chapitre 5

Etude de la décroissance des solutions d'un problème parabolique quasi-linéaire

5.1 Préliminaires

Ce chapitre est consacré à l'étude du problème parabolique quasilinéaire homogène à terme viscoélastique suivant :

$$\begin{cases} A(t) \mid u_t \mid^{m-2} u_t - \Delta u + \int_0^t g(t-s)\Delta u(x,s)ds = 0, & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x,t) = 0, \qquad x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in \Omega, \end{cases} \tag{5.1}$$

où $m \geq 2$ et Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière lipschitizienne $\partial\Omega$.
Les valeurs de u sont prises dans $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ et $A \in C([0,+\infty), R^{n\times n})$ est un opérateur borné et satisfait la condition suivante :

$$(A(t)v, v) \geq c_0 \mid v \mid^2, \; \forall t \in [0,+\infty), \; v \in \mathbb{R}^n$$

g et ξ sont les deux fonctions définies dans le chapitre 4, qui vérifient les conditions (G_1) et (G_3).

5.2 Décroissance des solutions

Théorème 5.2.1

Si u est solution de (1.1) alors :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(t) &= -\Bigg(\frac{1}{2}g(t) \parallel \nabla(u)(t) \parallel_2^2 - \frac{1}{2}(g'o\nabla u)(t) \\ &+ \int_\Omega A(t) \mid u_t \mid^{m-2} u_t.u_t dx\Bigg) \leq 0 \end{aligned} \tag{5.2}$$

où

$$E(t) = \frac{1}{2}(go\nabla u)(t) + \frac{1}{2}\left(1 - \int_0^t g(s)ds\right) \parallel \nabla(u)(t) \parallel_2^2$$

Preuve : On a :

$$A(t) \mid u_t \mid^{m-2} u_t - \Delta u + \int_0^t g(t-s)\Delta u(x,s)ds = 0, \tag{5.3}$$

en multipliant l'équation (5.3) par u_t et en intègrant sur Ω on obtient :

$$\int_\Omega A(t) \mid u_t \mid^{m-2} u_t.u_t dx - \int_\Omega u_t \Delta u dx + \int_\Omega u_t \int_0^t g(t-s)\Delta u(x,s)ds = 0. \tag{5.4}$$

On a vu au chapitre 3 que :

$$\int_\Omega u_t \Delta u dx = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 \tag{5.5}$$

et aussi :

$$\begin{aligned} \int_\Omega u_t \int_0^t g(t-s)\Delta u(x,s)ds &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(go\nabla u)(t) - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^t g(s) \parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 ds \\ &- \frac{1}{2}(g'o\nabla u)(t) + \frac{1}{2}g(t) \parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 . \end{aligned} \tag{5.6}$$

Par substitution de (5.5) et (5.6) dans (5.4) on obtient :

$$\begin{aligned} \int_\Omega A(t) \mid u_t \mid^{m-2} u_t.u_t dx &+ \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(go\nabla u)(t) \\ &- \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^t g(s) \parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 ds - \frac{1}{2}(g'o\nabla u)(t) \\ &+ \frac{1}{2}g(t) \parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 = 0 \end{aligned} \tag{5.7}$$

autrement dit :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}(go\nabla u)(t) + \frac{1}{2}\left(1 - \int_0^t g(s)ds\right) \parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 \right] =$$

$$-\frac{1}{2}g(t) \parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 + \frac{1}{2}(g'o\nabla u)(t) - \int_\Omega A(t) \mid u_t \mid^{m-2} u_t.u_t dx$$

c'est-à-dire que :

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\left[\frac{1}{2}g(t) \parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 - \frac{1}{2}(g'o\nabla u)(t) + \int_\Omega A(t) \mid u_t \mid^{m-2} u_t.u_t dx\right] \tag{5.8}$$

ce qui implique que :

$$\frac{d}{dt}E(t) \leq 0$$

$\square$

Remarque 5.2.1

On a :

$$E'(t) = -\frac{1}{2}g(t) \parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 + \frac{1}{2}(g'o\nabla u)(t) - \int_\Omega A(t) \mid u_t \mid^{m-2} u_t.u_t dx$$

et puisque le premier terme du deuxième membre de la dernière égalité est négatif, alors on peut écrire :

$$\begin{aligned} E'(t) &\leq \frac{1}{2}(g'o\nabla u)(t) - \int_\Omega A(t) \mid u_t \mid^m dx \\ &\leq \frac{1}{2}(g'o\nabla u)(t) - c_0 \int_\Omega \mid u_t \mid^m dx \end{aligned} \tag{5.9}$$

ce qui donne :

$$\int_\Omega \mid u_t \mid^m dx \leq -\frac{1}{c_0}E'(t) \tag{5.10}$$

$$-(g'o\nabla u)(t) \leq -2E'(t). \tag{5.11}$$

en effet, l'estimation (5.9) implique que :

$$E'(t) \leq -c_0 \int_\Omega \mid u_t \mid^m dx$$

c'est-à-dire que :

$$\int_\Omega \mid u_t \mid^m dx \leq -\frac{1}{c_0}E'(t)$$

l'estimation (5.9) implique aussi que :

$$-E'(t) \geq -\frac{1}{2}(g'o\nabla u)(t) + c_0 \int_\Omega \mid u_t \mid^m dx.$$

Puisque le deuxième terme du deuxième membre de la dernière estimation est positif, alors on peut écrire :

$$-E'(t) \geq -\frac{1}{2}(g'o\nabla u)(t)$$

c'est-à-dire que :

$$-(g'o\nabla u)(t) \leq -2E'(t)$$

Lemme 5.2.1

Si les conditions (G_1) et (G_3) sont vérifiées, alors il existe une constante strictement positive λ, telle que :

$$\int_a^T \xi(t)E(t)dt \leq \lambda E(a) \ , \quad \forall a \geq 0$$

Preuve : On multiplie l'équation (5.1) par $\xi(t)u$ et on intégre sur $(a,T)\times\Omega$ on trouve :

$$\int_a^T\int_\Omega \xi(t)A(t)\mid u_t\mid^{m-2}u_t u dxdt-\int_a^T\int_\Omega \xi(t)u\Delta u dxdt$$

$$+\int_a^T\int_\Omega \xi(t)u\int_0^t g(t-s)\Delta u(s)dsdxdt=0. \tag{5.12}$$

En utilisant la formule de Green, on trouve :

$$\begin{aligned}\int_a^T\int_\Omega \xi(t)u\Delta u dxdt &= \int_a^T \xi(t)\int_\Omega u\Delta u dxdt\\ &= \int_a^T \xi(t)\Big(-\int_\Omega \mid\nabla u(t)\mid^2 dx\Big)dt\\ &= -\int_a^T \xi(t)\parallel \nabla u(t)\parallel_2^2,\end{aligned} \tag{5.13}$$

utilisons encore une autre fois la formule de Green on arrive à :

$$\int_a^T\int_\Omega \xi(t)u\int_0^t g(t-s)\Delta u(s)dsdxdt$$

$$= -\int_a^T \xi(t)\int_0^t g(t-s)\int_\Omega \nabla u(t).\nabla u(s)dxdsdt$$

$$= -\int_a^T \xi(t)\int_\Omega \nabla u(t).\int_0^t g(t-s)\nabla u(s)dsdxdt$$

$$= -\int_a^T \xi(t)\int_\Omega \nabla u(t).\int_0^t g(t-s)\Big(\nabla u(s)-\nabla u(t)+\nabla u(t)\Big)dsdxdt$$

$$= -\int_a^T \xi(t)\int_\Omega \nabla u(t).\int_0^t g(t-s)\Big(\nabla u(s)-\nabla u(t)\Big)dsdxdt$$

$$-\int_a^T \xi(t)\int_0^t g(t-s)\int_\Omega \mid\nabla u(t)\mid^2 dxdsdt$$

$$\begin{aligned}= &-\int_a^T \xi(t)\int_\Omega \nabla u(t).\int_0^t g(t-s)\Big(\nabla u(s)-\nabla u(t)\Big)dsdxdt\\ &-\int_a^T \xi(t)\int_0^t g(s)\parallel\nabla u(t)\parallel_2^2 dsdt.\end{aligned} \tag{5.14}$$

Par substitution de (5.13) et (5.14) dans (5.12) on obtient :

$$\int_a^T \int_\Omega \xi(t)A(t) \mid u_t \mid^{m-2} u_t u dxdt + \int_a^T \xi(t) \parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 dt$$

$$- \int_a^T \xi(t) \int_\Omega \nabla u(t). \int_0^t g(t-s)\Big(\nabla u(s) - \nabla u(t)\Big) dsdxdt$$

$$- \int_a^T \xi(t) \int_0^t g(s) \parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 dsdt = 0,$$

ce qui nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\int_a^T \xi(t) \parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 dt &- \int_a^T \xi(t) \int_0^t g(s) \parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 dsdt \\
&+ \int_a^T \xi(t)(go\nabla u)(t)dt \\
&= -\int_a^T \int_\Omega \xi(t)A(t) \mid u_t \mid^{m-2} u_t u dxdt \\
&+ \int_a^T \xi(t) \int_\Omega \nabla u(t). \int_0^t g(t-s)(\nabla u(s) - \nabla u(t))dsdxdt \\
&+ \int_a^T \xi(t)(go\nabla u)(t)dt,
\end{aligned}$$

d'une autre manière :

$$\int_a^T \xi(t)\Big(1 - \int_0^t g(s)ds\Big) \parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 dt + \int_a^T \xi(t)(go\nabla u)(t)dt$$

$$= -\int_a^T \xi(t) \int_\Omega A(t) \mid u_t \mid^{m-2} u_t u dxdt$$

$$+ \int_a^T \xi(t) \int_\Omega \nabla u(t). \int_0^t g(t-s)\Big(\nabla u(s) - \nabla u(t)\Big) dsdxdt$$
$$+ \int_a^T \xi(t)(go\nabla u)(t)dt$$

ce qui implique que :

$$\int_a^T \xi(t)\bigg[\Big(1 - \int_0^t g(s)ds\Big) \parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 dt + (go\nabla u)(t)\bigg] dt$$

$$= -\int_a^T \xi(t) \int_\Omega A(t) \mid u_t \mid^{m-2} u_t u dxdt$$

$$+ \int_a^T \xi(t) \int_\Omega \nabla u(t). \int_0^t g(t-s)\Big(\nabla u(s) - \nabla u(t)\Big) dsdxdt + \int_a^T \xi(t)(go\nabla u)(t)dt$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
2\int_a^T \xi(t)E(t)dt &= -\int_a^T \xi(t)\int_\Omega A(t) \mid u_t \mid^{m-2} u_t u dx dt \\
&+ \int_a^T \xi(t)\int_\Omega \nabla u(t).\int_0^t g(t-s)\Big(\nabla u(s)-\nabla u(t)\Big)ds dx dt \\
&+ \int_a^T \xi(t)(go\nabla u)(t)dt. \qquad (5.15)
\end{aligned}$$

Rappelons tout d'abord que l'inégalité de Young peut s'écrire parfois sous la forme :

$$ab \leq \delta a^p + C(\delta)b^q \ , \ avec \ C(\delta) = \delta^{-\frac{1}{p-1}}$$

donc en appliquant cette inégalité pour $p = \frac{m}{m-1}$ et $q = m$, on arrive à :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega A(t) \mid u_t \mid^{m-2} u_t u dx dt &\leq A\int_\Omega \mid u_t \mid^{m-1} \mid u \mid dx \\
&\leq A\delta\int_\Omega \mid u \mid^m dx + AC(\delta)\int_\Omega \Big(\mid u_t \mid^{m-1} \Big)^{\frac{m}{m-1}} dx \\
&\leq A\delta\int_\Omega \mid u \mid^m dx + AC(\delta)\int_\Omega \mid u_t \mid^m dx
\end{aligned}$$

rappelons aussi que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$
(l'injection continue de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$)

$$pour \ 2 \leq q \leq \frac{2n}{n-2} \ si \ n \geq 3$$

ou

$$pour \ q > 2 \ si \ n = 1, 2$$

ce qui nous permet d'écrire :

$$\parallel u \parallel_q \leq C_p \parallel \nabla u \parallel_2$$

alors :

$$pour \ 2 \leq m \leq \frac{2n}{n-2} \ si \ n \geq 3$$

ou

$$pour \ m > 2 \ si \ n = 1, 2$$

on a :

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^m(\Omega)$$

donc, on peut écrire :

$$\parallel u \parallel_m \leq C_p \parallel \nabla u \parallel_2$$

ce qui nous donne :

$$\parallel u \parallel_m^m \leq C_p^m \parallel \nabla u \parallel_2^m \leq C_e \parallel \nabla u \parallel_2^m$$

ou d'une autre façon :

$$\int_\Omega \mid u \mid^m dx \leq C_e \parallel \nabla u \parallel_2^m .$$

En utilisant l'inégalité de Young et le fait que $\xi(t) \leq \xi(0) = M$, on obtient, d'une part :

$$\begin{aligned}
- & \int_a^T \xi(t) \int_\Omega A(t) \mid u_t \mid^{m-2} u_t u dx dt \\
\leq & \ A \int_a^T \xi(t) \int_\Omega \mid u_t \mid^{m-2} u_t u dx dt \\
\leq & \ A \int_a^T \xi(t) \Big[\delta \int_\Omega \mid u \mid^m dx + C(\delta) \int_\Omega \mid u_t \mid^m dx \Big] dt \\
\leq & \ A\delta \int_a^T \xi(t) \int_\Omega \mid u \mid^m dx + AC(\delta) \int_a^T \xi(t) \int_\Omega \mid u_t \mid^m dx dt,
\end{aligned}$$

en exploitant (5.10) on trouve :

$$\begin{aligned}
& - \int_a^T \xi(t) \int_\Omega A(t) \mid u_t \mid^{m-2} u_t u dx dt \\
\leq & \ A\delta \int_a^T \xi(t) C_e \parallel \nabla u(t) \parallel_2^m dt - AC(\delta) \int_a^T \xi(t) \frac{1}{C_0} E'(t) dt
\end{aligned} \tag{5.16}$$

où

$$A = \sup_{t \in j} \parallel A(t) \parallel < +\infty$$

(puisque A est borné).
On sait que :

$$\parallel \nabla u \parallel_2^m = \parallel \nabla u \parallel_2^{m-2} \parallel \nabla u \parallel_2^2$$

et

$$\begin{aligned}
\parallel \nabla u \parallel_2^2 & \leq \frac{2}{l} E(0) \\
\parallel \nabla u \parallel_2 & \leq \left(\frac{2}{l} E(0) \right)^{\frac{1}{2}} \\
\parallel \nabla u \parallel_2^{m-2} & \leq \left(\frac{2}{l} E(0) \right)^{\frac{m-2}{2}} = C_\star
\end{aligned}$$

ce qui nous donne :

$$\parallel \nabla u \parallel_2^m \leq C_\star \parallel \nabla u \parallel_2^2,$$

pour cela l'estimation (5.16) peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}
- \int_a^T \xi(t) \int_\Omega A(t) \mid u_t \mid^{m-2} u_t u dx dt & \leq A\delta C_e C_\star \int_a^T \xi(t) \parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 dt \\
& - \frac{AC(\delta)}{C_0} \int_a^T \xi(t) E'(t) dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq A\delta C_e C_\star \int_a^T \xi(t) \parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 dt \\
&- \frac{AMC(\delta)}{C_0} \int_a^T E'(t) dt
\end{aligned} \tag{5.17}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned}
&\int_a^T \xi(t) \int_\Omega \nabla u(t). \int_0^t g(t-s)\Big(\nabla u(s) - \nabla u(t)\Big) dsdxdt \\
\leq\ & \delta \int_a^T \xi(t) \parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 dt \\
+\ & \frac{1}{4\delta} \int_a^T \xi(t) \int_\Omega \mid \int_0^t g(t-s)\Big(\nabla u(s) - \nabla u(t)\Big) ds \mid^2 dxdt \\
\leq\ & \delta \int_a^T \xi(t) \parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 dt \\
+\ & \frac{1}{4\delta} \int_a^T \xi(t) \int_0^t g(t-s) ds \int_0^t g(t-s) \mid \nabla u(s) - \nabla u(t) \mid^2 dsdxdt \\
\leq\ & \delta \int_a^T \xi(t) \parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 dt \\
+\ & \frac{1}{4\delta} \int_a^T \xi(t) \Big(\int_0^t g(s) ds \Big) (go\nabla u)(t)) dt \\
\leq\ & \delta \int_a^T \xi(t) \parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 dt + \frac{1-l}{4\delta} \int_a^T \xi(t)(go\nabla u)(t)) dt.
\end{aligned} \tag{5.18}$$

En intervenant (5.16) et (5.17) dans (5.15) on peut écrire :

$$\begin{aligned}
2\int_a^T \xi(t) E(t) dt &\leq A\delta C_e C_\star \int_a^T \xi(t) \parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 dt - \frac{AMC(\delta)}{C_0} \int_a^T E'(t) dt \\
&+ \delta \int_a^T \xi(t) \parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 dt + \frac{1-l}{4\delta} \int_a^T \xi(t)(go\nabla u)(t)) dt \\
&+ \int_a^T \xi(t)(go\nabla u)(t) dt \\
&\leq \delta(AC_e C_\star + 1) \int_a^T \xi(t) \parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 dt \\
&+ \left(1 + \frac{1-l}{4\delta}\right) \int_a^T \xi(t)(go\nabla u)(t)) dt - \frac{AMC(\delta)}{C_0} \int_a^T E'(t) dt.
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Par définition de $E(t)$ on a :

$$\parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 \leq \frac{2}{l} E(t),$$

pour cela l'estimation (5.19) peut s'écrire aussi sous la forme :

$$2\int_a^T \xi(t) E(t) dt \quad \leq \quad \frac{2}{l}\delta(AC_e C_\star + 1) \int_a^T \xi(t) E(t) dt$$

$$+ \quad \left(1+\frac{1-l}{4\delta}\right)\int_a^T \xi(t)(go\nabla u)(t))dt - \frac{AMC(\delta)}{C_0}\int_a^T E'(t)dt. \tag{5.20}$$

Si on choisit maintenant,

$$\delta = \frac{l}{2(AC_eC_\star + 1)}$$

alors (5.20) prend la forme :

$$\int_a^T \xi(t)E(t)dt \quad \leq \quad C_1\int_a^T \xi(t)(go\nabla u)(t)dt - C_2\int_a^T E'(t)dt,$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes positives.
Ce qui donne aussi :

$$\begin{aligned}
\int_a^T \xi(t)E(t)dt &\leq C\Big[\int_a^T \xi(t)\int_0^t g(t-s)\parallel \nabla u(t)-\nabla u(s)\parallel_2^2 dsdt \\
&- \int_a^T E'(t)dt\Big] \\
&\leq C\Big[\int_a^T \int_0^t \xi(t)g(t-s)\parallel \nabla u(t)-\nabla u(s)\parallel_2^2 dsdt \\
&- \int_a^T E'(t)dt\Big] \\
&\leq C\Big[\int_a^T \int_0^t \xi(t-s)g(t-s)\parallel \nabla u(t)-\nabla u(s)\parallel_2^2 dsdt \\
&- \int_a^T E'(t)dt\Big].
\end{aligned}$$

En utilisant la condition (G_3) on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\int_a^T \xi(t)E(t)dt &\leq C\Big[-\int_a^T \int_0^t g'(t-s)\parallel \nabla u(t)-\nabla u(s)\parallel_2^2 dsdt \\
&- \int_a^T E'(t)dt\Big] \\
&\leq C\Big[-\int_a^T (g'o\nabla u)(t)dt - \int_a^T E'(t)dt\Big],
\end{aligned}$$

et en exploitant (5.11), on arrive à :

$$\begin{aligned}
\int_a^T \xi(t)E(t)dt &\leq C\Big[-2\int_a^T E'(t)dt - \int_a^T E'(t)dt\Big] \\
&\leq -3C\int_a^T E'(t)dt \\
&\leq -C_3\int_a^T E'(t)dt \\
&\leq -C_3\Big(E(T)-E(a)\Big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq C_3\Big(E(a) - E(T)\Big) \\ &\leq C_3 E(a), \quad \forall a \geq 0 \end{aligned}$$

donc :

$$\int_a^T \xi(t)E(t)dt \quad \leq \quad \lambda E(a), \quad \forall a \geq 0 \tag{5.21}$$

où λ est une constante strictement positive.

□

Lemme 5.2.2 *(Martinez)*

Soit $E : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction non croissante et $\phi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction strictement croissante de classe C^1 telle que $\phi(0) = 0$ et $\phi(t) \longrightarrow +\infty$ si $t \longrightarrow +\infty$ et aussi il existe $q \geq 0$ et $A > 0$ tels que :

$$\int_s^{+\infty} E(t)^{q+1}\phi'(t)dt \leq \frac{1}{A}E(0)^q E(s)$$

alors :

$$E(t) \leq E(0)\left(\frac{1+q}{1+qA\phi(t)}\right)^{\frac{1}{q}}, \ \forall t \geq 0 \ \ si \ \ q > 0$$

et

$$E(t) \leq E(0)e^{1-A\phi(t)}, \ \forall t \geq 0 \ \ si \ \ q = 0$$

Preuve : Pour la démonstration consulter le lemme 2.3 (page 239) [10]

□

Théorème 5.2.2

Soit $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ donné. Si de plus g et ξ satisfaisont (G_1) et (G_3), alors il existe deux constantes strictement positives
ω et K telles que :

$$E(t) \quad \leq \quad Ke^{-\omega\int_0^t \xi(s)ds}, \ \forall t > 0$$

Preuve : D'après (5.21) on a :

$$\int_a^T \xi(t)E(t)dt \leq \lambda E(a)$$

Posons $\phi'(t) = \xi(t)$ avec $\phi(0) = 0$ alors pour tout $t > 0$ on a :

$$\begin{aligned} \int_0^t \phi'(s)ds &= \int_0^t \xi(s)ds \\ \phi(t) - \phi(0) &= \int_0^t \xi(s)ds \end{aligned} \tag{5.22}$$

c'est-à-dire que :

$$\phi(t) = \int_0^t \xi(s)ds$$

puisque on a : $\phi(t) \longrightarrow +\infty$ si $t \longrightarrow +\infty$ car :

$$\int_0^{+\infty} \xi(t)dt = +\infty. \quad \Big(de \ \ la \ \ condition(G_3)\Big),$$

alors,la fonction ϕ verifie bien le lemme de Martinez. En effet,
$\phi'(t) = \xi(t) > 0$ qui veut dire que ϕ est croissante de plus $\phi(0) = 0$ et $\phi(t) \longrightarrow +\infty$ si $t \longrightarrow +\infty$.
A ce moment (1.21) s'écrit :

$$\int_a^T \phi'(t)E(t)dt \ \ \leq \ \ \lambda E(a), \tag{5.23}$$

et par passage à la limite quand $T \longrightarrow +\infty$, (1.23) donne :

$$\int_a^{+\infty} \phi'(t)E(t)dt \ \ \leq \ \ \lambda E(a), \ \ \forall a \geq 0 \tag{5.24}$$

donc les conditions du lemme de Martinez sont vérifiées pour le cas

$$q = 0 \ \ et \ \ \lambda = \frac{1}{A}.$$

Par la suite on conclut que :

$$E(t) \leq E(0)e^{1-\frac{1}{\lambda}\phi(t)}$$

autrement dit :

$$E(t) \leq E(0)e.e^{-\frac{1}{\lambda}\int_0^t \xi(s)ds}$$

en posant $K = E(0)e$ et $\omega = \frac{1}{\lambda}$ on obtient :

$$E(t) \leq Ke^{-\omega \int_0^t \xi(s)ds}.$$

$\square$

Conclusion

Dans ce travail, on remarque que les solutions d'un problème parabolique linéaire ou quasi-linéaire ont le même type de décroissance avec la fonction de relaxation g. Une question qui peut être posée est :
qu'est ce qu'on peut obtenir si la condition de décroissance de g est remplacée par :

$$\int_0^{+\infty} \exp(\alpha s) g(s) ds < +\infty, \qquad \alpha > 0 \qquad ?$$

Bibliographie

[1] R.A. Adams, Sobolev space, Academic Press 1976

[2] G. Allaire, Analyse numérique et optimisation. Edition de L'Ecole Polytecnique 2005, ISBN : 2-7302-1255-8.

[3] L. Alfonsi and F. Weissler, Bow up in $\mathbb{R}^n$ for a parabolic equation with a damping nonlinear gradient term, Nonlinear Diffusion Equation and Their Equilibrium states, 3(Gregynog, 1989), Progr. Nonlinear Differential Equations Appl, Vol. 7, Birkhäuser Boston, Massachusetts, 1992, pp. 1-20.

[4] S. Berrimi and S.A. Messaoudi, A decay result for a quasilinear parabolic system, Progress in Nonlinear Differential Equations and Applications, Vol. 63(2005), 43-50.

[5] S. Berrimi and S.A. Messaoudi, A decay result in a parabolic system with viscoelastic term, Proceedings of the UAE Math-Day(2005), Nova Publishing Company, New York(To appear).

[6] S. Berrimi and S.A. Messaoudi, Exponential decay of solutions to a viscoelastic equation with nonlinear localized damping.-Electron. J. Differential Equations 2004 : 88, 2004, 1-10.

[7] J. Ball, Remarks on blow up and nonexistence theorems for nolinear evolution equations, Quart. J. Math. Ser. (2) 28 (1977) no. 112, 473-486.

[8] R. Barreto, E.C. Lapa and Munoz Rivera, Decay rates for viscoelastic plates with memory, J. Elasticity 44 $\sharp$ 1 (1996), 61-87.

[9] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle, théorie et applications. Dunod 1999.

[10] A. Ben Aissa and S. Mokeddem, Decay estimates for the wave equation of p-Laplacian type with dissipation of m-Laplacian type, Mathematical Methods in the Applied Sciences, Maths. Appl. Sci. 2007, 30 : 237-247.

[11] A. Ben Aissa and S.A. Messaoudi, Exponential decay of solutions of a nonlinearly damped wave equation, NoDEA Vol. 12 $\sharp$ 4(2005), 391-399.

[12] M.M. Cavalcanti, V.N.D. Cavalcanti and J.A. Soriano, Exponential decay for the solutions of semlinear viscoelastic wave equations with localized damping, Elect. J. Diff. Eqs Vol. 2002 (2002) 44, 1-14.

[13] A. Friedman, Mathematics in industrial Problems. Part 5, The IMA Volumes in Mathematics and Its Applications, Vol. 49, Springer, New York, 1992.

[14] R.J. Goldstein, International Journal of Heat Mass Tfansfer 48 (2005) 819-927.

[15] V.K. Kalantarov and O.A. Ladyzhenskaya, The occurrence of collapse for quasilinear equations of parabolic and hyperbolic types, J. Sov. Math. 10(1978), 53-70.

[16] H.A. Levine, Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form $Pu_t = -Au + F(u)$, Arch. Ration. Mech. Anal. 51(1973), 371-386.

[17] H.A. Levine, S. Park and J. Serrin, Global existence and nonexistence theorems for quasilinear evolution equation of formally parabolic type, J. Differential Equations 142 (1998), no. 1, 212-229.

[18] J.L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Dunod (1969).

[19] W. Liu, General decay of solutions to a viscoelastic wave equation with nonlinear localized damping, Anal Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica Volume 34, (2009), 291-302.

[20] P. Martinez, A new method to decay rate estimates for dissipative systems, ESAIM Control. Optim. Cal. Var. 4(1999), 419-444.

[21] S.A. Messaoudi, A note on blow up of solutions of a quasilinear heat equation with vanishing initial energy, J. Math. Anal. Appl 273 (2002), 243-247.

[22] S.A. Messaoudi, Decay and gradient estimate for solutions of a semilinear heat equation, Arab journal of Math. Sciences Vol. 9 $\sharp$ 2 (2003), 1-7.

[23] S.A. Messaoudi, General decay of solutions of a viscoelastic equation. J. Math. Anal. Appl. 341, 2008, 1457-1467.

[24] S.A. Messaoudi, Blow up and global existence in a nonlinear viscoealastic equation. Math. Nachr. 260, 203, 58-66.

[25] S.A. Messaoudi, On the control of solutions of a viscoelastic equation. Journal of the Franklin institue 344 (2007), 765-776.

[26] S.A. Messaoudi and N.E. Tatar, Exponential and polynomial decay for a quasilinear viscoealstic equation. Nonlinear Anal. 68, 2008, 785-793.

[27] M. Nakao, Decay of solutions of some nonlinear evolution equation, J. Math. Anal Apl. 60 (1977), 542-549.

[28] M. Nakao and Y. Ohara, Gradient estimates for a quasilinear parabolic equation of the mean curvature type, J. Math. Soc. Japan 48 $\sharp$ 3 (1996)455-466.

[29] J.A. Nohel, Nonlinear Volterra equations for heat flow in materials with memory, Integral and Functional Differential Equations (Proc.Conf., West Virginia Univ., Morgantown, W. Va, 1979) (T.L. Herdman, H. W. Setch, and III S.M. Rankin, eds.), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., Vol. 67, Dekker, New York, 1981, pp. 3-82.

[30] G.Da Prato and M. Lanneli, Existence and regularity for a class of integrodiferrential equations of parabolic type, J. Math. Anal. Appl. 112 (1985), no. 1, 36-55.

[31] P. Pucci and J. Serrin, Asymptotic stability for nonlinear parabolic systems, Energy methods in continum mechanics, Kluwer Acad. Publ, Dordrecht, (1996).

[32] P.A. Raviat et J.M. Thomas, Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles, Masson (1983).

[33] H.M. Yin, On parabolic Volterra equations in serval space dimensions, SIAM J. Math. Anal. 22 (1991), no. 6, 1723-1773.

[34] J.N. Zhao, Existence and nonexistence of solutions for $u_t = div(\mid \nabla u \mid^{p-2} \nabla u + f(\nabla u, u, x, t))$, J. Math. Anal. Appl. 172 (1993), no. 1, 130-146.

ملخص

في هذا العمل، نقوم بدراسة تناقص حلول بعض المعادلات المكافئة الخطية و شبه الخطية و بالخصوص نتطرق إلى معادلة الحرارة مع حد ذاكرة.

سوف نعالج ثلاثة أنواع من التناقص (التناقص الأسي، التناقص الجبري، التناقص العام).

كلمات مفتاحية: حد ذاكرة، التناقص الأسي، التناقص الجبري، التناقص العام.

Abstract

In this work, we studied the decay of solutions of some linear and quasilinear parabolic equations. In particular, we considered the heat equation with a memory term. We discussed three types of decay (exponential decay, polynomial decay and general decay).

Key Words: memory term, exponential decay, polynomial decay, general decay.

Résumé

Dans ce travail, nous étudions la décroissance des solutions de quelques équations paraboliques linéaires et quasi-linéaires. Particulièrement, nous traitons le cas de l'équation de la chaleur avec un terme mémoire. On étudiera trois types de décroissance (décroissance exponentielle, décroissance polynomiale et décroissance générale).

Mots Clés: terme mémoire, décroissance exponentielle, décroissance polynomiale, décroissance générale.