



Université Kasdi Merbah Ouargla

**FACULTE DES SCIENCES
ET SCIENCES DE L'INGENIEUR**

**DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL
ET HYDRAULIQUE**

Mémoire

Présenté pour l'obtention du diplôme de

MAGISTER

Spécialité : Hydraulique

**Option : Aménagements Hydrauliques dans les régions
arides**

Présenté par :

Zerrouki Moussa

Thème

***CONTRIBUTION A LA VALORISATION DE L'ENERGIE
GEOTHERMIQUE APPLICATIONS A LA REGION DE
OUARGLA***

Soutenu publiquement le : -/-/2007

Devant le jury composé de :

Mr. Salah Saouli	M. de Conférences	Université de Ouargla	Président
Mr. Djamel boutoutaou	M.e de Conférences	Université de Ouargla	Examineur
Mr. Houcine Benmoussa	M. de Conférences	Université de Batna	Examineur
Mr. Noureddine Settou	M. de Conférences	Université de Ouargla	Rapporteur
Mr. Kamel Nettari	Maître assistance	Université de Ouargla	Membre invité

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon promoteur, Monsieur Noureddine Settou pour leur collaboration, leur disponibilité, et leurs judicieux conseils tout long de ce travail.

Mes vifs et sincères remerciements vont aussi aux Monsieur Salah Saouli, Monsieur Hocine benmoussa et Monsieur Djamal Boutoutaou pour avoir bien voulu participer à ce jury.

Mes remerciements vont également à tout le personnel de département de l'hydraulique et génie civil.

Je remercie très sincèrement tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce travail.

Résumé

Dans ce travail, nous nous intéressons à l'étude d'un système de récupération de la chaleur d'un réservoir souterraine saturé d'eau naturellement (milieu humide) ou bien crée artificiellement (milieu sec initialement) soumis a un gradient de température en fonction de la profondeur, le principe de ce système c'est d'injecté dans ce réservoir un eau froid a laide d'un puits injecteur se réchauffe puis revient à la surface de la terre par un puits producteur, deux types d'écoulement sont a étudier, le premier un écoulement en charge dans une conduite a axisymétrique et le seconde un écoulement dans un milieu poreux.

La méthode de volumes finis a été utilisée dans la discrétisation, où on obtient les équations approximatives qui prennent des propriétés constantes sur chaque élément de maillage, qui est appelé volume de contrôle. Une analyse et une synthèse des résultats numériques sont présentées dans la fin de ce travail.

Mots Clés : la géothermie, équations de bilan, darcy, méthode de volumes finis, SIMPLE, simulation numérique

ملخص:

في هذا العمل نهتم بدراسة نظام استخراج الطاقة الحرارية من خزان باطني مشبع بالماء طبيعياً أو تم ملأه (خزان جاف في الأصل)، خاضع لتغير في درجة الحرارة حسب تغير العمق وذلك من خلال حقن الخزان بالماء بواسطة بئر وبعد بلوغه درجة حرارة معينة يتم إسترجاعه بواسطة بئر أو عدة آبار. ندرس خلال هذا العمل نوعين من الجريان النوع الأول هو جريان تحت ضغط داخل قناة ذات محور متناظر في حين أن الجريان الثاني هو جريان داخل وسط مسامي. نستعمل طريقة الحجوم المتناهية من أجل الحصول على المعادلات المتقطعة هذه المعادلات التقريبية تأخذ خصائص ثابتة في كل حلقة، حوصلة النتائج الرقمية وتحليلها تم تقديمه في نهاية هذا العمل.

الكلمات المفتاحية: حرارة الأرض – معادلات التوازن- قانون دارسي- طريقة الحجوم المتناهية- خوارزمية -- SIMPLE - التشابه الرقمي.

Abstract:

In this work, we are interested in the survey of a system of recuperation of the heat of an underground reservoir saturated naturally of water (humid environment) or create artificially (dry environment initially) submitted has a pressure gradient of temperature according to the depth, the principle of this system it is of injected in this reservoir one water cold weather has ugly of an injection well warms itself then comes back to the surface of the earth by a well producer, two types of out-flow are has study, the first one out-flow in charge in a conduct has axisymétrique and the assists an out-flow in a porous environment.

The method of volumes finished has been used in the discrétisation, where one gets the approximate equations that take constant properties on every element of maillage, that is called volume of control. An analysis and a numeric result synthesis are presented in the end of this work.

Key words: the geothermics, equations of balance, darcy, method of volumes finished, SIMPLE, numeric simulation

TABLE DES MATIERES

TABLE DES MATIERES	
	Page
Remerciements.....	iii
Liste des tables.....	vii
Liste des figures	viii
Nomenclature	xiii
Introduction générale	• \
Chapitre I : La géothermie et les potentialités de la région de Ouargla	
I.1.Introduction	04
<i>I.2.La géothermie</i>	04
I.2.1.principe de la géothermie	04
I.2.2.flux géothermique	05
I.2.3.Le gradient géothermique.....	06
I.2.4.Estimation des conductivités thermiques des roches	07
I.2.5.Evaluation du flux de chaleur.....	08
I.2.6.Les principaux ressources géothermiques.....	10
I.2.7.Les ressources en énergie géothermique.....	10
I.2.8Domaines d'application et importance de la géothermie.....	12
I.2.9L'exploitation de la géothermie dans le monde.....	12
I.3.Contexte géologique de la région de Ouargla	14
I.3.1. Cadre géologique régional.....	14
I.3.2.Cadre géologique local.....	17
I.3.3.Les grands systèmes aquifère	20
I.4.Les potentialités de la région de Ouargla en énergie géothermique.....	23
I.4.1. L'énergie géothermique.....	24
I.4.2. La géothermie basse énergie.....	24

TABLE DES MATIERES

Chapitre II: Formulation mathématique

II.1.Introduction.....	26
II.2.Position du problème.....	26
II.3.Modélisation d'un écoulement dans une conduite axisymétrique.....	28
II.3.1.Equation de continuité	28
II.3.2 Equation de conservation de quantité de mouvement	29
II.3.3 Equation de conservation de l'énergie	30
II.3.4.l'équation d'état	31
II.3.5.Densité des fluides en fonction de la température	32
II.3.6.Système de coordonnées	33
II.3.7.Hypothèses simplificatrices	33
II.3.8.Construction du modèle mathématique	34
II.3.9.Les équations adimensionnées	36
II.3.10.Conditions aux limites.....	40
II.3.11 Modèle mathématique	46
II.4.Modélisation d'un écoulement dans un milieu poreux.....	47
II.4.1 généralités.....	47
II.4.2 Présentation du problème.....	53
II.4.3.Loi de Darcy	54
II.4.4.L'équation de conservation de la masse.....	54
II.4.5.Equation de diffusivité.....	54
II.4.6.L'équation de conservation de énergie	55
II.4.7.Les équations adimensionnées.....	56
II.4.8.les conditions initiales et les conditions aux limites	58
II.4.9.Modèle mathématique.....	60

TABLE DES MATIERES

Chapitre III: résolution par la méthode des volumes finis

III. Introduction	61
III.1.Différences finies	61
III.2.Eléments finis	61
III.3 .Méthode des volumes finis	62
III.4. Principe de la méthode.....	62
III.5 Application de la méthode sur un écoulement dans une conduite.....	64
III.5. 1 Calcul des surfaces.....	66
III.5.2 Application à l'intégration d'une équation de convection-diffusion.....	66
III.5.3.Discrétisation spatiale.....	66
III.5.4. Résolution du système linéaire	74
III.5.5 Critères d'arrêt dans TDMA	76
III.5.6 Algorithme SIMPLE.....	77
III.5.7. Séquence des opérations.....	81
III.5.8 discrétisation des conditions aux limites.....	82
III.6. Modélisation numérique par volumes finis d'un écoulement en milieu poreux	85
III. 7, 1 Choix des schémas numériques.....	85
III. 7, 2. Discrétisation de l'espace.....	85
III. 7, 3 Equation diffusivité.....	86
III. 7, 4 Les conditions aux limites.....	88
III.6.5.Equation d'énergie.....	92

Chapitre VI:Résultats et discussion

IV. 1.Introduction.....	94
IV.2.Présentation des modèles	94
IV3. Les applications sur l'écoulement dans une conduite à axisymétrique	97

TABLE DES MATIERES

IV.3.1. initialisations des variables.....	97
IV.3.2. Optimisation du maillage	98
IV.3.3. Influence du nombre de Reynolds sur les résidus.....	99
IV.3.4. Influence du nombre de Péclet.....	100
IV.4. Les applications sur l'écoulement dans le milieu poreux	105
IV.4.1. initialisations de La charge et de champ de température	105
IV.4.2. Optimisation du maillage	106
IV.4.3. influence de la distance entre les deux puits.....	107
IV.4.4. influence de la perméabilité du milieu.....	108
IV.4.5. influence de la conductivité du milieu.....	109
Conclusion générale	110
Annexes.....	111
Références bibliographiques.....	114

CHAPITRE I

La géothermie et les potentialités de la région de Ouargla

I.1) Introduction:

Nous rattacherons à ce chapitre l'énergie géothermique qui est souvent considérée comme renouvelable ; elle n'est pas dérivée de l'énergie solaire, mais de la chaleur dégagée par la croûte terrestre, grâce aux radioéléments naturels qu'elle contient. Les meilleures perspectives paraissent offertes par les roches sèches et profondes à haute température (au-delà de 150°C) dans lesquelles on fait circuler de l'eau qui sert de caloporteur. On peut alors générer de l'électricité par une turbine. Cette géothermie haute énergie bénéficie du développement des recherches en modélisation des transferts de fluides, ainsi que du suivi géophysique et géochimique des opérations. Elle est aussi une des rares énergies renouvelables exploitables à plein temps [1,2].

I.2) La géothermie:

La géothermie (mot issu du grec « géo » = terre et « thermos » = chaud) est la science qui étudie les phénomènes thermiques internes du globe terrestre. C'est aussi l'ensemble des applications techniques qui permettent d'exploiter les sources d'énergie géothermique.

On peut énumérer quatre bonnes raisons en faveur de l'exploitation de l'énergie géothermique. :

- La géothermie est une source d'énergie indigène et respectueuse de l'environnement. Elle n'engendre dans l'atmosphère ni substances polluantes, ni dioxyde de carbone et remplace de manière idéale les agents énergétiques fossiles.
- La géothermie est disponible en permanence. Elle ne dépende pas des conditions climatiques (soleil, pluie, vent) des saisons ou des heures de la journée. Les gisements géothermiques sont une durée de vie de plusieurs dizaines d'années.
- Inépuisable à la dimension de l'ère humaine, la géothermie fait partie des énergies renouvelables, donc durable, les besoins de la génération actuelle peuvent être satisfaits sans prêter ceux des générations futures.
- Les installations géothermiques sont à peine perceptibles en surface. Elles revendiquent un espace minimum près du forage.
- Les seuls impacts environnementaux de cette énergie presque renouvelable concernent le plus souvent le rejet en surface de l'eau résiduaire fortement chargée en sels (quand il n'y a pas réinjection) et les émissions de gaz incondensables, comme l'H₂S qui a une odeur nauséabonde[2].

I.2.1) principe de la géothermie:

Le principe consiste à extraire l'énergie géothermique contenue dans le sol pour l'utiliser sous forme de chauffage ou pour la transformer en électricité. Il existe un flux géothermique naturel à la surface du globe, mais il est si faible qu'il ne peut être directement capté. En réalité on exploite la chaleur accumulée, stockée dans certaines parties du sous sol (nappes d'eau).

On distingue trois types de géothermie:

- La géothermie privilégiée avec des sources hydrothermales très chaudes, ou forage très profond. C'est la seule forme d'énergie géothermique qui permet

de produire de l'électricité à partir de 150°C , soit directement à partir de gisements de vapeur ou d'eau chaude, ou après injection d'eau en profondeur et récupération de chaleur.

- La géothermie de basse énergie : géothermie des nappes profondes (entre quelque centaines et plusieurs milliers de mètres) aux températures situées entre 30 et 100°C principale utilisation : les réseaux de chauffage urbain.
- La géothermie de très basse énergie : géothermie des faibles profondeurs aux niveaux de température compris entre 10 et 30°C . principale utilisation : le chauffage et la climatisation.

I.2.2) flux géothermique:

Il n'est pas possible d'observer les processus thermiques qui se déroulent au sein de la croûte terrestre et dans le manteau sous-jacent. Toutefois, grâce à l'étude des dégagements thermiques à la surface de notre planète,

Il y a un flux de chaleur, appelé flux géothermique q_G (W/m^2), à travers la croûte terrestre (continentale et marine) causé par la chaleur transférée du manteau à la base de la croûte terrestre ainsi que par la désintégration des matériaux radioactifs contenus dans la croûte. Le flux géothermique montre le comportement général suivant.

- Le flux diminue avec l'âge géologique à cause de la désintégration du matériel radioactif impliqué.
- Le flux est maximal à la surface de la terre et diminue avec la profondeur à cause de la réduction de la quantité de matériel radioactif sous-jacent.
- Le flux varie géographiquement mais relativement uniforme sur de vastes étendues.

Pour la majorité des problèmes d'intérêt, compte tenu des faibles profondeurs et de l'étendue restreinte des études hydrogéologiques, même régionales, le flux géothermique pourra être considéré constant à la fois en fonction de la profondeur et sur l'ensemble de la région d'étude considérée. Pour les continents, le flux géothermique moyen varie entre $40 \text{ mW}/\text{m}^2$ dans les cratons stables et $70 \text{ mW}/\text{m}^2$ dans les provinces tectoniques tertiaires.

Le flux géothermique est transféré par conduction à travers la croûte terrestre. Pour que ce flux se fasse vers la surface de la terre, ceci implique forcément que la température est plus élevée en profondeur qu'à la surface de la terre. Compte tenu du temps généralement très long pendant lequel le flux géothermique s'est maintenu pratiquement constant dans une région donnée, les conditions de transfert de chaleur du flux géothermique peuvent généralement être considérées en régime permanent.

La chaleur est originellement transmise de proche en proche à travers les roches de la croûte terrestre par conduction thermique. Il est donc assez facile de corréler les mesures du flux de chaleur avec les phénomènes géologiques profonds. Cependant, l'interprétation de ces mesures devient plus délicate quand la croûte est parcourue par des circulations d'eau. La présence de nappes aquifères peut abaisser le flux de chaleur; de même l'existence de sources chaudes et de geysers complique la géométrie des échanges thermiques [2].

I.2.3) Le gradient géothermique:

La température des roches augmente en moyenne de 1 °C tous les 30 mètres de profondeur : c'est le gradient géothermique terrestre moyen. En certains points du globe, et notamment dans les régions volcaniques, qui correspondent à des intrusions de magma dans la croûte terrestre, le gradient géothermique est plus élevé (10 °C par 100 mètres en Alsace et même exceptionnellement 100 °C par 100 mètres à Larderello, Italie, seulement 1 °C par 100 mètres près de Padoue) et l'eau des précipitations qui traverse les roches s'échauffe de plus en plus en profondeur.

Le gradient géothermique g_G ($^{\circ}C/m$) représentant l'augmentation de la température avec la profondeur $\frac{\partial T}{\partial z}$, sera donc directement fixé par la magnitude du flux géothermique et la conductivité thermique λ ($W/m^{\circ}C$) du matériel terrestre traversé par ce flux, tel que spécifié par la loi de Fourier de conduction thermique.

$$g_G = \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{q_G}{\lambda} \quad (I-01)$$

L'effet du flux géothermique et son expression dans le gradient géothermique se retrouvent à des profondeurs excédant généralement 100 m. la température près de la surface du sol (moins de 10m) est affectée par les variations de température saisonnières tandis qu'à 50-100 m de profondeur l'écoulement de l'eau souterraine contrôle la température le gradient géothermique des régions de bouclier et de bassins sédimentaire est généralement entre 15 et 30 $^{\circ}C/Km$. De fortes valeurs sont présentes dans les régions tectoniquement actives ($\geq 45^{\circ}C/Km$).

Dans le cas simple ou tout le matériel considéré a une seule valeur de conductivité thermique, le profil de température en fonction de la profondeur $T(z)$ augmentera linéairement avec la profondeur en fonction du gradient géothermique à partir de la température moyenne à la surface du sol $T_s(^{\circ}C)$:

$$T(z) = T_s + \frac{\partial T}{\partial z} \cdot z = T_s + g_G \cdot z = T_s + \frac{q_G}{\lambda} \cdot z \quad (I-02)$$

Lorsqu'on considère l'évolution de la température sur de grandes profondeurs, comme dans les bassins sédimentaires, il est probable que les formations rocheuses aient des conductivités thermiques variables. Dans un tel cas, la figure I-01 montre que le profil de température sera la même plus complexe. Pour une formation donnée, la définition du gradient géothermique reste la même et le changement de température avec la profondeur dépendra toujours du flux géothermique et de la conductivité thermique de la formation (équation I-01). Les lignes d'égale température, les isogéothermes, seront plus rapprochées dans les formations à faible conductivité thermique. Le flux géothermique est en fait le même à travers toutes les formations mais leur conductivité thermique distincte modifient le gradient géothermique relié au flux chaleur à travers les formations. Dans un tel cas le profil de température évoluera à partir de la température moyenne en surface T_s en augmentant en fonction du gradient géothermique de la formation. La température atteinte à la surface la formation sous-jacente sera le point de départ du profil de température à travers cette formation, et ainsi de suite [2].

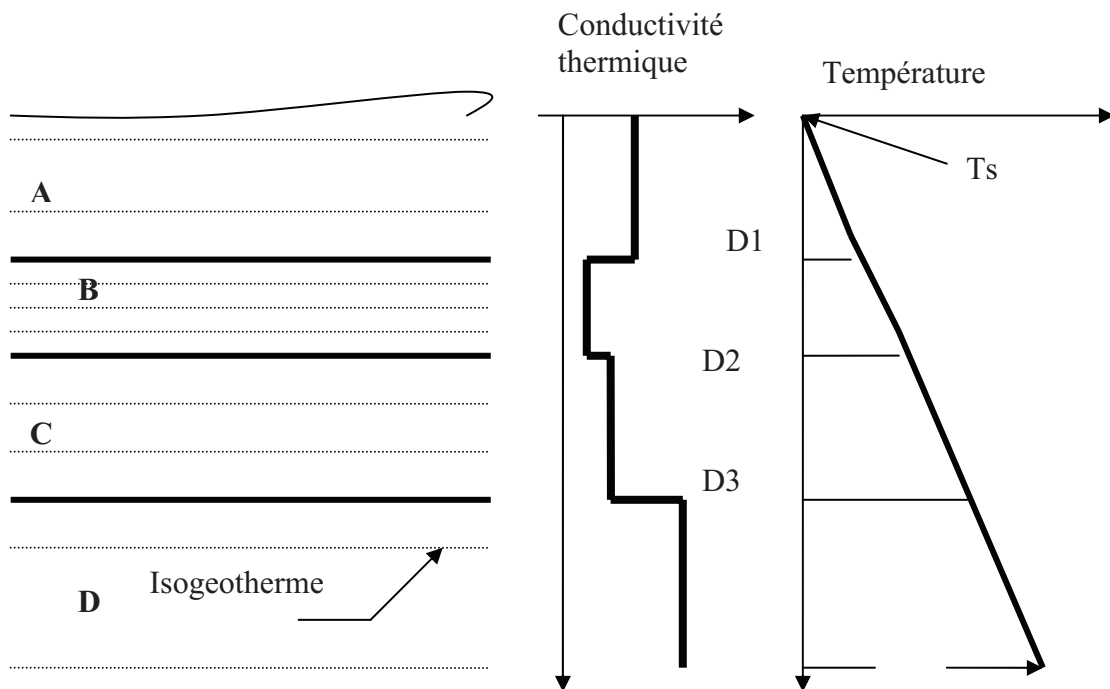


Figure I. 1: Concept du gradient géothermique Séquence des formations (A à D) ayant des conductivités différentes

Lorsque l'évolution de la température à travers toute l'épaisseur de la croûte terrestre est considérée, il faut alors tenir compte de la diminution du flux géothermique avec la profondeur. Dans la partie supérieure de la croûte, les gradients géothermiques sont soumis à toutes sortes de perturbations qui donnent en fait des indications importantes sur plusieurs processus géologiques: perturbations par la topographie en région montagneuse; effet persistant de la dernière glaciation et effet majeur de la présence de pergélisol sur le gradient géothermique; effets de processus tectoniques, volcaniques, géothermaux et intrusions de sel. Enfin, l'identification de régions de forts gradients géothermiques est faite lors de l'évaluation du potentiel d'exploitation de l'énergie géothermique. Cette énergie renouvelable pourrait représenter globalement un apport plus important à la consommation énergétique.

I.2.4) Estimation des conductivités thermiques des roches :

La conductivité thermique mesure l'aptitude des roches au transfert de chaleur par conduction. Elle influe directement sur la configuration des isothermes. Leur évaluation peut être réalisée par deux approches différentes.

- Mesure directe par la méthode de l'aiguille chauffante en laboratoire pour quelques échantillons.
- Estimation à partir de la composition minéralogique, en tenant compte de la porosité et des valeurs publiées dans la littérature pour différents minéraux

La conductivité d'une roche est fonction de la conductivité de la matrice solide λ_s et celle de fluide qu'elle contient λ_f , la relation s'exprime par la formule [5]:

$$\lambda_e = (\lambda_f)^\phi \cdot (\lambda_s)^{(1-\phi)} \quad (I-03)$$

- ϕ c'est la porosité.

Quand la roche est pluri minérale, la conductivité de matrice λ_s est calculée à l'aide d'un modèle géométrique:

$$\lambda_s = \prod_{i=1}^n \lambda_i^{e_i} \quad (I-04)$$

Où e_i représente la proportion dans la roche du minérale de conductivité λ_i . La composition minéralogique peut être déduire des a partir des analyses sur les carotte.

Quand une formation est composée d'une alternance de fines couches des roches simples, la conductivité de la formation peut être calculée par un modèle en série [6]:

$$\lambda_s = \left(\sum_{i=1}^n \frac{e_i}{\lambda_i} \right) \quad (I-05)$$

Le tableau (I. 1) donne les valeurs des roches les plus courantes sont données à titre indicatif [3].

I.2.5) Evaluation du flux de chaleur:

Le calcul de flux de chaleur peut être réalisé par inversion stochastique en utilisant l'algorithme développé par Vasseur et al. (1985). Pour un milieu stratifié de n couches horizontales et semi infinies, dont la $j^{ème}$ couche est d'épaisseur H_j et de résistivité thermique $R_{e_j} = \frac{1}{\lambda_j}$, la température T_j à une profondeur z_j est liée à celle de la surface T_0 par l'équation[6].:

$$T_i = T_0 + q_s \cdot \sum_{j=1}^n H_{ij} \cdot R_{e_j} \quad (I-06)$$

Cet algorithme donne la valeur optimale, après itérations jusqu'à convergence, du flux chaleur à la surface.

Type de roche	conductibilité	thermique	$\lambda(W / mK)$
Roches magmatiques	min	typique	max
Basalte	1.3	1.7	2.3
Diorite	2.0	2.6	2.9
Gabbro	1.7	1.9	2.5
Granit	2.1	3.4	4.1
Péridotite	3.8	4.0	5.3
Rhyolithe	3.1	3.3	3.4
Roches métamorphiques			
Gneiss	1.9	2.9	4.0
Marbre	1.3	2.1	3.1
Méta quartzite		Env. 5.8	
Micaschistes	1.5	2.0	3.1
Schistes argileux	1.5	2.1	2.1
Roches sédimentaires			
Calcaire	2.5	2.8	4.0
Marne	1.5	2.1	3.5
Quartzite	3.6	6.0	6.6
Sel	5.3	5.4	6.4
Grés	1.3	2.3	5.1
Roches argileuses, limoneuses	1.1	2.2	3.5
Roches non consolidées			
Gravier, sec	0.4	0.4	0.5
Gravier, saturé d'eau		Env. 1.8	
Moraine	1.0	2.0	2.5
Sable, sec	0.3	0.4	0.8
Sable, saturé d'eau	1.7	2.4	5.0
Argile/limon, sec	0.4	0.5	1.0
Argile/limon, saturé d'eau	0.9	1.7	2.3

Tableau I.1: Conductibilité thermique de différents types de Roche.

I.2.6) Principaux types de ressources géothermiques:

La chaleur géothermique peut-être exploitée grâce à la présence dans le sous-sol de véritables gisements où se trouve stockée l'énergie calorifique. Selon la nature des terrains, on classera ces gisements en trois catégories : réservoirs de vapeur, réservoirs d'eau chaude, ou roches chaudes sèches.

Les deux premiers types de gisements sont constitués par des infiltrations d'eau circulant dans une couche géologique perméable et poreuse recouverte de terrains imperméables [3].

I.2.6.1) Réservoirs de vapeur :

Si l'eau de gisement est partiellement vaporisée, elle pourra être récupérée sous la forme de vapeur sèche directement utilisable pour faire tourner les turbines des centrales électriques. Cependant, ces gisements de vapeur sont relativement rares. Les gisements les plus connus sont Lardarello (Italie), Geysers (Californie) et Matsukawa (Japon).

I.2.6.2) Réservoirs d'eau chaude :

Le plus souvent, l'eau des gisements géothermiques reste liquide et, suivant sa température, elle peut être utilisée soit pour le chauffage, soit pour la production d'électricité. Dans ce dernier cas, la baisse de pression que subit l'eau chaude pendant sa remontée vers la surface produit sa vaporisation de sorte qu'en tête de puits on dispose d'un mélange diphasique eau-vapeur dont on peut utiliser la phase gazeuse pour alimenter des turbines.

I.2.6.3) La géothermie des roches fracturées:

Consiste à récupérer la chaleur de roches chaudes en profondeur par une circulation d'eau vers la surface. Elle constitue une énorme réserve d'énergie puisque l'exploitation de la chaleur contenue dans une sphère de 1 km de rayon permettrait d'alimenter pendant un siècle une centrale électrique de 10 MW.

La principale difficulté consiste à créer un échangeur souterrain par stimulation hydraulique des fractures existantes dans la roche en profondeur.

I.2.7) les ressources en énergie géothermique :

Selon la profondeur des gisements les ressources en énergie géothermique peuvent se classer, on tient compte des moyennes de leur exploitation comme suit :

I.2.7.1) Ressources de faibles profondeurs:

- Sondes géothermiques
- Collecteur enterré horizontal
- Captage de l'eau souterraine
- Pieux échangeurs (pieux de fondation)

I.2.7.2) Ressources des grandes profondeurs:

- Sondes géothermiques profondes
- Aquifère profond
- Eau du tunnel
- Hot dry rock

a) Captage de l'eau souterraine:

Lorsque la perméabilité du terrain est suffisamment élevée. L'eau de la nappe phréatique est une source froide idéale pour une pompe à chaleur. L'exploitation de la nappe phréatique fait appel à un puits unique ou multiple (puits de production et injection).

b) Pieux échangeurs:

Un pieu échangeur est un pieu de fondation dans lequel un tube ou un réseau de tube a été installé de manière à pouvoir faire circuler un fluide caloporteur pour échanger de la chaleur avec le terrain. Ses deux principales fonctions sont donc de reporter en profondeur les charges d'une construction et de servir d'échangeur de chaleur avec le terrain. Un réseau de pieux de fondation est mis en œuvre lorsque le sol en surface n'a pas une résistance suffisante pour supporter les charges de l'ouvrage par l'intermédiaire de fondations superficielles. D'une longueur unitaire pouvant varier de quelques mètres à plusieurs dizaines de mètres, une partie ou la totalité des pieux peuvent être équipés à une en « pieu échangeur ». Le système de pieux échangeurs, généralement raccordé à une pompe à chaleur, permet d'extraire la chaleur du sous sol pour satisfaire des besoins de chaleur en hiver et d'y rejeter des charges thermiques issues de la production de froid en été [3].

c) Aquifère profond:

Les bains thermaux sont certainement la forme la plus ancienne d'exploitation de l'énergie géothermique. Alors que l'on exploitait initialement les sources d'eau chaude jaillissant en surface, on n'a pas tardé à augmenter tant le débit que la température en effectuant des sondages et en construisant des puits. Des forages géothermiques profonds permettent de nos jours de pomper de l'eau thermale à la surface et de l'exploiter à diverses fins de chauffage selon le principe de l'utilisation en cascades.

Si les eaux souterraines profondes ne sont pas que faiblement minéralisées (moins de 2 g/L) et s'il est possible d'évacuer l'eau refroidie après l'extraction thermique dans un exutoire (cours d'eau ou lac), un seul forage de production suffira alors (forage singlet). Si la teneur minérale dépasse 2g/L, un second forage est nécessaire pour réinjecter l'eau refroidie dans les profondeurs (doublet)

Le principe de fonctionnement d'un doublet géothermique est comme suit : un forage de production amène de l'eau thermale chaude à la surface au moyen d'une pompe immergée ; un échangeur de chaleur ainsi qu'une pompe à chaleur disposée en aval permettent d'obtenir la température de chauffage désirée. Le circuit de chauffage est restitué à l'aquifère par un forage d'injection.

d) Hot Dry Rock:

Depuis les années 70, un certain nombre de programmes de recherche ont été lancés pour développer la technologie Hot Dry Rock (HDR). Tout d'abord aux Etats-Unis, puis Angleterre, ensuite en Allemagne, en France, au Japon et en Suède. Des projets relativement récents ont débuté en Australie et en Suisse.

Le principe de fonctionnement du Hot Dry Rock est relativement simple. On extrait l'énergie géothermique d'un réservoir souterrain créé artificiellement en vue de la production de chaleur et d'électricité. Dans le réservoir géothermique fissuré, l'eau injectée se réchauffe puis revient à la surface de la terre par un ou plusieurs forages de production. Un échangeur de chaleur transfère l'énergie à un deuxième circuit alimentant un turbogénérateur pour produire d'électricité. L'utilisation de machines ORC (Organic Rankine Cycle) permet une production de courant économique déjà à des températures de 100 °C environ en tête de forage. Une grande partie de la chaleur résiduelle peut être injectée dans un réseau de chauffage à distance. Un puits d'injection complète le circuit fermé et restitue l'eau refroidie au réservoir.

Le réservoir géothermique souterrain est créé en élargissant hydrauliquement les systèmes de fractures naturelles. Après avoir effectué un premier forage à grande profondeur (4000-6000m, on injecte de l'eau sous une pression de plusieurs centaines de bars. Pour maintenir la pression le temps nécessaire à la formation du réservoir (plusieurs semaines), on injecte de l'eau à mesure que la taille du réservoir se développe. Le développement du réservoir est détecté par des techniques de mesure micro sismique. Elles écoutent chaque mouvement de rocher pendant le procédé de stimulation, et permettent de localiser précisément les sources de chaque émission de façon tridimensionnelle [3].

I.2.8) Domaines d'application et importance de la géothermie:

On estime la puissance géothermique de la terre à 30 milliards de kW et le nombre de calories renfermé dans les premiers 2000m de la croûte terrestre à plusieurs milliers de fois celles qui sont contenues dans les réserves de combustibles fossiles. Le gradient géothermique varie de quelques degrés à quelques dizaines de degrés par 100 m. Il n'en reste pas moins que cette énergie n'est mobilisable que grâce à des structures géologiques favorables, ce qui explique le bilan modeste de son utilisation : 5000 MW dans le monde pour produire de l'électricité et autant pour le chauffage des bâtiments. On doit en effet distinguer entre la géothermie de haute énergie, généralement utilisée pour la production électrique (source supérieure à 150°C) et la géothermie de basse et moyenne énergie dans laquelle on utilise directement la chaleur sans autre transformation.

I.2.9) L'exploitation de la géothermie dans le monde :

Actuellement, quelques 50 pays utilisent leurs ressources géothermiques à un stade industriel plus ou moins avancé. Les ressources de vapeur à haute température et haute pression sont essentiellement exploitées pour produire de l'électricité. Une vingtaine de pays (USA, Philippines, Mexique, Italie, Nouvelle-Zélande, Indonésie, Japon, Islande, etc.) totalisent une puissance installée plus de 8'000 MW électriques. Par contre, les ressources à moyenne ou basse température servent pour des usages directs, en majorité le chauffage de bâtiments et de serres,

mais aussi la pisciculture et les usages associés au thermalisme et à l'industrie. Près de 60 pays (USA, Chine, Islande, Turquie, Suisse, Allemagne, Canada, Suède, France, Hongrie, Japon, Italie, Nouvelle-Zélande, etc.) totalisent une puissance installée plus de 16'000 MW thermiques, les deux tableaux suivant présentant l'évolution de la production mondiale de la puissance électriques .

<i>La production en électricité. (MWe)</i>	<i>1990</i>	<i>1995</i>	1999
Union européenne	552	641	805
Autre pays d'Europe	76	81	213
Totale des pays européenne	628	722	1018
Amérique du nord	3475	3570	2983
Centre et sud d'Amérique	131	231	407
Totale des pays d'Amérique	3606	3801	3390
Asie	1270	1979	3075
Oceania	283	286	437
L'Afrique	49	49	54
Totale mondiale	5836	6837	7974

Tableau I.2 : évolution de capacité de production de l'énergie électrique a travers le monde en MWe (source : EurObserEr, 2000)

<i>pays</i>	<i>Energie (MWe)</i>	La production totale (GWh/an)
USA	2228	15470
Philippines	1909	9181
Italie	785	4403
Mexique	755	5681
Indonésie	590	4575
Japon	547	3532
Nouvelle-Zélande	437	2268
Islande	170	1138

Salvador	161	800
Costa rica	143	592
Rest	249	1621
totale	7974	49261

Tableau I.3 : Classement des pays produisant l'énergie électrique par la géothermie (source : EurObserEr, 2000)

I.3) contexte géologique de la région de Ouargla:

I.3.1) cadre géologique régionale:

De nombreux auteurs ont travaillé et publié des articles et des ouvrages sur la géologie du bassin sédimentaire du Sahara septentrional, aussi bien dans le cadre de la géologie pétrolière, que par des chercheurs universitaires, parmi eux nous citons les plus connus : Cornet A 1964, Busson G. 1967-70, Conrad G. 1970, BEUF 1968.

La région de Ouargla fait partie du bassin sédimentaire du Sahara Nord-Est septentrional (Fig-I.2) dont les grands traits de la géologie est [7].:

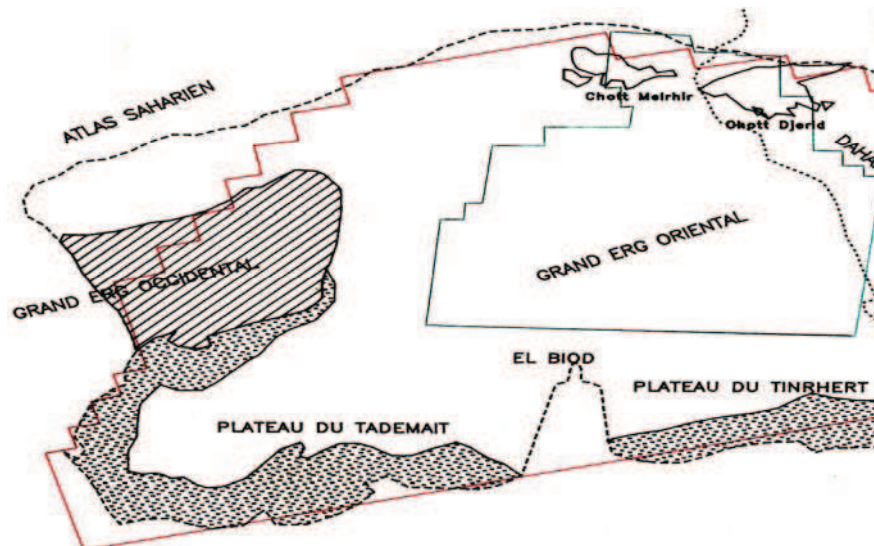


Figure I.2: Carte de situation du Sahara septentrional

- Au sud de l'accident Sud atlasique qui sépare la zone mobile maghrébine du reste de l'Afrique occidentale, le bouclier rigide est formé de terrains sédimentaires et éruptifs, plissés et métamorphisés.
- Le paléozoïque du Sahara correspond à des dépôts de climat désertique périglaciaire. Autour des affleurements du socle, s'étagent des couches gréseuses et schisteuses des Tassilis, les mouvements hercyniens du Permo-

Carbonifère, vont provoquer l'érosion du bouclier. Il s'installe alors une grande période continentale avec pénéplanation post-hercynienne pendant le Trias et le Jurassique et formation d'un manteau de grès, de sable et d'argile, qui va constituer le " Continental Intercalaire" [7]:

CHRONOSTRATIGRAPHIE		LITHOLOGIE
TERTIAIRE	MOI-LOIOCENE	
	EOCENE	
CRETACE	SENONIEN	LAGUNO
		SALIFERE
	TURONIEN	
	CENO MANIEN	
	ALBIEN	
	APTIEN+BARREMIEN	
	NEOCOMIEN	
JURASSIQUE	MALM	
	DOGGER	
	L I A S	
TRIAS	SALIFERE	
	ARGILEUX	
	R-ERUPTIVE-SUP	
	R-ERUPTIVE-INF	
	ORDOVICIEN	
CAMBRIEN	CAMBRIEN	
	INFRACAMBRIEN	
SOCLE		

Figure I.3: Log synthétique de la région de Ouargla

Le cambrien repose sur les dépôts tuffo-sédimentaires de l'infra-cambrien. Il est constitué par les grès quartzitiques et de quartzites fissurées. Il est divisé en plusieurs zones lithologiques différentes.

L'ordovicien est constitué par plusieurs unités lithologiques différentes caractérisées par un grand changement de faciès et des épaisseurs. Parfois certaines unités sont absentes ou érodées dans plusieurs régions. Il est formé par les unités suivantes :

- les grès ses épaisseurs varient entre 20 et 120 mètres.
- Les argiles schisteuses, lutiteuses. Leurs épaisseurs varient entre 80 et 160
- Les quartzites sont présentés surtout sur la partie orientale de la dépression Oued Mya, leurs épaisseurs atteignent une valeur maximale dans la région de Gassi-Touil de 370 mètres
- Une formation argilo gréseuse son épaisseur atteint environ 200 mètres.

Au Trias, les couches triasiques sont caractérisées par une grande variation de faciès et des épaisseurs. Le trias est divisé par les géologues en grandes unités lithologiques bien distinctes. On a de bas en haut de la coupe (fig. I-3).

- Le trias argilo-gréseux inférieur.
- Le trias argilo-carbonaté.
- Le trias argilo-gréseux supérieur.
- Le trias argileux

L'épaisseur change dans ces différentes formations où s'intercalent certains bancs salifères supplémentaires ou parfois éruptifs.

Au Jurassique, les sédiments jurassiques sont constitués par des couches lagunaires constitués par du sel, de l'anhydrite, des argiles du lias Dogger et marines par des calcaires argiles et quelque bancs d'anhydrite.

Au Crétacé, se met en place une nappe de grès très tendre, étendu sur plus de 15° de latitude Nord, formée de galets et même de blocs conglomératiques. Tellement l'hydrodynamisme était puissant, qu'elle s'est produite en série tabulaire, avec un avancement progressif probablement à la faveur de Tornades Sporadiques sur une surface très plane. Il y aurait donc une alternance rapide des conditions climatiques avec de nombreux épisodes humides. Pendant cette période, il s'est produit des invasions marines sur la plate-forme saharienne:

Crétacé inférieur dépôts de calcaire à proximité des sites d'études, alors que le crétacé inférieur est fluvio-lacustre dans le Tidikelt, avec une alternance de phases désertiques.

Cénomaniens : dépôts d'argiles et d'anhydrite.

A l'Eocène inférieur, l'Atlas saharien se soulève. Il y a alors érosion des dépôts d'argiles et de sables qui forment le soubassement de Oued Rhir et du Grand Erg Oriental. Les mouvements tectoniques au Nord provoquent des ondulations à grand rayon de courbure, responsables de la formation de la dorsale du M'zab et du Synclinal du Tadmaït. Avec dans le même temps l'effondrement du Sahara central.

- Le Néogène se caractérise par des dépôts détritiques qui couvrent le piedmont de la chaîne Atlasique. Plus au sud, se forment les hamadas qui correspondent à une sédimentation lacustre, ce sont des dalles de calcaire dolomitique qui témoignent de conditions lacustres basiques.

- Au quaternaire, après une phase d'érosion, le Plio-Villafranchien vient s'emboîter dans le Néogène et se caractérise par une sédimentation fluvio-lacustre. Au Nord, l'érosion due à des mouvements tectoniques de la bordure de l'Atlas,

provoque le creusement de la dépression du Touat. Les différences observées dans la sédimentation suggèrent qu'entrent le Néogène et le Plio-Villafranchien, on passe d'un climat tropical chaud et humide à un climat toujours chaud mais de type semi-aride.

- Au Villa-Franchien supérieure, le Sahara central se caractérise par des cuirassements ferrugineux qui sont la marque d'un climat tropical, tandis que des croûtes calcaires se développent dans le Sahara Nord-Occidental témoins d'un climat de type Méditerranéen. Une première phase de désertification au Pléistocène moyen, voit l'édification des grands Ergs du Sahara.

- A l'Holocène, les conditions arides sur le Sahara septentrional entraînent l'extension des grands Ergs massifs du Sahara et l'assèchement des grands lacs (apparition des Sebkhass).

Le Turonien, le Sénonien, l'Eocène et le Mio-Pliocène avec le Quaternaire sont les dernières formations déposées au Sahara, et sont groupées sous le nom de "Complexe Terminal" est [7,8,9]:

I.3.2) cadre géologique local:

Sur la région de Ouargla seuls les terrains du Mio-Pliocène affleurent, ils sont recouverts par une faible épaisseur de dépôts quaternaires (Ergs et Dunes,). A partir des données de forages pétroliers et celles des forages hydrauliques, nous avons établi des coupes géologiques et un log synthétique des formations lithologiques (Fig-I-4). La description des différentes formations a pu être effectuée.

I.3.2.1) Lithostratigraphie :

Aptien: Il est constitué par la "barre aptienne " dans la région d'Ouargla, qui est formée de marnes dolomitiques, gris verte, brunes ou blanches, et dolomies cristallines, son épaisseur est variable, elle est comprise entre 20 et 26 m. L'aptien est considéré comme imperméable dans son ensemble.

Albien : Sur la région de Ouargla, l'albien correspond à la série lithologique supérieure du Continental Intercalaire; Ce sont des grès, argiles et sables. L'épaisseur de ces formations est variable (417- 432 m). Les éléments détritiques (non argileux) sont Largement prépondérants (70 à 90%) et sont représentés par des grès fins avec des passées de grès moyens et parfois d'intercalations de sables grossiers à limons argileux ou souvent carbonatés (Fig : I.4).

Vraconien : L'intercalation Albo-varconienne caractérise un épisode dolomitique remarquable entre les grès Albien et les argiles Cénomaniennes, Il est formé de:

- Dolomies et quelques fois de calcaires dolomitiques parfois argileux contenant de rares débris de mollusques, les épaisseurs y sont inférieures à 100 m mais supérieures à 50 m sur Haoud-Berkaoui, sauf quelques exceptions locales.
- Argiles et marnes dolomitiques et des éléments détritiques.

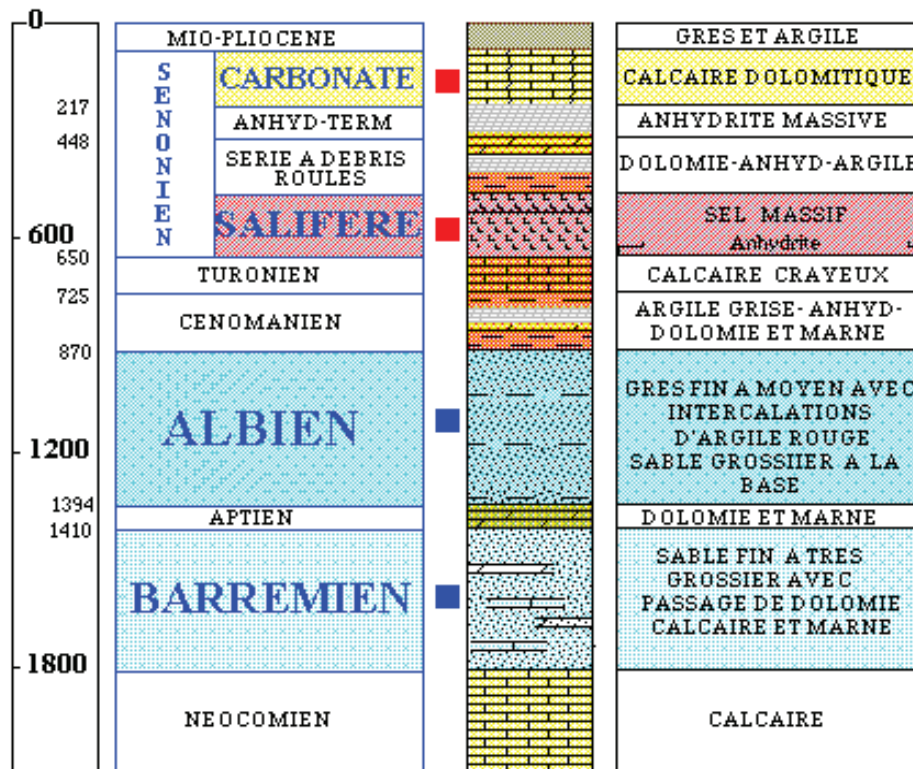


Figure I.4: Une coup lithologique de la (I zone berkaoui) région de Ouargla

Cénomanien : Il est formé de deux séries (inférieure et supérieure) :

- la série inférieure est constituée par des argiles dolomitiques et des marnes grises, avec parfois des argiles brune-rougeâtre ou gris verdâtre, son épaisseur varie entre 65 et 80 m. On note aussi quelques passées de calcaires dolomitiques en particuliers à la partie médiane de la série.
- la série supérieure est formée d'une alternance d'argiles et de marnes dolomitiques grises, parfois d'argiles salifères, de bancs d'anhydrite, de quelques intercalations dolomitiques, et de passée de sel gemme, son épaisseur est de l'ordre de 70 m.

Turonien : Il se présente sous forme d'une dalle ayant une épaisseur régulière "barre turonienne", il est de l'ordre de 73 m. Il s'agit d'une série essentiellement calcaire : calcaire poreux blanc, parfois grisâtre, pulvérulent, quelquefois dolomitique, de calcaire beige dolomitique et de calcaire fin légèrement dolomitique.

Sénonien lagunaire : Le Sénonien lagunaire y est particulièrement épais, son épaisseur est supérieure à 400 m. Il est formé par :

- Sénonien salifère : ayant une épaisseur moyenne de 200 m ; elle diminue jusqu'à 100 m.
- Sénonien anhydritique : son épaisseur moyenne atteint 300 m.
- Sénonien carbonaté : Son épaisseur moyenne est de 150 m

Sénonien et Eocène : Le Sénono-Eocène est formé essentiellement de carbonates ayant une épaisseur comprise entre 150 à 200 m. Il s'agit des calcaires dolomitiques cristallins ou micro cristallins parfois vacuolaires ou crayeux ou plus carrément argileux.

Mio-Pliocène : Le Mio-Pliocène correspond au Continental Terminal tel qu'il a été défini par C.Kilian (1954). C'est un puissant ensemble de sables et d'argiles qui s'étend sur tout le Sahara et qui repose en discordance sur le Sénonien et l'Eocène. On distingue quatre niveaux différents dans le Mio-Pliocène à Ouargla [7,10] :

- A la base, un dépôt argileux peu épais recouvrant dans la partie centrale de la cuvette, et suivant une bande Nord-Sud, le Sénonien et l'Eocène.

- Deuxième niveau : C'est un dépôt grés-sableux qui devient argileux vers le sommet, c'est le niveau le plus épais et le plus constant; le deuxième niveau est le principal horizon aquifère du Mio-Pliocène.

- Troisième niveau : C'est une formation argilo-sableuse dont les limites inférieures et supérieures sont assez mal définies. Cette couche apparaît que dans certaines endroits.

- Quatrième niveau : C'est le deuxième niveau sableux du Mio-Pliocène. On ne peut le distinguer que lorsqu'il repose sur le niveau 3 ; d'ailleurs les niveaux 2 et 4 sont confondus. Il est très épais dans la zone des chotts, le sommet du niveau 4 affleurant sur de grandes surfaces; le niveau 4 est souvent constitué par une croûte de calcaire gréseux (croûte hamadienne) .

Quaternaire : A la base du quaternaire, il existe un niveau argilo-gréseux qui se présente comme une croûte ancienne. Ce niveau met en charge les aquifères du Mio-Pliocène à Ouargla. Le niveau le plus superficiel est constitué de sable éolien parfois gypseux et des produits de remaniement des terrains Mio-Pliocène. Les nappes phréatiques sont généralement contenues dans ce dernier niveau. Les sondages superficiels (profondeur moins de 30 m) effectuées dans différente localité de la région, ont permis de rencontrer les ensembles suivants :

- Sur le plateau, le sol est constitué d'un matériau meuble exclusivement détritique, hérité de l'altération du grès à sable rouge du Mio-Pliocène. C'est le sol le plus pauvre en gypse de la région; jusqu'à 8 m de profondeur il ne présente aucun niveau d'encroûtement; entre 25 et 75 cm de profondeur, il s'agit d'un sol sableux à graviers.
- Sur les chotts et les terrains intermédiaires, l'horizon de surface est une croûte gypseuse épaisse ou polygonale, blanchâtre partiellement couverte de voiles de sable éolien gypso-siliceux et de nebkhas associés à une végétation gypsohalophiles. De 15 à 20 cm d'épaisseur on trouve un encroûtement gypseux pulvérulent, homogène de couleur jaune rougeâtre très claire. En dessous, on trouve un encroûtement gypseux induré de 40 cm d'épaisseur. en dessous un tuf présente un teneur de gypse décroissante
- Les Sebkhas sont caractérisées par une salure extrêmement élevée, ces croûtes salines reposent sur des matériaux limono-sableux.
- Les dunes sont de sable éolien d'origine gréseux provenant de Hamada Mio-Pliocène. Il existe dans les talwegs, sur les bordures des Sebkhas, et sur les versants rocheux.

I.3.3) Les grands systèmes aquifère :

I.3.3.1) le Continental Intercalaire:

On appelle “ Continental Intercalaire ” au sens large l'ensemble des dépôts sédimentaires du long épisode continental intercalé entre les deux cycles marins du Paléozoïque et du Crétacé supérieur. A cette définition stratigraphique, qui présente l'inconvénient d'englober des épisodes lagunaires, voire franchement marins, nous préférons emprunter la définition hydrogéologique plus classique d'un continental intercalaire au sens strict réduit aux seuls dépôts clastiques (argilo-gréseux) véritablement continentaux constituant un réservoir plus ou moins homogène rempli d'eau douce. Ces dépôts, d'âge Crétacé inférieur, recouvrent en discordance des terrains d'âges variés allant du toit du Primaire à l'Ouest (le mur du Continental Intercalaire correspondant ici avec la discordance hercynienne) au toit du Néoconien à l'Est. Le toit du réservoir correspond à la base du Cénomaniens argileux à l'Ouest, de l'Albien argileux à l'Est.

L'épaisseur utile totale du réservoir (c'est-à-dire l'épaisseur des dépôts perméables à eau douce) dépasse 250 m dans la plus grande partie du réservoir étudié. Elle atteint 1 000 m au Nord-Ouest (Ouest de Ghardaïa) et au Centre (Ouest de la dorsale primaire d'Amguid). Elle tombe à 150 m, voire une centaine de mètres dans les structures faillées associées à la dorsale précitée, au Nord dans le secteur du Chott el Kharsa (envahissement par de l'eau salée), localement sous le grand Erg Oriental (Ouest d'El Borma), et en Libye sous le Djebel Nefusa [7,10].

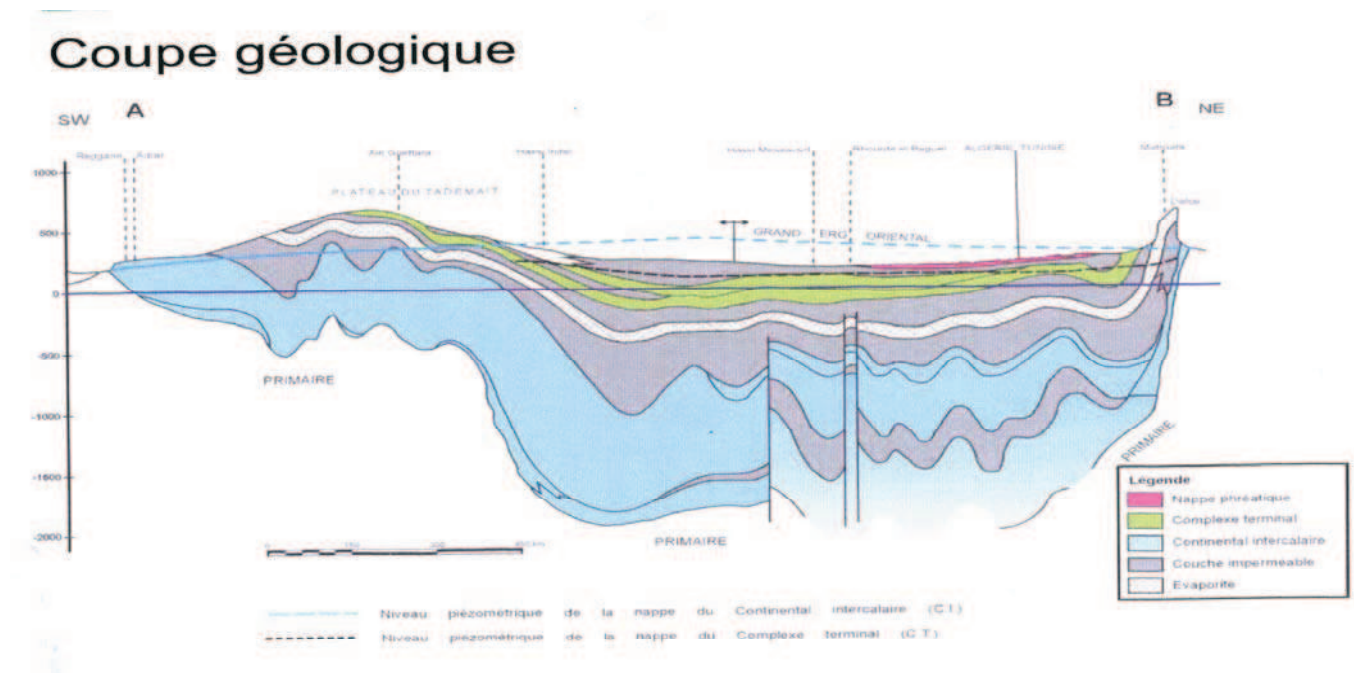


Figure I.5: Coup géologique des nappes CI et CT

Caractéristiques physico-chimiques des eaux de la nappe C.I.:

a) La température

La température de l'eau de la nappe du CI présente un gradient croissant du sud du Sahara (environ 25°C à In Amenas, In Salah, Adrar) jusqu'au nord (70°C) dans les Ziban et le Ksour. Ce gradient est à rapprocher de celui de profondeur de la nappe qui présente la même tendance avec des forages peu profonds au Sud (de l'ordre de 200 m) atteignant plus de 1500m au Nord du Sahara algérien.

Depuis la mise en exploitation à l'échelle de la région de Ouargla, les forages captant le C.I ont fait l'objet de plusieurs prélèvements et d'analyses chimiques afin de suivre l'évolution de la qualité chimique des eaux. Nous présentons dans le tableau suivant les résultats d'analyse effectuée par l'ANRH (nov 1998) sur six forages de CI :

Paramètres	Valeurs moyennes
PH	7,34 – 7,64
Température	47,4 – 54,5 °C
Conductivité	2000 – 2900 ms/cm
Faciès chimiques	Sulfate. Chlorure Alcalin $\text{SO}_4^{2-} > \text{Cl}^- > \text{HCO}_3^-$ et $\text{Na}^+ > \text{Ca}^{2+} > \text{Mg}^{2+}$
La minéralisation totale	1,8 - 2,5 g/l

Tableau I.4 : Caractéristiques physico-chimiques des eaux de la C.I (source : ANRH nov98)

b) gradient géothermique :

Une carte de l'inverse du gradient géothermique a été publiée par Escalé, Fargues et Leroy pour l'Algérie, Ben Dhie pour la Tunisie. Une carte de l'inverse du gradient géothermique (en $^{\circ}\text{C}^{-1}$) est donnée dans les annexes de 1 à 4 pour estimer la distribution des températures dans l'ensemble du système aquifères saharien.

I.3.3.2) Le complexe terminal:

On regroupe sous le nom de " Complexe Terminal " l'ensemble des formations les plus récentes allant du Sénonien supérieur au Mio-Pliocène. Cette dénomination semble préférable à celle de " Continental Terminal " d'abord parce qu'un certain nombre de formations calcaires ne sont pas à proprement parler d'origine continentale, ensuite parce que le terme " complexe " représente bien le fait que plusieurs aquifères en plus ou moins étroite relation, sont regroupés au sein d'un même réservoir. Ces aquifères sont, dans la partie centrale du bassin :

- le Sénonien et l'Eocène carbonatés (Eocène inférieur),
- le Miopliocène sableux (Continental Terminal au sens strict).

Les sables du Miopliocène recouvrent en discordance presque tout le domaine, sauf sur les bordures, où ils s'interrompent. Le réservoir n'est plus alors représenté que par les calcaires sénoniens, relayés à leur tour vers l'extérieur par les dolomies turoniennes. Celles-ci, qui sont fissurées sur leurs zones d'affleurement, participent alors au réservoir, tandis qu'en profondeur elles perdent leur fissuration et (ou) renferment de l'eau salée lorsqu'elles sont aquifères.

Les terrains constitutifs du Complexe Terminal couvrent l'ensemble du Sahara septentrional, depuis la Saoura à l'Ouest jusqu'au Graben de Hon (et même jusqu'au Golfe de Sirte) à l'Est, depuis l'accident Sud-Atlantique au Nord jusqu'au flanc Nord des plateaux de Tademaït et du Tinhert en Algérie, de Gargaf (Nord du Fezzan) en Libye. Son extension longitudinale est donc au moins égale à celle du Continental Intercalaire (1 600 km), tandis que sa hauteur dans le sens Nord-Sud est plus réduite (600 km) [7,10] :

Caractéristiques physico-chimiques des eaux de la nappe C.T.:

Il existe un grand nombre d'analyses chimiques effectuées sur les deux nappes du CT (Sénonien et Mio-Pliocène). Les résultats d'analyses effectuées par l'ANRH en novembre 1998 sur 104 forages captant le CT, ont permis d'identifier les caractéristiques suivantes:

Paramètres	Valeurs moyennes	
	Nappe du sable (Mio-Pliocène)	Nappe du calcaire (Sénonien)
PH	7,35 - 7,93	7,37 - 7,69
Température	23 - 25 C	24 - 26,3 C
Conductivité	3600-7600 ms/cm	1900-3000 ms/cm
Faciès chimique	Chloruro –Sulfato –Sodique. $\text{Cl}^- > \text{SO}_4^{2-} > \text{HCO}_3^-$ Et $\text{Na}^+ > \text{Ca}^{2+} > \text{Mg}^{2+}$	Sulfate et Chloruro-Calcique $\text{SO}_4^{2-} > \text{Cl}^- > \text{HCO}_3^-$ Et $\text{Na}^+ > \text{Ca}^{2+} > \text{Mg}^{2+}$
La minéralisation totale	3 - 7 g/l	1,5 -5,5 g/l

Tableau I.5: Caractéristiques physico-chimiques des eaux de la C.T (source : ANRH nov98)

I.3.3.3) Nappe phréatique:

La nappe phréatique est contenue dans les niveaux sableux et argilo-évaporitiques du Quaternaire, pelliculaires par rapport à la nappe des sables qui lui succède en profondeur, dont elle est généralement séparée par un niveau semi-perméable du Miopliocène. Il s'agit donc d'une unité séparée, alimentée principalement par sa surface (pluie, infiltration des oueds et, de plus en plus, fuites des réseaux et des eaux de drainage) et soumise à l'évaporation dans les Chotts. Il en résulte un niveau de salinité extrêmement élevé, qui tend à croître avec l'augmentation des apports en eau de drainage des palmeraies [7,11] :

a. Caractéristiques hydrochimiques des eaux de la nappe phréatique :

Les mesures hydrochimiques effectuées par le CDTN en 1992 et 1995, et celles effectuées par l'ANRH en 1994, 1996 et 1998, ont permis d'apprécier:

- Les caractéristiques physico-chimiques des eaux de la nappe phréatique;
- Faciès chimiques des eaux ;
- Des cartes iso-teneurs en différents paramètres, tel que la minéralisation totale, les rapports en ions caractéristiques ($\text{SO}_4^{2-} / \text{Cl}^-$, $\text{Mg}^{2+} / \text{Ca}^{2+}$).

Nous donnons ici les principaux résultats de ces mesures :

b. Paramètres physico-chimiques des eaux :

Le tableau N°6 présente les variations des différents paramètres physico-chimiques en fonction du temps.

Années	1991		1992		1994	
Paramètres	Max.	Min	Max.	Min	Max.	Min
PH	8.37(p109)	6.47 (p77)	7.9	6.8	8.9(p147)	7.1(p54)
Température (°C)	28.5°C (p37)	19.7°C (puits traditionnels à Bamendil)	29°C (p64)	21.2°C (p83)	25.1°C (p111)	17.4°C (p53)
Conductivité (ms/cm)	20000 ms/cm à Sebkhet Sefioune	2400ms/cm (p60)	7000 ms/cm	1800 ms/cm	10000 ms/cm (chotts)	212 ms/cm (p54)
Résidu sec g/l	-	-	-	-	2 g/l (p59)	0.4 g/l (p21)

Tableau I.6 : Caractéristiques physico-chimiques des eaux de la nappe phréatique.

I.4) les potentialités de la région de Ouargla en énergie géothermique:

On appelle énergies renouvelables celles dont les sources sont indéfiniment disponibles à la surface de la terre. Elles s'opposent aux réserves épuisables (combustibles, minerais) dont le renouvellement ne peut se réaliser qu'à l'échelle des temps géologiques. On admet couramment que le pétrole et le gaz seront raréfiés à l'échéance d'un demi siècle. Le charbon en revanche pourrait assurer un relais de plusieurs centaines d'années. Pour le moment le Sahara est bien pourvu en énergie fossile grâce à ses gisements de pétrole et surtout de gaz. Il est possible cependant que dans certains cas précis d'autres sources d'énergie dites renouvelables soient plus rentables ou plus pratiques à mettre en œuvre (pour le dessalement des eaux saumâtres par exemple).

A notre connaissance, et en l'absence d'un recensement exhaustif des nappes chaudes ou très chaudes, les seules sources géothermiques de la région sont à basse énergie, c'est à dire inférieures à 60°C. La nappe du Continental Intercalaire pourrait bien sûr être sollicitée dans ses régions d'artésianisme pour chauffer les immeubles (et des serres) à Ouargla par exemple ou à Tougourt. En général on réinjecte l'eau après refroidissement, mais dans le cas du Sahara les besoins d'irrigation sont tels qu'on pourrait envisager une utilisation agricole de l'eau succédant au chauffage urbain. Ce qui serait une méthode clairement efficace pour amortir le coût de la réalisation du forage dont la durée de vie est assez souvent brève dans ces régions [10].

Les installations de chauffage basse énergie ne demandent pas une technologie compliquée et font appel aux mêmes matériaux que ceux de la distribution d'eau urbaine. Il y a certainement des précautions à prendre pour éviter la corrosion et l'entartrage au cours du refroidissement de l'eau. En France dans la région parisienne plusieurs centaines de milliers de logements sont chauffés par la nappe du Dogger (85°C). Mais ce type d'utilisation demande une grande concentration de l'habitat.

Les autres nappes (complexe terminal ou phréatique) ont une température généralement supérieure à 20°C et inférieure à 30°C. On est dans le domaine de l'utilisation des pompes à chaleur dont le coût et l'efficacité ne présentent pas pour le moyen terme un grand intérêt à la région

I. 4.1) L'énergie géothermique:

En dehors de l'énergie solaire, la région de Ouargla est assez bien pourvu en nappes aquifères chaudes ou très chaudes qui permettent la mise en œuvre de cette énergie géothermique. Elle est surtout utilisable pour le chauffage des habitations ou des serres de production en hiver. Cette application est d'ailleurs déjà assez couramment utilisée pour les serres dans la région, mais elle devrait certainement être intelligemment développée pour éviter de gaspiller des thermies qui au total sont gratuites, puisque les ouvrages sont avant tout destinés au puisage de l'eau. Dans la mesure où les géothermies ne sont utilisables que si elles sont véhiculées par les eaux souterraines et que celles ci sont pour l'essentiel fossiles dans la région, en l'absence de réinjection, il est quelque peu abusif de parler d'énergie renouvelable [10].

I.4.2) La géothermie basse énergie:

La géothermie basse énergie (50 à 90°C) peut se développer dans les zones à gradient normal où des formations géologiques favorables (porosité, perméabilité, épaisseur importantes) sont situées à une profondeur suffisante pour atteindre les températures que l'on cherche. Dans la plupart des cas, la réinjection est recommandée, non seulement pour protéger l'environnement (les eaux sont salines), mais aussi pour maintenir la pression du gisement et, plus généralement, pour permettre une meilleure exploitation à long terme (cas de l'Allemagne et de la France). Ce type de géothermie est économique à l'heure actuelle, toutefois, la faisabilité des opérations doit être déterminée au cas par cas. En effet, d'une part la ressource est très diverse selon les régions (profondeur des nappes exploitables,

souvent superposées, variant de 800 à 3000 m) et, d'autre part, le type des besoins en surface (nombre de logements à raccorder, dispersion, mode de chauffage dans les locaux) varie et doit être adapté au mieux à la ressource. Les potentiels énergétiques de ce type de géothermie sont bien connus grâce aux nombreuses campagnes pétrolières dont les résultats sont en général disponibles dans les zones de bassins sédimentaires.

Il existe dans le Sud algérien des nappes d'eaux fossiles géothermales à grande profondeur (albien), ce qui représente un potentiel géothermique très important. Cette énergie thermique permet de développer l'agriculture sous serres (heating greenhouse) et même pour chauffer les locaux et habitations (comme en Allemagne).

La température de l'eau, à la sortie de ces forages, varie entre 50 et 73°C ; la plupart de ces forages sont artésiens et l'eau émerge sous une pression d'une vingtaine de bars. Le débit d'exploitation est généralement compris entre 80 et 100 l/s, soit une moyenne de 7 800 m³ /jour.

La chaleur de cette eau est exploitée dans le but d'améliorer la production et la précocité des primeurs (tomate, concombre, melon, etc.) dont le rôle est très important dans le développement de la région. Cette eau est utilisée, après refroidissement, pour l'irrigation des cultures et de la palmeraie.

Plusieurs expériences de chauffage de serres agricoles ont été menées à Touggourt et Ouargla par le CDER (on peut citer aussi les expériences tunisiennes sur ce sujet, dans des conditions comparables). Les serres sont chauffées individuellement par un système monté en parallèle ; les volumes d'eau débités pour le chauffage sont faibles, puisque l'un des principaux objectifs est, par ailleurs, de refroidir l'eau qui, recueillie puis reprise par pompage, est valorisée pour l'irrigation des cultures [12].

CHAPITRE II

Formulation Mathématique

II.1) introduction:

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la modélisation de deux types d'écoulements, le premier étant un écoulement en charge incompressible et visqueux, et le second écoulement dans un milieu poreux. Ces écoulements peuvent être laminaires ou turbulents avec des gradients de température longitudinale important dans des configurations géométriques diverses (conduites axisymétriques ou annulaires). Notre étude fait intervenir de nombreux phénomènes au niveau de l'écoulement, qu'il est nécessaire d'analyser correctement si nous souhaitons effectuer une bonne formulation mathématique de notre problème physique. Parmi ces phénomènes, nous pouvons citer la variation importante de la température dans le domaine d'étude. Selon la profondeur des puits, il y a des différences de température le long de la verticale. Celles-ci peuvent avoir une influence déterminante sur l'écoulement.

Pour cette raison, le modèle nécessite une équation régissant l'évolution de la température. Cette équation, découlant de celle de l'énergie, est de type convection-diffusion.

II.2) position du problème:

Le domaine d'étude représenté dans la figure II.1. C'est un réservoir géothermique naturel (milieu humide) ou crée artificiellement (milieu sec initialement), caractérisé par ses conditions aux limites, ses dimensions et par ses caractéristiques hydrodynamiques. Dans ce réservoir poreux ou fissuré, l'eau injectée se réchauffe, puis revient à la surface de la terre par un ou plusieurs forages de production.

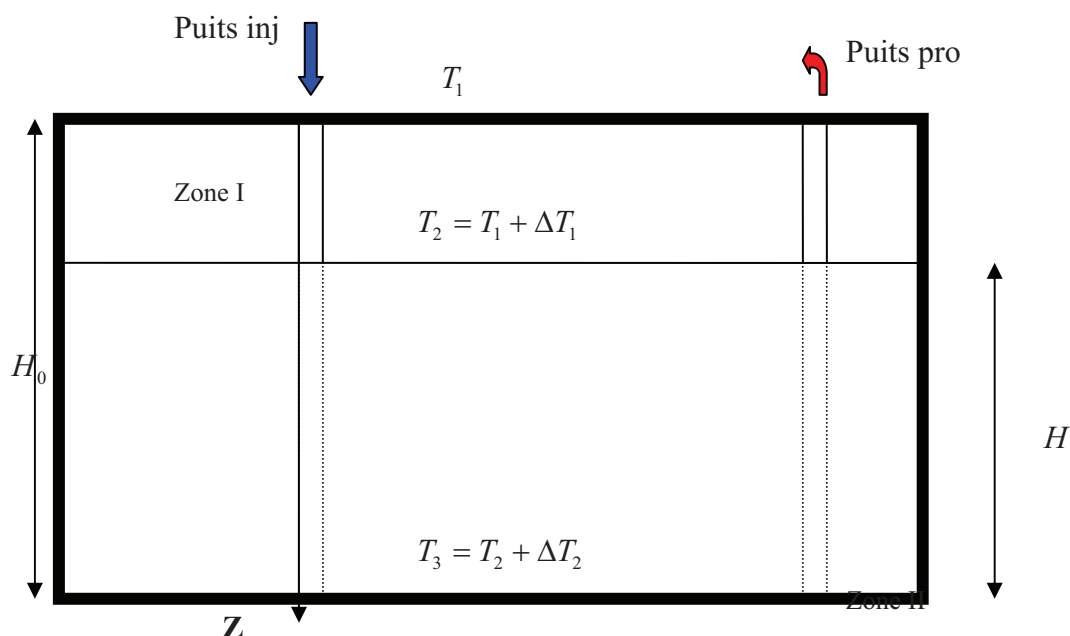


Figure II.1 : Le principe de récupération de la géothermie.

Dans notre domaine d'étude, deux types d'écoulement différent apparaissent. Le premier celle de la zone I qu'est un écoulement forcé axisymétriques dans une

conduite, la seconde est celle de la zone II qui s'agit d'un écoulement dans un milieu poreux (milieu de connexion), cette zone est limitée par des surface plans, parallèles, imperméables et isothermes ; l'écart de température entre les deux surface est désigné par ΔT_2 et le fluide est supposé incompressible.

Afin de simplifier le modèle physique à étudier, le puits d'injection et les puits de productions sont alors répartis suivant un schéma plus ou moins régulier. La figure II.2 représente une vue verticale d'un schéma fréquemment utilisée appelée schéma à cinq points (five spot) [5].

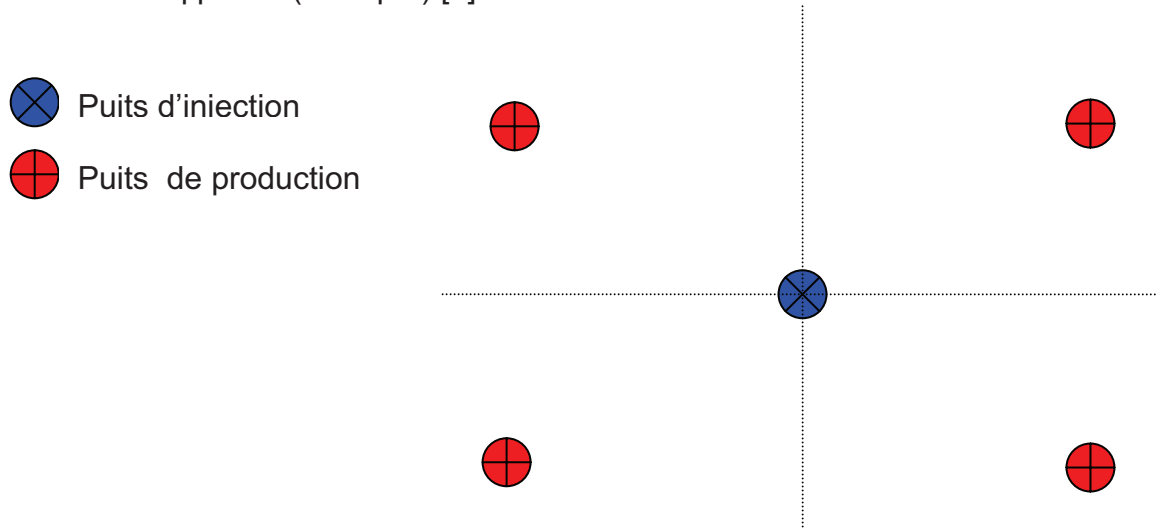


Figure II.2 : Schéma d'implantation de puits d'injection et de productions

La répartition symétrique des puits producteurs par rapport au puits injecteur, nous permet d'utiliser un domaine de calcul réduit qui est représenté sur la figure 3. Cette simplification du domaine géométrique nous amène à imposer des conditions aux limites périodiques sur les interfaces du domaine global. La modélisation de l'écoulement est limitée au domaine de calcul entre deux puits communicants, l'un injecteur et l'autre est producteur, à travers un milieu poreux soumis à un gradient de température selon la direction z .

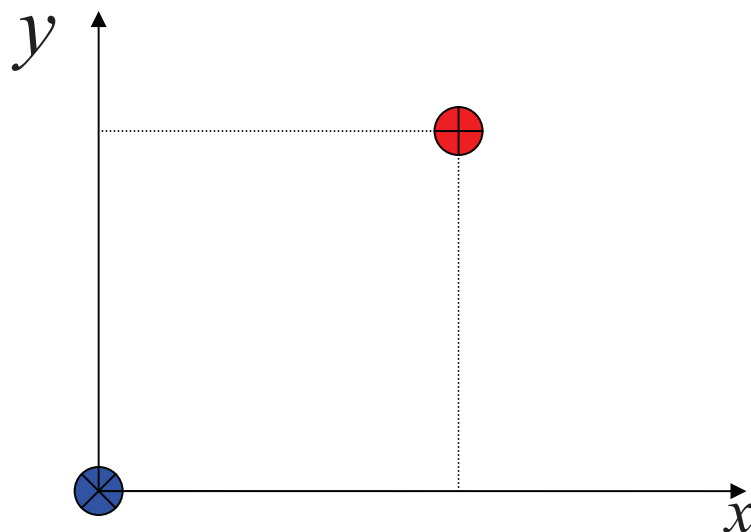


Figure II. 3: le domaine réduit.

II.3) Modélisation d'un écoulement dans une conduite axisymétrique:

L'étude de la dynamique des fluides est basée sur trois principes fondamentaux qui sont : le principe de conservation de la masse, le principe de conservation de la quantité de mouvement et le principe de conservation de l'énergie.

Ceux-ci permettent d'établir des relations entre des variables qui dans le cas général sont les trois composantes de la vitesse (u, v, w), la masse volumique ρ , la température du fluide T , et la pression p . Ces variables sont toutes fonctions des coordonnées de l'espace (x, y, z) et du temps t .

II.3.1) Equation de continuité:

L'équation de continuité traduit le principe de la conservation de la masse ; on l'obtient en écrivant que la variation de la masse du fluide contenu dans un volume élémentaire est égale à la différence des quantités de fluide entré et sorti pendant le même temps [13,14]. Considérons le parallélépipède $dx.dy.dz$ (fig. II.4) pris dans la masse fluide. Il contient un volume de fluide $dx dy dz$. Durant l'intervalle dt la variation de la masse est :

$$dx dy dz \frac{\partial \rho}{\partial t} dt$$

- ρ : La masse volumique de liquide fonction de la température, de la pression et de la concentration en substances dissoutes.

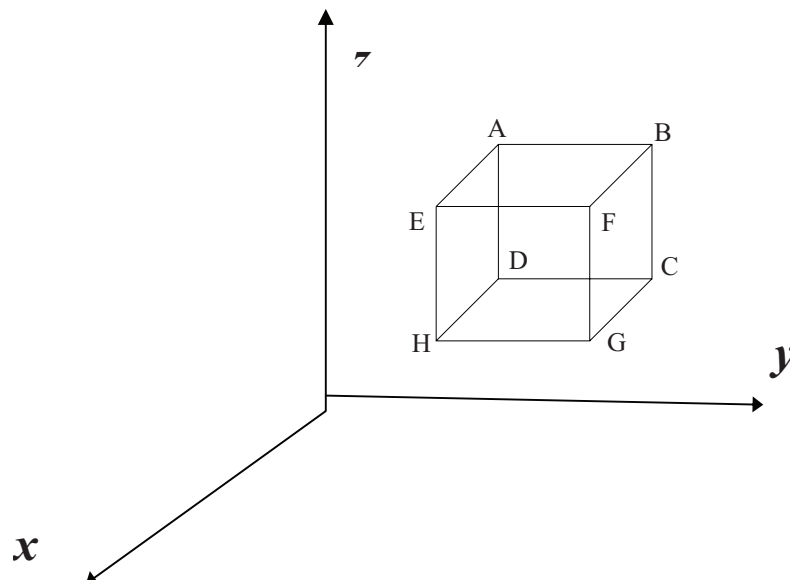


Figure II.4 : volume élémentaire pris dans la masse fluide

Pendant le temps dt il entre par la face ABCD une masse de liquide égale à:

$$dy.dz.u\rho dt = \rho u dy.dz.dt$$

Pendant le même temps, il sort par la face EFGH une masse de liquide égale à celle qui est entrée, augmentée de sa différentielle par rapport à x . Or, seuls u et ρ peuvent varier par rapport à x .

La masse qui sort est donc:

$$(\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx) dy . dz . dt$$

La différence entre les deux expressions soit: $-\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx . dy . dz . dt$

Représente l'accroissement de masse du parallélépipède correspondant au mouvement de liquide à travers les deux faces envisagées. Comptant la masse acquise par les quatre autres faces nous avons après simplification par $dx dy dz dt$

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \quad (II.01)$$

Ou, en notation vectorielle:

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \text{div} (\rho \vec{V}) \quad (II.02)$$

II.3.2) Equation de conservation de quantité de mouvement:

Le théorème des quantités de mouvement appliqué à la masse liquide contenue à l'intérieur de filet liquide exprime que la dérivée par rapport au temps de la somme des quantités de mouvement de cette masse liquide est égale à la somme des forces extérieures qui lui sont appliquées, soit

$$\frac{d\vec{V}}{dt} dm = \vec{f}_m dm + \vec{f}_s ds$$

- \vec{f}_m : Force massique unitaire

- \vec{f}_s : Force surface unitaire

Le principe fondamental de la dynamique – la loi de la conservation des quantités du mouvement- peut appliqué à une particule fluide (équation de Navier Stokes) sous forme développée suivant les coordonnées cartésiennes[14].

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = X - \frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - w \frac{\partial u}{\partial z} \\ \quad + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right) \right] \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = Y - \frac{\partial v}{\partial t} - u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} - w \frac{\partial v}{\partial z} \\ \quad + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right) \right] \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = Z - \frac{\partial w}{\partial t} - u \frac{\partial w}{\partial x} - v \frac{\partial w}{\partial y} - w \frac{\partial w}{\partial z} \\ \quad + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right) \right] \end{array} \right. \quad (II.03)$$

- μ : Le coefficient de viscosité dynamique.

Ou, en notation vectorielle:

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} - X_i + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\mu \text{div} u_i) \quad (II.04)$$

$i = 1, 2, 3$

II.3.3) Equation de conservation de l'énergie:

Nous n'avons tenu compte jusqu'ici que de deux lois de conservation : celle de la masse et celle de la quantité de mouvement ; ceci supposait implicitement que la température du fluide était connue et constante (au moins en première approximation). Or on sait que les variations de température entraînent des dilatations et que ceci engendre en particulier dans les fluides des mouvements de convection ; de même les coefficients caractéristiques d'un milieu dépendent de la température (par exemple l'huile chaude est plus fluide que l'huile froide). Inversement, les frottements internes ou externes au cours d'un mouvement engendrent des variations de température. Tout ceci montre que les variations de pression p , masse volumique ρ , de vitesse V et de température T sont couplées; il est donc nécessaire d'introduire de nouvelles relations pour tenir compte de ce couplage.

Le premier principe de la thermodynamique exprime que la variation d'énergie d'un système est égale à la somme des quantités de chaleur et de travail que ce système a échangés avec le milieu extérieur.

La conservation de l'énergie s'écrit localement (dans Ω domaine de l'espace occupé par le fluide) :

$$\rho \frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial Q_i}{\partial x_i} + R \quad (II.05)$$

Où

- $E(x; y; z, t)$: désigne l'énergie interne spécifique (par unité de masse) du milieu
- σ_{ij} : Tenseur des contraintes
- $Q(x; y; z, t)$: est le flux de chaleur ;
- $R(x, y; z, t)$: est une densité volumique définissant un taux de chaleur fourni par des éléments extérieurs au milieu considéré ; ce terme appelé source est une donnée du problème et est en fait nul dans un certain nombre d'applications.

L'équation (II.05) devient après la détermination de toutes ces termes comme suit [13].:

$$\frac{\partial(\rho T)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u T)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v T)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w T)}{\partial z} = \text{div}\left(\frac{\lambda}{C_p} \text{grad} T\right) + R + \Psi \quad (II.06)$$

- λ : Conductivité thermique du fluide
- C_p : La chaleur massique de fluide
- R : Terme source
- Ψ : Fonction de dissipation visqueuse

$$\Psi = -\frac{2}{3} \mu \cdot e + 2\mu \cdot \left(\varepsilon_{ij} \cdot \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) \quad (II.07)$$

- ε_{ij} : tenseur de déformation.

II.3. L'équation d'état:

L'équation d'état du fluide est une relation liante la pression et la masse, elle se traduit par l'expression suivante [14].

$$C = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \quad (\text{II.08})$$

- C : est la compressibilité de fluide.

II.3.5) Densité des fluides en fonction de la température:

La température affecte les propriétés des fluides qui influencent leur écoulement, principalement leur densité et leur viscosité. Burger et al.(1985) [2]. Proposent les corrélations suivant pour évaluer l'effet de la température $T(^{\circ}C)$ Sur la densité ρ et la viscosité cinématique de l'eau liquide ν . La viscosité dynamique μ a été calculée à partir du produit de la densité et de la viscosité cinématique.

$$\rho(T) \approx 1000.2 - 0.0478.T - 3.88 \times 10^{-3}.T^2 \quad (\text{II.09})$$

$$\begin{cases} \nu(T) \approx \frac{1.78 \times 10^{-6}}{1 + 0.0337.T + 0.000221.T^2} \\ \mu(T) = \rho.\nu \end{cases} \quad (\text{II.10})$$

Les relations précédentes sont précises à de faibles températures. Puisque nous sommes aussi intéressés aux propriétés d'écoulement de l'eau liquide à des températures élevées, nous présentons également les relations suivant pour la densité (Kg/m^3) et la viscosité ($Pa.s$) de l'eau liquide à des températures et pressions élevées. Ces relations sont tirées de Farouq Ali (1974) et Jones (1981) et contiennent des facteurs de conversion des unités de génie pétrolier aux unités SI. Dans le cas de l'eau liquide nous avons les relations suivantes :

$$\begin{cases} \rho(T) \approx 16.01846.(1/(0.016202 + 2.3 \times 10^{-5}.\chi)) \\ \chi = -6.6 + 0.0325.(T.1.8 + 32) + 6.57 \times 10^{-4}.(T.1.8 + 32)^2 \end{cases} \quad (\text{II.11})$$

$$\mu(T) \approx \left(\frac{2.185}{0.04012.(T.1.8 + 32) + 5.1547 \times 10^{-6}.(T.1.8 + 32)^2 - 1} \right) \times 10^{-3} \quad (\text{II.12})$$

Le tableau suivant représente certaines propriétés de l'eau liquide en fonction de la température [3]:

T	ρ	C_p	λ	$10^4 \cdot \mu$	Pr
(°C)	(Kg/m ³)	(J/Kg.°C)	(Wm.°C)	(Pa.s)	-
0	1002	4218	0.552	17.90	13.06
20	1001	4182	0.597	10.10	7.02
40	995	4178	0.628	6.55	4.34
60	985	4184	0.651	4.71	3.02
80	974	4196	0.668	3.55	2.22
100	960	4216	0.680	2.82	1.74
120	945	4250	0.685	2.33	1.45
140	928	4283	0.684	1.99	1.24
160	910	4342	0.680	1.73	1.10
180	889	4417	0.675	1.54	1.00
200	867	4505	0.665	1.39	0.94
220	842	4610	0.652	1.26	0.89
240	816	4756	0.635	1.17	0.88
260	786	4949	0.611	1.08	0.87
280	763	5208	0.580	1.02	0.91
300	714	5728	0.540	0.98	1.02

Tableau II.1: Propriétés de l'eau à saturation

II.3.6) Système de coordonnées :

Puisque chaque équation des variables indépendantes doit être intégrée sur tous les volumes élémentaires, il y a une économie de temps et de mémoire à réaliser en travaillant avec peu de variables indépendantes. Un choix judicieux du système de coordonnées peut parfois réduire le nombre des variables indépendantes exigées.

L'écoulement axisymétrique dans une conduite circulaire semble être tridimensionnel dans un système de coordonnées cartésien mais est bidimensionnel dans un système de coordonnées cylindriques sans la dépendance de θ ($\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$) [15].

II.3.7) Hypothèses simplificatrices :

En premier lieu, nous considérons des écoulements de fluides incompressibles donc :

$$\rho = \rho^e$$

Et

$$\text{div} \vec{V} = 0$$

Autrement dit, nous supposons que la masse volumique du fluide est indépendante de la pression. La relation (II.08) montre que pour l'eau à température ordinaire $\frac{1}{C} = 20000$ bars, ce que signifie qu'une augmentation de pression de 1 bar entraîne une diminution de volume de $\frac{1}{20000}$ [14].

Les variations de la masse volumique avec la température sont négligeables, hypothèse qui est valable pour la quasi-totalité des liquides (comme l'eau), une variation de température entre 0 et 100°C entraîne une diminution de 4% de la masse volumique. [16].

En deuxième lieu, l'écoulement est permanent ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$).

Le fluide est soumis à la seule action de la pesanteur ($X = 0, Y = 0, Z = -g$)

En dernier lieu, nous considérons que les variations de la conductivité thermique λ avec T sont en général très modérées : dans le cas de l'eau, entre 0 et 300°C, les valeurs de λ s'étalent entre 0.54 et 0.685 W/m.°C. La chaleur spécifique C_p est considérée constante, cette approximation est valide puisque les gradients de température étant assez faibles [13,3].

Quant aux variations de la viscosité dynamique μ (par conséquent celles de ν puisque ρ est constante) sont considérables avec la température pour l'eau et de nombreux liquides : entre 20 et 100 °C, pour l'eau μ varie de 10^{-2} à $2.81 \cdot 10^{-2} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$ [17].

En se basant sur le tableau (II.1), les variations du nombre de Prandtl sont, de ce fait importantes avec la température : pour l'eau, Pr passe de 7 à 1.74 de 20 à 100 °C. Le nombre de Reynolds varie également de façon très sensible avec la température du fait des variations de $\mu(T)$ (à ρ constant).

Donc μ est choisie variable avec la température selon la formule:

$$\mu = \frac{\mu_0}{1 + aT + bT^2} \quad (\text{II.13})$$

Tels que :

- $a = 0.033368$
- $b = 0.00022$

Puisque ρ est constante et nous n'avons ni source, ni puits, de chaleur donc $R = 0$ Et $e = 0$.

II.3.8) Construction du modèle mathématique:

En tout point et à tout instant, l'état du système est caractérisé par un certain nombre de variables, qui seront ici d'origine thermodynamique et mécanique. Une fois le système défini et ses variables d'états précisées, l'objectif de la modélisation est d'établir un système d'équations permettant de suivre l'évolution temporelle des

variables d'état, de façon à être capable de d'écrire l'état du système à chaque instant, à partir de la donnée de la condition initiale et les conditions aux limites

En se plaçant dans le cadre de ces hypothèses, certaines simplifications peuvent être apportées aux équations précédentes. Nous tenons en compte le système de coordonnées choisi.

Equation de continuité:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru) + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.14})$$

Equation de conservation de quantité de mouvement:

Selon r :

$$\begin{cases} \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\Delta u - \frac{u}{r^2} \right) + \frac{d\mu}{dT} \vec{\nabla} T \cdot \left(\vec{\nabla} u + \frac{\partial \vec{V}}{\partial r} \right) \\ \vec{\nabla} T \cdot \left(\vec{\nabla} u + \frac{\partial \vec{V}}{\partial r} \right) = 2 \frac{\partial T}{\partial r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial T}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \\ \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 z}, \quad \frac{d\mu}{dt} = \frac{-\mu_0(a + 2bT)}{(1 + aT + bT^2)^2} \end{cases} \quad (\text{II.15})$$

Selon z :

$$\begin{cases} \rho \left(u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \Delta w + \frac{d\mu}{dT} \vec{\nabla} T \cdot \left(\vec{\nabla} w + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \right) \\ \vec{\nabla} T \cdot \left(\vec{\nabla} w + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial T}{\partial z} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial T}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \\ \Delta w = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial^2 z}, \quad \frac{d\mu}{dt} = \frac{-\mu_0(a + 2bT)}{(1 + aT + bT^2)^2} \end{cases} \quad (\text{II.16})$$

Equation de conservation de l'énergie:

$$\begin{cases} \rho C_p \left(u \frac{\partial T}{\partial r} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial^2 z} \right] + \Psi \\ \Psi = 2\mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{u}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \end{cases} \quad (\text{II.17})$$

Les équations (II.14), (II.15), (II.16) et (II.17) se résument sous la forme :

$$\frac{\partial(\rho\Phi u_j)}{\partial x_j} = p^\Phi + \text{div}(\Gamma^\Phi \text{grad}\vec{\Phi}) + S^\Phi \quad (\text{II.18})$$

Le tableau suivant donne les expressions des termes Φ , p^Φ , Γ^Φ et S^Φ selon l'équation considérée [18] :

Equation de	Φ	p^Φ	Γ^Φ	S^Φ
continuité	1	0	0	0
Mouvement suivant r	u	$-\frac{\partial p}{\partial r}$	μ	$-\frac{\mu u}{r^2} + \frac{d\mu}{dT} \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} u + \frac{\partial \vec{V}}{\partial r} \right)$
Mouvement suivant z	w	$-\frac{\partial p}{\partial z}$	μ	$-\rho g + \frac{d\mu}{dT} \vec{\nabla} T \left(\vec{\nabla} w + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \right)$
l'énergie	T	0	$\frac{\lambda}{c_p}$	Ψ

Tableau II.2: Valeurs de Φ , p^Φ , Γ^Φ et S^Φ pour l'équation de la forme Générale en coordonnées cylindriques

II.3.9) Les équations adimensionnées :

Pour permettre le passage d'une échelle de grandeur à une autre, il est nécessaire de définir des variables réduites. Le système de variables réduites permet d'approcher la réalité physique car leur existence et leur déroulement sont indépendants du système d'unité choisi. Ce changement de variables nécessite l'introduction de quantités caractéristiques propres à l'écoulement. Il est commode de choisir pour grandeur de référence [13]:

- une unité de vitesse w_0 , à partir des données ou caractéristiques du problème.
- une unité de longueur D_0 , à partir des données ou caractéristiques du problème.
- une unité de masse volumique ρ_0 , à partir des données ou caractéristiques du problème.
- la température sera adimensionnée à partir des températures extrêmes T_f et T_c définies à partir des données du problème.

On pose alors :

$$\begin{aligned}\rho^+ &= \frac{\rho}{\rho_0}, & p^+ &= \frac{p}{\rho_0 w_0^2}, & z^+ &= \frac{z}{D_0} \\ r^+ &= \frac{r}{D_0}, & u^+ &= \frac{u}{w_0}, & w^+ &= \frac{w}{V_0} \\ \mu^+ &= \frac{\mu}{\mu_0}, & T^+ &= \frac{T}{T_f - T_e} = \frac{T}{\Delta T}\end{aligned}$$

- μ_0 Viscosité dynamique moyenne du fluide.

a) Transformation de l'équation de continuité :

$$\left(\frac{w_0}{D_0}\right) \frac{1}{r^+} \frac{\partial}{\partial r^+} (r^+ u^+) + \left(\frac{w_0}{D_0}\right) \frac{\partial w^+}{\partial z^+} = 0$$

Ceci devient :

$$\frac{1}{r^+} \frac{\partial}{\partial r^+} (r^+ u^+) + \frac{\partial w^+}{\partial z^+} = 0 \quad (\text{II.19})$$

On remarque qu'il n'y a pas de données réduites pour l'équation de continuité.

b) Transformation de l'équation de quantité de mouvement sur z :

$$\begin{aligned}\rho^+ \rho_0 \left(u^+ w_0 \frac{\partial w^+ w_0}{D_0 \partial r^+} + w^+ w_0 \frac{\partial w^+ w_0}{D_0 \partial z^+} \right) &= -\rho^+ \rho_0 g - \rho_0 w_0^2 \frac{\partial p}{D_0 \partial z} + \mu^+ \left(\frac{\mu_0 w_0}{D_0^2} \right) \Delta w^+ \\ &+ \left(\frac{\mu_0 w_0}{\Delta T D_0} \right) \frac{d\mu}{dT^+} \Delta T \vec{\nabla} T^+ \cdot \left(\vec{\nabla} w^+ + \frac{\partial \vec{V}^+}{\partial z^+} \right)\end{aligned}$$

Cela devient :

$$\begin{aligned}\rho^+ \left(u^+ \frac{\partial w^+}{\partial r^+} + w^+ \frac{\partial w^+}{\partial z^+} \right) &= -\rho^+ \left(\frac{g D_0}{w_0^2} \right) - \frac{\partial p^+}{\partial z^+} + \left(\frac{\mu_0}{\rho_0 D_0 w_0} \right) \mu^+ \cdot \left(\frac{\partial^2 w^+}{\partial z^{+2}} + \frac{1}{r^+} \frac{\partial}{\partial r^+} \left(r^+ \frac{\partial w^+}{\partial r^+} \right) \right) \\ &+ \left(\frac{\mu_0}{\rho_0 D_0 w_0} \right) \frac{d\mu^+}{dT^+} \left(2 \frac{\partial T^+}{\partial z^+} \cdot \frac{\partial w^+}{\partial z^+} + \frac{\partial T^+}{\partial r^+} \left(\frac{\partial w^+}{\partial z^+} + \frac{\partial u^+}{\partial r^+} \right) \right)\end{aligned}$$

Soit:

$$\begin{aligned}\rho^+ \left(u^+ \frac{\partial w^+}{\partial r^+} + w^+ \frac{\partial w^+}{\partial z^+} \right) &= -\rho^+ \left(\frac{1}{Fr} \right)^2 - \frac{\partial p^+}{\partial z^+} + \left(\frac{1}{Re} \right) \mu^+ \cdot \left(\frac{\partial^2 w^+}{\partial z^{+2}} + \frac{1}{r^+} \frac{\partial}{\partial r^+} \left(r^+ \frac{\partial w^+}{\partial r^+} \right) \right) \quad (\text{II.20}) \\ &+ \left(\frac{1}{Re} \right) \frac{d\mu^+}{dT^+} \left(2 \frac{\partial T^+}{\partial z^+} \cdot \frac{\partial w^+}{\partial z^+} + \frac{\partial T^+}{\partial r^+} \left(\frac{\partial w^+}{\partial z^+} + \frac{\partial u^+}{\partial r^+} \right) \right)\end{aligned}$$

c) Transformation de l'équation de quantité de mouvement sur r :

$$\left(\frac{\rho_0 w_0^2}{D_0}\right) \rho^+ \left(u^+ \frac{\partial u^+}{\partial r^+} + w^+ \frac{\partial u^+}{\partial z^+} \right) = - \left(\frac{\rho_0 w^2}{D_0} \right) \frac{\partial p^+}{\partial r^+} + \mu^+ \left(\frac{w_0 \mu_0}{D_0^2} \right) \left(\Delta u^+ - \frac{u^+}{(r^+)^2} \right) + \left(\frac{\mu_0 w_0}{D_0^2} \right) \frac{d\mu^+}{dT^+} \vec{\nabla} T^+ \cdot \left(\vec{\nabla} u^+ + \frac{\partial \vec{V}^+}{\partial r^+} \right)$$

Cela devient :

$$\rho^+ \left(u^+ \frac{\partial u^+}{\partial r^+} + w^+ \frac{\partial u^+}{\partial z^+} \right) = - \frac{\partial p^+}{\partial r^+} + \mu^+ \left(\frac{\mu_0}{\rho_0 w_0 D_0} \right) \left(\Delta u^+ - \frac{u^+}{(r^+)^2} \right) + \left(\frac{\mu_0}{\rho_0 w_0 D_0} \right) \frac{d\mu^+}{dT^+} \cdot \left(2 \frac{\partial T^+}{\partial r^+} \frac{\partial u^+}{\partial r^+} + \frac{\partial T^+}{\partial z^+} \left(\frac{\partial u^+}{\partial z^+} + \frac{\partial w^+}{\partial z^+} \right) \right)$$

Soit:

$$\rho^+ \left(u^+ \frac{\partial u^+}{\partial r^+} + w^+ \frac{\partial u^+}{\partial z^+} \right) = - \frac{\partial p^+}{\partial r^+} + \mu^+ \left(\frac{1}{\text{Re}} \right) \left(\Delta u^+ - \frac{u^+}{(r^+)^2} \right) + \left(\frac{1}{\text{Re}} \right) \left(2 \frac{\partial T^+}{\partial r^+} \frac{\partial u^+}{\partial r^+} + \frac{\partial T^+}{\partial z^+} \left(\frac{\partial u^+}{\partial z^+} + \frac{\partial w^+}{\partial z^+} \right) \right) \quad (\text{II.21})$$

Il apparaît deux données réduites :

- 1) $\frac{\rho_0 D_0 w_0}{\mu_0}$: nombre de Reynolds Re .
- 2) $\frac{w_0}{\sqrt{g D_0}}$: nombre de Froude Fr .

Ces deux nombres sont très importants. Le nombre de Reynolds exprime le rapport de l'influence de l'inertie sur celle de la viscosité. Quant au nombre de Froude mesure l'influence de la pesanteur.

Pour μ^+ elle devient une donnée réduite du problème. Mais, il faudrait mettre sous forme adimensionnelle la relation exprimant $\mu = f(T)$.

d) Transformation de l'équation d'énergie :

L'équation d'énergie s'écrit :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\rho_0 \Delta T w_0}{D_0} \right) \rho^+ c_p \left(u^+ \frac{\partial T^+}{\partial r^+} + w^+ \frac{\partial T^+}{\partial z^+} \right) &= \lambda \left(\frac{\Delta T}{D_0^2} \right) \left[\frac{1}{r^+} \frac{\partial}{\partial r^+} \left(r^+ \frac{\partial T^+}{\partial r^+} \right) + \frac{\partial^2 T^+}{\partial z^+{}^2} \right] \\ &+ 2\mu^+ \left(\frac{w_0^2 \mu_0}{D_0^2} \right) \left[\left(\frac{\partial u^+}{\partial r^+} \right)^2 + \left(\frac{u^+}{r^+} \right)^2 + \left(\frac{\partial w^+}{\partial z^+} \right)^2 \right] \\ &+ \mu^+ \left(\frac{\mu_0 w_0^2}{D_0^2} \right) \left(\frac{\partial u^+}{\partial z^+} + \frac{\partial w^+}{\partial r^+} \right)^2 \end{aligned}$$

En multipliant par $\frac{D_0}{\rho_0 w_0 c_p \Delta T}$, et en transformant, il vient :

Cela devient :

$$\begin{aligned} \rho^+ \left(u^+ \frac{\partial T^+}{\partial r^+} + w^+ \frac{\partial T^+}{\partial z^+} \right) &= \left(\frac{\Delta T \lambda}{D_0 c_p \rho_0 w_0} \right) \left[\frac{1}{r^+} \frac{\partial}{\partial r^+} \left(r^+ \frac{\partial T^+}{\partial r^+} \right) + \frac{\partial^2 T^+}{\partial z^+{}^2} \right] \\ &+ 2\mu^+ \left(\frac{w_0 \mu_0}{D_0 \Delta T \rho_0 c_p} \right) \left[\left(\frac{\partial u^+}{\partial r^+} \right)^2 + \left(\frac{u^+}{r^+} \right)^2 + \left(\frac{\partial w^+}{\partial z^+} \right)^2 \right] \\ &+ \mu^+ \left(\frac{\mu_0 w_0}{D_0 \Delta T \rho_0 c_p} \right) \left(\frac{\partial u^+}{\partial z^+} + \frac{\partial w^+}{\partial r^+} \right)^2 \end{aligned}$$

Il apparaît, comme données réduites :

$\frac{D_0 \rho_0 w_0}{\mu_0}$: Nombre de Reynolds

$\frac{\mu_0 c_p}{\lambda} = \frac{\mu_0 / \rho_0}{\lambda / \rho_0 c_p} = \frac{\nu_0}{a}$: Nombre de Prandtl (Pr). Il s'agit du rapport des diffusivités

de quantité de mouvement et de la diffusivité thermique [16].

$\frac{c_p \Delta T}{w_0^2}$: est le nombre d'Eckert (Ec). Il est important si la dégradation de l'énergie mécanique en chaleur est importante. On peut le négliger dans le cas inverse.

Donc l'équation adimensionnelle de l'énergie, devient :

$$\begin{aligned} \rho^+ \left(u^+ \frac{\partial T^+}{\partial r^+} + w^+ \frac{\partial T^+}{\partial z^+} \right) &= \left(\frac{1}{\text{Re}} \cdot \frac{1}{\text{Pr}} \right) \left[\frac{1}{r^+} \frac{\partial}{\partial r^+} \left(r^+ \frac{\partial T^+}{\partial r^+} \right) + \frac{\partial^2 T^+}{\partial z^+{}^2} \right] \\ &+ 2\mu^+ \left(\frac{1}{\text{Re}} \cdot \frac{1}{\text{Ec}} \right) \left[\left(\frac{\partial u^+}{\partial r^+} \right)^2 + \left(\frac{u^+}{r^+} \right)^2 + \left(\frac{\partial w^+}{\partial z^+} \right)^2 \right] \\ &+ \mu^+ \left(\frac{1}{\text{Re}} \cdot \frac{1}{\text{Ec}} \right) \left(\frac{\partial u^+}{\partial z^+} + \frac{\partial w^+}{\partial r^+} \right)^2 \end{aligned} \quad (\text{II.22})$$

II.3.10) Conditions aux limites:

La géométrie du domaine d'étude, dans lequel évoluera de l'eau, est pour commencer celle d'un tronçon d'une conduite de longueur $l_{conduite}$, de diamètre extérieur D_0 avec des sections longitudinal uniformes.

Compte tenu de la géométrie, nous adoptons un système de coordonnées cylindriques pour définir les limites de notre domaine et résoudre les équations du système.

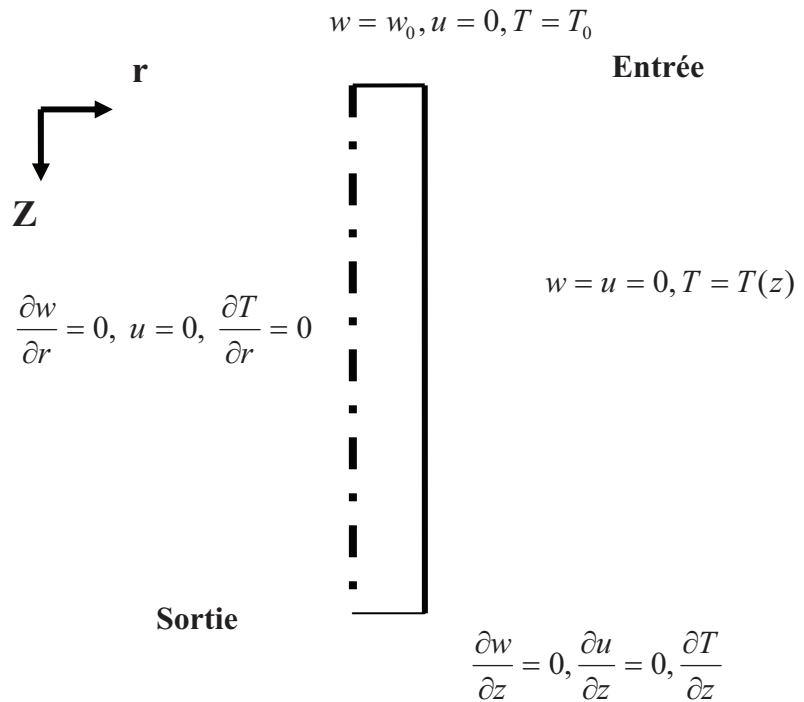


Figure II.5 : Domaine d'étude et conditions aux limites.

a) Conditions aux limites dynamiques :

-Condition à la limite amont :

Pour ce type d'écoulement, nous décidons de faire porter tout naturellement la condition à la limite amont sur le débit d'eau entrant $Q_{entrée}$. Cependant, nous choisissons d'être plus précis et fixons finalement le champ de vitesse amont. Avec l'adaptation du profile de parabolique le plus rencontré dans les conduites cylindriques.

Donc, nous allons adapté des conditions de Dirichlet sur les vitesses. Autrement dit, dans un premier temps, nous avons besoin de former la composante

longitudinale de la vitesse débitante. Nous l'imposons égale au rapport du débit d'eau d'entrée à la surface de passage amont.

En ce qui concerne la vitesse transversale $u_{\text{entrée}}$, elle est fixée nulle dans toute la section amont.

-Condition à la limite aval :

Pour modéliser la sortie, nous décidons d'une manière générale d'imposer une condition de Neumann avec des gradients normaux nuls sur toutes les variables.

Il faut dire que, notre choix c'est porté sur une condition de type "mass flow boundary" afin de laisser le programme calculer lui même le débit d'eau en sortie. Cependant, à tout moment, le débit aval doit être obligatoirement identique au débit amont, ce qui est réalisable pour un écoulement permanent.

-Conditions aux parois :

La turbulence:

La turbulence désigne l'état d'un fluide dans lequel la vitesse présente en tout point un caractère tourbillonnaire ; tourbillons dont la taille, la localisation et l'orientation varient constamment. Les écoulements turbulents se caractérisent donc par une apparence très désordonnée, un comportement non prévisible et l'existence de nombreuses échelles spatiales et temporelles. De tels écoulements apparaissent lorsque la source d'énergie cinétique qui met le fluide en mouvement est relativement intense devant les forces de viscosité que le fluide oppose pour se déplacer. A l'inverse, on appelle laminaire le caractère d'un écoulement régulier et prévisible. La turbulence est un phénomène dont il faut analyser le comportement. A partir d'études théoriques et de comparaison avec des résultats expérimentaux, des modèles complémentaires ont été proposés pour tenir compte de la turbulence sur les valeurs moyennes des variables : vitesse, pression, température. Le comportement complexe des écoulements turbulents ne peut être abordé que par une voie statistique. La turbulence est un phénomène du à la non linéarité de l'écoulement. Elle conditionne l'ensemble des variables thermodynamiques et cinétiques.

Les parois solides dans notre étude sont les parois latérales. Contre ces parois, les conditions d'adhérence (ou de non glissement) s'appliquent de sorte que les vitesses sont nulles. En revanche le taux de dissipation de l'énergie cinétique par les contraintes visqueuses possède une valeur finie puisqu'au voisinage très proche de la paroi (sous couche visqueuse ou laminaire), les contraintes visqueuses sont beaucoup plus importantes que les contraintes turbulentes, provoquant une baisse sensible du nombre de Reynolds.

Il n'est toutefois pas raisonnable de spécifier des conditions directement à la paroi dans la mesure où l'utilisation de ce type de conditions implique le maillage de la sous couche visqueuse. Or, les modèles de turbulence basés sur des hypothèses reposant sur des nombres de Reynolds élevés, ne sont plus valides dans la sous couche laminaire caractérisée par de faibles nombres de Reynolds. En outre, même si certains de ces modèles possèdent désormais des extensions pour les faibles nombres de Reynolds, les gradients de différentes variables peuvent se montrer très forts dans cette sous couche et les décrire correctement exigerait de constituer un maillage très serré à la paroi.

La solution couramment choisie est le positionnement des premiers points P du maillage en dehors de la sous couche visqueuse (afin qu'il se trouve dans la zone de validité du modèle de turbulence) et l'utilisation de lois empiriques classiques de parois qui permettent de relier la valeur des variables aux points P , à des quantités physiques de la paroi (vitesse de frottement ou contrainte de cisaillement à la paroi) [14].

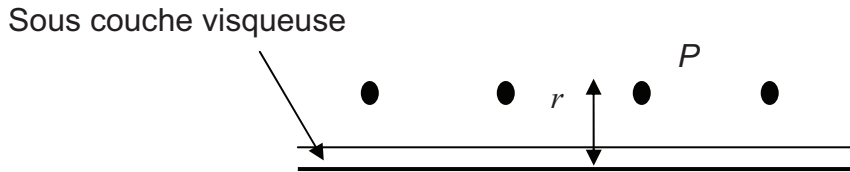


Figure II.6 : positionnement des premiers points du maillage.

Il existe trois régions distinctes au voisinage de la paroi : la sous couche visqueuse (ou laminaire), la zone tampon et la zone turbulente.

L'expérience montre que dans l'ensemble de ces trois régions, la vitesse projetée sur un plan parallèle à la paroi, que nous appelons abusivement \vec{w} , suit la direction inverse de la contrainte de cisaillement. En revanche, sa norme w est régie par une loi différente dans chacune de ces régions.

Les bornes de ces régions variant d'un auteur à l'autre dans la littérature, nous nous en tenons à celle qui sont les plus fréquemment utilisées.

Soit r^+ la distance adimensionnelle à la paroi :

$$r^+ = \frac{\rho w^* r}{\mu} \quad (\text{II.23})$$

Où : $w^* = \sqrt{\frac{\tau^*}{\rho}}$ est la vitesse de frottement.

- τ^* Est la contrainte de cisaillement à la paroi.
- r Est la distance à la paroi.

Les trois régions sont définies comme précédemment de la manière suivante [14]:

- Sous couche visqueuse : $0 < r^+ < 5$
- Zone tampon $5 < r^+ < 30$
- Zone turbulente : $30 < r^+ < 500$

A ce stade de raisonnement, il à noter que les formules ne sont pas identiques pour les deux cas de parois lisses et de parois rugueuses dans la mesure où les profils de vitesse à leur voisinage ne vérifient pas rigoureusement le même type de lois empiriques. Nous nous limitons dans notre étude au traitement du cas de la paroi lisse.

Etude du cas des parois lisses :

Au voisinage de la paroi, la vitesse parallèle à la paroi de chaque région est bâtie en premier lieu sur la même approximation qui stipule que la contrainte de

cisaillement, variant très lentement avec la distance à la paroi, est considérée constante et égale à la contrainte de cisaillement à la paroi. D'autres résultats empiriques relatifs à chaque région permettent, en second lieu, de prouver que la vitesse ne suit pas le même type de courbe suivant la valeur de la distance à la paroi r^+ .

Dans la sous couche visqueuse, la turbulence peut être négligée. Ce qui entraîne un profil de vitesse linéaire :

$$\begin{aligned} w^+ &= r^+ \\ \frac{w}{w^*} &= \frac{\rho w^* r}{\mu} \end{aligned} \quad (II.24)$$

Dans la zone turbulente, l'expérience indique l'échelle de longueur d'un tourbillon évoluant dans cette région est proportionnel à la distance à la paroi r^+ . le profil de vitesse est alors de forme logarithmique :

$$w^+ = \frac{1}{k} \ln(E.r^+) \quad (II.25)$$

$$\frac{w}{w^*} = \frac{1}{k} \ln\left(E \frac{\rho w^* r}{\mu}\right) \quad (II.26)$$

Où :

- $k = 0.4187$ est la constante de Von Karman.
- $E = 9.793$ est le coefficient de rugosité pour une paroi lisse.

En règle générale, les codes de calcul ne modélisent pas la vitesse dans la zone tampon et limite le voisinage de la paroi aux deux zone traitées ci-dessus. La limite r_L^+ entre les deux régions est alors choisie à l'intersection des courbes (II.25) et (II.26) :

$$r_L^+ = \frac{1}{k} \ln(E.r_L^+) \quad (II.27)$$

$$r_L^+ = 11.225 \quad (II.28)$$

Quant à la vitesse normale la paroi, elle imposée nulle $u = 0$ quelque soit la région de proche paroi considérée.

Grâce à ces résultats, la spécification des conditions aux parois peut s'effectuer suivant les étapes ci-dessous :

Maillage :

Lors de la constitution du maillage, nous fixons une valeur a priori du premier pas d'espace dans la direction normale à la paroi en cherchant à ce que les points P les plus proches de la paroi soient localisés dans la zone turbulente.

Composantes de vitesse :

Dans les cellules adjacentes aux frontières solides, le lien est coupé avec la paroi dans les équations discrétisées des composantes de vitesse. L'influence de la paroi sur l'écoulement s'effectue par l'introduction, dans ces équations, de termes sources correspondant aux composantes d'une force de paroi qui dépend directement de la contrainte de cisaillement à la paroi :

$$\vec{F} = \tau^* A_{paroi} \vec{a} \quad (II.29)$$

Où :

- A_{paroi} est l'aire de la face adjacente à la paroi de la cellule entourant P .
- \vec{a} Est un vecteur unitaire parallèle à la paroi donnant la direction de τ^* .

Par ailleurs, aux points P , la vitesse parallèle à la paroi suit la relation empirique (II.25) et a pour direction l'inverse de celle de la contrainte de cisaillement. Compte tenu du fait que la contrainte de cisaillement ne varie pas dans le voisinage de la paroi, cette vitesse possède finalement comme direction l'inverse de celle de la contrainte de cisaillement à la paroi [3]:

$$\vec{w}_p = -\frac{\frac{1}{k} \ln \left(E \frac{\rho^{1/2} \tau^{*1/2} r_p}{\mu} \right)}{\rho^{1/2} \tau^{*1/2}} \times \tau^* \vec{a} = -\frac{1}{T_M} \times \tau^* \vec{a} \quad (II.30)$$

Finalement, la formule ci-dessus permet d'écrire :

$$\vec{F} = -T_M \cdot A_{paroi} \vec{w}_p \quad (II.32)$$

$$T_M = \frac{\rho^{1/2} \tau^{*1/2}}{\frac{1}{k} \ln \left(E \frac{\rho^{1/2} \tau^{*1/2} r_p}{\mu} \right)} \quad (II.33)$$

Vérification :

La valeur de τ^* étant désormais connue, nous calculons la distance adimensionnelle à la paroi r_p^+ des points P de la première ligne de maillage et nous nous assurons qu'elle vérifie bien la condition suivante :

$$r_L^+ < \frac{\rho^{1/2} \tau^{*1/2} r_p}{\mu} < 500 \quad (II.34)$$

Si ce n'est pas le cas, la taille du premier pas d'espace dans la direction normale à la paroi est modifiée (généralement à la hausse) et tous les calculs de proche paroi sont effectués à nouveau. Cette étape est réalisée jusqu'à ce que les premiers points P se retrouvent dans la zone turbulente.

b) Conditions aux limites thermiques :**Conditions à la limite amont :**

Nous choisissons d'imposer une condition de type Dirichlet sur la limite amont tel que :

Pour l'écoulement axisymétrique descendant $T(z_0, r) = T_e$

- Condition à la limite aval :

Pour la limite aval d'écoulement, nous choisissons d'imposer une condition de type Neumann (nous supposons l'écoulement est développer), tel que :

$$\left(\frac{\partial T(l_{\text{conduite}}, r)}{\partial z} \right)_{\text{sortie}} = 0 \quad (\text{II.35})$$

-Conditions aux parois :

Sur la paroi latérale de l'écoulement axisymétrique, nous choisissons d'imposer un profile linéaire la température. Ce profile est identique au profile de température de la géologie. Cette condition est valable en considérant que la géologie comme un milieu semi-infini. Donc le profile sera comme suit :

$$T(R_0, z) = T_0 + g_g \times z \quad (\text{II.36})$$

- g_g le gradient géothermique

L'application de l'analyse dimensionnelle montre que la relation liant le flux de chaleur transféré par convection aux variables dont il dépende peut être recherchée sous la forme d'une corrélation entre trois nombres adimensionnels [16].

$$Nu = f(Re, Pr)$$

Dans notre cas le choix de la corrélation de Dittus-Boulter est plus intéressant

$$\begin{cases} Nu = 0.023.Re^{0.8}.Pr^{0.4} \\ Re > 5000 \text{ et } 0.6 < Pr < 100 \end{cases} \quad (\text{II.37})$$

Le calcul d'un flux de chaleur transmis par convection forcée s'effectue de la manière suivant [9] :

$$\begin{aligned} \text{Calcule de} \quad h_t &= \frac{\lambda.Nu}{D_h} \\ \text{Puis} \quad \varphi &= .h_t.S(T_p - T_\infty) \end{aligned} \quad (\text{II.38})$$

Avec :

- h_t coefficient de transfert de chaleur par convection
- λ conductibilité du fluide en présence.
- D_h le diamètre hydraulique défini comme suit :

Pour l'écoulement axisymétrique $D_h = D_{\text{int}} / 2$

Tel que :

- D_{int} : Diamètre de la conduite axisymétrique.

II.3.11) Modèle mathématique:

Un problème de mécanique des fluides consiste à déterminer en tout point du fluide et à tout instant ses grandeurs caractéristiques, soit :

- la vitesse V
- la pression P
- la température T

qui permet ensuite d'évaluer les différents flux de masse et/ou de chaleur. Un nombre suffisant de conditions aux limites et initiales doivent être connues.

Pour calculer ces grandeurs, on utilise les équations de conservation de la masse (II.19), de la quantité de mouvement (II.20), (II.21) et de l'énergie (II.22) ainsi que les relations de comportement qui lient certaines grandeurs entre elles.

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \rho \left(u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\rho \frac{1}{Fr} - \frac{\partial p}{\partial z} + \left(\frac{1}{Re} \right) \cdot \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial^2 z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right) \\
 \quad + \left(\frac{1}{Re} \right) \frac{d\mu}{dT} \left(2 \frac{\partial T}{\partial z} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial T}{\partial r} \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right) \\
 \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\frac{1}{Re} \right) \left(\Delta u - \frac{u}{r^2} \right) + \left(\frac{1}{Re} \right) \left(2 \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial T}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right) \\
 \rho \left(u \frac{\partial T}{\partial r} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{1}{Re} \frac{1}{Pr} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial^2 z} \right] + 2\mu \frac{1}{Re} \frac{1}{Ec} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{u}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \\
 \quad + \mu \frac{1}{Re} \frac{1}{Ec} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \\
 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\
 u(z_0, r) = u(l, r) = u(z, R_0) \\
 \left(\frac{\partial T(l_c, r)}{\partial z} \right)_{\text{sortie}} = 0, \quad T(z_0, r) = T_e, \quad T(R_0, z) = T_0 + g_g \times z \\
 w(z, R_0) = 0
 \end{array} \right. \quad (II.39)$$

II.4) Modélisation d'un écoulement dans un milieu poreux:

II.4.1) généralités:

Nous présentons rapidement les lois et les concepts physiques nécessaires à l'élaboration de modèle mathématique que nous allons décrire. Il est évident que la présentation qui suit ne prend pas en compte toute la complexité des phénomènes que l'on rencontre lorsqu'on étudie les écoulements dans les milieu poreux caractérisant d'un gradient géothermique très élevé, mais ces lois et ces concepts constituent la base principale sur laquelle reposent les simulateurs numériques.

II.4.1.1) la porosité:

Considérons un échantillon de roche. Son volume total V_T , est constitué d'un volume solide V_s et d'un volume de pores V_p contenant un ou plusieurs fluides. On appelle porosité le rapport [17]:

$$\phi = \frac{V_p}{V_s + V_p} = \frac{V_p}{V_T} \quad (\text{en } \%) \quad (\text{II.40})$$

La porosité qui nous intéresse est celle qui permet la circulation des fluides et qui correspond aux pores reliés entre eux. En général on prend la porosité comme une fonction constante par morceaux en fonction de la nature de la roche réservoir. Dans des cas industriels, on peut aussi prendre la porosité comme une fonction faiblement variable (linéaire décroissante) de la pression (et/ou de la profondeur). On peut dire si [17]:

- | | | |
|----|----------------------|---------------------|
| 1. | $\phi < 5\%$ | porosité faible |
| 2. | $5\% < \phi < 10\%$ | porosité médiocre |
| 3. | $10\% < \phi < 20\%$ | porosité moyenne |
| 4. | $20\% < \phi < 30\%$ | porosité bonne |
| 5. | $\phi > 30\%$ | porosité excellente |

II.4.1.2) Perméabilité d'un milieu poreux:

La perméabilité intrinsèque ou absolue d'une roche est l'aptitude de cette roche à laisser circuler à travers ses pores un fluide dont elle est saturée. Cette propriété peut être évaluée grâce à la Loi de Darcy.

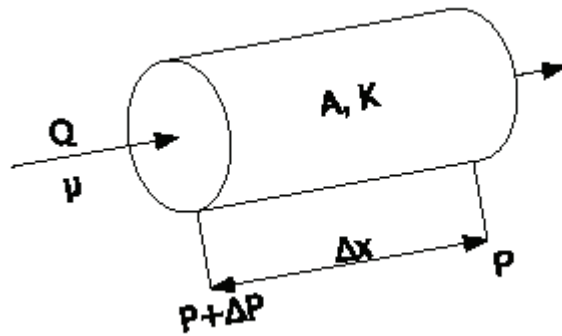


Figure II.7: Carotte

La loi de Darcy est une loi expérimentale. Considérons la figure (II.05), une tranche d'échantillon de milieu poreux, de longueur Δx de section A et saturé d'un fluide de viscosité dynamique μ , traversé par un débit Q mesuré dans les conditions de température et de pression de la tranche, en régime permanent, la pression amont est $p + \Delta p$ ($\Delta p > 0$), la pression aval est p . L'étanchéité est faite sur les faces latérales.

S'il n'y a pas de réaction du fluide avec la roche, ce qui est en général le cas, la loi de Darcy exprime que le débit volumique du fluide à travers la tranche est proportionnel à la différence de pression entre l'amont et l'aval. Le fluide s'écoule dans le sens des pressions décroissantes [17].

$$Q = A \cdot \frac{k}{\mu} \left(\frac{\Delta p}{\Delta x} \right) \quad (\text{II.41})$$

Le coefficient de perméabilité k est indépendant du fluide considéré. Il n'est fonction que de la nature du milieu poreux. Par exemple, c'est une fonction constante par morceaux pour les milieux stratifiés.

L'unité usuelle est le *Darcy* ou le millidarcy (mD).

$$u(\text{cm/m}) = k(\text{Darcy}) \cdot \frac{1}{\mu(\text{centipoise})} \cdot \frac{\Delta p(\text{atmosphere})}{\Delta x(\text{cm})} \quad (\text{II.42})$$

1 Atmosphère = $1,013 \cdot 10^5$ pascals:

1 Centipoise = 10^{-2} Poiseuille = 10^{-3} pascals · seconde:

1 Millidarcy = $0,987 \cdot 10^{-15}$ m²:

La gamme des perméabilités rencontrées dans la pratique est très étendue.

1. 1 à 10 mD	faible perméabilité
2. 10 à 50 mD	perméabilité médiocre
3. 50 à 200 mD	perméabilité moyenne
4. 200 à 500 mD	perméabilité bonne
5. >500 mD	perméabilité excellente

II.4.1.3) Généralisation 3D:

On passe à la forme différentielle de l'écoulement décrit plus haut :

Vitesse du fluide dans la direction x :

$$u = \frac{k}{\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}$$

Pour un écoulement en 3 dimensions on introduit la fonction de la charge hydraulique . On définit la charge hydraulique d'un fluide incompressible et soumis à

la seule gravité par: $h = \frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z$.en hydraulique souterraine les vitesses sont

lentes. et on peut généralement négliger le facteur de charge dynamique $\frac{V^2}{2g}$ et l'on a donc, pour le fluide une charge hydraulique équivalente à la charge statique[19].:

$$h = \frac{p}{\rho g} + z$$

Pour prendre en compte la pesanteur et on généralise la loi de Darcy ;

$$\vec{V} = \frac{kg\rho}{\mu(T)} \text{grad}(h) \quad (\text{II.43})$$

La vitesse de filtration de Darcy appelé aussi conductivité hydraulique défini par:

$$K = \frac{k\rho g}{\mu(T)} \quad (\text{II.44})$$

Par exemple, dans un milieu stratifié, anisotrope, on prend souvent, \bar{k} comme tenseur diagonal. $k_h(x, y, z)$: Perméabilité horizontale $k_v(x, y, z)$: Perméabilité verticale et en général $k_h \gg k_v$

La loi de Darcy s'exprime par la relation :

$$\begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix}^T = \frac{\rho g}{\mu(T)} \begin{bmatrix} k_h & 0 & 0 \\ 0 & k_h & 0 \\ 0 & 0 & k_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{bmatrix}^T \quad (\text{II.45})$$

II.4.1.4) La loi de conservation des masses:

La mise en équations de l'écoulement de fluides en milieux poreux repose sur un principe fondamental qu'il est bon d'avoir toujours à l'esprit. Si nous nous intéressons plus particulièrement à l'écoulement de phases fluides comprenant plusieurs constituants, la loi de conservation des masses exprime le principe suivant:

Dans un volume fixé de milieux poreux, et pendant un intervalle de temps donné, La variation de débit massique est égale à la variation de l'accumulation dans l'élément de volume [19].

$$\text{div}(\rho \vec{V}) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho \phi) + \rho q = 0 \quad (\text{II.46})$$

- ρ : La masse volumique
- \vec{V} : Le vecteur vitesse
- q : Débit prélevé dans le milieu.

II.4.1.5) L'équation d'état:

L'équation d'état du fluide est une relation liante la pression et la masse volumique mais aussi introduisant une nouvelle inconnue qui est la température T .

$$\rho = f(p, T)$$

Elle demande donc à être complétée par un asservissement de la température à la pression ou à la masse volumique, cette dernière relation constitue la loi de thermodynamique d'évolution de fluide qui traduit de tout façon par une relation

$$p = f(T)$$

Par combinaison de ces deux relations, la nouvelle inconnue T peut être éliminée. Alors que l'équation d'état ne intervenir que les caractéristiques du fluide, la loi thermodynamique d'écoulement est affectée par les échanges calorifiques éventuels entre le fluide et le milieu poreux. En fait, l'extrême division du milieu poreux et son énorme capacité calorifique font les écoulement sont pratiquement toujours isotherme. La relation $p = f(T)$ se réduit donc à:

$$T(z) = T_0 + g_g z$$

- T_0 : est la température de l'eau à quelque mètres de la profondeur sous la surface du sol.
- g_g : Le gradient géothermique (en $^{\circ}\text{C.m}^{-1}$)

L'équation d'état se réduit par suite à l'équation d'une isotherme:

$$\rho = f(p, T(z))$$

Pour l'eau à température constante, la compressibilité et la viscosité varient à peu près linéairement avec la pression; au dessus de la pression de saturation. La compressibilité C de l'eau diminue quand la pression croît, alors que sa viscosité augmente légèrement. On devrait écrire [19]:

$$\mu = \mu_0 + \alpha_2(p_0 - p)$$

μ_0 : est la viscosité de l'eau à la pression de référence p_0

$$C = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} = C_0 + \alpha_1(p_0 - p)$$

- C_0 : est la compressibilité de l'eau à la pression de référence p_0 .

Après intégration l'équation précédant fournit:

$$\rho = \rho_0 \text{Exp} \left[C_0(p - p_0) + \frac{\alpha_1}{2}(p - p_0)^2 \right]$$

Prise sous cette forme l'équation d'état l'élimination de la masse volumique de l'équation de continuité, mais celle-ci donne alors une équation aux dérivées partielles extrêmement complexe. En vue d'obtenir une expression analytique manipulable, nous négligerons les variations de la compressibilité en fonction de la pression; cette attitude est d'ailleurs d'autant plus raisonnable que la pression s'écarte peu de la pression de référence p_0 .

Dans ces conditions l'équation de l'état s'écrit

$$\rho = \rho_0 \text{Exp}(C_0(p - p_0)) \quad (\text{II-47})$$

II.4.1.6) conductivité thermique équivalente:

Pour définir les coefficients de transfert fluide-solide on se base sur l'hypothèse qui consiste à admettre que dans tout volume élémentaire sur lequel on effectue un bilan énergétique [5]:

$$\overline{T}_s = \overline{T}_f = T$$

Cette hypothèse d'un transfert de chaleur instantané entre solide et fluide entraîne la possibilité de décrire le massif poreux comme un milieu continu fictif doué d'une certaine conductivité thermique globale caractérisée par le tenseur $\overline{\lambda}_e$

Plusieurs modèles sont proposés pour rendre compte de la conductivité thermique équivalente λ_e d'un milieu saturé. [6,12].

1. Modèle empirique :
$$\lambda_e = (\lambda_f)^\phi . (\lambda_s)^{(1-\phi)}$$

2. Strates traversées en parallèle par le flux chaleur:
$$\lambda_e = \phi \lambda_f + (1 - \phi) \lambda_s$$

3. Strates traversées en série par le flux chaleur:
$$\frac{1}{\lambda_e} = \frac{\phi}{\lambda_f} + \frac{1 - \phi}{\lambda_s}$$

- λ_f : Conductivité thermique du fluide
- λ_s : Conductivité thermique des particules solides

Quant à la chaleur massique spécifique effective du milieu poreux elle s'exprime par:

$$(\rho C_p)_e = \phi (\rho C_p)_f + (1 - \phi) (\rho C_p)_s \quad (II.48)$$

- $(\rho C_p)_f$: La chaleur massique spécifique du fluide
- $(\rho C_p)_s$: La chaleur massique spécifique du milieu poreux

Les propriétés physiques les plus importantes des sols et des roches sont la conductivité thermique λ et la capacité thermique volumétrique (ρC_p) .

Dans le tableau (II.03), les valeurs des capacités thermiques volumétriques des roches les plus courantes sont données à titre indicatif [3].

Type de roche	capacité thermique volumétrique $\rho C_p (MJ / m^3 K)$
Roches magmatiques	
Basalte	2.3-2.6
Diorite	2.9
Gabbro	2.6
Granit	2.1-3.0
Péridotite	2.7
Rhyolithe	2.1
Roches métamorphiques	
Gneiss	1.8-2.4
Marbre	2.0
Méta quartzite	2.1
Micaschistes	2.2
Schistes argileux	2.2-2.5

Roches sédimentaires

Calcaire	2.1-2.4
Marne	2.2-2.3
Quartzite	2.1-2.2
Sel	1.2
Grés	1.6-2.8
Roches argileuses, limoneuses	2.1-2.4

Roches non consolidées

Gravier, sec	1.4-1.6
Gravier, saturé d'eau	Env. 2.4
Moraine	1.5-2.5
Sable, sec	1.3-1.6
Sable, saturé d'eau	2.2-2.9
Argile/limon, sec	1.5-1.6
Argile/limon, saturé d'eau	1.6-3.4

Tableau II.3: Conductibilité thermique volumétrique de différents types de Roche.

II.4.2) Présentation du problème.

Le problème que nous allons modéliser l'écoulement d'un fluide (eau), en milieu poreux. Nous allons étudier l'injection d'un débit fixé d'eau dans un réservoir saturée, soumis à un gradient géothermique selon la direction z puis on reproduire la même quantité d'eau a laide d'un puit de production.

La modélisation d'un tel système repose sur les 3 lois physiques :

1. La loi de Darcy
2. L'équation de conservation de la masse
3. L'équation de conservation de énergie

Nous faisons 1es hypothèses suivantes :

- le fluide est incompressible.
- l'écoulement est laminaire.
- le milieu poreux et homogène et isotrope et perméable en petite ($k_h = k_v = k$).

On admet l'hypothèse de Dupuit l'écoulement est bidimensionnel selon le plan (x, y) (vitesses horizontales) ($w = 0$) [14].

- L'écoulement conservatif c'est-à-dire qu'il ne peut y avoir dans aucune partie de milieu ni apport extérieur ni prélèvement de la matière ($q = 0$)

Pour les variations de la masse volumique avec les différents paramètres on admet les mêmes hypothèses du cas d'écoulement dans une conduite à axisymétrique signalé précédemment.

II.4.3) Loi de Darcy:

Cette loi exprime que les vitesses d'écoulement de chaque fluide sont proportionnelles au gradient de la charge hydraulique.

$$\begin{aligned} u &= \frac{\rho g}{\mu} k \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \\ v &= \frac{\rho g}{\mu} k \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \end{aligned} \quad (\text{II.49})$$

II.4.4) L'équation de conservation de la masse

Par hypothèse le fluide est incompressible, cette équation de conservation de la masse de fluide, s'écrit comme suit [20].:

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.50})$$

II.4.5) Equation de diffusivité:

Comme nous l'avons montré précédemment la loi de Darcy permet d'écrire dans le sens d'écoulement la vitesse apparente de filtration sous la forme de l'équation (II.49)

A cette équation on doit joindre l'équation (II.50) de continuité qui exprime la conservation de la masse fluide en écoulement:

Ces deux équations, jointes l'équation d'état de fluide constitue le système fondamental pour la description mathématique des écoulements monophasiques en milieu poreux:

$$C = \frac{d\rho}{\rho \cdot dp} = \frac{d\rho}{\rho^2 g \cdot dh} \quad (\text{II-51})$$

Dans le cas où le milieu poreux est indéformable, sa porosité et sa perméabilité, qui ne dépendent pas de la charge, peuvent être considérées comme des données. On peut alors, à partir des équations précédentes, former une équation ne contenant plus qu'une seule inconnue; la charge s'écrit [6]:

$$\frac{k}{C \cdot \phi} \operatorname{div} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{grad} h \right) = \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{II-52})$$

L'équation précédente est appelée équation de diffusivité. C'est elle qui est généralement employée pour décrire les écoulements monophasiques en milieux

poreux. Si on néglige les variations de la viscosité et de la masse volumique, cette équation se simplifie :

$$\Delta h = \frac{1}{K_d} \frac{\partial h}{\partial t}$$

$$K_d = \frac{k}{C.\mu.\phi} \quad (II-53)$$

Le coefficient K_d est appelé coefficient de diffusivité hydraulique. Comme le montre son expression (II-53), il dépend à la fois des propriétés de la roche et de celles du fluide.

Nous supposons l'écoulement permanent ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$). L'équation de diffusivité se simplifie à :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\left(\frac{1}{\mu} \operatorname{grad} h\right) &= 0 \quad (II.54) \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial h}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial h}{\partial y}\right) &= 0 \end{aligned}$$

II.4.6) L'équation de conservation de énergie:

Le transfert de chaleur dans les milieux poreux s'effectue essentiellement selon deux processus, la conduction à travers l'ensemble du milieu poreux sous l'effet de gradient de température, et par advection (écoulement) des fluides qui permet le transfert de l'énergie thermique qu'ils contiennent.

Le transfert de chaleur par conduction est régi par la loi de Fourier qui détermine que le flux thermique q_{th} est le produit de la conductivité thermique λ et de gradient thermique $\operatorname{grad} T$. Voici les expressions de cette loi dans l'espace tridimensionnel :

$$q_{th} = -\lambda.\operatorname{grad} T$$

Cette équation en dimension une se réduit à :

$$q_{th} = -\lambda.\frac{\partial T}{\partial x}$$

Le transfert de chaleur par advection dépend du flux de masse de fluide qui s'écoule à travers une unité de surface, ce qui est produit du flux volumique u et de la densité ρ_f du fluide. Le transfert de chaleur dépend ensuite de la quantité de la

chaleur contenue dans une unité de masse de fluide. Cette quantité peut être obtenue par le produit de la capacité thermique $(C_p)_f$ du fluide et de sa température T .

On effectue un bilan énergétique dans un volume élémentaire, on admet que dans ce cas, la température de la phase solide et celle de fluide sont égaux pour tout instant donné (il y a un équilibre thermique). En considérant la conduction et la convection dans le transfert de chaleur, l'équation de l'énergie s'exprime comme suit [20, 21, 22]:

$$\lambda_e \operatorname{div}(\operatorname{grad} T) - (\rho C_p)_f \operatorname{div}(\vec{V}T) = 0 \quad (\text{II.55})$$

Ou bien sous forme développée:

$$\lambda_e \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] - (\rho C_p)_f \left[u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right] = 0 \quad (\text{II.56})$$

Le premier terme de l'expression précédente représente le transfert de chaleur par conduction, tandis que le deuxième terme exprime le transfert par advection de fluide.

II.4.7) Les équations adimensionnées

Il est souvent assez instructif de mettre les équations locales du mouvement sous une forme sans dimension, d'une part, pour mettre en évidence les principaux paramètres de l'écoulement et, d'autre part, pour permettre d'aboutir des formes simples. A cet effet, introduisons des paramètres normalisés (dimensionnels). Les paramètres suivant sont donc utilisés [22]:

- Distances linéaires normalisées $x^+ = \frac{x}{R_{pro}}, y^+ = \frac{y}{R_{pro}}, z^+ = \frac{z}{R_{pro}}$
- La charge hydraulique normalisée $h^+ = \left(\frac{k \cdot R_{pro}}{\alpha} \right)^2 \cdot \frac{h}{\rho_f}, \alpha = \frac{\lambda_e}{(\rho C_p)_f}$
- La viscosité normalisée $\mu^+ = \frac{\mu}{\mu_0}$
- La température normalisée $T^+ = \frac{T}{\Delta T}$
- La perméabilité $Da = \frac{k}{R_{pro}^2}$

Equation de diffusivité:

On tient compte des expressions des paramètres précédentes l'équation de diffusivité se simplifie à:

$$\frac{\alpha \cdot \mu_0}{k \cdot \rho \cdot g R_{pro}^2 \mu_0} \left[\frac{\partial}{\partial x^+} \left(\frac{1}{\mu^+} \frac{\partial h^+}{\partial x^+} \right) + \frac{\partial}{\partial y^+} \left(\frac{1}{\mu^+} \frac{\partial h^+}{\partial y^+} \right) \right] = 0$$

En divisant par $\frac{\alpha}{R_{pro}^2 \cdot k \rho \cdot g_0}$ cela devient:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^+} \left(\frac{1}{\mu^+} \frac{\partial h^+}{\partial x^+} \right) + \frac{\partial}{\partial y^+} \left(\frac{1}{\mu^+} \frac{\partial h^+}{\partial y^+} \right) \right] = 0 \quad (II.57)$$

On remarque qu'il n'y a pas de données réduites pour l'équation de diffusivité

La loi de darcy:

$$u^+ \cdot \frac{\alpha}{R_{pro}} = \frac{\rho g \cdot k \alpha \cdot \mu_0}{\rho g \cdot k \mu^+ \mu_0 R_{pro}} \cdot \frac{\partial h^+}{\partial x^+}$$

$$v^+ \cdot \frac{\alpha}{H} = \frac{\rho \alpha \mu_0 g}{\mu^+ \rho \mu_0 k \cdot g R_{pro}} k \cdot \frac{\partial h^+}{\partial y^+}$$

$$u^+ = \frac{1}{\mu^+} \cdot \frac{\partial h^+}{\partial x^+}$$

$$v^+ = \frac{1}{\mu^+} \cdot \frac{\partial h^+}{\partial y^+}$$

L'équation de conservation d'énergie:

$$\frac{\Delta T}{R_{pro}^2} \left[\frac{\partial}{\partial x^+} \left(\frac{\partial T^+}{\partial x^+} \right) + \frac{\partial}{\partial y^+} \left(\frac{\partial T^+}{\partial y^+} \right) \right] - \frac{(\rho C_p)_f \Delta T u_0}{\lambda_e R_{pro}} \left[u \frac{\partial T^+}{\partial x^+} + v \frac{\partial T^+}{\partial y^+} \right] = 0$$

En multipliant par $\frac{R_{pro}^2}{\Delta T}$ l'équation devient:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^+} \left(\frac{\partial T^+}{\partial x^+} \right) + \frac{\partial}{\partial y^+} \left(\frac{\partial T^+}{\partial y^+} \right) \right] - Pe \left[u \frac{\partial T^+}{\partial x^+} + v \frac{\partial T^+}{\partial y^+} \right] = 0 \quad (II.58)$$

Il apparaît, comme données réduites :

$Pe = \frac{(\rho C_p)_f R_{pro} u_0}{\lambda_e}$ Le nombre de Peclet qui représente le rapport du transfert de chaleur par advection et par conduction.

II.4.8) les conditions initiales et les conditions aux limites:

Mathématiquement, les conditions aux limites comprennent la géométrie des limites et les valeurs des variables dépendantes ou de leurs dérivées aux limites. En termes physiques, pour les applications de modèles, les conditions aux limites sont généralement de trois types:

- 1) valeurs imposées (charge), conditions de Dirichlet
- 2) flux imposés (équivalent à un gradient imposé de charge), conditions de Newmann
- 3) flux à valeur dépendante (ou condition aux limites mixte, dans laquelle l'écoulement à travers la frontière est lié à la fois à la valeur et à sa dérivée).

La géométrie du domaine d'étude, dans lequel évoluera de l'eau, .elle se compose d'un réservoir souterraine d'épaisseur selon l'axe z égal à H , le toit et le substratum sont imperméable et soumis respectivement à des température T_1 et T_2 . Deux puits sont foré dans ce réservoir la distance entre eux selon x est égal à l et selon y est L . Les caractéristiques de chaque puit sont donne par le tableau II04:

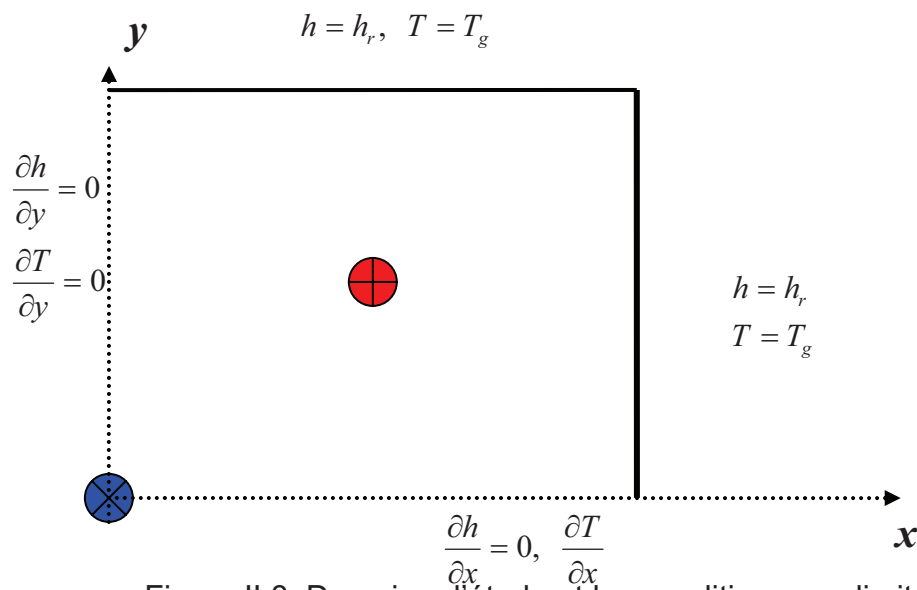


Figure II.8: Domaine d'étude et les conditions aux limites

paramètres	Puits d'injection	Puits de production
L'axe x	0	l
L'axe y	0	L
L'axe z	$0-h_0$	$0-h_0$
Diamètre	D_{inj}	D_{pro}
Débit	Q	$Q/4$

Tableau II.4 caractéristiques des puits

Compte tenu de la géométrie, nous adoptons un système de coordonnées cartésiennes pour définir les limites de notre domaine et résoudre les équations du système.

II.4.8.1) Conditions aux limites :

a) La charge hydraulique

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial r}(0,0)_{r=\frac{D_{inj}}{2}} = \frac{\mu.Q}{k.\pi.D_{inj}} \\ \frac{\partial h}{\partial r}(l,L)_{r=\frac{D_{pro}}{2}} = -\frac{\mu.Q}{k.\pi.D_{pro}} \\ h(l_1,y) = h_r, \quad 0 \leq y \leq L_1 \\ h(x,L_1) = h_r, \quad 0 \leq x \leq l_1 \\ \frac{\partial h}{\partial x}(x,0) = 0, \quad 0 < x \leq l_1 \\ \frac{\partial h}{\partial y}(0,y) = 0, \quad 0 < y \leq L_1 \end{array} \right.$$

b) La température

$$\left\{ \begin{array}{l} T(0,0) = T_e \\ T(x,L_1) = T_r, \quad 0 \leq x \leq l_1 \\ T(l_1,y) = T_r, \quad 0 \leq y \leq L_1 \\ \frac{\partial T}{\partial x}(x,0) = 0, \quad 0 < x \leq l_1 \\ \frac{\partial T}{\partial y}(0,y) = 0, \quad 0 < y \leq L_1 \end{array} \right.$$

II.4.9) Modèle mathématique::

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \right) = 0 \\
 u = \frac{1}{\mu} \frac{\partial h}{\partial x}, \quad v = \frac{1}{\mu} \frac{\partial h}{\partial y} \\
 \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] - Pe \left[u \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right] = 0 \\
 \frac{\partial h}{\partial r} (0,0)_{r=\frac{D_{inj}}{2}} = \frac{\mu Q}{k \cdot \pi \cdot D_{inj}}, \quad \frac{\partial h}{\partial r} (l,L)_{r=\frac{D_{pro}}{2}} = - \frac{\mu \cdot Q}{k \cdot 4 \cdot \pi \cdot D_{pro}} \\
 h(l_1, y) = h(x, L_1) = h_r, \quad 0 \leq x \leq l_1, \quad 0 \leq y \leq L_1 \\
 \frac{\partial h}{\partial x} (x, 0) = \frac{\partial h}{\partial y} (0, y) = 0, \quad 0 < x \leq l_1, \quad 0 < y \leq L_1 \\
 T(0,0) = T_e \\
 T(x, L_1) = T(l_1, y) = T_r, \quad 0 \leq x \leq l_1, \quad 0 \leq y \leq L_1 \\
 \frac{\partial T}{\partial x} (x, 0) = \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad 0 < x \leq l_1, \quad 0 < y \leq L_1
 \end{array} \right. \quad (II.59)$$

CHAPITRE III

Résolution par la méthode des volumes finis

III. Introduction:

La résolution numérique des problèmes de la mécanique des Fluides passe par les grandes étapes suivantes :

- Le problème physique continu est décrit par un modèle mathématique continu (mis en équations).
- Le modèle mathématique continu est discrétisée en s'appuyant sur une des méthodes numériques.
- Equations discrétisée sont approximées a l'aide des schémas numériques appropriés, l'algorithme de résolution est établie.
- Algorithme est codé (C, Fortran, Matlab, Java,...).
- Code est exécuté sur un ordinateur
- Si tout va bien, la solution approchée du problème initial est obtenue.

En vue du passage d'un problème exact (continu) au problème approché (discret), on dispose de plusieurs techniques concurrentes et complémentaires :

Les différences finies, les éléments finis et les volumes finis. Chacune de ces trois méthodes correspond à une formulation différente des équations de la physique :

- Équilibre des forces en chaque point pour les différences finies
- Minimisation de l'énergie ou principe des travaux virtuels pour les éléments finis
- Loi de conservation et calcul des flux pour la méthode des volumes finis.

Examinons rapidement les avantages et les inconvénients de chacune de ces trois méthodes.

III.1) Différences finies:

La méthode des différences finies consiste à remplacer les dérivées apparaissant dans le problème continu par des différences divisées ou combinaisons de valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre fini de points discrets ou noeuds du maillage. Approximation des dérivées intervenant dans les équations `a l'aide de développement en série de Taylor [23].

Avantages :

- Bien connue, Utilisation dans des codes de "recherche"
- grande simplicité d'écriture et faible coût de calcul.
- Mise en œuvre simple pour une géométrie simple.

Inconvénients :

- Mise en œuvre difficile pour une géométrie complexe.
- Difficultés de prise en compte des conditions aux limites portant sur les dérivées ou les gradients de l'inconnue et en général absence de résultats de majoration d'erreurs.
- Pas toujours conservative.

III.2) Eléments finis:

La méthode des éléments finis consiste à approcher, dans un sous-espace de dimension finie, un problème écrit sous forme variationnelle (comme minimisation de l'énergie, en général) dans un espace de dimension infinie. La solution approchée est dans ce cas une fonction déterminée par un nombre fini de paramètres comme, par exemple, ses valeurs en certains points (les noeuds du maillage) [16].

Avantages :

- Traitement possible de géométries complexes.
- Détermination plus naturelle des conditions aux limites.
- Possibilité de démonstrations mathématiques de convergence et de majoration d'erreurs (Approche très "mathématique").

Inconvénients :

- Complexité de mise en oeuvre et coût en temps de calcul et en mémoire.
- Difficultés pour résoudre les termes non linéaires.
- Très utilisée dans le domaine de Mécanique des Solides et pour des problèmes multi physique.

III.3) Méthode des volumes finis :

La méthode des Volumes Finis est une méthode de discrétisation bien adaptée à la simulation numérique des lois de conservation. Elle peut être utilisée sur une géométrie arbitraire, des maillages structurés ou non et aboutit à des schémas robustes. De plus, cette méthode est localement conservative i.e. elle conserve la matière d'une cellule du maillage à sa voisine. Les équations de conservation de la masse étant déjà implémentées, il restait à construire un schéma de discrétisation pour l'équation de conservation de l'énergie qui est une équation scalaire associée à la variable de température T . Elle offre les avantages suivants [14]:

- Approche très "physique" : bilan des flux
- S'adapte à une géométrie quelconque
- Plusieurs schémas pour la résolution des termes non linéaires hyperboliques.
- Conservative (par sa formulation)
- La base de tous les codes généraliste en Mécanique des Fluides Fluent, Star-CD, CFX, Fire

III.4). Principe de la méthode :

La méthode des volumes finis, choisie par notre programme et largement décrite par Patankar S.V., consiste à discrétiser le domaine de l'écoulement en une multitude de volumes de contrôle (i.e. cellules) puis d'effectuer des bilans (de masse, de quantité de mouvement...) sur ces petits volumes. Pour cette raison, la formulation fait apparaître des intégrales triples de volume.

L'avantage déterminant des volumes finis par rapport aux autres méthodes est qu'ils sont conservatifs; en bref, tout ce qui sort d'un volume de contrôle entre dans un autre.

En pratique, il est courant de procéder dans l'autre sens. Chaque équation continue est intégrée sur chaque volume de contrôle puis le théorème d'Ostrogradsky est utilisé à fin de transformer certaines intégrales de volume en intégrales de surface [15]:

$$\iiint_V \frac{\partial B_j}{\partial x_i} dV = \iint_A B_j \cdot n_j dA \quad (\text{III.01})$$

Où

- \vec{B} est un vecteur quelconque.
- \vec{n} Est un vecteur unitaire normal à la surface A quelconque du volume V .

Comme nous n'avons au chapitre précédent Toutes les équations de conservations établir peuvent mises sous la forme d'une équation générale de convection-diffusion pour la variable Φ , par conséquent, sur un volume de contrôle V et de frontière A :

$$\text{div}(\rho\Phi U) = \text{div}(\Gamma_{\Phi} \text{grad}\Phi) + S_{\Phi} \quad (\text{III.02})$$

Tel que:

- Terme de diffusion: $\text{div}(\Gamma_{\Phi} \text{grad}\Phi)$
- Le terme de convection: $\text{div}(\rho U \Phi)$
- Le terme source: S_{Φ}

Par intégration l'équation (III.02) devient:

$$\iint_A \text{div}(\rho\Phi U) dA = \iint_A \text{div}(\Gamma_{\Phi} \text{grad}\Phi) dA + \iiint_V S_{\Phi} dV \quad (\text{III.03})$$

Cette équation donne le bilan de la grandeur Φ de la cellule. L'étape suivant consiste à discrétiser les inconnues du problème ainsi que les opérateurs différentiels de cette équation. Toutes ces opérations mathématiques conduiront à l'obtention sur chaque volume de contrôle, d'une équation discrétisée qui relira les variables d'une cellule à celle des cellules voisines. L'ensemble de ces équations discrétisées formera finalement un système matriciel [4].

Pour nous donner une idée de la forme des termes à discrétiser, nous allons fournir dans les tableaux suivant, la valeur de Φ , Γ_{Φ} et S_{Φ} pour chacune des équations en présence.

Equation de continuité	
Φ	1
Γ_{Φ}	0
S_{Φ}	0
Equation de quantité de mouvement sur z	
Φ	\bar{w}
Γ_{Φ}	$\Gamma_{\Phi} = \mu$
S_{Φ}	$-\rho g - \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{d\mu}{dt} \bar{\nabla} T \cdot \left(\bar{\nabla} w + \frac{\partial \bar{V}}{\partial z} \right)$
Equation de quantité de mouvement sur r	
Φ	\bar{u}
Γ_{Φ}	μ
S_{Φ}	$-\frac{\partial P}{\partial r} - \mu \frac{u}{r^2} + \frac{d\mu}{dt} \bar{\nabla} T \cdot \left(\bar{\nabla} u + \frac{\partial \bar{V}}{\partial r} \right)$
Equation d'énergie	
Φ	T
Γ_{Φ}	λ / C_p
S_{Φ}	$2\mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{u}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2$

Tableau III.1 : Termes des équations à discrétiser pour un écoulement dans une conduite à axisymétrique.

équation de diffusivité	
Φ	h
Γ_Φ	$1/\mu$
S_Φ	0
Equation d'énergie	
Φ	T
Γ_Φ	λ_e / C_p
S_Φ	0

Tableau III.2: Termes des équations à discrétiser pour l'écoulement en milieu poreux.

III.5 Application de la méthode sur un écoulement dans une conduite:

Pour aborder l'intégration de l'équation (III.2), nous commençons par définir à l'intérieur du domaine de calcul un maillage constitué d'un réseau de points $P_{IJ}(I \cdot \Delta r, J \cdot \Delta z)$ dans un repère à coordonnées cylindriques.

L'approche du type volume de contrôle exige que l'on définisse autour du point P_{IJ} un volume élémentaire sur lequel on va intégrer l'équation aux dérivées partielles. Pour deux points voisins, les volumes de contrôle respectifs doivent posséder un côté commun. Il s'en suit que la réunion de tous les volumes de contrôle couvre l'ensemble du domaine de calcul. Cette propriété fondamentale va nous permettre de mettre en évidence des propriétés de conservation des flux locaux et globaux, propriétés d'un grand intérêt en ce qui concerne la résolution numérique des équations.

Par ailleurs afin de donner une description suffisamment claire des méthodes de discrétisation employées, nous allons nous appuyer sur les figures suivantes [13]:

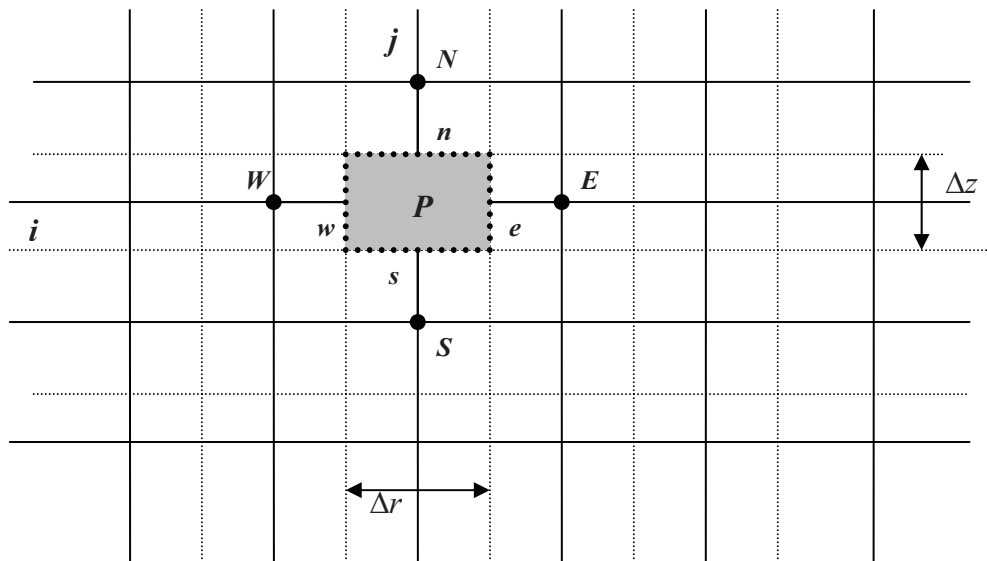


Figure III.1: Maillage de domaine de calcul en deux dimensions

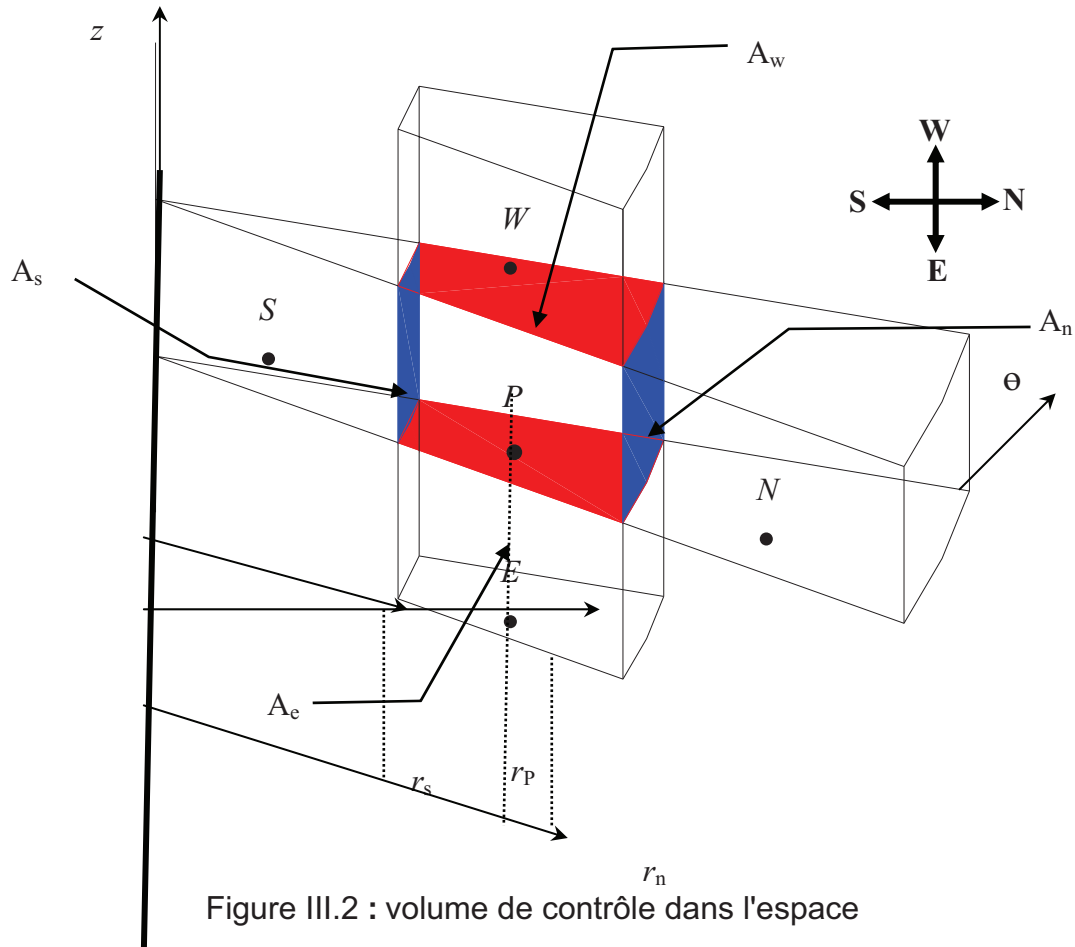


Figure III.2 : volume de contrôle dans l'espace

III.5. 1) Calcul des surfaces :

Pour l'élément de volume cylindrique ci-dessus, on peut déterminer les quatre surfaces suivantes :

$$A_n = r_n \cdot \Delta\theta \cdot \Delta z$$

$$A_s = r_s \cdot \Delta\theta \cdot \Delta z$$

$$A_e = A_w = r_p \cdot \Delta\theta \cdot \Delta r$$

Pour $\Delta\theta = 1$, on retrouve :

$$A_n = r_n \cdot \Delta z$$

$$A_s = r_s \cdot \Delta z$$

$$A_e = A_w = r_p \cdot \Delta r$$

III.5.2) Application à l'intégration d'une équation de convection-diffusion :

Pour illustrer la méthode du volume de contrôle, nous allons l'appliquer sur une équation de type convection-diffusion.

Ainsi donc, l'intégration de l'équation (III.02) sur un volume de contrôle V de frontière A , donne :

$$\iint_A \rho \Phi \overline{U_j} \cdot n_j dA = \iint_A \Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \cdot n_j dA + \iiint_V S_\Phi dV \quad (\text{III.04})$$

L'évaluation des différentes intégrales de l'équation (III.04) demande que l'on fasse un certain nombre d'approximations de façon à former un système d'équations linéaires liant entre elles les valeurs de la fonction Φ aux points P_{ij} . L'une des difficultés de cette évaluation est le choix des profils adéquats exprimant l'évolution de Φ entre les points du maillage [14].

III.5.3) -Discrétisation spatiale :

III.5.3 .1-le terme de diffusion :

Dans un premier temps, le terme de diffusion est décomposé selon les quatre faces du volume du contrôle étudié :

$$\iint_A \Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} n_j dA = \left[\Gamma_\Phi A_e \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right) - \Gamma_\Phi A_w \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right) \right] + \left[\Gamma_\Phi A_n \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right) - \Gamma_\Phi A_s \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right) \right] \quad (\text{III.05})$$

Dans un deuxième temps, chaque terme est calculé indépendamment des autres. Nous ne développons ici que le terme de la face e , le calcul des autres termes s'effectuant de manière tout à fait analogue.

Pour obtenir une valeur au centre de la face e , le schéma centré utilise le centre de la maille amont P et le centre de la maille aval E afin d'effectuer une approximation linéaire entre ces deux points.

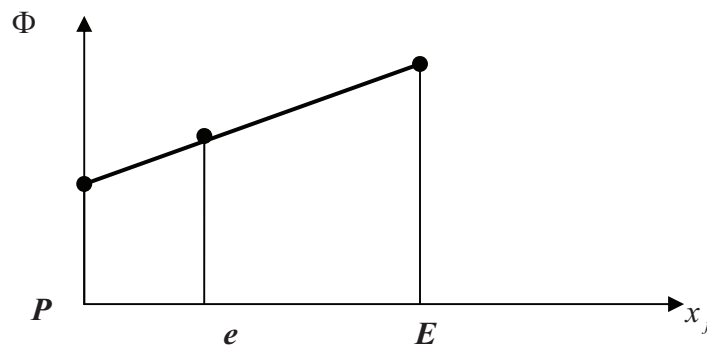


Figure III.3 : Approximation linéaire

Cette technique permet de connaître le coefficient de diffusion au centre de la face e dans un maillage non uniforme avec une précision d'ordre deux dans la mesure où elle fait intervenir les distances entre le centre de la face et les deux centres de mailles voisines [4]:

$$(\Gamma_\Phi)_e = \frac{\overline{eE} \cdot (\Gamma_\Phi)_P + \overline{Pe} \cdot (\Gamma_\Phi)_E}{\overline{eE} + \overline{Pe}} \quad (\text{III.06})$$

Le gradient en e est également déterminé grâce à cette approximation linéaire :

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right)_e = \frac{\Phi_E - \Phi_P}{PE} \quad (\text{III.07})$$

Il est intéressant de noter qu'avec cette approximation, le gradient est identique en tous les points placés entre les deux centres de la maille P et E . la discrétisation du gradient sur la face e est donc effectuée identiquement pour un maillage uniforme ou non uniforme.

Néanmoins, l'évaluation du gradient avec la formule précédente perd en précision pour un maillage non uniforme. La discrétisation n'est du second ordre que lorsque la face e se trouve à égale distance des deux points P et E , c'est-à-dire dans un maillage uniforme [4].

Pour bien éclairer cette méthode de discrétisation, nous allons l'appliquée sur le cas particulier du terme de diffusion de l'équation de conservation de quantité de mouvement dans la direction z qui constitue un exemple type.

On considère μ variable dans l'espace donc :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu \cdot r \frac{\partial U_z}{\partial r} \right) \quad (\text{III.08})$$

On va intégrer cette quantité sur un volume de contrôle. On commence par la première partie, rappelons que les variation dans le sens azimutal sont nulles donc on prend $\Delta\theta=1$:

$$\iint_A \Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} n_j dA = \int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial z} \right) r \cdot dr \cdot dz + \int_w^e \int_s^n \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu \cdot r \frac{\partial w}{\partial r} \right) r \cdot dr \cdot dz \quad (\text{III.09})$$

$$\int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial z} \right) r \cdot dr \cdot dz + \int_w^e \int_s^n \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu \cdot r \frac{\partial w}{\partial r} \right) r \cdot dr \cdot dz = r \cdot \Delta r \int_w^e \left(\mu \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz + \Delta z \int_s^n \left(\mu \cdot r \frac{\partial w}{\partial r} \right) dr$$

Donc l'intégration du terme de diffusion sur un volume de contrôle nous donne :

$$\begin{aligned} r \cdot \Delta r \int_w^e \left(\mu \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz + \Delta z \int_s^n \left(\mu \cdot r \frac{\partial w}{\partial r} \right) dr &= \left[A_e \mu_e \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)_e - A_w \mu_w \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)_w \right] \\ &+ \left[A_n \mu_n \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)_n - A_s \mu_s \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)_s \right] \end{aligned} \quad (\text{III.10})$$

Les dérivées partielles $\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_e, \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_w, \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_n$ et $\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_s$ sont approximées par un développement en série de Taylor de l'ordre 2 autour des points e, w, n et s .

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_e = \frac{w_P - w_E}{\Delta z} \\ \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_w = \frac{w_W - w_P}{\Delta z} \\ \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_n = \frac{w_P - w_N}{\Delta r} \\ \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_s = \frac{w_S - w_P}{\Delta r} \end{cases}$$

Afin d'alléger les expressions posons:

$$D_e = \frac{A_e \mu_e}{\Delta z}, D_w = \frac{A_w \mu_w}{\Delta z}, D_n = \frac{A_n \mu_n}{\Delta r}, D_s = \frac{A_s \mu_s}{\Delta r}$$

Donc le second membre de l'expression (III.10) devient :

$$-(D_e + D_w + D_n + D_s) \cdot w_P + D_e \cdot w_E + D_n \cdot w_N + D_s \cdot w_S \quad (\text{III.11})$$

III.5.3 .2)-Le terme de convection :

Le terme à déterminer est le suivant :

$$\rho \left(u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (\text{III.12})$$

De la même manière que les termes diffusifs, nous intégrons les termes convectifs de cette équation, on retrouve :

$$\rho [(uA)_e \cdot w_e - (uA)_w \cdot w_w] + \rho [(wA)_n \cdot w_n - (wA)_s \cdot w_s]$$

Posons

$$\begin{cases} C_e = \rho(uA)_e \\ C_w = \rho(uA)_w \\ C_n = \rho(wA)_n \\ C_s = \rho(wA)_s \end{cases}$$

Avant de définir les vitesses aux centres des surfaces, il faut connaître le schéma de discrétisation des termes convectifs.

II.5.3 .3)-Schémas de discrétisation des termes convectifs :

a) Schéma aux différences centrées CDS [4] :

En utilisant un développement en série de Taylor de $U_m (m = e, w, n, s)$ à l'ordre 2, pour approximer les vitesses aux centres des surface, cette approximation donne:

$$\begin{cases} w_e = \frac{w_P + w_E}{2} \\ w_w = \frac{w_P + w_W}{2} \\ w_s = \frac{w_P + w_S}{2} \\ w_n = \frac{w_P + w_N}{2} \end{cases}$$

Ainsi donc, l'expression définitive du terme de convection correspond à une discrétisation CDS:

$$\frac{1}{2}(C_e - C_w + C_n - C_s)w_P + \frac{1}{2}C_e w_W + \frac{1}{2}C_n w_N - \frac{1}{2}C_s w_S \quad (\text{III.13})$$

On additionne les deux expressions (III.12) et (III.13) on trouve finalement l'expression définitive en l'absence du terme source qui correspond à une discrétisation CDS de l'équation de conservation de quantité de mouvement dans la direction z est alors :

$$A_P w_P = A_E w_E + A_W w_W + A_N w_N + A_S w_S \quad (\text{III.14})$$

En identifiant cette équation à l'équation précédente, on obtient :

$$\begin{cases} A_E = D_e - \frac{C_e}{2} \\ A_W = D_w + \frac{C_w}{2} \\ A_N = D_n + \frac{C_n}{2} \\ A_S = D_s + \frac{C_s}{2} \\ A_P = \sum_m A_m + S_C \\ S_C = C_e - C_w + C_n + C_s \end{cases}$$

Les coefficients $A_m (m = e, w, n, s)$ représentent l'influence de la convection et de la diffusion aux quatre faces du volume de contrôle, en terme du débit massique C_m et de la diffusion D_m .

Etant donné que suivant la grandeur et le signe des termes C_m , et plus précisément ceux de la composante respective de la vitesse, les coefficients A_m peuvent être positifs ou négatifs.

Cependant, il a été montré pour un problème unidimensionnel, que la réalité physique des problèmes des écoulements et/ou de transfert de chaleur exige que leurs valeurs soient positifs ou nulles.

Des solutions non physiques peuvent être apparaître si les coefficients A_m deviennent négatifs, c'est-à-dire que, chaque fois que, en un point du réseau, on aura :

$$|Pe_m| > 2$$

Avec :

$$Pe_m = \frac{C_m}{D_m}$$

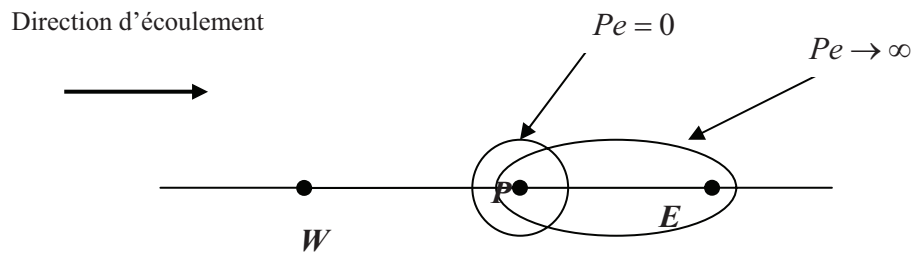


Figure III.4: Distribution de la variable Φ pour les différents modes de transfert Selon le nombre de Peclet.

Appelé nombre de Péclet de la grille, indique le rapport du transfert de la matière et/ou de la chaleur par convection au transfert par diffusion.

Si $Pe = 0$ Il y a une diffusion pure et absence de convection

Si $Pe \rightarrow \infty$ Il y a une convection pure et absence de diffusion

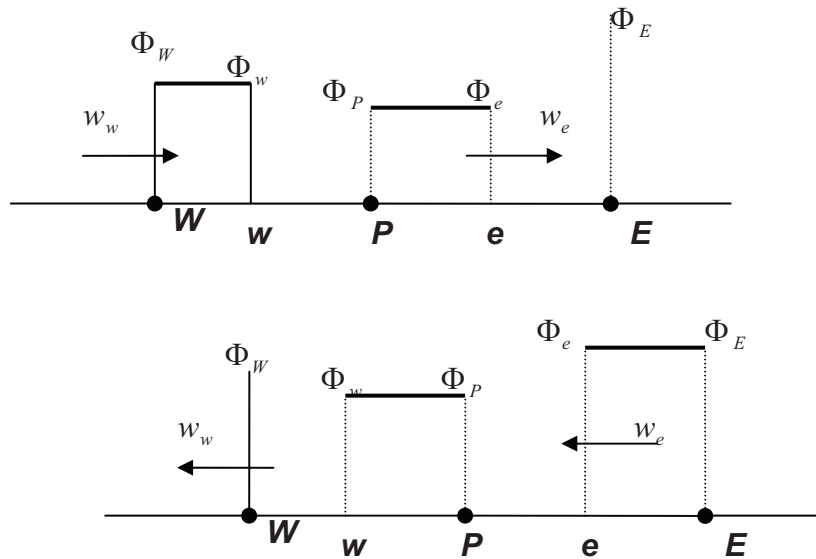
Il est toujours théoriquement possible, en choisissant un maillage suffisamment fin, de se placer dans ces conditions telles que la discrétisation d'une équation de type convection diffusion par un schéma CDS. Cependant, pour des valeurs élevées du module de la vitesse, ces possibilités restent malheureusement théoriques puisque une augmentation du nombre de points du maillage a toujours des limites parce qu'elle se traduit souvent par des encombrements en mémoire et du temps de calcul sur ordinateur qui peuvent rapidement devenir prohibitifs [4].

La formulation centrée des flux convectifs n'est donc généralement employée que dans le cas des écoulements modérés pour lesquels les problèmes de stabilité numérique ne sont pas critiques. Aussi, pour que tous les coefficients A_m soient positifs, les nombres de Péclet locaux Pe_m doivent être inférieurs à 2 en valeur absolue.

b) Schéma amont Upwind :

L'un des remèdes pour pallier les difficultés citées précédemment est l'utilisation des schémas décentrés (schéma Upwind) dans lesquels le bilan des flux convectifs calculé à l'aide d'une formulation non symétrique. La justification des schémas décentrés se trouve dans le fait que le terme dérivée particulaire représente le transport d'une quantité le long d'une caractéristique de l'écoulement, et que le transfert d'information se fait donc de l'amont vers l'aval [4].

Ceci signifie que, si w_e est positive, une meilleure approximation de la valeur de w au point e , w_e (dans le cas générale Φ_e), est celle qui existe au point P , w_P (Φ_P), au lieu de la moyenne des deux valeurs adjacentes $\frac{w_E + w_P}{2}$ ou $(\frac{\Phi_E + \Phi_P}{2})$. De plus, lorsque la valeur de la vitesse de l'écoulement est élevée, la quantité de (chaleur ou matière) convectée entre les points E et P est plus importante que celle diffusée entre ces deux points, de telle manière que le flux diffusif à travers la face e peut être légitimement négligé vis-à-vis au flux convectif.

Figure III.5: approximation par schéma **Upwind**

Soit, suivant la direction $E \rightarrow W$:

$$\begin{cases} \Phi_e = \Phi_P \\ \Phi_w = \Phi_W \end{cases} \quad \text{Si} \quad w_e > 0, w_w > 0$$

Suivant la direction $W \rightarrow E$:

$$\begin{cases} \Phi_e = \Phi_E \\ \Phi_w = \Phi_P \end{cases} \quad \text{Si} \quad w_e < 0, 0 < w_w$$

Donc, la discrétisation des termes convectifs devient :

$$C_e w_e - C_w w_w + C_n w_n - C_s w_s = w_p \cdot \sup(C_e, 0) - w_E \cdot \sup(-C_e, 0) - w_w \sup(C_w, 0) + w_p \cdot \sup(-C_w, 0) + w_p \cdot \sup(C_n, 0) - w_N \cdot \sup(-C_n, 0) - w_s \cdot \sup(C_s, 0) + w_p \cdot \sup(-C_s, 0)$$

Sup. désigne l'opérateur maximum.

Cette expression montre que, suivant le sens de l'écoulement dynamique, on ne tient compte que des effets de la maille juste en amont de l'interface. La maille en aval ne contribue pas au calcul des flux convectifs.

Maintenant, nous identifions l'expression qui correspond à une discrétisation Upwind de l'équation (III.13).

Nous obtenons :

$$\begin{cases} A_E = D_e + \sup(-C_e, 0) \\ A_W = D_w + \sup(C_w, 0) \\ A_N = D_n + \sup(-C_n, 0) \\ A_S = D_s + \sup(C_s, 0) \\ A_P = \sum_m A_m + S_C \\ S_C = C_e - C_w + C_n + C_s \end{cases} \quad (\text{III.14})$$

Le schéma Upwind, de précision spatiale de premier ordre, vérifie donc la condition de transport (un schéma numérique aux différences finies est dit transportif lorsque l'effet d'une perturbation d'une grandeur, telle que la température, est sensible dans la même direction que la vitesse). De ce point de vue, le schéma décentré paraît plus logique que le schéma centré, mais c'est surtout à des vitesses d'écoulement élevées dans des maillages grossiers qu'on obtient des solutions physiquement acceptables.

L'utilisation du schéma Upwind dans les zones de l'écoulement où la condition sur le nombre de Péclet local (Pe_m) vérifie :

$$|Pe_m| < 2$$

Est superflue car cela revient à dégrader la précision du schéma alors qu'on sait que la formulation CDS ne poserait pas ce problème [4].

III.5.3 .4) Le terme source :

Au même titre que le terme de convection, le terme source est calculé à l'aide du schéma centré de second ordre.

Pour commencer, le terme source est mis sous la forme suivante :

$$\iiint S_\phi dV = \overline{S_\phi} \cdot \Delta V \quad (\text{III.15})$$

Où :

- $\overline{S_\phi}$ est la valeur moyenne de la source S_ϕ sur la cellule.
- ΔV est le volume de la cellule.

Pour cela, toutes les variables intervenant dans S_ϕ prennent la valeur de la variable au centre de la maille et tous les gradients, y compris celui de la pression

pour les équations de la quantité de mouvement, sont discrétisés au centre de la maille à l'aide de schéma centré du second ordre.

Puis, le terme $\overline{S_\Phi} \cdot \Delta V$ est écrit sous la forme linéaire suivante :

$$\overline{S_\Phi} \cdot \Delta V = S_u + S_p \Phi_p \quad (\text{III.16})$$

Pour notre cas, le terme source de l'équation de conservation de la quantité de mouvement sur l'axe z discrétisé de la manière suivante :

$$Ter_s = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{d\mu}{dT} \vec{\nabla} T \cdot \left(\vec{\nabla} w_z + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \right) \quad (\text{III.17})$$

L'intégration de cette quantité sur un volume de contrôle nous donne :

$$\int_w^n \int_s^e \left(-\rho g - \frac{\partial p}{\partial z} \right) r dr dz + \int_e^w \int_s^n \frac{d\mu}{dT} \vec{\nabla} T \cdot \left(\vec{\nabla} w_z + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \right) r dr dz \quad (\text{III.18})$$

On commence par la première intégrale, remplaçant:

$$\begin{aligned} Ter_{s1} &= \int_e^w \int_s^n \left(-\rho g - \frac{\partial p}{\partial z} \right) r dr dz = -\rho g \cdot r \Delta r \Delta z - \int_e^w P \cdot r dr \\ &= -\rho g \Delta V - (A_e p_e - A_w p_w) \end{aligned} \quad (\text{III.19})$$

La deuxième intégrale nous donne avec le remplacement de U_z par U et U_r par V :

$$\begin{aligned} Ter_{s2} &= \int_e^w \int_s^n \frac{d\mu}{dT} \vec{\nabla} T \cdot \left(\vec{\nabla} w_z + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \right) r dr dz = \int_e^w \int_s^n \frac{d\mu}{dT} \left(2 \frac{\partial T}{\partial z} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial T}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right) r dr dz \\ Ter_{s2} &= \frac{d\mu}{dT} \left[2 \cdot \frac{(T_e - T_w)}{\Delta z} \cdot (A_e w_e - A_w w_w) + \frac{(T_n - T_s)}{\Delta r} \cdot ((A_n w_n - A_s w_s) + (A_e u_e - A_w u_w)) \right] \end{aligned} \quad (\text{III.20})$$

$\frac{d\mu}{dT}$ Est calculé d'après le modèle choisi pour la variation de μ en fonction de T :

$$\frac{d\mu}{dT} = - \frac{a + 2bT}{(1 + aT + bT^2)^2} \quad (\text{III.21})$$

Donc le terme source sera :

$$S_\Phi = \frac{a + 2bT}{(1 + aT + bT^2)^2} \left[2 \cdot \frac{(T_e - T_w)}{\Delta z} \cdot (A_e w_e - A_w w_w) + \frac{(T_n - T_s)}{\Delta r} \cdot ((A_n w_n - A_s w_s) + (A_e u_e - A_w u_w)) \right] - \rho g \Delta V - A_e (p_e - p_w)$$

Les valeurs des vitesses et des températures aux centres des surfaces sont approximées par un développement en série de Taylor à l'ordre 2.

L'introduction du terme source dans le système d'équation discrétisé se fait par le terme B cité ci-après.

III.5.4) - Résolution du système linéaire:

Nous rappelons que le système d'équations à résoudre par procédure itérative peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} A_P \Phi_P = \sum_m A_m \cdot \Phi_m + B \\ m = E, W, N, S \end{cases} \quad (\text{III.22})$$

Chaque itération consiste en la résolution de N système tri diagonaux où N est le nombre de lignes dans une direction choisie (la direction longitudinale, par exemple). On pose :

$$A_P \Phi_P^{(K+1)} - \sum_{m=E,W} A_m \cdot \Phi_m^{(K+1)} = \sum_{m=N,S} A_m \cdot \Phi_m^{(K)} + B \quad (\text{III.23})$$

Le système d'équation (III.23) s'écrit matricielle ment :

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ c_2 & a_2 & b_2 & & \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \\ & & \bullet & \bullet & \bullet \\ & & & \bullet & \bullet & \bullet \\ & & & & \bullet & \bullet & \bullet \\ & & & & & \bullet & \bullet & \bullet \\ & & & & & & \bullet & \bullet & \bullet \\ & & & & & & & c_{N-1} & a_{N-1} & b_{N-1} \\ & & & & & & & c_N & a_N & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \vdots \\ \Phi_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_N \end{bmatrix} \quad (\text{III.24})$$

Avec la notation indicielle, il vient que :

$$\begin{cases} a_i = A_W \\ b_i = A_P \\ c_i = A_E \\ d_I = A_N \Phi_N + A_S \Phi_S + B \\ a_m \Phi_m + b_m \Phi_{m+1} + c_m \Phi_{m-1} = d_m \\ i = 1, N \end{cases} \quad (\text{III.25})$$

Cherchons une relation de récurrence entre Φ_m et Φ_{m+1} sous la forme suivante [18]:

$$\Phi_m = P_m \Phi_{m+1} + Q_m \quad (\text{III.26})$$

qui permet de balayer les lignes dans un sens.

La détermination des coefficients P_m et Q_m , dépend de la détermination des valeurs de P_{m-1} et Q_{m-1} , d'après l'équation (III.26), on a :

$$\Phi_{m-1} = P_{m-1} \Phi_m + Q_{m-1} \quad (\text{III.27})$$

Substituant l'équation (III.27) dans l'équation (III.25), et comparerons le résultat avec l'équation (III.26). Nous avons trouvé les expressions suivantes pour les coefficients P_m et Q_m .

$$P_m = \frac{-b_m}{a_m + c_m P_{m-1}} \quad (\text{III.28})$$

$$Q_m = \frac{d_m - c_m Q_{m-1}}{d_m + c_m P_{m-1}} \quad (\text{III.29})$$

Les équations (III.28) et (III.29) sont des relations qui permettent, après la connaissance de P_1 et Q_1 , de déterminer toutes les valeurs de P_m et Q_m . Alors le que problème, se résout en commençant par la face ouest et en terminant par la face est, tel que :

$$a_m = A_{i,j} \quad b_m = A_{i+1,j} \quad c_m = A_{i-1,j} \quad (\text{III.30})$$

$$\begin{aligned} d_m = & A_{i,j+1} \cdot \Phi_{i,j+1} + A_{i,j-1} \cdot \Phi_{i,j-1} + A_{i+1,j+1} \cdot \Phi_{i+1,j+1} \\ & + A_{i-1,j+1} \cdot \Phi_{i-1,j+1} + A_{i+1,j-1} \cdot \Phi_{i+1,j-1} + A_{i-1,j-1} \cdot \Phi_{i-1,j-1} + B_{i,j} \end{aligned} \quad (\text{III.31})$$

Quand le balayage est fait sur les colonnes, les coefficients sont donnés par :

$$a_m = A_{i,j} \quad b_m = A_{i,j+1} \quad c_m = A_{i,j-1} \quad (\text{III.32})$$

$$\begin{aligned} d_m = & A_{i+1,j} \cdot \Phi_{i+1,j} + A_{i-1,j} \cdot \Phi_{i-1,j} + A_{i+1,j+1} \cdot \Phi_{i+1,j+1} \\ & + A_{i-1,j+1} \cdot \Phi_{i-1,j+1} + A_{i+1,j-1} \cdot \Phi_{i+1,j-1} + A_{i-1,j-1} \cdot \Phi_{i-1,j-1} + B_{i,j} \end{aligned} \quad (\text{III.33})$$

La détermination de P_1 et Q_1 dépend de la détermination du coefficient c_1 , qui est nul sur les volumes fictifs de la face ouest du domaine du calcul, dans le cas de calcul ligne par ligne où les volumes fictifs de la face sud, dans le cas de calcul colonne par colonne, d'après les équations (III.28) et (III.29), nous avons [17] :

$$P_1 = \frac{b_1}{a_1} \quad Q_1 = \frac{d_1}{a_1} \quad (\text{III.34})$$

Pour les éléments volumes définissant les frontières, est et nord, l'équation approximative ne dépend pas de la variable à droite et la variable au-dessus, respectivement. Par conséquent, b_m est donné par l'équation (III.30) et (III.32), qui sont nuls, L'équation (III.26) donne :

$$\Phi_N = Q_N$$

Où N indique les volumes de frontière à l'est dans le cas calcul ligne par ligne, et les volumes de frontière nord dans le cas de calcul colonne par colonne.

III.5.5 Critères d'arrêt dans TDMA

L'algorithme de la méthode **TDMA**, utilise deux critères d'arrêt. Le premier est un critère de la convergence, dans lequel le reste du système linéaire à résoudre est comparé avec une valeur prédéfinie de la tolérance. Si le reste est plus petit que la tolérance, le critère de l'arrêt est atteint. Le reste mentionné ci-dessus est donné par:

$$RES = \sum_{i=1}^N [A_{i,j} \cdot \Phi_{i,j} - \sum (A_{nb_l} \cdot \Phi_{NB_l}) - B_i] \quad (III.35)$$

Le deuxième critère d'arrêt est un nombre maximum d'itérations, si le critère de la convergence n'est pas atteint dans un certain nombre d'itérations, le deuxième critère d'arrêt est atteint.

III.5.6) Algorithme SIMPLE ("Semi-Implicite Method for Pressure – Linked Equation"):

Les équations aux différences finies des deux composantes de la vitesse w et u sont couplées entre elles par l'intermédiaire du champ de pression p . la résolution de ces équations couplées conduit à des systèmes matriciels pleins en raison de la nature elliptique de l'équation de pression dans le cas d'un écoulement incompressible. Si l'on veut éviter de résoudre des équations couplées, il faut avoir recours à un processus itératif, ce qui permet d'appliquer à chacune des deux composantes de vitesse le même algorithme de résolution. Ce processus itératif suppose que l'on se donne un champ de pression estimé p^* et ainsi on peut en déduire un champ de vitesse correspondant \vec{V}^* . Dans ces conditions le champ \vec{V}^* peut ne pas satisfaire l'équation de conservation de la masse. Il faut donc trouver un algorithme qui permet de modifier P^* et par conséquent \vec{V}^* de manière à ce que l'équation de continuité soit satisfaite [8].

Ceci est l'objet du présent algorithme. Le calcul des champs de vitesse et de pression se fait à l'aide des équations de quantité de mouvement et de continuité, discrétisées sur un maillage dont le choix se révèle être un élément essentiel à la bonne marche de l'algorithme.

III.5.6 1) Calcul de champ de vitesses :

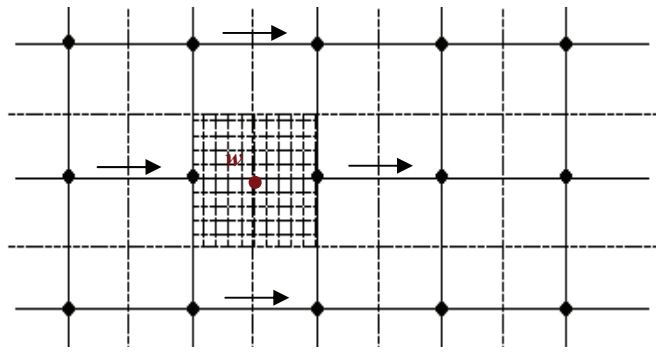
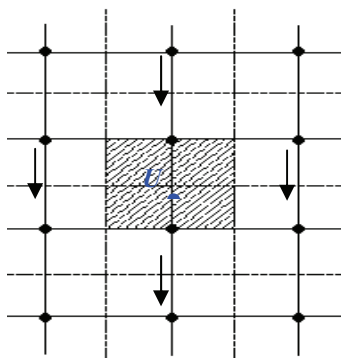
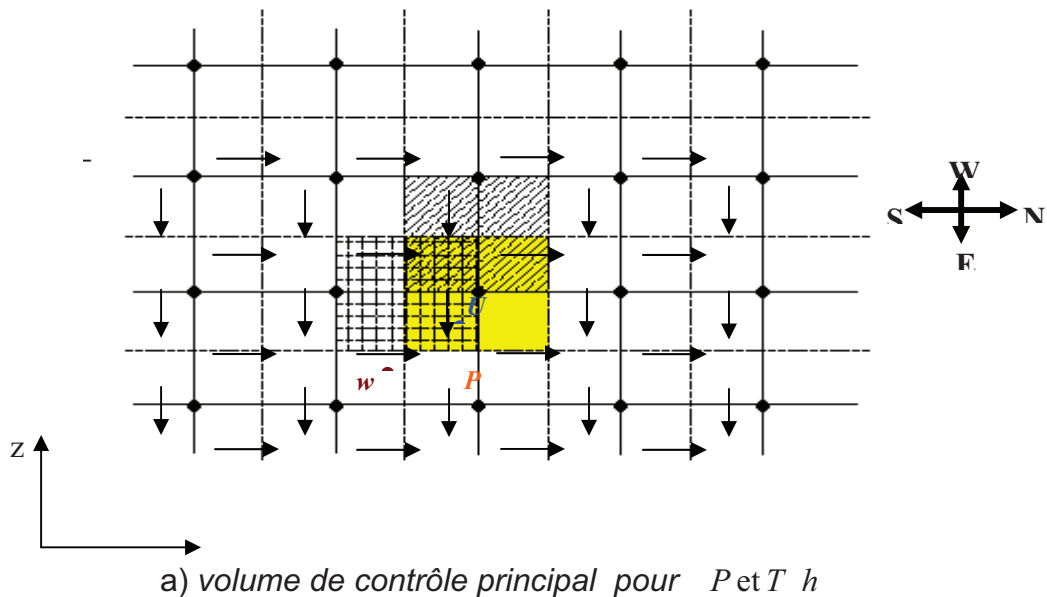
L'algorithme **SIMPLE** est basé sur l'utilisation d'un champ de pression estimé p^* pour pouvoir déterminer une première approche du champ de vitesse \vec{V}^* ; il est à noter qu'il ne faut pas introduire les gradients de pression dans le terme B durant la discrétisation des équations de quantité de mouvement (Patankar) [15].

Afin de rendre possible l'application de l'algorithme, il est nécessaire de ne pas discrétiser les champs de vitesse et de pression sur la même grille. Ainsi, nous allons décrire les deux réseaux de points de leur utilisation pour mieux discrétiser les différentes équations aux dérivées partielles gouvernant le problème physique.

Le choix de grille favorise d'une part les propriétés de conservation en passant d'un volume de contrôle à un autre, et facilite d'autre part la résolution numérique du système d'équations et le traitement des conditions aux limites. Des deux grilles différentes sont donc définies de la manière suivante :

- Une grille dite principale pour le calcul des variables T et p .
- Une grille dite décalée pour évaluer les champs de vitesse w et u dont les nœuds sont localisés à mi-distance de ceux de la grille principale (figure III.06).

Chaque composante de vecteur de vitesse w ou u est seulement décalée dans sa propre direction Patankar [15].



b) volume de contrôle Décalé pour u
 w ou v

c) volume de contrôle Décalé pour v

Figure III.6: type des maillages utilisés

Dans le cas des deux maillages, les propriétés de conservation restent vérifiées et les approximations doivent être choisies de telle façon que les expressions algébriques puissent représenter au mieux la variable en question.

Supposons maintenant que nous connaissons un champ de pression p , défini aux différents points du réseau fig. (III.06.c) a. L'intégration des deux équations de quantité de mouvement sur le volume de contrôle des figures (III.06) a et b entraîne le système d'équations suivant :

$$(A_p)_w w_p = \sum_m (A_m)_w w_m + B_w + A_{ew} (p_w - p_p) \quad (\text{III.36})$$

$$(A_p)_u u_p = \sum_m (A_m)_u u_m + B_u + A_{us} (p_s - p_p) \quad (\text{III.37})$$

Tel que A_{ew} et A_{us} sont des surfaces moyennes dans les deux directions.

Le terme $A_{ew} (p_w - p_p)$ est la force de pression agissant sur le volume de contrôle de la composante w , avec A_{ew} la surface sur laquelle agit la différence de pression.

Pour la composante de la vitesse u , le terme source B_u est calculé de la même façon que dans le cas de la composante w .

L'expression du coefficient $(A_m)_u$ ($m = E, W, N, S$) est généralement de la même forme que celle calculée dans l'autre direction. Les composantes des champs de vitesse intermédiaires, calculées à partir d'un champ de pression estimé p^* seront notées w^* , u^* tant qu'elles ne vérifient pas l'équation de continuité.

III.5.6 2) -Equation de correction de la vitesse :

Nous l'avons dit, notre objectif fondamental est de trouver un moyen permettant de corriger le champ de pression estimé p^* de telle façon que le champ de vitesse calculé (w^*, u^*) puisse progressivement s'améliorer jusqu'à ce que la condition d'incompressibilité soit remplie. Soit p' la correction de pression cherchée : cette correction entraîne, par conséquent, la modification du champ de vitesse calculé de sorte que, si w' et u' représentent les composantes des corrections de w et u , on puisse écrire les champs corrects de pression et de vitesse comme suit:

$$\begin{aligned} p &= p^* + p' \\ w &= w^* + w' \\ u &= u^* + u' \end{aligned} \quad (\text{III.38})$$

En remplaçant w et u par leur expressions dans les équations précédentes, il vient que :

$$\begin{aligned}
 A_e w'_e &= \sum_m A_m w'_m + A_{ew} (p'_P - p'_E) \\
 A_n u'_n &= \sum_m A_m u'_m + A_{ns} (p'_P - p'_N)
 \end{aligned}
 \tag{III.39}$$

A ce stade, on annule carrément les termes $\sum_m A_m w'_m$ et $\sum_m A_m u'_m$, ($m = e, w, n, s$) afin que le système d'équation final puisse s'écrire sous la forme d'un système matriciel facile à résoudre à l'aide de la méthode d'élimination de Gauss-Seidel. En effet, si ces termes avaient été retenus, ils auraient dû être exprimés en fonction des termes de correction de pression et de vitesse des voisins w_m et u_m . Ces voisins prennent à leur tour les leurs et ainsi de suite.

Finalement, la formule de correction de la vitesse fournit la correction de pression sur toutes les mailles du domaine de calcul et l'équation de correction de la pression devient intraitable. Les équation de correction de w et u aux mailles e et n se réduisent à :

$$\begin{aligned}
 w_e &= w^* + \frac{A_{ew}}{A_e} (p'_P - p'_E) \\
 u_n &= u^* + \frac{A_{ns}}{A_n} (p'_P - p'_N)
 \end{aligned}
 \tag{III.40}$$

Ces équations seront utilisées pour obtenir l'équation de correction de la pression établie dans le paragraphe suivant.

III.5.6 3) -Equation de correction de la pression :

Cette équation est faite à partir de l'équation de continuité, écrite sous la forme discrétisée suivante :

$$(w_e - w_w)A_{ew} + (u_n - u_s)A_{ns} = 0 \tag{III.41}$$

En substituant les équations de correction de vitesse dans cette dernière équation, on obtient une équation en P' qui s'écrit sous la forme :

$$A_P \cdot P' = \sum_m A_m \cdot p'_m + B_P \tag{III.42}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
A_E &= \frac{A_{ew}}{A_e} \cdot A_e \\
A_W &= \frac{A_{ew}}{A_w} \cdot A_w \\
A_N &= \frac{A_{ns}}{A_n} \cdot A_n \\
A_S &= \frac{A_{ns}}{A_s} \cdot A_s \\
A_P &= \sum_m A_m \\
B_P &= (w_w^* - w_e^*)A_{ew} + (u_s^* - u_n^*)A_{ns}
\end{aligned} \tag{III.43}$$

B_P Représente la source masse produite par le champ de vitesse \vec{V}^* et que les corrections successives de la pression doivent anéantir. Si, au cours de la résolution numérique du système d'équation, la valeur de ce terme devient assez faible, le champ de vitesse pourra vérifier la condition d'incompressibilité et la correction de la pression ne sera plus nécessaire.

Comme l'équation générale en Φ , l'équation de correction de la pression sera résolue itérativement à l'aide de la méthode de balayage. Mais, pour cette équation, le coefficient A_P est identiquement égal à la somme des coefficients voisins A_m ($m = E, W, N, S$), contrairement au cas des équations de conservation de l'énergie et de quantité de mouvement.

III.5.7). Séquence des opérations :

L'ensemble des calculs qui interviennent dans la résolution des équations mentionnées précédemment à l'aide de l'algorithme SIMPLE peut se résumer comme suit [15] :

- 1- Lire la définition du maillage, les conditions aux frontières et construire les grilles principales et décalée pour l'équation de la correction de pression et les deux équations de mouvement.
- 2- Se donner un champ de pression estimé p^* .
- 3- Calculer les composantes intermédiaires de la vitesse w et u aux nœuds de leurs grilles décalées par la résolution des équations de conservation de quantité de mouvement (III.36) et (III.37).
- 4- Résoudre l'équation de correction de la pression (III.42), qui donne la correction de pression p' nécessaire pour corriger le champ de vitesse (w, u) afin de satisfaire l'équation de continuité.
- 5- Calculer le champ de pression p en additionnant p' à p à l'aide de l'équation (III.38).
- 6- Calculer les composantes de vitesse w et u à l'aide des équations de correction de la vitesse (III.40).

7-Résoudre l'équation discrétisée pour la température ou pour une autre variable Φ si elle influence le champ de l'écoulement par l'intermédiaire des termes sources, des propriétés physiques du fluide, etc. (si par contre Φ n'influence pas le champ de l'écoulement, il vaut mieux la calculer après que la convergence soit atteinte).

8-Poser $P^* = P$ reprendre l'exécution à l'étape 3 en répétant toute la procédure jusqu'à ce que la condition de convergence soit remplie.

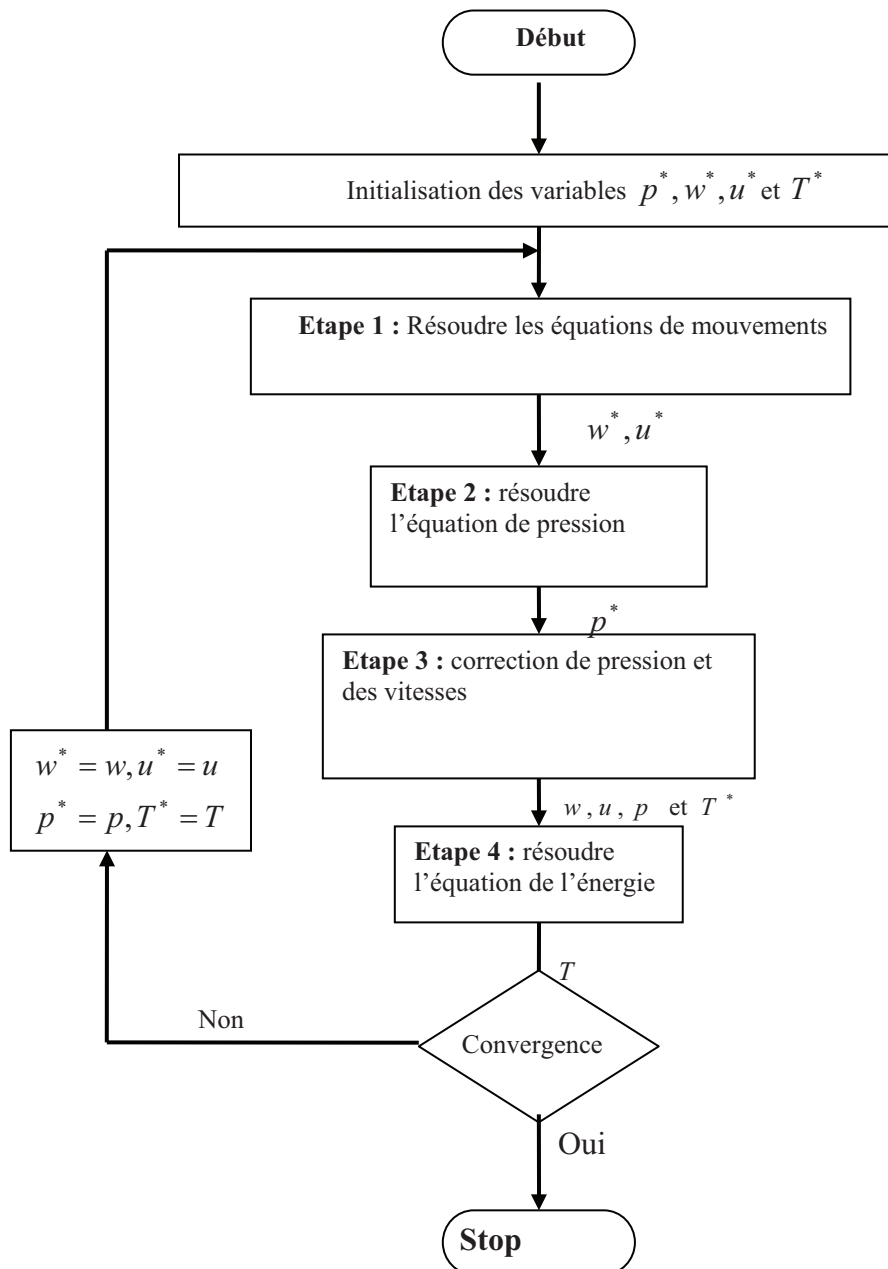


Figure III. 7: Algorithme SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equation)

III.5.8) discrétisation des conditions aux limites :

Lorsque les équations sont discrétisées dans les mailles internes bordant les frontières du domaine, certaines modifications doivent être apportées aux schémas de discrétisation. C'est en effet à ce moment là que les conditions aux limites interviennent, les mailles en question n'étant plus entourées que de trois mailles au lieu de quatre. En réalité, les changements dépendent directement du type de condition appliquée à chaque variable. Afin de simplifier les expressions, nous noterons Φ^D les variables vérifiant des conditions de Dirichlet et Φ^N celles satisfaisant des conditions de Neumann.

Supposons que nous nous trouvions dans les mailles jouxtant la frontière "EST" de la géométrie globale. Les variables Φ^D s'appuient sur leurs valeurs en A tandis que les variables Φ^N se reposent sur leurs valeurs en B, selon la figure suivante [3]:

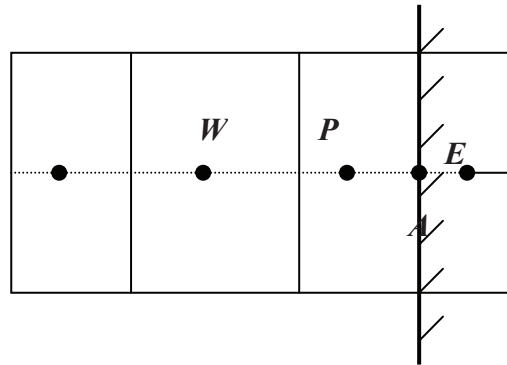


Figure III. 8: Intégration des conditions aux limites.

Les quatre types de conditions à la limite intervenant dans notre modèle ("condition de paroi", "amont", "aval", "plan de symétrie") agissent en outre de manière assez différente sur la discrétisation des équations.

III.5.8.1)- Conditions de paroi :

Nous avons déjà très largement décrit l'intégration des conditions de paroi dans les différentes équations (cf. Chap II). pour certaines équations, le lien est coupé avec la paroi en annulant tous les termes calculés précisément sur la face la cellule correspondant à la paroi et en ajoutant des termes sources caractérisant l'influence de la frontière solide sur l'écoulement. Pour d'autres, elles ne sont pas résolues traditionnellement, la valeur de la variable étant directement imposée au centre de la maille.

La particularité des conditions de paroi oblige, pour certaines variables, à imposer directement une valeur de variable Φ_{fix} au centre des cellules jouxtant la frontière. Ceci est réalisé en imposant les valeurs suivantes dans l'équation de la variable en question :

$$\begin{aligned}
A_P &= 1 \\
A_m &= 0 \quad (m = N, S, E, W) \\
B &= \Phi_{fix}
\end{aligned} \tag{III.44}$$

Et finalement :

$$\Phi_P = \Phi_{fix} \tag{III.45}$$

Cette technique est d'ailleurs également employée pour les cellules solides non poreuses qui pourraient être introduites dans la géométrie en utilisant par exemple $\Phi_{fix}=0$ pour les équations de la quantité de mouvement.

III.5.8.2) Condition d'entrée ($\Phi^D = U, V, T$):

Pour le terme de diffusion, le terme du gradient est discrétisé de la façon suivante :

$$\left(\frac{\partial \Phi^D}{\partial z} \right)_e = \left(\frac{\partial \Phi^D}{\partial z} \right)_A = \frac{\Phi_A^D - \Phi_P^D}{PA} \tag{III.46}$$

Concernant le terme de convection, le schéma employé est le suivant, quelque soit l'équation :

$$\Phi_e^D = \Phi_A^D \tag{III.47}$$

Quant au terme source, il nécessite la même formule utilisée pour le terme de convection ainsi que la formule suivante :

$$\left(\frac{\partial \Phi^D}{\partial z} \right)_P = \frac{\Phi_A^D - \Phi_w^D}{WA} \tag{III.48}$$

III.5.8.3- Condition de symétrie ($\Phi^N = U, V, T$):

Pour le terme de diffusion, le terme de gradient est discrétisé de la façon suivante :

$$\left(\frac{\partial \Phi^N}{\partial z} \right)_e = \frac{\Phi_B^N - \Phi_P^N}{PB} \tag{III.49}$$

Si le schéma choisi pour le terme de convection est le schéma Upwind, la discrétisation s'effectue comme suite :

$$\begin{aligned}
\Phi_e^N &= \Phi_P^N & \text{si } U_e > 0 \\
\Phi_e^N &= \Phi_B^N & \text{si } U_e < 0
\end{aligned} \tag{III.50}$$

Si non, s'il s'agit d'un schéma centré, il vient :

$$\Phi_e^N = \frac{\Phi_P + \Phi_B}{2} \tag{III.51}$$

Quant au terme source, il nécessite les relations suivantes :

$$\left(\frac{\partial \Phi^N}{\partial z} \right)_P = \frac{\Phi_B^N - \Phi_W^N}{WA} \quad (\text{III.52})$$

$$\left(\frac{\partial \Phi^N}{\partial z} \right)_B = \frac{\Phi_B^N - \Phi_P^N}{PB} \quad (\text{III.53})$$

Le lien est donc supprimé avec les frontières dans les mailles bordant les limites du domaine. Tous les termes calculés ci-dessus sont ensuite introduits comme termes sources dans les équations.

III.6). Modélisation numérique par volumes finis d'un écoulement en milieu poreux:

III.6.1) Choix des schémas numériques:

Le modèle mathématique considéré est un système couplé composé des équations de conservation de la masse des constituants et de l'équation de conservation de l'énergie. Un schéma a donc été établi de façon explicite tout en gardant une pression implicite. Les équations sont couplées mais la résolution est séquentielle. On résout tout d'abord l'équation de conservation de la masse puis on utilise la solution trouvée pour la résolution de l'équation de conservation de l'énergie. On détermine ainsi la valeur de la température, nouvelle inconnue principale. Ce schéma est moins coûteux qu'un schéma entièrement implicite et converge pour des variations de température faible.

III.6.2). Discrétisation de l'espace :

Nous allons, dans un premier temps, approximer le terme spatial du modèle mathématique (II.59). Le domaine $]0, l_1[\times]0, L_1[$ est couvert par un maillage de $n+1$ nœuds selon la direction x $\{x_i, i=0, n\}$ avec $x_0 = 0$ et $x_n = l_1$, et $m+1$ nœuds selon y $\{y_j, j=0, m\}$ avec $y_0 = 0$ et $y_m = L_1$ permettant de définir $(n+1) \times (m+1)$ intervalles finis :

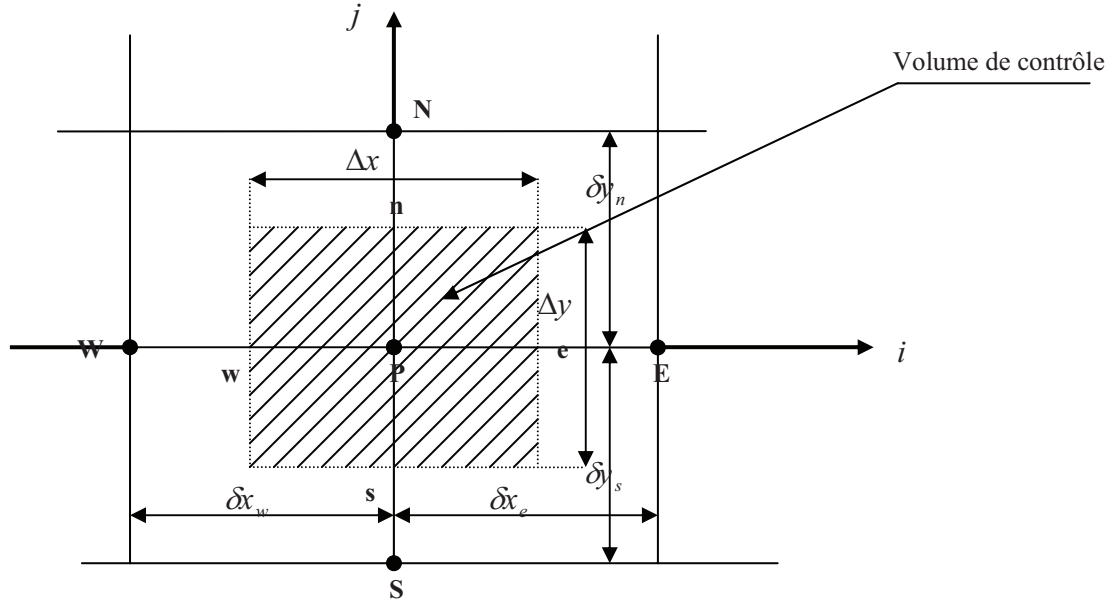


Figure III.9 Discretisation de domaine en deux dimensions

On travaille sur une grille uniforme orientée positivement de gauche à droite et de bas en haut. Suivant les notations classiques on note P le point central, E le point immédiatement à sa droite (E pour Est) et W le point immédiatement à sa gauche (W pour ouest). N (pour nord) le point immédiatement supérieur, et S (pour sud) le point immédiatement inférieur. Les surfaces du volume de contrôle sont:

$$A_e = A_w = \Delta z \cdot \Delta y \quad \text{et} \quad A_n = A_s = \Delta z \cdot \Delta x. \quad (\text{III.54})$$

III.6.3) Equation diffusivité:

L'intégration de l'équation de diffusivité établie dans le chapitre précédent sur le volume de contrôle ΔV donne [4]:

$$\int_{\Delta V} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial h}{\partial x} \right) dx \cdot dy + \int_{\Delta V} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial h}{\partial y} \right) dx \cdot dy = 0 \quad (\text{III.55})$$

On note que $A_e = A_w = \Delta y \cdot \Delta z$ et $A_n = A_s = \Delta x \cdot \Delta z$ l'équation (III.55) devient:

$$\left[\frac{A_e}{\mu_e} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_e - \frac{A_w}{\mu_w} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_w \right] + \left[\frac{A_n}{\mu_n} \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)_n - \frac{A_s}{\mu_s} \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)_s \right] = 0 \quad (\text{III.56})$$

Les dérivées partielles $\left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_e$, $\left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_w$, $\left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)_n$ et $\left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)_s$ sont approximées par un développement en série de Taylor de l'ordre 2 autour des points e, w, n et s .

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_e = \frac{h_P - h_E}{2\Delta x} \\ \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_w = \frac{h_W - h_P}{2\Delta x} \\ \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)_n = \frac{h_P - h_N}{2\Delta y} \\ \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)_s = \frac{h_S - h_P}{2\Delta y} \end{array} \right. \quad (\text{III.57})$$

Afin d'alléger les expressions posons:

$$\begin{aligned} D_e &= \frac{A_e}{2\Delta x \cdot \mu_e} = \frac{\Delta z \cdot \Delta y}{2\Delta x \cdot \mu_e}, & D_w &= \frac{A_w}{2\Delta x \cdot \mu_w} = \frac{\Delta z \cdot \Delta y}{2\Delta x \cdot \mu_w}, \\ D_n &= \frac{A_n}{2\Delta y \cdot \mu_n} = \frac{\Delta z \cdot \Delta x}{2\Delta y \cdot \mu_n}, & D_s &= \frac{A_s}{2\Delta y \cdot \mu_s} = \frac{\Delta z \cdot \Delta x}{2\Delta y \cdot \mu_s} \end{aligned} \quad (\text{III.58})$$

Substituant les expressions (III.58) dans l'équation (III.56),. Nous avons trouvé l'expression suivante.

$$(D_e + D_w + D_n + D_s)h_P - D_e h_E - D_w h_W - D_n h_N - D_s h_S = 0 \quad (\text{III.59})$$

$$a_P h_P - a_E h_E - a_W h_W - a_N h_N - a_S h_S = 0$$

$$(\text{III.60})$$

$$a_{i,j} \cdot h_{i,j} = a_{i,j-1} h_{i,j-1} + a_{i,j+1} h_{i,j+1} + a_{i-1,j} h_{i-1,j} + a_{i+1,j} h_{i+1,j}$$

$a_{i-1,j}$	$a_{i+1,j}$	$a_{i,j+1}$	$a_{i,j-1}$	$a_{i,j}$
a_W	a_E	a_N	a_S	a_P
$\frac{\Delta z \cdot \Delta y}{\Delta x \cdot \mu_w}$	$\frac{\Delta z \cdot \Delta y}{\Delta x \cdot \mu_e}$	$\frac{\Delta z \cdot \Delta x}{\Delta y \cdot \mu_n}$	$\frac{\Delta z \cdot \Delta x}{\Delta y \cdot \mu_s}$	$a_W + a_E + a_N + a_S$

Tableau III.03: les coefficients du système linéaire

L'équation (III.60) représente un système creux, et peut être réécrite sous forme matricielle représentée par une matrice creuse à 5 diagonales de la forme :

L'équation (III.60) est écrite sous une forme plus commode pour ces procédures, données par :

$$a_m h_m + b_m h_{m+1} + c_m h_{m-1} = d_m \quad (\text{III.61})$$

Pour $m = 1, \dots, N$ cette équation exprime une relation entre la variable h_m et les variables adjacentes h_{m+1} et h_{m-1} .

Le système tridiagonal est représenté par la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ c_2 & a_2 & b_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & c_{N-1} & a_{N-1} & b_{N-1} \\ & & & & c_N & a_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_{N-1} \\ h_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{N-1} \\ d_N \end{bmatrix} \quad (\text{III.62})$$

Le problème (III.60), se résout en commençant par la face ouest et en terminant par la face est, tel que :

$$\begin{aligned} a_m &= a_{i,j}, \quad b_m = -a_{i+1,j}, \quad c_m = -a_{i-1,j} \\ d_m &= a_{i,j-1} h_{i,j-1} + a_{i,j+1} h_{i,j+1} \end{aligned} \quad (\text{III.63})$$

Quand le balayage est fait sur les colonnes, les coefficients sont donnés par :

$$\begin{aligned} a_m &= a_{i,j}, \quad b_m = -a_{i,j+1}, \quad c_m = -a_{i,j-1} \\ d_m &= a_{i-1,j} h_{i-1,j} + a_{i+1,j} h_{i+1,j} \end{aligned} \quad (\text{III.64})$$

III.6.4 Les conditions aux limites:

La relation entre le débit produit par un puits et celle de la charge est exprimée par la formule de Dupuit [] qui donne le rabattement de la nappe lié au pompage :

$$h - h_r = \frac{q \cdot \mu}{2\pi \cdot H \cdot k} \cdot \log \frac{R}{r_p} \quad (\text{III.65})$$

Tel que:

- h : La charge hydraulique sur une surface distant r du centre de puits
- R : rayon de la zone de drainage correspondante à une charge égale à h_r
- k : La perméabilité
- H : Épaisseur de la nappe

La charge hydraulique au fond du puits est donnée par la relation suivante, en remplaçant r par r_p rayon de puits:

$$h(r_p) = \frac{q \cdot \mu}{2\pi \cdot H \cdot k} \cdot \log \frac{R}{r_p} + h_r \quad (\text{III.66})$$

Posons

$$IP_{\text{naturl}} = \frac{2\pi H \cdot k}{\mu \log \frac{R}{r_p}} = \frac{q}{h(r_p) + h_r} \quad (\text{III.67})$$

III.6.4.1) La représentation des puits:

Les puits apparaissent comme des points de source dans les équations des blocs où ils sont implantés, mais il est très difficile de représenter rigoureusement un écoulement radial circulaire autour d'un puits avec des mailles rectangulaire, cette difficulté est la conséquence de la différence des tailles entre les rayons des puits et celle des dimensions des mailles (de l'ordre du millièbre) [24].

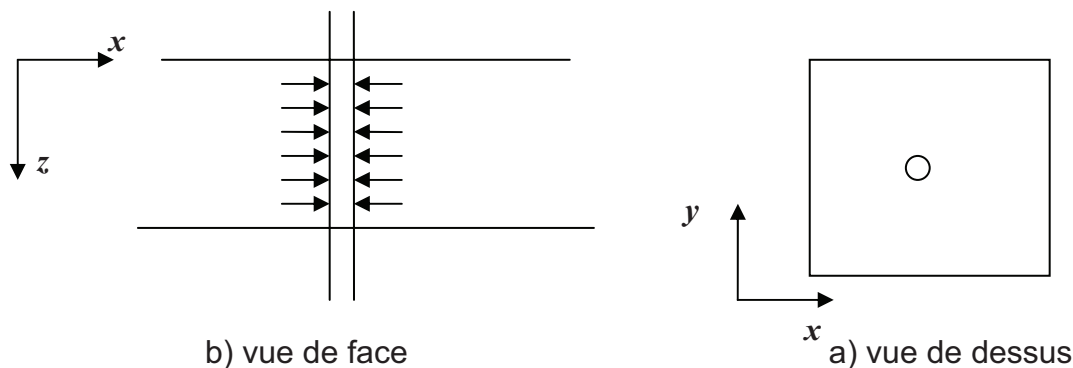


Figure III.10 Puits au centre de la maille perforé sur tout la hauteur de la maille

III.6.4.2) Transmissivité d'un puits:

Au voisinage du puits, le flux est supposé radial. Dans ce cas, la transmissivité du puits pour un maillage cartésien est donné par :

$$T_r = K^* . h_m \quad (\text{III.68})$$

- K^* : La perméabilité équivalente
- h_m : L'épaisseur de la cellule transpercée par le puits, dans la direction du forage

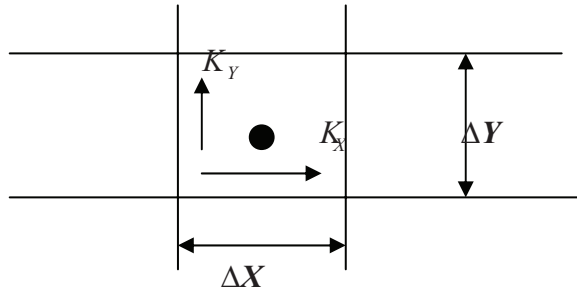


Figure III.11 Calcul des transmissivité pour un puits

Pour un puits vertical, on obtient:

$$K^* = \sqrt{k_x . k_y}, \quad h_m = \Delta z \quad (\text{III.69})$$

Le rayon équivalent du puits r_{eq} est défini comme le rayon pour lequel la pression d'un flux homogène est égale à la pression calculée numériquement dans la cellule de puits [24]..

$$r_{eq} = 0.28 \frac{\left[\left(\frac{k_y}{k_x} \right)^{1/2} . \Delta x^2 + \left(\frac{k_x}{k_y} \right) \Delta y^2 \right]^{1/2}}{\left(\frac{k_y}{k_x} \right)^{1/4} + \left(\frac{k_x}{k_y} \right)^{1/4}} \quad (\text{III.70})$$

- r_p : Le rayon du puits
- r_{eq} : Le rayon équivalent du puits

Dans notre cas le milieu est homogène et isotrope ($k_x = k_y = k$) les expressions précédentes se simplifient comme suit :

$$K^* = k, \quad h_m = \Delta z \quad \text{et} \quad r_{eq} = 0.28 \frac{[\Delta x^2 + \Delta y^2]^{1/2}}{2} \quad (\text{III.71})$$

III.6.4.3) La charge au centre de la maille:

Si les charges varient lentement dans la maille ou bien si elles varient linéairement, la charge calculée correspond à peu près au centre de la maille. Au voisinage d'une singularité (un puits par exemple), la charge calculée ne correspond plus du tout à celle d'un puits au centre de la maille, mais il faut appliquer une correction donnée par la formule suivante [24] :

$$h_{maille} = \frac{q \cdot \mu}{2\pi T_r} \left(\log \left(\frac{r_{eq}}{r_p} \right) - \frac{\pi}{2} \right) + h_r \quad (\text{III.72})$$

Posons

$$IP_{numérique} = \frac{2\pi \Delta z \cdot k}{\mu \log \left(\frac{r_{eq}}{r_p} \right) - \frac{\pi}{2}} = \frac{q}{h_{maille} - h_r} \quad (\text{III.73})$$

La figure (III.13) représente une comparaison entre $IP_{naturel}$ et $IP_{numérique}$

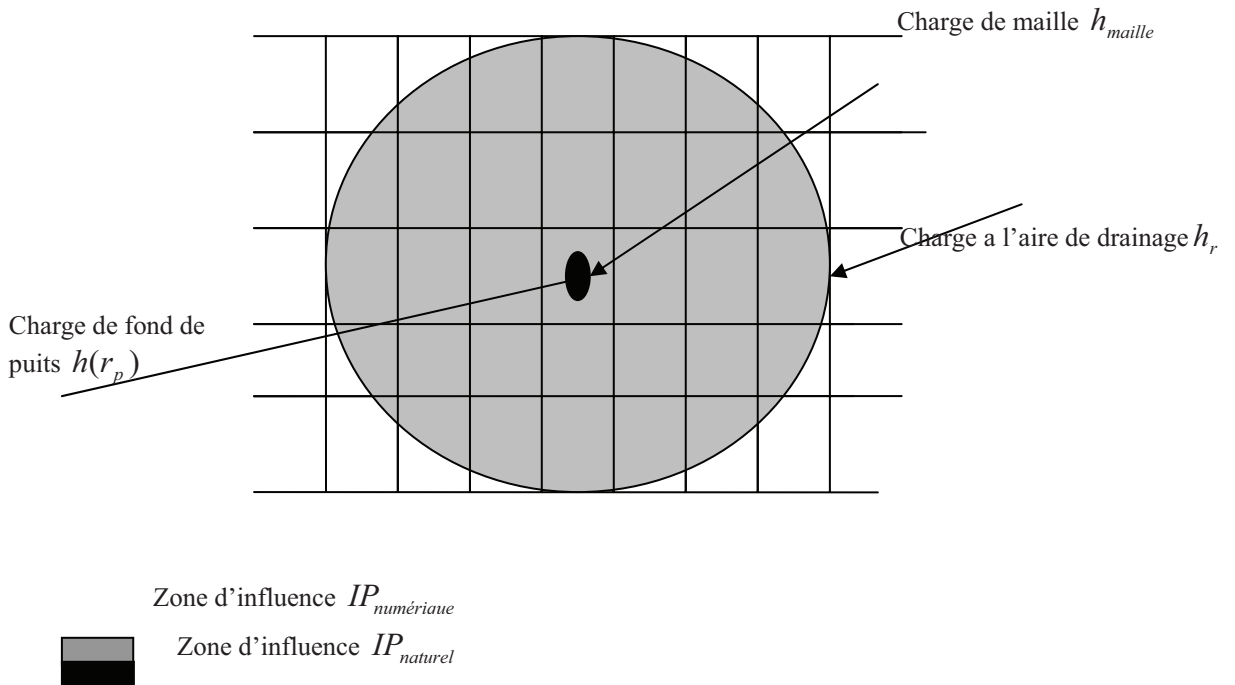
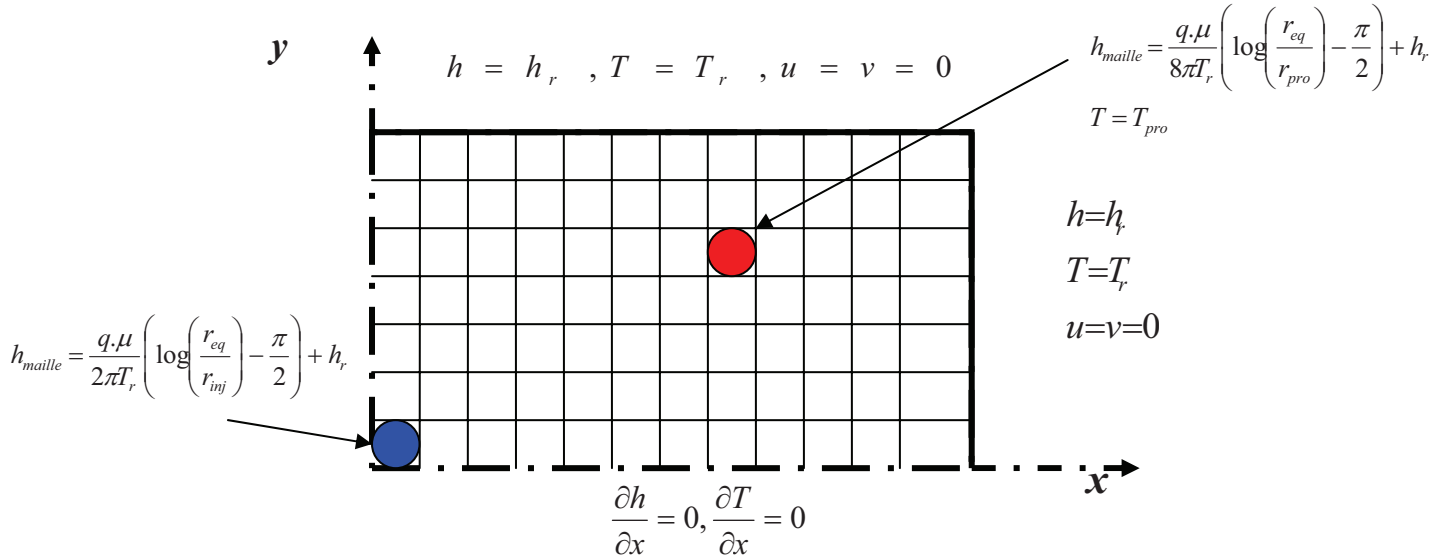


Figure III.12 Comparaison IP numérique et IP naturel

La relation entre IP numérique et IP naturel est donné par la formule suivante:

$$IP_{numérique} = IP_{naturel} \cdot \frac{h(r_p) - h_r}{h_{maille} - h_r} > IP_{naturel} \quad (III.74)$$

$$IP_{numérique} = IP_{naturel} \cdot \frac{\log \frac{R}{r_p}}{\log \left(\frac{r_{eq}}{r_p} \right)} > IP_{naturel} \quad (III.75)$$



III.6.5) Equation d'énergie:

$$\lambda_e \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] - (\rho C_p)_f \left[u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right] = 0 \quad (III.76)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\lambda_e}{C_p} \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\lambda_e}{C_p} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] = \left[\rho u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v \frac{\partial T}{\partial y} \right] \quad (III.77)$$

$$\int_A n \cdot (\rho \cdot T \cdot V) dA = \int_A \left(\frac{\lambda_e}{C_p} \text{grad} T \right) \cdot dA$$

$$\begin{aligned} [(\rho u A T)_e - (\rho u A T)_w] + [(\rho v A T)_n - (\rho v A T)_s] = & \left[\left(\frac{\lambda_e}{C_p} A \frac{\partial T}{\partial x} \right)_e - \left(\frac{\lambda_e}{C_p} A \frac{\partial T}{\partial x} \right)_w \right] \\ & + \left[\left(\frac{\lambda_e}{C_p} A \frac{\partial T}{\partial y} \right)_n - \left(\frac{\lambda_e}{C_p} A \frac{\partial T}{\partial y} \right)_s \right] \end{aligned} \quad (III.78)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_e = \frac{T_E - T_P}{2\Delta x} \\ \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_w = \frac{T_P - T_W}{2\Delta x} \\ \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_n = \frac{T_N - T_P}{2\Delta y} \\ \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_s = \frac{T_P - T_S}{2\Delta y} \end{array} \right. \quad (\text{III.79})$$

Posons:

$$D_e = \frac{2\lambda_e \Delta y \Delta z}{C_p \Delta x}, \quad D_w = \frac{2\lambda_e \Delta y \Delta z}{C_p \Delta x}, \quad D_n = \frac{2\lambda_e \Delta x \Delta z}{C_p \Delta y}, \quad D_s = \frac{2\lambda_e \Delta x \Delta z}{C_p \Delta y} \quad (\text{III.80})$$

$$T_e = \frac{T_P + T_E}{2}, \quad T_w = \frac{T_P + T_W}{2}, \quad T_n = \frac{T_P + T_N}{2}, \quad T_s = \frac{T_P + T_S}{2} \quad (\text{III.81})$$

$$F_e = \rho \Delta y \Delta z u_e, \quad F_w = \rho \Delta y \Delta z u_w, \quad F_n = \rho \Delta x \Delta z v_n, \quad F_s = \rho \Delta x \Delta z v_s \quad (\text{III.82})$$

Substituant les expressions (III.80), (III.81) et (III.82) dans l'équation (III.78),). Nous avons trouvé l'expression suivante.

$$\begin{aligned} \frac{F_e}{2}(T_P + T_E) - \frac{F_w}{2}(T_W + T_P) + \frac{F_n}{2}(T_P + T_N) - \frac{F_s}{2}(T_S + T_P) &= D_e(T_E - T_P) - D_w(T_P - T_W) \\ &\quad + D_n(T_N - T_P) - D_s(T_P - T_S) \\ \left(\frac{F_e}{2} - \frac{F_w}{2} + \frac{F_n}{2} - \frac{F_s}{2} + D_e + D_w + D_n + D_s \right) T_P &= \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right) T_E + \left(D_w + \frac{F_w}{2} \right) T_W \\ &\quad + \left(D_n - \frac{F_n}{2} \right) T_N + \left(D_s + \frac{F_s}{2} \right) T_S \end{aligned} \quad (\text{III.83})$$

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + a_N T_N + a_S T_S \quad (\text{III.84})$$

Les deux tableaux suivants donnent les déferents coefficients d'un système tri diagonale

a_E	a_W	a_N	a_S	a_P
$\max \left[-F_e, \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right), 0 \right]$	$\max \left[F_w, \left(D_w + \frac{F_w}{2} \right), 0 \right]$	$\max \left[-F_n, \left(D_n - \frac{F_n}{2} \right), 0 \right]$	$\max \left[F_s, \left(D_s + \frac{F_s}{2} \right), 0 \right]$	$a_E + a_W + a_N + a_S + \Delta F$

Tableau III.4 les coefficients du système linéaire tenu en compte le nombre de Peclet

<i>Face</i>	<i>e</i>	<i>w</i>	<i>n</i>	<i>s</i>
<i>F</i>	$\rho u_e \Delta y . \Delta z$	$\rho u_w \Delta y . \Delta z$	$\rho v_n \Delta x . \Delta z$	$\rho v_s \Delta x . \Delta z$
<i>D</i>	$\frac{2\lambda_e \Delta y . \Delta z}{C_p \Delta x}$	$\frac{2\lambda_e \Delta y . \Delta z}{C_p \Delta x}$	$\frac{2\lambda_e \Delta x \Delta z}{C_p \Delta y}$	$\frac{2\lambda_e \Delta x . \Delta z}{C_p \Delta y}$

Tableau III.5 : les termes de diffusion et celle de convection pour chaque face

CHAPITRE IV

Résultats et discussion

IV.1) Introduction :

L'objectif de ce chapitre est d'effectuer une première validation de nos modèles hydrodynamiques. Pour cela, nous procédons selon les deux étapes suivantes. Tout d'abord, nous testons ces modèles sur des cas simple, en nous basons essentiellement sur des résultats physiques connus. Puis nous vérifions, à l'aide d'une succession de nouveau cas, si les modèles répondent de manière cohérente à la modification de certains paramètres de l'écoulement.

IV.2) Présentation des modèles :

Les codes de simulation utiliser était programmés en langage de programmation FORTRAN. Ces programmes sont constitués chacun d'eux d'un programme principal dans lequel s'effectuent les instructions suivantes [25]:

- La lecture des paramètres géométriques.
- La préparation du maillage dans les deux directions.
- La lecture des propriétés physiques du fluide en présence.
- Introduction des paramètres de contrôle du programme (Nb max D'itérations, coefficients de sous relaxation,...).
- lecture des nombres de Reynolds et de Prandtl
- Calcul des coefficients géométriques pour chaque volume et initialisation des variables.
- Calcul des facteurs de normalisation des résidus.
- La résolution des équations de chaque variable pour les deux écoulements, en appelant des sousroutines pour chaque variable qui font appel aussi à d'autres sousroutines pour l'introduction des conditions aux limites et la résolution du système d'équations résultant.
- Ecriture des résultats.

Ces étapes sont résumées par les organigrammes suivants :

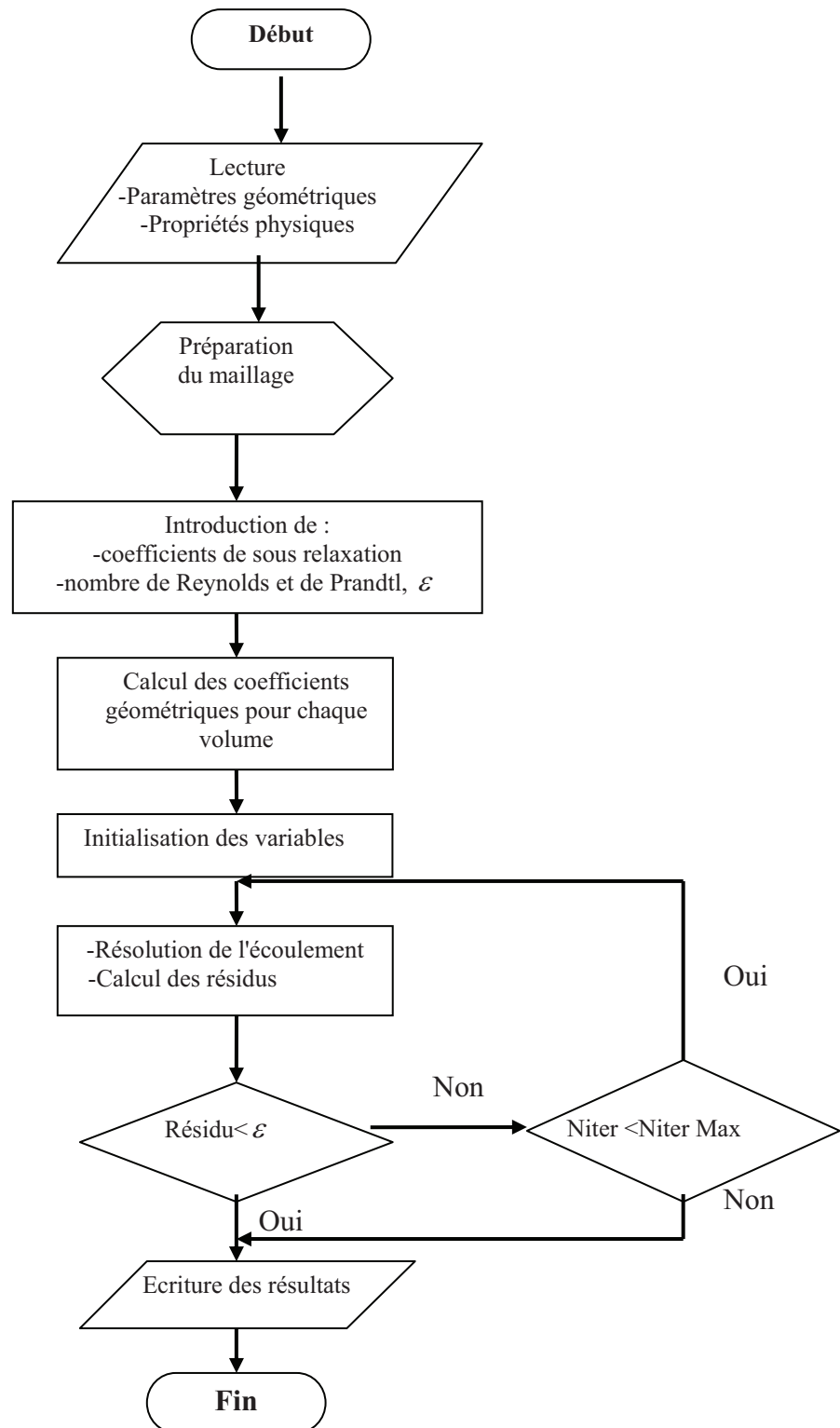


Figure IV. 1 : Organigramme du programme général pour l'écoulement en charge dans une conduite

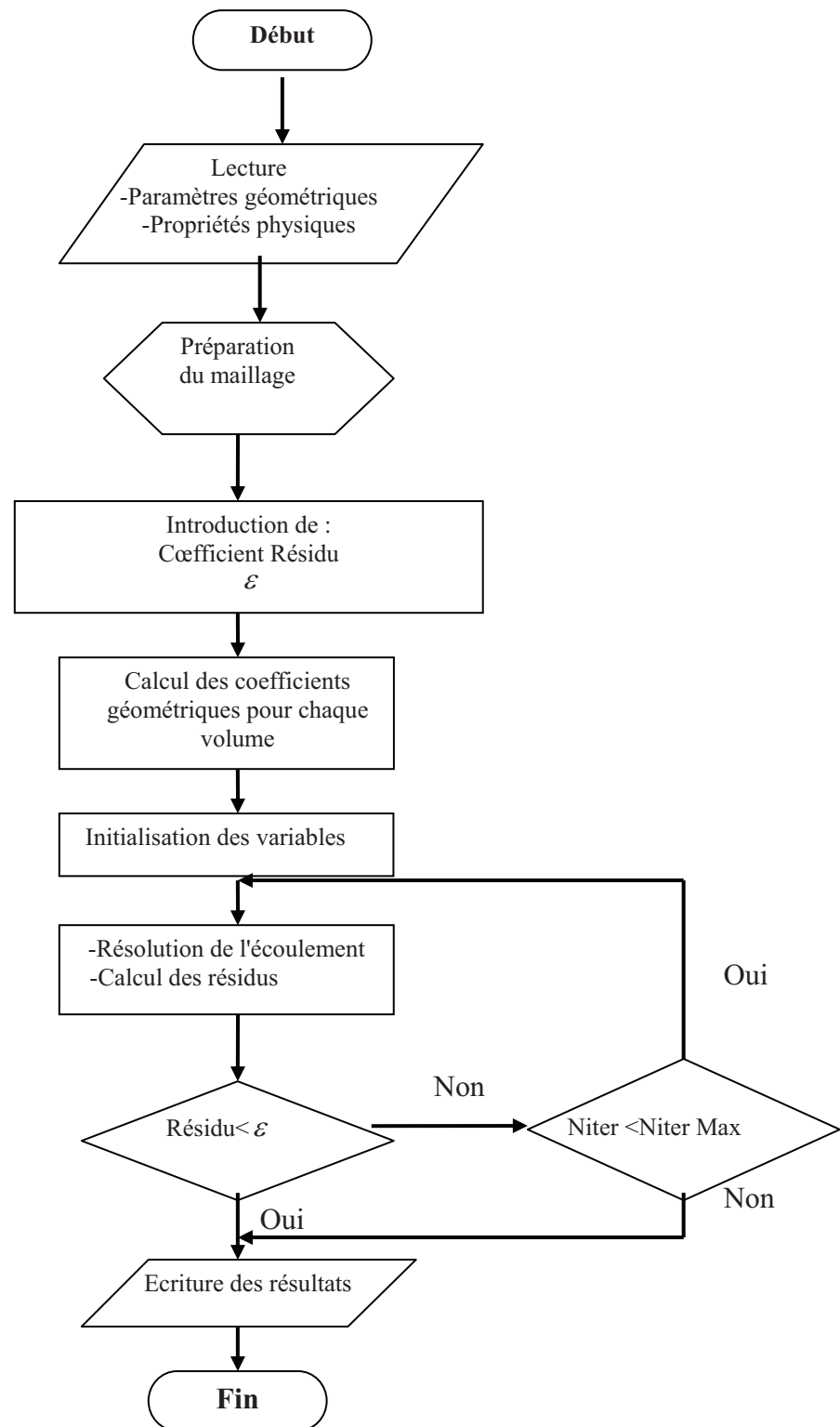


Figure IV. 2 : Organigramme du programme général d'un écoulement dans un milieu poreux.

IV.3) Les applications sur l'écoulement dans une conduite à axisymétrique :

Avant de commencer, nous fournissons dès à présent les valeurs des variables qui resteront fixes quelque soit le cas test considéré.

La masse volumique et la viscosité dynamique de référence sont choisies identiques à celles indiquées au deuxième chapitre. Elles restent constantes pour tous les cas.

En ce qui concerne la convergence, nous avons fixé le nombre d'itérations à 1000, nous sommes certains de parvenir à un résidu global inférieur ou égal à 10^{-3} .

Nous avons fixé le nombre de nœuds dans la direction transversale à 100 sachant qu'il est suffisant pour décrire des gradients modérés dans ce sens. Par contre, dans le sens transversal a du fort gradient des variables qui existe dans ce sens, nous avons essayé d'optimiser le maillage en variant le nombre de nœuds dans ce sens et on remarque l'évolution du résidu global au cours des itérations

L'ensemble des données est résumé dans le tableau suivant :

Données du programme	Les valeurs
Nombre de Pr	1.8
Nombre Re	10^5
N_i	100
N_j	25
	50
	75
	100
Nombre des cellules maxima	10000

Tableau IV.1 : Ensemble de données pour l'optimisation du maillage

IV.3.1) initialisations des variables :

Les conditions initiales sont simplement les valeurs des variables dépendantes qui sont imposées partout dans la zone d'étude avant le début de la simulation. Normalement, les conditions initiales sont déterminées pour un régime permanent.

Nous devons fournir des conditions initiales qui représentent l'état de base du modèle à l'instant où commence la simulation. Dans le cas d'une simulation sans état initial intégralement connu à partir d'une autre simulation précédente, les conditions initiales de chaque variable sont pris égale à zéro par défaut.

Afin que nous ne soyons pas gérés par des problèmes de divergence, nous devons constituer un état initial qui s'éloigne le moins possible d'une certaine réalité. Toutefois, nous devons garder à l'esprit que ces conditions initiales ne constituent qu'une base théorique aux calculs ultérieurs. Nous pouvons donc simplifier certaines spécifications lorsque nous savons que cela n'a pas d'incidence sur la résolution numérique.

a) Les vitesses :

Nous choisissons un profil de vitesse parabolique dans l'écoulement axisymétrique. Bien évidemment, ce type de profil est rencontré en pratique et il suffit largement à l'initialisation.

b) La pression :

Nous cherchons à initialiser la pression à la pression hydrostatique à partir d'une pression de référence fixée à zéro à la limite supérieure du domaine. La pression n'intervient que par son gradient dans les équations, le choix de cette pression de référence n'influence aucunement la solution finale mais peut jouer un rôle non négligeable sur la rapidité de convergence de la résolution numérique des équations. La pression est simplement définie à une constante additive près.

La pression hydrostatique en un point est en toute rigueur équivalente au poids de la colonne de fluide au-dessus de ce point.

IV.3.2) Optimisation du maillage :

Pour cela nous avons testé le programme sur quatre valeurs du nombre de nœuds dans la direction transversal celle indiquées dans le tableau ci-dessus et nous avons obtenu les graphes suivant :

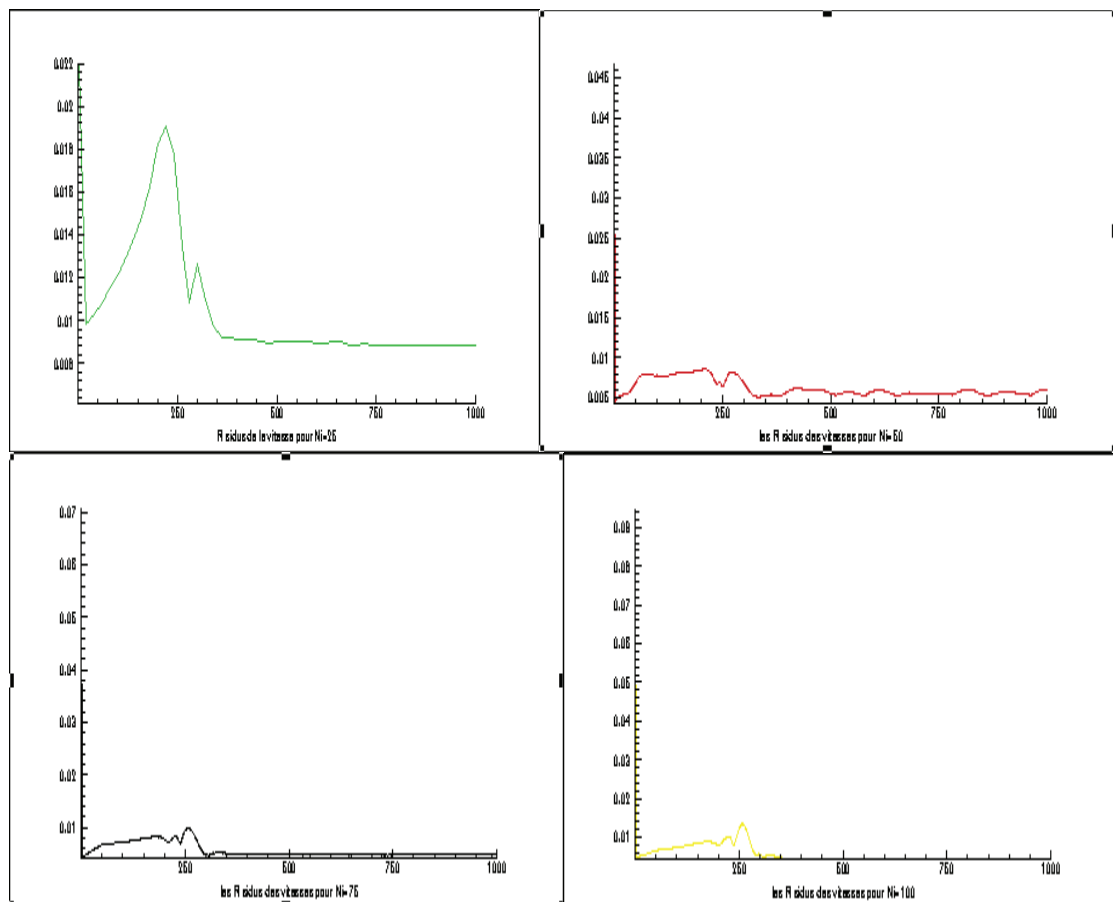


Figure IV.3 : Optimisation du maillage

D'après les graphes ci-dessus, on peut remarquer que pour un nombre de nœuds $N_j=25$ le résidu reste important après un certain nombre d'itérations. Par contre, pour $N_j=50$ ou 75 et 100 le résidu diminue considérablement par rapport au premier cas et il reste stable pour $N_j>50$. Donc le choix optimisé de N_j est 50 et cela pour ne pas encombrer la mémoire ou augmenté le temps de simulation si on prend N_j supérieur à 50.

IV.3.3) Influence du nombre de Reynolds sur les résidus :

Lorsque la valeur de la vitesse et par conséquent Reynolds de l'écoulement est élevée, la quantité de (chaleur ou matière) convectée entre les points E (centre de la cellule aval) et P est plus importante que celle diffusée entre ces deux points, de telle manière que le flux diffusif à travers la face e peut être légitimement négligé vis-à-vis au flux convectif. Donc plus le Reynolds est élevé plus le Schéma Upwind donne une bonne approximation de la variable dépendante au centre des faces des cellules. Et cela est très clair dans la figure (IV.4) , qui montrent l'évolution des résidus des vitesses au cours des itérations en variant le Reynolds.

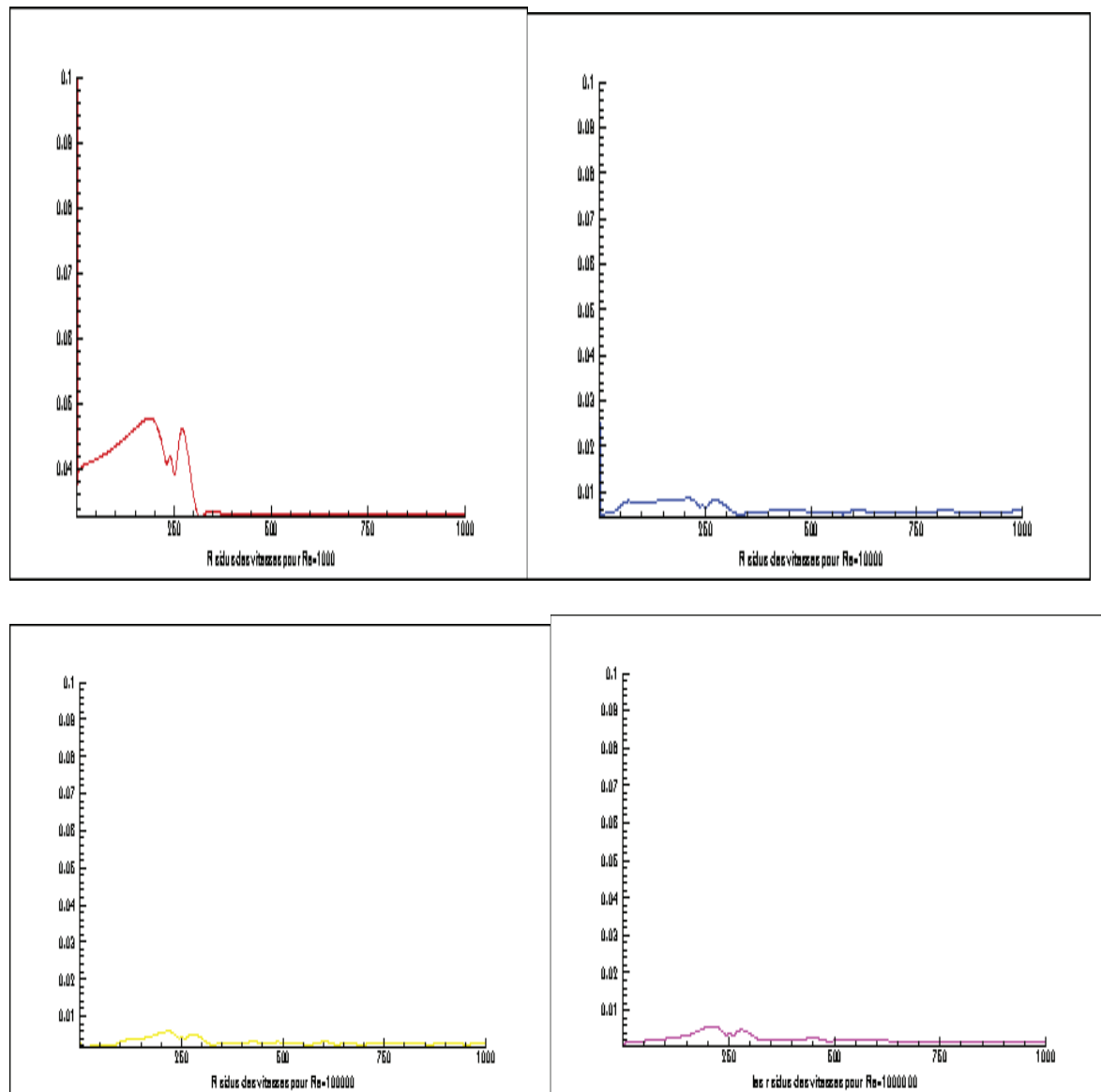
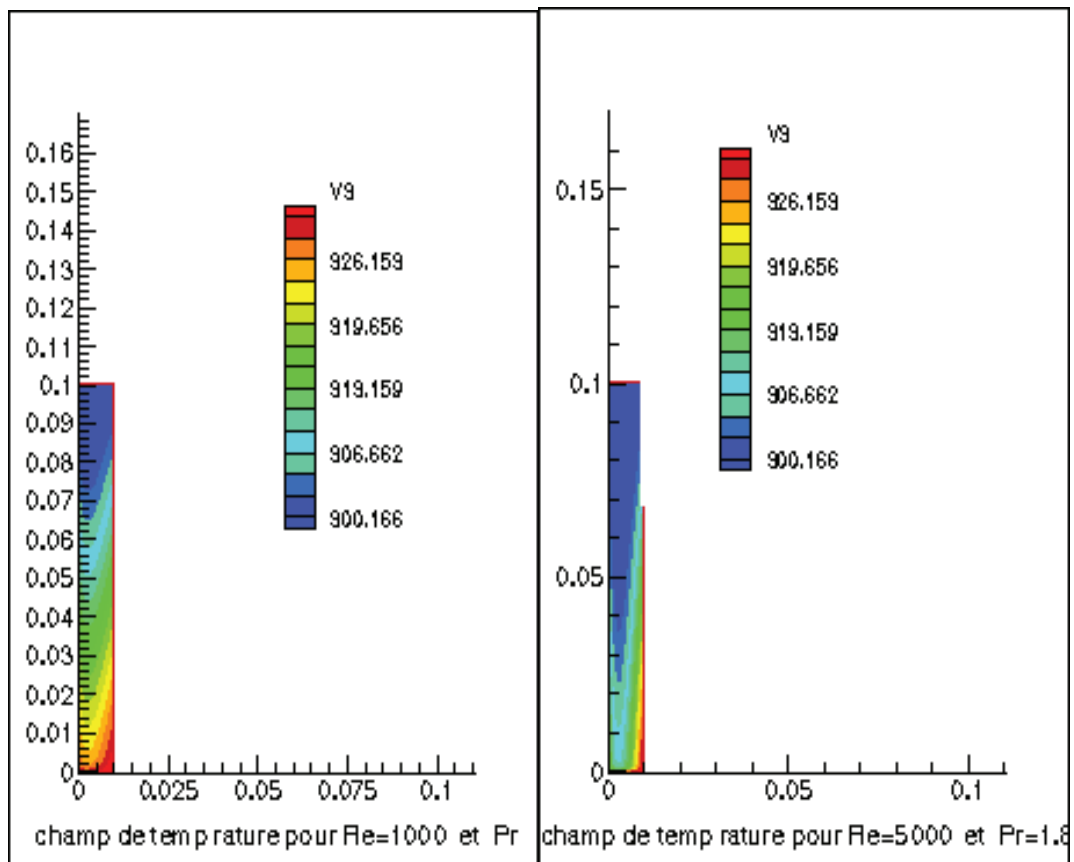


Figure IV.4 : Influence du nombre de Reynolds sur le résidu de la vitesse

IV.3.4) Influence du nombre de Péclet :

Le nombre de Péclet qui apparaît dans l'équation (62) du deuxième chapitre a une influence déterminante sur le profile de la température. Ainsi, ce nombre représente le rapport du transfert de la chaleur par convection au transfert par diffusion. Et comme le nombre de Péclet est égal au produit des deux nombre de Reynolds et de Prandtl, nous allons procéder de la manière suivante : d'une part on fixe le nombre de Prandtl et on varie le Reynolds et d'autre part on fait l'inverse.

Notons, que nous allons fixé $Pr = 1.8$ et variant le Re puis on fixe $Re = 10^5$ et variant Pr est ça pour les deux puits injecteur et le puits producteur. Pour les autres combinaisons le même phénomène se répète.



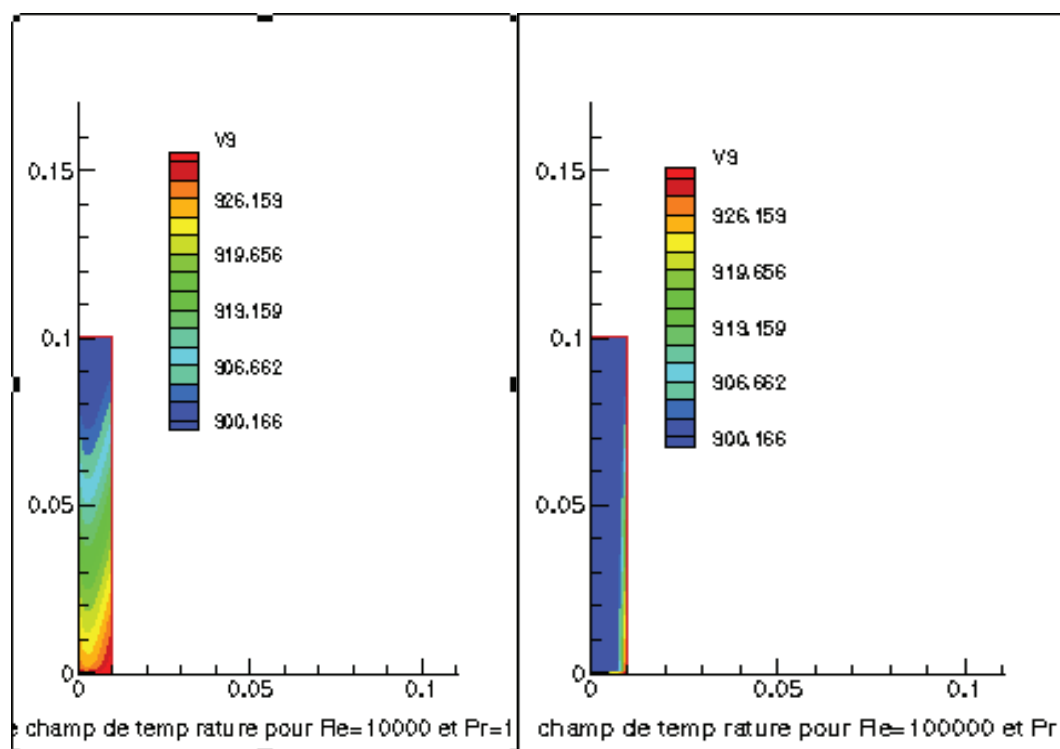
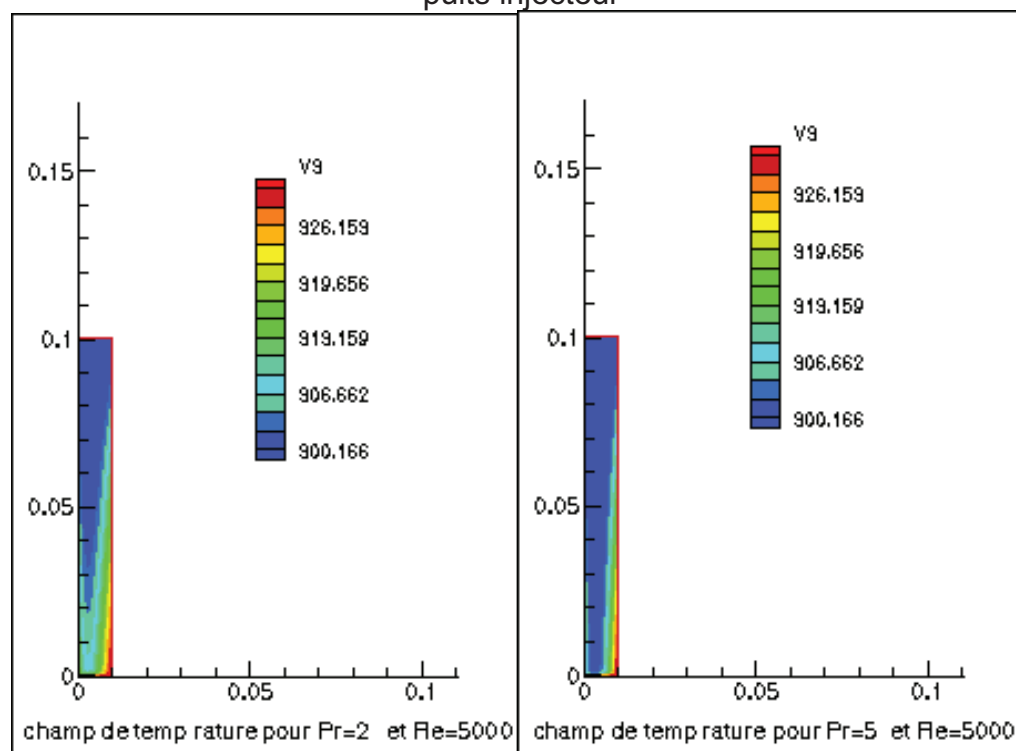


Figure IV.5 : Influence du nombre de Reynolds sur le champ de température pour un puits injecteur



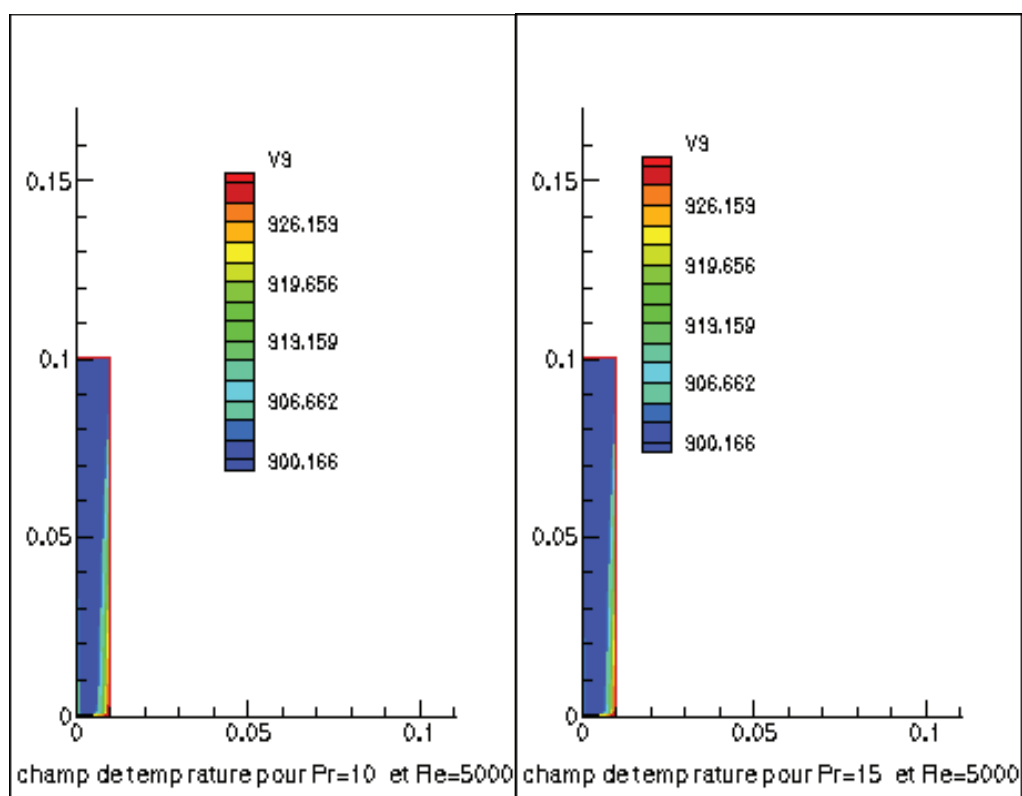
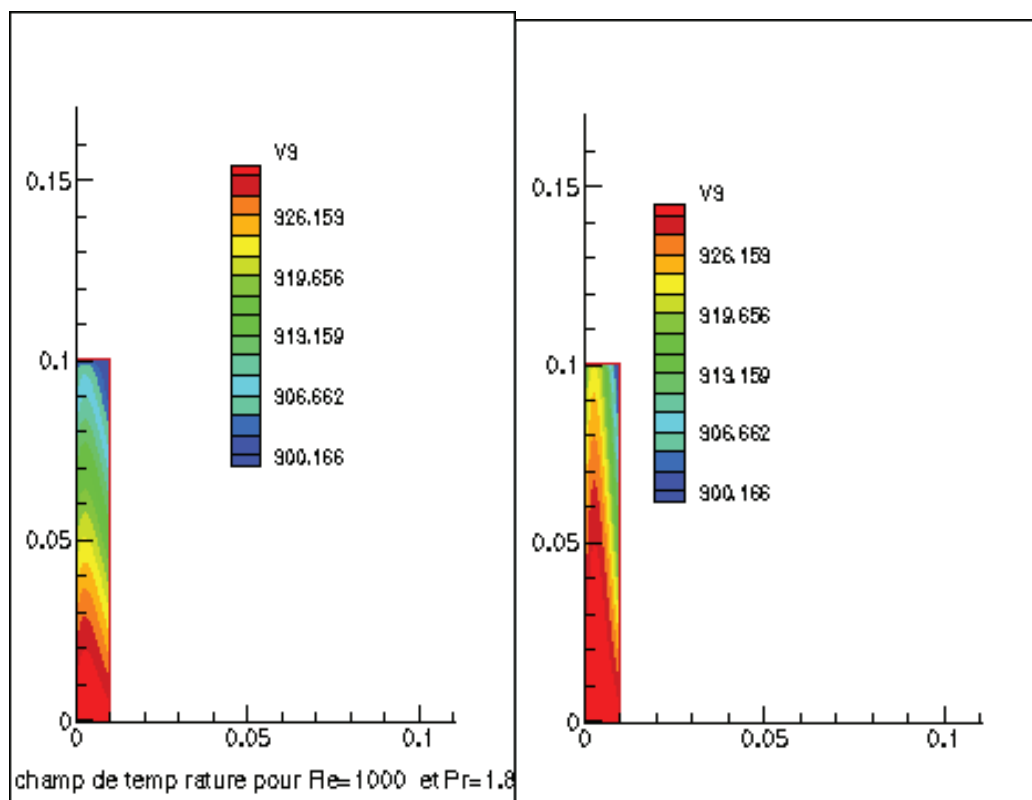


Figure IV.6 : Influence du nombre de Prandtl sur le champ de température pour un puits injecteur



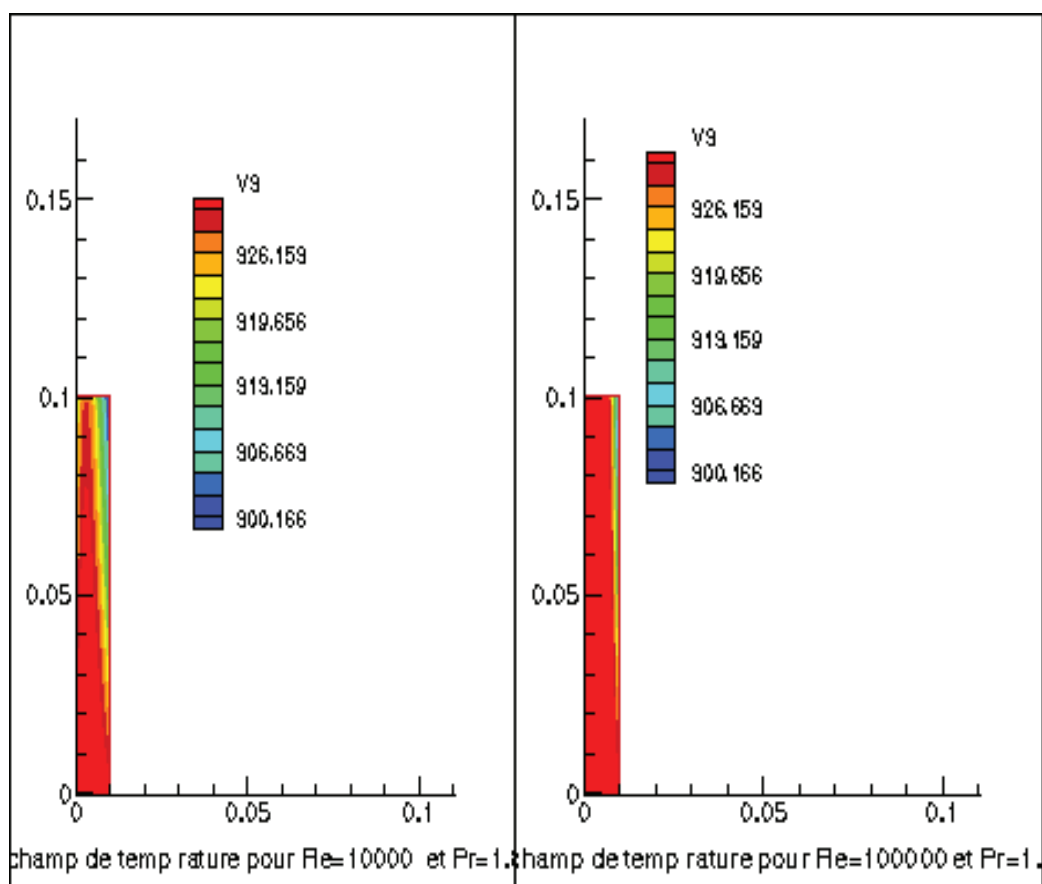
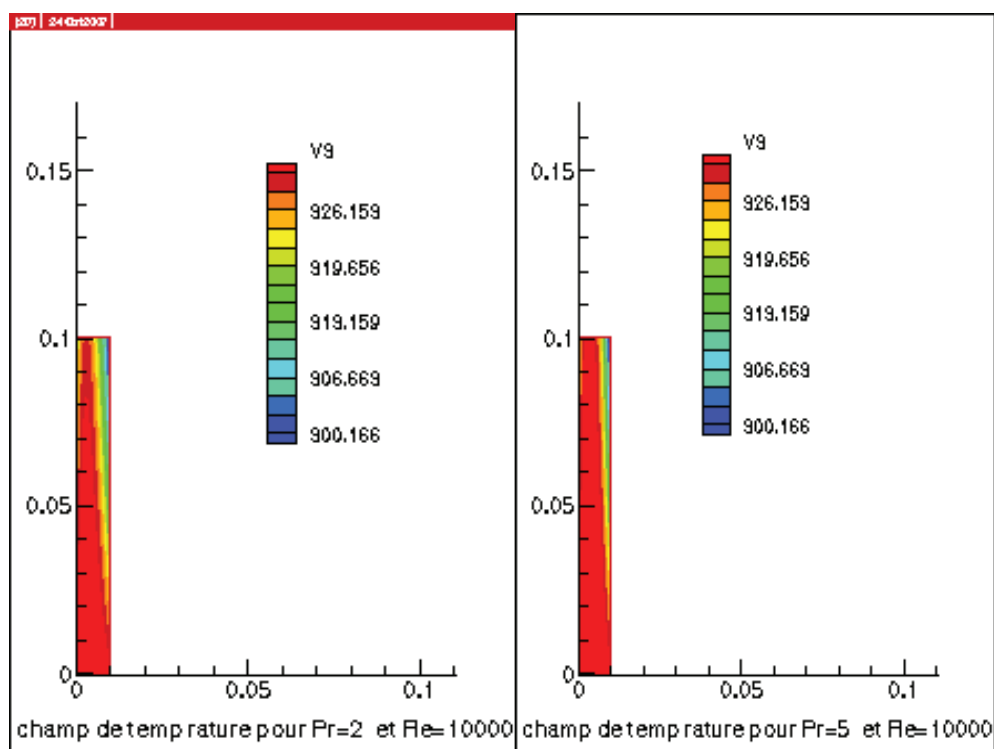


Figure IV.7 : Influence du nombre de Reynolds sur le champ de température pour un puits Producteur



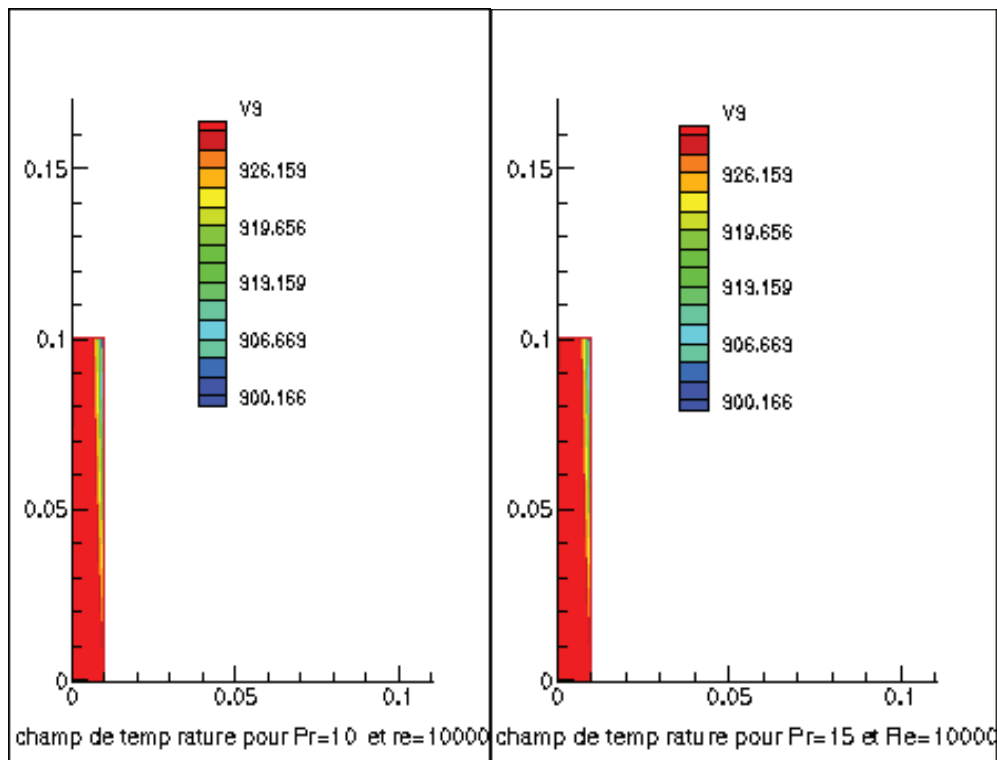


Figure IV.8 : Influence du nombre de Prandtl sur le champ de température pour un puits Producteur

D'après les figures précédents on peut conclure que le bonne champ de température pour un puits injecteur est atteint lors que la valeur de nombre de Reynolds et de celle Prandtl sont faible cas de la figure (IV.5. ou $Re = 5000$ et $Pr = 1.8$). quant au meilleur champ de température pour un puit producteur est obtenue lors la valeur de ces deux nombres sont élevé voir la figure (IV.8 $Re = 100000$ et $Pr = 15$).

Les résultats obtenus sur les figures (IV.6) jusqu a (IV.9) montrent que notre modèle répond d'une manière logique avec les variations de ces deux derniers nombres, plus en augmentant l'un de ces deux les profiles de la température deviennent plus accentués et cela indique que le transfert par convection est beaucoup plus important que celui par conduction, on se coïncide avec la définition du nombre de Péclet.

IV.4) Les applications sur l'écoulement dans le milieu poreux :

IV.4.1) initialisations de La charge et de champ de température :

Le choix d'une bonne initialisation des variables au début d'une simulation constituée une étape très importante pour avoir une convergence plus rapide pour le programme, pour ce la nous allons initialiser les champs de température et de charge par des champs radiaux autour de puits d'injection comme le montre la figure (IV.9).

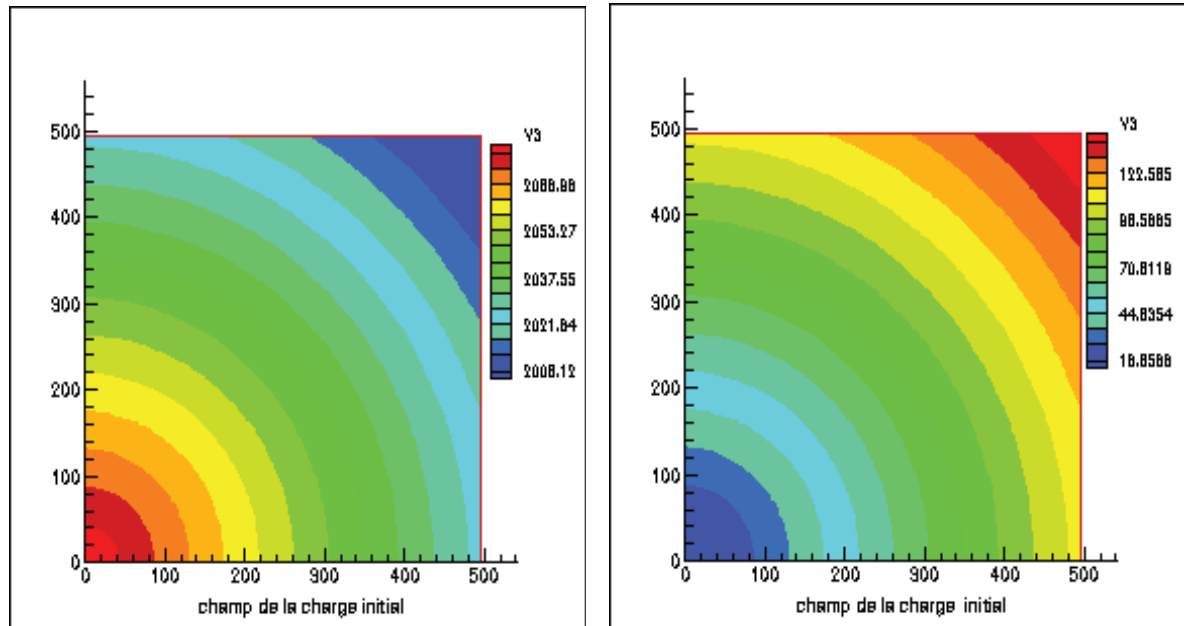


Figure IV.9 : le champ de température et de la charge initial

Nous fournissons dès à présent les valeurs de l'ensemble des données géométriques de milieu poreux et celle des propriétés du fluide qui resteront fixes quel que soit le cas test considéré.

La masse volumique	1000
la viscosité dynamique de référence	$1.16.10^{-3}$
Diamètre de puits d'injection	0.2
Diamètre de puits producteur	0.1
Température de puits producteur	10
Température du réservoir	150
Conductivité du fluide	0.58
Longueur et la largeur du milieu	500
La hauteur H	500

Tableau IV.2 : Ensemble des données du calcul.

IV.4.2) Optimisation du maillage :

Pour Optimisation du maillage nous avons testé le programme sur quatre valeurs du nombre de nœuds dans les deux directions $N_i=N_j=25,50,75$ et 100 nous avons obtenu le graphe suivant :

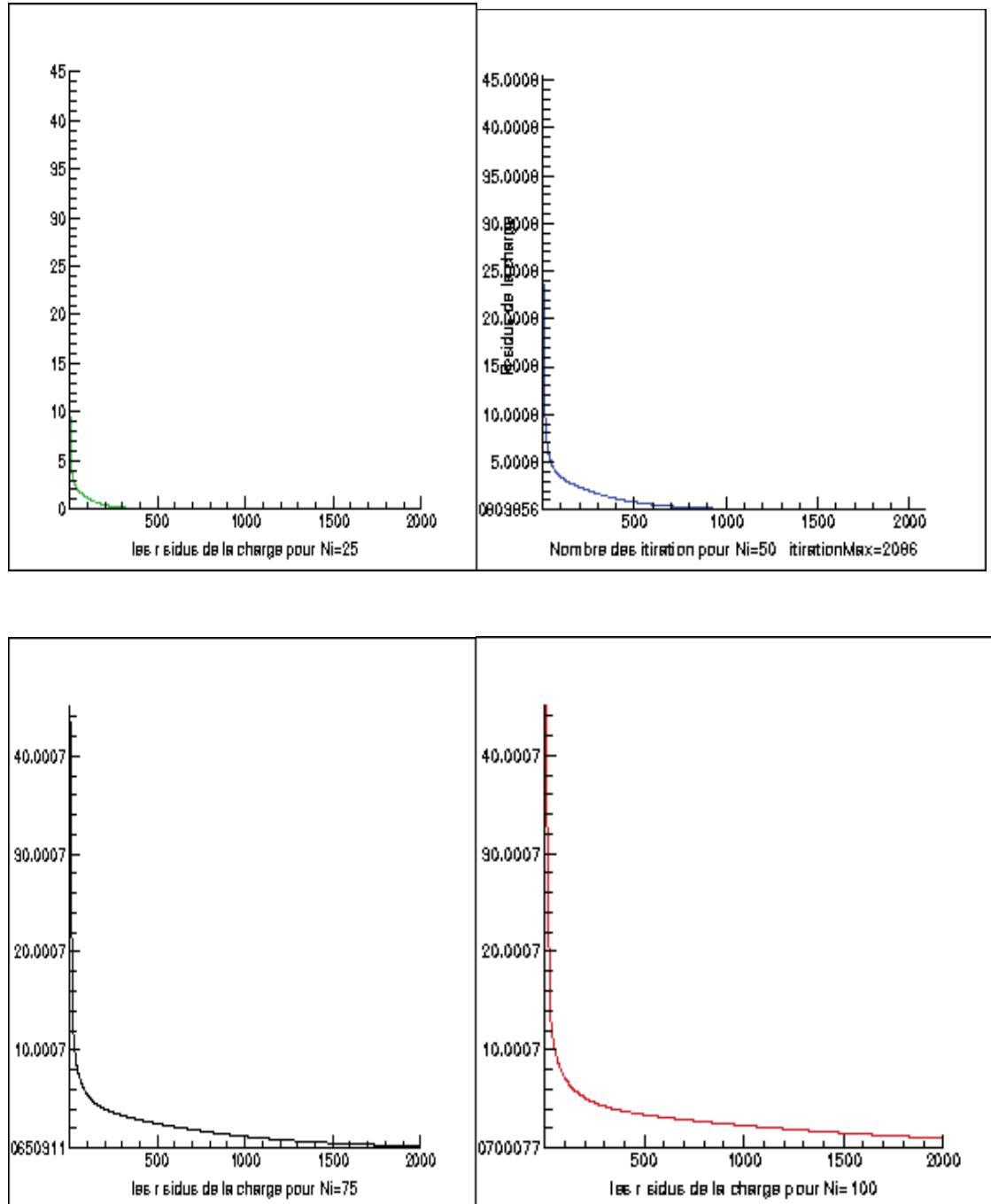


Figure IV.10 : Optimisation du maillage

Nous constatons que les courbes des résidus (Figure IV.10) ont la même forme et gardent les mêmes allures

Mais pour éviter l'encombrement du mémoire et minimiser le temps de calcul nous optent à choisir le nombre du maillage $N_i=N_j=50$ pour tout les restes des testes

IV.4.3) influence de la distance entre les deux puits :

Dans ce premier test on fixe les caractéristiques du milieu tel que la perméabilité à (200mD) et la porosité à 0.2 puis on varie la distance de 250 ,500 et 750 les résultats sont présentées par la figure (IV.11). On constate que le champ de température varie en fonction de la distance ce que montre que la conductance joue un rôle importante.

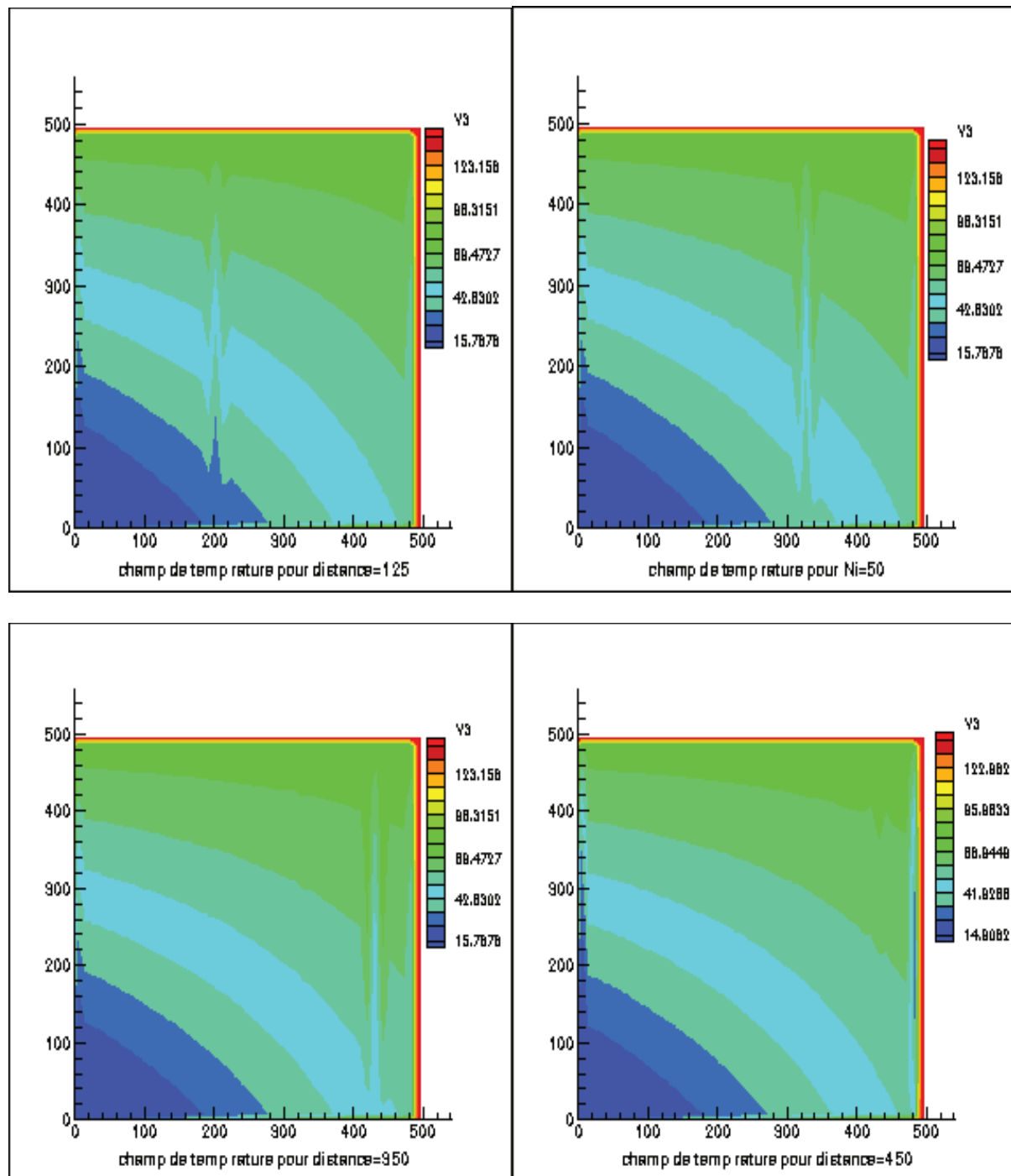


Figure IV.11 : influence de la distance sur le champ de la température

IV.4.4) influence de la perméabilité du milieu:

Dans ce deuxième test on fixe la distance entre les deux puits à 500 et on varie la perméabilité du milieu, les valeurs test sont 10mD, 50mD, 200mD et 500mD. les résultats de ce test sont présentés par la figure (IV.12).

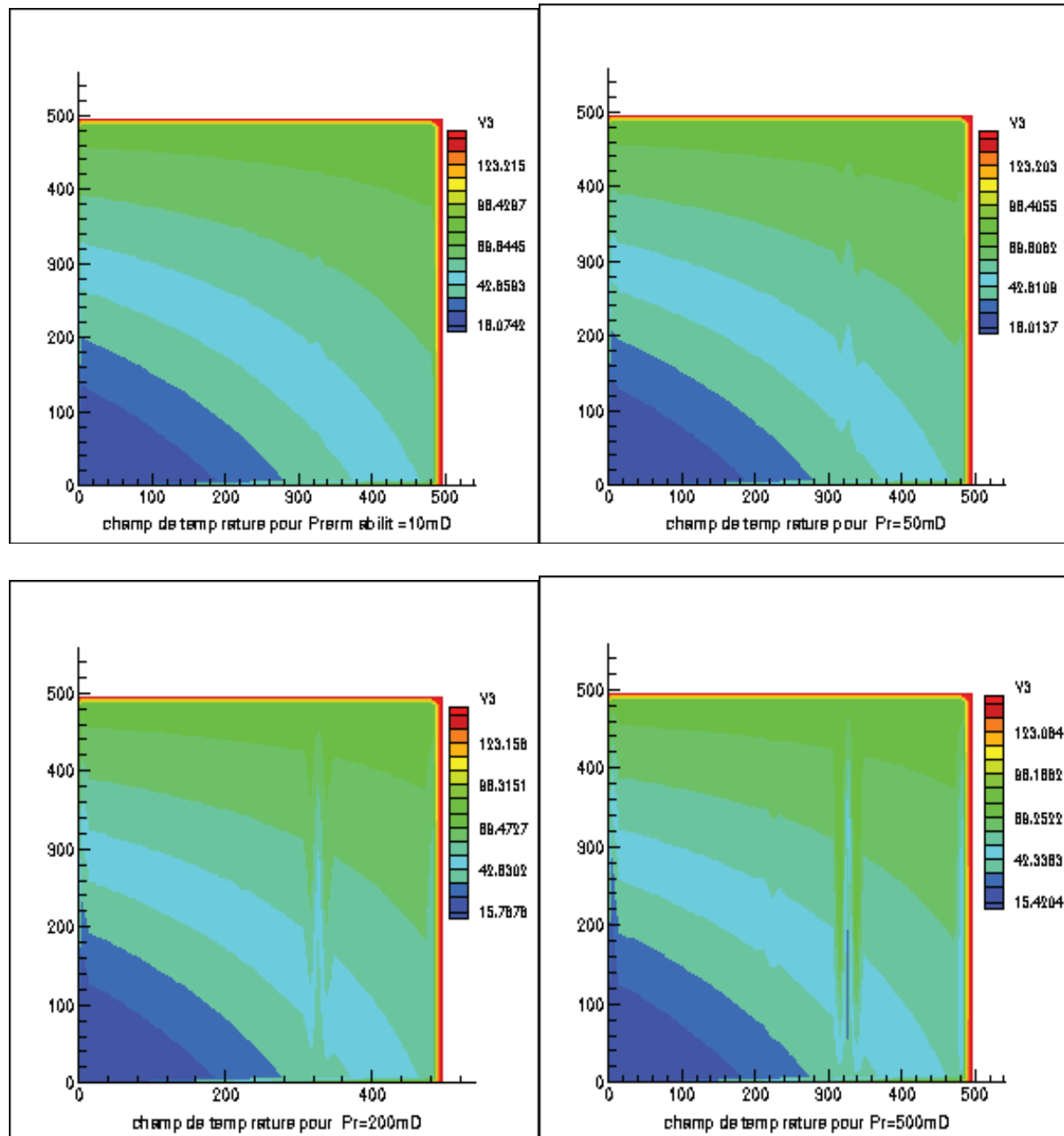


Figure IV.12 : influence de la perméabilité du milieu sur le champ de la température

Les résultats de test sur la perméabilité du milieu poreux jouent un rôle important sur le phénomène de transfert de chaleur, une perméabilité faible augmente le transfert par la conduction, par contre lorsque la perméabilité augmente, la convection thermique devient plus importante.

IV.4.5) influence de la conductivité du milieu:

Ce test concerne l'influence de la conductivité du milieu poreux sur le phénomène de transfert de la chaleur pour ce la nous allons fixe tous les paramètres, et on varie seulement la conductivité thermique du milieu de 0.5, 2.5 , 5 et 10 les résultats sont indiqué par la figure (IV.13).

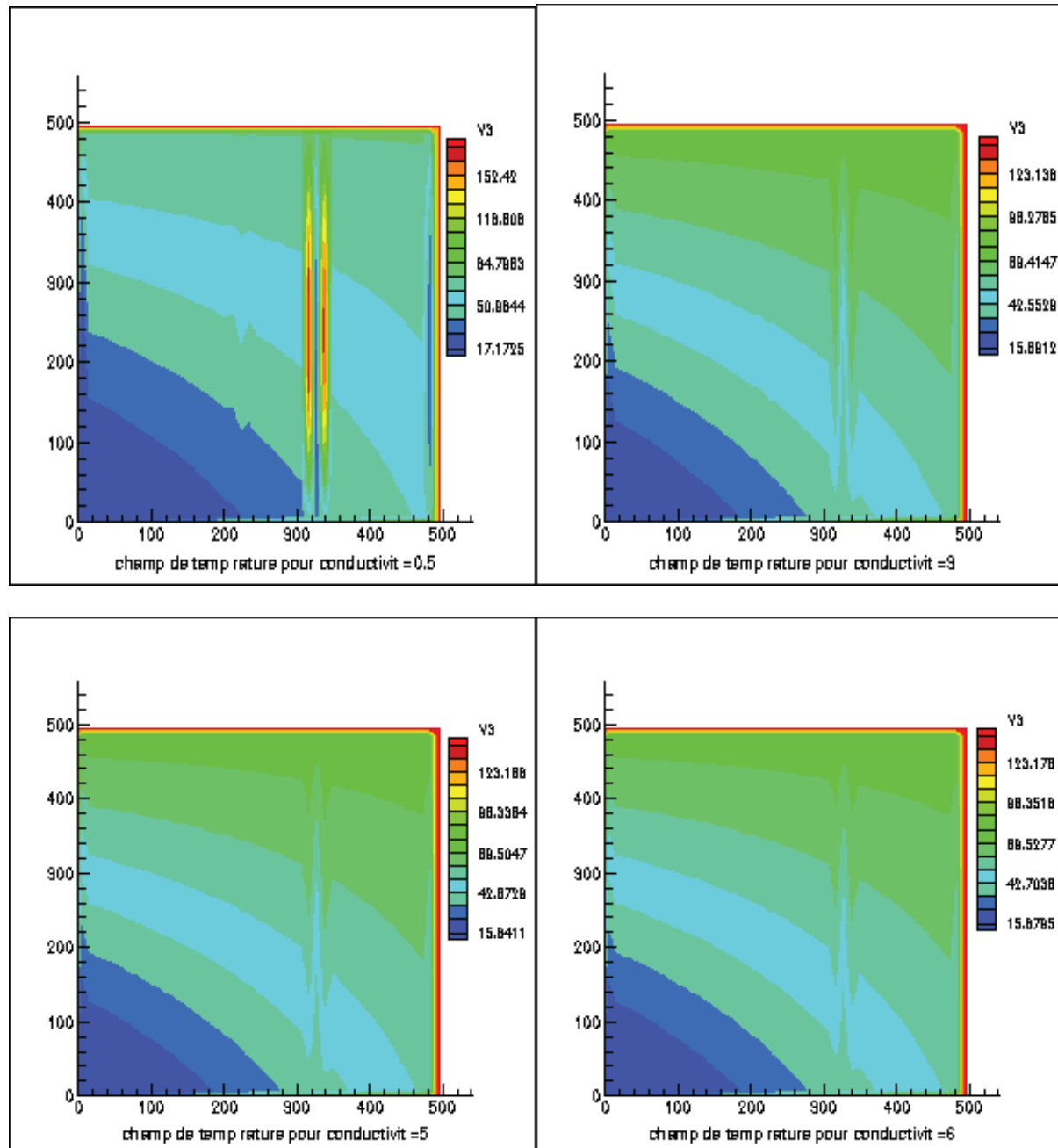


Figure IV.13 : influence de la conductivité du milieu sur le champ de la température

Nous constatons clairement que la conduction thermique augmente en fonction de la valeur de conductivité du milieu ce qui montre que notre modèle numérique donne des résultats satisfaisants.

Conclusion générale :

Dans cette thèse nous avons présente une étude sur un système de récupération de la chaleur. Ce système est constitue par deux conduites reliant par l'intermédiaire d'un réservoir souterraine soumise a un gradients de température en fonction de la profondeur.

En se basant sur certaines Hypothèses simplificatrices, nous avons développe les modèles mathématiques décrivant le phénomène de transfert de la chaleur dans un milieu poreux et dans une conduite axisymétrique. Pour résoudre les équations résultantes dans leur intégrité la méthode numérique basée sur les approches des volumes de contrôle finis a été utilisée dans la discrétisation du système d'équations. Dans la discrétisation, due types de maillage ont été utilisés : maillage décalé pour évaluer le champ de vitesse, et un maillage principal centré pour évaluer la pression (la charge) et le champ de température.

Le système linéaire représenté par une matrice tri diagonal est résolu par l'algorithme TDMA (TriDiagonal-Matrix Algorithm) qui consiste à effectuer un balayage du domaine de calcul ligne par ligne ou colonne par colonne.

Nous pouvons considérer que les modèles numériques présenter dans ce travail procurent des résultats hydrodynamiques particulièrement satisfaisants même si la confrontation avec des données expérimentales reste nécessaire. C'est le manque des moyens et d'informations qui nous a contraint de faire des confrontations sur le plan expérimental.

Nous sommes passés par de multiples étapes avant d'accéder à ce niveau de modélisation. Il serait trop long de les décrire une à une ; c'est pourquoi, nous livrerons celles qui nous paraissent les plus importantes tout en sachant que l'élaboration des modèles a nécessité un peu de patience face aux nombreux problèmes numériques. Tout d'abord, le choix des conditions aux limites s'est avéré très compliqué à effectuer et nous a pris énormément de temps. Ainsi, la prise en considération de la turbulence avec le modèle de Prandtl et la variation de la viscosité dynamique avec la température. La présentation des deux puits de la géométrie très petite devant un domaine plus large a pris aussi énormément des efforts et de temps.

Dans la perspective d'une confrontation avec des mesures expérimentales, ce sont des définitions théoriques qui ont tout d'abord été utilisées. Nos modèles répondent d'une manière satisfaisante à de nombreux tests numériques.

Enfin, nous souhaitons que ces programmes seront développés pour qu'il puisse proposer d'autres modèles physiques et schémas numériques avec lesquels l'utilisateur est normalement en mesure de modéliser la plupart de problèmes de base de la mécanique des fluides. En fait, qu'il propose des options qui déterminent la forme des équations de Navier-Stokes et des équations de transport des scalaires supplémentaires, la nature de l'écoulement forcé ou dans un milieu poreux, monophasique ou multiphasique (homogène ou non), turbulent ou laminaire, permanent ou non permanent, incompressible ou compressible, avec ou sans transfert de chaleur.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1]- T. Bernard et al, Perspectives énergétiques Tome VIII rapport présente a l'académie des sciences Paris (France) le 15/02/2005.
- [2]-R. Lefebvre, Ecoulement multiphase en milieux poreux Automne ;2006
- [3]- D.Pahud, Geothermal energy and heat storage Laboraorio di Energia, Ecologia ed Economia; 2002. site internet [htt:// w.w.w Leee.dct.supsi.ch/urec.htm](http://w.w.w.Leee.dct.supsi.ch/urec.htm) consulter en date de 05/2007.
- [4]- H. K. Versteeg & Wmalalase, An introduction to Computational Fluid Dynamics the Finite volume method, LONGMAN, Angland; 1995.
- [5] - P. Bia et al, L'exploitation des gisements d'hydrocarbures. Editions Technip Paris (France) ; 1974.
- [6]- D Takherist et L Hamdi, Anomalie thermique de in Salah conséquences possibles sur le potentiel pétrolier, contribution de sonatrach division exploration WEC (sonatrach schlumberger) (Algérie) ; 1995.
- [7]-C. Ouled Cheikh, Contribution à l'étude et établissement du bilan hydrologique de la cuvette de Ouargla (Sahara nord est septentrional), thèse de magister université Saad Dahleb Blida (Algérie) ; 2005.
- [8]-H. Askri et al, Géologie de l'Algérie, contribution de sonatrach division exploration et de centre de recherche et développement et division engineering et développement WEC (sonatrach schlumberger) (Algérie) ; 1995.
- [9]- E. Khaled, Géologie des provinces pétrolifères de L'Algérie, SNED Alger ; 1975.
- [10]- Etude du plan directeur générale de Développement des Régions Sahariennes, Etude élaborée par le Bureau National d'Etudes pour le Développement Rural, Bouchaoui-Chéraga- Tipaza (Algérie) ; Mai 1999.
- [11]- B. Gardel, Etude d'assainissement des eaux résiduaire, pluviale et d'irrigation de vallée de Ouargla Mesures complémentaire de lutte contre la remontée de la nappe phréatique, Mission III rapport final Ouargla (Algérie) ; décembre 2004.
- [12]- B Bouchkima L'eau de la nappe albienne du sud algérien, Recueil des communications des journées techniques et scientifiques sur la qualité des eaux du sud, Volume III EL Oued (Algérie) ; mai 2003.
- [13]- L. Mechri Simulation des écoulements et étude de la corrosion sur le concentrique dans un puit producteur d'albien, thèse de magister université Kasdi Merbah Ouargla (Algérie) ; 22/11/2003.
- [14]-M. Carlier, Hydraulique générale et appliquée Eyrolles (France) ; 1986.
- [15]-S. V.Patankar, Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Hemisphere Publishing Corporation, United States of América; 1980.

Références Bibliographiques

- [16]-J. Schmidt ; Transmission de la chaleur ; O.P.U ; (Alger) ; 1996
- [17]-Guy Barré, Introduction à la simulation numérique des gisements pétroliers, l'Université M'HAMED-Bougara de Boumerdes (Algérie) et l'Université de PAU et des Pays de L'adour (France) ; 2007.
- [18]-N. Doudi, Simulation des écoulements dans une cavité curviligne, thèse de magister université Kasdi Merbah Ouargla (Algérie); 19/06/2006.
- [19]-P. Chaumet, Ecoulement monophasique des fluides dans les milieux poreux, Tome 3 Technip (France) ; 1965.
- [20]-C.G. Jiang, M.Z. Saghir., M. Kawaji, K. Ghorayeb, Two-dimensional numerical simulation of thermo-gravitational convection in a vertical porous column filled with a binary fluid mixture, International Journal of Thermal Sciences 43 (2004) 1057–1065
- [21]-H. Hadim, M. North, Forced convection in a sintered porous channel with inlet and outlet slots, International journal of thermal sciences 44.(2005).33.42.
- [22]-D. Belgacem, F. Walid, B.J.Sadok, B Ali, Etude Numérique et Expérimentale des échanges thermique au sein d'un canal de milieu poreux et soumis a un chauffage partiel 12èmes Journées Internationales de Thermique Tanger, Maroc du 15 au 17 Novembre 2005.
- [23]-M. Sibony, J.Ci Mardon Analyse numérique II Approximations et équations différentielles, Hermann, octobre 1988.
- [24]-C. Le Baron, résolution de l'équation de conservation de l'énergie pour des écoulements multiphasiques et multi constituants Mémoire de master recherche Institut français du pétrole(France) ; 01/09/2005
- [25]- H. Babaamer, Fortran 77 Cours et exercices, Berti editions ; 1989.