



UNIVERSITE KASDI MERBAH-OUARGLA

N°d'ordre.....

N°de série...

FACULTE DES SCIENCES ET SCIENCES DE L'INGÉNIEUR

DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

Mémoire

En vue de l'obtention du Diplôme de Magistère en Physique

Option : Rayonnement et Plasmas

Par

ZOUARI AHMED Fatma

THÈME

**Interaction d'un rayonnement laser avec un gaz
atomique**

Soutenu publiquement le 02/07/2009

Devant le jury :

Président	K. E. AIADI	MCA	Univ. Ouargla
Rapporteur	M. T. MEFTAH	Pr	Univ. Ouargla
Examineur	S. MESSAADI	MCA	Univ. Batna
Examineur	F. KHELFAOUI	Pr	Univ. Ouargla
Invité	M. A. BENBITOUR	MA	Univ. Ouargla

Résumé

Ce travail a été consacré à l'étude de la dynamique d'un atome soumis à un champ électromagnétique extérieur cohérent classique. Sous l'effet de l'absorption, l'atome émet un rayonnement électromagnétique quantifié dû essentiellement à l'émission spontanée. L'étude de la dynamique interne de cet atome, c'est-à-dire l'évolution entre l'état fondamentale et l'état excité, a montré l'existence d'une force radiative sur l'atome due à l'absorption atomique du rayonnement, alors que la moyenne des forces dues à l'émission est nulle.

Pour décrire la dynamique externe de l'atome (dans l'espace des impulsions) en partant de la dynamique interne, il s'est avéré qu'il y a une analogie avec l'étude du mouvement Brownien. L'atome se voit alors soumis à un grand nombre de collisions avec les particules légères (les photons) qui se traduisent par une force de freinage. L'équation du mouvement de l'atome est bien celle du mouvement Brownien avec un coefficient de friction β , dû aux forces radiatives, et un coefficient de diffusion D dû aux fluctuations créées par l'émission spontanée du rayonnement.

Lors du refroidissement Doppler, l'atome interagit avec le rayonnement par un réglage de fréquence légèrement vers le rouge par rapport à la fréquence de transition atomique.

La température limite d'un gaz d'atomes en interaction avec le rayonnement est définie, lorsque le système (atome-rayonnement) atteint l'équilibre thermodynamique et où les vitesses des atomes sont suffisamment faibles, par une relation entre les coefficients de diffusion D et de friction β appelée la relation d'Einstein. Cette relation est d'ordre zéro en vitesse.

Dans ce travail nous avons étudié l'effet des faibles vitesses des atomes sur la température limite d'un gaz d'atomes soumis au refroidissement Doppler, dont les coefficients D et β sont pris par leurs moyens.

Il est constaté, d'après l'étude de variation de la température limite en fonction de désaccord du rayonnement, que cette étude a une bonne convergence avec l'autre étude pour les petits désaccords en insistant sur l'apparition d'un effet d'échauffement provoqué par l'insertion des faibles vitesses des atomes. Cependant il apparait un comportement étrange pour les grands désaccords qui peut être interprété par l'absence de thermalisation du système.

الملخص

يهتم هذا العمل بدراسة حركية ذرة واقعة تحت تأثير إشعاع كهرومغناطيسي متناسق خارجي كلاسيكي. بفعل امتصاص الذرة للإشعاع ينتج لنا إشعاع كهرومغناطيسي كمومي ناتج بالدرجة الأولى عن الإصدار التلقائي. إن دراسة الحركية الداخلية لهذه الذرة، و المتمثلة في التطور الداخلي بين الحالة المثارة والحالة الأساسية، أثبتت وجود قوى فاعلة على المدى الطويل ناتجة عن امتصاص الذرة للإشعاع، في حين متوسط القوى الناتجة عن إصدار الإشعاع منعدم.

عند الانتقال من الحركية الداخلية للذرة إلى حركيتها الخارجية في فضاء الاندفاعات، ظهر تماثل عميق بين حركة الذرة في حقل الإشعاع و الممثل بالفوتونات و الحركة العشوائية لجسيم ثقيل يسبح في خزان من الجسيمات الخفيفة، و هذا ما يعرف بالحركة البراونية. تخضع الذرة لعدد كبير من التصادمات مع الجسيمات الخفيفة أو الفوتونات التي تطبق عليها قوى كبح على المدى الطويل. يظهر في معادلة الحركة للجسيم البراوني أو الذرة معامل احتكاك β ناتج عن القوى الإشعاعية التي يسببها امتصاص الإشعاع ، ومعامل تبعثر D ناتج عن التراجحات التي يسببها الإصدار التلقائي للإشعاع.

يعتبر تبريد دوبلر أحد الطرق الخاصة لتفاعل ذرة مع الإشعاع، حيث تحضر تواترات الإشعاعات المسلطة على غاز من الذرات بانزياح نحو الأحمر للانتقال الذري المستهدف.

تحسب درجة الحرارة الحديدية لغاز من الذرات في تفاعل مع الإشعاع عندما يصل النظام (ذرات-إشعاع) إلى التوازن الديناميكي-الحراري و حيث تصبح سرعات الذرات ضعيفة بما فيه الكفاية، بعلاقة بين معامل التبعثر D و معامل الاحتكاك β تسمى علاقة اينشتين، تهمل في هذه العلاقة السرعات الضعيفة للجسيمات المتوازنة ديناميكيا-حراريا مع الإشعاع.

درسنا خلال هذا العمل تأثير السرعات الضعيفة على درجة الحرارة الحديدية لغاز من الذرات خاضع لتبريد دوبلر، بحساب متوسطي معاملي التبعثر D و الاحتكاك β .

في ضوء النتائج المتحصل عليها في دراسة تغير درجة الحرارة الحديدية بدلالة انزياح تواتر الإشعاع، ظهر تقارب واضح بين هذه الدراسة و الدراسة الأخرى في مجال الانزياحات الصغيرة، مع ظهور فعل تسخين ناتج عن تأثير السرعات الضعيفة، بينما ظهر في مجال الانزياحات الكبيرة تصرف غريب قد يعزى إلى خروج النظام من حالة التوازن الحراري.

Table des matières

1	Introduction	7
2	Manipulation d'atomes par laser	10
2.1	Forces radiatives	11
2.1.1	La pression de radiation	11
2.1.2	La force dipolaire	13
2.2	Refroidissement d'atomes par laser	14
2.2.1	Refroidissement Doppler dans un référentiel en mouvement	14
2.3	Piégeage des atomes	16
2.3.1	Piégeage dipolaire	17
2.3.2	Piégeage magnétique	18
2.3.3	Piégeage magnéto-optique	20
2.4	Refroidissement évaporatif	21
2.5	Cas de l'atome de rubidium	23
2.6	La condensation de Bose-Einstein	26
3	Interaction atome-champ laser dans l'approximation de la matrice densité semiclassique, et les forces radiatives exercées	29
3.1	L'interaction atome-laser dans le cadre de l'approximation semiclassique	30
3.1.1	L'approximation semiclassique	30
3.1.2	La matrice densité du système	33
3.1.3	Hamiltonien mixte semiclassique-quantique du système	34
3.1.4	L'approximation du champ tournant	38

3.2	L'équation pilote	39
3.2.1	L'approximation de Markov	43
3.2.2	L'approximation de <i>Born</i>	44
3.2.3	L'approximation des vitesses de variation indépendantes	45
3.3	Les forces radiatives	48
3.4	L'interprétation des forces radiatives	51
3.4.1	La force dissipative ou pression de radiation	51
3.4.2	La force réactive ou force dipolaire	52
4	La température limite de refroidissement d'un gaz atomique en interaction avec un champ laser	55
4.1	Le mouvement Brownien	57
4.1.1	Le modèle de Langevin	57
4.1.2	L'équation de Langevin	57
4.1.3	La force de Langevin	58
4.1.4	L'évolution de la vitesse	59
4.1.5	L'évolution de la fonction de distribution de la vitesse	60
4.2	L'équation pilote du mouvement Brownien	62
4.2.1	L'équation de Fokker-Planck pour le mouvement Brownien	64
4.3	La température limite de refroidissement du gaz atomique en équilibre thermodynamique	66
4.3.1	L'équilibre thermodynamique	66
4.3.2	Relation d'Einstein	67
4.3.3	La température limite du refroidissement Doppler	68
5	Résultats et discussions	70
5.1	La température limite Doppler à l'équilibre thermodynamique	70
5.1.1	L'effet d'échauffement des faibles vitesses	70
5.1.2	L'effet de la masse m	73
5.1.3	L'effet du paramètre de saturation G	75
5.2	La fonction de distribution des vitesses	76

Dédicace

*J'offre ce modeste travail à ceux et celles que j'aime, notamment à ma mère,
la chandelle de ma vie et à mon père, pour son suivi et son soutien moral.*

A mes frères. A mes soeurs.

*Ainsi qu'à tous les amis et toutes les amies qui m'ont encouragé à persévérer,
et à toute ma famille.*

Remerciement

Avant tout, je tiens à remercier Dieu tout puissant de m'avoir donné la force, le courage et les moyens a fin de pouvoir accomplir ce travail.

Ce travail a été effectué au Laboratoire de Développement des Energies Nouvelles et Renouvelables dans les Zones Arides et Sahariennes (LENREZA) du département de physique de l'université de KASDI Merbah, Ouargla; pendant la période 2008-2009. Je remercie Monsieur le Professeur M. T. MEFTAH et Monsieur A. BOUKRAA de m'y avoir accueilli.

Pour la proposition et la réalisation de ce mémoire de Magistère, je tiens à remercier mon directeur de recherches Monsieur M. T. MEFTAH, qui m'a montré la valeur réelle et le secret de la tâche. Je lui exprime aujourd'hui ma profonde gratitude.

Je remercie également :

Monsieur K. E. AIADI, maître de conférences à l'université de Ouargla, pour m'avoir honorer d'accepter de présider le jury.

Monsieur F. KHELFAOUI, professeur de l'université de Ouargla, de faire partie du jury. Je lui remercie pour l'aide, les orientations et son suivi tout au long de mes études universitaires.

Monsieur S. MESSAADI, maître de conférences de l'université de Batna, de m'avoir honorer de juger ce travail et de participer au jury de soutenance.

Monsieur S. CHIHI, maître de conférences de l'université de Ouargla. Je lui rend hommage et déférence pour l'aide, la sollicitude, les orientations et son suivi tout au long de mes études universitaires.

La partie numérique de ce travail n'aurait pas pu être menée à bien sans l'aide efficace de mes collègues de l'Équipe Optoélectronique du Laboratoire de Développement des Energies Nouvelles et Renouvelables dans les Zones Arides et Sahariennes (LENREZA) : M. L. KADRI et S. BENHAMIDA, je les envoie mes remerciements les plus chaleureux.

Bien d'autres personnes m'ont aidé tout au long de ce travail de leurs observations et de leurs conseils. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma gratitude.

ZOUARI AHMED Fatma.

Chapitre 1

Introduction

L'étude des propriétés fondamentales des atomes individuels et notamment les propriétés quantiques, est l'un des rêves des physiciens qui aimeraient voir ces atomes à la fois indépendants, où les atomes isolés les uns des autres, et immobiles, alors plus facilement observables. La difficulté inhérente à l'étude des particules atomiques vient de ce qu'un tel état de la matière ne se rencontre pas couramment dans la nature. Même dans l'état gazeux dilué, où les atomes ont des interactions généralement négligeables, l'agitation thermique à température ambiante les fait bouger de manière complètement erratique à des vitesses pouvant atteindre 1000m/s [35, 48]. Alors il est difficile d'observer ou manipuler ces atomes individuellement. Par contre, dans l'état solide, les atomes sont bien rangés et quasi-immobiles mais, à cause des fortes interactions mutuelles qui assurent la cohésion cristalline, les atomes perdent leur individualité, ainsi le comportement du solide ne renseigne que sur les propriétés collectives de ses atomes [35].

L'idée d'utiliser l'action de la lumière pour manipuler des particules neutres, a été proposée la première fois, par *Alfred Kastler* en 1950, qui proposa de refroidir, ou d'immobiliser, des particules atomiques dans l'état gazeux par l'effet *lumino-frigorifique* [25, 35]. Cette méthode reste irréalisable jusqu'à l'avènement du laser dans les années 1960 qui l'a rendu réaliste [35, 39]. Maintenant par des ondes lumineuses, on peut agir mécaniquement sur les atomes pour les ralentir à des vitesses de quelques millimètres par seconde, aussi pour les piéger et pour les manipuler. Ainsi le refroidissement d'atomes par laser devient un domaine de recherche très avancé [39].

Les applications pratiques des atomes refroidis par les méthodes de refroidissement sont nombreuses. L'horloge atomique la plus précise du monde utilise des atomes de Césium refroidis par laser ; aussi par ces atomes les idées de De Broglie ont été réalisées par l'interférométrie atomique qui permet, à son tour, des mesures d'effets inertiels comme la rotation de la terre, ou des effets gravitationnels comme les variations de la pesanteur liées à la composition du sous-sol, avec une précision presque idéale par rapport à celle des systèmes traditionnels [39].

Mais parmi les applications du refroidissement d'atomes par laser, l'application la plus spectaculaire est celle des *condensats de Bose-Einstein* gazeux, qui a été découvert par *E. Cornell, C. Wieman, et W. Ketterle* . Ils ont réalisé, à partir d'échantillons d'atomes refroidis et piégés par laser, l'apparition de la transition de phase prévue par Einstein en 1924, et qui est caractérisée par l'apparition d'une population atomique macroscopique où un grand nombre d'atomes se trouvent dans l'état quantique fondamental [2, 9, 36, 46]. Ces découvertes ont reçu en 2001 le *prix Nobel de Physique* [3]. Grâce aux techniques de refroidissement d'atomes, on peut réaliser alors des gouttes d'atomes condensés dans un régime dilué contenant 10^6 atomes à une température $T = 100nk$, à partir de laquelle, il est possible d'extraire un faisceau d'ondes de matière cohérent, ce qu'on l'appelle laser à atomes [14].

Dans ce travail, le deuxième chapitre est consacré à une étude générale des aspects physiques de l'interaction d'un atome avec un champ cohérent. Aussi quelques généralités sur le refroidissement et le piégeage des atomes et sur la condensation de *Bose-Einstein*, sont vus d'une manière simple pour situer notre sujet par rapport aux diverses questions interférentes avec l'interaction laser-atome.

Le troisième chapitre étudie quantitativement l'interaction atome-champ, où le modèle de l'interaction mixte semiclassique-quantique a été choisi pour traiter l'évolution de la matrice densité semiclassique de ce système. On déduit à la fin de ce chapitre, à partir des expressions des éléments de la matrice densité évolués, les forces radiatives exercées sur les atomes par le champ cohérent.

Dans le quatrième chapitre, la dynamique externe de ces atomes dans l'espace des phases a été étudiée par le modèle du mouvement Brownien, où l'atome est considéré comme une particule lourde qui immerge dans un bain de particules légères qui sont les particules du

champ (les photons). Ceci conduit l'atome, après des collisions avec les photons, à acquérir des vitesses de plus en plus basses : le mouvement de l'atome est alors décrit par une équation type Fokker-Planck avec le coefficient de friction β dû aux effets des collisions, et le coefficient de diffusion D dû à l'émission spontanée qui provoque des fluctuations dans l'espace des phases des atomes. Le refroidissement Doppler est un cas particulier de l'interaction d'atomes avec un rayonnement laser dont la fréquence est légèrement inférieure à celle de la transition atomique étudiée. La température du système atomique interagissant avec le rayonnement laser, est définie lorsque ces atomes atteignent l'équilibre thermodynamique avec les photons par la relation d'*Einstein* qui est une relation d'ordre zéro en vitesse.

Dans ce travail nous avons tenu compte des faibles vitesses (les ordres supérieurs en vitesse), et nous avons montré que leur effet sur la variation de la température limite en fonction des désaccords des ondes peut devenir important dans certain régime de désaccord.

Dans le cinquième chapitre nous avons largement discuté les résultats du refroidissement pour différents cas de paramètres physiques en insistant sur l'apparition d'un effet d'échauffement provoqué par l'insertion des faibles vitesses des atomes.

Chapitre 2

Manipulation d'atomes par laser

Dans ce chapitre il est intéressant de rappeler les aspects de base de la manipulation d'atomes par laser, qui font appel à toutes nos connaissances sur l'interaction entre un atome ou une assemblée d'atomes et la lumière. Absorption, émission stimulée et émission spontanée sont les mécanismes de base des forces radiatives [9, 12, 20, 39, 50].

Il est plus facile de donner une image physique simple pour les forces radiatives et aussi d'en donner le traitement théorique correspondant dans un des modèles de l'interaction lumière-matière, soit le modèle semi classique où la lumière est considérée comme une onde électromagnétique classique, ou le modèle quantique où la lumière est quantifiée et considérée comme formée de photons qui transportent de la quantité de mouvement [35, 39].

Le modèle semi classique est particulièrement fructueux pour introduire deux types de forces radiatives : la pression de radiation résonnante et la force dipolaire. Mais le modèle semi classique donne une image simple et fructueuse de la force dipolaire, cependant le modèle quantique de la lumière fournit l'interprétation la plus simple de la pression de radiation résonnante. Aussi le modèle quantique est invoqué pour comprendre les limites du refroidissement radiatif, en effet l'émission spontanée est un phénomène fondamentalement lié à la quantification du rayonnement, provoque des fluctuations responsables d'un chauffage qui vient limiter la course aux basses températures, à des valeurs déjà spectaculaires puisqu'on est dans la gamme du microkelvin, à $10^{-6}K$ du zéro absolu [2].

2.1 Forces radiatives

2.1.1 La pression de radiation

En électromagnétisme classique, tout flux d'énergie transportée par une onde est associé un flux de quantité de mouvement [9], avec le rapport :

$$(Energie)/(Quantité\ de\ mouvement) = c \quad (2.1)$$

où c est la vitesse de la lumière.

Il en résulte que toute absorption d'énergie par un objet s'accompagne d'une variation de la quantité de mouvement de l'objet, ce qui traduit l'existence d'une force exercée par le rayonnement appelée : pression de radiation [35, 48].

Dans la vie quotidienne cette force est d'une grandeur insignifiante, cependant dans d'autres situations ses effets peuvent être spectaculaires [9, 48].

On peut aisément estimer la force exercée sur des atomes dans un faisceau laser, dont la fréquence lumineuse ν correspond à l'écart d'énergie entre deux niveaux atomiques a et b [9, 39, 48, 50]. L'atome supposé initialement immobile absorbe un photon, et acquiert donc une quantité de mouvement :

$$M \vec{V} = \frac{h\nu}{c} \vec{u} = \hbar \frac{\omega}{c} \vec{u} \quad (2.2)$$

où : \vec{u} est le vecteur unitaire de la direction du faisceau, M et \vec{V} sont la masse et la vitesse de l'atome.

Le changement de vitesse correspondant :

$$\vec{V} = \frac{\hbar \vec{k}}{M} \quad (2.3)$$

est appelé vitesse de recul, que l'on peut noter \vec{V}_R .

Au bout d'un temps moyen τ , la durée de vie, l'atome se désexcite et réémet un photon de même fréquence [2, 9]. En effet, au cours d'un cycle élémentaire, un photon laser disparaît, et son impulsion $\hbar \vec{k}$ est transféré à l'atome, tandis qu'un photon diffusé apparaît, d'impulsion $\hbar \vec{k}_{diff}$ [2]. La variation d'impulsion atomique pendant un cycle de fluorescence est donc :

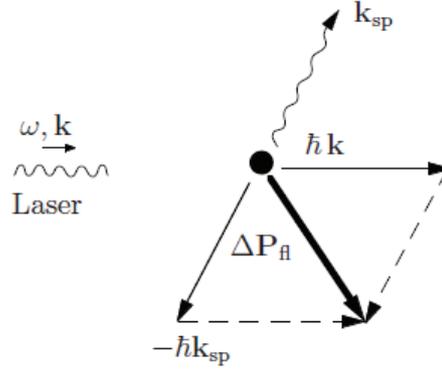


FIG. 2-1 – Echanges d’impulsions entre l’atome et les photons dans un cycle de fluorescence élémentaire [2].

$$\Delta \vec{P}_{cycle} = \hbar \vec{k} - \hbar \vec{k}_{diff} \quad (2.4)$$

Lorsque le processus se répète, le terme $\hbar \vec{k}$ associé au photon laser incident est le même à chaque cycle, mais la direction du photon diffusé est aléatoire, avec un diagramme de rayonnement symétrique par rapport à l’origine des coordonnées [2, 48], de sorte que le recul $-\hbar \vec{k}_{sp}$ dû au photon diffusé se moyenne à 0, et l’impulsion reçue par l’atome est dirigée suivant le vecteur d’onde \vec{k} du laser [2]. Alors en moyenne sur un grand nombre de cycles de fluorescence, on a donc :

$$\langle \vec{k}_{diff} \rangle = \vec{0} \quad (2.5)$$

d’où une variation d’impulsion atomique moyenne par cycle :

$$\langle \Delta \vec{P}_{cycle} \rangle = \hbar \vec{k} \quad (2.6)$$

La variation d’impulsion atomique moyenne par seconde vaut donc :

$$\left\langle \frac{d}{dt} \vec{P}_{at} \right\rangle = N \hbar \vec{k} \quad (2.7)$$

où N est le nombre de cycles de fluorescence, absorption et réémission spontanée, par seconde

[2].

Remarque

Les cycles absorption-émission stimulée ne sont pas pris en compte. En effet, dans le cas d'une seule onde plane, le transfert global d'impulsion est nul dans un tel cycle [2], puisque :

$$\Delta\vec{P}_{sti} = -\Delta\vec{P}_{abs} = \hbar\vec{k} \quad (2.8)$$

2.1.2 La force dipolaire

La pression de radiation n'est pas la seule manifestation mécanique de la quantité de mouvement du photon. Il existe aussi un autre type de force, nommée : force dipolaire, Elle n'est pas liée à l'absorption, mais à la diffusion du rayonnement [9, 20]. Cette force est liée à l'interaction du rayonnement avec le moment dipolaire qu'elle induit dans la matière [1, 20, 48]. Cette propriété est très importante, car à partir de laquelle il est possible de piéger des atomes au point de focalisation d'un faisceau laser de fréquence désaccordé négativement (vers le rouge) de la transition atomique ($\omega < \omega_0$) [1, 12].

L'interprétation la plus simple de la force dipolaire repose sur l'excitation forcée, sous l'effet du champ incident, d'un dipôle atomique induit oscillant à la fréquence ω . Ce dipôle rayonne lui-même dans tout l'espace un champ à fréquence ω . On peut considérer que l'atome passe virtuellement dans le niveau excité, puis rayonne une lumière à la fréquence de l'onde incidente dans des directions différentes de celle de l'onde incidente [1].

Ces effets sont actuellement largement utilisés pour manipuler les atomes de les refroidir et de les piéger.

Remarque

les ω sont les pulsations du champ, mais lors de l'usage peu courant de ce dernier terme, on utilise le mot de fréquence pour les désigner.

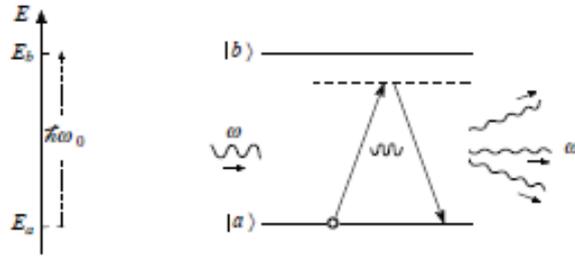


FIG. 2-2 – L’amplitude de l’onde incidente diminue, tandis qu’il y a apparition de lumière à la fréquence de l’onde incidente dans des directions différentes de celle de l’onde incidente [1].

2.2 Refroidissement d’atomes par laser

Les vitesses des atomes qui peuvent être de l’ordre de 1000 m/s même dans l’état gazeux dilué, rendent difficile l’observation ou la manipulation des particules atomiques [35]. Pour contourner cette difficulté, plusieurs techniques ont été mises en œuvre.

L’utilisation de la lumière permet également, par la pression de radiation, de ralentir des atomes en phase gazeuse à des vitesses de quelques millimètres par seconde, ou bien de les refroidir qui signifie de diminuer leur agitation thermique [9].

Un atome du jet, de vitesse initiale $v \sim 1000 \text{ m/s}$, peut être excité en absorbant un photon du laser, encaissant son impulsion $\hbar \vec{k}_L$. Ensuite, l’atome retourne dans son état fondamental en émettant spontanément un photon. Cette émission ayant une direction aléatoire, de sorte que le transfert moyen d’impulsion correspondant est nul. Le cycle absorption-émission spontanée peut ensuite se répéter. Finalement, l’atome est ralenti à des vitesses de l’ordre de 10 m/s au bout de quelques dizaines de milliers de cycles. En réalité cette situation est un peu plus compliquée car il faut tenir compte de l’effet Doppler [39].

2.2.1 Refroidissement Doppler dans un référentiel en mouvement

Le principe du refroidissement Doppler a été proposé dès 1975, et la première mélasse optique utilisant des atomes neutres fut fabriquée en 1985 [2, 39]. Pour réaliser une mélasse, on utilise trois paires de faisceaux laser se propageant en sens opposé, une par direction de l’espace, et

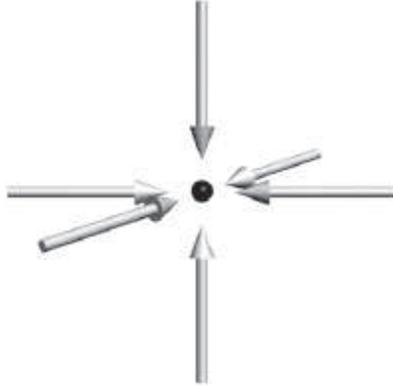


FIG. 2-3 – Mélasse optique à trois dimensions [2].

la figure (2-3) illustre une mélasse optique où un atome, placé dans trois paires d'ondes contre-propageantes suivant trois axes orthogonaux, voit sa vitesse amortie très rapidement au bout d'un temps d'amortissement inférieur à la milliseconde [2].

Ces faisceaux sont désaccordés vers le rouge de la transition atomique, c'est-à-dire que la fréquence des lasers est légèrement inférieure à la fréquence de résonance atomique. Si la vitesse atomique est non nulle, l'effet Doppler induit un déséquilibre entre tous deux faisceaux contre-propageants, de sorte qu'un atome en mouvement absorbera préférentiellement des photons du faisceau se propageant dans le sens opposé à sa vitesse où l'*effet Doppler* venant dans ce cas compenser le désaccord du faisceau. L'atome encaissera alors les impulsions de ces photons et sera donc ralenti [2, 9, 39].

Principe de refroidissement Doppler

On considère un atome soumis à une onde électromagnétique de fréquence ω et de vecteur d'onde :

$$\vec{k} \quad (k = \omega/c) \quad (2.9)$$

Cet atome étant en mouvement à la vitesse v , dans une direction opposée à celle d'onde électromagnétique, va percevoir une onde ayant une autre fréquence :

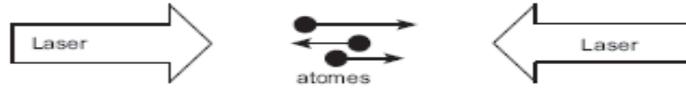


FIG. 2-4 – Principe du refroidissement d’atomes par laser, dans une géométrie unidimensionnelle. La fréquence des faisceaux laser est choisie légèrement inférieure à la fréquence de résonance atomique. En raison de l’*effet Doppler*, un atome en mouvement subit une force de pression de radiation opposée à sa vitesse, et cette force le freine.

$$\omega' = \omega + \vec{k} \cdot \vec{v} \quad (2.10)$$

Ainsi, si le laser est à résonance avec la transition, seuls les atomes ayant une vitesse nulle seront résonnants.

Réciproquement, si le laser a une fréquence désaccordée à la résonance, avec la transition atomique, de δ :

$$\delta = \omega - \omega_0 \quad (2.11)$$

c’est les atomes ayant la vitesse v telle que :

$$\vec{k} \cdot \vec{v} = \delta \quad (2.12)$$

qui seront résonnants. Alors L’atome va absorber préférentiellement ces photons, et il va être ralenti [40].

Mais les atomes froids ne peuvent pas se trouver dans les conditions de pression normal, et pour les garder froids suffisamment longtemps il faut les piégés même pour une période de l’ordre de quelques secondes.

2.3 Piégeage des atomes

Après le refroidissement, il faut aussi réussir à garder les atomes froids suffisamment longtemps. Le confinement du gaz atomique ne peut se faire par des parois matérielles, car la totalité

des atomes se collerait immédiatement aux parois pour ne plus en bouger [9], et il faut donc recourir à des méthodes de piégeage.

Afin de piéger un atome neutre en interaction avec des champs électromagnétiques, on peut chercher à tirer profit soit d'un dipole électrique induit, soit d'un moment magnétique atomique permanent, ou les deux à la fois. La première de ces options conduit aux pièges dipolaires, la seconde aux pièges magnétiques et l'autre aux pièges magnéto-optiques [46].

2.3.1 Piégeage dipolaire

Le fait de plonger un atome neutre dans un champ électrique polarise l'atome, où la force dipolaire résulte de l'interaction entre le champ électrique et la particule polarisable. Si le champ varie suffisamment lentement, le dipôle induit $\vec{d}(t)$ pointe dans le même sens que le champ $\vec{\xi}$ [6], et l'énergie potentielle d'interaction :

$$W = -\vec{d} \cdot \vec{\xi} \quad (2.13)$$

est négative. L'atome, dans ce cas, est attiré vers les zones où $|\vec{\xi}|$ est maximum, le potentiel dipolaire y étant minimum. Ce piège est le Piège Dipolaire Optique (PDO) [6].

Dans la première moitié des années 1990 une des méthodes de piégeage est particulièrement étudiée. Cette méthode consiste à utiliser l'interférence de plusieurs faisceaux lasers proches de résonance avec une transition atomique particulière pour former une modulation de potentiel optique spatialement périodique. Ce potentiel, qui est formé de vallées et de collines sur lequel les atomes voyagent, est constitué de puits régulièrement espacés. Lorsque l'énergie cinétique des atomes est inférieure à la profondeur du potentiel, les puits deviennent des sites de piégeage pour les atomes. Les réseaux optiques sont ainsi formés d'atomes régulièrement disposés dans l'espace comme l'illustre les figures ci-dessous [35].

Alors les atomes, refroidis et piégés dans des sites bien précis, sont régulièrement répartis dans l'espace et l'interaction de ces atomes avec la lumière laser assure la cohésion de l'édifice. Les sites de piégeage sont séparés par une distance de l'ordre de la longueur d'onde laser, qui soit typiquement du μm à comparer aux quelques Å qui séparent les mailles d'un solide cristallin, et le nuage d'atomes reste gazeux [35].

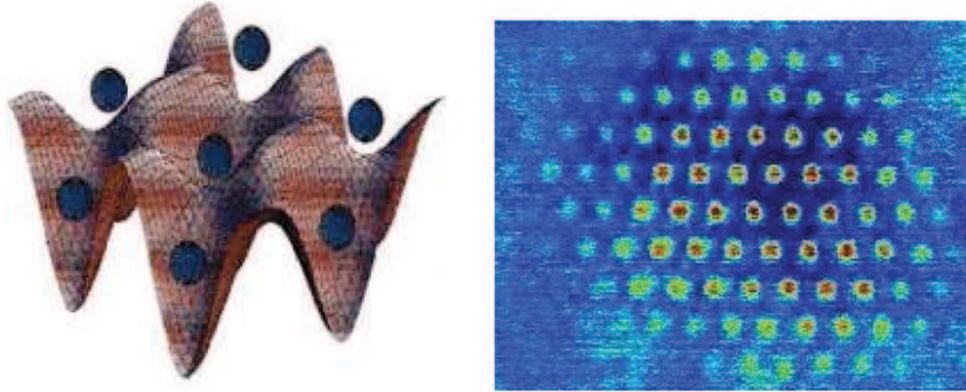


FIG. 2-5 – Atomes piégés dans un réseau lumineux [35].

2.3.2 Piégeage magnétique

Dans ces pièges, les atomes sont piégés grâce à un champ magnétique inhomogène, au centre d'une enceinte à vide très poussé (10^{-9} Pa).

Un atome préparé dans un état dont l'énergie $U(B)$ dépend, par l'effet Zeeman, du champ magnétique appliqué B , et placé dans un champ magnétique inhomogène $B(r)$, est soumis à la force :

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U(|B(r)|) \quad (2.14)$$

Si l'énergie de l'état considéré s'accroît lorsque $|B|$ augmente, l'atome sera attiré vers les régions de champ faible (voir figure (2-6)). Si au contraire $U(B)$ est une fonction décroissante, l'atome est attiré vers les régions de champ fort [45].

Comme les équations de Maxwell interdisent de réaliser un maximum de la norme du champ magnétique, dans une région de l'espace vide de charges et de courants : c'est le théorème de Wing, il n'est donc possible de piéger que des atomes préparés dans un état "chercheur de champ faible" [45].

En effet, chaque atome porte un moment magnétique, qui se couple au champ magnétique local pour donner l'énergie d'interaction :

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}(r) \quad (2.15)$$

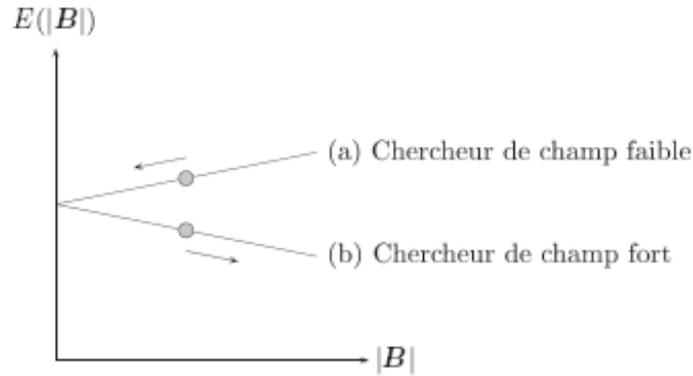


FIG. 2-6 – Niveaux d'énergie d'un atome en fonction du champ magnétique appliqué : un atome préparé dans l'état (a) est attiré par les régions de champ faible et peut donc être piégé magnétiquement au voisinage d'un minimum de champ ; un atome dans (b) est au contraire expulsé [45].

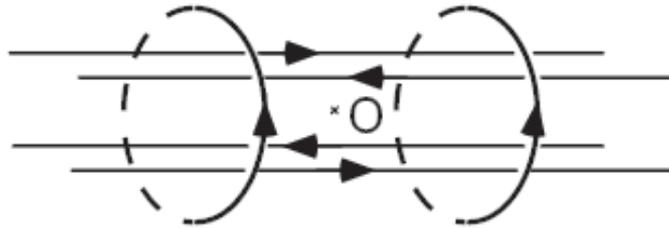


FIG. 2-7 – piège de *Ioffe-Pritchard* [9].

Cette énergie joue le rôle d'une énergie potentielle pour le mouvement du centre de masse de l'atome, la force magnétique qui résulte à partir d'une telle énergie permet de confiner l'atome.

Le piège de *Ioffe-Pritchard* est l'un des pièges magnétiques couramment utilisés. Ce piège est constitué par quatre fils parallèles, parcourus par des courants deux à deux opposés, qui assurent le confinement transverse des atomes. Le confinement longitudinal provient des deux bobines circulaires, parcourues par un même courant comme le montre la figure (2-7). La distance entre ces deux bobines doit être supérieure à leur rayon, pour que le module du champ magnétique présente un minimum en O. Expérimentalement, le champ magnétique en O est de l'ordre de 10^{-4} teslas [9].

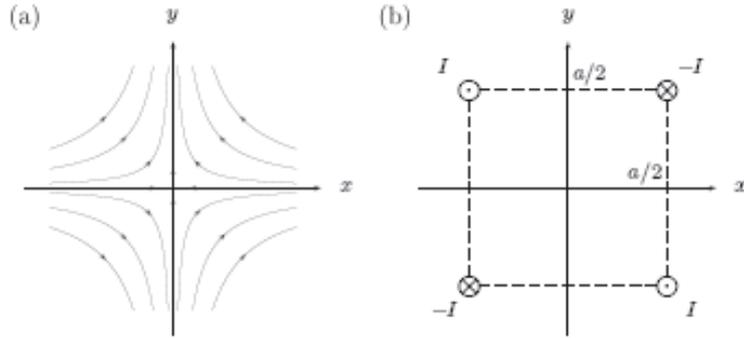


FIG. 2-8 – (a) Allure des lignes de champ pour un champ magnétique quadrupolaire bidimensionnel, (b) Réalisation de ce champ à l'aide de quatre conducteurs parallèles [45].

Considérons par exemple un atome au voisinage d'un point O où l'amplitude $\left| \vec{B}(r) \right|$ du champ magnétique est minimale.

Si le moment magnétique de l'atome a une direction opposée à celle du champ magnétique local, l'énergie magnétique s'écrit :

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}(r) = \left| \vec{\mu} \right| \left| \vec{B} \right| \quad (2.16)$$

Cette énergie potentielle est elle-même minimale en O, et l'atome effectue des oscillations stables autour de ce point [9].

Dans les conditions usuelles de fonctionnement des pièges magnétiques, ces oscillations des atomes se font à une fréquence relativement basse, de l'ordre de la centaine de *Hertz*, et l'approximation qui suppose que les orientations de μ et B restent en permanence opposées est très bien vérifiée, les atomes sont simultanément orientés dans la direction opposée à celle du champ grâce à un faisceau lumineux [9, 45].

2.3.3 Piégeage magnéto-optique

La combinaison d'un gradient de champ magnétique et de la force lumineuse, a donné naissance au piège magnéto-optique (PMO) figure (2-10) où un nuage d'atomes est piégé à

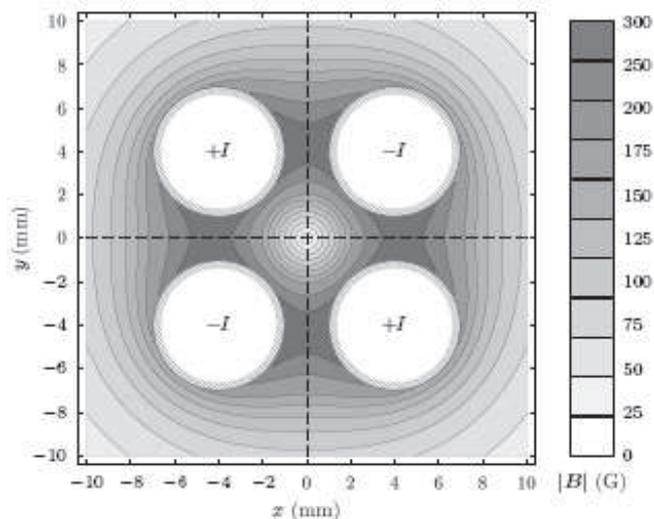


FIG. 2-9 – Norme du champ magnétique créé par les tubes de cuivre de guide, pour un courant $I = 400A$ [45].

l'intersection de trois paires de faisceaux de piégeage et de repompage, avec le centre du champ quadrupolaire créé par deux bobines dessinées sur un circuit imprimé. Ce piège permet de confiner les atomes issus du jet dans une petite zone de l'espace, tout en les refroidissant à des températures inférieures au *millikelvin* [29].

2.4 Refroidissement évaporatif

Les atomes piégés magnétiquement par les méthodes précédentes ne sont pas encore condensés, et l'utilisation exclusive du refroidissement laser n'a pas jusqu'ici permis d'atteindre la condensation de Bose-Einstein. Si on cherche à augmenter la densité atomique dans les mélasses optiques pour atteindre le seuil de condensation, l'irradiation laser favorise la formation de molécules, quand deux atomes sont proches l'un de l'autre, où l'absorption d'un photon peut conduire à la formation d'un dimère qui s'échappe ensuite de la mélasse optique. Alors la technique d'évaporation a été proposée par *Hess* [46] pour atteindre des gaz atomiques refroidis à des températures plus basses.

Le principe est illustré sur la figure (2-11). Le potentiel de piégeage est tronqué toujours

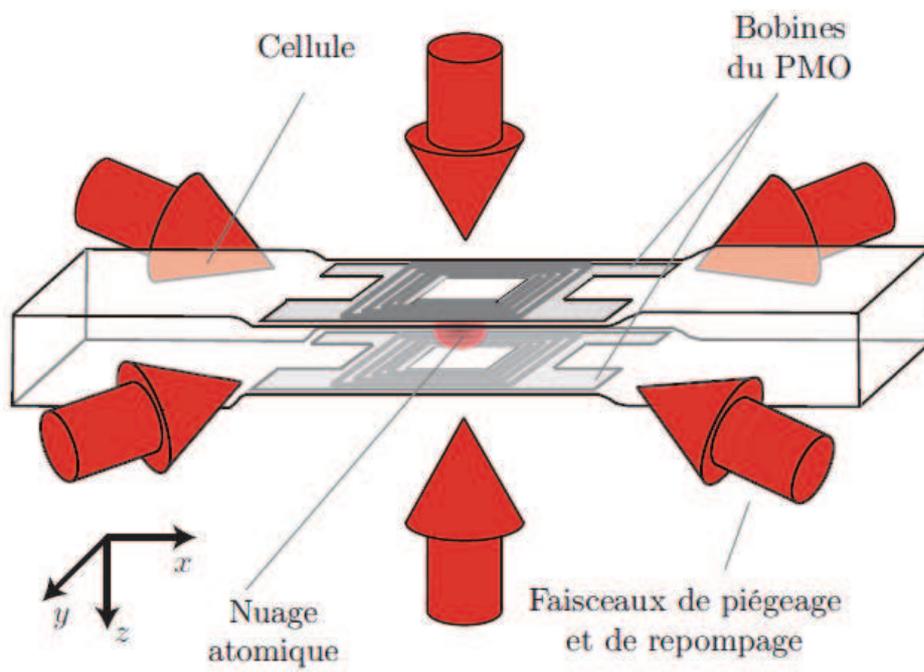


FIG. 2-10 – Géométrie du piège magnéto-optique [29].

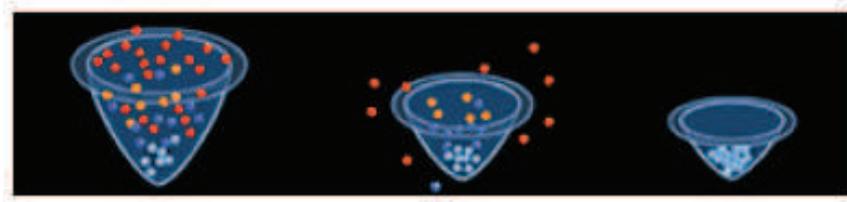


FIG. 2-11 – Refroidissement par évaporation en diminuant la hauteur du potentiel de piégeage.

légèrement supérieur à l'énergie cinétique des atomes, pour que un atome possédant une grande énergie cinétique peut ainsi basculer et s'échapper et l'énergie cinétique moyenne par particule des atomes restants diminue, et avec elle la température.

La troncature du piège est réalisée expérimentalement à l'aide d'une onde RF de fréquence ν_{rf} . Les sous niveaux magnétiques sont couplés par l'onde RF lorsque la condition $h\nu_{rf} = \mu B$ est satisfaite, alors sur une hypersurface $B = Cte$ [46].

L'effet de l'évaporation ne se résume pas à tronquer la distribution de vitesse des atomes pour enlever les atomes chauds. En effet, si deux atomes d'énergies cinétiques égales sont entrés en collision, ils peuvent se partager l'énergie cinétique disponible de manière non équitable dans le référentiel du laboratoire, de sorte que l'un d'entre eux devient très énergétique. Si cet atome chaud est évaporé, celui qui reste apportera à l'énergie totale une contribution diminuée [46].

Enfin, pour que l'évaporation soit la plus efficace possible, le niveau de la troncature est continûment abaissé c'est-à-dire que la fréquence ν_{rf} est continûment abaissée [46].

2.5 Cas de l'atome de rubidium

Les atomes de Rb , qui ont été choisis pour nombreuses expériences, sont probablement parmi les plus simples à refroidir, jusqu'au seuil de condensation. Le Rb a deux isotopes ^{85}Rb et ^{87}Rb , ce dernier isotope est plus facile à refroidir du fait de ses propriétés collisionnelles favorables [29, 46].

Le ^{87}Rb est un boson puisqu'il est constitué d'un nombre pair de fermions : 37 électrons, 37 protons et 50 neutrons [46].

Les niveaux électroniques correspondant à la transition $S \rightarrow P$ sont présentés sur la figure

(2-12). Le couplage entre le spin S de l'électron et son moment cinétique orbital L donne naissance à la structure fine qui lève partiellement la dégénérescence de ces niveaux et qui laisse apparaître les raies D_1 et D_2 . Le couplage entre le spin du noyau effectif I et le moment cinétique total J de l'électron résulte en une structure hyperfine associée au moment cinétique global F [46].

Pour un atome dans l'état $|F, m_F\rangle$, l'énergie potentielle magnétique s'écrit :

$$U(r) = g_F m_F \mu_B |B| \quad (2.17)$$

où g_F est le facteur de Landé de $|F, m_F\rangle$ et μ_B le magnéton de Bohr. On notera :

$$\mu \equiv g_F m_F \mu_B \quad (2.18)$$

le moment magnétique de l'atome dans l'état $|F, m_F\rangle$ considéré [45].

Les longueurs d'onde sont données pour un atome dans le vide. Le facteur de Landé g_F , intervenant dans l'énergie potentielle de l'atome placé dans un champ magnétique, est aussi indiqué pour chaque état hyperfin.

Les transitions utilisées pour le refroidissement laser, d'atomes ^{87}Rb , désaccordé de δ vers le rouge de la transition $|5^2S_{1/2}, F = 2\rangle \longrightarrow |5^2P_{3/2}, F = 3\rangle$ [45].

Le tableau (2-1) résume en outre quelques propriétés du ^{87}Rb où les valeurs numériques sont tirées de [45].

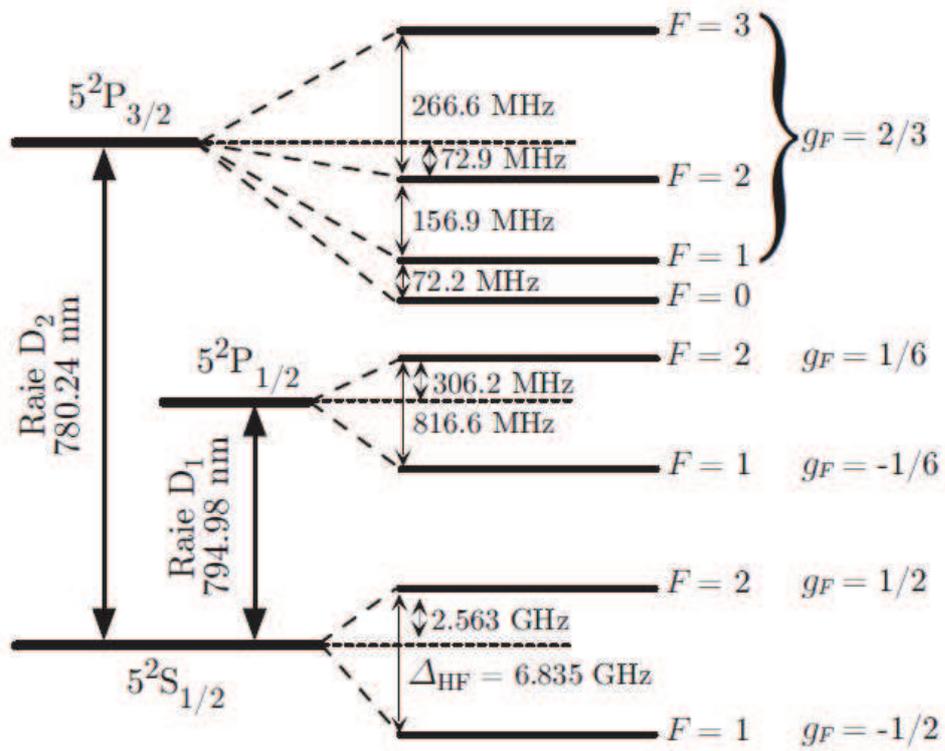


FIG. 2-12 – Raies D_1 et D_2 du ^{87}Rb [29].

Grandeur physique	Symbole	Valeur
Abondance isotopique	—	27,83%
Spin nucléaire	I	3/2
Masse	m	$1,44 \times 10^{-25} kg$
Longueur d'onde de la transition D ₂	λ	780,2 nm
Largeur naturelle de l'état excité $5^2P_{3/2}$	Γ	$2\pi \times 6,1$ MHz
Moment magnétique de $ 5^2S_{1/2}, F = 1, m_F = -1\rangle$	$\mu = \mu_B/2$	$4,64 \times 10^{-24}$ J/T
Séction efficace optique à résonance	$\sigma_{opt} = 3\lambda^2/(2\pi)$	$2,9 \times 10^{-13} m^2$
Vitesse de recul	v_r	5,9 mm/s
Température Doppler	$T_D = \hbar\Gamma/(2k_B)$	146 μk
Longueur de diffusion dans l'onde s	a	$5,3 \times 10^{-9} m$
Séction efficace de collision dans l'onde s	$\sigma = 8\pi a^2$	$7,1 \times 10^{-16} m^2$

TAB. 2-1 - Quelques propriétés du ^{87}Rb (la longueur de diffusion est donné pour deux atomes dans $|5^2S_{1/2}, F = 1, m_F = -1\rangle$) [45].

2.6 La condensation de Bose-Einstein

Dans les gaz d'atomes froids, la condensation de Bose-Einstein est la plus populaire et la plus étudiée des transitions. Cette transition est dictée par la statistique de Bose-Einstein, elle se produit lorsque les fonctions d'ondes des particules, de densité élevée et de température faible, sont suffisamment étendues pour se recouvrir entre elles ce qui signifie qu'un nombre macroscopique d'atomes occupent alors un même état quantique. Un tel fluide quantique est décrit par une fonction d'onde unique et son évolution est gouvernée par une équation de Schrödinger non linéaire [9]. Il possède des propriétés de cohérence remarquables, qui sont démontrées par des expériences d'interférences ou de diffraction d'ondes de matières issues d'un condensat. A température suffisamment faible, la condensation de Bose-Einstein est également superfluide, où le fluide quantique est dépourvu de viscosité, ou bien il s'écoule sans viscosité. Cet effet collectif spectaculaire est ancien : il a été observé en 1938 par *Allen* et *Misener* dans l'hélium liquide refroidi en dessous de $2.2K^\circ$, puis expliqué par *London* [9, 17, 46].

Ces deux propriétés essentielles d'un condensat - cohérence et superfluidité - conduisent,

dans l'hélium superfluide, à l'observation de comportements spectaculaires et contre intuitifs . Un premier effet surprenant apparaît lorsqu'un récipient rempli d'*hélium-II* est mis en rotation doucement. On constate qu'il n'entraîne pas le fluide qu'il contient, et ce malgré la rugosité des parois. Lorsque la rotation est accélérée, cette inertie du fluide laisse apparaître un comportement encore plus remarquable où le fluide se met à tourner, mais d'une manière très différente d'un fluide classique. Il développe des lignes tourbillonnaires quantifiées et arrangées en réseau régulier ce qu'on l'appelle les vortex. Ainsi la rotation, pour l'hélium, a été un moyen particulièrement efficace de démontrer des effets non triviaux, liés aux propriétés originales d'un superfluide [46].

Ces vortex ont été observés aussi dans les condensats gazeux. Très récemment, des tourbillons quantiques dans un condensat de rubidium ont été réalisés au laboratoire Kastler-Brossel de l'ENS figure (2-13). Le gaz est mis en rotation avec un faisceau laser, ce dernier joue un rôle analogue à celui de la cuillère qu'on utilise pour mélanger le sucre dans une tasse de café. Au-dessus d'une fréquence critique de rotation, un ou plusieurs tourbillons apparaissent, puis persistent même si la cuillère laser est débranché [9]. La figure ci-dessous présente des vortex observés pour un gaz atomique remué avec un faisceau laser, où l'axe d'un tourbillon est parallèle à l'axe du faisceau.

Photo de gauche du figure (2-13) est un tourbillon observé quand la vitesse de rotation de la cuillère laser dépasse une valeur critique ($\sim 100Hz$ pour ces expériences). Photo de droite est pour des vitesses de rotation plus élevées, où des réseaux de tourbillons apparaissent [9].

Au vu de cet effet non trivial de la matière condensée, la mise en rotation des condensats gazeux constitue un enjeu expérimental et théorique de taille, et la dynamique de rotation d'un superfluide, en premier lieu, est un sujet fondamental plein de questions [46].

En effet, et selon des études expérimentales [46], la rotation en bloc du fluide quantique n'est pas possible : le fluide a le choix entre rester immobile ou contenir des vortex. Les conditions de ce choix, les mécanismes d'apparition des vortex, leurs propriétés statiques et dynamiques, sont des sujets riches et ouverts [5, 46].

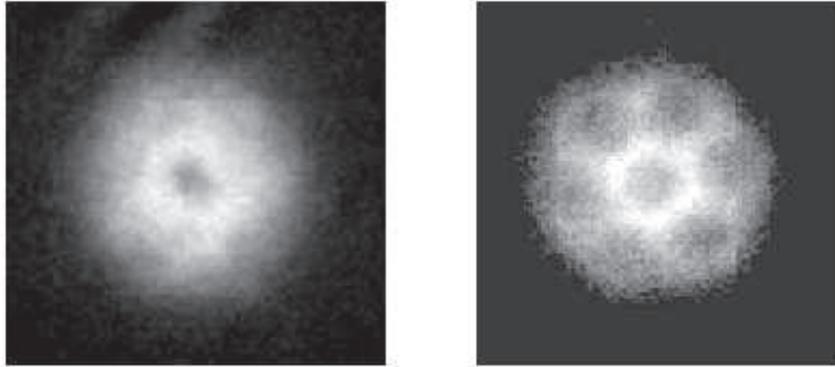


FIG. 2-13 – L'apparition des tourbillons quantifiés, ou vortex, dans un condensat remué avec un faisceau laser se propageant le long du grand axe du cigare [9].

Chapitre 3

Interaction atome-champ laser dans l'approximation de la matrice densité semiclassique, et les forces radiatives exercées

Ce chapitre a été consacré à l'étude de la dynamique interne d'un atome provoquée par l'interaction de cet atome avec un champ électromagnétique cohérent. Il s'intéresse ensuite, de comprendre comment les processus d'absorption et d'émission spontanée de photons par l'atome modifient sa trajectoire, alors en le refroidissant ou en le chauffant [25].

Après avoir étudié d'une manière très générale le mouvement atomique dans une onde lumineuse (voir chapitre 2), il est intéressant de passer maintenant à une description plus précise de l'interaction d'un atome avec un champ laser quasi-résonnant. On dégage les principales caractéristiques de la force exercée sur l'atome, où cette force est décomposée en deux parties, la force réactive -ou force dipolaire- et la force dissipative -ou pression de radiation-, qui sont chacune interprétées physiquement [2, 25, 43].

Pour traiter les processus d'interaction atome-laser, il existe deux modèles : le modèle semiclassical où la lumière est considérée comme une onde électromagnétique classique, et le modèle quantique où la lumière est quantifiée et considérée comme formée de photons qui transportent

de la quantité de mouvement [2].

Le modèle semiclassique est particulièrement fructueux pour introduire les deux types de forces radiatives [8, 12, 34]. Il est constaté que le modèle semiclassique donne une image simple de la force dipolaire, et que le modèle quantique de la lumière fournit l'interprétation la plus simple de la pression de radiation résonnante. Aussi le modèle quantique est invoqué pour comprendre les limites du refroidissement radiatif où l'émission spontanée, phénomène fondamentalement lié à la quantification du rayonnement, provoque des fluctuations responsables d'un chauffage qui vient limiter la course aux basses températures [2, 12, 34, 43].

Dans cette étude, une modèle mixte semiclassique et quantique a été choisi ; pour traiter l'interaction d'un atome neutre couplé à la fois, à une onde laser qui est assimilé à une onde électromagnétique classique d'une part, et avec les photons qui sont des rayonnements quantifiés d'autre part.

3.1 L'interaction atome-laser dans le cadre de l'approximation semiclassique

3.1.1 L'approximation semiclassique

Dans l'approche semiclassique le champ laser étant supposé dans un état cohérent et traité classiquement [12, 25, 37] comme une onde électromagnétique classique de vecteur d'onde $k = 2\pi/\lambda$, de fréquence ω et d'amplitude E_0 [2, 12, 43], tel que leur champ électrique s'écrit :

$$\vec{E}(r, t) = \vec{E}_0(\vec{r}) \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \quad (3.1)$$

L'atome trouve sa description dans le cadre de la mécanique quantique dont la dynamique interne est traitée quantiquement, mais sa position est traitée d'une manière classique [25]. L'atome décrit dans ce qui suit par un modèle à deux niveaux, d'un vecteur d'état $|\Psi\rangle$ caractérisant à la fois son état interne dont l'espace interne $\xi_{int} = \{|g\rangle, |e\rangle\}$, et son mouvement dans l'espace ξ_r des états externes [2]. Cet état se représente donc par un spineur :

$$|\Psi\rangle = \begin{bmatrix} \psi_g(\vec{r}, t) \\ \psi_e(\vec{r}, t) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

où $\psi_g(\vec{r}, t)$, $\psi_e(\vec{r}, t)$ sont, respectivement, la fonction d'onde de l'état fondamental et de l'état excité, \vec{r} est la position de l'atome et plus exactement celle de son centre de masse, et l'approximation des grandes longueurs d'onde admet que la distance électron-noyau est très petite devant la longueur d'onde du rayonnement. L'atome apparaît donc comme une particule associée à un opérateur position \hat{r} , et sa complexité interne (noyau, électrons) est totalement prise en compte par l'espace des états internes [2].

La limite classique consiste à traiter le mouvement de l'atome comme celui d'une particule classique, ayant à chaque instant une position bien déterminée [2, 12, 37, 43]. Il est supposé de plus que cette position est la même pour l'état fondamental et excité [2], et l'état atomique s'écrit alors :

$$|\Psi\rangle = \begin{bmatrix} C_g(t) \\ C_e(t) \end{bmatrix} \psi(\vec{r}, t) \quad (3.3)$$

où $\psi(\vec{r}, t)$ est un paquet d'onde d'extension spatiale petite à l'échelle de la longueur d'onde λ de l'onde lumineuse, localisé autour de \vec{r}_{at} [2]. Dans ces conditions, la position classique \vec{r}_{at} est évidemment confondue avec la valeur moyenne de l'observable position [2, 25] :

$$\vec{r}_{at} = \langle \Psi | \hat{r} | \Psi \rangle = \int d^3r |\psi(\vec{r}, t)|^2 \vec{r} \quad (3.4)$$

On peut alors appliquer le théorème d'Ehrenfest [2, 25], qui permet de montrer que la vitesse classique

$$\vec{v}_{at} = \frac{d}{dt} \vec{r}_{at} \quad (3.5)$$

coïncide avec la moyenne de l'opérateur impulsion \hat{P} divisée par la masse M .

Le théorème d'Ehrenfest donne [2, 25] :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \langle r_i \rangle &= \frac{1}{i\hbar} \langle [r_i, H] \rangle = \frac{1}{i\hbar} \left\langle \left[r_i, \frac{\hat{P}^2}{2M} \right] \right\rangle \\
&= \frac{1}{i\hbar} \left\langle \frac{\hat{P}_i}{M} [r_i, P_i] \right\rangle = \frac{\langle \hat{P}_i \rangle}{M}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

où i désigne une coordonnée cartésienne. On en déduit :

$$\vec{v}_{at} = \frac{d}{dt} \langle \vec{r} \rangle = \frac{\langle \vec{P} \rangle}{M} \tag{3.7}$$

La condition sur laquelle repose l'hypothèse d'un paquet d'onde localisé à l'échelle de la longueur d'onde s'écrit [2] :

$$\Delta r_i \ll \lambda \tag{3.8}$$

où Δr_i est l'écart quadratique moyen de la coordonnée r_i de l'atome :

$$\Delta r_i = \sqrt{\langle \Psi | (\hat{r}_i - r_{at,i})^2 | \Psi \rangle} = \sqrt{\int d^3r (\hat{r}_i - r_{at,i})^2 |\psi(\vec{r}, t)|^2} \tag{3.9}$$

Mais on sait que les dispersions en position et en impulsion sont liées par les relations de Heisenberg [2] :

$$\Delta r_i \cdot \Delta P_i \geq \frac{\hbar}{2} \tag{3.10}$$

La condition (3.8) implique donc :

$$\Delta P_i \gg \frac{\hbar}{2\lambda} \tag{3.11}$$

Cette expression fait apparaître une quantité ayant une signification physique manifestement importante pour les effets mécaniques de la lumière où :

$$\frac{\hbar}{\lambda} \simeq \hbar k \tag{3.12}$$

qui est l'impulsion d'un photon de vecteur d'onde $k = 2\pi/\lambda$, et en divisant par la masse

atomique M , on trouve la vitesse de recul :

$$V_R = \frac{\hbar k}{M} \quad (3.13)$$

3.1.2 La matrice densité du système

Pour traiter l'interaction d'un gaz atomique avec des faisceaux laser, il est noté que les particules, formant un sous système d'un système plus vaste, ne peuvent être décrites que par un opérateur densité [12]. L'atome, en effet, est en interaction permanente avec le champ électromagnétique, et même si le système global ou l'ensemble atome-champ était dans un état pur [12, 37], décrit par un vecteur d'état, l'état des particules est en générale un mélange statistique d'états [43] :

$$|\Psi_n(\vec{r}, t)\rangle = |\psi_n(\vec{r})\rangle e^{-iE_n t/\hbar} \quad (3.14)$$

tel que l'état des particules est décrit comme :

$$|\Psi(\vec{r}, t)\rangle = \sum C_k |\Psi_k(\vec{r}, t)\rangle \quad (3.15)$$

la matrice densité est décrit donc par :

$$\rho(t) = |\Psi\rangle \langle\Psi| = \sum_{m,n} \rho_{mn} |\psi_m(\vec{r})\rangle \langle\psi_n(\vec{r})| e^{-i\omega_{mn}t} = \sum_{m,n} \tilde{\rho}_{mn} |\psi_m(\vec{r})\rangle \langle\psi_n(\vec{r})| \quad (3.16)$$

où $\omega_{mn} = E_m - E_n$, $\rho_{mn} = C_m C_n^*$, et $\tilde{\rho}_{mn} = \rho_{mn} e^{-i\omega_{mn}t}$

La matrice densité doit être hermitique de trace unité [37] :

$$\rho = \rho^+ \quad , \quad Tr\rho = 1 \quad (3.17)$$

L'opérateur densité $\rho_A(t) = |\Psi\rangle \langle\Psi|$ décrivant les atomes d'un tel mélange est obtenu par la trace partielle sur les variables du rayonnement de l'opérateur densité $\rho_{A+R}(t)$ du système

global [12, 19, 34, 43] :

$$\rho_{A+R}(t) = \rho_A(t) \otimes \rho_R(t) \quad (3.18)$$

alors :

$$\rho_A(t) = Tr_R(\rho_{A+R}(t)) \quad (3.19)$$

La matrice densité pour un atome à deux niveaux (f et e) est décrite comme :

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} \rho_{gg} & \rho_{ge} \\ \rho_{eg} & \rho_{ee} \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

où : $\rho_{eg} = (\rho_{ge})^*$, $\rho_{gg} + \rho_{ee} = 1$.

3.1.3 Hamiltonien mixte semiclassique-quantique du système

L'interaction atome laser est traité dans le cadre de l'approximation dipolaire [1, 12, 25, 37, 43]. On considère ici un atome neutre de masse m couplé à un champ laser monochromatique qu'on suppose proche de résonance avec une transition atomique [25]. Sous l'action de cette onde électromagnétique, l'atome, initialement dans l'état fondamental $|g\rangle$, peut être porté vers un état excité $|e\rangle$ d'énergie plus élevée, tout en prélevant cette énergie du champ qui est donc atténué, et après une durée de vie dans le niveau excité Γ , l'atome retourne à l'état fondamental et émet un photon qui est un champ électromagnétique quantifié [1] ; donc l'atome devient couplé à la fois aux rayonnements électromagnétiques quantifiés et à un champ laser monochromatique classique.

Il est intéressant de considérer que la durée de l'interaction atome-laser est suffisamment longue pour que de nombreux processus d'émission spontanée se produisent pendant cette interaction [25].

Le couplage des atomes avec modes vides peut alors être traité par le formalisme de l'équation pilote [25], le champ laser étant quant à lui supposé dans un état cohérent et traité classiquement [12, 25, 37]. Ceci permet d'écrire une équation d'évolution pour l'opérateur densité atomique $\rho_A(t)$ [25].

L'Hamiltonien d'un tel système peut être décrit dans l'approximation dipolaire [19, 21] :

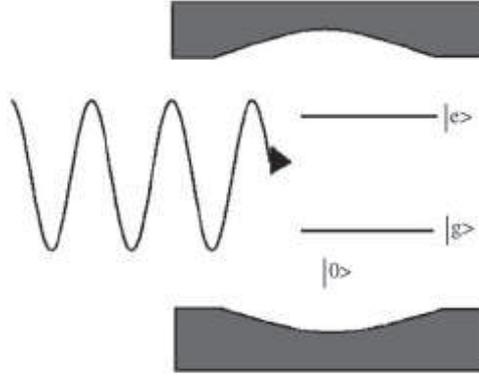


FIG. 3-1 – Atome à deux niveaux en interaction avec un champ classique extérieur et un champ quantifié dans la cavité [21].

$$H = H_A + H_R + H_{AL} + H_{AR} \quad (3.21)$$

H_A est l'Hamiltonien de l'atome libre à deux niveaux $|g\rangle$ et $|e\rangle$, et l'origine des énergies est prise égale à celle de l'état fondamental $|g\rangle$, de sorte que H_A s'écrit simplement [12, 19, 21, 34, 43] :

$$H_A = \hbar\omega_0 |e\rangle \langle e| \quad (3.22)$$

où on peut définir les opérateurs atomiques S^+ et S^- qui font respectivement «monter» et «descendre» l'atome de g à e et de e à g :

$$S^+ = |e\rangle \langle g|, \quad S^- = |g\rangle \langle e| \quad (3.23)$$

alors H_A devient :

$$H_A = \hbar\omega_0 S^+ S^- \quad (3.24)$$

H_R est l'Hamiltonien du rayonnement quantifié et selon [3, 11, 12, 19, 21, 34, 37, 43] :

$$H_R = \sum_k \hbar\omega_k (a_k a_k^+ + 1/2) \quad (3.25)$$

a_k, a_k^+ les opérateurs de création et d'annihilation qui vérifient les relations de commutation suivantes :

$$[a_\lambda, a_\mu] = [a_\lambda^+, a_\mu^+] = 0, \quad [a_\lambda, a_\mu^+] = \delta_{\lambda\mu} \quad (3.26)$$

l'action des opérateurs d'annihilation et de création sur les fonctions d'onde d'oscillateur champs de l'espace de Fock qui est l'espace nombre d'occupation $\varphi_{n_k} = |n_k\rangle$, tel que n_k est le nombre des photons qui ont le même mode k , est défini par :

$$\begin{aligned} a_k |n_k\rangle &= \sqrt{n_k} |n_k - 1\rangle \\ a_k^+ |n_k\rangle &= \sqrt{n_k + 1} |n_k + 1\rangle \\ a_k a_k^+ |n_k\rangle &= n_k |n_k\rangle \end{aligned} \quad (3.27)$$

Dans le cas où le nombre des photons émis est égal à un, l'espace de Fock contient les deux états : $|0\rangle$ et $|1\rangle$; tels que les opérateurs a et a^+ soient décrits par :

$$a = |0\rangle \langle 1|; \quad a^+ = |1\rangle \langle 0| \quad (3.28)$$

H_{AL} est l'Hamiltonien d'interaction atome-champ laser dans l'approximation dipolaire électrique, le champ laser est traité classiquement [2, 12, 19, 25, 37, 43] :

$$H_{AL} = -\hat{d} \cdot E \quad (3.29)$$

dont \hat{d} est le moment dipolaire qui repose sur l'excitation forcée, sous l'effet du champ incident, d'un dipôle atomique induit oscillant à la fréquence ω .

Les éléments de matrice de l'opérateur \hat{d} , pour un atome à deux niveaux, sont choisis pour être réels [43] :

$$\langle g | \hat{d} | g \rangle = \langle e | \hat{d} | e \rangle = 0, \quad \langle g | \hat{d} | e \rangle = \langle e | \hat{d} | g \rangle = d \quad (3.30)$$

donc \hat{d} peut être décrit par :

$$\hat{d} = d(S^+ + S^-) \quad (3.31)$$

où H_{AL} devient :

$$H_{AL} = -d.E_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) = -\hbar\Omega(S^+ + S^-)(e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}) \quad (3.32)$$

tel que Ω est la fréquence de *Rabi*, qui caractérise l'intensité du couplage entre l'atome et l'onde incidente : $\Omega = \frac{d.E_0}{2\hbar}$.

H_{AR} est l'Hamiltonien d'interaction atome-champ quantifié, il diffère de H_{AL} par l'expression quantique de E [12, 19, 21, 43] :

$$H_{AR} = -\hat{d} \cdot E_q \quad (3.33)$$

tel que :

$$\vec{E}_q = i \sum_k \left(\frac{2\pi ck}{L^3} \right)^{\frac{1}{2}} \vec{\epsilon}_k a_k e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + C.C. \quad (3.34)$$

où $\vec{\epsilon}_k$ est le vecteur de polarisation; a_k est l'opérateur d'annihilation du champ, donc l'Hamiltonien défini selon [12, 19, 21, 43] par la relation :

$$H_{AR} = \sum_k \{g_k a_k (S^+ + S^-) + C.C.\} \quad (3.35)$$

g_k est le coefficient de couplage :

$$g_k = -i \left(\frac{2\pi ck}{L^3} \right)^{\frac{1}{2}} (\vec{d} \cdot \vec{\epsilon}_k) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (3.36)$$

Enfin l'Hamiltonien du système s'écrit comme :

$$\begin{aligned} H = & \hbar\omega_0 S^+ S^- + \sum \hbar\omega_\lambda (a_\lambda a_\lambda^\dagger + 1/2) - \hbar\Omega (S^+ + S^-) (e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}) \\ & + \sum_k \{g_k a_k (S^+ + S^-) + C.C.\} \end{aligned} \quad (3.37)$$

3.1.4 L'approximation du champ tournant

L'expression de l'Hamiltonien d'interaction avec le champ laser,

$$H_{AL} = -d \cdot E_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \quad (3.38)$$

en fonction de S^+ et S^- et des exponentielles $e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$ et $e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$ (qui proviennent de $\cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$), et qui sont respectivement associées à l'absorption et à l'émission d'un photon), s'écrit alors comme :

$$H_{AL} = -\hbar\Omega[S^+ e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + S^- e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + S^- e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + S^+ e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}] \quad (3.39)$$

Les deux premiers termes du crochet décrivent les processus où l'atome monte de g à e par l'absorption d'un photon ou descend de e à g par l'émission d'un photon [12]. Ces processus sont résonnants au voisinage de $\omega = \omega_0$ et sont beaucoup plus importants que les processus non résonnants associées aux deux derniers termes, où l'atome descend de e à g en absorbant un photon ou monte de g à e en émettant un photon [12, 35]. Donc les deux derniers termes seront négligés par la suite; l'approximation correspondante est appelée l'approximation du champ tournant [12, 19, 35], et l'Hamiltonien H_{AL} devient :

$$H_{AL} = -\hbar\Omega[S^+ e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + S^- e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}] \quad (3.40)$$

Cette approximation est aussi utilisée pour le champ quantifié en négligeant les termes comme $a_k^+ S^+$ [19], qui signifie que la création d'un photon est simultanée avec l'excitation atomique, et l'Hamiltonien H_{AR} devient approximativement égal à :

$$H_{AR} = \sum_k \{g_k a_k S^+ + C.C.\} \quad (3.41)$$

Alors l'Hamiltonien du système qui décrit l'atome, le champ laser et les modes de vide, dans

l'approximation du champ tournant, s'écrit donc [19] :

$$\begin{aligned}
H &= \hbar\omega_0 S^+ S^- + \sum \hbar\omega_\lambda (a_\lambda a_\lambda^+ + 1/2) - \hbar\Omega (S^+ e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} + S^- e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}) \\
&+ \sum_k \{g_k a_k S^+ + C.C.\}
\end{aligned} \tag{3.42}$$

3.2 L'équation pilote

L'évolution de ce système est gouvernée par l'évolution de la matrice densité, qui est décrite par l'équation de *Liouville* quantique, ou *von Neumann-Liouville* [44], elle est aussi connue par l'équation de *Schrödinger* [19, 34] ou simplement l'équation de mouvement [43] :

$$\frac{\partial \rho_{A+R}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho_{A+R}] = -\frac{i}{\hbar} \mathcal{L} \rho_{A+R} \tag{3.43}$$

où \mathcal{L} est l'opérateur de Liouville [11, 12, 13, 15] défini par :

$$\mathcal{L} \dots = [H, \dots] \tag{3.44}$$

la solution de cette équation est :

$$\rho_{A+R}(t) = e^{-i \mathcal{L} t} \rho_{A+R}(0) \equiv e^{-i H t/\hbar} \rho_{A+R}(0) e^{i H t/\hbar} \tag{3.45}$$

avec la condition initiale :

$$\rho_{A+R}(0) = \rho_A(0) \rho_R(0) \tag{3.46}$$

$\rho_A(0)$ est l'état initial du système atomique, qui dépend du système préparé.

Pour obtenir une équation pour $\rho_A(t)$, on utilise les techniques de l'opérateur de projection de *Zwanzig* qui est définie [19, 44] par :

$$P \dots = \mathcal{F} T r_R \dots \tag{3.47}$$

\mathcal{F} doit être choisi, pour assurer : $P^2 = P$, tel que : $T r_R \mathcal{F} = 1$, aussi leur forme doit être

dictée selon le problème physique, et les conditions initiales [19]. Il est claire que :

$$P\rho_{A+R}(t) = \mathcal{F}\rho_A(t) \quad (3.48)$$

et pour $t=0$:

$$\begin{aligned} P\rho_{A+R}(0) &= \mathcal{F}\rho_A(0) \\ (1 - P)\rho_{A+R}(0) &= (\rho_R(0) - \mathcal{F})\rho_A(0) \end{aligned} \quad (3.49)$$

le choix $\mathcal{F} = \rho_R(0)$, tel que :

$$P\rho_{A+R}(t) = \rho_R(0)\rho_A(t) \quad (3.50)$$

$$(1 - P)\rho_{A+R}(0) = 0 \quad (3.51)$$

donne :

$$\rho_A(t) = Tr_R P \rho_{A+R}(t) \quad (3.52)$$

$$\rho_R(t) = \rho_R(0) + Tr_A(1 - P) \rho_{A+R}(t) \quad (3.53)$$

la matrice densité est donc décrite par :

$$\rho_{A+R}(t) = P\rho_{A+R}(t) + (1 - P)\rho_{A+R}(t) \quad (3.54)$$

L'équation de Liouville sous cette forme est très compliquée, et pour simplifier son traitement il est utile de passer à la transformation de Laplace qui est définie selon [19] par :

$$\hat{\rho}_{A+R}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \rho_{A+R}(t) dt \quad , \quad \text{Re } s > 0 \quad (3.55)$$

l'équation de liouville (3.43) se transforme ainsi comme :

$$s \hat{\rho}_{A+R}(s) - \rho_{A+R}(0) = -i \mathcal{L}\hat{\rho}_{A+R}(s) \quad (3.56)$$

et en multipliant cette équation par P et $(1 - P)$ on obtient :

$$s P \hat{\rho}_{A+R}(s) - P \rho_{A+R}(0) = -i P \mathcal{L} P \hat{\rho}_{A+R}(s) - i P \mathcal{L}(1 - P) \hat{\rho}_{A+R}(s) \quad (3.57)$$

$$s (1 - P) \hat{\rho}_{A+R}(s) - (1 - P) \rho_{A+R}(0) = -i (1 - P) \mathcal{L} P \hat{\rho}_{A+R}(s) - i (1 - P) \mathcal{L}(1 - P) \hat{\rho}_{A+R}(s) \quad (3.58)$$

et à partir de deuxième équation (3.58), on a :

$$(1 - P) \hat{\rho}_{A+R}(s) = [s + i (1 - P) \mathcal{L}(1 - P)]^{-1} [(1 - P) \rho_{A+R}(0) - i (1 - P) \mathcal{L} P \hat{\rho}_{A+R}(s)] \quad (3.59)$$

alors la première équation (3.57) devient :

$$\begin{aligned} & s P \hat{\rho}_{A+R}(s) - P \rho_{A+R}(0) \\ &= -i P \mathcal{L} P \hat{\rho}_{A+R}(s) - i P \mathcal{L}(1 - P) [s + i (1 - P) \mathcal{L}(1 - P)]^{-1} \\ & \quad [(1 - P) \rho_{A+R}(0) - i (1 - P) \mathcal{L} P \hat{\rho}_{A+R}(s)] \end{aligned} \quad (3.60)$$

On prend la transformation inverse de Laplace, pour ces deux dernières équations , on trouve :

$$\begin{aligned} (1 - P) \rho_{A+R}(t) &= e^{-i t (1 - P) \mathcal{L}(1 - P)} (1 - P) \rho_{A+R}(0) - i \int_0^t e^{-i \tau (1 - P) \mathcal{L}(1 - P)} (1 - P) \\ & \quad \mathcal{L}(t - \tau) P \rho_{A+R}(t - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} (\partial/\partial t) P \rho_{A+R}(t) + i P \mathcal{L} P \rho_{A+R}(t) &= -i P \mathcal{L}(1 - P) e^{-i t (1 - P) \mathcal{L}(1 - P)} (1 - P) \rho_{A+R}(0) \\ & \quad - P \mathcal{L}(1 - P) \int_0^t e^{-i \tau (1 - P) \mathcal{L}(1 - P)} (1 - P) \\ & \quad \mathcal{L}(t - \tau) P \rho_{A+R}(t - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (3.62)$$

Par l'opérateur de projection qui est choisi déjà, ces équations sont donc simplifiées à :

$$(1 - P)\rho_{A+R}(t) = -i \int_0^t e^{-i \tau(1-P)\mathcal{L}(1-P)} (1 - P)\mathcal{L}(t - \tau) P\rho_{A+R}(t - \tau) d\tau \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned} (\partial/\partial t)P\rho_{A+R}(t) + i P\mathcal{L}P\rho_{A+R}(t) &= -P\mathcal{L}(1 - P) \int_0^t e^{-i \tau(1-P)\mathcal{L}(1-P)} (1 - P)\mathcal{L}(t - \tau) \\ &\quad P\rho_{A+R}(t - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (3.64)$$

Maintenant on peut obtenir $(1 - P)\rho_{A+R}(t)$ et $P\rho_{A+R}(t)$ à partir de la première et la deuxième équation respectivement.

On réécrit l'Hamiltonien du système et le Liouvillien correspondant comme :

$$H = H_A + H_R + H_{AL} + H_{AR} \quad , \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}_A + \mathcal{L}_R + \mathcal{L}_{AL} + \mathcal{L}_{AR} \quad (3.65)$$

il est évident que :

$$P\mathcal{L}_A = \mathcal{L}_A P \quad , \quad P\mathcal{L}_{AL} = \mathcal{L}_{AL} P \quad , \quad P\mathcal{L}_R = \mathcal{L}_R P = 0 \quad (3.66)$$

aussi, puisque \mathcal{L}_{AR} est linéaire avec a_k et a_k^+ [19] alors :

$$P\mathcal{L}_{AR}P \cdots = 0 \quad (3.67)$$

Alors l'équation du mouvement devient :

$$\begin{aligned} (\partial/\partial t)P\rho_{A+R}(t) + i \mathcal{L}_A P\rho_{A+R}(t) + i \mathcal{L}_{AL} P\rho_{A+R}(t) &= -P\mathcal{L}_{AR}(t)(1 - P) \int_0^t e^{-i \tau(1-P)\mathcal{L}(1-P)} \\ &\quad (1 - P)\mathcal{L}_{AR}(\tau) P\rho_{A+R}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (3.68)$$

ou :

$$(\partial/\partial t)P\rho_{A+R}(t) + i \mathcal{L}_A P\rho_{A+R}(t) + i \mathcal{L}_{AL} P\rho_{A+R}(t) = -P\mathcal{L}_{AR}(t) \int_0^t U_0(\tau)U(\tau) V(t, \tau)\mathcal{L}_{AR}(\tau)V^+(t, \tau)P\rho_{A+R}(\tau)d\tau \quad (3.69)$$

tel que :

$$U_0(\tau) = e^{-i \tau(\mathcal{L}_A + \mathcal{L}_R)} \quad (3.70)$$

$$U(\tau) = T e^{\{-i \int_0^\tau dt '(1-P)U_0(-t')\mathcal{L}_{AR}U_0(t')(1-P)\}} \quad (3.71)$$

$$V(t, \tau) = T e^{\{-i \int_\tau^t dt 'H_{AL}(t')\}} \quad (3.72)$$

où T est l'opérateur chronologique [19].

3.2.1 L'approximation de Markov

Dans un processus de Markov, la valeur d'une variable à un certain instant ne dépend que des valeurs passées les plus récentes, et l'évolution du processus à partir d'un instant donné ne dépend que de la valeur qu'il a pris à cet instant, et non de son histoire antérieure [38].

Dans l'équation :

$$\begin{aligned} & (\partial/\partial t)P\rho_{A+R}(t) + i \mathcal{L}_A P\rho_{A+R}(t) + i \mathcal{L}_{AL} P\rho_{A+R}(t) \\ &= -P\mathcal{L}_{AR}(t) \int_0^t U_0(\tau)U(\tau)V(t, \tau)\mathcal{L}_{AR}(\tau)V^+(t, \tau)P\rho_{A+R}(\tau)d\tau \end{aligned} \quad (3.73)$$

la dérivée de $P\rho_{A+R}(t)$ dépend de $P\rho_{A+R}(\tau)$ pour tout instant $\tau \leq t$, ça implique que les excitations causées par H_{AR} sont très courtes en comparant avec le temps de changement de $P\rho_{A+R}(\tau)$ [41]. Donc la forme de la corrélation $H_{AR}(t)H_{AR}(\tau)$ ou $H_{AR}(\tau)H_{AR}(t)$ est fortement pointue et peut être assimilée à une fonction delta autour $t = \tau$ [38, 41]. Alors, on peut remplacer

τ dans $P\rho_{A+R}(\tau)$ par t [41], ce qui fait une partie de l'approximation de Markov, donc :

$$\begin{aligned} & (\partial/\partial t)P\rho_{A+R}(t) + i\mathcal{L}_AP\rho_{A+R}(t) + i\mathcal{L}_{AL}P\rho_{A+R}(t) \\ = & -P\mathcal{L}_{AR}(t) \int_0^t U_0(\tau)U(\tau)V(t,\tau)\mathcal{L}_{AR}(\tau)V^+(t,\tau)P\rho_{A+R}(t)d\tau \end{aligned} \quad (3.74)$$

Noter que l'évolution dans le temps du système atomique gouverné par cette équation, dépend de l'état initial du système à $t = 0$. Cette dépendance est contrastée avec les conditions de l'approximation de Markov, elle est éliminée par le changement de variable $\tau \longrightarrow t - \tau$ et par l'extension de la limite d'intégration à ∞ [19, 41], le résultat est :

$$\begin{aligned} & (\partial/\partial t)P\rho_{A+R}(t) + i\mathcal{L}_AP\rho_{A+R}(t) + i\mathcal{L}_{AL}P\rho_{A+R}(t) \\ = & -P\mathcal{L}_{AR}(t) \int_0^\infty U_0(t-\tau)U(t-\tau)V(t,t-\tau) \\ & \mathcal{L}_{AR}(t-\tau)V^+(t,t-\tau)P\rho_{A+R}(t)d\tau \end{aligned} \quad (3.75)$$

3.2.2 L'approximation de *Born*

L'approximation de *Born* néglige l'interaction du deuxième ordre entre l'atome et les photons émis, elle est obtenue en prenant dans la relation (3.75) [19, 41] :

$$U(t-\tau) \longrightarrow 1 \quad (3.76)$$

elle signifie que les photons émis ne réagissent pas à nouveau avec l'atome [19], alors les collisions entre l'atome et les photons sont bien séparées dans le temps, où le temps à prendre en compte est de l'ordre de la durée de collision [25]; l'équation du mouvement devient :

$$\begin{aligned} & (\partial/\partial t)P\rho_{A+R}(t) + i\mathcal{L}_AP\rho_{A+R}(t) + i\mathcal{L}_{AL}P\rho_{A+R}(t) \\ = & -P\mathcal{L}_{AR}(t) \int_0^\infty U_0(t-\tau)V(t,t-\tau)\mathcal{L}_{AR}(t-\tau)V^+(t,t-\tau)P\rho_{A+R}(t)d\tau \end{aligned} \quad (3.77)$$

3.2.3 L'approximation des vitesses de variation indépendantes

Cette approximation repose sur la condition :

$$\tau_c \ll \Omega^{-1} \quad \text{ou} \quad \omega_0 \gg \Omega, |\delta| \quad (3.78)$$

qui exprime que la durée τ_c d'un processus élémentaire d'émission spontanée est trop courte pour que l'interaction avec les photons laser puisse se manifester pendant ce temps τ_c ; où les photons laser restent "spectateurs". Par contre, entre deux processus spontanés, d'échelle de temps Γ^{-1} , l'atome et les photons laser ont le temps de se coupler [12].

Lorsque la condition (3.78) est vérifiée, on peut négliger l'évolution du système atome-photons émis sous l'influence de H_{AL} pendant le temps de corrélation. On peut alors mettre $V(t, t - \tau) \approx 1$ [19, 41]; et l'équation finale s'écrit :

$$\begin{aligned} & (\partial/\partial t)P\rho_{A+R}(t) + i \mathcal{L}_A P\rho_{A+R}(t) + i \mathcal{L}_{AL} P\rho_{A+R}(t) \\ = & -P\mathcal{L}_{AR}(t) \int_0^\infty U_0(t - \tau) \mathcal{L}_{AR}(t - \tau) P\rho_{A+R}(t) d\tau \end{aligned} \quad (3.79)$$

ou :

$$\begin{aligned} & (\partial/\partial t)P\rho_{A+R}(t) + \frac{i}{\hbar} [H_A, P\rho_{A+R}(t)] + \frac{i}{\hbar} [H_{AL}, P\rho_{A+R}(t)] \\ = & - \int_0^\infty P[H_{AR} e^{-i(\mathcal{L}_A + \mathcal{L}_R)}, [H_{AR}(t - \tau), P\rho_{A+R}(t)]] d\tau \end{aligned} \quad (3.80)$$

$$\begin{aligned} & \rho_R(0) (\partial/\partial t) \rho_A(t) + \frac{i}{\hbar} [\hbar\omega_0 S^+ S^-, \rho_R(0) \rho_A(t)] \\ & - \frac{i}{\hbar} [\hbar\Omega \{S^+ e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + S^- e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}\}, \rho_R(0) \rho_A(t)] \\ = & - \int_0^\infty \rho_R(0) T r_R \left[\sum_k \{g_k a_k S^+ + C.C.\} e^{-i(\mathcal{L}_A + \mathcal{L}_R)}, \right. \\ & \left. \left[\sum_k \{g_k a_k S^+ + C.C.\}, \rho_R(0) \rho_A(t) \right] \right] d\tau \end{aligned} \quad (3.81)$$

$$\begin{aligned}
& (\partial/\partial t)\rho_A(t) + i\omega_0[S^+S^-, \rho_A(t)] - i\Omega [\{S^+e^{-i(kr-\omega t)} + S^-e^{i(kr-\omega t)}\}, \rho_A(t)] = \\
& - \int_0^\infty Tr_R \left[\sum_k \{g_k a_k S^+ e^{i\omega_0(t-\tau)} e^{-i\omega(t-\tau)} + g_k^* a_k^+ S^- e^{-i\omega_0(t-\tau)} e^{i\omega(t-\tau)}\}, \right. \\
& \left. [\sum_k \{g_k a_k S^+ + g_k^* a_k^+ S^-\}, \rho_R(0)\rho_A(t)] \right] d\tau
\end{aligned} \tag{3.82}$$

et on a :

$$S^+ = |e\rangle \langle g|, S^- = |g\rangle \langle e|, a_k = |0\rangle \langle 1|, a_k^+ = |1\rangle \langle 0|, \rho_R(0) = |0\rangle \langle 0| \tag{3.83}$$

alors :

$$\begin{aligned}
Tr_R (\rho_R(0) a_k a_k^+) &= 1, Tr_R (\rho_R(0) a_k^+ a_k) = 0 \\
Tr_R (\rho_R(0) a_k^+ a_k^+) &= 0, Tr_R (\rho_R(0) a_k a_k) = 0
\end{aligned} \tag{3.84}$$

Lorsque on fait la trace sur R dans la représentation des états propres de R , les éléments diagonaux de la matrice des opérateurs a_k et a_k^+ , intervenants dans H_{AR} disparaissent. Alors l'équation devient :

$$\begin{aligned}
& (\partial/\partial t)\rho_A(t) + i\omega_0[S^+S^-, \rho_A(t)] - i\Omega [\{S^+e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} + S^-e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\}, \rho_A(t)] = \\
& - \sum_k \int_0^{+\infty} g_k g_k^* d\tau \{e^{i\omega_0(t-\tau)} e^{-i\omega(t-\tau)} [S^+, S^- \rho_A(t)] \\
& + e^{-i\omega_0(t-\tau)} e^{i\omega(t-\tau)} [S^-, -\rho_A(t) S^+]\}
\end{aligned} \tag{3.85}$$

La somme sur les modes du vide peut être remplacée par une intégrale sur les vecteurs d'ondes. En prenant qu'un seul mode occupe, dans l'espace des vecteurs d'onde, un volume :

$$(\Delta k)^3 = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 = \frac{(2\pi)^3}{V} \tag{3.86}$$

on peut maintenant faire le remplacement :

$$\sum_k \longrightarrow \frac{L^3}{(2\pi)^3} \int d^3k \tag{3.87}$$

aussi la transition vers l'intégration sur les fréquences $\omega = kc$ et les directions du vecteur d'onde donne :

$$\frac{L^3}{(2\pi)^3} \int d^3k \longrightarrow \frac{L^3}{(2\pi)^3} \int kd kd\phi \longrightarrow \frac{L^3}{(2\pi c)^3} \int \omega^2 d\omega d\phi \quad (3.88)$$

où $d\phi = \sin\theta d\theta d\varphi$.

Il est noté que, selon la loi de la conservation d'énergie, les photons émis sont très proches de la fréquence de la transition atomique $\omega \simeq \omega_0$. Sous les considérations précédentes l'intégrale sur les fréquences se réduit à une formule bien connue :

$$\int e^{i(\omega-\omega_0)(\tau-t)} d\omega = 2\pi\delta(t-\tau) \quad (3.89)$$

Alors l'intégration sur le temps réduit l'intégrale à une intégrale finale sur l'angle solide ϕ . En considérant que la direction de l'axe de quantification OZ est définie par la direction du vecteur \vec{E}_k , sachant qu'on peut décrire le produit scalaire $\vec{d} \cdot \vec{\varepsilon}_k$ de g_k comme $\vec{d} \cdot \vec{\varepsilon}_k = d \cos\theta$; on obtient pour l'intégrale finale $\int \cos^2\theta d\phi = \frac{4}{3}\pi$ d'où le résultat de l'intégrale totale est :

$$\frac{L^3}{(2\pi c)^3} \int \int \int g_k g_k^* \omega^2 e^{i\omega_0(t-\tau)} e^{-i\omega(t-\tau)} d\omega d\phi d\tau = \frac{2d^2\omega_0^3}{3\hbar c^3} = \frac{W_{sp}}{2} = \frac{\Gamma}{2} = \gamma \quad (3.90)$$

tel que Γ est la largeur naturelle du niveau excité e .

Alors l'équation pilote du mouvement, en ignorant l'indice A , devient :

$$0 = (\partial/\partial t)\rho(t) + i\omega_0[S^+S^-, \rho(t)] - i\Omega [\{S^+ e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} + S^- e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\}, \rho(t)] \\ + \gamma(S^+S^-\rho(t) - 2S^-\rho S^+ + \rho S^+S^-) \quad (3.91)$$

Les équations de Bloch du système sont obtenues à partir de la dernière équation pour tous les éléments de $\rho(t)$ [19, 43] :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\rho_{ee} &= i\Omega(\vec{r})(\rho_{ge}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} - \rho_{eg}e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}) - 2\gamma\rho_{ee} \\ \frac{\partial}{\partial t}\rho_{eg} &= -i\omega_0\rho_{eg} + i\Omega(\vec{r})(\rho_{gg} - \rho_{ee})e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} - \gamma\rho_{eg} \\ \frac{\partial}{\partial t}\rho_{gg} &= i\Omega(\vec{r})(\rho_{eg}e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} - \rho_{ge}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}) + 2\gamma\rho_{ee} \end{aligned} \quad (3.92)$$

Si on pose :

$$\rho_{ge} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = \sigma_{ge} \quad (3.93)$$

les équations précédentes seront :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_{ee} &= i\Omega(r)(\sigma_{ge} - \sigma_{eg}) - 2\gamma\rho_{ee} \\ \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{eg} &= i\Omega(r)(\rho_{gg} - \rho_{ee}) - [\gamma + i(\vec{k}\cdot\vec{v} - \delta)]\sigma_{eg} \\ \frac{\partial}{\partial t} \rho_{gg} &= i\Omega(r)(\sigma_{eg} - \sigma_{ge}) + 2\gamma\rho_{ee} \end{aligned} \quad (3.94)$$

à partir de ces équations les éléments évolués de la matrice densité sont :

$$\begin{aligned} \rho_{ee} &= \frac{\Omega^2(\vec{r})}{\gamma^2 + 2\Omega^2(\vec{r}) + (\delta - \vec{k}\cdot\vec{v})^2} \\ \rho_{gg} &= \frac{\gamma^2 + \Omega^2(\vec{r}) + (\delta - \vec{k}\cdot\vec{v})^2}{\gamma^2 + 2\Omega^2(\vec{r}) + (\delta - \vec{k}\cdot\vec{v})^2} \\ \sigma_{eg} &= -\frac{\Omega(\vec{r})(\delta - \vec{k}\cdot\vec{v} - i\gamma)}{\gamma^2 + 2\Omega^2(\vec{r}) + (\delta - \vec{k}\cdot\vec{v})^2} \end{aligned} \quad (3.95)$$

où : $\delta = \omega - \omega_0$ est le désaccord entre la fréquence laser et celle de la transition atomique.

3.3 Les forces radiatives

Les temps d'interaction entre l'atome et l'onde laser sont grands devant la durée de vie du niveau atomique excité [12, 20, 25, 43] :

$$\tau_{int} \gg \tau_{sp} \quad , \quad (3.96)$$

de nombreux processus d'émission spontanée prennent alors place pendant l'interaction [25].

Dans le cadre de la description semiclassique de la dynamique atomique, où le recul du photon est négligé, le champ laser ne peut pas influencer directement sur le mouvement translatif de l'atome [43].

Dans l'espace de \vec{r} la fonction d'onde atomique est supposée comme un paquet d'onde

localisé centré en \vec{r}_{at} , et son extension Δr vérifie [2, 25] :

$$\Delta r \ll \lambda$$

Alors dans la zone de l'espace occupé par l'atome, le champ laser varie d'une manière très lente [25].

Dans l'espace des \vec{P} , la fonction d'onde atomique est centrée sur $\vec{P} = 0$ et son extension ΔP vérifie :

$$k \cdot \frac{\Delta P}{m} \ll \Gamma \quad (3.97)$$

Alors l'effet Doppler résiduel $k \cdot \frac{\Delta P}{m}$ est négligeable devant la largeur naturelle Γ des états atomiques excités et l'évolution de l'état interne atomique est pratiquement la même que pour un atome immobile [25].

A partir de l'Hamiltonien du système, l'équation de mouvement de l'opérateur impulsion de l'atome pris en point de vue de Heisenberg [2, 25] :

$$\frac{d}{dt} \vec{P} = \frac{i}{\hbar} [H, \vec{P}] = -\vec{\nabla}_{\vec{r}} U = \vec{F} + \vec{F}_q \quad (3.98)$$

où U est la partie d'interaction de l'Hamiltonien :

$$U = H_{AL} + H_{AR} \quad (3.99)$$

la quantité $\vec{F} + \vec{F}_q$ joue le rôle d'une force qui modifie le mouvement de l'atome, tel que \vec{F} est liée au couplage atome champ laser :

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}_{\vec{r}} H_{AL} = \vec{\nabla}(\vec{d} \cdot \vec{E}) = d \cdot \vec{\nabla} E(\vec{r}, t) \quad (3.100)$$

et \vec{F}_q est liée au couplage atome-champ quantique :

$$\vec{F}_q = -\vec{\nabla}_{\vec{r}} H_{AR} = \vec{\nabla}(\vec{d} \cdot \vec{E}_q) = d \cdot \vec{\nabla} E_q(\vec{r}, t) \quad (3.101)$$

L'atome émet les photons dans des directions aléatoires [1], donc la quantité \vec{F}_q sera fluctuante [2, 12], alors elle est nulle en moyenne [1, 25]. La force vue par l'atome maintenant est

calculée à partir des valeurs moyennes de $F(\vec{r})$, évaluées grâce au théorème d'Ehrenfest :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \vec{P} \rangle &= \langle d \cdot \vec{\nabla} E(\vec{r}, t) \rangle = \langle d \rangle \cdot \langle \vec{\nabla} E(\vec{r}, t) \rangle \\ &= \langle \psi_{int} | d | \psi_{int} \rangle \cdot \langle \psi_r | \vec{\nabla} E(\vec{r}, t) | \psi_r \rangle \end{aligned} \quad (3.102)$$

La valeur moyenne du champ est calculée au centre du paquet d'onde \vec{r}_{at} [2] :

$$\langle \psi_r | \vec{\nabla} E(\vec{r}, t) | \psi_r \rangle = \int d^3r |\psi(\vec{r}, t)| \vec{\nabla} E(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \{E(\vec{r}, t)\}_{\vec{r}_{at}} \quad (3.103)$$

La valeur moyenne du moment dipolaire est calculée par la moyenne statistique quantique [12, 37, 43] :

$$\langle \vec{d} \rangle = Tr(\rho \vec{d}) \quad (3.104)$$

La force radiative, qui se produit de l'interaction du moment dipolaire avec le gradient du champ laser d'onde $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0(\vec{r}) \cos(\varphi(\vec{r}) - \omega t)$, comporte donc deux contributions :

$$\vec{F} = \langle d \rangle \cdot \vec{\nabla} \{E(\vec{r}, t)\}_{\vec{r}} \quad (3.105)$$

$$\vec{F} = (\langle d \rangle \cdot \vec{\nabla} \{E_0(\vec{r}, t)\} e^{i(\varphi(\vec{r}) - \omega t)} + c.c) + i(\langle d \rangle \cdot \vec{\nabla} \varphi(\vec{r}) \cdot E_0(\vec{r}, t) e^{i(\varphi(\vec{r}) - \omega t)} - c.c) \quad (3.106)$$

l'une dépend du gradient de l'amplitude, ou de l'intensité, de l'onde électromagnétique c'est la partie réactive de la réponse atomique, on l'appelle force dipolaire [2]. L'autre dépend du gradient de la phase de l'onde c'est la partie dissipative de la réponse atomique, on l'appelle pression de radiation résonnante [2, 43]. Dans cette étude les expressions des deux forces sont données par :

$$\vec{F}_{pr} = \frac{i}{2} \langle d \rangle \vec{k} E_0 (e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} - e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}) = 2\hbar \vec{k} \Omega(\vec{r}) \text{Im} \sigma_{eg} \quad (3.107)$$

$$\vec{F}_{gr} = \frac{1}{2} \langle d \rangle (e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}) \vec{\nabla} E_0(\vec{r}) = 2\hbar (\vec{\nabla} \Omega(\vec{r})) \text{Re} \sigma_{eg} \quad (3.108)$$

où :

$$\langle \vec{d} \rangle = \vec{d} (\sigma_{ge} e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + \sigma_{eg} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}) \quad (3.109)$$

Selon les solutions des équations d'évolution de la matrice densité, ces forces se réécrivent

comme :

$$\vec{F}_{pr} = \hbar \vec{k} \gamma \frac{G(\vec{r})}{1 + G(\vec{r}) + (\delta - \vec{k} \cdot \vec{v})^2 / \gamma^2} \quad (3.110)$$

$$\vec{F}_{gr} = -\frac{1}{2} \hbar (\delta - \vec{k} \cdot \vec{v}) \frac{\vec{\nabla} G(\vec{r})}{1 + G(\vec{r}) + (\delta - \vec{k} \cdot \vec{v})^2 / \gamma^2} \quad (3.111)$$

où :

$$G(\vec{r}) = \frac{2\Omega^2(\vec{r})}{\gamma^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{dE_0(\vec{r})}{\hbar \gamma} \right)^2 = \frac{I(\vec{r})}{I_S} \quad (3.112)$$

$G(\vec{r})$ est le paramètre de saturation sans dimension, $I(\vec{r}) = (c/8\pi)E_0^2(\vec{r})$ est l'intensité du laser au point \vec{r} , et $I_S = \hbar \gamma \omega_0^3 / 6\pi c^2$ est l'intensité de saturation qui est également un paramètre empirique déterminé de façon expérimentale, et qui s'exprime généralement en W/m^2 [2, 43]. Pour une saturation très faible $G \ll 1$ la différence de population entre le niveau fondamental et le niveau excité $\varpi = \rho_{gg} - \rho_{ee} = 1$, c'est à dire que la population dans l'état fondamental est grande que celle de l'état excité, et pour $G \gg 1$ les populations des deux niveaux sont égaux et $\varpi = 0$ [20].

3.4 L'interprétation des forces radiatives

3.4.1 La force dissipative ou pression de radiation

Dans l'onde laser, l'atome effectue des cycles de fluorescence, chacun de ces cycles lui transférant en moyenne l'impulsion $\hbar \vec{k}$, $\hbar \vec{k}$ lors de l'absorption d'un photon laser, et $\vec{0}$ en moyenne lors de l'émission d'un photon de fluorescence [25, 43] :

$$\vec{F}_{pr} = \hbar \vec{k} \gamma \frac{G(\vec{r})}{1 + G(\vec{r}) + (\delta - \vec{k} \cdot \vec{v})^2 / \gamma^2} \quad (3.113)$$

Pour une mélasse optique à une dimension :

$$\vec{F}_{pr} = \hbar \vec{k} \gamma \left(\frac{G(\vec{r})}{1 + G(\vec{r}) + (\delta - \vec{k} \cdot \vec{v})^2 / \gamma^2} - \frac{G(\vec{r})}{1 + G(\vec{r}) + (\delta + \vec{k} \cdot \vec{v})^2 / \gamma^2} \right) \quad (3.114)$$

L'ordre de grandeur de cette force peut être considérable pour un faisceau laser saturant où $G(\vec{r}) \gg 1$, la force $\hbar \vec{k} \gamma$ pour l'atome de sodium est 100 000 fois supérieure à la force de gravitation [25]. Il est ainsi possible, grâce à la pression de radiation, de ralentir et même

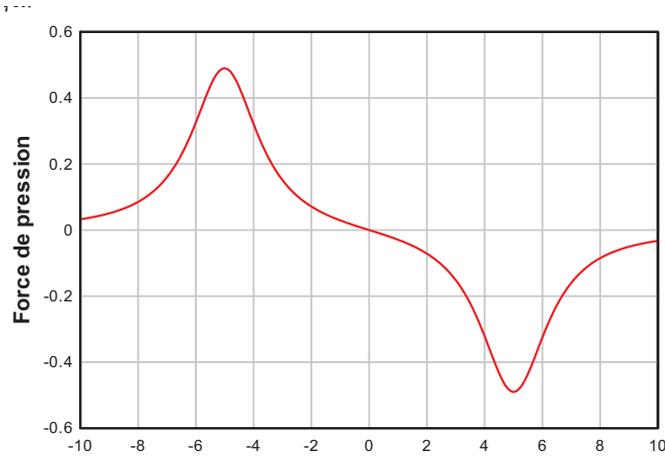


FIG. 3-2 – Force de pression de radiation $\vec{F}_{pr}/\hbar k\gamma$, pour $\delta = -5\gamma$ et $G = 1$.

d'immobiliser complètement, sur une distance de l'ordre du mètre, des jets atomiques dont la vitesse initiale est de l'ordre de $1000m/s$ [2, 25].

3.4.2 La force réactive ou force dipolaire

La force réactive, liée au gradient d'intensité s'écrit ici :

$$\vec{F}_{gr} = -\frac{1}{2}\hbar(\delta - \vec{k} \cdot \vec{v}) \frac{\vec{\nabla}G(\vec{r})}{1 + G(\vec{r}) + (\delta - \vec{k} \cdot \vec{v})^2/\gamma^2} \quad (3.115)$$

Pour une mélasse optique à un dimension :

$$\vec{F}_{gr} = -\frac{1}{2}\hbar[(\delta - \vec{k} \cdot \vec{v}) \frac{\vec{\nabla}G(\vec{r})}{1 + G(\vec{r}) + (\delta - \vec{k} \cdot \vec{v})^2/\gamma^2} - (\delta + \vec{k} \cdot \vec{v}) \frac{\vec{\nabla}G(\vec{r})}{1 + G(\vec{r}) + (\delta + \vec{k} \cdot \vec{v})^2/\gamma^2}] \quad (3.116)$$

Pour des vitesses faibles cette force est dérivée du potentiel [43] :

$$U = \frac{1}{2}\hbar\delta \ln\left(1 + \frac{G(\vec{r})}{1 + \delta^2/\gamma^2}\right) \quad (3.117)$$

$$U = \frac{1}{2}\hbar(\omega - \omega_0) \ln\left(1 + \frac{G(\vec{r})}{1 + (\omega - \omega_0)^2/\gamma^2}\right) \quad (3.118)$$

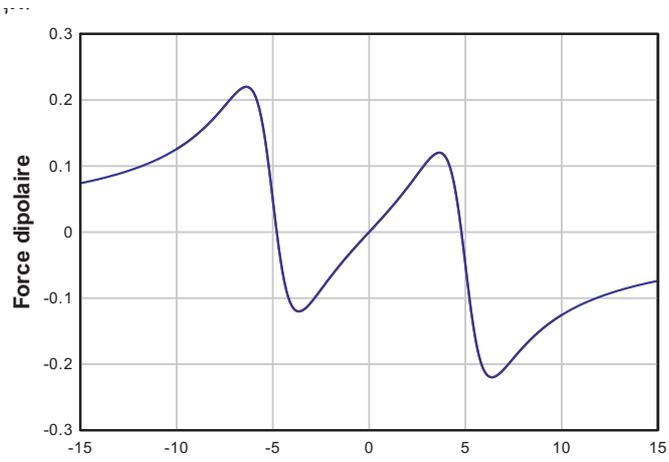


FIG. 3-3 – La force de gradient $\vec{F}/\hbar(-\vec{\nabla}G/G)\gamma$, pour $\delta = -5\gamma$ et $G = 1$, où la quantité $(-\vec{\nabla}G/G)$ est positive pour un faisceau laser a une maximum d'intensité proche des axes [5].

Pour un désaccord vers le rouge $\delta < 0$, les régions d'intensité maximale, comme la zone focale d'un faisceau laser, apparaissent donc comme des puits de potentiel pour l'atome, ces puits peuvent être utilisés pour piéger des atomes neutres [12].

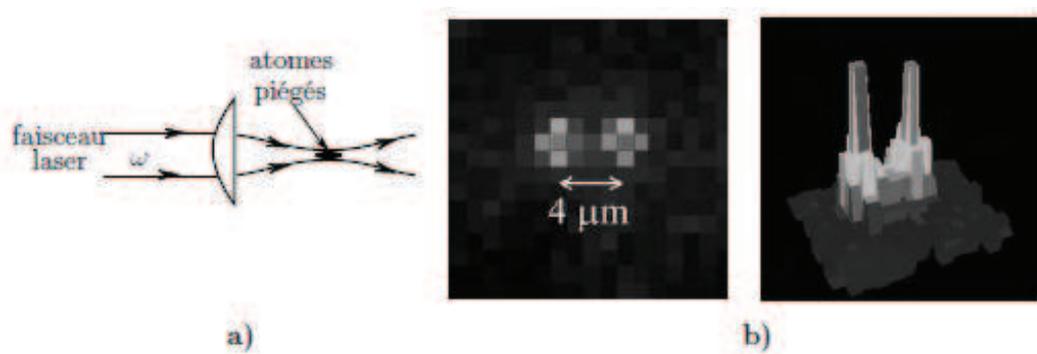


FIG. 3-4 – a) Piégeage d’atomes attirés dans la zone de focalisation d’un laser désaccordé négativement ($\omega < \omega_0$) : le potentiel dipolaire attractif permet de piéger les atomes à condition qu’ils aient une énergie cinétique suffisamment faible ; b) à l’aide de deux faisceaux fortement focalisés en des points voisins, on peut disposer deux atomes côte à côte : les atomes sont observables par la lumière qu’ils diffusent (figure P. Grangier, Institut d’Optique Théorique et Appliquée) [2].

Chapitre 4

La température limite de refroidissement d'un gaz atomique en interaction avec un champ laser

Le chapitre précédent de ce travail a été consacré à l'étude des variations de la dynamique interne d'un atome sous l'effet de l'interaction de cet atome avec le champ électromagnétique. Ce chapitre est consacré à l'étude de la dynamique externe d'un atome dans un champ électromagnétique. Le problème est de déterminer l'équation du mouvement macroscopique de l'atome, en tenant compte du recul qui se produit lors de chaque processus d'absorption ou d'émission de photons. Ce problème est plus compliqué que le précédent lors de l'existence de trois types de variables couplées : les variables externes dans l'espace réel, les variables internes qui sont les changements de l'état atomique lors de chaque processus d'absorption ou d'émission, et les variables du champ [25]. Pour obtenir une équation concernant les variables externes toutes seules, il faut éliminer les autres variables.

L'élimination des variables du champ électromagnétique permet d'obtenir, à partir de l'équation d'évolution du système total atome-champ, l'équation pilote qui décrit l'évolution de la matrice densité atomique réduite [1, 2, 25]. Ce problème est une démarche bien connue en physique atomique et en optique quantique, où le mouvement de l'atome dans le champ électromagnétique peut être rapproché du problème du mouvement Brownien d'une grosse particule

émmergée dans un bain de molécules beaucoup plus légères [12, 25]. Cette ressemblance n'est pas fortuite, le recul aléatoire de l'atome irradié par l'onde laser dû aux phénomènes d'émission spontanée provoque un effet très proche de celui de la force de Langevin qui décrit les chocs des particules légères sur la particule Brownienne [25, 43].

L'autre problème, est l'élimination des variables internes où leur évolution est fortement couplée à celle des variables externes, et pour l'éliminer il faut avoir recours à des approximations supplémentaires pour pouvoir extraire de l'équation pilote, une équation ne concernant que les variables externes. Par recours à la condition (3.8) du chapitre précédent où on suppose que l'impulsion des photons échangée lors des processus absorption-émission est très petite devant l'impulsion moyenne de l'atome (3.11), et par limiter ce problème de plus à des atomes relativement lents, l'état interne de l'atome peut alors suivre quasiadiabatement le mouvement externe, alors ce problème sera ainsi ramené au problème bien connu de l'élimination de variables rapides (variables internes) au profit de variables lentes (variables externes) [25].

Alors, le but dans cette partie est d'éliminer les variables internes et les variables du champ pour obtenir une équation fermée pour les variables externes [25, 38]. Cette équation est donc de type Fokker-Planck-Kramers décrivant l'évolution de la fonction de Wigner atomique. Elle contient trois termes : la force radiative moyenne agissant sur un atome au repos, la force de friction, linéaire par rapport à la vitesse atomique et responsable du refroidissement radiatif, dû à l'absorption des photons, et un terme de diffusion décrivant l'échauffement de l'atome sous l'effet des fluctuations des forces radiatives dûes à l'émission spontanée [25, 43].

Toutes ces approximations nous permettent d'obtenir l'équation qui décrit l'évolution de la dynamique externe d'un atome en interaction avec un champ cohérent. C'est pourquoi il a semblé intéressant de traiter dans cette partie le problème du mouvement Brownien d'une particule sans degré de liberté interne. Ce traitement nous permet d'avoir la possibilité d'étudier la variation de la température d'un gaz atomique lorsque celui-ci a atteint l'équilibre thermodynamique avec le rayonnement.

4.1 Le mouvement Brownien

Le mouvement Brownien est le mouvement compliqué de type erratique, effectué par une particule lourde immergée dans un fluide et subissant des collisions avec les molécules de celui-ci [38].

Le botaniste R. Brown découvrit le mouvement Brownien en été 1827, il observe au microscope des grains de pollen de l'ordre du micron en suspension dans l'eau. Il pensa d'abord que ce phénomène apparaît du fait que le pollen était constitué de matière vivante, mais ensuite il s'aperçut que des grains de matière inerte (bois pétrifié, verre, granite...) ont le même mouvement, aussi tous les particules qu'ils étaient de cet ordre de grandeur [23, 32, 49].

4.1.1 Le modèle de Langevin

Des explications théoriques du mouvement Brownien ont été données par A. Einstein en 1905 et M. Smoluchowski en 1906. Dans ces premiers modèles, l'inertie de la particule Brownienne n'était pas prise en compte. En 1908, P. Langevin a donné une description plus élaborée du mouvement Brownien, tenant compte des effets de l'inertie [38].

4.1.2 L'équation de Langevin

Le modèle de Langevin est un modèle phénoménologique classique, raisonnant pour simplifier sur un problème à une dimension. Deux forces, caractérisant toutes les deux, l'effet du fluide, agissent sur la particule de masse m ; une force de frottement visqueux $-m\beta v$, caractérisée par le coefficient de frottement $\beta > 0$, et une force fluctuante $F(t)$ représentant les impacts incessants des molécules du fluide sur la particule. Cette force est supposée indépendante de la vitesse de la particule, elle est aussi considérée comme une force extérieure, appelée force de Langevin [38, 49].

En l'absence de potentiel, la particule Brownienne est libre, et son équation de mouvement s'écrit :

$$m \frac{dv}{dt} = -m\beta v + F(t) \quad (4.1)$$

Cette équation est de Langevin, elle est historiquement le premier exemple d'une équation

différentielle stochastique, qui contient un terme aléatoire $F(t)$ ayant des propriétés statistiques spécifiées. La solution $v(t)$ de cette équation pour une condition initiale donnée est aussi un processus stochastique. Dans ce modèle la force de frottement et la force fluctuante représentent deux conséquences d'un même phénomène physique, qui est les collisions de la particule Brownienne avec les molécules du fluide [38].

Pour une définition complète du modèle, il reste à caractériser les propriétés statistiques de la force aléatoire.

4.1.3 La force de Langevin

Le fluide est supposé se trouver dans un état stationnaire où aucun instant ne joue de rôle privilégié. Alors la particule Brownienne obéit à une force fluctuante modélisée par un processus aléatoire stationnaire. Donc la moyenne à un temps $\langle F(t) \rangle$ ne dépend pas de t et la moyenne à deux temps $\langle F(t)F(t') \rangle$ ne dépend que de la différence $t - t'$. La valeur moyenne de la force de Langevin est supposée nulle :

$$\langle F(t) \rangle = 0 \tag{4.2}$$

pour qu'à l'équilibre la valeur moyenne de la vitesse de la particule Brownienne soit nulle, ceci veut dire qu'il n'y a pas de force extérieure appliquée [38].

La fonction d'autocorrélation de la force aléatoire :

$$\langle F(t)F(t + \tau) \rangle = g(\tau) \tag{4.3}$$

est une fonction paire de τ , décroissante sur un temps caractéristique τ_c , qui est de l'ordre de l'intervalle de temps moyen séparant deux collisions successives des particules du fluide sur la particule Brownienne [38, 49]. On pose :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) d\tau = 2\mathfrak{D}m^2 \tag{4.4}$$

De plus il est commode de supposer que $F(t)$ est un processus gaussien, où toutes les propriétés statistiques de la force de Langevin sont données de sa moyenne et de sa fonction

d'autocorrélation [38].

4.1.4 L'évolution de la vitesse

A l'instant $t = 0$, en l'absence d'une force extérieure appliquée, la vitesse de la particule Brownienne a une valeur bien définie, non aléatoire, notée v_0 :

$$v(0) = v_0 \quad (4.5)$$

où la solution de l'équation de Langevin correspondant s'écrit :

$$v(t) = v_0 e^{-\beta t} + \frac{1}{m} \int_0^t F(t') e^{-\beta(t-t')} dt', \quad t > 0 \quad (4.6)$$

ce qui signifie que la vitesse de la particule Brownienne est un processus aléatoire non stationnaire [32, 38, 49].

La force fluctuante est nulle en moyenne donc on obtient, à partir de la formule précédente :

$$\langle v(t) \rangle = v_0 e^{-\beta t}, \quad t > 0 \quad (4.7)$$

c'est la vitesse moyenne qui relaxe exponentiellement vers zéro avec un temps de relaxation $\tau_r = \beta^{-1}$.

La variance de la vitesse est définie par la formule suivante :

$$\sigma_v^2(t) = \langle [v(t) - \langle v(t) \rangle]^2 \rangle \quad (4.8)$$

Il vient, à partir des deux dernières formules que :

$$\sigma_v^2(t) = \frac{1}{m^2} \int_0^t dt' \int_0^t dt'' \langle F(t') F(t'') \rangle e^{-\beta(t-t')} e^{-\beta(t-t'')} \quad (4.9)$$

Lorsque la fonction d'autocorrélation de la force de Langevin est donnée par la formule simplifiée (4.4), on obtient :

$$\sigma_v^2(t) = 2\mathfrak{D} \int_0^t e^{-2\beta(t-t')} dt' \quad (4.10)$$

soit :

$$\sigma_v^2(t) = \frac{\mathfrak{D}}{\beta}(1 - e^{-2\beta t}), \quad t > 0 \quad (4.11)$$

La variance de la vitesse est nulle à l'instant $t = 0$. Ensuite la variance $\sigma_v^2(t)$ augmente avec le temps sous l'effet de la force de Langevin, qui provoque des fluctuations de vitesse. Cette croissance est linéaire :

$$\sigma_v^2(t) \simeq 2\mathfrak{D}t, \quad t \ll \tau_r \quad (4.12)$$

Cette formule est interprétée comme décrivant un phénomène de diffusion dans l'espace des vitesses. Le paramètre \mathfrak{D} est considéré comme un coefficient de diffusion dans l'espace des vitesses. Alors l'augmentation de la variance de la vitesse n'est pas indéfiniment, mais elle va saturer à la valeur \mathfrak{D}/β :

$$\sigma_v^2(t) \simeq \frac{\mathfrak{D}}{\beta}, \quad t \gg \tau_r \quad (4.13)$$

4.1.5 L'évolution de la fonction de distribution de la vitesse

La fonction de distribution $f(v, t)$ est défini comme la densité de probabilité pour qu'à l'instant t la vitesse de la particule soit comprise entre v et $v + dv$, elle donne, à chaque instant, des informations sur des quantités telles que la moyenne ou la variance de la vitesse [38].

L'équation de Langevin n'est pas valable que si τ_c est beaucoup plus petit que le temps de relaxation $\tau_r = \beta^{-1}$ de la vitesse moyenne, alors elle décrit l'évolution de la vitesse de la particule Brownienne sur un intervalle de temps Δt compris entre τ_c et τ_r [30, 32, 38, 49].

L'équation de Langevin est linéaire, et $F(t)$ est un processus gaussien, donc la vitesse $v(t)$ de la particule l'est aussi. Aussi cette équation est une équation différentielle de premier ordre, de sorte que l'évolution de la vitesse à partir d'un instant donné ne dépend que de sa valeur à ce même instant, et non de ses valeurs aux instants antérieurs. La vitesse de la particule Brownienne est, dans ce cas, un processus Markovien [38].

Par ces conditions, l'évolution de la fonction de distribution peut se trouver par relier $f(v, t + \Delta t)$ et $f(v, t)$ de manière directe, sans passer par l'intermédiaire de la distribution initiale, et

l'équation d'évolution est une équation aux dérivées partielles pour $f(v, t)$, où $\Delta t \ll \tau_r$:

$$f(v, t + \Delta t) - f(v, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial v^n} (M_n f) \Delta t \quad (4.14)$$

lorsque Δt tend vers zéro, on obtient l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $f(v, t)$, qui est obtenue à partir du développement de Kramers-Moyal [38] :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial v^n} (M_n f) \quad (4.15)$$

L'équation de Fokker-Planck

L'approximation de Fokker-Planck consiste à supposer que les termes d'ordre $n \geq 3$ de la série précédente peuvent être négligés. On obtient alors l'équation aux dérivées partielles plus simple :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial v} (M_1 f) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v^2} (M_2 f) \quad (4.16)$$

proposée par A.D. Fokker en 1913 et M. Planck en 1917 [38, 49].

Pour une particule Brownienne décrite par l'équation de Langevin, les coefficients M_1 et M_2 sont donnés par :

$$M_1 = -\beta v, \quad M_2 = 2\mathfrak{D} \quad (4.17)$$

l'équation de Fokker-Planck s'écrit donc :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v} (\beta v f) + \frac{\partial^2}{\partial v^2} (\mathfrak{D} f) \quad (4.18)$$

cette équation a la forme d'une équation de diffusion dans l'espace des vitesses, on peut aussi l'écrire sous la forme d'une équation de continuité :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial v} = 0 \quad (4.19)$$

dans laquelle le courant de probabilité J est défini par :

$$J = -\gamma v f + -\mathfrak{D} \frac{\partial f}{\partial v} \quad (4.20)$$

où l'évolution de la solution de l'équation de Fokker-Planck est décrite par l'image hydrodynamique d'un écoulement continu dans l'espace des vitesses, et le courant de probabilité correspondant est la somme du courant de convection $-\beta v f$ et du courant de diffusion $-\mathfrak{D} \partial f / \partial v$ [23, 32, 38].

La solution fondamentale $f(v, t)$ est donnée par :

$$f(v, t) = \left(\frac{\beta}{2\pi\mathfrak{D}}\right)^{\frac{1}{2}} (1 - e^{-2\beta t})^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{\beta}{2\mathfrak{D}} \frac{(v - v_0 e^{-\beta t})^2}{1 - e^{-2\beta t}}\right], \quad t > 0 \quad (4.21)$$

Lorsque $t \rightarrow \infty$ ($\beta t \gg 1$), la solution fondamentale tend vers la distribution stationnaire :

$$f(v, t) = \left(\frac{\beta}{2\pi\mathfrak{D}}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\beta}{2\mathfrak{D}} v^2\right) \quad (4.22)$$

4.2 L'équation pilote du mouvement Brownien

À partir du modèle de Langevin, on peut négliger les variables du champ. Il reste maintenant à déterminer les deux coefficients : le coefficient de friction β , et le coefficient de diffusion \mathfrak{D} .

La détermination de ces coefficients doit être limitée à des situations relevant du même type d'approximations que celles utilisées dans l'établissement de l'équation pilote décrivant l'évolution d'un atome couplé au champ de rayonnement quantique et autre classique. La première situation est la supposition que les fluctuations du réservoir sont suffisamment rapides pour que l'effet de l'interaction entre le système étudié, ou particule Brownienne, et le réservoir, fluide de particules légères puisse être traité perturbativement pendant le temps de corrélation de ces fluctuations. On supposera aussi que le réservoir se trouve, en l'absence de la particule Brownienne, dans un état stationnaire qui n'est pas nécessairement l'équilibre thermodynamique [25].

L'équation pilote (3.91) ne fournit plus des informations sur l'évolution de la dynamique externe de l'atome, et il faut la projeter sur l'espace des états externe ou l'espace des impulsions

des vecteurs propres $|\vec{P}\rangle$, pour trouver :

$$\rho(\vec{P}, t) = \langle \vec{P} | \rho(t) | \vec{P} \rangle \quad (4.23)$$

La projection se fait sans difficulté. En utilisant, à partir de [25] :

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} |\vec{P}\rangle = |\vec{P} + \hbar\vec{k}\rangle \quad (4.24)$$

L'équation pilote devient :

$$\begin{aligned} 0 = & (\partial/\partial t)\rho(\vec{P}, t) + i\omega_0[S^+S^-, \rho(\vec{P}, t)] - i\Omega \{[S^+e^{i\omega t}, \rho(\vec{P} - \hbar\vec{k}, t)] \\ & + [S^-e^{-i\omega t}, \rho(\vec{P} + \hbar\vec{k}, t)]\} + \gamma(S^+S^-\rho(\vec{P}, t) - 2S^-\rho(\vec{P}, t)S^+ + \rho(\vec{P}, t)S^+S^-) \end{aligned} \quad (4.25)$$

La description du mouvement atomique peut se faire par l'intermédiaire de la fonction $\Pi(\vec{P}, t)$:

$$\Pi(\vec{P}, t) = \sum_i \rho_{ii}(\vec{P}, t) \quad (4.26)$$

$\Pi(\vec{P}, t)$ est la probabilité de trouver la particule Brownienne avec l'impulsion \vec{P} à l'instant t . Mais l'équation pilote (4.25) ne fournit plus directement l'évolution de $\Pi(\vec{p}, t)$; elle donne plutôt quatre équations d'évolution couplées pour chacune des composantes de la matrice densité atomique $\rho(t)$ [25, 43], où l'on a posé :

$$\rho_{ij}(\vec{P}, t) = \langle i, \vec{P} | \rho(t) | j, \vec{P} \rangle, \quad i, j = e, g \quad (4.27)$$

$\Pi(\vec{P}, t)$ est alors donnée par :

$$\Pi(\vec{P}, t) = (\rho_{ee} + \rho_{gg})(\vec{P}, t) \quad (4.28)$$

$\Pi(\vec{P}, t)$ ne suffit plus à caractériser l'état atomique externe, car la présence du faisceau laser révoque l'invariance par translation du problème [25], et il faut avoir recours à la fonction de Wigner atomique :

$$W(\vec{r}, \vec{P}, t) = \sum_{ii} (2\pi\hbar)^{-\frac{3}{2}} \int d^3s e^{-\vec{P}\cdot\vec{s}/\hbar} \left\langle \vec{r} + \frac{\vec{s}}{2} \left| \rho_{ii}(\vec{P}, t) \right| \vec{r} - \frac{\vec{s}}{2} \right\rangle \quad (4.29)$$

$W(\vec{r}, \vec{P}, t)$ représente la quasi-probabilité de trouver l'atome au point \vec{r} , avec l'impulsion \vec{P} , et à l'instant t [22, 25, 43].

4.2.1 L'équation de Fokker-Planck pour le mouvement Brownien

L'équation pilote telle qu'elle est écrite en (4.25) est malheureusement difficilement exploitable car elle est non-locale dans l'espace des impulsions : elle couple une impulsion \vec{P} à toutes les autres impulsions $\vec{P} + \hbar\vec{k}$. Le but est de simplifier, moyennant certaines approximations, l'équation d'évolution de $W(\vec{r}, \vec{P}, t)$ pour la transformer en une équation de Fokker-Planck du type (4.16) [25].

Les approximations du problème

Nous commençons par estimer l'impulsion $\hbar\vec{k}$ transférée au cours d'un choc pour la comparer à l'impulsion moyenne de la particule Brownienne \vec{P} .

L'approximation de grande longueur d'onde donne que l'écart quadratique moyen de la coordonnée r de l'atome est très petit devant la longueur d'onde du laser :

$$\Delta r \ll \lambda$$

et la relation de Heisenberg donne :

$$\Delta P_i \gg \frac{\hbar}{2\lambda} \simeq \hbar k$$

ceci permet de faire le développement :

$$W(\vec{r}, \vec{P} \pm \hbar\vec{k}, t) = W(\vec{r}, \vec{P}, t) + \hbar\vec{k} \frac{\partial}{\partial \vec{P}} W(\vec{r}, \vec{P}, t) + \dots \quad (4.30)$$

Deuxièmement, cet étude sera limitée aux atomes lents où l'effet Doppler $\vec{k} \cdot \vec{v}$ est petit devant la largeur naturelle Γ du niveau excité, c'est la situation où la particule Brownienne est à peu près thermalisée, ce qui signifie que l'énergie cinétique moyenne de la particule Brownienne $MV^2/2$, où V est sa vitesse quadratique moyenne, est de l'ordre de l'énergie cinétique moyenne d'une petite particule de fluide. La force de pression radiative vue par l'atome est considérée

comme une force de friction [25, 43] :

$$\vec{F}_{pr} = -\beta M \vec{v} \quad (4.31)$$

En fonction de ces approximations le développement de l'équation d'évolution de $W(\vec{r}, \vec{P}, t)$ se fait :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} W + \frac{\vec{P}}{M} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} W \right) = \frac{\partial}{\partial \vec{P}} (\beta \vec{P} W) + \frac{\partial^2}{\partial P^2} (DW) \quad (4.32)$$

cette équation est de type Fokker-Planck décrivant le mouvement Brownien de la particule lourde. Le terme $\frac{\vec{P}}{M} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} W$ de cette équation représente l'évolution due au vol libre atomique, le second qui est proportionnel à $\beta \vec{P}$, représente l'effet d'une force de friction $-\beta M \vec{v}$, le dernier terme décrit la diffusion de l'impulsion de la particule avec le coefficient de diffusion D [25].

Dans une mélasse optique à une dimension :

$$\vec{F}_{pr} = \hbar \vec{k} \gamma G(\vec{r}) \left(\frac{1}{1 + G(\vec{r}) + (\delta - \vec{k} \cdot \vec{v})^2 / \gamma^2} - \frac{1}{1 + G(\vec{r}) + (\delta + \vec{k} \cdot \vec{v})^2 / \gamma^2} \right)$$

alors selon :

$$\beta(v) = -\frac{\hbar k^2 G(\vec{r})}{M} \left(\frac{4\delta/\gamma}{(1 + G(\vec{r}) + (\delta + \vec{k} \cdot \vec{v})^2 / \gamma^2)(1 + G(\vec{r}) + (\delta - \vec{k} \cdot \vec{v})^2 / \gamma^2)} \right) \quad (4.33)$$

Le coefficient de friction doit être positif, ce qui assure l'effet du freinage des ondes sur les atomes, autrement dit c'est le cas où le coefficient de friction β assure la décélération des vitesses des atomes, alors $\delta < 0$ est le cas de refroidissement *Doppler*. Pour des vitesses et de paramètre de saturation suffisamment faibles et selon [43], le coefficient β s'écrit :

$$\beta = \frac{4\hbar k^2}{M} \frac{G|\delta|/\gamma}{(1 + \delta^2/\gamma^2)^2} \quad (4.34)$$

Le coefficient de diffusion D , pour ces conditions et aussi pour une mélasse optique à une

dimension, est donné à partir de l'équation de mouvement Brownien par :

$$D(v) = \frac{2}{3}\hbar^2 k^2 \gamma \left[\frac{G(\vec{r})}{1 + G(\vec{r}) + (\delta - \vec{k} \cdot \vec{v})/\gamma^2} + \frac{G(\vec{r})}{1 + G(\vec{r}) + (\delta + \vec{k} \cdot \vec{v})/\gamma^2} \right] + \quad (4.35)$$

$$\frac{1}{2}\hbar^2 k^2 \gamma G^2(\vec{r}) \left[\frac{[(\delta - \vec{k} \cdot \vec{v})/\gamma^2 - 3]}{[1 + G(\vec{r}) + (\delta - \vec{k} \cdot \vec{v})/\gamma^2]^3} + \frac{[(\delta + \vec{k} \cdot \vec{v})/\gamma^2 - 3]}{[1 + G(\vec{r}) + (\delta + \vec{k} \cdot \vec{v})/\gamma^2]^3} \right]$$

4.3 La température limite de refroidissement du gaz atomique en équilibre thermodynamique

L'idée de "température" dans le refroidissement laser exige une certaine discussion prudente. Dans la thermodynamique, la température est définie comme un paramètre de l'état d'un système fermé atteint l'équilibre thermique avec son environnement. Cela, bien sûr, exige qu'il y a le contact thermique ou l'échange de chaleur, avec l'environnement. Dans le refroidissement laser ce n'est pas clairement le cas parce qu'un échantillon d'atomes absorbent toujours et dispersent la lumière, faisant des changements majeurs à son environnement. En outre, il n'y a essentiellement aucun échange de chaleur, on ne peut pas considérer la lumière comme la chaleur bien que ce soit en effet une forme d'énergie. Ainsi le système peut très bien être dans une situation stationnaire, mais certainement pas dans l'équilibre thermique, pour que l'attribution "d'une température" thermodynamique soit complètement inopportune [20].

4.3.1 L'équilibre thermodynamique

Pour fixer les idées sur ce problème, il faut donc définir ce qu'on veut dire par cette expression, "équilibre thermodynamique" qui est appelé aussi "équilibre statistique".

Dans un système en équilibre thermodynamique, toutes les observations d'une variable macroscopique, telles que la densité, la pression, la température etc..., même pour une petite partie du système, ne dépendent pas du temps à condition que la mesure soit faite pendant un temps plus long que le temps de relaxation du système. Ce qui signifie que la moyenne sur un temps plus long que le temps de relaxation l'expérience donnera la même chose si on la répète plus tard [4, 20].

Aussi, il est constaté que tout système physique atteint l'équilibre thermodynamique lorsqu'on l'a laissé évoluer, en présence de contraintes extérieures indépendantes du temps, beau-

coup plus longtemps que le temps de relaxation, où cette échelle de temps peut être très différente du temps de relaxation signalé au paragraphe précédent. Alors, l'observation nous force à accepter l'idée que tous les systèmes macroscopiques sujets à des contraintes extérieures fixes atteignent éventuellement l'équilibre thermodynamique, et c'est la théorie cinétique qui nous renseigne sur le temps nécessaire pour atteindre l'équilibre thermodynamique [4].

Comme on l'a déjà souligné, les résultats précédents concernant les coefficients de friction et de diffusion de la particule Brownienne ont été obtenus avec la simple hypothèse d'un réservoir dans un état stationnaire, cet état n'est pas nécessairement l'équilibre thermodynamique, et il n'y a donc pas de relation simple entre β et D [25].

Si l'on considère maintenant le cas particulier d'un réservoir à l'équilibre thermodynamique, à la température T , où la particule Brownienne atteint l'équilibre thermodynamique avec le bain, la relation entre β et D se simplifie pour donner la relation d'Einstein [25, 38].

4.3.2 Relation d'Einstein

Pour $t \gg \beta^{-1}$, β^{-1} est le temps de relaxation du système, la vitesse moyenne (4.7) tend vers zéro, alors la variance de la vitesse tend vers :

$$\sigma_v^2(t) = \langle v^2(t) \rangle - \langle v(t) \rangle^2 \simeq \langle v^2(t) \rangle \quad (4.36)$$

l'équation (4.13) montre qu'alors :

$$\langle v^2(t) \rangle \simeq \frac{D}{\gamma} \quad (4.37)$$

et la variance de l'impulsion P :

$$\langle P^2(t) \rangle \simeq \frac{D}{\gamma} \quad (4.38)$$

cette valeur est indépendante de V_0 .

L'énergie moyenne du système tend vers la limite correspondante :

$$\langle E(t) \rangle = \frac{\langle P^2(t) \rangle}{2M} \simeq \frac{D}{2M\gamma} \quad (4.39)$$

et la particule brownienne est alors en équilibre avec le bain [38].

Si le bain se trouve lui-même en équilibre thermodynamique à la température T , l'énergie

moyenne de la particule en équilibre avec le bain prend sa valeur d'équipartition, où k_B est la constante de Boltzmann :

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2} k_B T \quad (4.40)$$

On en déduit, à partir de la relation (4.39), une relation entre la température, le coefficient de diffusion D , associé aux fluctuations de la vitesse, et le coefficient de friction β , qui caractérise la dissipation :

$$T = \frac{D}{M\beta k_B} \quad (4.41)$$

cette dernière est appelée la relation d'Einstein [25, 38, 43].

Cette relation qu'on impose généralement "a priori" dans l'étude du mouvement Brownien, est en effet nécessaire pour assurer que la particule Brownienne va se thermaliser avec le réservoir et acquérir elle aussi la température T [25].

4.3.3 La température limite du refroidissement Doppler

Par la considération des faibles vitesses, la température limite Doppler est souvent calculée par prendre la relation d'Einstein pour $D(v=0)$ [47, 43] :

$$T = \frac{D(0)}{M\beta k_B} = \frac{1}{3} \frac{\hbar\gamma}{k_B} \left(\frac{|\delta|}{\gamma} + \frac{\gamma}{|\delta|} \right) \quad (4.42)$$

où $D(v)$ est décrit par la relation (4.35) et β par (4.34).

la valeur $\frac{\hbar\gamma}{k_B}$ est une grandeur caractéristique, c'est la température correspondante à l'énergie associée à la largeur naturelle du transition atomique [20], appelée la température Doppler T_D :

$$T_D = \frac{\hbar\gamma}{k_B} \quad (4.43)$$

Mais lorsque le refroidissement laser est une méthode limitée par les processus aléatoires (l'émission spontanée), les vitesses des particules ne sont pas complètement nulles mais ont des valeurs relativement faibles.

Alors dans ce travail nous proposons de calculer la température limite d'un gaz atomique en interaction avec un champ laser tenant en compte les faibles valeurs des vitesses des atomes.

Comme nous l'avons vu déjà, lorsque le temps d'interaction est très grand devant le temps

de relaxation, le système se trouve en équilibre thermodynamique, ceci veut dire que les vitesses des particules obéissent à la distribution de Maxwell-Boltzmann [20] :

$$f(v) = \left(\frac{M}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{-M}{2k_B T}v^2\right) \quad (4.44)$$

ceci nous permet d'utiliser les coefficients de diffusion et de friction des relations (4.35,4.33) par ses moyennes en statistique de Maxwell-Boltzmann :

$$\langle D(v) \rangle = \left(\frac{M}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} D(v) \exp\left(\frac{-M}{2k_B T}v^2\right) dv \quad (4.45)$$

aussi pour le coefficient de friction :

$$\langle \beta(v) \rangle = \left(\frac{M}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \beta(v) \exp\left(\frac{-M}{2k_B T}v^2\right) dv \quad (4.46)$$

La température limite Doppler est donc obtenue par :

$$T = \frac{\langle D(v) \rangle}{M k_B \langle \beta(v) \rangle} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} D(v) \exp\left(\frac{-M}{2k_B T}v^2\right) dv}{M k_B \int_{-\infty}^{+\infty} \beta(v) \exp\left(\frac{-M}{2k_B T}v^2\right) dv} \quad (4.47)$$

cette expression est très compliquée, et ces intégrales s'expriment sous forme d'une série des fonctions hypergéométriques appelée la fonction de Meijer [24].

On recourt au calcul numérique par traiter ces integrale en utilisant la méthode du point fixe [33]. Ce travail donne des résultats en très bonne convergence avec d'autres travaux, mais par un décalage croissant, augmentation de température, dû à l'effet d'échauffement des faibles vitesses.

Chapitre 5

Résultats et discussions

5.1 La température limite Doppler à l'équilibre thermodynamique

Le traitement numérique de la relation de température décrite par (4.47), permet d'obtenir des bonnes informations, ou plutôt de très bonnes estimations des effets des faibles vitesses sur la variation de température d'un gaz atomique à l'équilibre thermodynamique avec les particules du champ.

Bien qu'un effet d'échauffement se manifeste, l'effet de faibles vitesses réduit les valeurs de désaccord au bout duquel le système est thermalisé, où les courbes montrent que seules les petites valeurs de désaccord admettent la réalisation de l'état thermalisé pour ce gaz atomique.

Pour une certaine valeur de désaccord les graphes présentent un pic à partir duquel les courbes laissent apparaître des fluctuations, où ces courbes ne sont pas lisses. Ce comportement peut être interprété par l'absence de thermalisation selon les interprétations des travaux expérimentaux de refroidissement évaporatif [13, 21].

5.1.1 L'effet d'échauffement des faibles vitesses

La variation de la température, dans une direction de l'espace, d'un gaz atomique en interaction avec un champ cohérent est étudiée pour des différents désaccords et pour faible saturation $G \ll 1$, tel que pour l'atome de ^{23}Na : la transition atomique utilisée est de longueur $\lambda = 0,6\mu\text{m}$

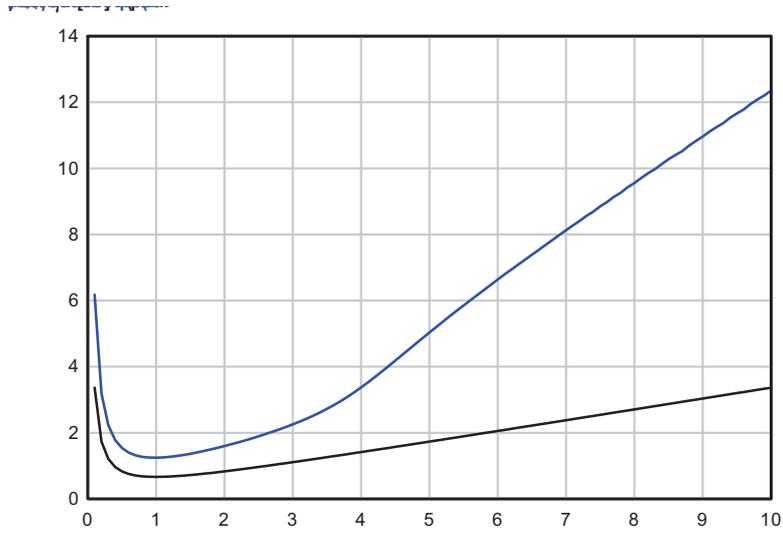


FIG. 5-1 – la variation de T/T_D en fonction de $|\delta|/\gamma$ pour $G \ll 1$; (bleu) notre travail pour ^{23}Na , (noir) le travail de [43].

et la demie largeur naturelle de l'état excité $\gamma = \pi \times 10\text{MHz}$ (figure(5-1)).

Pour des désaccords faibles nos résultats sont en bonne convergence avec des autres travaux [43, 47]. Cependant pour des valeurs de désaccord relativement grand nos courbes présentent une croissance rapide, ce qui signifie que pour ces valeurs la température du système va augmenter plus rapidement que leur augmentation dans les autres travaux [43, 47].

Pour les grands désaccords, la courbe (5-2) laisse apparaître un pic à partir duquel la température change sa direction par un abaissement considérable, et par des fluctuations remarquables.

Selon des études expérimentales pour le refroidissement évaporatif [13], les courbes montrent le même comportement avec nos résultats, sont interprétés par l'absence de thermalisation du système (atomes-champ), et la figure ci-dessous (5-3) présente le résultat expérimental de [13].

Ce qui signifie que notre méthode ne permet pas de suivre la dynamique de thermalisation.

La fraction T/T_D présente une valeur minimale pour un désaccord $|\delta| = \gamma$, cette valeur est la même que celle de l'article de V.Minogin et S.Chang [43] et de V.Minogin et J.Javanainen [47], où les vitesses faibles sont négligées devant le désaccord de l'onde et la relation de la

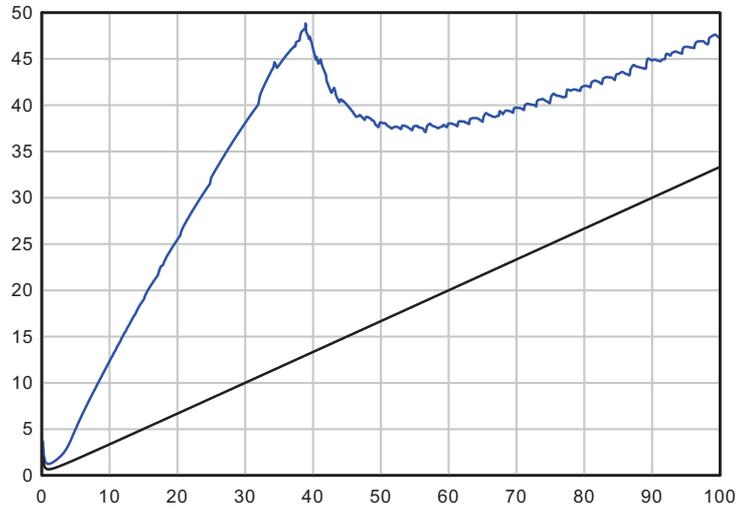


FIG. 5-2 – la variation de T/T_D en fonction de $|\delta|/\gamma$ pour $G \ll 1$; (bleu) notre travail pour ^{23}Na , (noir) le Ref [43].

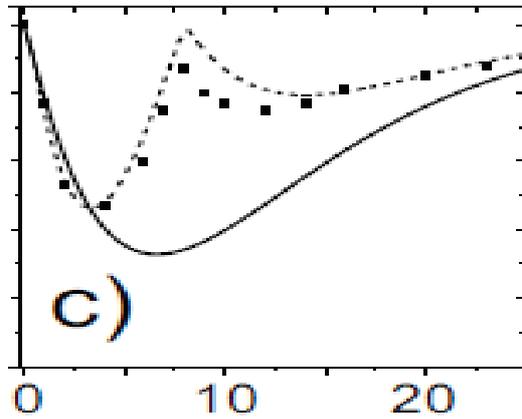


FIG. 5-3 – Mésure de température par filtrage radio-fréquence (MHz) pour le refroidissement évaporatif, les carrés sont des points expérimentaux [13].

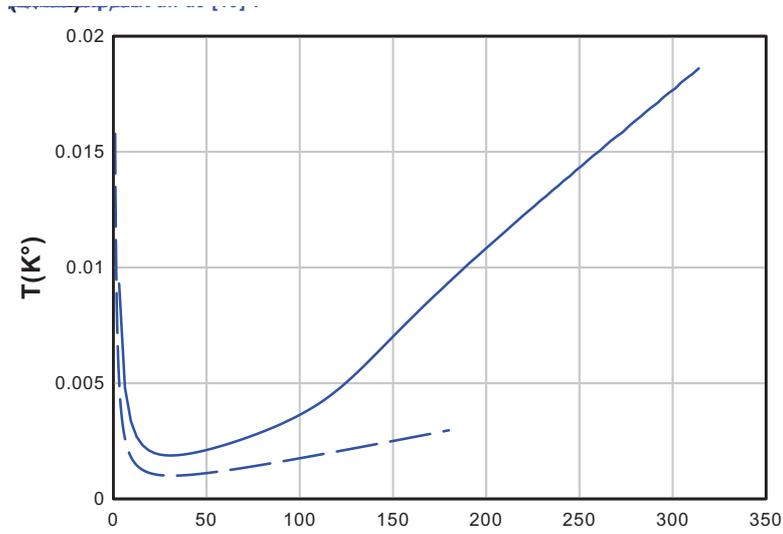


FIG. 5-4 – La variation de la température limite (K°) en fonction du désaccord (MHz). (Le bleu continu) notre travail , (le bleu discontinu) le travail de [43] pour ^{23}Na .

température dépend seulement du désaccord $|\delta|$ et de la largeur naturelle Γ de l'état excité de l'atome.

La courbe obtenue dans ce travail montre une croissance rapide en la comparant avec la théorie [43] ; cette croissance est due à l'effet des vitesses faibles qui sont prises en compte dans notre travail. Les vitesses faibles ajoutent à notre système des effets d'échauffement, ce qui va changer la vitesse de variation de la température en fonction du désaccord δ (la courbe (5-4)).

5.1.2 L'effet de la masse m

La relation obtenue dans [43, 47], est indépendante de la masse des atomes, cependant dans ce travail nous obtenons une relation dépendant de la masse des atomes.

À faible saturation ($G \ll 1$) et pour les petits désaccords, les deux atomes (^{87}Rb où ses propriétés sont données dans le tableau (2-1) et ^{23}Na) ont presque la même allure (figure (5-5)).

Mais pour des désaccords relativement grands les courbes laissent apparaître une grande différence entre ces deux atomes (figure (5-6)), et même pour des désaccords très grands la différence reste remarquable (figure (5-7)).

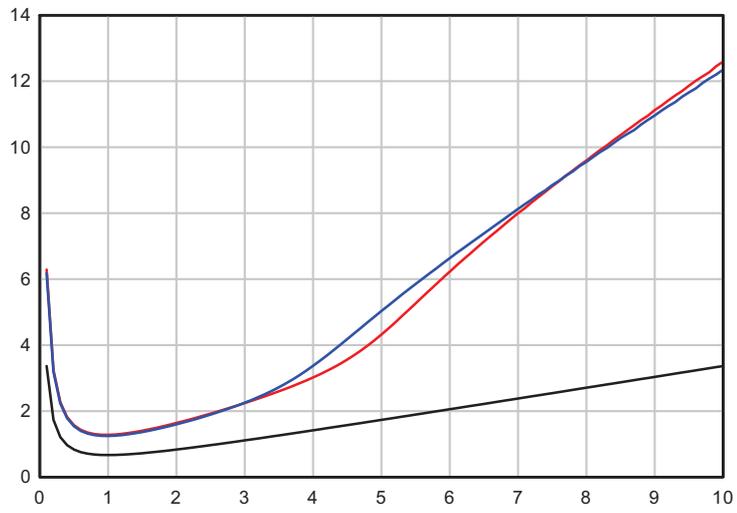


FIG. 5-5 – la variation de T/T_D en fonction de $|\delta|/\gamma$ pour $G \ll 1$; notre travail (rouge) pour le ^{87}Rb , (bleu) pour ^{23}Na , (noir) le travail de [43].

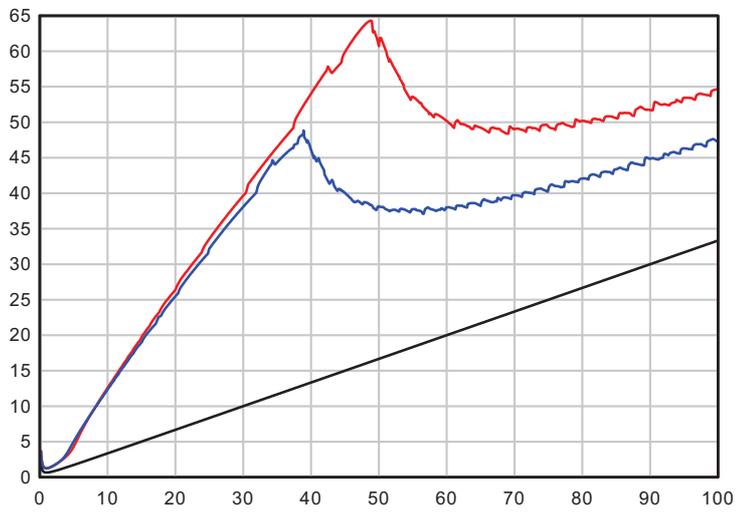


FIG. 5-6 – la variation de T/T_D en fonction de $|\delta|/\gamma$ pour $G \ll 1$; notre travail (rouge) pour le ^{87}Rb , (bleu) pour ^{23}Na , (noir) le travail de [43].

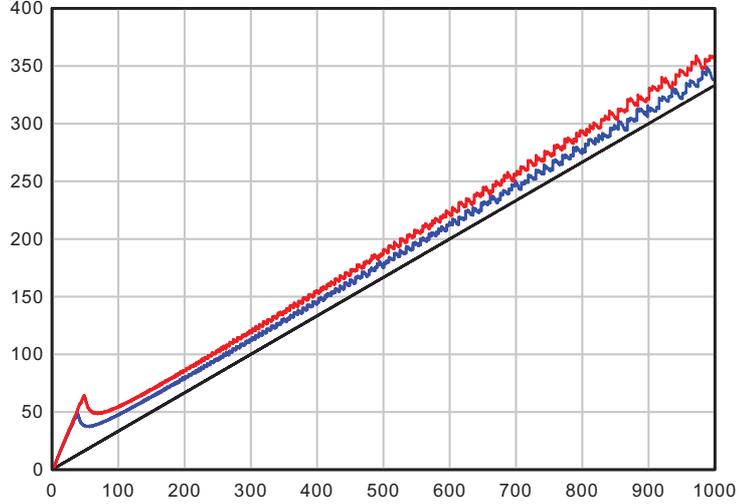


FIG. 5-7 – la variation de T/T_D en fonction de $|\delta|/\gamma$ pour $G \ll 1$; notre travail (rouge) pour le ^{87}Rb , (bleu) pour ^{23}Na , (noir) le travail de [43].

En ce qui concene la température limite du gaz, la température limite pour un gaz de ^{87}Rb est inférieure à celle d'un gaz de ^{23}Na , et nos courbes (5-8) donnent :

^{87}Rb (la courbe rouge) : pour ce travail $T_{\min} = 0.001176486\text{K}^\circ$ pour $|\delta| = 19.154\text{MHz}$

(discontinue) pour le travail de [43] $T_{\min} = 0.0006125596\text{K}^\circ$ pour $|\delta| = 19.2\text{MHz}$

^{23}Na (la courbe bleu) : pour ce travail $T_{\min} = 0.001876414\text{K}^\circ$ pour $|\delta| = 31.4\text{MHz}$

(discontinue) pour le travail de [43] $T_{\min} = 0.001004193\text{K}^\circ$ pour $|\delta| = 31.4\text{MHz}$

Bien qu'un gaz de ^{87}Rb peut atteindre une température limite minimale plus inférieure que celle d'un gaz de ^{23}Na , notre méthode pour ce dernier gaz permet de suivre la dynamique de thermalisation jusqu'aux valeurs de désaccord plus grandes que celles pour le premier (figure (5-9)).

5.1.3 L'effet du paramètre de saturation G

La température limite la plus basse est obtenue pour une sturation très faible $G \ll 1$, et pour des désaccords faibles (voir figure (5-10)).

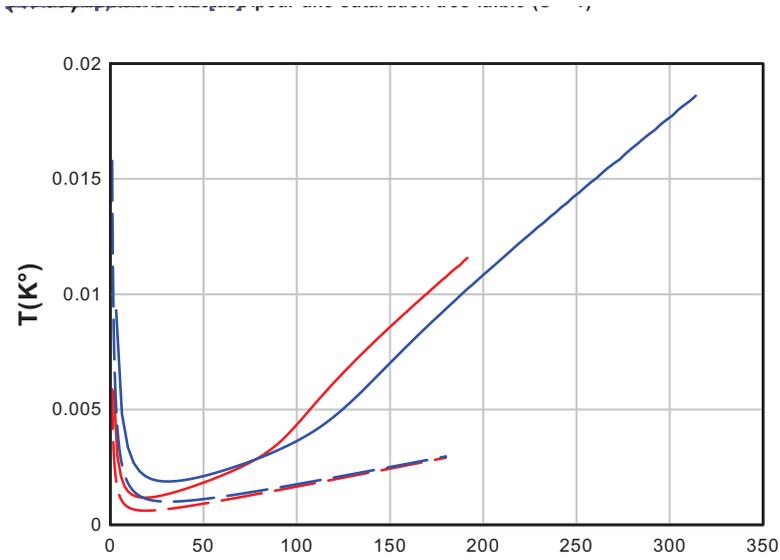


FIG. 5-8 – La variation de la température limite (K°) en fonction du désaccord (MHz). (Le rouge continu) notre travail , (le rouge discret) le travail de [43] pour ^{87}Rb . (Le bleu continu) notre travail , (le bleu discret) le travail de [43] pour ^{23}Na .

Pour des grands désaccords ces courbes coïncident ce que la figure (5-11) le montre.

5.2 La fonction de distribution des vitesses

Lorsque les particules du gaz atomique atteignent l'équilibre thermodynamique avec les particules du bain, la distribution des vitesses devient alors une distribution de Maxwell-Boltzmann, et leur variation selon le désaccord de l'onde incidente est illustrée dans la figure(5-12).

Lorsque la température du gaz décroît les particules s'accumulent dans l'espace des phases à la vitesse zéro [15], ce que la figure (5-12) le montre.

Ces valeurs, des nombres des particules qui ont la vitesse zéro sont loins des valeurs du seuil de la condensation de Bose-Einstein [46], et il faut continuer par des autres méthodes de refroidissement, comme le refroidissement évaporatif, pour obtenir des atomes condensés ayant les propriétés spectaculaires de cette transition de phase.

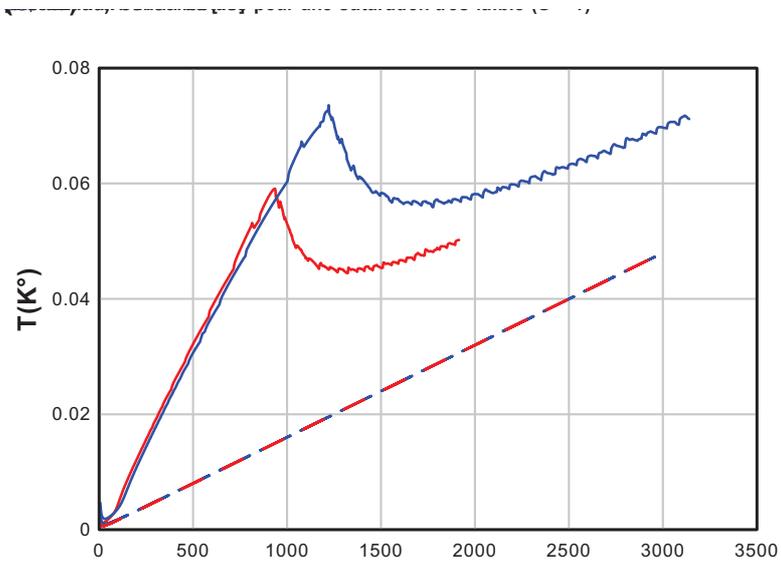


FIG. 5-9 – La variation de la température limite (K°) en fonction du désaccord (MHz). (Le rouge continu) notre travail , (le rouge discontinu) le travail de [43] pour ^{87}Rb . (Le bleu continu) notre travail , (le bleu discontinu) le travail de [43] pour ^{23}Na .

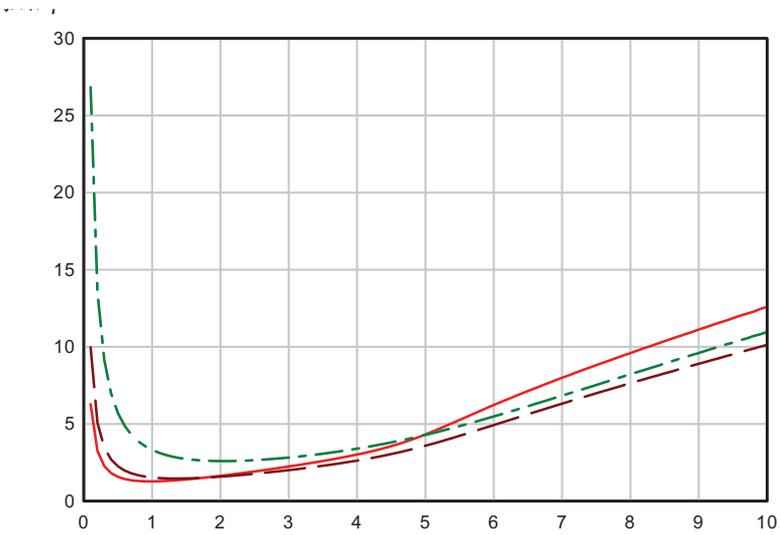


FIG. 5-10 – La variation de T/T_D en fonction de $|\delta|/\gamma$ pour ^{87}Rb et pour différentes saturations.

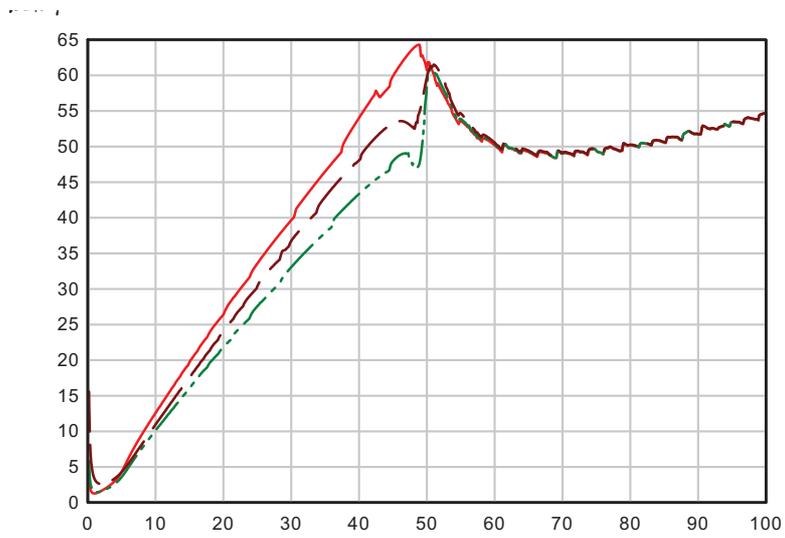


FIG. 5-11 – La variation de T/T_D en fonction de $|\delta|/\gamma$ pour ^{87}Rb et pour différentes saturations.

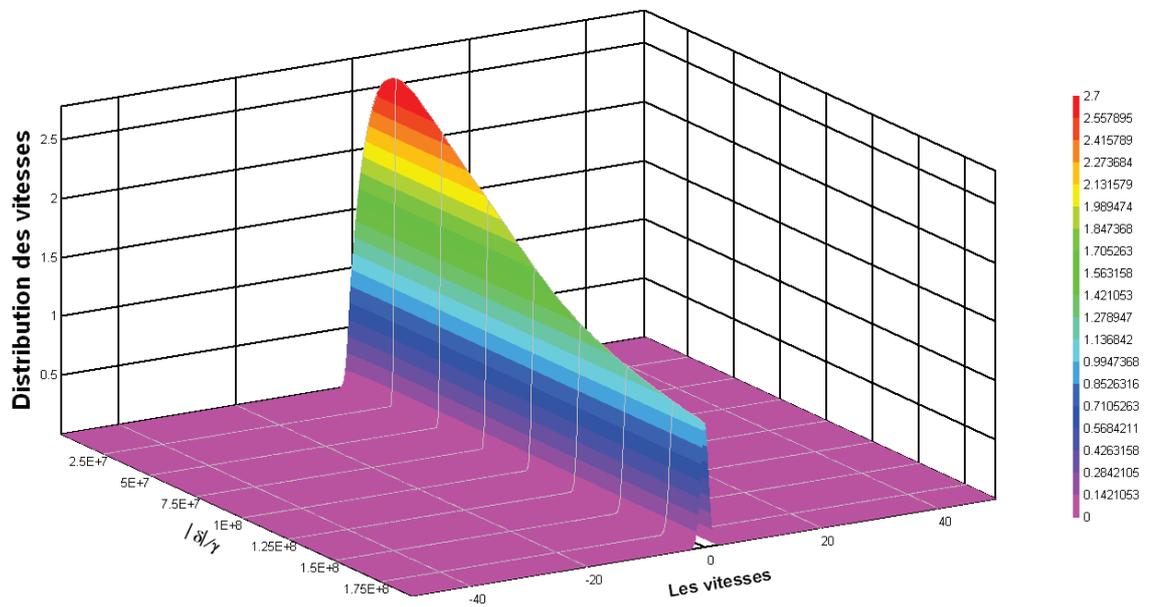


FIG. 5-12 – La fonction de distribution normalisée des vitesses des atomes d'un gaz de ^{87}Rb en interaction avec un champ cohérent de désaccord δ , pour $G \ll 1$.

Chapitre 6

Conclusion

Ce travail a été consacré à une étude détaillée d'interaction d'un atome avec le rayonnement en vue d'obtenir des atomes froids. Nous avons successivement considéré les modifications induites par ce couplage sur la dynamique interne puis sur la dynamique externe de l'atome.

Nous nous sommes principalement intéressés au cas où le champ électromagnétique incident est un champ cohérent (le laser), et le champ électromagnétique quantifié dans son état fondamental. Il apparut que l'interaction d'un atome avec un champ laser modifie les états internes de l'atome, qui se traduit par des forces exercées par laser sur l'atome, ce qui modifie, à leur rôle, leur dynamique externe.

Le problème de la dynamique atomique externe de l'atome dans une onde lumineuse est analogue au problème du mouvement Brownien, et la méthode d'étude développée de cette dynamique, conduit à une équation de Fokker-Planck-Kramers pour l'évolution de la fonction de Wigner atomique. Les différents coefficients de cette équation, (force moyenne sur l'atome qui est assimilée à une force de friction, coefficient de diffusion, dépendance en vitesse de la force), ont été interprétés.

La température limite de refroidissement du gaz atomique est obtenue par la relation d'Einstein, qui n'est valable que si les particules du gaz sont en équilibre thermodynamique avec les particules du rayonnement. Dans ce cas la relation d'Einstein présente une relation simple entre les coefficients de friction et de diffusion.

Si on tient compte des vitesses non nulles des atomes, à l'équilibre thermodynamique, les

vitesse de ces atomes obéissent à la distribution de Maxwell-Boltzmann et on doit prendre la moyenne sur les vitesses dans la relation d'Einstein modifiée. On a abouti alors à une équation intégrale gouvernant la définition de la température en fonction du désaccord. Les résultats que nous avons obtenus, en particulier ceux qui concernent les variations de la température limite en fonction du désaccord de l'onde laser, présentent une bonne convergence avec la théorie en place pour les faibles désaccords en insistant sur l'apparition d'un effet d'échauffement provoqué par l'insertion des faibles vitesses des atomes. Cependant il apparaît un comportement étrange pour les grands désaccords qui peut être interprété par l'absence de thermalisation du système.

Perspective

L'originalité de ces résultats sur la variation de la température limite, mérite cependant d'être approfondie par des études complémentaires, pour une meilleure poursuite de la recherche à savoir :

- L'explication de la partie étrange de nos résultats.
- L'amélioration des traitements numériques qui peuvent être responsables à ces effets.
- Extension du travail en tenant compte de l'émission induite.

Bibliographie

- [1] A. ASPECT, C. FABRE et G. GRYNBERG : *Optique quantique 1 : Lasers, Tome I.* p. (61-125); 2005.
- [2] A. ASPECT, C. FABRE et G. GRYNBERG : *Optique quantique 1 : Lasers, Tome II.* p. (111-137); 2005.
- [3] A. AUFFEVEES-GARNIER : *Oscillation de Rabi à la frontière classique-quantique génération de chats de Schrödinger.* Thèse de doctorat, Université Paris 6, p. (160); 2004.
- [4] A. M. TREMBLAY : *Physique statistique. PHQ 340,* p. (61-65); 2007.
- [5] B. BATTELIER : *Gaz bidimensionnel de bosons ultra-froids Nouvelle expérience de condensation de Bose-Einstein.* Thèse de Doctorat, Université Paris 6, p. (147); 2007.
- [6] B. DARQUIÉ : *Manipulation d'atomes dans des pièges dipolaires microscopiques et émission contrôlée de photons par un atome unique.* Thèse de Doctorat, Université de Paris 11 Orsay, p. (221); 2005.
- [7] B. M. SMIRNOV : *Physics of Atoms and Ions.* Moscow, Russia, p. (165-169); 2002.
- [8] C. COHEN-TANNOUDJI : *Atoms in electromagnetic fields.* Colège de France, Paris, p. (46-93); 2004.
- [9] C. COHEN-TANNOUDJI : Cours donnés au Collège de France. (<http://www.lkb.ens.fr/~laloe/PHYS/cours/college-de-france/>); de 1997 à 2002.
- [10] C. COHEN-TANNOUDJI, F. DIU et F. LALOË : *Mécanique quantique.* Vols 1,2, Hermann, Paris; 1977.
- [11] C. COHEN-TANNOUDJI, J. DUPONT-ROC et G. GRYNBERG : *Photons et atomes, introduction à l'électrodynamique quantique.* Editions du CNRS, Paris, p. (9-36); 1989.

- [12] C. COHEN-TANNOUDJI, J. DUPONT-ROC et G. GRYNBERG : *Processus d'interaction entre photons et atomes*. CNRS france, p. (337-439); 2001.
- [13] D. GUERY-ODELIN : *Refroidissement par évaporation d'un jet d'atomes froids guidé magnétiquement. Dynamique des gaz d'atomes froids piégés*. Habilitation à diriger des recherches, université Paris 6, p.(117); 2005.
- [14] E. DUPONT : *Guide lumineux*. Stage au Laboratoire Kastler Brossel, Paris, p. (4-20); 2000.
- [15] F. BARDOU, J.P. BOUCHAUD, A. ASPECT et C. COHEN-TANNOUDJI : *Lévy statistics and laser cooling*. université de combridge, USA, p. (1-21); 2003.
- [16] F. HALRAD : *Theoretical Atomic Physics*. Edition 2, New York, p. (346-349); 1994.
- [17] F. PEREIRA DOS SANTOS : *Condensation de Bose-Einstein de l'Hélium métastable*. Thèse de Doctorat, Université Paris 6, p. 161; 2002.
- [18] F. SCHRECK : *Mélanges de gaz ultrafroids : Mer de Fermi et condensat de Bose-Einstein des isotopes du Lithium*. Thèse de Doctorat, Université Paris, p. 228; 2002.
- [19] G. S. AGARWAL : *Quantum Statistical Theories of Spontaneous Emission and their Relation to Other Approaches*. Springer tracts in modern physics, Vol. 70, New York, p. 129; 1974.
- [20] H. J. METCALF et P. VAN DER STRATEN : *Laser Cooling and Trapping*, New York, p. (323), 2002.
- [21] H. MOYA-CESSAA : *Decoherence in atom-field interactions : A treatment using super-operator techniques*. Physics Reports Vol.432, p. (1- 41); 2006.
- [22] H. WALLIS : *Quantum theory of atomic motion in laser light*. Physics Reports Vol. 255, p. (203-287); 1995
- [23] I. KARATZAS et S. E. SHREVE : *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. New York , p (47-126); 1988.
- [24] I.S. GRADSHTEYN et I.M. RYZBIK : *Table of Integrals, Series, and Products*. Academic Press, p. (1096-1097); 1996.

- [25] J. DALIBARD : *Le rôle des fluctuations dans la dynamique d'un atome couplé au champ électromagnétique*. Thèse de doctorat, l'Université Pierre et Marie Curie, Paris, p. 314; 1986.
- [26] J. DALIBARD et C. COHEN-TANNOUDJI : *Laser cooling below the Doppler limit by polarization gradients : simple theoretical models*. J. Opt. Soc. Am. B, Vol. 6, No.11, p. (2023-2045); 1989.
- [27] J. DALIBARD et C. COHEN-TANNOUDJI : *Atomic motion in laser light : connection between semiclassical and quantum descriptions*. J. Phys. B : At. Mol. Phys. 18, p. (1661-1683); 1985.
- [28] J. DALIBARD, J. DUPONT-ROC et C. COHEN-TANNOUDJI : *Dynamics of a small system coupled to a reservoir : reservoir fluctuations and self-reaction*. J. Physique Vol.45, p. (637-656); 1984.
- [29] J. F. RIOU : *Etude des propriétés de propagation d'un laser à atome*. Thèse de Doctorat, Université Paris-Sud 11, p. (326); 2006.
- [30] J. HONERKAMP : *Statistical physics*. New York, p. (155-205); 2002.
- [31] J. P. BARRAT et C. COHEN-TANNOUDJI : *Etude du pompage optique dans le formalisme de la matrice densité*. Le Journal de Physique et le Radium, Tome 22, p. (329-336), 1961.
- [32] J. P. CAUBET : *Le Mouvement Brownien Relativiste*. New York, p. (2-18); 1976.
- [33] J. RAPPAZ et M. PICASSO : *Introduction à l'analyse numérique*. Presses polytechniques et universitaires romandes, Suisse, p.(119-135); 2000.
- [34] L. MANDEL et E. WOLF : *Optical coherence and quantum optics*. Université de Cambridge USA, p. (741-803); 1995.
- [35] L. SANCHEZ-PALENCIA : *Etude théorique de la dynamique non linéaire d'atomes froids dans un réseau optique dissipatif : Transport spontané et transport stimulé*. Thèse de doctorat, Ecole polytechnique, France, p. 263; 2003.
- [36] M. HOLZMANN : *La Transition de Bose-Einstein dans un gaz dilué*. Thèse de Doctorat, Université Paris 6, p. 140; 2000.
- [37] M. LE BELLAC : *Physique quantique*. CNRS édition Paris, p. (165-175) (389-403) (498-535); 2003.

- [38] N. POTTIER : *Physique statistique hors d'équilibre processus irréversibles linéaires*. CRNS, Paris, p. (235-306) ; 2007.
- [39] O. MORICE : *Atomes refroidis par laser : Du refroidissement sub-recul à la recherche d'effets quantiques collectifs*. thèse de Doctorat, Université Paris VI, p. 422 ; 1995.
- [40] P. CLADÉ : *Oscillations de Bloch d'atomes ultrafroids et mesure de la constante de structure fine*. Thèse de Doctorat, Université de Pierre et Marie Curie, Paris, p. 232 ; 2005.
- [41] P. LAMBROPOULOS et D. PETROSYAN : *Fundamentals of Quantum Optics and Quantum Information*. New York , p. 325 ; 2007.
- [42] R. KUBO, M. TODA et N. HASHITSUME : *Statistical Physics II : Nonequilibrium Statistical Mechanics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York Tokyo, p. (69-89) ; 1985.
- [43] S. CHANG et V. MINOGIN : *Density-matrix approach to dynamics of multilevel atoms in laser fields*. Physics Reports, Vol.365, p. (65–143) ; 2002.
- [44] S. MUKAMEL : *Principles of nonlinear optical spectroscopy*. Université de Rochester, Rochester, New York, p. 543 ; 1995.
- [45] T. LAHAYE : *Refroidissement par évaporation d'un jet atomique guidé magnétiquement*. Thèse de Doctorat, Université paris 6, p. 209 ; 2005.
- [46] V. BRETIN : *Rotations d'un condensat de Bose-Einstein* .Thèse de Doctorat, Université Paris 6, p 202 ; 2004.
- [47] V.G. MINOGIN et J . JAVANAINEN : *A tetrahedral light pressure trap for atoms*. Volume 43, number 2, Optics communications, p. (119-122) ; 1982.
- [48] W. DEMTRÖDER : *Atoms, Molecules and Photons, An Introduction to Atomic-, Molecular and Quantum-Physics*. Allemagne, p. (7-71), (242-318), (473-502) ; 2006.
- [49] W. T. COFFEY, Y. P. KALMYKOV et J. T. WALDRON : *The Langevin Equation With Applications to Stochastic Problems in Physics, Chemistry and Electrical Engineering*. USA, p. (1-233) ; 2005.
- [50] W. T. HILL et C. H. LEE : *Light-Matter Interaction, Atoms and Molecules in External Fields and Nonlinear Optics*. Allemagne, p. (60-62) ; 2007.