



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

UNIVERSITÉ KASDI MERBAH - OUARGLA

N°d' Ordre :
N°de Série :

Faculté des Sciences et de la Technologie et des Science de la Matière

Département des mathématique et informatique

Mémoire

Présenté pour l'obtention du diplôme de

MAGISTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse(E.D.O et E.D.P)

Préparé par : MAMMERI MOHAMMED

THÈME

Sur la stabilité Structurale des Difféomorphismes Quadratiques en Dimension 2

Soutenu publiquement le : 16/06/2011

Devant le jury composé de :

D A. CHACHA PROF à l' université Kasdi Merbah de Ouargla **Président**

N. HAMRI PROF à Centre Universitaire de Mila **Examineur**

K. HAOUAM M.C(A) à l'université de Tébessa **Examineur**

E. ZERAOULIA M.C(A) à l'université de Tébessa **Rapporteur**

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier Monsieur **Elhadj Zeraoulia**, mon directeur de mémoire. J'en garderai le souvenir d'un mathématicien exemplaire. Fidèle aux préceptes anciens, qui veulent que logos ne puisse être transmis sans éros, il ne m'aura pas seulement appris à faire des mathématiques. Je le remercie aussi de m'avoir proposé un sujet de mémoire aussi passionnant et ouvert.

Mes remerciements vont également à **Nasr-eddine Hamri**, professeur à centre universitaire de Mila et **Kamel Haouam**, Maître de conférence à l'université de Tébessa qui a bien voulu jouer le rôle d'examinateur, et d'avoir accepté la lourde tâche de lire cette mémoire jusque dans ses détails, et d'en tirer un compte-rendu.

Je remercie **Djamel Ahmed Chacha**, professeur à l'université de Ouargla, qui m'a fait l'honneur de présider ce jury de mémoire.

Mes amis, ma famille, proches ou non des mathématiques, doivent recevoir ici mes remerciements aussi. Ceux qui étaient présents à la soutenance, bien sûr, et tous les autres qui se reconnaîtront. Difficile toute fois, de ne pas citer mes plus proches collègues, de l'institut de mathématique à l'université de Ouargla, Mohammed Kouidri et de l'université de Msila, Salim Badija et à l'université de Constantine, Tidjani Menacer ...

Pour finir c'est à Ma femme **Nour elhouda**, qui m'a supporté ces derniers mois, pour son affection et sa patience, que j'adresse mes derniers remerciements.

Table des matières

Notations et conventions	7
Introduction	8
1 Attracteurs chaotiques et stabilité structurelle	13
1.1 Chaos et phénomène chaotique	13
1.1.1 Caractéristique du phénomène chaotique	15
1.1.2 Attracteur et attracteur chaotique	16
1.2 Attracteur	17
1.2.1 Ensemble invariant	17
1.2.2 Définitions d'attracteur	17
1.2.3 Bassin d'attraction	18
1.2.4 Propriétés d'attracteurs	19
1.2.5 Les différents types d'attracteurs	20
1.3 Attracteurs chaotiques	22
1.3.1 Définitions d'attracteur chaotique	23
1.3.2 Les différents types d'attracteurs chaotiques [10]	24
1.4 Quelques exemples célèbres des premiers attracteurs chaotiques	26
1.4.1 L'attracteur de Lorenz	26
1.4.2 L'attracteur de Rössler	27
1.4.3 L'attracteur de Hénon	28

1.5	Exposant de Lyapunov	29
1.5.1	Exposant de Lyapunov d'attracteurs non chaotiques	30
1.5.2	Exposant de Lyapunov d'attracteurs chaotiques	30
1.6	Dimension d'un attracteur	31
1.7	Bifurcation	32
1.8	Stabilité	34
1.8.1	Les différents types de stabilité	35
1.8.2	Stabilité des points fixes	36
1.9	Stabilité structurelle	38
1.9.1	Définitions	38
1.9.2	Notion de généricité	39
1.9.3	Théorèmes de Peixoto	40
1.10	Stabilité structurelle et hyperbolicité	41
1.10.1	Ensemble hyperbolique	41
1.10.2	Ensemble non-errant d'un difféomorphisme	42
1.10.3	Axiome A et Transversalité forte	42
1.10.4	Difféomorphisme hyperbolique	43
1.10.5	Difféomorphisme Morse-Smale	43
2	Propriétés des équations discrètes quadratiques du plan	46
2.1	Introduction	46
2.2	Équations discrètes du plan	48
2.2.1	Définitions	49
2.2.2	Théorème de Grobman-Hartman	52
2.3	Équations discrètes linéaires du plan	57
2.4	Équations discrètes quadratiques du plan [18]	58
2.4.1	Applications quadratiques du plan	60
2.4.2	Equations discrètes quadratiques du plan	60

2.5	Propriétés des équations discrètes quadratiques du plan [18]	61
2.5.1	Application inverse	61
2.5.2	Equivalence topologique	63
2.5.3	Orbites non-bornées et bornées	64
2.5.4	Stabilité asymptotique des Orbites [18]	67
2.5.5	Orbites chaotiques [18]	70
2.5.6	Convergence	73
3	Stabilité structurelle des difféomorphismes quadratiques du plan	75
3.1	Introduction	75
3.2	Conjugaison topologique des applications	78
3.3	Stabilité structurelle pour la conjugaison topologique	81
3.3.1	La topologie C^r	81
3.3.2	C^r stabilité structurelle	82
3.3.3	Stabilité structurelle locale	82
3.4	Stabilité structurelle de difféomorphisme quadratique du plan	82
3.4.1	Difféomorphisme quadratique du plan	82
3.4.2	Conditions nécessaire de la stabilité structurelle des difféomorphismes quadratiques du plan	85
4	Résultats analytique et numériques	95
4.1	Difféomorphismes polynômiaux de \mathbb{R}^2 [28]	95
4.1.1	Exemple [Hénon 1976]	96
4.2	Résultats analytique	99
4.2.1	Présentation	99
4.2.2	Dynamique de Hénon pour certains paramètres	100
4.3	Résultats numériques	107
4.3.1	L'espace des paramètres	107
4.3.2	Simulation de l'ensemble stable de point fixe	108

4.3.3	Estimation de l'ensemble stable et instable de point fixe hyperbolique	109
4.3.4	Résultats des paramètres $a = 0.4$ et $c = 0$	110
4.3.5	Conclusion générale et perspective	110

Notations et conventions

- $\|\cdot\|$: norme euclidienne classique.
- $d(x, y)$: la distance de x à y .
- $\dim M$: dimension de l'ensemble M .
- λ_i : multiplicateurs caractéristiques.
- DG : jacobien de G .
- $\Omega(f)$: ensemble des points non-errants de f .
- $\mathcal{R}(f)$: ensemble des points récurrents chaînés de f .
- $Per(f)$: points périodiques de f .
- Diff^r : ensemble des difféomorphismes de classe \mathbf{C}^r .
- W^s : variété stable.
- W^i : variété instable.
- E^s, E^i : sous-fibrés invariants par $T_\Lambda M$.
- $T_A M$: l'espace tangent à une sous variété M en un sous ensemble A
- δ, ε : réels
- n : entier
- T : période

Introduction générale

" le savant n'étudie pas la nature parce que cela est utile, il l'étudie parce qu'il y prend plaisir et il y prend plaisir parce qu'elle est belle. Si la nature n'était pas belle, elle ne voudrait pas la peine d'être connue, la vie ne vaudrait pas la peine d'être vécue..."

H. Poincaré – Science et Méthode –

" C'est dans le troisième mémoire publié en 1885 que Poincaré donne ses définitions de la stabilité et de l'instabilité :

Nous dirons que la trajectoire d'un point mobile est stable, lorsque, décrivant autour d'un point de départ un cercle ou une sphère de rayon r , le point mobile, après être sorti de ce cercle ou de cette sphère, y rentrera une infinité de fois, et cela, quelque petit que soit r . C'est ce qui arrive dans les trois premiers exemples[36].

Elle sera instable si, après être sorti de ce cercle ou de cette sphère, le point mobile n'y rentre plus. C'est ce qui arrive dans les deux derniers exemples.

.....

L'instabilité est donc la règle, et la stabilité l'exception."

Intuitivement parlant, une situation est structurellement stable quand les situations voisines lui ressemblent (i.e. "qui ont à peu près le même comportements"). L'importance de cette notion est donc évidente, un phénomène structurellement instable ayant peu de chances d'être observé de manière stable.

La stabilité structurelle de système fournit une justification pour l'application de la théorie qualitative des systèmes dynamiques à l'analyse des systèmes physiques concrètes. L'idée de l'analyse qualitative, remonte aux travaux de [Henri Poincaré,1881] sur le problème des trois corps en mécanique céleste. Toujours au XIXe siècle, le mathématicien russe [Aleksandr Lyapunov,1892] effectue des recherches rigoureuses sur la stabilité des petites perturbations d'un système individuel. Dans la pratique, la loi d'évolution d'un

système (équation différentielle) ne sait jamais exactement. Dans les années 1920, G. D. Birkhoff a développé l'étude qualitative des systèmes dynamiques discrets, qui selon lui, permettait de mieux comprendre la dynamique plus complexe résultant des équations différentielles. Mais a été formalisé par l'introduction de notion des systèmes bruts par [Andronov, Pontryagin,1937]. Les systèmes structurellement stables ont été introduits par Alexandre Andronov et Lev Pontryagin en 1937 sous le nom de "systèmes grossières", ou "systèmes bruts". Ils ont annoncé une caractérisation des systèmes bruts dans le plan. Ils semblent en première analyse que toute équation décrivant un processus physique observable de façon répétée doit posséder cette propriété? Ce qui indique que la dynamique classique peut être très complexe (cf. attracteur étrange). Une classe importante des systèmes structurellement stables de dimension arbitraire est donnée par les difféomorphismes d'Anosov. La théorie qualitative des systèmes dynamiques a été immédiatement appliquée à l'analyse de systèmes physiques, avec des oscillations par [Andronov, Witt, et Khaikin,1949]. Une autre notion de stabilité structurelle a été prise par [Stephen Smale,1965] et de son école dans les années 1960 dans le cadre de la dynamique hyperbolique. Plus tôt, Marston Morse et Hassler Whitney et René Thom, ont développé une théorie parallèle de la stabilité des applications différentiables, ont constitué une partie essentielle de la théorie de singularité. [René Thom,1976] envisagé l'application de cette théorie aux systèmes biologiques.

Lorsque Smale a commencé à développer la théorie des systèmes dynamiques hyperboliques, il espère que les systèmes structurellement stables seraient «typique». Cela aurait été conforme à la situation en basse dimension : la dimension deux pour les flots et la dimension une pour les difféomorphismes. Toute fois, il a trouvé rapidement des exemples de champs de vecteurs sur les variétés de dimension supérieure qui ne peut être faite structurellement stables par une petite perturbation arbitrairement (de tels exemples ont été plus tard construit sur les variétés de dimension trois). Cela signifie que, dans les dimensions plus élevées, les systèmes structurellement stables ne sont pas denses. Le plus proche analogue en dimension supérieure des systèmes structurellement

stables sont les systèmes de Morse-Smale.

En 1962, Peixoto a donné une caractérisation complète de la stabilité structurelle, des champs de vecteurs \mathbf{C}^1 sur toute variété différentiable compact \mathbf{M} (comme \mathbf{S}^2), en dimensions deux et il a montré qu'elles forment un sous ensemble ouvert dense de $\mathbf{C}^1(\mathbf{M})$. Toute fois, il a été démontré plus tard que sur toute variété différentiable compact, en dimensions deux \mathbf{E} (comme \mathbb{R}^2), il y a un sous ensemble de $\mathbf{C}^1(\mathbf{E})$ qui est ouvert dans la topologie \mathbf{C}^1 (défini par la norme \mathbf{C}^1) et qui consistent des champs de vecteurs structurellement instables. En 1962, Kotus, Krych et Nitecki ont montré comment faire pour contrôler le comportement «à l'infini» de manière à garantir la stabilité structurelle des champs de vecteurs sur toute variété différentiable compact, en dimensions deux, sous «fort \mathbf{C}^1 -perturbation» et ils ont donné une complète caractérisation des champs vecteurs structurellement stables sur \mathbb{R}^2 .

Parmi de mathématiciens, qui ont fourni d'importantes contributions dans le sujet de la stabilité structurelle des systèmes dynamiques sont : D. Anosov (1967), Moser (1969), J. Palis (1969-1988-1993), W. C. de Melo (1973-1982-1988), Pugh (1970), Hirsch (1970-1976), Robbin (1971-1976), Verjovsky (1971), C. Robinson (1974), Liao (1980-1983), R. Mañé (1982-1988), A. Sannami (1983), Takens (1993), Hayashi (1997), Medvedev et Zhuzhoma (2004), Bonatti et al (2005).

Pendant les années 1960, et assez indépendamment, la dynamique réelle faisait des progrès fantastiques, en particulier sous l'impulsion de Smale qui proposait le programme ambitieux de comprendre la dynamique d'un difféomorphisme générique (ou d'un champ de vecteurs générique puisque l'analogie est maintenant familière a tous). C'est l'époque glorieuse où se dégagent des concepts aussi importants que ceux de la stabilité structurelle ou d'hyperbolicité des difféomorphismes. Un difféomorphisme est structurellement stable si tout difféomorphisme suffisamment proche lui est topologiquement conjugué(i.e. a la même dynamique topologique). Pour simplifier, un difféomorphisme est hyperbolique si le fibré tangent à la variété ambiante peut se décomposer, au moins au dessus de la partie non errante, en une somme de deux sous-fibrés, l'un étant contracté et l'autre étant

dilaté par la différentielle du difféomorphisme. Une telle propriété d'hyperbolicité entraîne (presque) la stabilité structurelle. Une grande activité se développe autour de ce genre de difféomorphismes : étude topologique, ergodique ...etc. L'espoir qu'un difféomorphisme générique soit hyperbolique et structurellement stable a été malheureusement déçu... Il n'en reste pas moins que ces difféomorphismes hyperboliques sont fréquents et que leur étude était préliminaire à celle des difféomorphismes partiellement hyperboliques qui est en cours actuellement.

Parmi les exemples de difféomorphismes non hyperboliques mais dont la dynamique mérite une analyse approfondie, il faut citer l'exemple de Hénon : il s'agit d'une bijection polynomiale du plan réel de la forme : $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (c + y + x^2, ax) \in \mathbb{R}^2$. En se limitant à certaines valeurs des réels a, c , ces exemples présentent un attracteur non hyperbolique, c'est-à-dire un compact invariant A (non réduit à une orbite périodique) tel que toute trajectoire issue d'un point proche de A s'accumule sur A . Par ailleurs, même si cette dynamique n'est pas stable, l'existence de cet attracteur est persistente : elle subsiste dans "beaucoup" de petites perturbations. Une liste des mathématiciens, qui ont fourni d'importantes contributions dans le sujet des difféomorphismes quadratiques du plan sont : Grassi et Mascolo (1999), Newcomb et Sathyan (1983), Miller et Grassi (2001), et qui ont fourni d'importantes contributions dans le sujet de bifurcations, et stabilité, sont : Hénon (1969-1976), Aronson et al, (1982), al. (1983), Friedland et Milnor (1989), Benedicks et Carleson (1991), Yoccoz (1990-1991), Kathryn, et al.(1998), Gomez et Meiss (2003-2004), S. Hayes et C. Wolf (2004), E. Bedford et J. Smillie (2006).

Ce travail réalisé dans le cadre de ce mémoire porte " sur la stabilité structurelle des difféomorphismes quadratiques du plan". L'objet de notre mémoire est d'étudier l'existence des conditions nécessaires pour voir la stabilité structurelle des applications discrètes du plan. Nous commençons donc dans le premier chapitre, par présenter les notions et les définitions de la théorie des chaos et des attracteurs chaotiques tels que : attracteurs, le bassin d'attraction, les différents types d'attracteurs, attracteurs étranges, les différents types d'attracteurs étranges, en passant à la théorie de bifurcation, et l'exposant de Ly-

un point fixe d'attracteur chaotique, avec un peu de détail de stabilité (les différents types de stabilité, stabilité des points fixes), on finit ce chapitre en parlant de la stabilité structurelle comme suit : introduction, définition de stabilité structurelle, propriété générique, stabilité structurelle en 2-D, stabilité structurelle de haute dimension, difféomorphisme hyperbolique et difféomorphisme Morse-Smale.

Dans le deuxième chapitre on présente après l'introduction on traite en détail les définitions de base qui concernent les équations discrètes du plan et les équations discrètes quadratiques du plan tels que : orbite positive et négative, théorème de Grobman-Harman et stabilité des points hyperboliques, les variétés stables et instables, et on s'intéresse à la présentation des théorèmes (propriétés) qui assure : l'existence des orbites non bornées et bornées, et le nombre d'attracteurs, et de l'existence du chaos. Dans le troisième chapitre on donne la notion de conjugaison topologique et autres définitions de stabilité structurelle en utilisant la notion avec des exemples, et on étudiera l'existence des conditions nécessaires pour voir la stabilité structurelle des difféomorphismes quadratiques du plan. Au quatrième chapitre, on s'intéresse à la présentation de l'étude analytique et numérique de l'application de Hénon $f_{a,c}$ avec $0 < a < 1$ et $c = 0$, on termine ce chapitre par une conclusion.

Chapitre 1

Attracteurs chaotiques et stabilité structurelle

Résumé

Dans ce chapitre nous donnons des notions de base dont nous avons besoin, concernant : Attracteurs, Bassin d'attraction, Attracteurs chaotiques, Dimension d'un attracteur, Stabilité, Stabilité du points fixe, Stabilité structurelle, Axiome A, Transversalité forte, Ensemble non-errant, Difféomorphisme hyperbolique, Propriété générique, Propriété Morse-Smale.

1.1 Chaos et phénomène chaotique

Le point de départ de la théorie du chaos est le problème à « 3 corps » qui consistent à étudier le mouvement de trois corps en interaction gravitationnelle, comme par exemple le système : {Soleil - Terre - Lune}, supposé isolé du reste de l'univers. Le but de cette recherche est de déterminer si le système solaire est « stable » sur le long terme, ou bien si l'un des corps risque un jour de percuter un autre corps, ou encore être éjecté du système solaire vers l'infini.

Le problème à 3 corps est aussi vieux que la mécanique newtonienne ; en effet, dès

la naissance de cette théorie, son fondateur s'est intéressé au problème à trois corps dans le but de prédire le mouvement de la Lune. Tous les astronomes à sa suite ont abordé ce problème, dont Laplace, qui crut avoir prouvé la stabilité du système solaire en utilisant la théorie des perturbations au premier ordre. Malheureusement, le développement perturbatif au premier ordre est insuffisant pour conclure définitivement. Un siècle après Laplace, [Henri Poincaré (1854-1912)] s'est donc emparé du problème. On examine l'évolution des idées qui distinguent la pensée de Laplace de celle de Poincaré.

Un système chaotique est donc un système déterministe et imprévisible mais c'est aussi et surtout un système non linéaire. Le lien qui relie ces deux notions paradoxales, déterministe et imprévisible, est la propriété de sensibilité aux conditions initiales. La sensibilité aux conditions initiales des systèmes chaotiques a fait du chaos une situation indésirable pendant plusieurs années.

Cette branche des mathématiques décrit qualitativement les comportements à long terme des systèmes dynamiques. Dans ce cadre, on ne met pas l'accent sur la recherche de solutions précises aux équations du système dynamique (ce qui, de toute façon, est souvent sans espoir), mais plutôt sur la réponse à des questions comme « Le système convergera-t-il vers un état stationnaire un long terme, et dans ce cas, quels sont les états stationnaires possibles ? » ou « Le comportement à long terme du système dépend-il des conditions initiales ? »

Chaos, ou un système chaotique c'est un système produira des comportements très différents à long terme lorsque les conditions initiales sont perturbées très légèrement, depuis la fin des années 70, la théorie du chaos a envahi la plupart des sciences : Physique, Chimie, Mécanique Géophysique, Astronomie, Psychologie, Economie, Sociologie, ..., elle a même envahi le flux et le reflux de la vie élargissant considérablement les possibilités d'emploi des modèles déterministes. L'Ecologie est un domaine qui, depuis une vingtaine d'années, a reçu une stimulation décisive grâce aux mathématiques du chaos. Si le monde est un chaudron fait de millions d'espèces en interactions, alors comment ces diverses populations évoluent-elles ? Qu'arriverait-il à une population animale si les ressources

venaient à manquer, si des prédateurs survenaient, si une épidémie se déclarait ?...

Cependant, mis à part cette caractéristique, l'attracteur d'un système chaotique contient un ensemble infini d'orbites périodiques instables, durant son évolution dans le temps, le système va visiter un petit voisinage de chaque point de chacune des orbites périodique (instables) dans l'attracteur, c'est à dire que l'on peut décrire une dynamique chaotique comme une suite erratique de sauts d'une orbite périodique à une autre. De ces importantes propriétés est née l'idée du contrôle du chaos.

En 1963, Edward Lorenz, météorologue au Massachusetts Institut of Technologie, met en évidence le caractère chaotique des conditions météorologiques. Pour prévoir ces dernières Lorenz étudie alors numériquement des équations différentielles représentant approximativement la convection thermique dans l'atmosphère. Il constate, par hasard, qu'une modification minime des données initiales (de l'ordre de un pour mille) sur son ordinateur entraînent des résultats très différents. Il illustrera ce fait caractéristique par la célèbre métaphore : « *un battement d'ailes d'un papillon au Brésil peut provoquer une tornade au Texas* ». "L'effet papillon" sera par la suite souvent invoqué pour faire allusion à la Sensibilité aux Conditions Initiales.

De nombreux exemples simples sont maintenant connus des modèles mathématiques du chaos exposition qui, et ils ont été largement étudiés. Une du système plus ancien et le plus simple est l'application logistique, qui a été utilisée pour modéliser la dynamique des populations biologiques, mais maintenant elle a été appliquée dans nombreux autres domaines. Les systèmes chaotiques sont généralement caractérisés par un ou plusieurs paramètres qui contrôlent le comportement du système et donner lieu à des bifurcations et d'autres changements dans la dynamique.

1.1.1 Caractéristique du phénomène chaotique

Caractériser le chaos est un sujet vaste, et les tests les plus utiles pour ce type de comportement sont les suivants :

1. Les mouvements chaotiques sont plus compliqués que stationnaire, périodique ou

quasi-périodique, et ils ont des formes très complexes, appelés attracteurs étranges

2. Il existe une dépendance sensible aux conditions initiales, c'est à dire, les solutions proches divergent exponentiellement vite.

3. Il y a un phénomène de coexistence, c'est à dire, les orbites chaotiques coexistent avec une infinité des orbites périodiques instables(cycles répulsifs).

4. L'absence de cycles attractifs(stables) d'ordre fini.

5. La dimension fractale.

6. La non linéarité du système.

1.1.2 Attracteur et attracteur chaotique

Il n'existe pas, à l'heure actuelle, de définition communément admise l'attracteur. La notion d'attracteur est liée à un type de régime asymptotique. Dire d'un système qu'il possède plusieurs attracteurs, c'est aussi dire qu'il admet plusieurs types notablement différents de régimes asymptotiques.

En effet, puisqu'un attracteur est un ensemble invariant, sa dimension dans un espace tridimensionnel doit être strictement inférieure à 3. Mais nous cherchons également un attracteur dont la dimension n'est ni 1 (point fixe) ni 2 (cycle). Nous recherchons donc des objets géométriques complexes de dimension non - entière.

De telles structures existent, moyennant une définition plus générale du concept de dimension. Mandelbrot leur a donné le nom de fractales. Nous examinerons dans ce chapitre le problème de leur dimension. Pour l'heure, essayons de mieux caractériser ces attracteurs. On comprend bien que leur nature doit être radicalement différente de celle d'un tore, qui ne peut être attracteur que d'un régime périodique. Les objets considérés ici, par contre, sont le siège de phénomènes apériodiques et du chaos. On les appelle des attracteurs étranges ou chaotiques. Et pour cause : il s'agit d'ensembles compacts, donc bornés, dans lesquels on retrouve des trajectoires chaotiques, dont l'une des caractéristiques essentielles est la S C I. (les trajectoires issues de conditions initiales proches s'écartent exponentiellement).

Comment peut-on faire coexister l'attraction, qui implique le resserrement des trajectoires, avec la S C I, qui implique leur écartement ? La solution réside dans le concept d'hyperbolicité de l'attracteur [1] : l'attraction s'opère dans une direction, et la divergence dans une autre. La surface contenant les trajectoires divergentes est appelée variété instable, alors que celle contenant les trajectoires convergentes sera dénommée variété stable. Notons que ceci ne peut se concevoir que dans un espace de phase d'au moins trois dimensions. Les attracteurs étranges sont caractéristiques l'évolution des systèmes chaotiques, au bout d'un certain temps, tous les points de l'espace des phases (et appartenant au bassin d'attraction de l'attracteur) donnent des trajectoires qui tendent à former l'attracteur étrange. On va parler de ce type d'attracteur Dans ce chapitre.

1.2 Attracteur

1.2.1 Ensemble invariant

Définition 1.1 [Ensemble invariant] *Soit A un sous-ensemble de l'espace des phases U ; A est dit invariant (resp. positivement invariant) par un flots φ_t , si pour tout t dans \mathbb{R} (resp. dans $[0, +\infty[$), $\varphi_t(A)$ est inclus dans A .*

1.2.2 Définitions d'attracteur

Dans la littérature on trouve plusieurs définitions d'attracteur. En général, un attracteur est défini comme une sous-partie fermée de l'espace des phases qui "attire" toutes les autres orbites vers elle. On donne quelques définitions possibles d'attracteur :

Définition 1.2 [Guckenheimer, Holmes] *Soit $\langle X, g \rangle$ un système dynamique discret, Une sous-partie A de X est appelée attracteur si et seulement si les conditions suivantes sont réalisées :*

1. A est fermée ;
2. A est positivement invariante ;

3. A est attractive, c'est-à-dire, il existe un voisinage ouvert U de A tel que :

(a) U est positivement invariant ;

(b) U est attiré par $A : \forall u \in U, \lim_{t \rightarrow \infty} d(g^t(u), A) = 0$.

Définition 1.3 [Mardseu, Ruelle] Soit A un ensemble compact, fermé de l'espace des phases, on suppose que A est invariant par φ_t , l'ensemble A est un attracteur si :

1- Pour tout voisinage U de A , il existe un voisinage V de A tel que toute solution $x(t, x_0) = \varphi_t(x_0)$ restera dans U si $x_0 \in V$

2- $\bigcap_{t \geq 0} \varphi_t(V) = A, t \geq 0$

3- Il existe une orbite dense dans A .

Définition 1.4 [Zeraoulia, Sprott] Soit A un sous ensemble fermé de l'ensemble non-errant $\Omega(g)$ (cf. 1.22), A est appelée attracteur si :

1- A est invariant par g , c'est-à-dire $g(A) = A$

2- il existe un voisinage V de A ($A \subset \mathbb{R}^n$) tel que $\bigcap_{n \geq 0} g^n(V) = A$.

3- g est transitive ($\exists C, D$ ouverts $\subset A$ tel que $g^n(C) \cap D \neq \emptyset$).

Exemple 1.1 Dans l'espace \mathbb{R}^2 considérons le système dynamique discret dont la fonction successeur est la suivante :

$$g : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow \begin{pmatrix} x + y \\ x + y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

La variété instable $\mathbb{R}_i^2 = W^i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$ est non-vide, fermée, et strictement positivement invariante. De plus, elle est un attracteur global en un seul pas. Au contraire, la variété stable $\mathbb{R}_s^2 = W^s = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = -y\}$ est non-vide, fermée et strictement positivement invariante mais n'est pas un attracteur.

1.2.3 Bassin d'attraction

On rappelle que tout voisinage ouvert qui satisfait les conditions 3.a et 3.b dans la définition (1.2) est appelée voisinage attiré par A . Il faut remarquer que bien qu'il

existe un voisinage attiré U , on ne peut pas affirmer qu'il est unique : en effet A peut admettre plusieurs voisinages attirés par lui-même. On donne quelques définitions du bassin d'attraction :

Définition 1.5 *On appelle bassin d'attraction $B(A)$ de A le plus grand des tels voisinages attirés, c'est à dire $B(A) = \bigcup \{U \in P(X) : U \text{ est un voisinage attiré } A\}$.*

Définition 1.6 *Le bassin d'attraction $B(A)$ de A , c'est l'ensemble des points dont les trajectoires asymptotiques convergent vers A , donc $B(A) = \bigcup_{t < 0} \varphi_t(V)$.*

Définition 1.7 [Zeraoulia, Sprott] *Le bassin d'attraction $B(A)$ d'un attracteur A est l'ensemble des conditions initiales (l'ensemble des tous états initiaux des orbites) est à long-temps un comportement approche vers A .*

Voici quelque notes et remarques intéressantes sur le bassin d'attraction [10] :

- Le comportement qualitatif d'un système dynamique dépend fondamentalement du bassin d'attraction.
- La frontière d'un bassin peut être lisse ou fractale, la fractalité est une conséquence du mouvement chaotique des orbites sur la frontière.
- Les frontières d'un bassin peut avoir de types qualitativement différents. Par exemple la nature d'un bassin peut changer à partir d'une courbe simple lisse à un autre fractale. Ce phénomène est appelé la métamorphose.

1.2.4 Propriétés d'attracteurs

1. A est un sous ensemble borné de l'espace est de volume nul, invariant par le flot φ_t autrement dit, tout point de l'espace d'état qui appartient à un attracteur demeure à l'intérieur de cet attracteur pour tout t .
2. Il existe un ensemble $B \supset A$, tel que pour tout voisinage de A , la trajectoire qui prend son origine dans B se trouve au bout d'un temps fini dans ce voisinage de A . Autrement dit, toute trajectoire qui a son origine dans B tend vers l'attracteur, cette "zone d'influence" est le (Bassin d'attraction) .

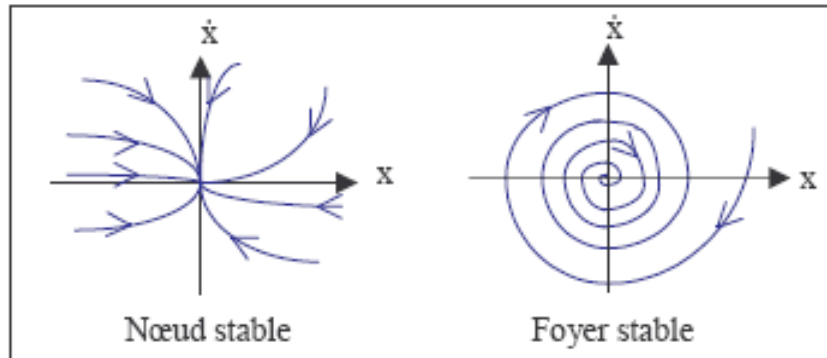


FIG. 1-1 – Points fixes attracteurs

3. Un attracteur est indécomposable c'est-à-dire que la réunion de deux attracteurs n'est pas un attracteur.

1.2.5 Les différents types d'attracteurs

Il existe deux types d'attracteurs : les attracteurs réguliers et les attracteurs étranges ou chaotiques.

Attracteurs réguliers

Les attracteurs réguliers caractérisent l'évolution de systèmes non chaotiques, et peuvent être de trois sortes :

1- Les points fixes

Définition 1.8 *Toute solution x_e vérifiant la relation $g(x_e) = 0$ est appelée position d'équilibre, point singulier, point fixe, ou encore solution stationnaire.*

On distingue seulement deux types d'attracteurs qui sont des points fixes. Il s'agit des nœuds stables et des foyers stables, représentés (Figure 1.1).

Exemple 1.2 *Le point d'équilibre unique d'un pendule amorti est l'exemple classique de ce type d'attracteur. S'oppose à répulseur, point répulsif.*

2- Les cycles limites : orbites périodiques

Définition 1.9 [Orbites périodiques] Une solution $X(t)$ d'un système dynamique autonome ou non est périodique s'il existe un entier T pour lequel :

$$\text{Pour tout } t, X(t + T) = X(t) \text{ et } X(t + \bar{T}) \neq X(t) \text{ pour } 0 < \bar{T} < T$$

T est alors appelé la période de la solution.

la représentation d'une telle solution dans le plan de phase nous donne une trajectoire fermée appelée cycle limite et telle qu'aucune trajectoire commençant suffisamment proche d'elle, ne soit également fermée. En général on a trois types de cycle limite :

- (a) cycle limite stable
- (b) cycle limite instable
- (c) cycle limite semi-stable(en pratique instable).

Le cycle limite noté C_L est stable si toute trajectoire commençant suffisamment proche de C_L , l'approche pour $t \rightarrow +\infty$ c'est à dire, s'enroule elle même sur le cycle limite C_L (cas (a)). Le cycle limite noté C_L est instable si toute trajectoire commençant suffisamment proche de C_L , l'approche pour $t \rightarrow -\infty$ c'est à dire, se déroule à partir de C_L (cas (b)). Finalement, si les trajectoires approchent C_L d'un côté et de l'autre s'en éloignent, on dira que C_L est semi-stable (en pratique instable). Un cycle limite stable est aussi ce qu'on appelle un **attracteur périodique**

Ces trois cas (a), (b), (c) sont représentés (Figure 1.2).

3- Les cycles limites pseudo-périodiques Un comportement pseudo-périodique(quasi-périodique) peut être vu comme la somme d'un nombre fini de termes périodiques dont le rapport des périodes deux à deux n'est pas rationnel. Il existe des systèmes dont la solution orbitale en régime permanent (dans le plan de phase) oscille entre deux cycles limites relativement proches sans jamais passer deux fois de suite exactement sur la même trajectoire : on parle alors d'**attracteur quasi-périodique**.

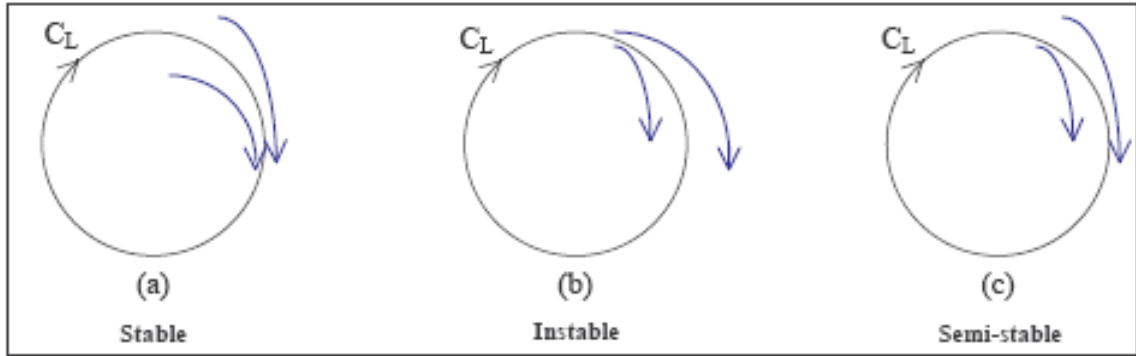


FIG. 1-2 – Cycles limites

Les systèmes quasi-périodique les plus simples sont basés sur deux fréquences incommensurables ω_{q_1} et ω_{q_2} (on dit que le degré de la quasi-périodicité est égale à 2). Le mouvement dans l'espace des phases s'inscrit alors sur un tore, une fréquence correspondant au mouvement selon l'axe du tore et l'autre fréquence correspondant au mouvement autour de l'axe du tore. La non-commensurabilité des fréquences d'un signal quasi-périodique implique que les trajectoires remplissent complètement la surface de tore. Si le rapport $\frac{\omega_{q_1}}{\omega_{q_2}}$ devient rationnel, on dit qu'on a accrochage des fréquences et on obtient un signal périodique (cycle limite) inscrit sur le tore.

Pour étudier les attracteurs quasi-périodiques on a souvent recours aux sections de Poincaré pour s'assurer de la nature des solutions de manière à ne pas les confondre avec les attracteurs étranges que nous allons aborder maintenant :

1.3 Attracteurs chaotiques

Il n'existe pas à proprement parler de définition positive des orbites chaotiques. Un mouvement chaotiques est non déterministe mais il ne s'agit pas d'un mouvement aléatoire. Il possède un spectre fréquentiel continu (caractère erratique) et présente en outre une extrême sensibilité aux conditions initiales. En effet deux orbites chaotiques initiées avec des conditions initiales très voisines vont diverger et s'écarter l'une de l'autre très

rapidement. La vitesse de divergence de deux orbites initialement voisines peut être étudiée à partir des exposants de Lyapunov (cf. 1.5) afin de caractériser la nature du chaos observé.

On peut définir un attracteur chaotique (ou attracteur étrange) comme étant un attracteur de volume nul qui n'est ni un point fixe, ni cycle limite, ni quasi-périodique. Dans une section de Poincaré, un attracteur chaotique décrit une infinité de points dont l'ensemble possède une structure topologique auto-similaire avec une dimension fractale non entière [2]. De ce fait, on ne peut pas réduire un mouvement chaotique à un point fixe ou un cycle limite comme pour les autres comportements asymptotiques. Néanmoins, les solutions chaotique présentent des propriétés de périodicité dans l'espace non pas euclidien mais celui d'Hausdorff [3].

1.3.1 Définitions d'attracteur chaotique

Définition 1.10 *L'attracteur chaotique(ou étrange) est une forme géométrique plus complexe qui caractérise l'évolution des systèmes dynamiques chaotiques.*

Définition 1.11 *Soit A un ensemble de \mathbb{R}^n , A est un attracteur, alors A est appelé un attracteur étrange si il est chaotique(l'attracteur vérifié la notion de sensibilité aux conditions initiales), Un lecteur intéressé pourra consulter [10]*

Définition 1.12 *Un sous-ensemble borné A de l'espace des phases est un attracteur étrange ou chaotique pour une transformation T de l'espace s'il existe un voisinage R de A ; c'est à dire que pour tout point de A il existe une boule contenant ce point et contenue dans R vérifiant les propriétés suivantes :*

1- *Attraction : R est une zone de capture, ce qui signifie que toute orbite par T dont le point initial est dans R , est entièrement contenue dans R . De plus, toute orbite de ce type devient et reste aussi proche de A que l'on veut.*

2- *Il est contenu dans un espace fini. son volume est nul. sa dimension est fractale(non entière).*

3- *Presque toute trajectoire sur l'attracteur a la propriété de ne jamais passer deux fois sur le même point, chaque trajectoire est presque sûrement apériodique.*

4- *Deux trajectoires proches à l'instant t voient localement leur distance augmenter à une vitesse exponentielle (sensibilité aux conditions initiales).*

1.3.2 Les différents types d'attracteurs chaotiques [10]

Nous donnons une classification commune d'attracteurs chaotiques des systèmes dynamiques. En règle générale, à l'heure actuelle, les attracteurs chaotiques peuvent être classés en trois types (catégories) principales :

1- Attracteur hyperbolique

Les attracteurs hyperboliques sont des ensembles-limites pour lesquelles "l'axiome A" de Smale est satisfait, sont structurellement stables. Les points périodiques et les orbites homoclines sont denses et sont du type selle, les variétés stables et instables ont la même dimension, et les variétés stables et instables se coupent transversalement. Cette définition est le résultat d'une fondation axiomatique rigoureuse qui exploite la notion d'hyperbolicité. L'attracteur Plykin est l'exemple d'un attracteur hyperbolique d'un difféomorphisme sur une sphère à dimensions deux, ce qui a été suggéré par Plykin (Figure 1.3).

Généralement, la plupart des systèmes physiques connus n'appartiennent pas à la classe des systèmes d'attracteurs hyperboliques. Les attracteurs étranges hyperboliques sont robustes (structurellement stable). Comme un autre exemple physique du chaos hyperbolique, l'attracteur Smale-Williams.

2- Attracteur de type Lorenz

Les attracteurs de type Lorenz ne sont pas structurellement stables, mais leurs orbites homoclines et hétéroclines sont structurellement stables (hyperboliques), et aucune orbite

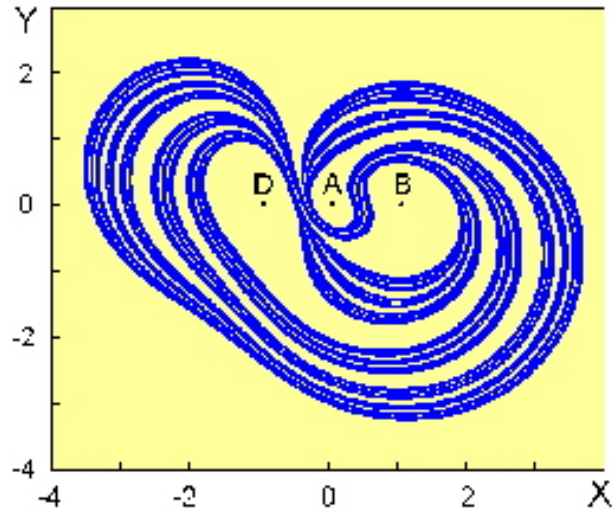


FIG. 1-3 – Attracteur de plykin

périodiques instables apparaissent sous les variations petits des paramètres, comme par exemple dans le système de Lorenz lui-même.

3- Quasi-attracteurs

Les quasi-attracteurs sont des ensembles-limites renfermant des orbites périodiques de différents types topologiques et des orbites structurellement instables. Par exemple, les attracteurs générés par le circuit de Chua. Notez que ce type est plus complexe que les deux précédents-attracteurs et donc ne convient pas pour certaines applications potentielles d'un tel chaos que : la sécurité des communications et le masquage du signal. Pour plus d'informations sur ces types d'attracteurs chaotiques, voir [10].

1.4 Quelques exemples célèbres des premiers attracteurs chaotiques

1.4.1 L'attracteur de Lorenz

L'attracteur de E. Lorenz signe, en 1963, les débuts de la météorologie moderne : c'est en se posant la question de savoir comment prévoir le temps à l'avance que E. Lorenz a abouti à son système différentiel et à son attracteur étrange. Il s'agit de modéliser certains mouvements atmosphériques : on considère pour cela le mouvement d'un fluide entre deux plaques horizontales portées à des températures légèrement différentes (la plaque la plus chaude en bas). Pour une différence de température suffisante, il apparaît alors des tourbillons convectifs qui vérifient les équations de la convection de Rayleigh - Bénard dont la formulation est classique en mécanique des fluides : on obtient un système de trois équations aux dérivées partielles. Avec quelques hypothèses simplificatrices, on peut associer à ce système aux dérivées partielles un système différentiel ordinaire de la forme (a, b, c étant des paramètres réels, b décrivant la différence des températures des deux plaques) :

$$\begin{cases} dx/dt = a(y - x) \\ dy/dt = bx - y - xz \\ dz/dt = xy - cz \end{cases} \quad (1.1)$$

(on observera que les seconds membres de ces équations sont assez simples mais cependant non linéaires). On effectue une résolution numérique de ces équations : pour b supérieur à une certaine valeur critique, on obtient un comportement chaotique pour les trajectoires de ce système (l'attracteur étrange de Lorenz) ; simulez une vue en 3 dimensions de l'attracteur de E. Lorenz. Historiquement, c'est en voulant vérifier ses calculs que Lorenz s'est aperçu que des conditions initiales voisines pouvaient aboutir à des résultats assez différents (sensibilité aux conditions initiales) et qu'il a mis ainsi en évidence le comportement chaotique de son modèle.

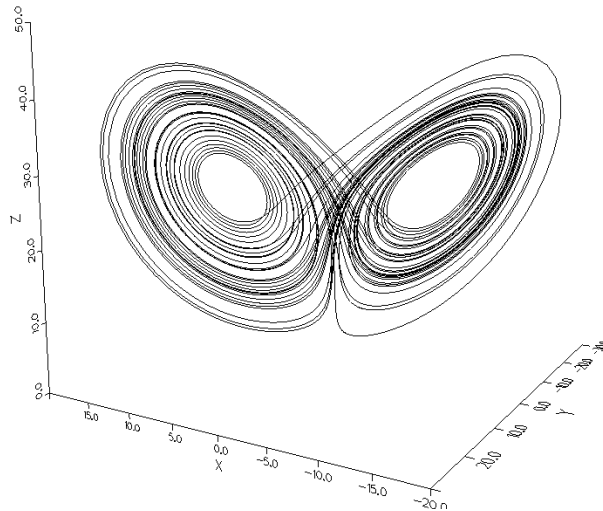


FIG. 1-4 – Attracteur de Lorenz : $(a, b, c) = (10, 28, \frac{8}{3})$.

L'attracteur a la forme d'un papillon en vol, pour laquelle les deux "yeux" des ailes seraient remplacés par vide (Figure 1.4).

1.4.2 L'attracteur de Rössler

L'attracteur de O. Rössler (1974) issu de travaux en cinétique chimique, correspond lui aussi à une formulation dans le cadre de la mécanique des fluides ; il est associé au système différentiel (a, b, c étant des paramètres réels) :

$$\begin{cases} dx/dt = -y - z \\ dy/dt = x + ay \\ dz/dt = b + xz - cz \end{cases} \quad (1.2)$$

(même remarque sur la forme simple mais non linéaire des seconds membres des équations). Pour certaines valeurs des paramètres la résolution numérique du système fait apparaître un comportement chaotique des trajectoires dans l'espace des phases (l'attracteur étrange de Rössler).

Si les deux systèmes dynamiques précédents étaient formés d'équations différentielles

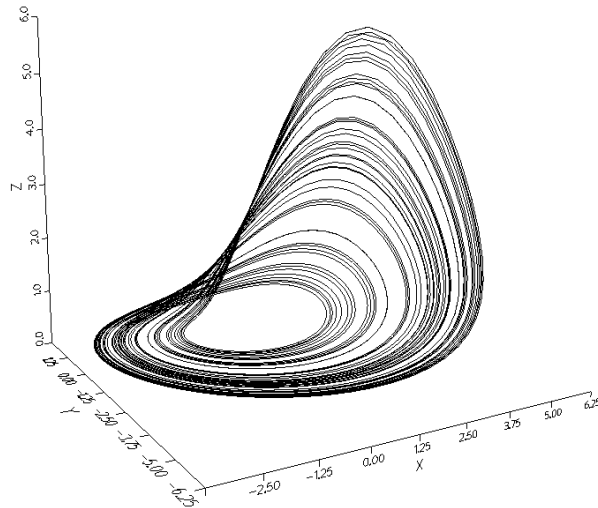


FIG. 1-5 – Attracteur de Rössler : $(a, b, c) = (0.398, 2, 4)$.

ordinaires dans \mathbb{R}^3 (le paramètre évolutif étant donc le réel t représentant le temps) résultant en fait d'une troncature et simplification d'équations aux dérivées partielles de type Navier-Stokes, les systèmes suivants sont associés à des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} ou de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 , qui définissent en fait des systèmes dynamiques discrets (le paramètre évolutif est un entier) de type itération dans \mathbb{R} ou \mathbb{R}^2 (Figure 1.5).

1.4.3 L'attracteur de Hénon

L'attracteur de M. Hénon (1976), associé à une application $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de la forme $(x, y) \longrightarrow (X = 1 - ax^2 + y, Y = bx)$, est initialement issu d'un problème d'astronomie concernant les amas globulaires. Le système différentiel initial (système de Hénon - Heiles) est un système hamiltonien non intégrable ; il est traité par la méthode des surfaces de section de Poincaré pour lui associer une application du plan dans lui-même dont l'étude plus abordable permet d'analyser le problème initial et ici de décrire son comportement chaotique par l'attracteur de Hénon. Ce procédé d'analyse d'un système différentiel non intégrable (et c'est le cas le plus souvent !) par une méthode de section est assez courant ; bien que le système itératif associé soit lui aussi non linéaire, son analyse est souvent plus

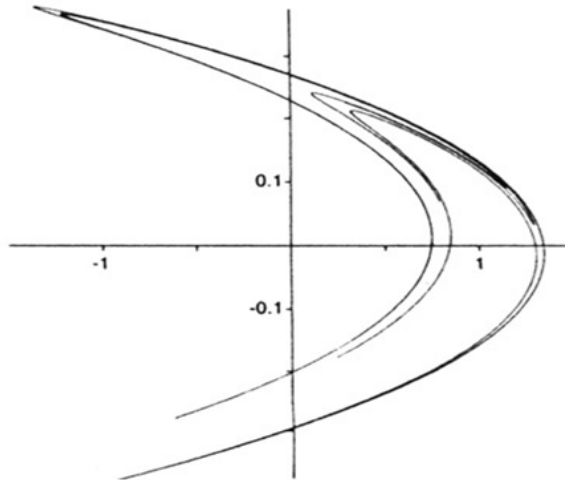


FIG. 1-6 – Attracteur de Hénon : $(a, b) = (1.4, 0.3)$.

facile à développer (Figure 1.6).

1.5 Exposant de Lyapunov

L'étude formelle de la théorie du chaos met à notre disposition différents outils permettant d'identifier sans ambiguïté si la dynamique d'un système est chaotique ou non. Parmi ces outils, on peut citer les exposants de Lyapunov qui constituent une approche très naturelle de la mesure de l'état de chaos d'un système. Le chaos déterministe se reconnaît essentiellement par la manière dont il est apparu. Mais, une fois établi, sa signature consiste en un objet de l'espace de phases que l'on appelle un attracteur étrange. Ce non d'attracteur provient du fait que l'objet en question "attire" les trajectoires de l'espace de phases, en imposant deux conditions initiales différentes, on obtient deux trajectoires produisant des figures ayant même allure générale mais où la répartition exacte des points est différente. Quant au terme d'étrange

Les trajectoires de l'attracteur vérifient la notion de sensibilité aux conditions initiales (S.C.I). C'est dans ce sens qu'elles sont chaotiques. on peut quantifier la sensibilité

aux conditions initiales par le degré de divergence. L'exposants de Lyapunov mesurent l'attraction exponentielle ou la séparation dans le temps de deux trajectoires adjacentes, dans l'espace de phases, ayant des conditions initiales différentes.

1.5.1 Exposant de Lyapunov d'attracteurs non chaotiques

Les exposants de Lyapunov peuvent caractériser le comportement d'un état stationnaire

- Pour un point d'équilibre asymptotiquement stable, $\lambda_i < 0$ pour $i = 1, 2, \dots, n$
- Pour un cycle limite asymptotiquement stable, $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_i < 0$ pour $i = 2, \dots, n$
- Pour k - *tore* asymptotiquement stable, $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k$ et $\lambda_i < 0$ pour $i = k + 1, \dots, n$

1.5.2 Exposant de Lyapunov d'attracteurs chaotiques

Pour mettre en évidence d'attracteurs chaotiques il met à profit ce qui les caractérisent, c'est-à-dire, le phénomène de dépendance sensible aux conditions initiales et leur structures fractales. Cela va se faire en essayant de déterminer la grandeur qui correspond à ces propriétés : exposants de Lyapunov et dimension fractale. Cette sensibilité aux conditions initiales est due à l'imprédictibilité de la solution, qui provient de l'existence d'au moins un composant de répulsion ; c'est à dire exposant de Lyapunov positif. Ainsi, l'exposant de Lyapunov le plus large quantifie la sensibilité aux conditions initiales.

En effet ; ce qui distingue les attracteurs étranges ou chaotiques des attracteurs non chaotiques c'est bien l'existence d'un exposant de Lyapunov positif.

Du fait qu'au moins un exposant de Lyapunov d'un attracteur chaotique doit être positif (un $\lambda_i > 0$), et que n'importe quel ensemble limite autre qu'un point d'équilibre doit avoir au moins un exposant de Lyapunov nul (un $\lambda_i = 0$) d'après le théorème de Haken, et que la somme des λ_i pour un attracteur doit être négatif ($\sum \lambda_i < 0$) ce qui impliquera d'au moins un exposant de Lyapunov négatif (un $\lambda_i < 0$), on a alors :

un $\lambda_i > 0$ caractéristique du chaos

un $\lambda_i = 0$ théorème de haken

$\sum \lambda_i < 0$ définition du chaos

1.6 Dimension d'un attracteur

Intuitivement, la dimension d'un objet géométrique est un entier correspondant au nombre de paramètres nécessaires pour le définir : par exemple, un point est de dimension nulle, un segment de dimension 1, un cube de dimension 3...

Cela correspond aussi aux unités nécessaires pour les quantifier : cm , cm^2 , cm^3 , etc... C'est la définition de la dimension d'un espace affine que l'on rencontre en algèbre.

Par extension, une courbe est donc de dimension 1 (penser à l'unité nécessaire pour en donner la mesure), un disque de dimension 2, etc...C'est là que commence la difficulté!

Définition 1.13 [Ensemble fractale] (selon Benoît Mandelbort, en 1982) *Un ensemble A est fractale si sa dimension de Hausdorff n'est pas entière.*

Un attracteur étrange est caractérisé, entre autres par sa dimension fractale. Le chaos se caractérise aussi en étudiant les propriétés géométriques de l'attracteur étrange lui même. L'attracteur ne remplit pas totalement l'espace, mais constitue d'un certain nombre de feuilletts : il s'agit d'un objet fractale, possédant une dimension, une valeur positive non entière, appelée dimension fractale. Il existe plusieurs types de dimension non entières ou fractales, comme la dimension de Hausdorff , la dimension de Kolmogorov ou de Capacité, la dimension de corrélation, la dimension de Lyapunov ... Toutes ces dimensions sont très proches (voisines) les unes des autres, mais elles caractérisent toutes L'attracteur étrange, et satisferont aux propriétés suivantes :

1- $A \subset B$, alors $d(A) \leq d(B)$, ($d(.)$: (dimension fractale))

2- Si $A = \emptyset$, alors $d(A) = 0$

3- $d(A \times B) = d(A) + d(B)$

4- Si f est une application différentiable sur A , alors $d(f(A)) = d(A)$

1.7 Bifurcation

La théorie des bifurcations s'intéresse aux familles d'équations différentielles dépendant de paramètres μ :

$$\frac{dx}{dt} = g_\mu(x), x \in U \subset \mathbb{R}^n, \mu \in \mathbb{R}^k \text{ constant.} \quad (1.3)$$

Terme introduit par Henri Poincaré au début du siècle dans ses travaux sur les systèmes d'équations différentielles. Lorsqu'on crée des tourbillons dans un fluide, on observe une « bifurcation » de l'état de repos du fluide vers l'état convectif.

Le terme Bifurcation veut dire division d'une branche principale en au moins deux branches. Le comportement d'un système dynamique linéaire peut changer quand un paramètre du système change. Ce changement de comportement correspond à un phénomène de bifurcation, il est accompagné d'un changement de type de stabilité.

Le terme de bifurcation est utilisé pour désigner dans un sens large, toute modification qualitative du comportement d'un système dynamique suite à la variation de l'un des paramètres dont dépend le système étudié. Il existe plusieurs types de bifurcations, parmi les quelles on peut citer :

- 1 -Bifurcation Nœud-col (ou pli) ;
- 2 -Bifurcation Transcritique ;
- 3 -Bifurcation fourche (sous-critique ou sur-critique) ;
- 4 -Bifurcation de Hopf (sous-critique ou sur-critique) ;

Les trois premiers types de bifurcations correspondent à des bifurcations statiques où le point de bifurcation sépare des branches de points fixes. Les bifurcations de Hopf sont des bifurcations dynamiques où le point critique délimite dans l'espace de contrôle d'état des branches de points fixes et un cycle limite.

Exemple 1.3 Prenons l'exemple du système mono -dimensionnel suivant,

$$\frac{dx}{dt} = g_\mu(x) = \mu x - x^3. \quad (1.4)$$

dépendant du paramètre scalaire μ . Pour $\mu < 0$, (1.4) possède un seul point d'équilibre $x = 0$, asymptotiquement stable et d'exposant caractéristique μ . Pour $\mu > 0$, c'est un peu plus compliqué. (1.4) possède alors 3 points d'équilibre, $x = -\sqrt{\mu}$, $x = 0$ et $x = \sqrt{\mu}$, d'exposants caractéristiques $-\sqrt{\mu}$, μ et $-\sqrt{\mu}$, respectivement. La Figure 1-7, dite diagramme de bifurcation, résume la situation dans l'espace, produit cartésien entre l'espace des phases, ici \mathbb{R} , et l'espace des paramètres, ici \mathbb{R} . Lorsque $\mu \rightarrow 0+$, les 3 points d'équilibre ont tendance à se confondre en un seul et les 3 branches d'équilibre se rejoignent. Ce diagramme de bifurcation correspond à ce que l'on appelle une "bifurcation fourche" pour des raisons évidentes. La valeur $\mu = 0$ est appelée valeur de bifurcation du paramètre μ . Le point $(x = 0, \mu = 0)$ est appelé point de bifurcation du système. des deux nouveaux points d'équilibre $x = \pm\sqrt{\mu}$ apparaissant pour $\mu > 0$. La bifurcation en $\mu = 0$ correspond à un changement qualitatif dans le portrait de phases du système. Par petites perturbations du type $\pm\epsilon x$ du système en $\mu = 0$, on peut faire apparaître ou faire disparaître deux points d'équilibre. Ainsi, en $\mu = 0$ le système n'est pas structurellement stable car de petites perturbations du champ de vecteur peuvent modifier la structure topologique du portrait de phases. C'est ce qui motive la définition générale suivante d'une bifurcation ([4], chap 3)

Définition 1.14 [Valeur de bifurcation] Une valeur μ_0 du paramètre pour laquelle le système (1.3) n'est pas structurellement stable est appelée valeur de bifurcation de μ .

Il est clair que cette définition est tout à fait générale et ne concerne pas seulement les points d'équilibre d'un système, leur apparition, disparition ou perte de stabilité. Cependant, nous ne considérons ici que ce qui se passe autour d'un point d'équilibre. C'est dans cette optique qu'il convient de comprendre l'intitulé, "bifurcations locales", Sur l'exemple élémentaire précédent, la construction du portrait de phases en $\mu = 0$ ne pose aucune difficulté. En général, une telle étude est loin d'être aussi triviale. En effet, à la valeur de bifurcation μ_0 d'un point d'équilibre, ce dernier n'est plus hyperbolique et le théorème de Grobmann-Hartman donnant la structure topologique du portrait de phases

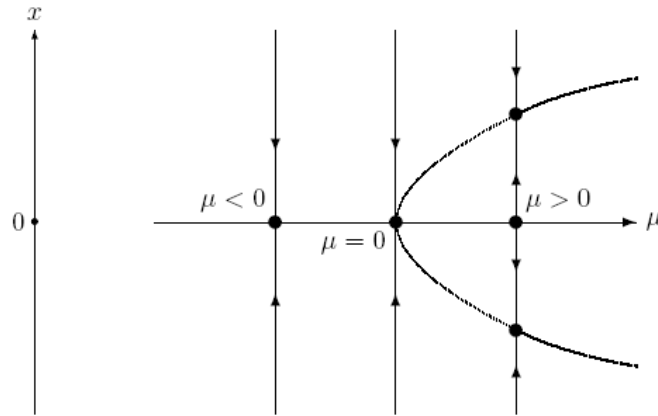


FIG. 1-7 – Diagramme de bifurcation fourche

ne s'applique plus : certains exposants caractéristiques sont alors sur l'axe imaginaire et les sous-espaces stables et les sous-espaces instables ne sont plus suffisants pour donner l'allure des trajectoires autour du point d'équilibre.

1.8 Stabilité

Puisque les solutions de la plupart des systèmes dynamiques ne s'expriment, pas au moyen des fonctions élémentaires ou par des quadratiques on recourt également à des méthodes d'intégrations approchées. Le défaut de ces méthodes, c'est qu'elles ne donnent qu'une solution particulière, il faut refaire tous les calculs. Connaissant une solution particulière, on ne peut pas se prononcer sur le caractère des autres solutions.

En maints problèmes de physique (mécanique) et de technique, il importe de connaître non pas les valeurs concrètes de la solution correspondant à des valeurs concrètes de la variable varie, notamment lorsqu'elle tend vers l'infini. Il est, par exemple, important de savoir si les solutions satisfaisantes à des conditions initiales données sont périodiques ou si elles tendent asymptotiquement vers une application ou un champs de vecteurs connu,

...., La théorie qualitative des systèmes dynamiques a ces questions pour objet.

La question de la stabilité d'une solution ou des positions d'équilibre est une des questions fondamentales de la théorie qualitative des systèmes dynamiques, la réponse de cette question a été étudiée en détail par l'éminent mathématicien russe A. Lyapunov (1857 - 1918).

Un point d'équilibre du système continu correspond à ce que l'on appelle aussi un régime stationnaire. La question de la stabilité expose alors des termes très simples : si l'on écarte le système de l'équilibre, y reviendra-t-il ? Ou encore : une petite perturbation, qui éloigne légèrement le système de son régime stationnaire, peut-elle avoir des conséquences importantes et être amplifiée au cours du temps.

1.8.1 Les différents types de stabilité

Nous allons indiquer maintenant quels sont les différents sens possibles que l'on peut donner quant à la stabilité d'une solution :

Stabilité au sens de Lagrange

La solution $X(t)$ est stable au sens de Lagrange si elle est bornée :

$$\exists L_S > 0 \text{ tel que } \forall t, \|X(t)\| \leq L_S.$$

Stabilité au sens de Poincaré

La solution $X(t)$ de condition initiale X_0 à $t = t_0$ est stable au sens de Poincaré si la trajectoire du flot initié avec $X_0 + \delta X_0$ à $t = t_0$ reste dans un tube de rayon ε_s , autour de la trajectoire de $X(t)$.

Stabilité au sens de Lyapunov

La solution $X(t)$ est stable au sens de Lyapunov si pour tout $\varepsilon_s > 0$, il existe $\delta(\varepsilon_s) > 0$ tel que toute solution $Y(t)$ vérifiant $\|Y(t_0) - X(t_0)\| < \delta$ implique que $\forall t \geq$

$$t_0, \|Y(t) - X(t)\| < \varepsilon_s.$$

Stabilité asymptotique

La solution $X(t)$ est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov si elle est stable au sens de Lyapunov et si de plus on a : $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|Y(t) - X(t)\| = 0$.

La différence entre la stabilité asymptotique et la stabilité au sens de Lyapunov réside dans le fait qu'une petite perturbation sur l'état initial d'un système autour d'un point fixe stable peut engendrer des petites oscillations entretenues, alors que ces dernières s'amortissent au cours du temps dans le cas d'un point fixe asymptotiquement stable.

Ce sont ces deux définitions de stabilité (stabilité au sens de Lyapunov et stabilité asymptotique) qui seront utilisées pour l'étude de stabilité.

1.8.2 Stabilité des points fixes

Il s'agit de distinguer ces points fixes en deux types : les points fixes hyperboliques et les points fixes non-hyperboliques, par la nature des valeurs propres du système linéarisé associé au système dynamique initial en ce point. Il y a le col, le nœud qui peut être stable ou instable, le foyer stable, le foyer instable et enfin le centre entouré d'une infinité d'orbites périodiques.

Un point fixe est dit hyperbolique si toutes les valeurs propres λ_i ($i = 1, \dots, n$) n'ont pas de partie réelle nulle. En revanche, si l'une des valeurs propres a une partie réelle nulle, le point fixe est dit non-hyperbolique. Un point fixe hyperbolique est soit asymptotiquement stable (attracteur), soit instable. Dans le cas où il est stable, c'est soit un répulseur, soit un point-selle. Un point fixe non-hyperbolique peut quant à lui être stable, instable ou bien être un centre ($\forall i, \operatorname{Re}(\lambda_i) = 0$). Tous ces cas sont regroupés dans la Figure 1.8.

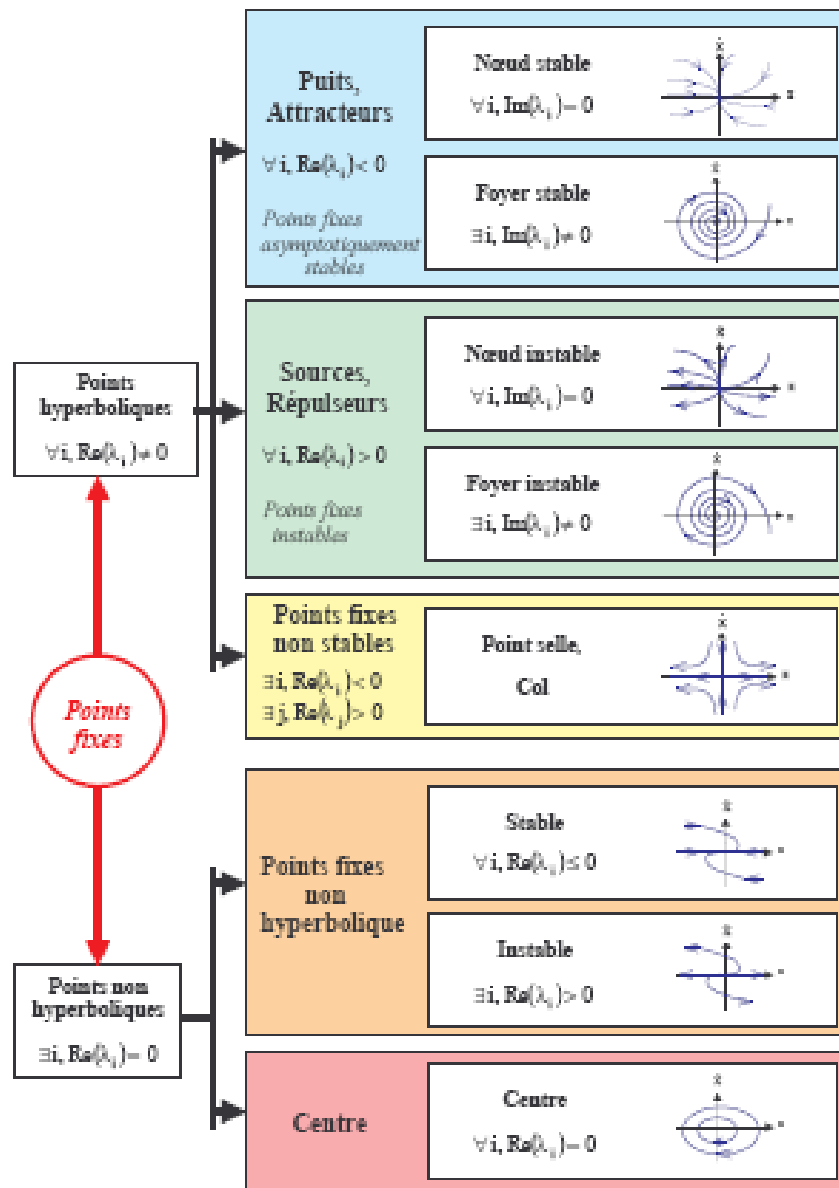


FIG. 1-8 – Les différents types d'états d'équilibre.

1.9 Stabilité structurelle

Un système dynamique (champ de vecteurs ou application) structurellement stable si le portrait de phase ne change pas dans une perturbation de ses paramètres. Par conséquent une bifurcation correspond à une perte de stabilité structurelle.

Une manière de comprendre la stabilité structurelle est la suivante : le système est structurellement stable si en déformant légèrement par un homéomorphisme, sans en altérer ainsi les propriétés fondamentales, le domaine où s'accomplit le mouvement, on peut modifier, un tantinet également, les équations du mouvement de sorte que l'allure générale de l'ensemble des trajectoires, bien que peut-être localement différentes dans leur forme mais non point dans leurs propriétés essentielles, reste inchangée. La signification physique de cette définition est très intéressante : si, par exemple, les équations du mouvement dépendent de paramètres difficiles à mesurer mais dont les variations modifient peu les équations, alors les mouvements eux-mêmes ne sont pas profondément perturbés par ces variations.

Cette espérance en cette forme de stabilité a été longtemps partagée, notamment par les esprits physiciens, cependant, la propriété d'être structurellement stable est rare, n'est pas vérifiée pour presque tout système dynamique : on dit que cette propriété n'est pas générique, elle manque de stabilité.

1.9.1 Définitions

Définition 1.15 *Un système dynamique (champ de vecteurs ou application) est structurellement stable ou robuste si les systèmes suffisamment "proches" présentent un même comportement dynamique.*

Définition 1.16 [**Stabilité structurelle**] *Une application f , est structurellement stable s'il existe un voisinage, V de f , tel que pour toute application $g \in V$, il existe un homéomorphisme h tel que $f = h^{-1} \circ g \circ h$.*

Théorème 1.1 [Andronov et Pontryagin, 1937] *Un système $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^2$, f régulière, est structurellement stable dans un ouvert $\mathbf{D}_0 \subset \mathbb{R}^2$ si et seulement si :*

- i)- Il a un nombre fini d'équilibres et de cycles limites dans \mathbf{D}_0 , tous hyperboliques.*
- ii)- Il n'y a pas de trajectoires homoclines ou hétéroclines de cols(selles).*

Généralement, pour les orbites périodiques et les points fixes, la stabilité structurale peut être testée à partir des valeurs propres du système linéarisé. Mais cette méthode échoue pour les orbites homoclines et les orbites quasi-périodique, car la structure de l'orbite à proximité peut être très extrêmement compliquée et défient toute description locale.

Exemple 1.4 *Le système dynamique définit par l'équation suivante :*

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

n'est pas structurellement stable.

1.9.2 Notion de généricité

Définition 1.17 [Ensemble résiduel] *Soit M un espace topologique, U un sous ensemble de M est dit résiduel, s'il contient un sous ensemble qui est une intersection dénombrable de sous ensemble de M qui sont ouverts et denses dans M .*

Définition 1.18 [Espace de Baire] *Si chaque ensemble résiduel dans M dense dans M , on dit que M est un espace de baire.*

On remarque que $\mathbf{C}^r(M)$ muni de la topologie \mathbf{C}^k ($k < r$) est un espace de Baire; voir [5], tel que $\mathbf{C}^r(M)$ est l'espace de champs de vecteur de classe \mathbf{C}^r de M dans M .

Définition 1.19 [Propriété générique] *Une propriété d'une application (resp. champ de vecteur) est dite \mathbf{C}^k générique si l'ensemble des applications (ou les champ de vecteurs) qui possèdent cette propriété contient un sous ensemble résiduel dans la topologie \mathbf{C}^k .*

Problème 1.2 *Cette définition propose la question suivante : la stabilité structurelle est-elle une propriété générique ?*

On peut répondre affirmativement (le cas du cercle \mathbf{S}^1) dans [5] et [7]. Par contre, S. Smale a montré que la stabilité structurelle n'est pas une propriété générique pour le tore \mathbf{T}^3 (on ignore d'ailleurs si sur toute variété compacte il existe un difféomorphisme structurellement stable).

Définition 1.20 [Point fixe générique et orbite générique] *Soit x un point fixe d'un champ de vecteur (resp. application) g . On dit que x est un point générique si toutes les valeurs propres de la matrice $Dg(x)$ ont leurs parties réelles non nulles. Une orbite fermée est dite générique si son application de premier retour possède un point fixe générique.*

On renvoie au livre [5] pour plus de détails.

Exemple 1.5 *Les systèmes dynamiques qui ont des points fixes, les points fixes hyperboliques sont structurellement stables et génériques.*

1.9.3 Théorèmes de Peixoto

Maintenant on énonce le théorème de Peixoto [7], a été démontré en 1962, ce qui caractérise complètement les champs de vecteurs structurellement stables sur une variété compacte M , différentiable en dimensions deux.

Théorème 1.3 [Théorème de M. Peixoto] [19] *Soit f un C^r champ de vecteurs défini sur une variété M compacte sans bord, de dimension deux est structurellement stable si et seulement si :*

- i) Le nombre de points fixes et d'orbites périodiques est fini, tous hyperboliques ;*
- ii) aucune trajectoire (orbite) ne connecte deux points selles ;*
- iii) L'ensemble non-errant se compose de points fixes et orbites périodiques.*

Si M est orientable, alors l'ensemble des f structurellement stables est un ouvert dense de $C^r(M)$.

Malheureusement, la simplicité de ce théorème ne subsiste pas en dimension plus grande car les champs de vecteurs structurellement stable ne sont pas denses si $\dim M \geq 3$ (Un exemple historique : le fer à cheval de Smale dans [35], donc le théorème de Peixoto ne peut pas être généralisé pour les difféomorphismes en dimension n ($n \geq 2$) ou pour les champs de vecteurs en dimension n ($n \geq 3$)).

Théorème 1.4 [Théorème de Peixoto dans \mathbf{S}^1] *Soit un difféomorphisme $f \in \text{Diff}^1(\mathbf{S}^1)$ est structurellement stable si et seulement si l'ensemble de non-errant $\Omega(f)$ se compose d'un nombre fini de points fixes ou orbites périodiques.*

1.10 Stabilité structurelle et hyperbolicité

Une autre notion de stabilité structurelle (la hyperbolicité) a été développée par Smale et les travaux subséquents de son école, Smale, Kupka et Pugh qui ont caractérisé les conditions pour la stabilité structurelle des systèmes de hautes dimensions.

1.10.1 Ensemble hyperbolique

Définition 1.21 [Ensemble hyperbolique] *Soit $g : M \rightarrow M$ est un difféomorphisme définie sur la variété compacte $M \subset \mathbb{R}^n$, un sous-ensemble A de \mathbb{R}^n invariant par g dite hyperbolique s'il existe deux fibrés invariants E^s et E^i par $T_\Lambda M$ et deux constantes $0 < \lambda < 1$ et $c > 0$ tels qu'on ait :*

- 1- $T_\Lambda M = E^s \oplus E^i$, où \oplus est la somme algébrique directe
- 2- $\|Dg^k v\| \leq c\lambda^k \|v\|$, pour tout $v \in E^s$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$
- 3- $\|Dg^{-k} v\| \leq c\lambda^k \|v\|$, pour tout $v \in E^i$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$

La première condition signifie que tout vecteur v peut être écrit sous la forme $v = v^s + v^i$, $v^s \in E^s$, $v^i \in E^i$, et $E^s \cap E^i = \emptyset$. L'invariance des fibrés signifie que $Dg(x) E^{s,i}(x) = E^{s,i}(g(x))$ pour tous $x \in A$.

1.10.2 Ensemble non-errant d'un difféomorphisme

Définition 1.22 [Ensemble non – errant] Soit f un difféomorphisme de M , un point x de M est un point-errant de f s'il existe un voisinage U de x tel que $f^n(U) \cap U = \emptyset$ pour tous $n > 0$. L'ensemble des points-errants de f est un ouvert invariants de M son complémentaire $\Omega = \Omega(f)$ est appelé l'ensemble des points non-errants. Cet ensemble contient en particulier les points périodiques de f .

Exemple 1.6 Les points fixes et les points des orbites périodiques sont trivialement des points non-errants. (Rem. la notion de point errant introduite par Birkhoff)

1.10.3 Axiome A et Transversalité forte

La condition essentielle qui caractérise la stabilité structurelle est appelé "Axiome A "

Définition 1.23 f satisfait l'Axiome A si et seulement si :

- a) l'ensemble $\Omega = \Omega(f)$ est hyperboliques,
- b) $\overline{\text{Per}(f)} = \Omega(f)$ i.e, l'ensemble $\Omega(f)$ égale à la fermeture de l'ensemble $\text{Per}(f)$ des points périodiques de f .

Définition 1.24 Si f est un difféomorphisme Axiome A de M , alors tout point x de M appartient à l'intersection $W^s(y) \cap W^i(z)$ de variétés stables et instables de point $\Omega(f)$. On dit que f vérifie la condition de Transversalité forte si toutes ces intersections sont transverses.

Robbin [11] et Robinson [14] ont montré que Axiome A la transversalité forte impliquait la stabilité structurelle globale [13] a prouvé que réciproquement, Axiome + la transversalité forte étaient nécessaires à cette stabilité. On obtient donc :

Théorème 1.5 [Stabilité structurelle] f est C^1 -structurellement stable si et seulement si f satisfait les conditions "Axiome A et transversalité fort".

1.10.4 Difféomorphisme hyperbolique

Très rapidement, les dynamiciens ont recherché quelles étaient les dynamiques structurellement stable, c'est à dire dont le comportement topologique ne change pas après perturbation du système. Anosov et Smale ont introduit une classe des difféomorphismes ayant cette propriété : ce sont les difféomorphismes hyperboliques.

Définition 1.25 [Difféomorphisme hyperbolique] *Un difféomorphisme est hyperbolique si, au-dessus de tout ensemble invariant M suffisamment récurrent, on peut décomposer l'espace tangent de M en deux fibrés linéaires invariants, le premier (le fibre stable) étant uniformément contracté, le second (le fibre instable) uniformément délaté.*

Les difféomorphismes qui satisfont l'axiome A sont strictement hyperbolique (définitions de l'application hyperbolique). L'équivalence entre la stabilité structurelle et l'hyperbolicité a fait l'objet de nombreux travaux et a finalement été obtenue par [13]. Ces recherches ont fait émerger de nombreux outils intéressants pour l'étude des dynamiques différentiables. Il est apparu cependant que l'ouvert des dynamiques hyperboliques n'est en général pas dense dans l'espace des difféomorphismes.

Exemple 1.7 *Un difféomorphisme hyperbolique pour lequel $\mathcal{R}(f)$ coïncide avec M est un difféomorphisme d'Anosov. C'est le cas du difféomorphisme du tore $\mathbf{T}^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ induit par l'action de l'automorphisme linéaire $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.*

1.10.5 Difféomorphisme Morse-Smale

Une classe importante des applications possédant la propriété de stabilité structurelle est la classe des applications de Morse-Smale.

Définition 1.26 [Ensemble récurrent chaîné] *Soit f un difféomorphisme. Un point x est récurrent chaîné pour f , si, pour un quelconque $\varepsilon > 0$, il existe des points x_0, x_1, \dots, x_k et des entiers positifs n_1, n_2, \dots, n_k tel que $|f(x_{i-1}) - x_i| < \varepsilon$, pour tout $i \in \{0, \dots, k\}$. La séquence de points x_0, x_1, \dots, x_k est appelée une ε -chaîne ou une pseudo-orbite.*

Nous noterons $\mathcal{R}(f)$ l'ensemble des points qui sont récurrents chaînés, est appelé l'ensemble chaîné récurrent¹. L'ensemble des points qui sont récurrents chaînés est une condition nécessaire de la stabilité structurelle.

Définition 1.27 [Difféomorphisme Morse – Smale] *Un difféomorphisme est appelé Morse-Smale si l'ensemble chaîné récurrent est un ensemble fini de points périodiques, tous hyperboliques et si toutes les variétés stables et instables des points selles sont transverses.*

Exemple 1.8 *Les difféomorphismes de Morse-Smale sont des exemples de difféomorphismes qui satisfont l'axiome A et la transversalité forte.*

Définition 1.28 [Propriétés de Morse – Smale] *On dit qu'un système dynamique (champ de vecteurs ou application) satisfait la propriété de Morse-Smale si :*

- i) Son ensemble non-errant est réduit à l'ensemble des points d'équilibre et des orbites périodiques,*
- ii) Les éléments de l'ensemble non-errant sont tous hyperboliques et sont en nombre fini,*
- iii) Les variétés stables et instables des éléments non-errants se coupent transversalement, c'est-à-dire qu'en tout point d'intersection, la somme des espaces tangents est égale à l'espace tangent tout entier.*

L'intérêt de la propriété de Morse-Smale est qu'elle est une condition suffisante à la stabilité de la dynamique [6], [8].

Problème 1.6 *La question est de savoir si la propriété de Morse-Smale est vérifiée pour "presque tous" les systèmes, c'est-à-dire si c'est une propriété générique ?*

¹Notons qu'une chaîne récurrente est une notion plus faible que la récurrence. En effet, x est un point récurrent pour f si, pour n'importe quel $\varepsilon > 0$, il existe $n > 0$ tel que $|f^n(x) - x| < \varepsilon$. Par conséquent, un point récurrent est récurrent chaîné avec une ε -chaîne se réduisant au point x lui-même. Par contre, il existe des points récurrents chaînés mais non récurrents, les points homocliniques et hétérocliniques.

Sur une variété compacte de dimension $n = 2$, la propriété de Morse-Smale peut être reformulée. Il est alors possible de montrer sa généricité. On trouvera la preuve originale du cas des surfaces orientables dans [7] et celle pour les surfaces quelconques dans [9]. On pourra aussi se référer à [5], qui contient une autre preuve du cas orientable.

Chapitre 2

Propriétés des équations discrètes quadratiques du plan

Résumé

Dans ce chapitre, nous rappelons les notions les plus importantes dans l'étude des équations discrètes du plan, en faisant particulièrement attention à celles qui sont quadratiques. D'autre façon ce chapitre est consacré aux propriétés des équations discrètes quadratiques du plan. On étudiera exactement : l'existence des domaines des paramètres pour lesquels les orbites de l'équations soit bornées ou non-bornées, et le nombre d'attracteurs et les conditions de l'existence du chaos et les orbites chaotiques.

2.1 Introduction

Soit (S) un système dynamique en temps continu de dimension n , par l'application de Poincaré on peut passer de ce système qui est défini par des équations différentielles et représentées dans l'espace des phases par des trajectoires continues à un autre système en temps discrets (S') de dimension $n - 1$ qui sera défini par des équations algébriques et représentées dans l'espace des phases par une suite de points. Ce qui est intéressant est qu'on est passé de la dimension n à la dimension $n - 1$.

L'étude de la stabilité des solutions périodiques, grâce à l'application de Poincaré et aux multiplicateurs caractéristiques (les valeurs propres), permet d'entrevoir l'importance des systèmes dynamiques discrets, ou, dans un langage plus prosaïque, des suites récurrentes.

Un système dynamique discret est de la forme :

$$x_{k+1} = G(x_k) \tag{2.1}$$

où G est une application régulière engendrée par l'itération d'une application ou d'un difféomorphisme (un difféomorphisme en général) d'un ouvert U de R^n dans lui-même. Le système continu $\frac{dx}{dt} = g(x)$ peut être étudié comme un système discret si, au lieu de considérer son flot continu φ_t , on considère $\tau > 0$ ("sorte" de période d'échantillonnage) et l'application associée :

$$\begin{aligned} G & : & U & \rightarrow U \\ x & \longrightarrow & G(x) & = \varphi_\tau(x) \end{aligned}$$

Comme $\varphi_\tau \circ \varphi_\tau = \varphi_{2\tau}$, il est clair que l'étude de φ_t lorsque $t \rightarrow +\infty$ et celle de

$$G^k = \underbrace{G \circ G \circ \dots \circ G}_{k\text{-fois}}$$

lorsque l'entier k tend vers $+\infty$ doivent être très similaires.

Définition 2.1 [Difféomorphisme] *Un difféomorphisme de classe C^r est une application bijective de classe C^r dont la réciproque est aussi de classe C^r .*

2.2 Équations discrètes du plan

Donner une définition des systèmes dynamiques est assez difficile. Cette difficulté est bien exprimée par Devaney :

" Dynamical systems mean different things to different people. Perhaps all would agree with the authors' description that a dynamical system involves a phase space, whose points represent particular states of the system; a time variable, perhaps continuous, perhaps discrete; and an evolution law that prescribes the state of the system at subsequent times. Beyond this, there are as many definitions of dynamical systems as there are researchers in the field. "

Définition 2.2 *Pour définir un système dynamique, on doit spécifier :*

- *un espace de configurations du système, ou "espace des phases";*
- *une loi d'évolution, qui donne l'état futur du système en fonction de l'état présent.*

Etant donné un espace de configuration et une loi d'évolution, le dynamiqueur s'intéresse au comportement asymptotique du système : que se passe-t-il quand on attend un temps infini ?

On définit un système dynamique discret dans \mathbb{R}^2 par une application itérative continue G , telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} G : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x_{k+1} = G(x_k), \quad x_k \in \mathbb{R}^2, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Elle opère de la façon suivante : étant donné une condition initiale x_0 de l'état du système, le premier état suivant est $x_1 = G(x_0)$, le second état qui suit immédiatement le premier est $x_2 = G(x_1) = G(G(x_0)) = G \circ G(x_0) = G^2(x_0)$, et ainsi de suite de telle

sorte que la $(k + 1)$ -ième état est donné par

$$x_{k+1} = G(x_k) = \dots G^{k+1}(x_0)$$

1- On définit le flot du système à temps discret par :

$$\varphi_k(x) = G \circ G \circ \dots \circ G(x) = G^k(x), \quad k > 0 \text{ et}$$

2- $\varphi_k(x)$ est défini pour $k < 0$ lorsque G est inversible.

3- dans la pratique : $x_0, x_1 = G(x_0), x_2 = G(x_1), \dots, x_{k+1} = G(x_k)$, représentent les valeurs d'une certaine quantité au temps $t = 0, 1, 2, \dots$

4- La valeur de la quantité au temps $m + 1$ dépend de sa valeur au temps m .

Exemple 2.1 [L'application de Hénon] *hénon original(76), et hénon standard(87)*

$$\begin{cases} x_{k+1} = 1 - ax_k^2 + y_k \\ y_{k+1} = bx_k \end{cases}, \text{ et } \begin{cases} x_{k+1} = y_k \\ y_{k+1} = a - bx_k - y_k^2 \end{cases} \quad (2.3)$$

Où a et b sont des paramètres réels.

2.2.1 Définitions

Nous commençons avec quelques définitions préliminaires très utiles dans la suite :

Orbites positives et orbites négatives

Définition 2.3 [Orbite positive, Orbite négative]

Une orbite positive O^+ d'un point x_0 dans \mathbb{R}^2 est la suite des images de x_0 par les composées successives de G :

$$O^+(x_0) = \{x_0, G(x_0), G^2(x_0), \dots, G^k(x_0), \dots\}$$

Si G est inversible alors :

$$\underbrace{G^{-k}(x_0) = G^{-1} \circ G^{-1} \circ \dots \circ G^{-1}(x_0)}_{k \text{ -fois}}$$

et l'orbite négative de x_0 est la suite :

$$O^-(x_0) = \{x_0, G^{-1}(x_0), G^{-2}(x_0), \dots, G^{-k}(x_0), \dots\}$$

Si $O^+(x_0)$ et $O^-(x_0)$ existent alors l'orbite O de x_0 est l'ensemble :

$$O(x_0) = O^+(x_0) \cup O^-(x_0)$$

Stabilité des points fixes

Définition 2.4 [Multiplicateurs caractéristiques] Soit le système discret (2.2). Un point fixe \bar{x} est défini par la relation $G(\bar{x}) = \bar{x}$, Les valeurs propres du jacobien de G en \bar{x} , $DG(\bar{x})$, sont appelées multiplicateurs caractéristiques de G en \bar{x} .

La Figure 2.1, illustre comment l'exponentielle complexe permet de passer des exposants caractéristiques aux multiplicateurs caractéristiques, et justifie après coup la terminologie.

Définition 2.5 [point fixe hyperbolique] Le point fixe \bar{x} est dit hyperbolique si aucun de ces multiplicateurs caractéristiques n'est de module égal à 1.

Problème 2.1 Peut-être plus important que la question de savoir quand une application donnée est structurellement stable est la question inverse : quand il n'est pas structurellement stable ? L'un des principaux moyens d'une application peut ne pas être structurellement stable se produit lorsqu'il y a un manque d'hyperbolicité.

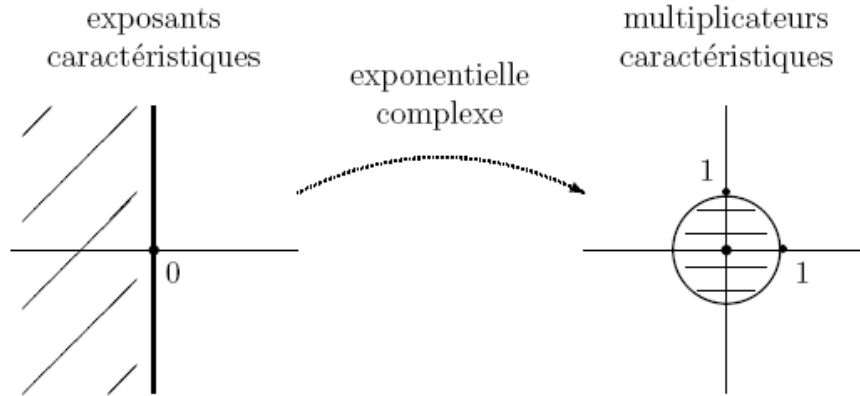


FIG. 2-1 – La fonction exponentielle envoie le demi-plan complexe à partie réelle négative dans l’intérieur du cercle unité.

Définition 2.6 [Stabilité au sens de Lyapunov] *Un point fixe \bar{x} de (2.2) est stable au sens de Lyapunov si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ (dépendant de ε mais indépendant du nombre d’itérations k) tel que, pour tout x vérifiant $\|x - \bar{x}\| \leq \eta$, $\|G^k(x) - \bar{x}\| \leq \varepsilon$ pour tout entier $k > 0$.*

Définition 2.7 [Stabilité asymptotique] *Un point fixe \bar{x} de (2.2) est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov s’il est stable au sens de Lyapunov et si, de plus, pour tout x suffisamment proche de \bar{x} , $\lim_{k \rightarrow +\infty} G^k(x) = \bar{x}$.*

Pour étudier la stabilité autour d’un point fixe \bar{x} , il est souvent utile d’étudier le système linéarisé tangent :

$$\Delta x_{k+1} = DG(\bar{x})\Delta x_k$$

où $\Delta x = x - \bar{x}$ correspond à un petit écart par rapport à \bar{x} . On a alors les deux résultats suivants :

Proposition 2.1 *Soit \bar{x} un point fixe de (2.2). Si ses multiplicateurs caractéristiques sont tous de module strictement inférieur à 1, alors \bar{x} est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov.*

Cette condition de stabilité sur les multiplicateurs caractéristiques n'est pas nécessaire, elle n'est que suffisante. On a aussi la condition suffisante (mais non nécessaire) d'instabilité suivante :

Proposition 2.2 *Soit \bar{x} un point fixe de (2.2). Si l'un des multiplicateurs caractéristiques de \bar{x} est de module strictement supérieur à 1, alors \bar{x} n'est pas stable au sens de Lyapunov.*

2.2.2 Théorème de Grobman-Hartman

La motivation de la définition d'un point fixe hyperbolique repose surtout sur le théorème suivant dit de Grobman-Hartman.

Théorème 2.2 [Grobman – Hartman] *Si le système discret (2.2) admet un point fixe \bar{x} dans \mathbb{R}^2 hyperbolique, alors il existe un homéomorphisme h (application continue bijective et d'inverse continue) défini localement autour de \bar{x} tel que*

$$G = h^{-1} \circ DG(\bar{x}) \circ h$$

On dit alors que G et $DG(\bar{x})$ sont topologiquement conjugués.

Ce résultat, connu sous le nom de théorème de Grobman-Hartman, signifie la chose suivante : Pour un point fixe hyperbolique, il y a équivalence topologique entre les orbites du système non linéaire et celles de son linéarisé tangent. En revanche, cette équivalence n'est pas nécessairement plus fine : en général h n'est pas dérivable. Le manque de régularité de h est lié à des problèmes de résonances entre les exposants caractéristiques.

En pratique, cela implique que, pour des études de stabilité de nature purement topologique, le linéarisé tangent peut être suffisant. En revanche pour des études de

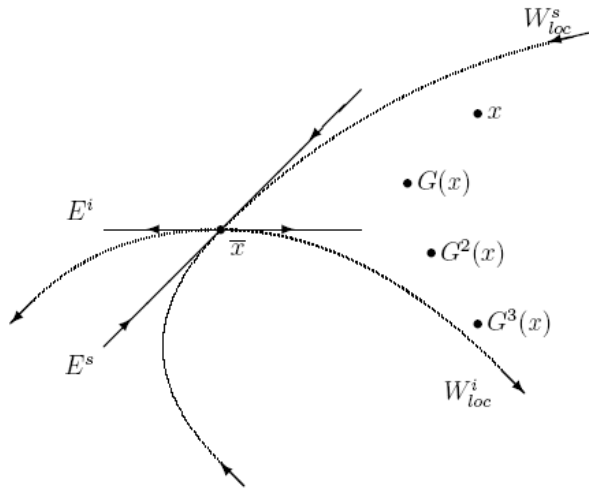


FIG. 2-2 – Portrait de phases, autour d’un point fixe hyperbolique du système discret $x_{k+1} = G(x_k)$, à partir de la décomposition en sous variétés W_{loc}^s et W_{loc}^i .

nature plus fine où intervient la différentiabilité, le linéarisé tangent peut ne plus être une approximation suffisante même localement. Autrement dit, l’approximation d’un système autour d’un point fixe hyperbolique par son linéarisé tangent n’est, en général, que très grossière.

Sous-variétés stables et instables

Avec le théorème de Grobman-Hartman, on déduit du résultat précédent que, autour d’un point fixe hyperbolique, les trajectoires d’un système non linéaire sont entièrement caractérisées, d’un point de vue topologique, par la dimension des espaces vectoriels propres du linéarisé tangent [17].

Ces espaces vectoriels possèdent, en fait, un “prolongement” unique sur le système non linéaire comme l’illustre par la Figure 2.2. Ces espaces vectoriels sont en fait les espaces tangents aux espaces (sous-variétés différentiables) W_{loc}^s et W_{loc}^i définis par le résultat ci-dessous.

Théorème 2.3 [sous variété stable et instable]

Supposons que le difféomorphisme G de (2.2) possède un point fixe hyperbolique \bar{x} dans \mathbb{R}^2 . Soit V un petit voisinage de \bar{x} dans \mathbb{R}^2 . Alors, localement autour de \bar{x} , le sous-espace stable W_{loc}^s défini par

$$W_{loc}^s = \left\{ x \in V : \lim_{k \rightarrow +\infty} G^k(x) = \bar{x} \text{ et } \forall k \geq 0 \ G^k(x) \in V \right\},$$

possède une structure de sous-variété différentiable dont l'espace vectoriel tangent en \bar{x} est le sous-espace vectoriel E^s du linéarisé tangent en \bar{x} . De même, localement autour de \bar{x} , le sous-espace instable W_{loc}^i , défini par

$$W_{loc}^i = \left\{ x \in V : \lim_{k \rightarrow +\infty} G^{-k}(x) = \bar{x} \text{ et } \forall k \geq 0 \ G^k(x) \in V \right\},$$

possède une structure de sous-variété différentiable dont l'espace vectoriel tangent en \bar{x} est le sous-espace vectoriel E^i du linéarisé tangent en \bar{x} .

Remarquons que W_{loc}^s (resp. W_{loc}^i) sont invariants par G et G^{-1} respectivement :

$$G(W_{loc}^s) \subset W_{loc}^s \text{ et } G^{-1}(W_{loc}^i) \subset W_{loc}^i$$

Définis localement autour de \bar{x} , W_{loc}^s et W_{loc}^i peuvent être prolongés en W^s et W^i loin de \bar{x}

$$W^s = \bigcup_{k \geq 0} G^{-k}(W_{loc}^s) \text{ et } W^i = \bigcup_{k \geq 0} G^k(W_{loc}^i)$$

Alors la géométrie des espaces globaux W^s et W^i s'avère être d'un intérêt capital pour l'étude du G^k lorsque $k \rightarrow +\infty$. Comme le montre la Figure 2.3, les effets non linéaires peuvent, par exemple, contraindre ces espaces prolongés à se couper loin de \bar{x} en un point q dit homoclinique. Une telle intersection implique une infinité d'autres de plus en plus proches de \bar{x} . Elle implique aussi un comportement très irrégulier et chaotique pour les orbites de G autour de \bar{x} .

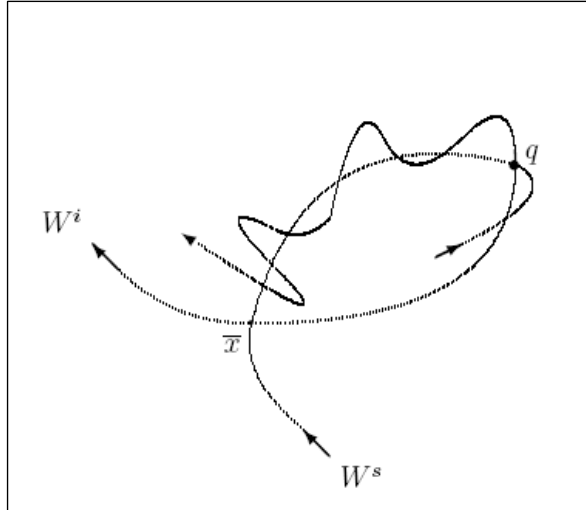


FIG. 2-3 – Les variété stables W^s et instable W^i lorsqu'elles se coupent en q .

Orbites périodiques

Définition 2.8 [Orbites périodiques] Une orbite $(G_k(x))^{k \geq 0}$ du système (2.2) est dite périodique si $G(x) \neq x$ et s'il existe $k \geq 2$ tel que $G^k(x) = x$. Le plus petit entier $k \geq 2$ tel que $G^k(x) = x$ est alors appelé période.

Comme pour les cycles limites, on peut définir une notion de stabilité (asymptotiquement) autour d'une orbite périodique. Ici, en fait, c'est encore plus simple : pour étudier la stabilité d'une orbite périodique issue de x et de période k , il suffit de considérer G^k pour se ramener à l'étude de la stabilité d'un point fixe.

Orbites homoclines et hétéroclines

Définition 2.9 [Orbite homocline] Soit p un point selle d'un difféomorphisme G , un point q dit homocline pour G si $G^k(q) \rightarrow p$ si $k \rightarrow +\infty$ et $k \rightarrow -\infty$.

- $q \in W^s(p) \cap W^i(p)$
- Les variétés stables et instables étant invariantes, alors si q est un point homocline, $G(q), G^2(q), \dots, G^k(q), \dots$ sont aussi des points homoclines

- l'orbite $\{G(q), G^2(q), \dots, G^k(q), \dots\}$ est appelée orbite homocline

Définition 2.10 [Orbite hétérocline] *Si les variétés $W^s(p_1) \cap W^i(p_2)$ ou $W^i(p_1) \cap W^s(p_2)$ de deux points fixes hyperboliques distincts p_1 et p_2 se coupent en q , alors q est appelé point hétérocline et l'orbite de q est dite orbite hétérocline.*

Exposants de Lyapunov

Définition 2.11 [Exposant de Lyapunov]

On considère le système discret du plan suivant :

$$X_{k+1} = G(X_k), X_k \in \mathbb{R}^2, k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

où la fonction $G : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est le champ de vecteurs (ou difféomorphisme) associé avec le système (2.4). Soit $J(X_k)$ sa Jacobienne en $X_k \in \mathbb{R}^2, k = 0, 1, 2, \dots$, et de définir la matrice :

$$T_n(X_0) = J(X_{n-1}) J(X_{n-2}) \dots J(X_1) J(X_0). \quad (2.5)$$

Par ailleurs, soit $J_i(X_0, n)$ le module de la $i^{\text{ième}}$ valeur propre de la $n^{\text{ième}}$ matrice $T_n(X_0)$, où $i = 1, 2$ et $n = 0, 1, 2, \dots$

Maintenant, les exposants de Lyapunov pour le système discret en dimension deux sont définis par la relation :

$$l_i(X_0) = \ln \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} J_i(X_0, n)^{\frac{1}{n}} \right), i = 1, 2. \quad (2.6)$$

Exemple 2.2 *Soit l'équation discrète quadratique suivant :*

$$\begin{cases} x_{k+1} = ax_k - ax_k^2 = ax_k(1 - x_k) \\ y_{k+1} = b - x_k - by_k + x_k y_k = (b - x_k)(1 - y_k) \end{cases}$$

La matrice jacobienne de l'équation est :

$$\begin{pmatrix} a(1-2x) & 0 \\ (1-y) & -b+x \end{pmatrix}$$

parce que la matrice jacobienne est triangulaire, les exposants de Lyapunov sont :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{n=N} \ln a |1-2x| \\ \lambda_2 = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{n=N} \ln |-b+x| \end{cases}$$

2.3 Équations discrètes linéaires du plan

Nous considérons ici le système linéaire discret suivant

$$x_{k+1} = Bx_k \tag{2.7}$$

avec $x \in \mathbb{R}^2$ et $B \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ constant. L'étude des comportements asymptotiques de la suite récurrente x_k repose sur le calcul des puissances successives de B . Comme pour les équations différentielles linéaires à coefficients constants, il est commun de d'utiliser la décomposition en blocs de Jordan.

Exemple 2.3 En dimension 2, on a uniquement les 3 cas suivants ($(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \alpha, \theta)$ réels, P matrice 2×2 inversible) :

$$B = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1} \text{ et } B^k = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$B = \alpha P \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} P^{-1} \text{ et } B^k = \alpha^k P \begin{pmatrix} \cos k\theta & -\sin k\theta \\ \sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$B = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1} \text{ et } B^k = P \begin{pmatrix} \lambda^k & 0 \\ k\lambda^{k-1} & \lambda^k \end{pmatrix} P^{-1}$$

En dimension 3, on se ramène, sauf cas exceptionnel, à la dimension 2 par la décomposition de B suivante :

$$B = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \end{pmatrix} P^{-1}$$

avec P matrice d'ordre 3 inversible et λ, a, b, c et d réels. A partir des calculs précédents, il est assez simple de dessiner l'allure des trajectoires, i.e. les portraits de phases, $(B^k(x))_{k \geq 0}$ dans \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 . La Figure 2.4, en donnent quelques uns. Revenons au cas général. En utilisant la décomposition en blocs de Jordan, on peut montrer que, dans le cas hyperbolique, l'espace \mathbb{R}^n est somme directe de deux sous-espaces vectoriels E^s et E^i , stables par B ; $B(E^s) \subset E^s$ et $B(E^i) \subset E^i$ de dimension respective m^s et m^i où m^s (resp. m^i) est le nombre de multiplicateurs de module < 1 (resp. > 1). Comme l'illustre la Figure 2.5, si $x \in E^s$ alors $\lim_{k \rightarrow +\infty} B^k(x) = 0$ et si $x \in E^i$ alors $\lim_{k \rightarrow +\infty} B^{-k}(x) = 0$ ($B|_{E^i}$ est bijectif car injectif; il est donc licite de considérer B^{-1} sur E^i) C'est pourquoi on appelle E^s et E^i les espaces vectoriels contractants ou stables et dilatants ou instables de l'opérateur B .

2.4 Équations discrètes quadratiques du plan [18]

Soit f et g deux polynômes réels dans les variables x et y , telle que $f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est une application de polynôme de degré deux.

tel que :

$$f(x, y) = \sum_{i+j=0}^2 a_{ij} x^i y^j, \quad g(x, y) = \sum_{i+j=0}^2 b_{ij} x^i y^j$$

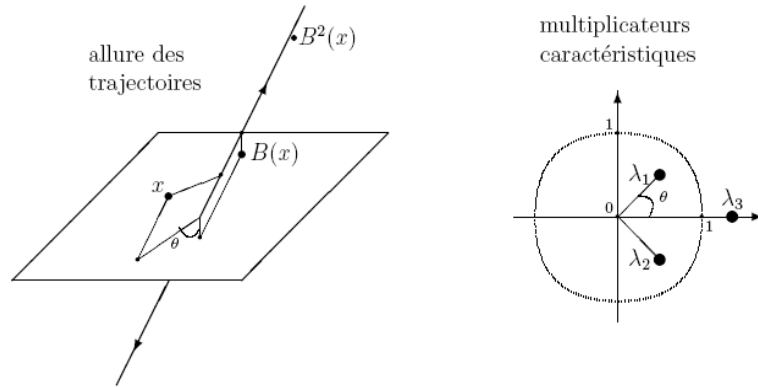


FIG. 2-4 – Exemple de système discret, $x_{n+1} = Bx_n$ de dimension 3 hyperbolique.

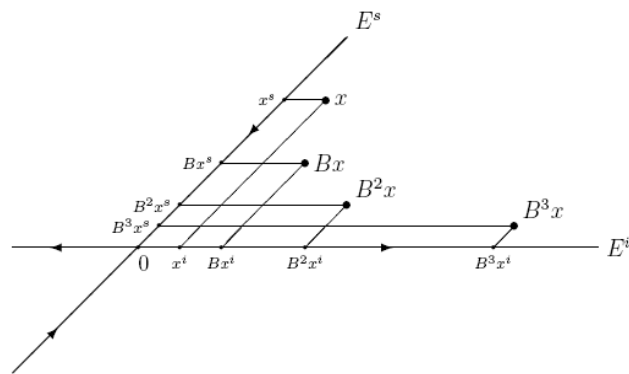


FIG. 2-5 – Portrait de phases d'un système linéaire discret hyperbolique, à partir de sa décomposition en espaces stable E^S et instable E^i

2.4.1 Applications quadratiques du plan

Définition 2.12 [Application quadratique du plan] *l'application quadratique dans le plan(ou l'application quadratique en dimension 2), est l'application $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie(en cas générale) par l'équation :*

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) \\ g(x, y) \end{cases} \quad (2.8)$$

pour simplifier l'étude de l'application(2.8) on peut écrire F sous la forme :

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4y^2 + a_5xy \\ g(x, y) = b_0 + b_1x + b_2y + b_3x^2 + b_4y^2 + b_5xy \end{cases} \quad (2.9)$$

Où $(a_i, b_i)_{0 \leq i \leq 5} \in \mathbb{R}^{12}$ sont des paramètres réels.

2.4.2 Equations discrètes quadratiques du plan

Définition 2.13 [L'équation discret quadratique du plan] *(En cas général), il s'agit d'un système dynamique discret du type :*

$$F(x_k, y_k) = \begin{cases} x_{k+1} = f(x_k, y_k) = a_0 + a_1x_k + a_2y_k + a_3x_k^2 + a_4y_k^2 + a_5x_ky_k \\ y_{k+1} = g(x_k, y_k) = b_0 + b_1x_k + b_2y_k + b_3x_k^2 + b_4y_k^2 + b_5x_ky_k \end{cases} \quad (2.10)$$

Tel que $f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, et $(a_i, b_i)_{0 \leq i \leq 5} \in \mathbb{R}^{12}$ sont les paramètres réels, appellent les paramètres de bifurcations.

2.5 Propriétés des équations discrètes quadratiques du plan [18]

Parce que une équation discrète quadratique du plan est un couple $\langle \mathbb{R}^2, F \rangle$ formé par l'espace métrique \mathbb{R}^2 appelé espace des phases, et l'application quadratiques du plan $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ (un difféomorphisme en général), appelée application successeur. Donc les propriétés d'une équation discrète quadratique du plan sont les mêmes de l'application F , Dans ce travail nous nous intéressons au cas où la variable temporelle est discrète et nous adopterons les propriétés d'équation discrète quadratique du plan suivants :

2.5.1 Application inverse

L'application (2.10) est inversible si le déterminant δ de la matrice jacobienne est non nul pour toutes les variables d'état du équation. La matrice jacobienne de l'équation discrète quadratique du plan (2.10) donnée par :

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} a_1 + 2a_3x + a_5y & a_2 + 2a_4y + a_5x \\ b_1 + 2b_3x + b_5y & b_2 + 2b_4y + b_5x \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

le déterminant $\delta = \det J(x, y)$ de la matrice jacobienne est :

$$\delta = (a_1 + 2a_3x + a_5y)(b_2 + 2b_4y + b_5x) - (b_1 + 2b_3x + b_5y)(a_2 + 2a_4y + a_5x),$$

Après la simplification on obtient donc

$$\delta = \det J(x, y) = \mu_1x^2 + \mu_2y^2 + \mu_3xy + \mu_4x + \mu_5y + \mu_6, \quad (2.12)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_1 = 2a_3b_5 - 2b_3a_5 \\ \mu_2 = 2a_5b_4 - 2a_4b_5 \\ \mu_3 = 4a_3b_4 - 4a_4b_3 \\ \mu_4 = 2a_3b_2 - 2a_2b_3 + a_1b_5 - b_1a_5 \\ \mu_5 = 2a_1b_4 - 2b_1a_4 - a_2b_5 + b_2a_5 \\ \mu_6 = a_1b_2 - a_2b_1. \end{array} \right. \quad (2.13)$$

Donc, l'équation discrète quadratique du plan (2.10) est inversible si et seulement si :
 $\mu_1x^2 + \mu_2y^2 + \mu_3xy + \mu_4x + \mu_5y + \mu_6 \neq 0$, pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ce ci est possible si
et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_1x^2 + \mu_2y^2 + \mu_3xy + \mu_4x + \mu_5y + \mu_6 > 0, \text{ pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \dots(1) \\ \text{ou} \\ \mu_1x^2 + \mu_2y^2 + \mu_3xy + \mu_4x + \mu_5y + \mu_6 < 0, \text{ pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \dots(2) \end{array} \right.$$

le discriminant Δ_1 de (1) est

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= (\mu_3y + \mu_4)^2 - 4\mu_1(\mu_2y^2 + \mu_5y + \mu_6) \\ \Delta_1 &= (\mu_3^2 - 4\mu_1\mu_2)y^2 + 2(\mu_3\mu_4 - 2\mu_1\mu_5)y - 4\mu_1\mu_6 \end{aligned}$$

L'inégalité (1) est vérifié si et seulement si : $\mu_1 > 0$, et $\Delta_1 < 0$,

$$\Delta_1 < 0 \iff \left\{ \begin{array}{l} \mu_3^2 - 4\mu_1\mu_2 < 0 \\ (\mu_3\mu_4 - 2\mu_1\mu_5)^2 + 4\mu_1\mu_6(\mu_3^2 - 4\mu_1\mu_2) < 0 \end{array} \right.$$

ce qui équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_3^2 - 4\mu_1\mu_2 < 0 \\ \mu_3^2\mu_4^2 - 4\mu_1\mu_3\mu_4\mu_5 + 4\mu_1^2\mu_5^2 + 4\mu_1\mu_3^2\mu_6 - 16\mu_1^2\mu_2\mu_6 < 0 \end{array} \right.$$

De même pour l'inégalité (2), on obtient alors le théorème suivant :

Théorème 2.4 [Existence d'application inverse] *l'application (2.10) est inversible si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :*

$$\begin{cases} \mu_1 > 0, \mu_3^2 - 4\mu_1\mu_2 < 0 \\ 4\mu_1\mu_2\mu_6 + \mu_3\mu_4\mu_5 - \mu_1\mu_5^2 - \mu_2\mu_4^2 - \mu_3^2\mu_6 > 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

ou

$$\begin{cases} \mu_1 < 0, \mu_3^2 - 4\mu_1\mu_2 < 0 \\ 4\mu_1\mu_2\mu_6 + \mu_3\mu_4\mu_5 - \mu_1\mu_5^2 - \mu_2\mu_4^2 - \mu_3^2\mu_6 > 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

Exemple 2.4 *Soit l'application de Hénon définie par*

$$h(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ 1 - 1.4y^2 + 0.3x \end{pmatrix}$$

la matrice jacobienne est

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.3 & -2.8y \end{pmatrix}.$$

le déterminant $\det J(x, y)$ de la matrice jacobienne est

$$\det J(x, y) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0.3 & -2.8y \end{vmatrix} = -0.3 \neq 0$$

Alors le difféomorphisme quadratique h est inversible, et l'inverse h^{-1} donné par

$$h^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{-1+1.4x^2+y}{0.3} \\ x \end{pmatrix}$$

2.5.2 Equivalence topologique

Théorème 2.5 [Equivalence topologique]

Les deux équations discrètes quadratiques du plan

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} = f(x_k, y_k) \\ y_{k+1} = g(x_k, y_k) \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} x_{k+1} = g(y_k, x_k) \\ y_{k+1} = f(y_k, x_k) \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

sont topologiquement équivalentes.

Exemple 2.5 Les deux équations discrètes quadratiques du plan

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} = 1 + a_2x_k + a_3x_k^2 \\ y_{k+1} = x_k \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} x_{k+1} = y_k \\ y_{k+1} = 1 + a_2y_k + a_3y_k^2 \end{pmatrix}$$

sont topologiquement équivalentes.

2.5.3 Orbites non-bornées et bornées

Nous étudions les domaines des paramètres $(a_i, b_i)_{0 \leq i \leq 5} \in \mathbb{R}^{12}$ pour que les orbites des équations discrètes quadratiques du plan (2.10) soient bornées ou non-bornées. Nous utilisons l'idée de non-existence des points fixes, parce que s'il n'y a pas de points fixes, donc il n'y a pas de chaos pour l'équations (2.10).

Orbites non-bornées

Tout d'abord, un point fixe (x, y) d'équation discrète quadratique du plan (2.10) doit être simultanément satisfait les deux égalités suivantes :

$$\begin{cases} f(x, y) = x \\ g(x, y) = y \end{cases} \quad (2.17)$$

c'est à dire :

$$S_0 : \begin{cases} a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4y^2 + a_5xy = x \\ b_0 + b_1x + b_2y + b_3x^2 + b_4y^2 + b_5xy = y \end{cases} \quad (2.18)$$

Théorème 2.6 [Existence d'orbites non – bornées] Si $(a_i, b_i)_{0 \leq i \leq 5} \in \Omega = \cup_{i=1}^4 S_i \subset \mathbb{R}^{12}$, Les orbites d'équation discrète quadratique du plan (2.10) sont non-bornées, tel que

$$S_1 : \begin{cases} a_3 > \frac{a_5^2}{4a_4}, a_4 > 0 \\ a_0 > \frac{(2a_1-1-a_1^2)a_4+(a_1-1)a_2a_5-a_2^2a_3}{a_5^2-4a_3a_4} \end{cases} \quad (2.19)$$

$$S_2 : \begin{cases} a_3 < \frac{a_5^2}{4a_4}, a_4 < 0 \\ a_0 > \frac{(2a_1-1-a_1^2)a_4+(a_1-1)a_2a_5-a_2^2a_3}{a_5^2-4a_3a_4} \end{cases} \quad (2.20)$$

$$S_3 : \begin{cases} b_3 > \frac{b_5^2}{4b_4}, b_4 > 0 \\ b_0 > \frac{b_1^2b_4-(2b_2-b_2^2-1)b_3-(b_2-1)b_1b_5}{4b_3b_4-b_5^2} \end{cases} \quad (2.21)$$

$$S_4 : \begin{cases} b_3 < \frac{b_5^2}{4b_4}, b_4 < 0 \\ b_0 > \frac{b_1^2b_4-(2b_2-b_2^2-1)b_3-(b_2-1)b_1b_5}{4b_3b_4-b_5^2} \end{cases} \quad (2.22)$$

Proof. L'équation discrète quadratique du plan (2.10) n'admis pas des points fixes si l'une des inégalités suivantes est vérifiée, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$a_3x^2 + (a_1 - 1 + a_5y)x + a_4y^2 + a_2y + a_0 > 0 \dots\dots(1)$$

$$a_3x^2 + (a_1 - 1 + a_5y)x + a_4y^2 + a_2y + a_0 < 0 \dots\dots(2)$$

$$b_3x^2 + (b_1 + b_5y)x + b_4y^2 + (b_2 - 1)y + b_0 > 0 \dots\dots(3)$$

$$b_3x^2 + (b_1 + b_5y)x + b_4y^2 + (b_2 - 1)y + b_0 < 0 \dots\dots(4)$$

le discriminant Δ_1 de (1) est :

$$\Delta_1 = (a_5^2 - 4a_3a_4) y^2 + (2a_1a_5 - 4a_2a_3 - 2a_5) y - 4a_0a_3 + a_1^2 - 2a_1 + 1$$

l'inégalité (1) satisfait pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{l} a_3 > 0 \\ \Delta_1 < 0 \text{ pour tout } y \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

Alors

$$\Delta_1 < 0 \iff \left\{ \begin{array}{l} a_5^2 - 4a_3a_4 < 0, \\ (1 + a_1^2 - 2a_1) a_4 + (1 - a_1) a_2a_5 + (a_5^2 - 4a_3a_4) a_0 + a_2^2a_3 < 0 \end{array} \right.$$

Remarquons que

$$a_5^2 - 4a_3a_4 < 0 \implies a_4 > 0$$

ce qui prouve (2.19). De même analogue pour les autres cas. ■

Orbites bornées

On considère les sous ensembles de \mathbb{R}^{12} suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{S}_{11} : a_3 < \frac{a_5^2}{4a_4} \\ \bar{S}_{12} : a_4 < 0 \\ \bar{S}_{13} : a_0 < \frac{(2a_1 - 1 - a_1^2)a_4 + (a_1 - 1)a_2a_5 - a_2^2a_3}{a_5^2 - 4a_3a_4} \end{array} \right. \quad (2.23)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{S}_{21} : a_3 > \frac{a_5^2}{4a_4} \\ \bar{S}_{22} : a_4 > 0 \\ \bar{S}_{23} : a_0 < \frac{(2a_1 - 1 - a_1^2)a_4 + (a_1 - 1)a_2a_5 - a_2^2a_3}{a_5^2 - 4a_3a_4} \end{array} \right. \quad (2.24)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{S}_{31} : b_3 < \frac{b_5^2}{4b_4} \\ \bar{S}_{32} : b_4 < 0 \\ \bar{S}_{33} : b_0 < \frac{b_1^2b_4 - (2b_2 - b_2^2 - 1)b_3 - (b_2 - 1)b_1b_5}{4b_3b_4 - b_5^2} \end{array} \right. \quad (2.25)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{S}_{41} : b_3 > \frac{b_5^2}{4b_4} \\ \bar{S}_{42} : b_4 > 0 \\ \bar{S}_{43} : b_0 < \frac{b_1^2 b_4 - (2b_2 - b_2^2 - 1)b_3 - (b_2 - 1)b_1 b_5}{4b_3 b_4 - b_5^2} \end{array} \right. \quad (2.26)$$

Alors on a

$$\bar{S}_i = \cup_{j=1}^{j=3} \bar{S}_{ij}, i = 1, 2, 3, 4. \quad (2.27)$$

Telle que, les sous-ensembles $(\bar{S}_i)_{1 \leq i \leq 4}$ sont les complémentaires en \mathbb{R}^{12} des sous ensembles $(S_i)_{1 \leq i \leq 4}$ donnés à (2.19), (2.20), (2.21), et (2.22). Par conséquent, nous avons le théorème suivant :

Théorème 2.7 [Existence des orbites bornées] Si $(a_i, b_i)_{0 \leq i \leq 5} \in \bar{\Omega} = \cap_{i=1}^{i=4} \cup_{j=1}^{j=3} \bar{S}_{ij} \subset \mathbb{R}^{12}$, alors il y a une possibilité pour voir des orbites bornées pour l'équation (2.10)

Tel que l'ensemble $\bar{\Omega}$ est le complémentaire en \mathbb{R}^{12} de l'ensemble Ω .

Remarque 2.1 Par ce que l'équation du plan (2.10) est quadratique, alors le nombre possible de points fixes est entre 0 et 8, donc on a le théorème suivant :

Théorème 2.8 [Nombre d'attracteurs bornés] Pour l'équation discrète quadratique du plan (2.10) il y a au moins huit possibilités pour voir des attracteurs bornés topologiquement différents.

2.5.4 Stabilité asymptotique des Orbites [18]

Dans cette section nous présentons le théorème qui détermine rigoureusement les domaines des paramètres $(a_i, b_i)_{0 \leq i \leq 5} \in \mathbb{R}^{12}$ pour que les orbites du équation discrète quadratique du plan (2.10) soient asymptotiquement stable. En règle générale, le chaos peut survenir (produire) pour l'équation discrète quadratique du plan (2.10), s'il y a au moins un point fixe qui n'est pas asymptotiquement stable, c'est à dire qu'elle doit être un point selle ou point fixe instable.

Considérons d'abord une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dont le déterminant est $\delta = ad - bc$

et dont la trace est $\tau = a + d$. comme une matrice jacobienne de l'équation discrète quadratique du plan (2.10) en un point fixe. Alors les valeurs propres, $\lambda_{1,2}$ de A peut être exprimées en termes de δ et τ comme suit :

si

$$\tau^2 - 4\delta \geq 0, \quad (2.28)$$

alors on a

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\delta} \right), \quad (2.29)$$

et si

$$\tau^2 - 4\delta < 0, \quad (2.30)$$

alors on a

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\tau \pm i\sqrt{4\delta - \tau^2} \right). \quad (2.31)$$

par suite on a le théorème suivant :

Théorème 2.9 [Conditions d'instabilité asymptotique] *Les points fixes de l'équation discrète quadratique du plan (2.10) ne sont pas tous asymptotiquement stables. Si une ou plus d'une des conditions suivantes sont satisfaites :*

$$\tau^2 - 4\delta \geq 0, |\tau| > 2 \quad (2.32)$$

$$\tau^2 - 4\delta \geq 0, \delta + 1 < \tau < 2, \delta < 1 \quad (2.33)$$

$$\tau^2 - 4\delta \geq 0, -(\delta + 1) < \tau < -2, \delta > 1 \quad (2.34)$$

$$\tau^2 - 4\delta \geq 0, 2 < \tau < \delta + 1, \delta > 1 \quad (2.35)$$

$$\tau^2 - 4\delta \geq 0, -2 < \tau < -(\delta + 1), \delta < 1 \quad (2.36)$$

$$|\tau| < 2\sqrt{\delta}, \delta > 1 \quad (2.37)$$

Théorème 2.10 [Conditions de stabilité asymptotique] *Les points fixes de l'équation discrète quadratique du plan (2.10) sont tous asymptotiquement stables si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

$$\begin{cases} \tau - 1 < \delta < \frac{\tau^2}{4} \\ 0 \leq \tau < 2 \end{cases} \quad (2.38)$$

ou

$$\begin{cases} -\tau - 1 < \delta < \frac{\tau^2}{4} \\ -2 < \tau \leq 0 \end{cases} \quad (2.39)$$

ou

$$0 < \delta < 1, |\tau| < 2\sqrt{\delta} \quad (2.40)$$

où

$$\begin{cases} \delta = \mu_1 x^2 + \mu_2 y^2 + \mu_3 xy + \mu_4 x + \mu_5 y + \mu_6 \\ \tau = \mu_7 x + \mu_8 y + \mu_9, \end{cases} \quad (2.41)$$

et où les $(\mu_i)_{1 \leq i \leq 6}$ sont en (2.13) et encore aussi :

$$\begin{cases} \mu_7 = 2a_3 + b_5 \\ \mu_8 = a_5 + 2b_4 \\ \mu_9 = a_1 + b_2. \end{cases} \quad (2.42)$$

Exemple 2.6 *l'application logistique retardée définie par l'équation*

$$\begin{cases} x_{k+1} = -a_5 y_k + a_5 x_k y_k \\ y_{k+1} = b_1 x_k \end{cases} \quad (2.43)$$

asymptotiquement stable pour tous $-7 \leq a_5 \leq 7$ et $-6 \leq b_1 \leq 6$.

2.5.5 Orbites chaotiques [18]

On remarque, certains cas particuliers des équations discrètes quadratiques du plan (2.10), la condition de l'existence du chaos est que l'équation discrète quadratique du plan (2.10) a au moins un point selle ou point fixe instable. Par suite on a le théorème suivant :

Théorème 2.11 [Existence de chaos] *Une zone possible pour le chaos dans l'équation discrète quadratique du plan (2.10), est l'ensemble $\Omega_1 = \cup_{i=5}^{10} S_i \subset \mathbb{R}^{12}$.*

Où $(S_i)_{5 \leq i \leq 10}$ sont les sous-ensembles suivants de \mathbb{R}^{12} :

$$S_5 : \left\{ \begin{array}{l} \mu_{10} > 0, \mu_{12}^2 - 4\mu_{10}\mu_{11} < 0, \mu_{15} > \frac{\mu_{10}\mu_{14}^2 - \mu_{12}\mu_{13}\mu_{14} + \mu_{11}\mu_{13}^2}{4\mu_{10}\mu_{11} - \mu_{12}^2} \\ b_3\mu_8 > 0, \mu_{16} < 0, \mu_{17}^2 - 4\mu_{16}\mu_{18} < 0, \text{ ou} \\ b_3\mu_8 < 0, \mu_{19} < 0, \mu_{20}^2 - 4\mu_{19}\mu_{21} < 0 \end{array} \right. \quad (2.44)$$

$$S_6 : \left\{ \begin{array}{l} \mu_{10} > 0, \mu_{12}^2 - 4\mu_{10}\mu_{11} < 0, \mu_{15} > \frac{\mu_{10}\mu_{14}^2 - \mu_{12}\mu_{13}\mu_{14} + \mu_{11}\mu_{13}^2}{4\mu_{10}\mu_{11} - \mu_{12}^2} \\ \mu_1 < 0, \mu_{22} < 0, \mu_{23}^2 - 4\mu_{22}\mu_{24} < 0 \\ b_3\mu_8 > 0, \mu_{16} < 0, \mu_{17}^2 - 4\mu_{16}\mu_{18} < 0 \\ \mu_1 < 0, \mu_{25} < 0, \mu_{26}^2 - 4\mu_{25}\mu_{27} \end{array} \right. \quad (2.45)$$

$$S_7 : \left\{ \begin{array}{l} \mu_{10} > 0, \mu_{12}^2 - 4\mu_{10}\mu_{11} < 0, \mu_{15} > \frac{\mu_{10}\mu_{14}^2 - \mu_{12}\mu_{13}\mu_{14} + \mu_{11}\mu_{13}^2}{4\mu_{10}\mu_{11} - \mu_{12}^2} \\ \mu_1 > 0, \mu_{28} < 0, \mu_{29}^2 - 4\mu_{28}\mu_{30} < 0 \\ b_3\mu_8 < 0, \mu_{19} < 0, \mu_{20}^2 - 4\mu_{19}\mu_{21} < 0 \\ \mu_1 > 0, \mu_{25} < 0, \mu_{26}^2 - 4\mu_{25}\mu_{27} \end{array} \right. \quad (2.46)$$

$$S_8 : \left\{ \begin{array}{l} \mu_{10} > 0, \mu_{12}^2 - 4\mu_{10}\mu_{11} < 0, \mu_{15} > \frac{\mu_{10}\mu_{14}^2 - \mu_{12}\mu_{13}\mu_{14} + \mu_{11}\mu_{13}^2}{4\mu_{10}\mu_{11} - \mu_{12}^2} \\ b_3\mu_8 > 0, \mu_{16} < 0, \mu_{17}^2 - 4\mu_{16}\mu_{18} < 0 \\ \mu_1 > 0, \mu_{22} < 0, \mu_{23}^2 - 4\mu_{22}\mu_{24} < 0 \\ \mu_1 > 0, \mu_{25} < 0, \mu_{26}^2 - 4\mu_{25}\mu_{27} \end{array} \right. \quad (2.47)$$

$$S_9 : \left\{ \begin{array}{l} \mu_{10} > 0, \mu_{12}^2 - 4\mu_{10}\mu_{11} < 0, \mu_{15} > \frac{\mu_{10}\mu_{14}^2 - \mu_{12}\mu_{13}\mu_{14} + \mu_{11}\mu_{13}^2}{4\mu_{10}\mu_{11} - \mu_{12}^2} \\ b_3\mu_8 > 0, \mu_{19} < 0, \mu_{20}^2 - 4\mu_{19}\mu_{21} < 0 \\ \mu_1 < 0, \mu_{28} < 0, \mu_{29}^2 - 4\mu_{28}\mu_{30} < 0 \\ \mu_1 < 0, \mu_{25} < 0, \mu_{26}^2 - 4\mu_{25}\mu_{27} \end{array} \right. \quad (2.48)$$

$$S_{10} : \left\{ \begin{array}{l} \mu_{10} > 0, \mu_{12}^2 - 4\mu_{10}\mu_{11} < 0, \mu_{15} > \frac{\mu_{10}\mu_{14}^2 - \mu_{12}\mu_{13}\mu_{14} + \mu_{11}\mu_{13}^2}{4\mu_{10}\mu_{11} - \mu_{12}^2} \\ \mu_1 > 0, \mu_{25} < 0, \mu_{26}^2 - 4\mu_{25}\mu_{27}, \end{array} \right. \quad (2.49)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{10} = \mu_7^2 - 4\mu_1 \\ \mu_{11} = \mu_8^2 - 4\mu_2 \\ \mu_{12} = 2\mu_7\mu_8 - 4\mu_3 \\ \mu_{13} = 2\mu_7\mu_9 - 4\mu_4 \\ \mu_{14} = 2\mu_8\mu_9 - 4\mu_5 \\ \mu_{15} = \mu_9^2 - 4\mu_6 \\ \mu_{16} = b_5^2\mu_8^2 - 4b_3b_4\mu_8^2 \\ \mu_{17} = 2b_5\mu_7\mu_8 + 2b_1b_5\mu_8^2 - 4b_2b_3\mu_8^2\mu_9 \\ \mu_{18} = 8b_3\mu_8 + 2b_1\mu_7\mu_8 + \mu_7^2 - 4b_0b_3\mu_8^2 + b_1^2\mu_8^2 \\ \mu_{19} = b_5^2\mu_8^2 - 4b_3b_4\mu_8^2 \\ \mu_{20} = 2b_5\mu_7\mu_8 - 4b_2b_3\mu_8^2 + 2b_1b_5\mu_8^2 \end{array} \right. \quad (2.50)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{21} = 2b_1\mu_7\mu_8 - 8b_3\mu_8 - 4b_3\mu_8\mu_9 + \mu_7^2 - 4b_0b_3\mu_8^2 + b_1^2\mu_8^2 \\ \mu_{22} = \mu_3^2 - 4\mu_1\mu_2 \\ \mu_{23} = 4\mu_1\mu_8 - 2\mu_3\mu_7 - 4\mu_1\mu_5 + 2\mu_3\mu_4 \\ \mu_{24} = 4\mu_1\mu_9 - 4\mu_1\mu_6 - 4\mu_1 - 2\mu_4\mu_7 + \mu_4^2 + \mu_7^2 \\ \mu_{25} = \mu_3^2 - 4\mu_1\mu_2 \\ \mu_{26} = 2\mu_3\mu_4 - 4\mu_1\mu_5 \\ \mu_{27} = 4\mu_1 - 4\mu_1\mu_6 + \mu_4^2 \\ \mu_{28} = \mu_3^2 - 4\mu_1\mu_2 \\ \mu_{29} = 2\mu_3\mu_4 - 4\mu_1\mu_8 + 2\mu_3\mu_7 - 4\mu_1\mu_5 \\ \mu_{30} = 2\mu_4\mu_7 - 4\mu_1\mu_6 - 4\mu_1\mu_9 - 4\mu_1 + \mu_4^2 + \mu_7^2. \end{array} \right. \quad (2.51)$$

Pour la démonstration voir [18]

Exemple 2.7 *L'application de Hénon [Hénon, (1976)] définie par l'équation*

$$\left(\begin{array}{l} x_{n+1} = 1 + 0.3y_n - 1.4x_n^2 \\ y_{n+1} = x_n \end{array} \right)$$

a un attracteur chaotique, avec un point fixe selle.

2.5.6 Convergence

En règle générale, la structure géométrique des orbites de l'équation discrète quadratique du plan (2.10) dépend du nombre de points fixes. Il peut être vérifié que l'équation discrète quadratique du plan (2.10) a au plus 8 points fixes. Ensuite, si tous les points fixes sont stables (la valeur absolue de leur valeurs propres ne doit pas exactement 1), l'équation discrète quadratique du plan (2.10) converge vers un point fixe. D'où on a le théorème suivant :

Théorème 2.12 [Condition de convergence] Si $(a_i, b_i)_{0 \leq i \leq 5} \in \Omega_2 = \cup_{i=11}^{13} S_i \subset \mathbb{R}^{12}$, l'équation discrète quadratique du plan (2.10) converge vers un point fixe

Tels que les sous-ensembles $(S_i)_{11 \leq i \leq 13}$ sont :

$$S_{11} : \left\{ \begin{array}{l} \mu_1 < 0, \mu_{28} < 0, \mu_{29}^2 - 4\mu_{28}\mu_{30} < 0 \\ \mu_{10} > 0, \mu_{12}^2 - 4\mu_{10}\mu_{11} < 0, \mu_{15} > \frac{\mu_{10}\mu_{14}^2 - \mu_{12}\mu_{13}\mu_{14} + \mu_{11}\mu_{13}^2}{4\mu_{10}\mu_{11} - \mu_{12}^2} \\ b_3\mu_8 > 0, \mu_{31} < 0, \mu_{32}^2 - 4\mu_{31}\mu_{33} < 0 \\ b_3\mu_8 < 0, \mu_{16} < 0, \mu_{17}^2 - 4\mu_{16}\mu_{18} < 0 \end{array} \right. \quad (2.52)$$

ou

$$S_{12} : \left\{ \begin{array}{l} b_3\mu_8 > 0, \mu_{16} < 0, \mu_{17}^2 - 4\mu_{16}\mu_{18} < 0 \\ \mu_{10} > 0, \mu_{12}^2 - 4\mu_{10}\mu_{11} < 0, \mu_{15} > \frac{\mu_{10}\mu_{14}^2 - \mu_{12}\mu_{13}\mu_{14} + \mu_{11}\mu_{13}^2}{4\mu_{10}\mu_{11} - \mu_{12}^2} \\ b_3\mu_8 > 0, \mu_{19} < 0, \mu_{20}^2 - 4\mu_{19}\mu_{21} < 0 \\ b_3\mu_8 < 0, \mu_{31} < 0, \mu_{32}^2 - 4\mu_{31}\mu_{33} < 0 \end{array} \right. \quad (2.53)$$

ou

$$S_{13} : \left\{ \begin{array}{l} \mu_1 > 0, \mu_{36} < 0, \mu_{37}^2 - 4\mu_{36}\mu_{38} < 0 \\ \mu_1 < 0, \mu_{25} < 0, \mu_{26}^2 - 4\mu_{25}\mu_{27} \\ \mu_{10} > 0, \mu_{12}^2 - 4\mu_{10}\mu_{11} < 0, \mu_{15} > \frac{\mu_{10}\mu_{14}^2 - \mu_{12}\mu_{13}\mu_{14} + \mu_{11}\mu_{13}^2}{4\mu_{10}\mu_{11} - \mu_{12}^2} \end{array} \right. \quad (2.54)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{31} = b_5^2\mu_8^2 - 4b_3b_4\mu_8^2 \\ \mu_{32} = 2b_5\mu_7\mu_8 + \mu_7^2 - 4b_2b_3\mu_8^2 + 2b_1b_5\mu_8^2 \\ \mu_{33} = 2b_1\mu_7\mu_8 - 4b_3\mu_8\mu_9 - 4b_0b_3\mu_8^2 + b_1^2\mu_8^2 \\ \mu_{35} = \mu_3^2 - 4\mu_1\mu_2 \\ \mu_{36} = 2\mu_3\mu_4 - 4\mu_1\mu_5 \\ \mu_{37} = -4\mu_1\mu_6 + \mu_4^2. \end{array} \right. \quad (2.55)$$

Exemple 2.8 On considère le difféomorphisme quadratique de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 définie par

$$f(x, y) = \left(\begin{array}{l} x_{k+1} = 1 + 0.6x_k - a_4y_k^2 \\ y_{k+1} = x_k \end{array} \right); \quad (2.56)$$

f converge vers un point fixe si $0 < a_4 \leq 0.45$.

Chapitre 3

Stabilité structurelle des difféomorphismes quadratiques du plan

Résumé

Dans ce chapitre on introduit la notion de la conjugaison topologique des applications, puis appliquons la notion dans l'étude de l'existence des conditions nécessaire de la stabilité structurelle des difféomorphismes quadratiques du plan.

3.1 Introduction

Un système dynamique (champ de vecteurs ou application) est dit structurellement stable si et seulement si les portraits de phases de tous les systèmes “voisins” sont topologiquement équivalents (resp. conjuguées). Deux systèmes sont dits topologiquement équivalents (resp. conjuguées) si et seulement s'il existe une homéomorphisme entre les espaces des phases qui transforme les orbites de l'une en les orbites de l'autre, en préservant

le sens des flèches sur les orbites¹

Par exemple, si un système structurellement stable admet un seul point d'équilibre asymptotiquement stable \bar{x} hyperbolique, alors, tout système "voisin" admet aussi un seul point d'équilibre, proche de \bar{x} , asymptotiquement stable et hyperbolique. Il convient bien sûr de définir ce qu'est un système "voisin" : le plus simple consiste à perturber le champ de vecteurs (resp. application) $g(x)$ par addition d'un champ (resp. application) $\delta g(x)$ petit en norme (la norme peut aussi porter sur les dérivés en espace, $D(\delta g), \dots$) et à considérer alors le système dynamique $g(x) + \delta g(x)$ comme système voisin.

Il est clair que cette question possède des motivations physiques importantes. En effet, toute modélisation est une approximation. Il est donc normal de s'intéresser aux systèmes voisins du système dynamique de modélisation. En particulier, il apparaît important de savoir si les comportements asymptotiques contenus dans le système issu de la modélisation sont persistants et stables aux petites perturbations des équations, i.e. du champ des vecteurs (resp. application). D'où le nom de stabilité structurelle (à ne pas confondre avec la stabilité asymptotique) donné à ces questions.

Par exemple, un système dynamique $g(x)$ qui admet un point stationnaire \bar{x} , dont l'un des exposants caractéristiques est à partie réelle nulle, n'est pas structurellement stable par rapport aux systèmes voisins. En effet, de petites perturbations δg du champ des vecteurs (resp. application) g induisent sur la matrice $Dg(x)$, ainsi que sur ses valeurs propres (les exposants caractéristiques), des perturbations dans toutes les directions. Or, nous avons vu que le nombre d'exposants caractéristiques à partie réelle positive (resp. négatives) est un invariant topologique. Donc, nécessairement, un tel système ne peut pas être structurellement-stable pour des perturbations aussi générales. En revanche, il peut très bien le rester pour des perturbations plus spécifiques, i.e. une topologie plus fine qui restreint la classe des systèmes voisins possibles. Un lecteur intéressé pourra consulter d'abord [21], et pour en savoir encore plus [10, ?].

¹Il n'est pas possible de conserver la paramétrisation en temps car alors les périodes des orbites périodiques de deux systèmes topologiquement équivalents seraient rigoureusement égales. Ce qui est beaucoup trop contraignant.

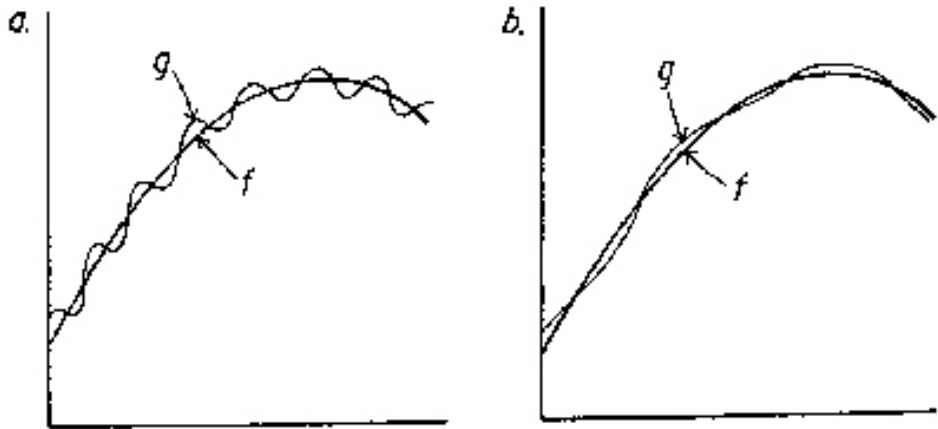


FIG. 3-1 – (a) f et g sont C^0 proches, (b) f et g sont C^1 proches

Pour commencer la discussion de la stabilité structurelle, nous avons besoin de préciser la notion de "voisin" de deux applications [15].

Définition 3.1 [C^0 distance] Soit f et g deux applications. La C^0 distance entre f et g , s'écrit $d_0(f, g)$, est donnée par

$$d_0(f, g) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x) - g(x)|$$

La C^r distance est donnée par

$$d_r(f, g) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (|f(x) - g(x)|, |f^{(1)}(x) - g^{(1)}(x)|, \dots, |f^{(r)}(x) - g^{(r)}(x)|).$$

Intuitivement, deux applications sont C^r proches (resp. C^r voisins) ainsi à condition que leurs r - premières dérivés ne diffèrent que par une petite quantité.

Exemple 3.1 La Figure 3.1 illustre ceci en exhibant la dynamique de deux équations discrètes C^0 proche et C^1 proche (en dimension 2)

3.2 Conjugaison topologique des applications

En mathématiques, deux applications seraient topologiquement conjuguées si' il existe un homéomorphisme, cela conjuguera celui dans l'autre. La conjugaison topologique est important dans l'étude des applications itérées et plus généralement dans l'étude de systèmes dynamiques. Comme exemple, l'application logistique et l'application de tente sont topologiquement conjuguées .

La conjugaison topologique définit une relation d'équivalence dans l'espace de toutes les surjections continus d'un espace topologique à elle-même, on dits que f et g sont être liés s'ils sont topologiquement conjugués. Cette relation d'équivalence est très utile dans la théorie de systèmes dynamiques, puisque chaque classe contient toutes les applications qui partagent la même dynamique du point de vue topologique. Par exemple, il est naturel de s'attendre à ce que deux difféomorphismes topologiquement conjugués ont le même nombre de points d'équilibres et de cycles et de même type de stabilité. Par exemple, les orbites de g sont envoyant sur celles de f par la conjugaison topologique(un homéomorphisme). Parlant officieusement, la conjugaison topologique est un « changement des coordonnées » dans un sens topologique.

On considère f et g deux \mathbf{C}^r difféomorphismes, $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. et le \mathbf{C}^k difféomorphisme $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Définition 3.2 [Conjugaison des difféomorphismes] [19] *Les deux difféomorphismes f et g sont dits \mathbf{C}^k conjugués ($k \leq r$) s'il existe un \mathbf{C}^k difféomorphisme, h tel que $g \circ h = h \circ f$. Si $k = 0$, f et g sont dits topologiquement conjugués. En disant aussi que h est un conjugaison topologique entre f et g .*

1- La conjugaison de deux difféomorphismes est souvent représenté par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^n \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

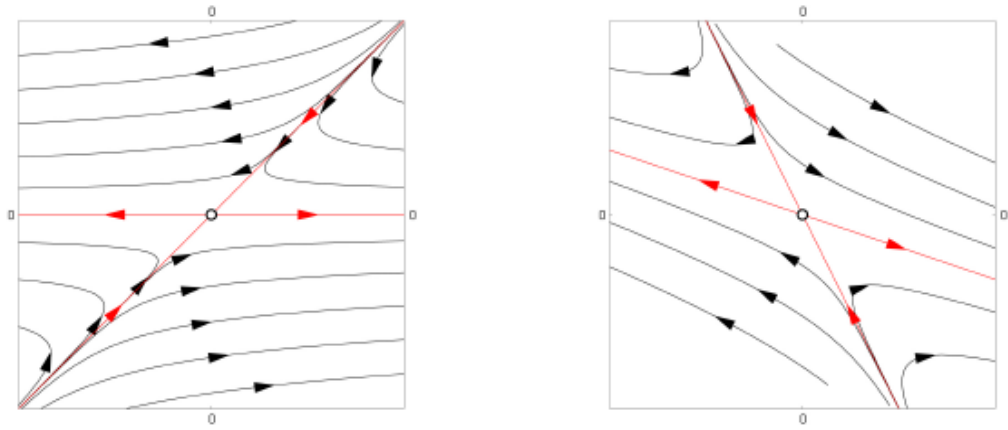


FIG. 3-2 – Dynamiques de deux équations discrètes topologiquement conjuguées

2- Si h est une conjugaison entre f et g , alors h est une conjugaison entre f^n et g^n pour tous $n \in \mathbb{Z}$ [20].

Alors on a

$$g^n \circ h = h \circ f^n$$

Exemple 3.2 La figure 3.2 illustre ceci en exhibant la dynamique de deux équations discrètes conjuguées topologiquement (en dimension 2) :

Exemple 3.3 Soient $(a, b) \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$, et on définit dans l'espace \mathbb{R}^2 les deux équations discrètes suivantes :

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow \begin{pmatrix} y \\ y^2 + b + ax \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

et

$$g : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow \begin{pmatrix} y + 1 + bx^2 \\ ax \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

f, g sont conjuguées, car si h définie par :

$$h : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{b}{a}y \\ bx \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

On doit donc avoir :

$$f \circ h(x, y) = \begin{pmatrix} bx \\ by + b + b^2x^2 \end{pmatrix} = h \circ g(x, y) \text{ pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

on dit que f et g sont affinement conjugués.

Proposition 3.1 [19] Si f et g sont \mathbf{C}^k conjugués, les orbites de f envoyant sur celles de g par h .

Proof. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$;alors l'orbite de x_0 par f est :

$$O(x_0) = \{\dots, f^{-n}(x_0), \dots, f^{-1}(x_0), x_0, f(x_0), \dots, f^n(x_0), \dots\} \quad (3.1)$$

on déduit de la Définition 3.2 que $f = h^{-1} \circ g \circ h$, pour $n > 0$, on obtient

$$\begin{aligned} f^n(x_0) &= \underbrace{(h^{-1} \circ g \circ h) \circ (h^{-1} \circ g \circ h) \circ \dots \circ (h^{-1} \circ g \circ h)}_{n - \text{facteurs}}(x_0) \\ &= h^{-1} \circ g^n \circ h(x_0) \end{aligned} \quad (3.2)$$

où

$$h \circ f^n(x_0) = g^n \circ h(x_0) \quad (3.3)$$

De même on utilise la Définition 3.2 déduit que $f^{-1} = h^{-1} \circ g^{-1} \circ h$, alors de même argument, pour $n > 0$, on obtient :

$$h \circ f^{-n}(x_0) = g^{-n} \circ h(x_0) \quad (3.4)$$

par conséquent, à partir de (3.2) et (3.4), nous voyons que l'orbite de x_0 par f est

envoie par h à l'orbite de $h(x_0)$ par g . ■

Proposition 3.2 [19] *Si f et g sont \mathbf{C}^k conjugués, $k \geq 1$, et x_0 est un point fixe de f , alors les valeurs propres de $Df(x_0)$ et $Dg(h(x_0))$ sont les mêmes.*

Proof. D'après de Définition 3.2, $f(x) = h^{-1} \circ g \circ h(x_0)$ Note que, depuis x_0 est un point fixe de f , donc $h^{-1} \circ g \circ h(x_0) = x_0$. De même; d'après le théorème des fonctions inverses, on obtient $Dh^{-1} = (Dh)^{-1}$; De plus h est différentiable, on a donc :

$$Df|_{x_0} = Dh^{-1}|_{x_0} Dg|_{h(x_0)} Dh|_{x_0} .$$

■

3.3 Stabilité structurelle pour la conjugaison topologique

3.3.1 La topologie \mathbf{C}^r

Soit f un \mathbf{C}^r difféomorphismes ($1 \leq r \leq \infty$), d'une variété différentiable compact M de dimension n sans bord. On choisit une métrique riemannienne sur M . Sur l'ensemble $\text{Diff}^r(M)$ des difféomorphismes de M de classe \mathbf{C}^r , nous mettons la topologie \mathbf{C}^r .

Définition 3.3 [La topologie \mathbf{C}^r] [19] *La topologie \mathbf{C}^r c'est la topologie induite sur $\mathbf{C}^r(M)$ par la mesure de la distance entre deux éléments de $\mathbf{C}^r(M)$.*

Maintenant il est possible de donner la notion de la stabilité structurelle comme suit :

Définition 3.4 [Stabilité structurelle des applications] [19] *Soit $f \in \text{Diff}^r(M)$, on dit que f est structurellement stable s'il existe un voisinage N de f dans la topologie \mathbf{C}^k tel que f , est \mathbf{C}^0 conjugué à toute application de N , c'est à dire pour tout $g \in N$, il existe un homéomorphisme h tel que : $h \circ f = g \circ h$.*

3.3.2 C^r stabilité structurelle

Définition 3.5 [C^r, ε – perturbation] [4] Si $f \in C^k(\mathbb{R}^2)$, $k, r \in \mathbb{Z}^+$, $r \leq k$, et $\varepsilon > 0$, on dit que g est C^r –perturbation de mesure ε s’il existe un ensemble compact $K \subset \mathbb{R}^2$ tel que $f = g$ sur l’ensemble $\mathbb{R}^2 - K$ et pour tous (i_1, i_2, \dots, i_n) avec $i_1 + i_2 + \dots + i_n = i \leq r$, on obtient $\|(\partial^i / \partial^{i_1} x_1 \dots \partial^{i_n} x_n)(f - g)\| < \varepsilon$.

Définition 3.6 [C^r stabilité structurelle] Un difféomorphisme f est C^r structurellement stable, si pour tout C^r petite perturbation g de f , il existe un homéomorphisme h de l’espace de phase tel que $h \circ f(x) = g \circ h(x)$ pour tout point x de l’espace des phase.

3.3.3 Stabilité structurelle locale

Définition 3.7 [C^1 –Stabilité structurelle locale] Un difféomorphisme f est C^1 locale structurellement stable dans un point fixe \bar{x} s’il existe un voisinage N de \bar{x} et un $\varepsilon > 0$ tel que pour tout g , C^1 , ε –proche de f en N , soit topologiquement conjugués à f .

Proposition 3.3 Le difféomorphisme f est C^1 localement structurellement stable en \bar{x} si et seulement si le point fixe \bar{x} est hyperbolique.

Proof. Pour la condition nécessaire voir [4], et la condition suffisante voir les théorèmes 1 et 2 dans [16]. ■

3.4 Stabilité structurelle de difféomorphisme quadratique du plan

3.4.1 Difféomorphisme quadratique du plan

Définition 3.8 [Conditions de Hadamard] [21] Si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une application de classe C^1 , satisfait les conditions de Hadmard :

$$i) \det Df(x) \neq 0, x \in \mathbb{R}^2$$

ii) $|f(x)| \longrightarrow \infty$ si $|x| \longrightarrow \infty$

On dit que f est un difféomorphisme.

La matrice jacobienne de l'application quadratique (2.9) donnée par

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} a_1 + 2a_3x + a_5y & a_2 + 2a_4y + a_5x \\ b_1 + 2b_3x + b_5y & b_2 + 2b_4y + b_5x \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

le déterminant $\det J(x, y)$ de la matrice jacobienne est

$$\delta = \det J(x, y) = \mu_1 + \mu_2x + \mu_3y + \mu_4x^2 + \mu_5y^2 + \mu_6xy \quad (3.6)$$

$$= \mu_1 + \omega(x, y) \quad (3.7)$$

où $(\mu_i)_{1 \leq i \leq 6}$ donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_1 = a_1b_2 - a_2b_1 \\ \mu_2 = 2a_3b_2 - 2a_2b_3 + a_1b_5 - b_1a_5 \\ \mu_3 = 2a_1b_4 - 2b_1a_4 - a_2b_5 + b_2a_5 \\ \mu_4 = 2a_3b_5 - 2b_3a_5 \\ \mu_5 = 2a_5b_4 - 2a_4b_5 \\ \mu_6 = 4a_3b_4 - 4a_4b_3 \\ \omega(x, y) = \mu_2x + \mu_3y + \mu_4x^2 + \mu_5y^2 + \mu_6xy \end{array} \right. \quad (3.8)$$

Alors l'application (2.9) est difféomorphisme si seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_1 \neq 0 \\ \omega(x, y) = 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0 \\ \mu_i = 0, \quad i = 2, 3, 4, 5, 6 \end{array} \right. \quad (3.9)$$

pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Ceci est possible si $\mu_i = 0, i = 2, 3, 4, 5, 6$.

l'application quadratique (2.9) est un difféomorphisme si les conditions suivants sont satisfaits :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0 \\ 2a_3 b_2 - 2a_2 b_3 + a_1 b_5 - b_1 a_5 = 0 \\ 2a_1 b_4 - 2b_1 a_4 - a_2 b_5 + b_2 a_5 = 0 \\ 2a_3 b_5 - 2b_3 a_5 = 0 \\ 2a_5 b_4 - 2a_4 b_5 = 0 \\ 4a_3 b_4 - 4a_4 b_3 = 0 \end{array} \right. \quad (3.10)$$

Exemple 3.4 [L'application de Henon]

Soit l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longrightarrow (\bar{x}, \bar{y})$ définie par :

$$\bar{x} = y, \quad \bar{y} = \varphi(y) - bx \quad (3.11)$$

où $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de polynôme réel et $|b| \ll 1$. Alors, la matrice jacobienne

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & \varphi' \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Donc le déterminant de jacobien

$$\det \frac{Df(\bar{x}, \bar{y})}{Df(x, y)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -b & \varphi' \end{vmatrix} = b$$

Si $b \neq 0$, il est simple de vérifier que f satisfait les conditions de Hadmard, alors f est un difféomorphisme dans \mathbb{R}^2 .

Exemple 3.5 Si $a = 0$, $F(x, y) = (y, y^2 + ax + c) = (y, y^2 + c)$, On remarque que $F(1, 0) = (0, c)$ et $F(2011, 0) = (0, c)$, donc F n'est pas injective ce qui implique que F n'est pas un difféomorphisme. Si $a \neq 0$, F est un difféomorphisme.

3.4.2 Conditions nécessaire de la stabilité structurelle des difféomorphismes quadratiques du plan

Une question importante de la théorie des difféomorphismes quadratiques du plan (équations discrètes quadratiques du plan) est la question de la stabilité structurelle. Un difféomorphisme est dit structurellement stable si lorsqu'on le perturbe légèrement on obtient un difféomorphisme conjugué. Il apparaît que les difféomorphismes structurellement stables sont les difféomorphismes hyperboliques [13].

Soit f un difféomorphisme quadratique du plan, et g est petite perturbation de f au niveau des paramètres

Où

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4y^2 + a_5xy \\ b_0 + b_1x + b_2y + b_3x^2 + b_4y^2 + b_5xy \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

et

$$g(x, y) = \begin{pmatrix} (a_0 + \varepsilon_0) + (a_1 + \varepsilon_1)x + (a_2 + \varepsilon_2)y + (a_3 + \varepsilon_3)x^2 + (a_4 + \varepsilon_4)y^2 + (a_5 + \varepsilon_5)xy \\ (b_0 + \bar{\varepsilon}_0) + (b_1 + \bar{\varepsilon}_1)x + (b_2 + \bar{\varepsilon}_2)y + (b_3 + \bar{\varepsilon}_3)x^2 + (b_4 + \bar{\varepsilon}_4)y^2 + (b_5 + \bar{\varepsilon}_5)xy \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

Où $(a_i, b_i)_{0 \leq i \leq 5} \in \mathbb{R}^{12}$, et $(a_i + \varepsilon_i, b_i + \bar{\varepsilon}_i)_{0 \leq i \leq 5} \in \mathbb{R}^{12}$.

On montre la commutation

$$g \circ h(x, y) = h \circ f(x, y), \text{ pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (3.15)$$

c'est à dire f et g sont conjugués par définition.

Notons que si la transformation (l'homéomorphisme h) existe, alors il y a une relation d'équivalence et l'ensemble des applications divise en classes d'applications topologiquement conjuguées ce qui implique que f et g ont les mêmes propriétés topologiques, nombre de points fixes et points périodiques, type de stabilité.

Pour la simplicité de l'étude nous choisissons l'homéomorphisme affine h comme suit :

(a)- Si h définie par :

$$h(x, y) = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ l_1 & l_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1x + e_2y \\ l_1x + l_2y \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Si on pose :

$$\begin{cases} e_1x + e_2y = p \\ l_1x + l_2y = q \end{cases} \quad (3.17)$$

et

$$(c_i, d_i)_{0 \leq i \leq 5} = (a_i + \varepsilon_i, b_i + \bar{\varepsilon}_i)_{0 \leq i \leq 5} \quad (3.18)$$

on a alors :

$$g(x, y) = \begin{pmatrix} c_0 + c_1x + c_2y + c_3x^2 + c_4y^2 + c_5xy \\ d_0 + d_1x + d_2y + d_3x^2 + d_4y^2 + d_5xy \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

Nous avons :

$$g \circ h(x, y) = \begin{pmatrix} c_0 + c_1p + c_2q + c_3p^2 + c_4q^2 + c_5pq \\ d_0 + d_1p + d_2q + d_3p^2 + d_4q^2 + d_5pq \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

$$= \begin{pmatrix} m_0 + m_1x + m_2y + m_3x^2 + m_4y^2 + m_5xy \\ n_0 + n_1x + n_2y + n_3x^2 + n_4y^2 + n_5xy \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} m_0 = a_0 + \varepsilon_0 \\ m_1 = (a_1 + \varepsilon_1)e_1 + (a_2 + \varepsilon_2)l_1 \\ m_2 = (a_1 + \varepsilon_1)e_2 + (a_2 + \varepsilon_2)l_2 \\ m_3 = (a_3 + \varepsilon_3)e_1^2 + (a_4 + \varepsilon_4)l_1^2 + (a_5 + \varepsilon_5)e_1l_1 \\ m_4 = (a_3 + \varepsilon_3)e_2^2 + (a_4 + \varepsilon_4)l_2^2 + (a_5 + \varepsilon_5)e_2l_2 \\ m_5 = 2(a_3 + \varepsilon_3)e_1e_2 + 2(a_4 + \varepsilon_4)l_1l_2 + (a_5 + \varepsilon_5)(e_1l_2 + e_2l_1) \end{array} \right. \quad (3.22)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} n_0 = b_0 + \bar{\varepsilon}_0 \\ n_1 = (b_1 + \bar{\varepsilon}_1)e_1 + (b_2 + \bar{\varepsilon}_2)l_1 \\ n_2 = (b_1 + \bar{\varepsilon}_1)e_2 + (b_2 + \bar{\varepsilon}_2)l_2 \\ n_3 = (b_3 + \bar{\varepsilon}_3)e_1^2 + (b_4 + \bar{\varepsilon}_4)l_1^2 + (b_5 + \bar{\varepsilon}_5)e_1l_1 \\ n_4 = (b_3 + \bar{\varepsilon}_3)e_2^2 + (b_4 + \bar{\varepsilon}_4)l_2^2 + (b_5 + \bar{\varepsilon}_5)e_2l_2 \\ n_5 = 2(b_3 + \bar{\varepsilon}_3)e_1e_2 + 2(b_4 + \bar{\varepsilon}_4)l_1l_2 + (b_5 + \bar{\varepsilon}_5)(e_1l_2 + e_2l_1) \end{array} \right. \quad (3.23)$$

D'autre part

$$h \circ f(x, y) = \begin{pmatrix} k_0 + k_1x + k_2y + k_3x^2 + k_4y^2 + k_5xy \\ z_0 + z_1x + z_2y + z_3x^2 + z_4y^2 + z_5xy \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} k_0 = e_1a_0 + e_2b_0 \\ k_1 = e_1a_1 + e_2b_1 \\ k_2 = e_1a_2 + e_2b_2 \\ k_3 = e_1a_3 + e_2b_3 \\ k_4 = e_1a_4 + e_2b_4 \\ k_5 = e_1a_5 + e_2b_5 \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} z_0 = l_1a_0 + l_2b_0 \\ z_1 = l_1a_1 + l_2b_1 \\ z_2 = l_1a_2 + l_2b_2 \\ z_3 = l_1a_3 + l_2b_3 \\ z_4 = l_1a_4 + l_2b_4 \\ z_5 = l_1a_5 + l_2b_5 \end{array} \right. \quad (3.25)$$

avec la condition

$$e_1l_2 - e_2l_1 \neq 0. \quad (3.26)$$

Pour établir la relation de commutation $g \circ h(x, y) = h \circ f(x, y)$, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ nous utilisons les relations (3.22), (3.23), (3.24), (3.25) et (3.26), donc on a :

$$g \circ h(x, y) = h \circ f(x, y) \iff \begin{cases} (m_i = k_i)_{0 \leq i \leq 5} \\ (n_i = z_i)_{0 \leq i \leq 5} \end{cases} \text{ pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (3.27)$$

D'où après calcul et simplification, on doit donc avoir, l'expression des coefficients $(c_i, d_i)_{0 \leq i \leq 5}$ de l'application (3.20) en fonction d'expressions des coefficients $(a_i, b_i)_{0 \leq i \leq 5}$ de l'application (3.13) sont donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} c_0 = a_0 + \varepsilon_0 = e_1 a_0 + e_2 b_0 \\ c_1 = a_1 + \varepsilon_1 = \frac{e_1 a_1 l_2 - e_1 a_2 l_1 + e_2 b_1 l_2 - e_2 b_2 l_1}{e_1 l_2 - e_2 l_1} \\ c_2 = a_2 + \varepsilon_2 = \frac{e_1 e_2 b_2 - e_1 e_2 a_1 + e_1^2 a_2 - e_2^2 b_1}{e_1 l_2 - e_2 l_1} \\ c_3 = a_3 + \varepsilon_3 = \frac{e_1 a_3 l_2^2 - e_2 b_5 l_1 l_2 - e_1 a_5 l_1 l_2 + e_1 a_4 l_1^2 + e_2 b_3 l_2^2 + e_2 b_4 l_1^2}{(e_1 l_2 - e_2 l_1)^2} \\ c_4 = a_4 + \varepsilon_4 = \frac{-(e_1^2 e_2 a_5 - e_2^3 b_3 - e_1 e_2^2 a_3 - e_1^3 a_4 - e_1^2 e_2 b_4 + e_1 e_2^2 b_5)}{(e_1 l_2 - e_2 l_1)^2} \\ c_5 = a_5 + \varepsilon_5 = \frac{-(2e_1 e_2 a_3 l_2 - e_1 e_2 a_5 l_1 + 2e_1 e_2 b_4 l_1 - e_1 e_2 b_5 l_2 + 2e_1^2 a_4 l_1 - e_1^2 a_5 l_2 + 2e_2^2 b_3 l_2 - e_2^2 b_5 l_1)}{(e_1 l_2 - e_2 l_1)^2} \end{array} \right. \quad (3.28)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} d_0 = b_0 + \bar{\varepsilon}_0 = l_1 a_0 + l_2 b_0 \\ d_1 = b_1 + \bar{\varepsilon}_1 = \frac{a_1 l_1 l_2 - b_2 l_1 l_2 - a_2 l_1^2 + b_1 l_2^2}{e_1 l_2 - e_2 l_1} \\ d_2 = b_2 + \bar{\varepsilon}_2 = \frac{e_1 a_2 l_1 - e_2 a_1 l_1 + e_1 b_2 l_2 - e_2 b_1 l_2}{e_1 l_2 - e_2 l_1} \\ d_3 = b_3 + \bar{\varepsilon}_3 = \frac{-(a_5 l_1^2 l_2 - b_3 l_2^3 - a_3 l_1 l_2^2 - a_4 l_1^3 - b_4 l_1^2 l_2 + b_5 l_1 l_2^2)}{(e_1 l_2 - e_2 l_1)^2} \\ d_4 = b_4 + \bar{\varepsilon}_4 = \frac{e_1^2 a_4 l_1 - e_1 e_2 b_5 l_2 - e_1 e_2 a_5 l_1 + e_2^2 a_3 l_1 + e_1^2 b_4 l_2 + e_2^2 b_3 l_2}{(e_1 l_2 - e_2 l_1)^2} \\ d_5 = b_5 + \bar{\varepsilon}_5 = \frac{-(2e_2 a_3 l_1 l_2 - e_1 a_5 l_1 l_2 + 2e_1 b_4 l_1 l_2 - e_2 b_5 l_1 l_2 + 2e_1 a_4 l_1^2 + 2e_2 b_3 l_2^2 - e_2 a_5 l_1^2 - e_1 b_5 l_2^2)}{(e_1 l_2 - e_2 l_1)^2} \end{array} \right. \quad (3.29)$$

Finalement, on déduit que l'expression des coefficients $(\varepsilon_i, \bar{\varepsilon}_i)_{0 \leq i \leq 5} \in \mathbb{R}^2$ en fonction d'expressions des coefficients $(a_i, b_i)_{0 \leq i \leq 5}$ de l'application (3.13) sont donnés par les

égalités :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_0 = (e_1 - 1)a_0 + e_2b_0 \\ \varepsilon_1 = \frac{(e_1l_2 - 1)a_1 - e_1a_2l_1 + e_2b_1l_2 - e_2b_2l_1}{e_1l_2 - e_2l_1} \\ \varepsilon_2 = \frac{e_1e_2b_2 - e_1e_2a_1 + (e_1^2 - 1)a_2 - e_2^2b_1}{e_1l_2 - e_2l_1} \\ \varepsilon_3 = \frac{(e_1l_2^2 - 1)a_3 - e_2b_5l_1l_2 - e_1a_5l_1l_2 + e_1a_4l_1^2 + e_2b_3l_2^2 + e_2b_4l_1^2}{(e_1l_2 - e_2l_1)^2} \\ \varepsilon_4 = \frac{-(e_1^2e_2a_5 - e_2^3b_3 - e_1e_2^2a_3 - (e_1^3 - 1)a_4 - e_1^2e_2b_4 + e_1e_2^2b_5)}{(e_1l_2 - e_2l_1)^2} \\ \varepsilon_5 = \frac{-(2e_1e_2a_3l_2 - e_1e_2a_5l_1 + 2e_1e_2b_4l_1 - e_1e_2b_5l_2 + 2e_1^2a_4l_1 - (e_1^2l_2 - 1)a_5 + 2e_2^2b_3l_2 - e_2^2b_5l_1)}{(e_1l_2 - e_2l_1)^2} \end{array} \right. \quad (3.30)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\varepsilon}_0 = l_1a_0 + (l_2 - 1)b_0 \\ \bar{\varepsilon}_1 = \frac{a_1l_1l_2 - b_2l_1l_2 - a_2l_1^2 + (l_2^2 - 1)b_1}{e_1l_2 - e_2l_1} \\ \bar{\varepsilon}_2 = \frac{e_1a_2l_1 - e_2a_1l_1 + (e_1l_2 - 1)b_2 - e_2b_1l_2}{e_1l_2 - e_2l_1} \\ \bar{\varepsilon}_3 = \frac{-(a_5l_1^2l_2 - (l_2^3 - 1)b_3 - a_3l_1l_2^2 - a_4l_1^3 - b_4l_1^2l_2 + b_5l_1l_2^2)}{(e_1l_2 - e_2l_1)^2} \\ \bar{\varepsilon}_4 = \frac{e_1^2a_4l_1 - e_1e_2b_5l_2 - e_1e_2a_5l_1 + e_2^2a_3l_1 + (e_1^2l_2 - 1)b_4 + e_2^2b_3l_2}{(e_1l_2 - e_2l_1)^2} \\ \bar{\varepsilon}_5 = \frac{-(2e_2a_3l_1l_2 - e_1a_5l_1l_2 + 2e_1b_4l_1l_2 - e_2b_5l_1l_2 + 2e_1a_4l_1^2 + 2e_2b_3l_2^2 - e_2a_5l_1^2 - (e_1l_2^2 - 1)b_5)}{(e_1l_2 - e_2l_1)^2} \end{array} \right. \quad (3.31)$$

Selon les valeurs de e_1, e_2, l_1 et l_2 et la condition (3.27), il existe une infinité de homéomorphismes h affine, qui transforment l'application quadratique du plan (3.13) à un autre quadratique du plan de la forme (3.14). Par suite, nous avons prouvé le théorème suivant :

Théorème 3.1 *Si la condition (3.27) est satisfaite et les coordonnées de vecteur $(\varepsilon_i, \bar{\varepsilon}_i)_{0 \leq i \leq 5} \in \mathbb{R}^{12}$ sont définies par (3.30) et (3.31), alors le difféomorphisme f définie par (3.13) est conjugué à g définie par (3.14). On dit que f et g sont affinement conjugués.*

Théorème 3.2 *Si la condition (3.27) est satisfaite et les coordonnées de vecteur $(\varepsilon_i, \bar{\varepsilon}_i)_{0 \leq i \leq 5} \in \mathbb{R}^{12}$ sont définies par (3.30) et (3.31), alors le difféomorphisme f définie par (3.13) est*

structurellement stable.

(2)-Si h est définie par :

$$h(x, y) = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ l_1 & l_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

Avec la condition

$$d = e_1 l_2 - e_2 l_1 \neq 0. \quad (3.33)$$

D'après un calcul et simplification analogue comme précédemment. Nous obtenons donc l'expression des coefficients $(a_i + \varepsilon_i, b_i + \bar{\varepsilon}_i)_{0 \leq i \leq 5} \in \mathbb{R}^{12}$ de l'application (3.14) en fonction de l'expressions des coefficients $(a_i, b_i)_{0 \leq i \leq 5}$ de l'application (3.13) :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 + \varepsilon_0 = s_1 + e_1 a_0 + e_2 b_0 + \frac{\alpha_0}{d} + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{d^2} \\ a_1 + \varepsilon_1 = \frac{\alpha_3}{d} + \frac{\alpha_4 + \alpha_5}{d^2} \\ a_2 + \varepsilon_2 = \frac{\alpha_6}{d} + \frac{\alpha_7 + \alpha_8}{d^2} \\ a_3 + \varepsilon_3 = \frac{-l_1 l_2 (e_1 a_5 + e_2 b_5) + l_2^2 (e_1 a_3 + e_2 b_3) + l_1^2 (e_1 a_4 + e_2 b_4)}{d^2} \\ a_4 + \varepsilon_4 = \frac{e_2^2 (e_1 a_3 + e_2 b_3) + e_1^2 (e_1 a_4 + e_2 b_4) - e_1 e_2 (e_1 a_5 + e_2 b_5)}{d^2} \\ a_5 + \varepsilon_5 = \frac{-2e_1 l_1 (e_1 a_4 + e_2 b_4) - 2e_2 l_2 (e_1 a_3 + e_2 b_3) + (e_1 a_5 + e_2 b_5)(e_1 l_2 + e_2 l_1)}{d^2} \end{array} \right. \quad (3.34)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} b_0 + \bar{\varepsilon}_0 = s_2 + a_0 l_1 + b_0 l_2 + \frac{\beta_0}{d} + \\ b_1 + \bar{\varepsilon}_1 = \frac{\beta_3}{d} + \frac{\beta_4 + \beta_5}{d^2} \\ b_2 + \bar{\varepsilon}_2 = \frac{\beta_6}{d} + \frac{\beta_7 + \beta_8}{d^2} \\ b_3 + \bar{\varepsilon}_3 = -\frac{(a_5 l_1^2 l_2 - b_3 l_2^3 - a_3 l_1 l_2^2 - a_4 l_1^3 - b_4 l_1^2 l_2 + b_5 l_1 l_2^2)}{d^2} \\ b_4 + \bar{\varepsilon}_4 = \frac{e_1^2 a_4 l_1 - e_1 e_2 b_5 l_2 - e_1 e_2 a_5 l_1 + e_2^2 a_3 l_1 + e_1^2 b_4 l_2 + e_2^2 b_3 l_2}{d^2} \\ b_5 + \bar{\varepsilon}_5 = -\frac{(2e_2 a_3 l_1 l_2 - e_1 a_5 l_1 l_2 + 2e_1 b_4 l_1 l_2 - e_2 b_5 l_1 l_2 + 2e_1 a_4 l_1^2 + 2e_2 b_3 l_2^2 - e_2 a_5 l_1^2 - e_1 b_5 l_2^2)}{d^2} \end{array} \right. \quad (3.35)$$

Où

$$\left\{ \begin{array}{l}
\alpha_0 = -e_1 (-s_2 e_2 (b_2 - a_1 + s_1 (a_2 l_1 - a_1 l_2))) - s_1 e_2 (b_2 l_1 - b_1 l_2) - s_2 (e_2^2 b_1 - e_1^2 a_2) \\
\alpha_1 = (e_1 a_5 + e_2 b_5) (l_2 s_1 - e_2 s_2) (e_1 s_2 - l_1 s_1) \\
\alpha_2 = (e_1 a_4 + e_2 b_4) (e_1 s_2 - l_1 s_1)^2 + (e_1 a_3 + e_2 b_3) (e_2 s_2 - l_2 s_1)^2 \\
\alpha_3 = -l_2 (e_1 a_1 + e_2 b_1) + l_1 (e_1 a_2 + e_2 b_2) \\
\alpha_4 = (e_1 a_4 + e_2 b_4) (2e_1 l_1 s_2 - 2l_1^2 s_1) + (e_1 a_3 + e_2 b_3) (2e_2 l_2 s_2 - 2l_2^2 s_1) \\
\alpha_5 = (e_1 a_5 + e_2 b_5) (2l_1 l_2 s_1 - e_2 l_1 s_2 - e_1 l_2 s_2) \\
\alpha_6 = -e_1 (e_1 a_2 + e_2 b_2) + e_2 (e_1 a_1 + e_2 b_1) \\
\alpha_7 = (e_1 a_4 + e_2 b_4) (2e_1 l_1 s_1 - 2e_1^2 s_2) + (e_1 a_3 + e_2 b_3) (2e_2 l_2 s_1 - 2e_2^2 s_2) \\
\alpha_8 = (e_1 a_5 + e_2 b_5) (2e_1 e_2 s_2 - e_1 l_2 s_1 - e_2 l_1 s_1)
\end{array} \right. \quad (3.36)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l}
\beta_0 = s_2 e_1 (a_2 l_1 + b_2 l_2) - s_2 e_2 (a_1 l_1 + b_1 l_2) - s_1 l_2 l_1 (b_2 - a_1) + s_1 (b_1 l_2^2 - a_2 l_1^2) \\
\beta_1 = (a_5 l_1 + b_5 l_2) (l_2 s_1 - e_2 s_2) (e_1 s_2 - l_1 s_1) + (a_4 l_1 + b_4 l_2) (e_1 s_2 - l_1 s_1)^2 \\
\beta_2 = (a_3 l_1 + b_3 l_2) (-2e_2 l_2 s_1 s_2 + e_2^2 s_2^2 + l_2^2 s_1^2) \\
\beta_3 = -(a_1 l_1 l_2 - b_2 l_1 l_2 - a_2 l_1^2 + b_1 l_2^2) \\
\beta_4 = (a_4 l_1 + b_4 l_2) (2e_1 l_1 s_2 - 2l_1^2 s_1) + (a_3 l_1 + b_3 l_2) (2e_2 l_2 s_2 - 2l_2^2 s_1) \\
\beta_5 = (a_5 l_1 + b_5 l_2) (-e_1 l_2 s_2 - e_2 l_1 s_2 + 2l_1 l_2 s_1) \\
\beta_6 = e_2 a_1 l_1 - e_1 a_2 l_1 - e_1 b_2 l_2 + e_2 b_1 l_2 \\
\beta_7 = (a_4 l_1 + b_4 l_2) (2e_1 l_1 s_1 - 2e_1^2 s_2) + (a_3 l_1 + b_3 l_2) (2e_2 l_2 s_1 - 2e_2^2 s_2) \\
\beta_8 = (a_5 l_1 + b_5 l_2) (2e_1 e_2 s_2 - e_1 l_2 s_1 - e_2 l_1 s_1)
\end{array} \right. \quad (3.37)$$

En fin, l'expression des coefficients $(\varepsilon_i, \bar{\varepsilon}_i)_{0 \leq i \leq 5} \in \mathbb{R}^{12}$ en fonction d'expressions des coefficients $(a_i, b_i)_{0 \leq i \leq 5} \in \mathbb{R}^{12}$ de l'application (3.13) sont donnés par les équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_0 = -a_0(1 - e_1) + s_1 + e_2 b_0 + \frac{\alpha_0}{d} + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{d^2} \\ \varepsilon_1 = -a_1 + \frac{\alpha_3}{d} + \frac{\alpha_4 + \alpha_5}{d^2} \\ \varepsilon_2 = -a_2 + \frac{\alpha_6}{d} + \frac{\alpha_7 + \alpha_8}{d^2} \\ \varepsilon_3 = -a_3 + \frac{-l_1 l_2 (e_1 a_5 + e_2 b_5) + l_2^2 (e_1 a_3 + e_2 b_3) + l_1^2 (e_1 a_4 + e_2 b_4)}{d^2} \\ \varepsilon_4 = -a_4 + \frac{e_2^2 (e_1 a_3 + e_2 b_3) + e_1^2 (e_1 a_4 + e_2 b_4) - e_1 e_2 (e_1 a_5 + e_2 b_5)}{d^2} \\ \varepsilon_5 = -a_5 + \frac{-2e_1 l_1 (e_1 a_4 + e_2 b_4) - 2e_2 l_2 (e_1 a_3 + e_2 b_3) + (e_1 a_5 + e_2 b_5)(e_1 l_2 + e_2 l_1)}{d^2} \end{array} \right. \quad (3.38)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\varepsilon}_0 = -b_0(1 - l_2) s_2 + a_0 l_1 + \frac{\beta_0}{d} + \frac{\beta_1 + \beta_2}{d^2} \\ \bar{\varepsilon}_1 = -b_1 + \frac{\beta_3}{d} + \frac{\beta_4 + \beta_5}{d^2} \\ \bar{\varepsilon}_2 = -b_2 + \frac{\beta_6}{d} + \frac{\beta_7 + \beta_8}{d^2} \\ \bar{\varepsilon}_3 = -b_3 - \frac{(a_5 l_1^2 l_2 - b_3 l_2^3 - a_3 l_1 l_2^2 - a_4 l_1^3 - b_4 l_1^2 l_2 + b_5 l_1 l_2^2)}{d^2} \\ \bar{\varepsilon}_4 = -b_4 + \frac{e_1^2 a_4 l_1 - e_1 e_2 b_5 l_2 - e_1 e_2 a_5 l_1 + e_2^2 a_3 l_1 + e_1^2 b_4 l_2 + e_2^2 b_3 l_2}{d^2} \\ \bar{\varepsilon}_5 = -b_5 - \frac{(2e_2 a_3 l_1 l_2 - e_1 a_5 l_1 l_2 + 2e_1 b_4 l_1 l_2 - e_2 b_5 l_1 l_2 + 2e_1 a_4 l_1^2 + 2e_2 b_3 l_2^2 - e_2 a_5 l_1^2 - e_1 b_5 l_2^2)}{d^2} \end{array} \right. \quad (3.39)$$

Par suite, nous avons prouvé le théorème suivant :

Théorème 3.3 *Si la condition (3.33) est satisfaite, et les coordonnées de vecteur $(\varepsilon_i, \bar{\varepsilon}_i)_{0 \leq i \leq 5} \in \mathbb{R}^{12}$ sont donnés par (3.38) et (3.39), alors le difféomorphisme f est conjugué à g par la conjugaison topologique h . Alors f est structurellement stable.*

Exemple 3.6 *Si $e_1 = 1, e_2 = 0, l_1 = -1, l_2 = 1$ et $s_1 = s_2 = 0$, donc h est,*

$$h(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

Et en considère le difféomorphisme quadratique définie par

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x_{k+1} = 1 + a_1 x_k + a_4 y_k^2 \\ y_{k+1} = x_k \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

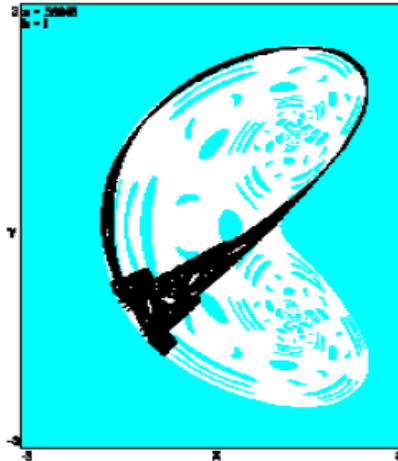
et la petite perturbation g de f définie par :

$$g(x, y) = \begin{pmatrix} x_{k+1} = (1 + \varepsilon_0) + (a_1 + \varepsilon_1)x_k + (a_4 + \varepsilon_4)y_k^2 \\ y_{k+1} = (1 + \bar{\varepsilon}_1)x_k \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

f est topologiquement conjugué à g si la commutation $g_1 \circ h(x, y) = h \circ f_1(x, y)$, est établie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, i.e. si :

$$\begin{cases} 1 + \varepsilon_0 = 1 \\ a_1 + \varepsilon_1 = a_1 \\ a_4 + \varepsilon_4 = a_4 \\ 1 + \bar{\varepsilon}_1 = 1 - a_1 \end{cases} \implies \begin{cases} \varepsilon_0 = 0 \\ \varepsilon_1 = 0 \\ \varepsilon_4 = 0 \\ \bar{\varepsilon}_1 = -a_1 \end{cases}$$

donc si $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \varepsilon_4 = 0$ et $\bar{\varepsilon}_1 = -a_1$, alors f est conjugué à g . Par conséquent on déduit que f est structurellement stable.



Attracteur chaotique de
 l'application (3.41) avec son
 bassin d'attraction
 (blanche) : $(a_1, a_4) =$
 $(1, 0.59948)$



Attracteur chaotique de
 l'application (3.41) avec son
 bassin d'attraction
 (blanche) : $(a_1, a_4) = (1, 0.675)$

Chapitre 4

Résultats analytique et numériques

Résumé

Dans ce chapitre on met l'accent sur le rôle de la famille de Hénon dans l'étude des difféomorphismes de \mathbb{R}^2 , et nous fournissons une étude détaillée sur les paramètres $0 < a < 1$ et $c = 0$ de systèmes de Hayes et C. Wolf. donnée par $f_{a,c}$, et nous donnons une description complète de la dynamique de $f_{a,c}$.

4.1 Difféomorphismes polynômiaux de \mathbb{R}^2 [28]

Nous indiquons ci-dessous le rôle de la famille de hénon (et ses généralisations) dans l'étude des difféomorphismes polynômiaux de \mathbb{R}^2 .

Notons G le groupe des difféomorphismes polynômiaux de \mathbb{R}^2 , A le sous-groupe des automorphismes affines, S le sous-groupe (résoluble) constitué des difféomorphismes de la forme :

$$(x, y) \longrightarrow \begin{pmatrix} \alpha x + p(x) \\ \beta x + \gamma \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}[x]$ (p est un fonction de polynôme).

Le groupe G est isomorphe au produit amalgamé de A et S le long de $A \cup S$ [22].

Une application de Hénon généralisée est un difféomorphisme polynômial de la forme :

$$(x, y) \longrightarrow \begin{pmatrix} p(x) + y \\ bx \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

avec $b \in \mathbb{R}^*$, $p \in \mathbb{R}[x]$, $d^0 p \geq 2$.

Théorème 4.1 [Friedland et Milnor] [28]

Tous difféomorphisme polynômial de \mathbb{R}^2 est conjugué dans G à :

- ou bien un élément de $A \cup S$;
- ou bien la composition de $H_1 \circ \dots \circ H_m$ ($m \geq 1$) d'applications de Hénon généralisées

$$H_i(x, y) = \begin{pmatrix} p_i(x) + y \\ b_i x \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

La dynamique des difféomorphismes de $A \cup S$ est élémentaire et sans grand intérêt. Dans le second cas, la composition de $H_1 \circ \dots \circ H_m$ est essentiellement unique : en particulier, l'entier m et le degrés d_i , des polynôme de p_i sont parfaitement déterminés. L'étude dynamique de la famille de Hénon constitue donc la premier cas non trivial de la dynamique des difféomorphismes polynômiaux de \mathbb{R}^2 : le cas général consiste en l'itération cyclique d'un nombre fini d'applications de Hénon généralisées.

S. Friedland et J. Milnor [28] montrent que la dynamique de chaque difféomorphisme quadratique polynômial peut être étudiée (à la conjugaison) par l'application de Hénon ou une application élémentaire. Ce résultat est l'une des raisons qui précipitent les mathématiciens et les physiciens théoriciens maintenant pour étudier la dynamique des systèmes de Hénon.

4.1.1 Exemple [Hénon 1976]

L'itération de Hénon peut se mettre sous d'autres formes que celles que nous avons utilisé. Les conclusions et les dessins restent qualitativement les mêmes. On voit la richesse de ce modèle qui permet de montrer une bonne partie de la gamme des effets non linéaires : mouvements chaotiques, bassin d'attraction, bifurcations et cascades... En montrant la

complexité qui sort d'un modèle aussi simple, on ne peut que réfléchir à la complexité de la nature : il faut vraiment tourner 7 fois la langue dans sa bouche avant de parler ! C'est dans un tel état d'esprit que nous devons analyser le comportement de l'homme actuel face à la nature : le changement infime d'un paramètre au voisinage d'une bifurcation peut bouleverser tout le système et le changer de régime. Pour la sauvegarde de l'homme, entrons dans l'ère de la mentalité non linéaire !

On considère une forme de l'itération de Hénon, d'équation :

$$H_{a,b}(x_n, y_n) = \begin{pmatrix} 1 - ax_n^2 + y_n \\ bx_n \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

A été largement étudiée, car elle est le plus simple difféomorphisme non triviale du plan, contenant un seul terme quadratiques non linéaire et aussi connu car il affiche du chaos pour certaines valeurs des paramètres et conditions initiales. Grâce à sa simplicité, il est devenu un système de référence et a été largement étudiée en raison de sa généralité, la complexité et la richesse de sa dynamique, souvent utilisé comme un exemple pour démontrer les régimes d'analyse et le contrôle du comportement chaotique. Le difféomorphisme quadratique $H_{a,b}$ admis deux points fixes, est inversible, de plus $H_{a,b}$ est conjugué à son inverse $H_{a,b}^{-1}$, et l'inverse $H_{a,b}^{-1}$ est une application quadratique. Pour $b = 0$, l'application de Hénon réduit à l'application du second degré, qui est conjugué à l'application logistique.

Pour $a = 1.4$ et $b = 0.3$, en itérant un point quelconque, on obtient ce qu'il est convenu d'appeler "l'attracteur de Hénon" Figure 4.1.

Il n'est pas démontré à ce jour rigoureusement ce qui est vu sur la Figure 4.1 soit un attracteur chaotique (étrange) le fait remarquable ici est une conjecture.

On prend $b = 0.3$, a pouvant varier. Lorsque a prend les valeurs comprises entre 1.06 et 1.08 environ, on a coexistence de deux attracteurs, alors qu'il n'y en a qu'un pour les autres valeurs de a . Partant de $x = 0.4$ et $y = -1.6$, on obtient l'attracteur Figure 4.2.

on a le diagramme de bifurcation (Figure 4.3), où a varie de 1.06 à 1.09.

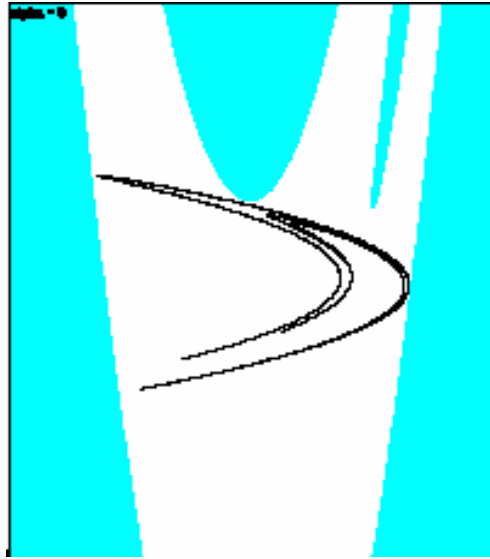


FIG. 4-1 – Attracteur chaotique avec son bassin d'attraction(blanche) : $(a, b) = (1.4, 0.3)$

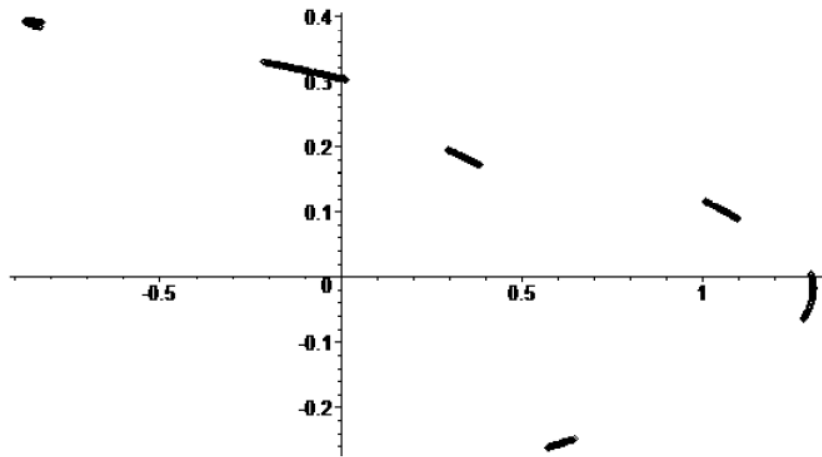


FIG. 4-2 – Attracteur obtenu en partant de : $(x, y) = (0.4, -1.6)$

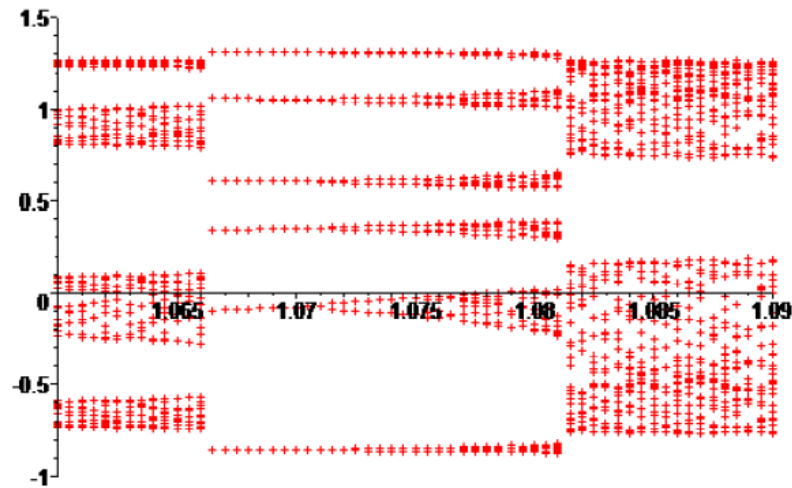


FIG. 4-3 – Diagramme de bifurcation d’attracteur

4.2 Résultats analytique

4.2.1 Présentation

Le modèle de Hénon consiste en une itération à deux dimensions qui peut prendre différentes formes. On utilisera la forme suivante : à partir d’un point de coordonnées x_n et y_n , l’itération fait passer au point suivant :

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n \\ y_{n+1} = b_0 + b_1 x_n + y_n^2 \end{cases} \quad (4.5)$$

Il s’agit d’une itération non linéaire (du fait du terme en y_n^2). Toutes les propriétés remarquables de ce procédé très simple viennent de ce fait. Noter cependant que l’itération n’est pas le mode d’action préféré du physicien, qui préfère formuler les lois de la nature au moyen d’équations différentielles : le changement est alors continu, et non discret comme dans l’itération. L’intérêt du modèle de Hénon est de mettre en évidence sur un modèle simple les multiples aspects parfois paradoxaux des applications non linéaires : nous avons trop tendance, et les programmes scolaires nous y poussent, à considérer les

évènements comme linéaires, les résultats devant être proportionnels aux causes. Mais les phénomènes naturels ne sont linéaires que rarement : les effets ne sont pas proportionnels aux causes, et une petite cause peut avoir des résultats imprévus et catastrophiques ; de plus, le résultat agit souvent sur la cause. En ce sens, le modèle de Hénon permet d’appréhender les notions d’attracteurs multiples, de bassin, de bifurcation, de crises, toutes dues aux non-linéarités, qui nous forcent à réagir autrement face aux phénomènes. Les crises actuelles sont là pour nous enseigner que c’est la non-linéarité qui gouverne le monde, et non la simple linéarité du ressort (dans son domaine d’élasticité!).

Nous considérons $b_0 = c, b_1 = a$ donc l’application de Hénon sur \mathbb{R}^2 soit de la forme

$$f_{a,c}(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ c + ax + y^2 \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

où (a, c) sont des paramètres.

Grâce au travail de S. Hayes et C. Wolf [29], nous fournissons une recherche détaillée sur les paramètres $0 < a < 1$ et $c = 0$. Pour chacun de ces paramètres, on donne une description complète de la dynamique de $f_{a,c}$. On montre qu’il y a exactement deux points périodiques hyperboliques : un point fixe attractif(stable) et l’autre un point fixe selle.

D’autre part, on montre que la frontière de l’ensemble stable du point fixe attractif(stable) coïncide avec l’ensemble stable du point selle, et nous montrons que $f_{a,c}$ est une famille de difféomorphisme Morse-Smale. La stabilité structurelle des systèmes Morse-Smale implique l’existence d’un ensemble ouvert F dans l’espace des paramètres tels que les applications $f_{a,c}$ avec $(a, c) \in F$ sont de Morse-smale. Nous utilisons des expérimentations numériques pour l’approximation de F , en considérant les valeurs propres de $f_{a,c}$, qui produisent exactement un point fixe attractif(stable) et un point fixe selle.

4.2.2 Dynamique de Hénon pour certains paramètres

En 2004, S. Hayes et C. Wolf [29] donnent une description complète de la dynamique des équations $f_{a,c}$ pour les paramètres $0 < a < 1$ et $c = 0$. Le but de notre travail est de

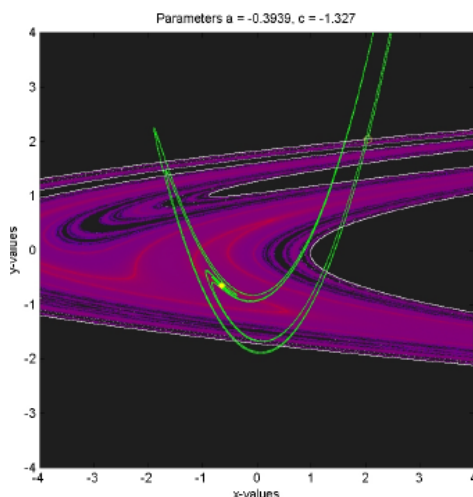


FIG. 4-4 – Dynamique de $f_{a,c} : (a, c) = (-0.3939, -1.327)$

présenter en détails toutes les conséquences de S. Hayes et C. Wolf. Notez que au cours de l'étude de la dynamique des applications de la famille $f_{a,c}$ nous considérons, simultanément, les orbites positives (les orbites en avant) et les orbites négatives (les orbites en arrière).

Dans le cas présent, nous allons identifier maintenant tous les points périodiques du système, et on montre que la frontière de l'ensemble stable de point fixe stable est équivalente à la variété stable du point selle. Lorsqu'il n'y a pas de confusion, on pose $f = f_{a,c}$ avec $0 < a < 1$ et $c = 0$. Nous commençons par une collection de résultats connus, grâce au travail de E. Bedford et J. Smillie [22] et Friedland et J. Milnor [28].

Pour étudier la dynamique de $f_{a,c}$ en K on introduit les ensembles suivants :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0 \text{ ou } y \leq 0\};$$

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - a \leq x, y\};$$

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x|, |y| \leq 1 - a\};$$

$$R^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, y \leq 1 - a\};$$

$$S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1 - a, 1 - a \leq y\};$$

$$S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - a \leq x, 0 < y < 1 - a\}.$$

Lemme 4.1 Soit $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x|, |y| \leq r\}$. tel que $r = 1 + |a|$. Pour les applications $f = f_{a,0}$, $0 < a < 1$ nous avons :

i) $W^s(K) = K^+$, et K^+ fermé, où K^+ est l'ensemble des orbites positives(en avant) bornés dans \mathbb{R}^2 .

ii) $W^i(K) = K^-$, et K^- fermé, où K^- est l'ensemble des orbites négatives(en arrière) bornés dans \mathbb{R}^2 .

iii) $K \subset V$, et K compacte, où $K = K^+ \cap K^-$ (l'ensemble des orbites bornés)

Remarque 4.1 Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus K^\pm$, alors $f^{\pm n}(x, y) \rightarrow \infty$ si $n \rightarrow \infty$, alors

$$\mathcal{R}(f) \subset K. \quad (4.7)$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{Z}$, nous utilisons la notation $(x_n, y_n) = f^n(x, y)$

Lemme 4.2 Soit $(x, y) \in A \setminus \{(0, 0)\}$. Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{-n}(x, y) = \infty$.

Lemme 4.3 Soit $(x, y) \in S_1 \cup S_2$. Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{-n}(x, y) = \infty$.

Corollaire 4.2 Les propositions suivantes sont vérifiées :

- i) Si $(x, y) \in \partial R^+ \setminus \{(0, 0), (1 - a, 1 - a)\}$, Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{-n}(x, y) = \infty$;
- ii) Si $(x, y) \in \partial S_1 \cup \partial S_2 \setminus \{(1 - a, 1 - a)\}$, Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{-n}(x, y) = \infty$;
- iii) $K^- \setminus \{(0, 0), (1 - a, 1 - a)\} \subset \text{int}(R^+) \cup \text{int}(Q)$.

Lemme 4.4 Soit $(x, y) \in Q \setminus \{(1 - a, 1 - a)\}$, Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x, y) = \infty$.

Corollaire 4.3 $K \setminus \{(0, 0), (1 - a, 1 - a)\} \subset \text{int}(R^+)$.

Lemme 4.5 Soit $(x, y) \in \text{int}(R)$. Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x, y) = (0, 0)$.

Lemme 4.6 Soit $(x, y) \in \text{int}(R) \setminus \{(0, 0)\}$. Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{-n}(x, y) = \infty \text{ ou } \lim_{n \rightarrow \infty} f^{-n}(x, y) = (1 - a, 1 - a).$$

Théorème 4.4 Soit $0 < a < 1$, et $f(x, y) = f_{a,0}(x, y) = (y, ax + y^2)$. Alors les propositions suivantes sont vérifiées :

i) l'application f admet précisément deux points fixes périodiques $\alpha = (0, 0)$ et $p = (1 - a, 1 - a)$. Les deux points périodique sont : le point stable α et le point selle p .

ii) $K = \{\alpha, p\} \cup (W^s(\alpha) \cap W^i(p))$.

iii) le point p est i - seul côté (u - one sided), et $W^s(p) = \partial W^s(\alpha)$.

Proof. Tout d'abord, nous vérifions la première demande. Soit $\alpha = (0, 0)$ et $p = (1 - a, 1 - a)$. Notez que

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 2y \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Donc

$$Df(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

l'équation caractéristique $\lambda^2 - a = 0$ montre que $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{a}$ sont les valeurs propres de $Df(\alpha)$. Comme $|\pm\sqrt{a}| < 1$, donc α est un point périodique stable par définition.

Nous avons aussi

$$Df(p) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 2(1 - a) \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Ce qui implique que le polynôme caractéristique de $Df(p)$ est $\lambda^2 + (2a - 2)\lambda - a$. et l'équation caractéristique $\lambda^2 + (2a - 2)\lambda - a = 0$ montre que les valeurs propres de $Df(p)$

sont $\lambda_{1,2} = (1 - a) \pm \sqrt{(1 - a)^2 + a}$

$$\lambda_1 = (1 - a) + \sqrt{(1 - a)^2 + a} = (1 - a) + \sqrt{(1 - a) + a^2}$$

$$a < 1 \implies 1 - a > 0 \implies (1 - a) + a^2 > a^2 \implies \sqrt{(1 - a)^2 + a} > a$$

$$\implies \left| (1 - a) + \sqrt{(1 - a)^2 + a^2} \right| > |(1 - a) + a| > 1 \implies |\lambda_1| > 1$$

$$\lambda_2 = (1 - a) - \sqrt{(1 - a)^2 + a}, \text{ on suppose } |\lambda_2| \geq 1$$

$$\text{alors } a + \sqrt{(1 - a)^2 + a} \geq 2 \implies \sqrt{(1 - a)^2 + a} \geq 2 - a$$

$$\implies 1 - 2a + a^2 \geq 4 - 4a + a^2 \implies 3a \geq 3 \implies \Leftarrow$$

alors on obtient $|\lambda_2| < 1$.

Ce qui implique que p est un point selle par définition. Il est clair que à partir du Corollaire 4.3 et le Lemme 4.5, α et p sont les seuls possibles points périodiques, aussi tous les points périodiques doivent avoir orbite borné.

Deuxièmement, nous vérifions la deuxième demande. il est clair que $\{\alpha, p\} \subset K$; car les deux points sont points fixes. Comme $W^s(\alpha) \cap W^i(p)$ est l'ensemble de tous les points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dis}(f^n(x, y), \alpha) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dis}(f^{-n}(x, y), p) = 0$, ces points ont des orbites bornés. Donc,

$$K \supseteq \{\alpha, p\} \cup (W^s(\alpha) \cap W^i(p)). \quad (4.11)$$

Maintenant, soit $(x, y) \in K \setminus \{\alpha, p\}$. Nous ignorons les deux points fixes, car ils sont explicitement inclus dans la partie a droite de l'équation de la demande (ii). Nous devons montrer que (x, y) est à la fois dans $W^s(\alpha)$ et $W^i(p)$. Depuis $(x, y) \in K \setminus \{\alpha, p\} \subset \text{int}(R^+) \subseteq \text{int}(R)$, Corollaire 4.3, et le Lemme 4.5 impliquent que $(x, y) \in W^s(\alpha)$. Nous savons que (x, y) a une orbite bornée sous f , ainsi $(x, y) \in W^i(p)$ par le Lemme 4.6. D'après (4.11) nous avons

$$K = \{\alpha, p\} \cup (W^s(\alpha) \cap W^i(p)). \quad (4.12)$$

Enfin, nous avons besoin de montrer que p est un *i-seul côté*, et $W^s(p) = \partial W^s(\alpha)$. Nous démontrons d'abord que p est un *i-seul côté*. Il faudrait pour cela que nous montrons qu'un seul composant connectée de $W^i(p) \setminus \{p\}$ rencontre K . Soit $\varepsilon > 0$, et soit U la boule ouvert de centre p de rayon ε , et on considère la variété instable locale $W_\varepsilon^i(p)$ dans U . Supposer que $(x, y) \in W_\varepsilon^i(p)$. Lemme 3 affirme que tous les points de $S_1 \cup S_2$ tend vers l'infini sous itération en arrière (itération négative), alors $W_\varepsilon^i(p)$ doit être disjoint de $S_1 \cup S_2$. Cela suffit de conclure que $W_\varepsilon^i(p) \setminus \{p\} \subset \text{int}(R^+) + \text{int}(Q)$. Selon le Théorème de stabilité des variétés (voir [33]), $W_\varepsilon^i(p)$ est un disque de dimension 1 de centre p . Alors, on note que la composante connectée de $W_\varepsilon^i(p)$ qui se trouve dans $\text{int}(R^+)$ par W_1 , et la

composante connectée de $W_\varepsilon^i(p)$ qui se trouve dans $\text{int}(Q)$ par W_2 , Selon le Lemme 4.4 nous avons

$$\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(W_2) \right) \cap K = \emptyset. \quad (4.13)$$

D'après la définition de l'ensemble instable, il est clair que $(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(W_2))$ est une composante connectée de $W^i(p) \setminus \{p\}$. Selon le Lemme 4.5, nous avons que $W_1 \subset K$. Donc, $O(W_1) \subset K$, ce qui implique que p est un *i - seul côté*. Pour compléter cette preuve, nous démontrons que $W^s(p) = \partial W^s(\alpha)$. Premièrement, nous montrons que $W^s(p) \subset \partial W^s(\alpha)$. On remarque que $W^s(\alpha) \subset K^+$, est K^+ fermé, d'après le Lemme 4.1 (i). Donc $\partial W^s(\alpha) \subset K^+$. En plus, soit $\varepsilon > 0$ (petit), U la boule ouverte du centre p de rayon ε , et on considère W_1 qui définit ci-dessus. Suppose $D \subset \text{int}(R^+)$ est un disque de dimension 1, D et W_1 coupent transversalement en q , d'après le Lemme 4.5, $D \subset W^s(\alpha)$. Maintenant, soit la variété instable locale $W_\varepsilon^s(p)$ sur U . Pour $n \in \mathbb{N}$, $D^{(n)}$ est la composante connectée de $f^{-n}(D) \cap U$ qui contient $f^{-n}(q)$. Alors $D^{(n)}$ converge vers $W_\varepsilon^s(p)$ avec le respect de la topologie \mathbf{C}^1 par le Lemme Inclination (voir [33]). Par construction, $D^{(n)} \subset W^s(\alpha)$ pour tous $n \in \mathbb{N}$. Donc, si $(x, y) \in W_\varepsilon^s(p)$, alors tout voisinage de (x, y) contient un point de $W^s(\alpha)$. Donc, $W_\varepsilon^s(p) \subset \partial W^s(\alpha)$. Par définition, $W^s(p) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(W_\varepsilon^s(p))$. Alors, $W^s(p) \subset \partial W^s(\alpha)$.

Finalement nous avons besoin de montrer que $W^s(p) \supset \partial W^s(\alpha)$. Soit $(x, y) \in \partial W^s(\alpha)$, et soit $\delta_1 > 0$ (petit). Nous savons que K est compact par le Lemme 4.1 (iii). Soit U la boule ouverte du centre p de rayon δ_1 . $K \setminus U$ est un sous ensemble fermé de K , il est donc compact aussi. Par le Lemme 4.5, et Corolaire 6, on a $K \setminus U \subset W^s(\alpha)$. Par conséquent, $W^s(\alpha) \cap \partial W^s(\alpha) = \emptyset$ ce qui implique

$$\delta_2 = \text{dist}(\partial W^s(\alpha), K \setminus U) > 0. \quad (4.14)$$

Posant $\varepsilon = \min\{\delta_1, \delta_2\} / 2$. depuis $(x, y) \in K^+$ par le Lemme 4.1 (i) et (4.14), il existe un $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $f^n(x, y) \in U$ pour tous $n \geq n_\varepsilon$. Puisque δ_1 est arbitraire, Nous avons conclure que $(x, y) \in W^s(p)$. ■

Difféomorphisme Morse-Smale

Nous avons décrit complètement la dynamique de $f_{a,c}$ pour les paramètres $0 < a < 1$ et $c = 0$, maintenant nous allons montrer que ces applications sont de Morse-Smale. D'autre part, la stabilité structurelle des applications de Morse-Smale implique l'existence d'un ensemble F plus grand du paramètres dans laquelle $f_{a,c}$ soit de Morse-Smale. En conséquence du théorème 4.4, nous obtenons :

Corollaire 4.5 *Il existe un ensemble ouvert $F \subset \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$ contenant $(0, 1) \times \{0\}$ de sorte que, pour chaque $(a, c) \in F$, l'application $f_{a,c}$ soit un difféomorphisme Morse-Smale.*

Proof. Soit $f = f_{a,0}$ pour $0 < a < 1$. Pour montrer que f est Morse-Smale, nous commençons de vérifier que $\mathcal{R}(f) = \{\alpha, p\}$. Remarquons que $\mathcal{R}(f) \subset K$. Il est clair que $\alpha, p \in \mathcal{R}(f)$, étant donné que ces points sont fixes. Inversement, si $(x, y) \in K \setminus \{\alpha, p\}$, alors nous savons que $(x, y) \in W^s(\alpha) \cap W^i(p)$ d'après la partie (ii) du Théorème 4.4. Aussi, nous savons par itération en avant que la distance entre (x, y) et α approche de 0, et $(x, y) \notin \mathcal{R}(f)$. Alors $\mathcal{R}(f) = \{\alpha, p\}$.

Finalement nous vérifions que toutes les variétés stables et instables sont transverses. Soit p_1 et p_2 deux points hyperboliques périodiques arbitraires de f , qui ne peut être distinct. Soit r un élément se trouve dans l'intersection de $W^s(p_1)$ et $W^i(p_2)$. Par construction, r possède à la fois en avant et en arrière des orbites bornées. De plus, l'application du Théorème 4.4 partie (ii) montre que $r \in K = \{\alpha, p\} \cup (W^s(\alpha) \cap W^i(p))$, et cette intersection est transverse. Donc f est difféomorphisme Morse-Smale par définition.

Rappelons que les difféomorphismes Morse-Smale sont structurellement stables. Après la démonstration que f est difféomorphisme Morse-Smale, la stabilité structurelle de f implique l'existence d'un ensemble ouvert F , qui contient $(0, 1) \times \{0\}$, dans l'espace des paramètres de sorte que chaque $f_{a,c}$ avec $\{a, c\} \in F$ est topologiquement conjugué à f Morse-Smale (voir [33]). ■

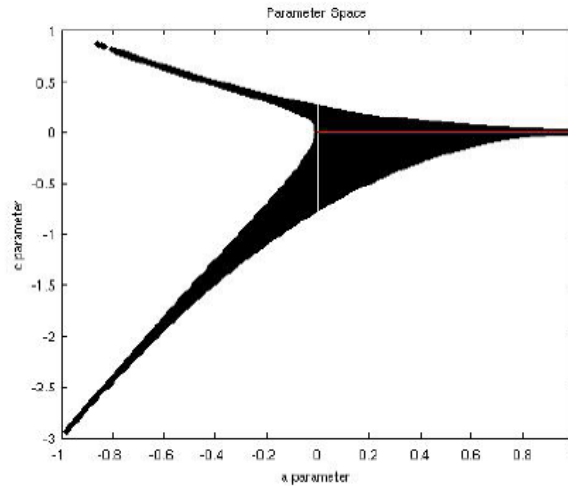


FIG. 4-5 – Le paramètre c à l'intervalle $[-3, 1]$, Les zones blanches représentent les valeurs des paramètres qui n'ont pas les propriétés désirées, et la bande rouge représente les valeurs des paramètres étudiés par Hayes.

4.3 Résultats numériques

4.3.1 L'espace des paramètres

Dans cette section, on utilise le calcul pour prédire numériquement l'espace des paramètres pour que $f_{a,c}$ soit un difféomorphisme Morse-Smale. Nous limitons nos investigations ici pour le difféomorphisme Morse-Smale avec deux points périodiques, qui sont tous des points fixes. On note que les résultats de la présente section sont utilisés pour simuler l'espace des paramètres F au bout du Corolaire 4.5, et en aucun cas ils ne constituent pas une caractérisation formelle de F . Nous commençons d'examiner les valeurs propres de $f_{a,c}$ pour plusieurs valeurs des paramètres. Nous pouvons éliminer les paramètres qui ne produisent pas des équations avec exactement deux points fixes réels, un est un point stable et l'autre point de selle. Il en résulte que l'espace de paramètres est donné dans Figure 4.5.

Nous résumons l'algorithme utilisé pour créer la Figure 4.5. Nous commençons par

la partition d'un sous-ensemble de \mathbb{R}^2 en N^2 paires de paramètres. Rappelons que nous pouvons réduire le paramètre a de valeurs $0 < |a| \leq 1$, et le paramètre c être arbitraire. Pour l'ensemble des paramètres créé, nous trouvons numériquement les paramètres qui présentent deux véritables points fixes en utilisant la formule quadratique. Continuons, les valeurs propres seront calculées de la matrice jacobienne de chaque point fixe, et nous conservons les paramètres dans lesquels nous avons, précisément, un point fixe stable et l'autre un point selle.

Soit F_0 désigne les paramètres trouvés dans la Figure 4.5, nous continuons par la construction d'algorithme pour estimer l'ensemble stable et l'ensemble instable de point selle de chaque système. Aussi, nous construisons un algorithme pour simuler l'ensemble stable de point stable dans chaque système. Ceux-ci seront utilisés comme contrôle partiel pour que la dynamique de tous les systèmes créent par l'espace des paramètres dans la Figure 4.5 soient équivalents.

4.3.2 Simulation de l'ensemble stable de point fixe

Soit α le point fixe stable de $f_{a,c}$ où $(a, c) \in F_0$. Dans cette section, nous allons voir comment on pourrait produire un algorithme permettant de simuler l'ensemble stable $W^s(\alpha)$. L'algorithme dans cette mémoire reconnaît dans les travaux de I. Triandaf, E. M. Bollt, et I. B. Schwartz [34]. L'algorithme produit effectivement une variété locale stable $W_\varepsilon^s(\alpha)$, que nous allons utiliser comme une estimation de l'ensemble stable global de α . Nous commençons par la construction d'une zone rectangulaire, de centre α , de N^2 paires de valeurs initiales. A chaque valeur initiale, nous itérons le système $n - fois$. pour déterminer quelles sont les valeurs dans $W^s(\alpha)$, nous devons déterminer quels points restent dans la région rectangulaire pour tous les $n - itérations$. Nous devons aussi déterminer quels sont les points qui ne convergent pas vers le point selle, si le point selle se situer dans la zone rectangulaire. Nous aussi garder la trace de l'itération pour laquelle les valeurs initiales convergent vers le point stable. La notion de convergence ici est atteint lorsque certains itération d'une valeur initiale entre dans un petit voisinage du point fixe

stable et restent dans ce voisinage. Les points sont tracés de couleur indiquant comment ils entrent dans la région de convergence près de α . La couleur noire représente les valeurs initiales qui ne semblent pas converger vers α . Les points qui semblent approchent rapidement à α sont de couleur rouge, et ceux qui semblent approchent vers α plus lentement sont de couleur bleue.

4.3.3 Estimation de l'ensemble stable et instable de point fixe hyperbolique

Soit p le point fixe selle de $f_{a,c}$ où $(a, c) \in F_0$. Nous allons maintenant discuter de façon d'estimer l'ensemble stable et instable de point fixe hyperbolique p . G. H. Choe [25] fournit un modèle dans lequel on peut estimer tel ensemble d'applications de Hénon et d'applications Standard. En général, nous utilisons le Théorème de stabilité du variété et le Lemme Inclinaison, pour estimer $W^i(p)$ et $W^s(p)$.

On commence par la construction de la variété instable, on considère $r > 0$ (petit) et U la boule ouvert de rayon r de centre p . Dans cette boule, construisons un segment de droite i de $2N$ points pour certains $N > 0$. Ce segment est de centre p , avec une longueur égale au diamètre de U et dans la même direction du vecteur propre instable à p . La ligne i transverse à $W_\varepsilon^s(p)$ dans U . Nous appliquons maintenant le Lemme d'inclinaison pour la approximation de $W_\varepsilon^s(p)$ dans U . Nous commençons d'itérons i vers la direction avant. Ensuite, nous enlevons les points de i qui échappent de U . Nous continuons cette procédure jusqu'à ce que nous avons supprimé plus de la moitié des points original. Ensuite, nous remplissons les points perdus en utilisant le fait que

$$f_{a,c}^{-1}(W_\varepsilon^i(p)) \subset W_\varepsilon^i(p). \quad (4.15)$$

Le résultat de cette procédure est noté également par i , et sera utilisé comme une approximation de l'ensemble local instable. Comme

$$W^i(p) = \cup_{n \in \mathbb{N}} f_{a,c}^n(W_\varepsilon^i(p)), \quad (4.16)$$

nous considérons l'union des n – *itérations* avant de i représentent $W^i(p)$.

La construction de l'ensemble stable est similaire. Encore une fois, considérons une boule ouverte U de centre p et de rayon r (petit). Créons un segment de droite s s'inscrit dans U avec la même direction de vecteur propre stable. De même, appliquons nous le Lemme d'inclinaison pour raffiner s , et de reconstituer les points perdus dans le processus de raffinement en utilisant le fait que

$$f_{a,c}(W_\varepsilon^s(p)) \subset W_\varepsilon^s(p). \quad (4.17)$$

En suite utilisant

$$W^s(p) = \cup_{n \in \mathbb{N}} f_{a,c}^{-n}(W_\varepsilon^s(p)), \quad (4.18)$$

Alors l'union de n – *itérations* arrière de s est une approximation de $W^s(p)$.

4.3.4 Résultats des paramètres $a = 0.4$ et $c = 0$

Fixons nous maintenant les paramètres $a = 0.4$ et $c = 0$, La Figure 4.6 est une représentation et approximation précise de la dynamique de $f_{0.4,0}$, le point jaune représente le point fixe stable $\alpha = (0, 0)$, le cercle jaune représente le point fixe selle $p = (0.6, 0.6)$, la ligne verte représente $W^i(p)$, et la ligne blanche représente $W^s(p)$, la zone autour de α de couleur Ombrée de rouge et bleu représente $W^s(\alpha)$.

4.3.5 Conclusion générale et perspective

On a étudié dans ce mémoire qui a divisé en quatre chapitres, la stabilité structurelle de difféomorphismes quadratiques dans le plan, le premier chapitre, sur les définitions et les notions de base des attracteurs chaotiques et stabilité structurelle. Le deuxième

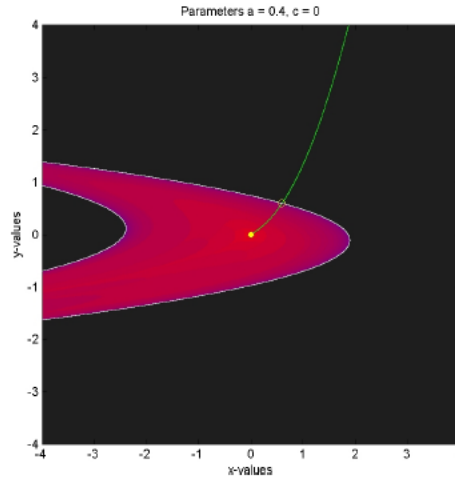


FIG. 4-6 – Dynamique de $f_{a,c} : (a, c) = (0.4, 0)$

chapitre présente les équations discrètes du plan, et les équations discrètes quadratiques dans le plan, leurs définitions et leurs propriétés. Tandis que le troisième chapitre de ce mémoire a été consacré à l'étude des conditions nécessaires qui assurent la stabilité structurelle des difféomorphismes quadratiques du plan. On se termine par le quatrième chapitre qui est entièrement dédié à l'étude d'un modèle d'équations de Hénon analytique et numériques.

On peut conclure que la stabilité structurelle des systèmes dynamiques qui a été largement étudiée dans les cinq dernières décennies et a plusieurs applications dans divers domaines tels que la biologie, la chimie, le génie civile, la mécanique, l'informatique, la morphologie, l'économie, le statistique, ...etc.. Comme exemple la stabilité structurelle représente un problème fondamental en mécanique des solides, qui doit être maîtrisée pour assurer la sécurité des structures contre l'effondrement. La théorie de la stabilité structurelle est une importance cruciale pour les interventions structurelles.

Cette notion ne peut pas être généralisée pour les équations discrètes quadratiques du plan(déjà, vu dans ce mémoire), c'est à dire la stabilité structurelle n'est pas une propriété générique pour les difféomorphismes quadratiques du plan. La stabilité structurelle des

systèmes Morse-Smale implique l'existence d'un ensemble ouvert F dans l'espace des paramètres tels que les applications $f_{a,c}$ avec $(a, c) \in F$ sont difféomorphismes de Morse-smale.

Notre prochain projet sera l'étude analytique qui caractérise l'ensemble F . Et en cas générale l'étude des propriétés qui caractérisent l'ensemble ouvert \mathcal{H}_f dans l'espace des paramètres tel que le difféomorphisme quadratique du plan f en (2.9) soit structurellement stable.

Bibliographie

- [1] C. P. Li, W. H. Deng, D. Xu, Chaos synchronization of the Chua system with a fractional order, *Physica A* 360, 171-185, (2006).
- [2] R. Botet. Les fractales en physique. *Technique de L'Ingénieur*, AF4500, 1-18, (2000).
- [3] L. Y. Lu and Z. H. Lu, The Periodicity of Chaotic Impact Oscillators in Hausdorff Phase Spaces. *Journal of Sound and Vibration*, 235(1), 105-116, (2000).
- [4] J. Guckenheimer and P. Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*. Springer, New York, (1983).
- [5] J. Palis and W. de Melo, *Geometric theory of dynamical systems*, Springer-Verlag, (1982).
- [6] J. Palis, On Morse-Smale dynamical systems, *Topology* no8, 385-404, (1968)
- [7] M.M. Peixoto, Structural stability on two-dimensional manifolds, *Topology*, no1, 101-120, (1962)
- [8] J. Palis et S. Smale, Structural stability theorems, *Global Analysis*, (Berkeley, 1968), *Proc. Sympos. Pure Math. American Mathematical Society*, no14, 223-231, (1970).
- [9] C. C. Pugh, An improved closing lemma and a general density theorem, *American Journal of Mathematics*, no 89, 1011-1021, (1967).
- [10] E. Zeraouia and J. C. Sprott, On the robustness of chaos in dynamical systems : Theories and applications. *Front. Phys. China* , 3, 195-204, (2008).
- [11] J. Robbin, A structural stability theorem. *Annals of Math.* 94, (1971).

- [12] A. Chenciner, Stabilité Structurale et Ergodicité (ou catégorie et mesure), Journal de physique, (1978).
- [13] R. Mané, A proof of the C^1 -stability conjecture, Publ. Math. IHES, 66, 161-210, (1988).
- [14] C. Robinson, Structural stability of C^1 -diffeomorphisms, J. of diff. eq. 22-28, (1976).
- [15] R. L. Devaney, Introduction to Chaotic Dynamical Systems, Second Edition, 53-57, (1989).
- [16] M. W. Hirsch, and S. Smale, Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra, New York, NY : Academic Press, (1974).
- [17] P. Rouchon, Systèmes Dynamique et Modélisation, Thèse de Doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris France, (1993).
- [18] E. Zeraouia and J.C. Sprott, 2-D quadratic maps and 3-D ODE systems : A Rigorous Approach, World Scientific Series on Nonlinear Science Series A, no 73, (2010).
- [19] S. Wiggins, Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos, Springer-Verlag, 89-100, (1990).
- [20] J. W. Robbin, Topological Conjugacy and Structural Stability for Discrete Dynamical Systems American Mathematical society. Vol. 78, no 6, (1972).
- [21] Valentin Afraimovich and Sze-Bi Hsu, Lectures on Chaotic Dynamical Systems vol 28, (2003).
- [22] E. Bedford and J. Smillie. Polynomial diffeomorphisms of C^2 : currents, equilibrium measure and hyperbolicity. Invent., 103, 69-99, (1991).
- [23] E. Bedford and J. Smillie. Real polynomial diffeomorphisms with maximal entropy : li. Small Jacobian. Ergodic Theory And Dynamical Systems, 26, 1259-1283, (2006).
- [24] M. Benedicks and L. Carleson. The dynamics of the Henon map. Annals of mathematics, 133, 73-169, (1991).
- [25] G.H. Choe. Computational Ergodic. Springer, (2005).

- [26] R. Devaney. An Introduction to Chaotic Dynamical Systems. Addison-Wesley Publishing Company, 53-57 (1989).
- [27] R. Devaney and Z. Nitecki. Shift automorphisms in the Henon mapping. *Communications in Mathematical Physics*, 67, 137-146, (1979).
- [28] S. Friedland and J. Milnor .Dynamical properties of plane polynomial automorphisms. *Ergodic Theory and dynamical Systems*, 9, 67-99, (1989).
- [29] S. Hayes and C. Wolf. Dynamics of a one-parameter family of Henon maps,. *Dynamical Systems*, 21(4), 399-407, (2006).
- [30] M. Henon. A two-dimensional mapping with a strange attractor. *Communications in Mathematical Physics*, 50, 67-77, (1976).
- [31] E. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20, 130-141, (1963).
- [32] R. Oberste-Vorth. Horseshoes among Henon mappings. In *Recent Advances in Applied and Theoretical Mathematics*. The World Scientific and Engineering Academy Press, (2000).
- [33] C. Robinson. *Dynamical Systems : Symbolic Dynamics, and Chaos*. CRC Press, (1998).
- [34] I. Triandaf, E. M. Bollt, and I. B. Schwartz. Approximating stable and unstable manifolds in experiments. *Physical Review E*, 67(037201), (2003).
- [35] S. Smale. Structurally stable systems are not dense, *Amer. J. Math.* 86, 491-496, (1966).
- [36] H. Poincaré. Sur les courbes définies par les équations différentielles, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, pp. 167-244, (1885)