UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

N° d'ordre :
N° de série :

Faculté des Sciences et Sciences de l'ingénieur

DEPARTEMENT DE :
MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

MAGISTER

Spécialité : Mathématiques
Option : Analyse numérique et E. D. P

Par : BENSAYAH Abdallah

Thème

Modélisation asymptotique du problème de Signorini avec frottement pour les plaques minces

Soutenu publiquement le : 27/06/2006

Devant le jury composé de :

Mr. SAID Mohammed Saïd	M. C à l'université de KASDI Merbah - Ouargla	**Président**
Mr. MEKIAS Hocine	Pr. à l'université FERHAT Abbas –Setif	**Examinateur**
Mr. YOUKANA Ammar	M. C à l'université de BELLAKHDHAR - Batna	**Examinateur**
Mr. CHACHA Ahmed Djamel	M. C à l'université de KASDI Merbah - Ouargla	**Rapporteur**

A mes parents,

A mes soeurs,

A mes frères,

A toute ma famille.

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier mes parents, mes frères et mes soeurs qui m'ont soutenu tout le long de ce projet.

Je tiens à remercier aussi mes professeurs de préparation Assila, Mekias, Aibeche, Merouani, Saïd, Badreddine, Boussaid, Reguiaat et Mefleh.

Merci à toute l'èquipe de poste-graduation Benmoussa, Ben Ali, Miloudi, Doudi, Benaddi, Hadj Ammar et Ghemmam spécialement à Merabet Ismaïl qui, avec lui, on a découvert ce merveilleux monde des mathématiques.

Mais, mes plus intenses remerciements vont bien à Chacha Djamel qui a accepté d'encadrer mon travail tout en me laissant énormément de liberté malgrés la charge qu'il subit. Si quelqu'un est responsable de là où j'en suis actuellement, c'est sans conteste lui.

Je tiens à exprimer ma gratitude aux membre de jury pour avoir accepter de juger mon travail.

Merci, enfin à tout mes amis et à tout ceux qui m'ont aidé ou soutenu au cours de ce travail en particulier, Boutelli Mohamed, Bouchaala Ali, Bencheikh Rachid et Bentouila Omar.

Table des matières

Notations et conventions

On utilise les conventions et les notations suivantes :

Les indices latins varient de 1 à 3 et les indices grecs varient de 1 à 2 . La convention des indices répétés (muets) est adoptée.

$u = (u_i)$ vecteur de composantes u_i.

$u.v = u_i v_i$ produit scalaire euclidien.

n normale unitaire extérieure.

$u_N = u.n$ la composante normale du déplacement.

$u = (u_T, u_N), u_T$ la composante tangentielledu déplacement.

$\sigma_N = (\sigma(u)\, n)\, n$ la composante de la force de pression appliquée sur une section de normale n.

$\sigma(u)\, n = (\sigma_T, \sigma_N), \sigma_T$ la composante tengentielle du vecteur $\sigma(u)\, n$.

$\partial_i u_j = \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}$ dérivée de u_j par rapport à x_i.

$div\sigma(u) = \partial_j \sigma_{ij}$ divergence du tenseur $\sigma(u)$.

$|u| = \sqrt{u.u}$ norme vectorielle euclidienne.

$A = (A_{ij})$ matrice dont les éléments A_{ij}.

$A : B = A_{ij} B_{ij}$ produit scalaire des matrices.

$\mathrm{H}^2(\Omega) = \left(H^2(\Omega)\right)^3$.

$\mathrm{L}^2(\Omega) = \left(L^2(\Omega)\right)^3$.

$\rightarrow$ la convergence forte.

$\rightharpoonup$ la convergence faible.

Introduction

Le contact unilatéral des corps élastiques, avec ou sans frottement, est une contrainte mécanique souvent rencontrée en modélisation. La formulation de ce problème (sans frottement) a été décrite par Signorini en 1933. C'est en 1963 que Fichera [9] a fait l'analyse de ce problème à travers un problème de minimisation équivalent (méthode d'énergie). De nouveaux résultats d'existence, pour une classe de problème de contact sans frottement, ont été trouvés par Duvaut et Lions et d'autres pour le cas de frottement non local (loi de Tresca) paru en 1972 dans [7] où ils ont signalé un problème ouvert d'existence et d'unicité dans le cas avec frottement local (loi de Coulomb). A partir de 1980, Néčas, Jarušek et Haslinger [16] ont établi, seulement, l'existence des solutions d'un problème de contact unilatéral avec frottement de Coulomb pour un coefficient de frottement assez petit. Des résultats plus généraux sont donnés ensuite par Jarušek[11], Kato[12], Eck et Jarušek[8]. Récement, R. Hassani, P.Hild et I.Ionescu[10] ont trouvé des conditions suffisantes de non unicité des solutions.

Pour le cas des structures minces, i.e, les corps élastiques dont l'une des dimensions (l'épaisseur) est petite devant les autres, par exemple : plaques minces, coques minces et filaments. Ces cas ont été proposés par Kirchhoff, Love, Reissner, Von Kármán et Koiter. Suivant quelques hypothèses, ils ont posé des modèles. Parmi ces modèles le modèle de Kirchhoff-Love et Mindlin-Reissner. En 1979, Ciarlet et Destyunder[3] ont donné une justification mathématique à ces modèles. L'étude d'un problème de contact unilatéral d'une plaque mince contre un obstacle rigide avec frottement de Coulomb a été faite par Dhia[4] en utilisant une méthode de pénalisation. En 2002, J.C.Paumier[18] réalise une modélisation asymptotique d'un problème de contact unilatéral d'une plaque mince encastrée, de modèle de Kirchhoff-Love, contre un obstacle rigide où il a prouvé que ce problème tridimensionnel avec frottement tend vers un problème bidimensionnel sans frottement. Parmi les questions posées par J.C.Paumier[18] :“ Qu'est ce qui se passe dans le cas non linéaire avec les conditions de Von Kármán ?”

Ce présent mémoire présente l'étude variationnelle et asymptotique d'un problème statique de contact unilatéral d'une plaque mince élastique contre un obstacle rigide avec les conditions de complémentarité dites les conditions de Signorini et ceci sur la partie condidate au contact. Ce qui reste du bord est divisé en deux parties, une subit une force surfacique, l'autre est encastrée. Chaque fois, on fait l'étude du problème sans frottement puis avec frottement.

On débute notre travail par un chapitre qui comporte l'étude variationnelle de ce problème en supposant, en général, un corps élastique. Puis on établit un théorème d'existence et unicité dans le cas sans frottement et un théorème d'existence dans le cas avec frottement non local (loi de Tresca) puis local (loi de Coulomb). Et tout ceci dans le cadre de l'élasticité linéaire.

Dans le deuxième chapitre, on va remplacer le corps élastique par une structure mince dans ce cas une plaque élastique en supposant la face latérale est encastrée. Tout en profitant de l'étude variationnelle faite au premier chapitre on déduit l'existence et l'unicité des solutions. Puis on ajoute l'étude asymptotique toujours en distinguant les deux cas, le cas sans frottement puis le cas avec frottement, ici et dans ce qui suit on s'intérèsse qu'à la loi de Coulomb. Et dans chaque cas on fait l'étude de la convergence.

Dans le troisième chapitre, on garde la position du problème du chapitre précédent tout en proposant l'étude variationnelle et asymptotique dans le cadre de l'élasticité non linéaire, toujours en distinguant simultanément le cas sans frottement et le cas avec frottement de Coulomb.

Au dernier chapitre, on garde la même position du problème étudié dans le chapitre 3 en supposant que la partie latérale du bord de la plaque, au lieu d'être encastrée, est soumise à des forces de direction parallèle au plan de la plaque. Cette condition est appelée condition de Von Kármán.

Enfin une conclusion qui comporte les résultats essentiels et quelques perspectives.

Chapitre 1

Un exemple de contact unilatéral d'un corps élastique contre un obstacle rigide dans le cadre de l'élasticité linéaire

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$ occupé par un matériau élastique. La frontière de Ω est divisée en trois parties Γ_0, Γ_1, Γ_2(mes(Γ_2)>0). Ce matériau entre en contact avec une fondation rigide en Γ_0, subit une force surfacique g sur Γ_1 et une force volumique f sur Ω. On suppose que la partie Γ_2 est encastrée (Fig 1-1).

Supposons que le système est en état statique et le contact sur Γ_0 est avec les conditions de Signorini.

Notre objectif est la recherche des déplacements des points de $\overline{\Omega}$.

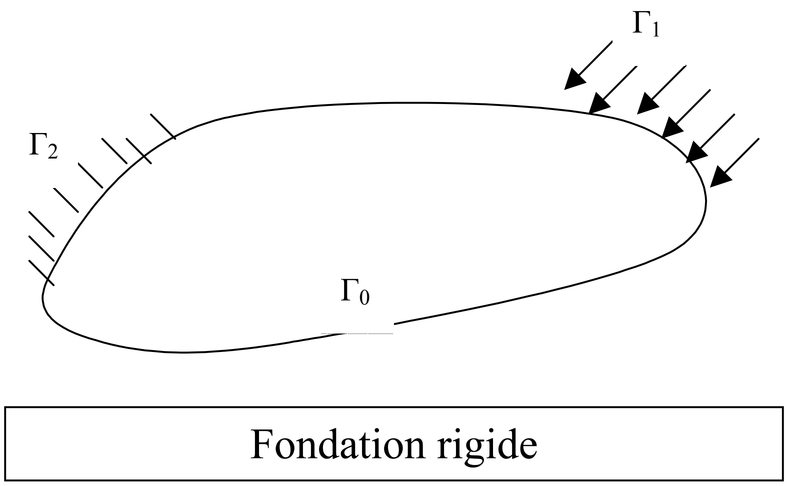

Fig. 1-1 –

1.1 Contact sans frottement

1.1.1 Problème classique P.C

$$\text{Trouver } u \text{ tel que}$$

$$-div\sigma(u) = f \text{ dans } \Omega \tag{1.1}$$

$$\sigma(u) = g \text{ sur } \Gamma_1 \tag{1.2}$$

$$u = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \tag{1.3}$$

$$u_N \leq d,\ \sigma_N \leq 0,\ \sigma_N(u_N - d) = 0,\ \sigma_T = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \tag{1.4}$$

L'équation (1.1) désigne l'équation d'équilibre telle que $\sigma(u) = (\sigma_{ij}(u))$ est le tenseur des contraintes et $\sigma_{ij}(u) = a_{ijkl}e_{kl}(u)$ où $e_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i)$ et $e(u) = (e_{ij}(u))$ est le tenseur des déformations linéarisé où $\partial_i u_j = \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}$. On simplifie l'écriture par $\sigma(u) = Ae(u)$ qui est appelée loi de comportement.

On suppose que les coefficients $a_{ijkl} \in L^{\infty}(\Omega)$ vérifient la propriété de la symétrie et la propriété de l'éllipticité i.e :

$$\begin{aligned} a_{ijkl} &= a_{jikl} = a_{klij} \\ \exists M &> 0, a_{ijkl} e_{ij}(u) e_{kl}(u) \geq M e_{ij}(u) e_{ij}(u), \forall e_{ij} = e_{ji} \end{aligned}$$

Les équations (1.2) et (1.3) sont les conditions imposées sur les bords respectivement Γ_1 et Γ_2.

Les conditions dans (1.4) sont appelées les conditions de Signorini.

$u_N = un$ désigne la composante normale du déplacement et n est la nomale extérieure .

$u_N \leq d$ (décollement).

$\sigma_N = (\sigma(u)n)n$ la composante normale de la force de pression appliquée sur une section de normale n.

$\sigma_N(u_N - d) = 0$ décollement ou contact.

$\sigma_T = 0$ pas de frottement, pas de cisaillement.

d une fonction d'interstrice définie sur Γ_0 est dans $H^{1/2}(\Gamma_0)$.

1.1.2 Problème variationnel P.V

On pose $\mathrm{H}^1(\Omega) = (H^1(\Omega))^3$, $\mathrm{L}^2(\Omega) = (L^2(\Omega))^3$

$V = \left\{v \in \mathrm{H}^1(\Omega) / v = 0 \text{ sur } \Gamma_2\right\}$

$K = \{v \in V \ / \ v_N \leq d \ \text{ sur } \Gamma_0\}$ convexe fermé du sous espace vectoriel V.

Théorème 1 *Si u est solution de $P.C$ alors u vérifie le problème $P.V$:*

$$\text{Trouver } u \in K \quad \text{tel que}$$

$$a(u,v) = L(v) + \langle \sigma_N, v_N \rangle, \quad \forall\, v \in V \tag{1.5}$$

$$\langle \sigma_N, v_N - u_N \rangle \geq 0, \quad \forall \quad v \in K \tag{1.6}$$

où $a(u,v) = \int_\Omega \sigma(u) : e(v)\, dx.$

$L(v) = \int_\Omega f v dx + \int_{\Gamma_1} g v d\Gamma$

$\langle \sigma_N, v_N \rangle = \int_{\Gamma_0} \sigma_N v_N d\Gamma.$

Preuve. Formulation faible de (1.1) :

Soit $v \in K$, (1.1) donne :

$$\int_\Omega -div\sigma(u)\, v dx = \int_\Omega f v dx \tag{1.7}$$

On a :

$$\int_\Omega div\sigma(u)\, v dx = \int_{\partial\Omega} \sigma(u)\, n v d\Gamma - \int_\Omega \sigma(u) : e(v)\, dx \tag{1.8}$$

avec $\sigma(u) : e(v) = \sigma_{ij}(u)\, e_{ij}(v)$.

On introduit (1.8) dans (1.7) et on utilise (1.2) et (1.3) on trouve (1.5).

Formulation faible de la condition de contact unilatéral(ou de complémentarité) :

On a :

$$\begin{aligned} \langle \sigma_N, v_N - u_N \rangle &= \langle \sigma_N, v_N - d + d - u_N \rangle \\ &= \langle \sigma_N, v_N - d \rangle + \langle \sigma_N, d - u_N \rangle \\ &= \langle \sigma_N, v_N - d \rangle \geq 0. \end{aligned}$$

d'où (1.6). ■

Théorème 2 *On suppose que la solution u est assez régulière, alors u solution de P.C si et seulement si u solution de P.V.*

Preuve. On prend dans (1.5) $v = \varphi$ pour tout $\varphi \in (D(\Omega))^3$ (puisque v reste dans V). On trouve que :

$$a(u, \varphi) = L(\varphi), \ \forall \varphi \in (D(\Omega))^3 \tag{1.9}$$

d'où, en utilisant la formule de Green dans (1.9), on trouve : $\int_\Omega (-div\sigma(u) - f)\varphi dx = 0$ par conséquent :

$$-div\sigma(u) - f = 0 \ \ p.p \ sur \ \Omega \tag{1.10}$$

d'où (1.1).

Pour avoir (1.2), on prend $v = \varphi$ pour tout $\varphi \in (D(\Omega \cup \Gamma_2))^3$ dans (1.5), et en prenant en compte (1.10), on trouve : $\int_{\Gamma_2} (\sigma(u)n - g)\varphi d\Gamma = 0$ d'où (1.2).

On prend $v = \varphi$ dans (1.5) pour tout $\varphi \in (D(\Omega \cup \Gamma_0))^3$. Avec (1.9) on trouve $\langle \sigma_T, \varphi_T \rangle = 0$ d'où $\sigma_T = 0$ sur Γ_0.

Puis on prend $v = u + \varphi$ dans (1.6) avec $\varphi \in (D(\Omega \cup \Gamma_0))^3$ et $\varphi_N \leq 0$ sur Γ_0, on trouve : $\langle \sigma_N, \varphi_N \rangle \geq 0$ ce qui donne $\sigma_N \leq 0$ sur Γ_0.

En prenant $v_N = d$ puis $v_N = 2u_N - d$ dans (1.6), on obtient $\langle \sigma_N, u_N - d \rangle = 0$ et puisque $\sigma_N(u_N - d) \geq 0$ alors $\sigma_N(u_N - d) = 0$ sur Γ_0. Par conséquent (1.4). ■

1.1.3 Existence et unicité

Théorème 3 *Si* $f_i \in L^2(\Omega)$, $g_i \in L^2(\Gamma_1)$ *alors le problème P.V admet une solution unique dans V.*

Preuve. i) $a(u, v)$ est une forme bilinéaire continue coercive. En effet, $a(u, v)$ est une forme bilinéaire(évident).On a :

$$\begin{aligned}|a(u,v)| &= \left|\int_\Omega a_{ijkl}e_{kl}(u)\,e_{ij}(v)\,dx\right| \\ &\leq c\int_\Omega |e_{kl}(u)\,e_{ij}(v)|\,dx \quad (9\times 9 \text{ termes}) \\ &\leq c\left(\int_\Omega (e_{kl}(u))^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega (e_{ij}(v))^2\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

D'autre part on a :

$$\begin{aligned}\int_\Omega (e_{ij}(u))^2 &= \frac{1}{4}\int_\Omega (\partial_i u_j + \partial_j u_i)^2\,dx \\ &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega ((\partial_i u_j)^2 + (\partial_j u_i)^2)dx \\ &\leq \|u\|^2_{\mathrm{H}^1(\Omega)}\end{aligned}$$

Donc

$$|a(u,v)| \leq 81c\ \|u\|^2_{\mathrm{H}^1(\Omega)}\,\|v\|^2_{\mathrm{H}^1(\Omega)}$$

D'où la continuité de $a(u,v)$.

En utilisant la condition de l'éllipticité, on trouve :

$$\begin{aligned}a(u,v) &= \int_\Omega a_{ijkl}e_{kl}(u)\,e_{ij}(v)\,dx \\ &\geq M\int_\Omega e_{kl}(u)\,e_{ij}(v)\,dx\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Korn i.e : Si Ω est borné de frontière régulière alors, il existe une constante $\gamma > 0$ telle que :

$$\forall u \in H^1(\Omega),\ \int_\Omega e_{ij}(u)\,e_{ij}(u)\,dx + \int_\Omega u_i u_i dx \geq \gamma\,\|u\|^2_{\mathrm{H}^1(\Omega)}$$

(démonstration dans [7]). On trouve qu'il existe une constante $k > 0$, telle que $\forall u \in$

$\mathrm{H}^1(\Omega)$, on a :

$$\int_\Omega |u|^2\,dx = \int_\Omega u_i u_i dx \le k \int_\Omega e_{ij}(u)\,e_{ij}(u)\,dx = k\int_\Omega |e(u)|^2\,dx.$$

En effet, on procède par l'absurde. Supposons $\{u_n\}$ une suite de $\mathrm{H}^1(\Omega)$ telle que $\|u_n\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} = 1$ et $\int_\Omega |e(u_n)|^2\,dx < \dfrac{1}{n}$ pour tout $n > 0$.

De l'inégalité de Korn, on déduit que $\|u_n\|^2_{\mathrm{H}^1(\Omega)} < k'$. Donc $\{u_n\}$ est une suite bornée dans $\mathrm{H}^1(\Omega)$. D'où $u_n \rightharpoonup u_0$ dans $\mathrm{H}^1(\Omega)$ et puisque l'injection de $\mathrm{H}^1(\Omega)$ dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$ est compacte, alors $u_n \to u_0$ fortement dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$. D'où $\|u_n\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} = 1$.

Par ailleurs, nous avons :

$$a(u_n-u_0,u_n-u_0) \;=\; a(u_n,u_n) - \; a(u_0,u_0) \; - 2\;a(u_0,u_n-u_0) \;\ge 0$$

Il résulte que :

$$\lim_{n\to\infty} inf\;\, a(u_n,u_n) \ge a(u_0,u_0)$$

d'où $\int_\Omega |e(u_0)|^2\,dx \le \lim\limits_{n\to\infty}\; inf \;\int_\Omega |e(u_n)|^2\,dx = 0$ ce qui donne $\int_\Omega |e(u_0)|^2\,dx = 0$

et puisque $u_0 = 0$ sur Γ_0, il en résulte que $u_0 = 0$ sur Ω (voir [6]). Ce qui contredit $\|u_0\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} = 1$. Par conséquent : $\int_\Omega |e(u)|^2\,dx \ge k\int_\Omega |u|^2\,dx$, joignée à l'inégalité de Korn donne $\int_\Omega |e(u)|^2\,dx \ge k" \,\|u\|^2_{\mathrm{H}^1(\Omega)}$ tel que $k" = \dfrac{\gamma}{1+k}$. D'où $a(u,u) \ge Mk" \,\|u\|^2_{\mathrm{H}^1(\Omega)}$ ce qui achève la coercivité.

ii) $L(v)$ est une forme linéaire continue sur V. En effet ; on a :

$$\left|\int_\Omega fvdx\right| \le \left(\int_\Omega |f|^2\,dx\right)^{1/2} \left(\int_{\Gamma_0} |v|^2\,dx\right)^{1/2} \le c\,\|v\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}$$

et

$$\left|\int_{\Gamma_1} gvdx\right| \le \|g\|_{\mathrm{L}^2(\Gamma_1)}\,\|v\|_{\mathrm{L}^2(\Gamma_1)}$$

En utilisant l'injection continue de l'application trace de $\mathrm{H}^1(\Omega)$ dans $\mathrm{L}^2(\Gamma_1)$ et l'injection continue de $\mathrm{H}^1(\Omega)$ dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$ on trouve :

$$\begin{aligned}|L(v)| &\leq c\left(\|v\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + \|v\|_{\mathrm{L}^2(\Gamma_1)}\right) \\ &\leq c' \|v\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)}\end{aligned}$$

De (1.5) et (1.6) on a l'inéquation variationnelle : $a(u,v) \geq L(v), \forall\ v \in K.$

De i) et ii) et par le moyen du théorème de Stampacchia (voir [1]), cette inéquation admet une solution unique, de plus, puisque $a(.,.)$ est symétrique, cette solution réalise le minimum de la fonctionnelle $I(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - l(v)$ dans K. ■

1.2 Contact avec frottement

On suppose qu'on exerce une force sur un corps élastique qui entre en contact avec une fondation rigide. On remarque que si la force tangentielle dépasse un certain seuil, ce corps perd sa résistence et entre en glissement. Ce phénomène est interprété par la loi de Tresca.

Donc la loi de Tresca impose sur la zone de contact les conditions suivantes :

$|\sigma_T| \leq S$, S est le seuil de frottement.

$|\sigma_T| < S \rightarrow u_T = 0$

$|\sigma_T| = S \rightarrow \exists\delta > 0,\ u_T = -\delta\sigma_T.$

De plus l'expérience montre que le seuil S est proportionnel à la composante normale de la force exercée sur la zone de contact, i.e, il existe $\nu > 0$ telque $S = \nu\,|\sigma_N|$, ν s'appelle le coefficient de frottement qui dépend de la matière élastique et la fondation rigide. D'où la loi de Coulomb qui s'interprète par les conditions :

$|\sigma_T| \leq \nu\,|\sigma_N|$

$|\sigma_T| < \nu\,|\sigma_N| \rightarrow u_T = 0.$

$|\sigma_T| = \nu\,|\sigma_N| \rightarrow \exists\delta > 0, u_T = -\delta\sigma_T.$

Dans ce chapitre, on va étudier ces deux lois.

1.2.1 Le cas de la loi de Tresca

Problème classique P.C

$$\text{Trouver} \quad u \quad \text{tel que}$$

$$-div\sigma\left(u\right) = f \quad \text{dans} \quad \Omega \tag{1.11}$$

$$\sigma\left(u\right) = g \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \tag{1.12}$$

$$u = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_2 \tag{1.13}$$

$$u_N \leq d,\ \sigma_N \leq 0,\ \sigma_N\left(u_N - d\right) = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \tag{1.14}$$

$$|\sigma_T| < S \rightarrow u_T = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0 \tag{1.15}$$

$$|\sigma_T| = S \rightarrow \exists\delta > 0,\ u_T = -\delta\sigma_T \quad \text{sur} \quad \Gamma_0 \tag{1.16}$$

Problème variationnel P.V

Théorème 4 *Si u est solution de P.C alors u vérifie le problème P.V :*

$$\textit{Trouver} \quad u \in K \quad \textit{tel que}$$

$$a\left(u, v\right) = L\left(v\right) + \langle\sigma_N, v_N\rangle + \ \langle\sigma_T, v_T\rangle\,,\ \forall\ v \in V \tag{1.17}$$

$$\langle\sigma_N, v_N - u_N\rangle \geq 0,\ \forall\ \ v \in K \tag{1.18}$$

$$\langle\sigma_T, v_T - u_T\rangle + \langle \mathsf{S}, |v_T| - |u_T|\rangle \geq 0,\ \forall\ \ v_T \in V_T \tag{1.19}$$

où $V_T = \left\{v \in \left(H^1\left(\Omega\right)\right)^2 / v = 0 \ \textit{sur} \ \Gamma_2\right\}$

Preuve. De (1.11), on trouve :

$$\int_\Omega -div\sigma\left(u\right) v dx = \int_\Omega f v dx, \quad \forall v \in V \tag{1.20}$$

D'autre part, en utilisant la formule de Green, on a :

$$\int_{\Omega} -div\sigma\left(u\right)vdx = \int_{\Omega} \sigma\left(u\right) : e(v)dx - \int_{\Gamma_0} \sigma\left(u\right)nvd\Gamma - \int_{\Gamma_1} \sigma\left(u\right)nvd\Gamma \; - \int_{\Gamma_2} \sigma\left(u\right)nvd\Gamma \tag{1.21}$$

En utilisant (1.12)-(1.13) dans (1.21), puis on introduit le résultat dans (1.20), on trouve (1.17).

On a :

$$\begin{aligned} \langle \sigma_N, v_N - u_N \rangle &= \langle \sigma_N, v_N - d + d - u_N \rangle \\ &= \langle \sigma_N, v_N - d \rangle + \langle \sigma_N, d - u_N \rangle \\ &= \langle \sigma_N, v_N - d \rangle \geq 0 \end{aligned}$$

d'où (1.18).

Formulation faible des conditions de frottement :

On a :

$$\begin{aligned} -\int_{\Gamma_0} \sigma_T v_T d\Gamma &\leq \int_{\Gamma_0} \left|\sigma_T\right| \left|v_T\right| d\Gamma \\ &\leq \int_{\Gamma_0} S \left|v_T\right| d\Gamma \end{aligned} \tag{1.22}$$

Et pour $u_T = 0$ ou $u_T = -\delta\sigma_T$ on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_0} \sigma_T u_T d\Gamma &= \int_{\Gamma_0} -\delta \left|\sigma_T\right|^2 d\Gamma \\ &= -\int_{\Gamma_0} \left|\sigma_T\right| \left|u_T\right| d\Gamma \\ &= -\int_{\Gamma_0} S \left|u_T\right| d\Gamma \end{aligned} \tag{1.23}$$

De (1.22) et (1.23), on déduit (1.19). ■

Théorème 5 *On suppose que u est assez régulière. Alors, u solution du P.C si et seulement si u est solution du P.V.*

Preuve. Si on prend $v = u \pm \varphi$, tel que $\varphi \in (D(\Omega))^3$, v reste dans V, puis on l'introduit dans (1.17) on trouve :

$$a(u, \varphi) = \int_\Omega f\varphi dx \tag{1.24}$$

ce qui entraine, après utilisation de la fomule de Green, (1.11).

Pour $v = u \pm \varphi$ toujours dans (1.17) tel que $\varphi \in (D(\Omega \cup \Gamma_1))^3$, v demeure dans V, et en utilisant (1.24), on trouve (1.12).

Puis on prend $v = u + \varphi$ dans (1.18) avec $\varphi \in (D(\Omega \cup \Gamma_0))^3$ et $\varphi_N \leq 0$ sur Γ_0, on trouve $\langle \sigma_N, \varphi_N \rangle \geq 0$ ce qui donne $\sigma_N \leq 0$ sur Γ_0.

En prenant $v_N = d$ puis $v_N = 2u_N - d$ dans (1.18), on obtient $\langle \sigma_N, u_N - d \rangle = 0$ et puisque $\sigma_N(u_N - d) \geq 0$ alors $\sigma_N(u_N - d) = 0$ sur Γ_0. Par conséquent (1.14).

On pose $v = 0$ puis $v = 2u$ dans (1.19), on trouve :

$$\langle \sigma_T, u_T \rangle + \langle \mathsf{S}, |u_T| \rangle = 0 \tag{1.25}$$

d'où (1.19) devient $\langle \sigma_T, v_T \rangle + \langle \mathsf{S}, |v_T| \rangle \geq 0$ ou encore

$$\int_{\Gamma_0} (\sigma_T v_T - S\,|v_T|)\, d\Gamma \geq 0 \tag{1.26}$$

Soit $\varphi \in (D(\Omega))^3$, on a $|\varphi_T| \leq |\varphi|$ et $\sigma_T \varphi_T = \sigma_T \varphi$ puisque $\sigma_T n = 0$.

Donc (1.25) devient :

$$\int_{\Gamma_0} (\sigma_T \varphi - S\,|\varphi_T|)\, d\Gamma \geq 0 \textit{ pour tout } \quad \varphi \in (D(\Omega))^3 \tag{1.27}$$

On prend $\pm\varphi$ dans (1.27), on trouve que :

$$\left|\int_{\Gamma_0} \sigma_T \varphi d\Gamma\right| \leq \int_{\Gamma_0} S\,|\varphi|\,d\Gamma \tag{1.28}$$

On a : $\int_{\Gamma_0} S\,|\varphi|\,d\Gamma$ définit une norme sur $\mathrm{L}^1(\Gamma_0)$ et $\varphi \to \int_{\Gamma_0} \sigma_T\varphi d\Gamma$ est une forme linéaire sur $(D(\Omega))^3$. D'où de (1.28), on conclut qu'elle est continue et de norme ≤ 1.

On a :

$$\int_{\Gamma_0} \sigma_T \varphi d\Gamma = \int_{\Gamma_0} \left(S^{-1}\sigma_T\right)(S\varphi)\,d\Gamma$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\Gamma_0} \sigma_T \varphi d\Gamma\right| &= \left|\int_{\Gamma_0} \left(S^{-1}\sigma_T\right)(S\varphi)\,d\Gamma\right| \\
&\leq \left|S^{-1}\sigma_T\right|_{\mathrm{L}^\infty(\Gamma_0)} \times \left|\int_{\Gamma_0} S\varphi d\Gamma\right| \\
&\leq \left|S^{-1}\sigma_T\right|_{\mathrm{L}^\infty(\Gamma_0)} \times \int_{\Gamma_0} S\,|\varphi|\,d\Gamma
\end{aligned}$$

ceci implique que $|S^{-1}\sigma_T|_{\mathrm{L}^\infty(\Gamma_0)} \leq 1$ d'où $|S^{-1}\sigma_T| \leq 1$ par conséquent $|\sigma_T| \leq S$ sur Γ_0.

Pour finir, de $|\sigma_T| \leq S$, on conclut que $-\sigma_T u_T \leq S\,|u_T|$ d'où $\sigma_T u_T + S\,|u_T| \geq 0$ avec (1.25) on déduit que :

$$\sigma_T u_T + S\,|u_T| = 0 \tag{1.29}$$

Deux cas se présentent :

-si $|\sigma_T| = S$, de (1.29) on conclut (1.15).

-si $|\sigma_T| < S$, supposons $u_T \neq 0$, on aura $\sigma_T u_T + S\,|u_T| < 0$ ce qui contredit (1.29), d'où (1.16). ■

Existence et unicité

On a besoin de quelques outils pour établir l'existence et l'unicité de la solution du problème variationnel.

Posons :

$$J(v) = \int_{\Gamma_0} S\,|v_T|\,d\Gamma, v \in K$$

On a :

$$I(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - L(v), v \in K$$

- J convexe sur K, non linéaire et non différentiable.

- I strictement convexe et G-différentiable de G-dérivée : $I\prime(u)w = a(u,w) - L(w), w \neq 0$.

Corollaire 6 *Soit $u \in K$, u est solution du problème variationnel si et seulement si u est solution de l'inéquation variationnelle :*

$$a(u, v-u) - L(v-u) + J(v) - J(u) \geq 0,\ \forall v \in K \tag{1.30}$$

Preuve. Supposons que u, la solution du problème variationnel, est assez régulière. L'equation (1.17) donne :

$$a(u, v-u) = L(v-u) + \langle \sigma_N, v_N - \bar{u}_N \rangle + \langle \sigma_T, v_T - u_T \rangle \tag{1.31}$$

Pour avoir (1.29), il suffit d'introduire (1.18) et (1.19) dans (1.17.).

Inversement, supposons que u, assez régulière, vérifie (1.30). On procède de la même façon dans la preuve du théorème 5. On introduit $v = u \pm \varphi$, tel que $\varphi \in (D(\Omega))^3$, dans (1.29), puis on récupère (1.17), ensuite (1.30). après insertion de (1.11) et (1.12) dans (1.29), on trouve :

$$\langle \sigma_N, v_N - u_N \rangle + \langle \sigma_T, v_T - u_T \rangle + \langle \mathsf{S}, |v_T| - |u_T| \rangle \geq 0,\ \forall\ v_T \in V_T \tag{1.32}$$

On prend $v_T = u_T$ puis $v_N = u_N$ dans (1.31), on trouve respectivement (1.18) et (1.19). ■

Corollaire 7 *Soit* $u \in K$, *les deux problèmes suivants sont équivalents :*

$$i)\begin{cases} \text{Trouver } u \text{ minimise} \\ F(v) = I(v) + J(v), v \in K \end{cases} \tag{1.33}$$

$$ii)\begin{cases} \text{Trouver } u \text{ dans } K \text{ tel que} \\ a(u, v-u) - L(v-u) + J(v) - J(u) \geq 0, \ \forall v \in K \end{cases} \tag{1.34}$$

Preuve. Montrons d'abord que i) implique ii).

Soit u vérifiant i), on a : $\forall\ v \in K$, $u + t(v-u) \in K, \forall\ t \in]0,1[$. Donc on a :

$$\begin{aligned} F(u) \leq\ & F(u + t(v-u)) \\ & \leq I(u + t(v-u)) + J(u + t(v-u)) \end{aligned}$$

d'où :

$$I(u) + J(u) \quad \leq \quad I(u + t(v-u)) + (1-t) Ju) + tJ(v)$$

donc

$$\frac{I(u + t(v-u)) - I(u)}{t} + J(v) - J(u) \geq 0$$

En faisant tendre t vers zéro, on trouve ii).

Maintenant, on montre la réciproque. Puisque I convexe et G-dérivable de G-dérivée $I\prime(u)w = a(u,w) - L(w)$, $w \neq 0$, alors $I(v) \geq I(u) + I'(u)(v-u)$ pour tout $v \in V$ d'où u vérifie ii).

En combinant avec ii), on trouve :

$$I(v) \geq I(u) + J(u) - J(v)$$

d'où

$$I(u)+J(u)\leq I(v)-J(v),\ \forall v\in K$$

comme $u\in K,$ il résulte que :

$$F(u)\leq\ F(v),\forall v\in K$$

d'où ii). ■

Remarque 8 *Ce corollaire nous permet de passer du problème d'inéquation variationnelle à un problème de minimisation.*

Corollaire 9 *Supposons que* $f\in L^2(\Omega)$, $g\in L^2(\Gamma_2)$ *et* $S\in L^2(\Gamma_0)$. *Donc le problème de minimisation* (1.33) *admet au moins une solution dans* K.

Preuve. Pour établir l'existence de u, il suffit de montrer que F est s.c.i faiblement et coercive sur K.

On a I est une fonction convexe et G-dérivable sur K donc, elle est s.c.i faiblement sur K.

Donc il suffit de montrer que J est s.c.i. Pour cela il suffit de montrer que son épigraphe est fermé. Ce qui est facile à établir et ceci est dùe à la continuité de J.

Puisque la somme d'une fonction s.c.i et une fonction s.c.i faiblement est une fonction s.c.i , alors F est s.c.i.

Il reste à établir la coercivité. D'aprés la coercivité de $a(.,.)$ et la linéarité de $L(.)$ et la continuité de l'application trace de $\mathrm{H}^1(\Omega)$ dans $\mathrm{L}^2(\Gamma)$, on a :

$$|I(v)|\geq c\,\|v\|^2_{\mathrm{H}^1(\Omega)}-c'\,\|v\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)}$$

et

$$\begin{aligned} J(v) &= \int_{\Gamma_0} S\,|v_T|\,d\Gamma \\ &\leq \int_{\Gamma_0} S\,|v|\,d\Gamma \\ &\leq c\text{''}\,\|v\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \quad \text{pour } S \in L^2(\Gamma_0)\,. \end{aligned}$$

D'où $limF(v) = +\infty$ quand $\|v\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \to \infty$ par conséquent F est coercive.
Si de plus F est strictement convexe, cette solution est unique. ■

Théorème 10 *Pour* $f_i \in L^2(\Omega)$, $g_i \in L^2(\Gamma_2)$ *et* $S \in L^2(\Gamma_0)$, *le problème P.V admet au moins une solution.*

Preuve. Il suffit d'utiliser les corollaires 6,7 et 9. ■

1.2.2 Le cas de la loi de Coulomb

Problème classique P.C

$$\text{Trouver } u \text{ tel que}$$

$$-div\sigma(u) = f \text{ dans } \Omega \tag{1.35}$$

$$\sigma(u) = g \text{ sur } \Gamma_1 \tag{1.36}$$

$$u = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \tag{1.37}$$

$$u_N \leq d,\ \sigma_N \leq 0,\ \sigma_N(u_N - d) = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \tag{1.38}$$

$$|\sigma_T| < \nu\,|\sigma_N| \to u_T = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \tag{1.39}$$

$$|\sigma_T| = \nu\,|\sigma_N| \to \exists\delta > 0, u_T = -\delta\sigma_T \quad \text{sur } \Gamma_0 \tag{1.40}$$

Problème variationnel

Théorème 11 *Si u est solution de $P.C$ alors u vérifie le problème $P.V$:*

$$Trouver\ u \in K \quad tel\ que$$
$$a(u,v) = L(v) + \langle \sigma_N, v_N \rangle + \langle \sigma_T, v_T \rangle\,, \ \forall\ v \in V \tag{1.41}$$
$$\langle \sigma_N, v_N - u_N \rangle \geq 0,\ \forall \ \ v \in K \tag{1.42}$$
$$\langle \sigma_T, v_T - u_T \rangle + \langle \nu\, |\sigma_N|\,, |v_T| - |u_T| \rangle \geq 0,\ \forall \ \ v_T \in V_T \tag{1.43}$$

où $V_T = \left\{ v \in \left(H^1(\Omega)\right)^2 / v = 0 \ sur\ \Gamma_2 \right\}$

Preuve. De (1.35), on trouve :

$$\int_\Omega -div\sigma(u)\, vdx = \int_\Omega fvdx, \quad \forall v \in V \tag{1.44}$$

D'autre part, en utilisant la formule de Green, on a :

$$\int_\Omega -div\sigma(u)\, vdx = \int_\Omega \sigma(u) : e(v)dx - \int_{\Gamma_0} \sigma(u)\, nvd\Gamma - \int_{\Gamma_1} \sigma(u)\, nvd\Gamma - \int_{\Gamma_2} \sigma(u)\, nvd\Gamma \tag{1.45}$$

En utilisant (1.35)-(1.38) dans (1.45), puis on introduit le résultat dans (1.44), on trouve (1.41).

On a :

$$\begin{aligned}
\langle \sigma_N, v_N - u_N \rangle &= \langle \sigma_N, v_N - d + d - u_N \rangle \\
&= \langle \sigma_N, v_N - d \rangle + \langle \sigma_N, d - u_N \rangle \\
&= \langle \sigma_N, v_N - d \rangle \geq 0
\end{aligned}$$

d'où (1.42).

Formulation faible des conditions de frottement :

On a :

$$\begin{aligned} -\int_{\Gamma_0} \sigma_T v_T d\Gamma &\leq \int_{\Gamma_0} |\sigma_T| \, |v_T| \, d\Gamma \\ &\leq \int_{\Gamma_0} \nu \, |\sigma_N| \, |v_T| \, d\Gamma \end{aligned} \tag{1.46}$$

Et pour $u_T = 0$ ou $u_T = -\delta\sigma_T$ on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_0} \sigma_T u_T d\Gamma &= \int_{\Gamma_0} -\delta \, |\sigma_T|^2 \, d\Gamma \\ &= -\int_{\Gamma_0} |\sigma_T| \, |u_T| \, d\Gamma \\ &= -\int_{\Gamma_0} \nu \, |\sigma_N| \, |u_T| \, d\Gamma \end{aligned} \tag{1.47}$$

De (1.46) et (1.47), on déduit (1.43). ■

Théorème 12 *On suppose que u est assez régulière alors u solution de P.C si et seulement si u est solution de P.V.*

Preuve. Si on prend $v = u \pm \varphi$, tel que $\varphi \in (D(\Omega))^3$, v reste dans V, puis on l'introduit dans (1.41), on trouve :

$$a(u, \varphi) = \int_{\Omega} f \varphi dx$$

ce qui entraine, aprés utilisation de la fomule de Green, (1.35).

Pour $v = u \pm \varphi$ toujours dans (1.41) tel que $\varphi \in (D(\Omega \cup \Gamma_1))^3$, v reste dans V, et en utilisant ce qui précède, on trouve (1.36).

Puis on prend $v = u + \varphi$ dans (1.42) avec $\varphi \in (D(\Omega \cup \Gamma_0))^3$ et $\varphi_N \leq 0$ sur Γ_0,on trouve $\langle \sigma_N, \varphi_N \rangle \geq 0$ ce qui donne $\sigma_N \leq 0$ sur Γ_0.

En prenant $v_N = d$ puis $v_N = 2u_N - d$ dans (1.42), on obtient $\langle \sigma_N, u_N - d \rangle = 0$ et puisque $\sigma_N(u_N - d) \geq 0$ alors $\sigma_N(u_N - d) = 0$ sur Γ_0. Par conséquent (1.38).

On pose $v = 0$ puis $v = 2u$ dans (1.42), on trouve :

$$\langle \sigma_T, u_T \rangle + \langle \nu \left| \sigma_N \right|, \left| u_T \right| \rangle = 0$$

d'où (1.42) devient :

$$\langle \sigma_T, v_T \rangle + \langle \nu \left| \sigma_N \right|, \left| v_T \right| \rangle \geq 0$$

ou encore :

$$\int_{\Gamma_0} \left(\sigma_T v_T - \nu \left| \sigma_N \right| \left| v_T \right| \right) d\Gamma \geq 0 \tag{1.48}$$

Soit $\varphi \in (D(\Omega))^3$, on a $|\varphi_T| \leq |\varphi|$ et $\sigma_T \varphi_T = \sigma_T \varphi$ puisque $\sigma_T n = 0$.

Donc (1.48) devient :

$$\int_{\Gamma_0} \left(\sigma_T \varphi - \nu \left| \sigma_N \right| \left| \varphi_T \right| \right) d\Gamma \geq 0 \text{ pour tout } \quad \varphi \in (D(\Omega))^3 \tag{1.49}$$

On prend $\pm\varphi$ dans (1.49), on trouve que :

$$\left| \int_{\Gamma_0} \sigma_T \varphi d\Gamma \right| \leq \int_{\Gamma_0} \nu \left| \sigma_N \right| \left| \varphi \right| d\Gamma \tag{1.50}$$

On a $\int_{\Gamma_0} \nu \left| \sigma_N \right| \left| \varphi \right| d\Gamma$ définit une norme sur $L^1(\Gamma_0)$ et $\varphi \to \int_{\Gamma_0} \sigma_T \varphi d\Gamma$ est une forme linéaire sur $(D(\Omega))^3$. D'où de (1.50), on conclut qu'elle est continue et de norme ≤ 1.

On a :

$$\int_{\Gamma_0} \sigma_T \varphi d\Gamma = \int_{\Gamma_0} \left(\left(\nu \left| \sigma_N \right| \right)^{-1} \sigma_T \right) \left(\nu \left| \sigma_N \right| \varphi \right) d\Gamma$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\Gamma_0} \sigma_T \varphi d\Gamma\right| &= \left|\int_{\Gamma_0} \left((\nu\,|\sigma_N|)^{-1}\sigma_T\right)(\nu\,|\sigma_N|\,\varphi)\,d\Gamma\right| \\
&\leq \left|(\nu\,|\sigma_N|)^{-1}\sigma_T\right|_{\mathrm{L}^\infty(\Gamma_0)} \times \left|\int_{\Gamma_0} \nu\,|\sigma_N|\,\varphi d\Gamma\right| \\
&\leq \left|(\nu\,|\sigma_N|)^{-1}\sigma_T\right|_{\mathrm{L}^\infty(\Gamma_0)} \times \int_{\Gamma_0} \nu\,|\sigma_N|\,|\varphi|\,d\Gamma
\end{aligned}$$

Ceci implique que $\left|(\nu\,|\sigma_N|)^{-1}\sigma_T\right|_{\mathrm{L}^\infty(\Gamma_0)} \leq 1$ d'où $\left|(\nu\,|\sigma_N|)^{-1}\sigma_T\right| \leq 1$ par conséquent :

$$|\sigma_T| \leq \nu\,|\sigma_N| \ \ sur\ \Gamma_0.$$

Pour finir, de $|\sigma_T| \leq \nu\,|\sigma_N|$, on conclut que $-\sigma_T u_T \leq \nu\,|\sigma_N|\,|u_T|$ d'où $\sigma_T u_T + \nu\,|\sigma_N|\,|u_T| \geq 0$, avec (1.48) implique que :

$$\sigma_T u_T + \nu\,|\sigma_N|\,|u_T| = 0 \tag{1.51}$$

Deux cas se présentent :

-si $|\sigma_T| = \nu\,|\sigma_N|$, de (1.51) on conclut (1.40).

-si $|\sigma_T| < \nu\,|\sigma_N|$, supposons $u_T \neq 0$, on aura $\sigma_T u_T + \nu\,|\sigma_N|\,|u_T| < 0$ ce qui contredit (1.51), d'où (1.39). ■

Un théorème d'existence

Corollaire 13 *Le P.V est équivalent au problème :*

$$\textit{Trouver } u \textit{ dans } K \textit{ tel que}$$
$$a(u, v-u) - L(v-u) + J(v) - J(u) \geq 0,\ \forall v \in K \tag{1.52}$$

où $J(v) = \int_{\Gamma_0} \nu\,|\sigma_N|\,|v_T|\,d\Gamma$.

Preuve. Au début, on peut avoir de (1.41) que :

$$a(u, v-u) = L(v-u) + \langle \sigma_N, v_N - \bar{u}_N \rangle + \langle \sigma_T, v_T - u_T \rangle \tag{1.53}$$

Conformément à la première partie de la preuve du thèorème 4, de (1.52), on a (1.41). Aprés insertion de (1.35) et (1.36) dans (1.53), on trouve :

$$\langle \sigma_N, v_N - u_N \rangle + \langle \sigma_T, v_T - u_T \rangle + \langle \nu \left| \sigma_N \right|, \left| v_T \right| - \left| u_T \right| \rangle \geq 0, \forall\ v_T \in V_T \tag{1.54}$$

On prend $v_T = u_T$ puis $v_N = u_N$ dans (1.54), on trouve respectivement (1.42) et (1.43).

Pour avoir la réciproque, il suffit d'introduire (1.42) et (1.43) dans (1.53). ■

Il existe plusieurs difficultés pour établir l'existence de la solution du problème variationnel avec $J(v) = \int_{\Gamma_0} \nu \left|\sigma_N\right| \left|v_T\right| d\Gamma$ et ceci est dùe au couplement des contraintes et du déplacement et à la non-différentiabilité de J, de plus σ_N n'est pas en relation biunivoque avec u, ceci est dùe au moins à $\sigma_N \left(u_N - d\right) = 0$ donc, on ne peut pas écrire F uniquement en fonction de u. Par conséquent dans tout les cas, on ne peut pas passer à un probléme de minimisation.

Pour dépasser ces difficultés, on va procéder à une stratégie de point fixe sur le seuil de frottement qui utilise l'existence de la solution dans le cas de la loi de Tresca. Cette stratégie consiste à :

$$\begin{cases} \text{Trouver le point fixe de l'application :} \\ \quad S \to \nu \left|\sigma_N(u)\right| \quad \text{dans } H^{-1/2}\left(\Gamma_0\right) \end{cases}$$

où u est solution du problème auxilliaire :

$$\mathrm{P(S)} \begin{cases} \text{Trouver } u \text{ dans } K \text{ minimisant la fonction :} \\ F(v) = \dfrac{1}{2} a(u, v) - L(v) + J_S(v),\ \forall v \in K \\ \text{avec } J_S(v) = \int_{\Gamma_0} \mathsf{S} \left|v_T\right| d\Gamma \end{cases}$$

et $H^{-1/2}\left(\Gamma_0\right)$ est l'espace dual de $H_{00}^{1/2}\left(\Gamma_0\right)$ [1](voir [15] ou [13] pour une définition de

[1] on introduit cet espace pour dépasser le problème de surjectivité de $\mathrm{H}^1(\Omega)$ dans $\mathrm{H}^{1/2}\left(\Gamma_0\right)$.

$H_{00}^{1/2}(\Gamma_0)$). Tout ceci pour avoir $S = \nu |\sigma_N|$.

On peut simplifier, en posant $S = \nu \mathsf{s}$ et on cherche s le point fixe de l'application $s \to |\sigma_N|$ dans $H^{-1/2}(\Gamma_0)$.

Soient u^1, u^2 solutions de $P(S_1)$ et $P(S_2)$ respectivement. Donc,

$$
\begin{aligned}
a(u^1, v-u^1) + J_{S_1}(v) - J_{S_1}(u^1) &\geq L\left(v-u^1\right), \forall v \in K &(1.55)\\
a(u^2, v-u^2) + J_{S_2}(v) - J_{S_2}(u^2) &\geq L\left(v-u^2\right), \forall v \in K &(1.56)
\end{aligned}
$$

En prenant $v = u^1$ dans (1.55) et $v = u^2$ dans (1.56), on trouve :

$$
\begin{aligned}
a(u^1-u^2, u^1-u^2) &\leq J_{S_1}(u^2) - J_{S_1}(u^1) + J_{S_2}(u^1) - J_{S_2}(u^2)\\
&\leq \int_{\Gamma_0} (S_1 - S_2)\left(\left|u_T^2\right| - \left|u_T^1\right|\right) d\Gamma \qquad (1.57)
\end{aligned}
$$

On a d'aprés la coercivité :

$$
\left\|u^1-u^2\right\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{c}\, a(u^1-u^2, u^1-u^2) \qquad (1.58)
$$

et

$$
\begin{aligned}
\int_{\Gamma_0} (S_1 - S_2)\left(\left|u_T^2\right| - \left|u_T^1\right|\right) d\Gamma &\leq |S_1 - S_2|_{H^{-1/2}(\Gamma_0)} \times \left\|\left|u_T^2\right| - \left|u_T^1\right|\right\|_{H^{1/2}(\Gamma_0)}\\
&\leq |\nu|_{L^\infty(\Gamma_0)} \times |s_1 - s_2|_{H^{-1/2}(\Gamma_0)} \times \left\|u_T^2 - u_T^1\right\|_{\mathrm{H}^{1/2}(\Gamma_0)}\\
&\leq c' |\nu|_{L^\infty(\Gamma_0)} \times |s_1 - s_2|_{H^{-1/2}(\Gamma_0)} \times \left\|u_T^2 - u_T^1\right\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)}\\
&\leq c' |\nu|_{L^\infty(\Gamma_0)} \times |s_1 - s_2|_{H^{-1/2}(\Gamma_0)} \times \left\|u^1 - u^2\right\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \qquad (1.59)
\end{aligned}
$$

En combinant (1.58)-(1.59), on trouve :

$$
\left\|u^1-u^2\right\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)}^2 \leq \frac{c'}{c} |\nu|_{L^\infty(\Gamma_0)} \times |s_1 - s_2|_{H^{-1/2}(\Gamma_0)} \qquad (1.60)
$$

D'autre part, on a :

$$\left|\left|\sigma_N\left(u^1\right)\right|-\left|\sigma_N\left(u^2\right)\right|\right|_{H^{-1/2}(\Gamma_0)} \leq \left|\sigma_N\left(u^1\right)-\sigma_N\left(u^2\right)\right|_{H^{-1/2}(\Gamma_0)}$$

et

$$\begin{aligned}
\left|\sigma_N\left(u^1\right)-\sigma_N\left(u^2\right)\right|_{H^{-1/2}(\Gamma_0)} &= \left|\left(\sigma\left(u^1\right)n\right)n-\left(\sigma\left(u^2\right)n\right)n\right|_{H^{-1/2}(\Gamma_0)} \\
&= \left|(\sigma\left(u^1\right)n-\sigma\left(u^2\right)n)n\right|_{H^{-1/2}(\Gamma_0)} \\
&\leq \left\|\sigma\left(u^1\right)n-\sigma\left(u^2\right)n\right\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \\
&\leq \left\|\sigma\left(u^1\right)-\sigma\left(u^2\right)\right\|_{(L^2(\Omega))^{3\times 3}} \\
&\leq c" \left\|e(u^1-u^2)\right\|_{(L^2(\Omega))^{3\times 3}} \qquad (1.61)
\end{aligned}$$

Par ailleurs, nous avons :

$$\|e_{ij}(u)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)}$$

d'où :

$$\left\|e(u^1-u^2)\right\|_{(L^2(\Omega))^{3\times 3}} \leq k\ \left\|u^1-u^2\right\|^2_{\mathrm{H}^1(\Omega)}$$

Par conséquent (1.61), avec (1.60), devient :

$$\left|\left|\sigma_N\left(u^1\right)\right|-\left|\sigma_N\left(u^2\right)\right|\right|_{H^{-1/2}(\Gamma_0)} \leq \gamma\,|\nu|_{L^\infty(\Gamma_0)} \times |s_1-s_2|_{H^{-1/2}(\Gamma_0)}\,.$$

Donc s'il existe $\nu_0 > 0$ vérifie $|\nu|_{L^\infty(\Gamma_0)} < \nu_0$, assez petit pour avoir $\gamma\,|\nu|_{L^\infty(\Gamma_0)} < 1$, alors l'application $s \to |\sigma_N(u)|$ admet un point fixe. D'où le théorème :

Théorème 14 *Supposons que* $f_i \in L^2(\Omega), g_i \in L^2(\Gamma_2)$ *et* $|\nu|_{L^\infty(\Gamma_0)} < \nu_0$, *pour* ν_0 *assez petit, le problème* $P.V$ *admet au moins une solution dans* V.

On peut consulter Nečas, Jarusek et Haslinger[16], pour avoir un résultat d'existence pour un problème bidimensionnel où ils supposent que le coefficient de frottement est assez petit. Récement ; Eck et Jarusek[8] ont donné une démonstration, en utilisant la méthode de pénalisation. Par contre, pas de résultat d'unicité est établi jusqu'à maintenant.

Chapitre 2

Etude asymptotique d'un problème de contact unilatéral d'une plaque mince contre un obstacle rigide dans l'élaticité linéaire

Soit $\Omega^\varepsilon = \omega \times]-\varepsilon, +\varepsilon[\,, \varepsilon > 0$, un ouvert borné de R^3, tel que ω un ouvert de R^2, de frontière lipschitzienne γ, on note sa frontière latérale par $\Gamma_0^\varepsilon = \gamma \times [-\varepsilon, \varepsilon]$, la face supérieure et la face inférieure sont notées respectivement par $\Gamma_+^\varepsilon = \omega \times \{+\varepsilon\}$ et $\Gamma_-^\varepsilon = \omega \times \{-\varepsilon\}$.

On pose $V(\Omega^\varepsilon) = \{v \in H^1(\Omega^\varepsilon) \ / \ v = 0 \text{ sur } \Gamma_0^\varepsilon\}$

$\overrightarrow{V}(\Omega^\varepsilon) = V(\Omega^\varepsilon) \times V(\Omega^\varepsilon) \times V(\Omega^\varepsilon)$ l'espace des déplacements admissibles.

On note par $\bar{v}$ la trace de v sur Γ_+^ε et par $\underline{v}$ la trace de v sur Γ_-^ε, ou simplement par v s'il n'y a pas de confusion.

Le domaine Ω^ε est supposé occupé par un matériau élastique isotrope et homogène de constantes de Lamé $\lambda > 0$, $\mu > 0$, ce domaine est encastré en Γ_0^ε. Ce corps est soumis à une force volumique f^ε sur Ω^ε et à une force surfacique g^ε sur Γ_-^ε et entre en contact unilatéral avec un obstacle rigide occupant le domaine $O^\varepsilon = \{x^\varepsilon \in R^3 / (x_1^\varepsilon, x_2^\varepsilon) \in \omega,\ x_3^\varepsilon > \varepsilon d\}$, $d \geq 0$ dans $H_0^2(\omega)$, d une fonction d'interstice définie sur ω (Fig 2-1).

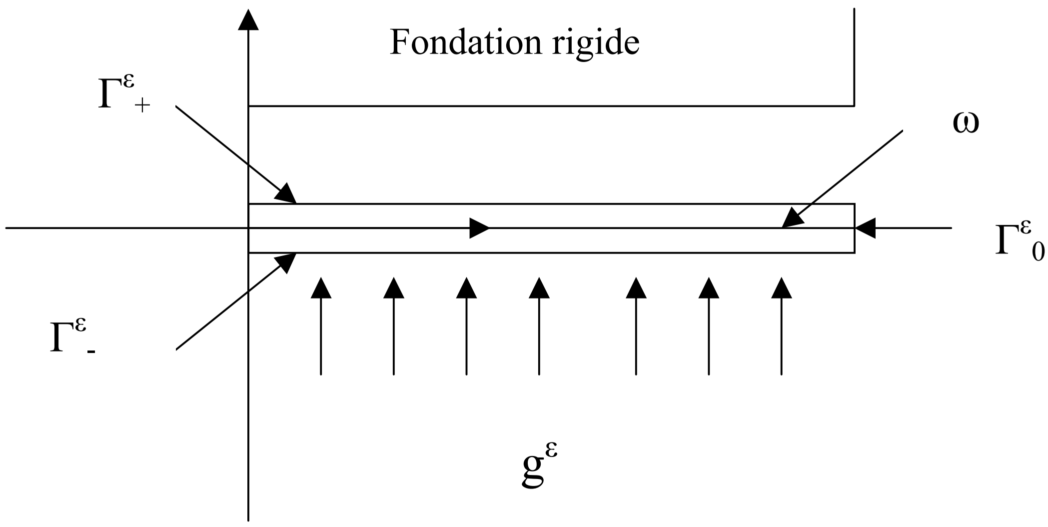

Fig. 2-1 –

La condition de contact est définie par l'inégalité : $\bar{v}_3 \leq \varepsilon d$ d'où la notation :

$K(\Omega^\varepsilon) = \{v \in \ V(\Omega^\varepsilon) / \ \ \bar{v}_3 \leq \varepsilon d\}$

$\overrightarrow{K}(\Omega^\varepsilon) = V(\Omega^\varepsilon) \times V(\Omega^\varepsilon) \times K(\Omega^\varepsilon),$ l'espace des déplacements admissibles avec condition de contact.

Dans l'étude asymptotique, on va procéder à l'approche en déplacement ($u-$approche).

On va étudier chaque fois le cas de contact sans frottement puis le cas de contact avec frottement de Coulomb.

2.1 Le cas de contact sans frottement

2.1.1 Problème classique P$^\varepsilon$.C

$$\text{Trouver } u^\varepsilon \text{ tel que}$$

$$-\partial_j^\varepsilon \sigma_{ij}^\varepsilon = f_i^\varepsilon \quad dans \;\; \Omega^\varepsilon \tag{2.1}$$

$$\sigma_{ij}^\varepsilon n_j^\varepsilon = g_i^\varepsilon \quad sur \; \Gamma_-^\varepsilon \tag{2.2}$$

$$u^\varepsilon = 0 \quad sur \; \Gamma_0^\varepsilon \tag{2.3}$$

$$\bar{u}_3^\varepsilon \leq \varepsilon d, \sigma_{33}^\varepsilon \leq 0, \sigma_{33}^\varepsilon \left(\bar{u}_3^\varepsilon - \varepsilon d\right) = 0, \sigma_{\alpha 3}^\varepsilon = 0 \quad \text{sur} \;\; \Gamma_+^\varepsilon \tag{2.4}$$

tels que : $\sigma_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon) = a_{ijkl} e_{kl}^\varepsilon(u^\varepsilon)$, dans notre cas, isotrope et homogène, a_{ijkl} sont des constantes indépendentes de x et vérifient :

$$\begin{aligned} a_{ijkl} &= \lambda \delta_{ij}\delta_{kh} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jh} + \delta_{ih}\delta_{jk}) \quad \text{loi de Hook} \\ e_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_j^\varepsilon} + \frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial x_i^\varepsilon}\right) = \frac{1}{2}\left(\partial_i^\varepsilon u_j^\varepsilon + \partial_j^\varepsilon u_i^\varepsilon\right) \;, \partial_i^\varepsilon = \frac{\partial}{\partial x_j^\varepsilon} \end{aligned}$$

Donc :

$$\sigma_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon) = \lambda \; e_{pp}^\varepsilon(u^\varepsilon)\delta_{ij} \; + 2\mu \; e_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon) \tag{2.5}$$

Remarque 15 *σ_{33}^ε représente la densité de la force de pression et $\sigma_{\alpha 3}^\varepsilon$ les densités des forces de frottement.*

2.1.2 Problème variationnel

Théorème 16 *Si* u^ε *est solution de* $P^\varepsilon.C$ *alors* u *vérifie le problème* $P.V$ *:*

$$\text{Trouver } u^\varepsilon \in \overrightarrow{K}(\Omega^\varepsilon) \quad \text{tel que}$$

$$a^\varepsilon(u^\varepsilon, v^\varepsilon) = L^\varepsilon(v^\varepsilon) + \langle \sigma_{33}^\varepsilon, \bar{v}_3^\varepsilon \rangle, \ \forall\ v^\varepsilon \in \overrightarrow{V}(\Omega^\varepsilon) \tag{2.6}$$

$$\langle \sigma_{33}^\varepsilon, \bar{v}_3^\varepsilon - \bar{u}_3^\varepsilon \rangle \geq 0, \ \forall\ v_3^\varepsilon \in K(\Omega^\varepsilon) \tag{2.7}$$

où :

$$a^\varepsilon(u^\varepsilon, v^\varepsilon) = \int_{\Omega^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon)\, \partial_j^\varepsilon v_i^\varepsilon dx^\varepsilon$$

$$= \int_{\Omega^\varepsilon} \left[\lambda\ e_{ii}^\varepsilon(u^\varepsilon) e_{jj}^\varepsilon(v^\varepsilon) + 2\mu\ e_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon) e_{ij}^\varepsilon(v^\varepsilon)\right] dx^\varepsilon \tag{2.8}$$

$$L^\varepsilon(v^\varepsilon) = \int_{\Omega^\varepsilon} f_i^\varepsilon v_i^\varepsilon dx^\varepsilon + \int_{\Gamma_-^\varepsilon} g_i^\varepsilon \underline{v_i}^\varepsilon d\Gamma, \tag{2.9}$$

$$\langle \sigma_{33}^\varepsilon, \bar{v}_3^\varepsilon \rangle = \int_{\Gamma_+^\varepsilon} \sigma_{33}^\varepsilon \bar{v}_3^\varepsilon d\Gamma \qquad (\text{produit de dualité}).$$

Preuve. La démonstration est similaire à celle du théorème 1 du chapitre1. ■

Remarque 17 *D'aprés le premier chapitre ce problème est équivalent à l'inéquation variationnelle :*

$$a^\varepsilon(u^\varepsilon, v^\varepsilon - u^\varepsilon) \geq \ L^\varepsilon(v^\varepsilon - u^\varepsilon)$$

dans $K(\Omega^\varepsilon)$ *qui admet une solution unique sous les conditions* $f_i^\varepsilon \in L^2(\Omega^\varepsilon)$ *et* $g_i^\varepsilon \in L^2(\Gamma_-^\varepsilon)$, *cette solution réalise le minimum de la fonctionnelle :*

$$I(v^\varepsilon) = \frac{1}{2} a^\varepsilon(v^\varepsilon, v^\varepsilon) - \ L^\varepsilon(v^\varepsilon).$$

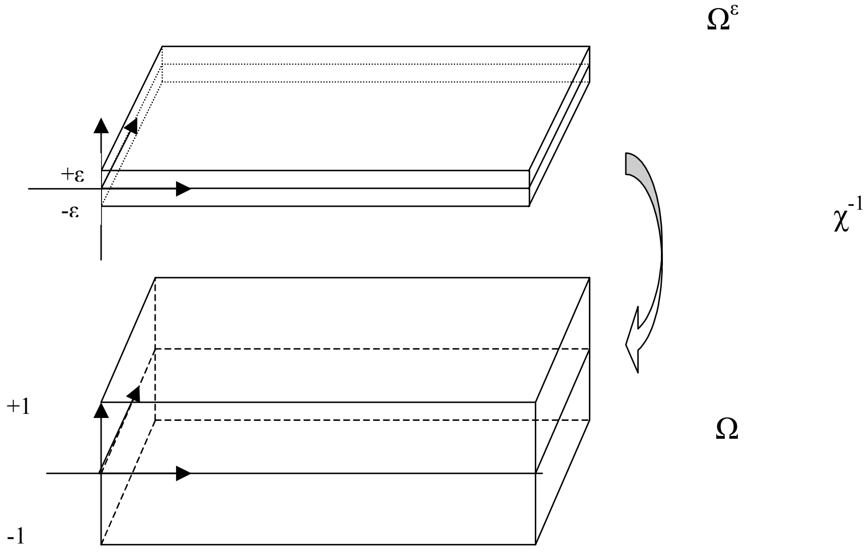

Fig. 2-2 –

2.1.3 Etude asymptotique

Mise à l'échelle des données

Soit l'application :

$$\begin{aligned} \chi^\varepsilon \quad &: \quad \Omega \to \Omega^\varepsilon \\ (x_1, x_2, x_3) \quad &\to \quad (x_1^\varepsilon, x_2^\varepsilon, x_3^\varepsilon) \,/ x_1^\varepsilon = x_1, x_2^\varepsilon = x_2, x_3^\varepsilon = \varepsilon x_3 \end{aligned} \tag{2.10}$$

D'où : $\chi^\varepsilon(\Omega) = \Omega^\varepsilon /\ \Omega = \omega \times \left]-1, +1\right[$

$\chi^\varepsilon(\Gamma_-^\varepsilon) = \Gamma_- = \omega \times \{-1\}$

$\chi^\varepsilon(\Gamma_+^\varepsilon) = \Gamma_+ = \omega \times \{+1\}$

$\chi^\varepsilon(\Gamma_0^\varepsilon) = \Gamma_0 = \partial\omega \times [-1, +1]$

L'application inverse de χ^ε est une dilatation de Ω^ε (Fig 2-2).

Mise à l'échelle des déplacements :

$$\left\{\begin{array}{ll} u_\alpha^\varepsilon \circ \chi^\varepsilon = \varepsilon^2 u_\alpha(\varepsilon), & u_3^\varepsilon \circ \chi^\varepsilon = \varepsilon^1 u_3(\varepsilon) \\ v_\alpha^\varepsilon \circ \chi^\varepsilon = \varepsilon^2 v_\alpha(\varepsilon), & v_3^\varepsilon \circ \chi^\varepsilon = \varepsilon^1 v_3(\varepsilon) \end{array}\right. \tag{2.11}$$

La condition de contact mise à l'échelle est définie, pour un déplacement $v^\varepsilon \in \vec{V}(\Omega^\varepsilon)$ par :

$$\bar{v}_3 \leq d \tag{2.12}$$

On note ainsi :

$$\begin{array}{rcl} V(\Omega) & = & \left\{v \in H^1(\Omega) / v = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0\right\} \\ \overrightarrow{V}(\Omega) & = & V(\Omega) \times V(\Omega) \times V(\Omega) \\ K(\Omega) & = & \{v \in V(\Omega) / \bar{v}_3 \leq d \quad \text{sur} \quad \Gamma_+\} \\ \overrightarrow{K}(\Omega) & = & V(\Omega) \times V(\Omega) \times K(\Omega) \end{array}$$

Mise à l'échelle des forces :

$$\left\{\begin{array}{ll} f_\alpha^\varepsilon \circ \chi^\varepsilon = \varepsilon^2 f_\alpha , & f_3^\varepsilon \circ \chi^\varepsilon = \varepsilon^3 f_3 \\ g_\alpha^\varepsilon \circ \chi^\varepsilon = \varepsilon^3 g_\alpha , & g_3^\varepsilon \circ \chi^\varepsilon = \varepsilon^4 g_3 \end{array}\right. \tag{2.13}$$

Mise à l'échelle des opérateurs différentiels :

$$\partial_\alpha^\varepsilon = \partial_\alpha, \partial_3^\varepsilon = \varepsilon^{-1}\partial_3 \tag{2.14}$$

Il vient de (2.10),(2.11),(2.13) et (2.14) que :

$$L^{\varepsilon}(v^{\varepsilon}) = \varepsilon^{5} \quad L(v) \text{ où } L(v) = \int_{\Omega} f_i v_i dx + \int_{\Gamma_-} g_i \underline{v}_i d\Gamma \tag{2.15}$$

$$e^{\varepsilon}_{\alpha\beta}(u^{\varepsilon}) = \varepsilon^{2} e_{\alpha\beta}(u(\varepsilon)), \quad e^{\varepsilon}_{\alpha 3}(u^{\varepsilon}) = \varepsilon e_{\alpha 3}(u(\varepsilon)), \quad e^{\varepsilon}_{33}(u^{\varepsilon}) = e_{33}(u(\varepsilon)) \tag{2.16}$$

D'où, après insertion de (2.15) et (2.16) dans (2.5), on trouve que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma^{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \sigma^{\varepsilon}_{\alpha\beta}(u^{\varepsilon}) = \varepsilon^{2}\left[\lambda e_{\gamma\gamma}(u(\varepsilon))\delta_{\alpha\beta} + 2\mu e_{\alpha\beta}(u(\varepsilon))\right] + \lambda e_{33}(u(\varepsilon)) \\ \sigma^{\varepsilon}_{\alpha 3} = \sigma^{\varepsilon}_{\alpha 3}(u^{\varepsilon}) = \varepsilon 2\mu e_{\alpha 3}(u(\varepsilon)) \\ \sigma^{\varepsilon}_{33} = \sigma^{\varepsilon}_{33}(u^{\varepsilon}) = (\lambda + 2\mu) e_{33}(u(\varepsilon)) + \varepsilon^{2} \lambda e_{\gamma\gamma}(u(\varepsilon)) \end{array} \right. \tag{2.17}$$

Mise à l'échelle du problème variationnel

On introduit (2.10) et (2.17) dans (2.8), Il vient que :

$$\begin{aligned} a^{\varepsilon}(u^{\varepsilon}, v^{\varepsilon}) = & \int_{\Omega^{\varepsilon}} \sigma^{\varepsilon}_{\alpha\beta}(u^{\varepsilon}) \partial^{\varepsilon}_{\beta} v^{\varepsilon}_{\alpha} dx^{\varepsilon} + \int_{\Omega^{\varepsilon}} \sigma^{\varepsilon}_{\alpha 3}(u^{\varepsilon}) \partial^{\varepsilon}_{3} v^{\varepsilon}_{\alpha} dx^{\varepsilon} + \int_{\Omega^{\varepsilon}} \sigma^{\varepsilon}_{3\alpha}(u^{\varepsilon}) \partial^{\varepsilon}_{\alpha} v^{\varepsilon}_{3} dx^{\varepsilon} \\ & + \int_{\Omega^{\varepsilon}} \sigma^{\varepsilon}_{33}(u^{\varepsilon}) \partial^{\varepsilon}_{3} v^{\varepsilon}_{3} dx^{\varepsilon} \\ & = \varepsilon^{3} \int_{\Omega} \sigma^{\varepsilon}_{\alpha\beta}(u^{\varepsilon}) \partial_{\beta} v_{\alpha} dx + \varepsilon^{2} \int_{\Omega} \sigma^{\varepsilon}_{\alpha 3}(u^{\varepsilon}) \partial_{3} v_{\alpha} dx \\ & + \varepsilon^{2} \int_{\Omega} \sigma^{\varepsilon}_{3\alpha}(u^{\varepsilon}) \partial_{\alpha} v_{3} dx + \varepsilon \int_{\Omega} \sigma^{\varepsilon}_{33}(u^{\varepsilon}) \partial_{3} v_{3} dx \end{aligned} \tag{2.18}$$

En divisant (2.18) par ε^{5} et en posant :

$$\sigma_{\alpha\beta}(\varepsilon) = \varepsilon^{-2} \sigma^{\varepsilon}_{\alpha\beta}(u^{\varepsilon}), \ \sigma_{\alpha 3}(\varepsilon) = \varepsilon^{-3} \sigma^{\varepsilon}_{\alpha 3}(u^{\varepsilon}), \ \sigma_{33}(\varepsilon) = \varepsilon^{-4} \sigma^{\varepsilon}_{33}(u^{\varepsilon}) \tag{2.19}$$

On trouve, avec (2.17) que :

$$a^{\varepsilon}(u(\varepsilon), v) = \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\varepsilon) \partial_j v_i dx \tag{2.20}$$

tels que :

$$\left\{\begin{array}{l}\sigma_{\alpha\beta}(\varepsilon)=\lambda e_{\gamma\gamma}(u\left(\varepsilon\right))\delta_{\alpha\beta}+2\mu e_{\alpha\beta}(u\left(\varepsilon\right))+\varepsilon^{-2}\lambda e_{33}(u\left(\varepsilon\right))\delta_{\alpha\beta}\\ \sigma_{\alpha3}(\varepsilon)=\varepsilon^{-2}2\mu e_{\alpha3}(u\left(\varepsilon\right))\\ \sigma_{33}(\varepsilon)=\varepsilon^{-4}\ \left(\lambda+2\mu\right)e_{33}(u\left(\varepsilon\right))+\varepsilon^{-2}\lambda e_{\gamma\gamma}(u\left(\varepsilon\right))\end{array}\right. \tag{2.21}$$

Théorème 18 *Le problème variationnel* $P^{\varepsilon}.V$ *est équivalent au problème* $P(\varepsilon).V$ *:*

$$\text{Trouver}\quad u(\varepsilon)\in\overrightarrow{K}(\Omega)\quad\text{tel que}$$

$$a^{\varepsilon}\left(u(\varepsilon),v\right)=\ L\left(v\right)+\left\langle\sigma_{33}\left(\varepsilon\right),\bar{v}_3\right\rangle,\forall\ v\in\ \overrightarrow{V}(\Omega) \tag{2.22}$$

$$\left\langle\sigma_{33}\left(\varepsilon\right),\bar{v}_3-\bar{u}_3\left(\varepsilon\right)\right\rangle\geq0,\ \forall\ v_3\in K\left(\Omega\right) \tag{2.23}$$

tels que :

$$a^{\varepsilon}\left(u(\varepsilon),v\right)=\int_{\Omega}\ \sigma_{ij}(\varepsilon)\partial_j v_i dx$$
$$L\left(v\right)=\ \int_{\Omega}f_i v_i dx+\int_{\Gamma_-}\ g_i\underline{v_i}d\Gamma$$

Preuve. Il suffit d'introduire (2.10), (2.15), (2.19) et (2.21) dans (2.6) et (2.7) pour avoir $P(\varepsilon).V$. La réciproque est obtenue en faisant une mise à l'échelle inverse "de-scaling" . ■

Problème bidimensionnel

On postule :

$$u\left(\varepsilon\right)=u^0+\varepsilon u^1+\varepsilon^2u^2+....avec\ u^q\in\ \overrightarrow{K}(\Omega),\quad q\in\{0,1,2,...\} \tag{2.24}$$

Donc le développement du tenseur de déformation devient :

$$e_{ij}(\varepsilon) = e_{ij}\left(u^0\right) + \varepsilon e_{ij}\left(u^1\right) + \varepsilon^2 e_{ij}\left(u^2\right) + ... \tag{2.25}$$

Le système (2.21) et le développement (2.25), nous permettent d'écrire :

$$\begin{cases} \sigma_{\alpha\beta}(\varepsilon) = \varepsilon^{-2}\sigma_{\alpha\beta}^{-2} + \varepsilon^{-1}\sigma_{\alpha\beta}^{-1} + \varepsilon^{0}\sigma_{\alpha\beta}^{0} + ... \\ \sigma_{\alpha 3}(\varepsilon) = \varepsilon^{-2}\sigma_{\alpha 3}^{-2} + \varepsilon^{-1}\sigma_{\alpha 3}^{-1} + \varepsilon^{0}\sigma_{\alpha 3}^{0} + ... \\ \sigma_{33}(\varepsilon) = \varepsilon^{-4}\sigma_{33}^{-4} + \varepsilon^{-3}\sigma_{33}^{-3} + \varepsilon^{-2}\sigma_{33}^{-2} + \varepsilon^{-1}\sigma_{33}^{-1} + \varepsilon^{0}\sigma_{33}^{0} + ... \end{cases} \tag{2.26}$$

Après insertion de (2.25) dans (2.21), on trouve :

$$\begin{cases} \sigma_{\alpha\beta}^{-2} = \lambda\partial_3 u_3^0\delta_{\alpha\beta}; \quad \sigma_{\alpha\beta}^{-1} = \lambda\partial_3 u_3^1\delta_{\alpha\beta}; \\ \sigma_{\alpha\beta}^{0} = \lambda\partial_\gamma u_\gamma^0\delta_{\alpha\beta} + \mu\left(\partial_\alpha u_\beta^0 + \partial_\beta u_\alpha^0\right) + \lambda\partial_3 u_3^2\delta_{\alpha\beta} \\ \sigma_{\alpha 3}^{-2} = \mu\left(\partial_\alpha u_3^0 + \partial_3 u_\alpha^0\right) \ ; \quad \sigma_{\alpha 3}^{-1} = \mu\left(\partial_\alpha u_3^1 + \partial_3 u_\alpha^1\right); \quad \sigma_{\alpha 3}^{0} = \mu\left(\partial_\alpha u_3^2 + \partial_3 u_\alpha^2\right) \\ \sigma_{33}^{-4} = (\lambda + 2\mu)\,\partial_3 u_3^0 \ ; \quad \sigma_{33}^{-3} = (\lambda + 2\mu)\,\partial_3 u_3^1; \ \sigma_{33}^{-2} = (\lambda + 2\mu)\,\partial_3 u_3^2 + \lambda\partial_\gamma u_\gamma^0; \\ \sigma_{33}^{-1} = (\lambda + 2\mu)\,\partial_3 u_3^3 + \lambda\partial_\gamma u_\gamma^1; \ \sigma_{33}^{0} = (\lambda + 2\mu)\,\partial_3 u_3^4 + \lambda\partial_\gamma u_\gamma^2 \end{cases} \tag{2.27}$$

On introduit (2.26) dans (2.22). Après identification des coefficients de ε^q, $q = -4, -3, -2, -1, 0$. On obtient :

A l'ordre ε^{-4} :

$$\int_\Omega \sigma_{33}^{-4}\partial_3 v_3 dx = \left\langle \sigma_{33}^{-4}, \bar{v}_3 \right\rangle, \forall v_3 \in V(\Omega) \tag{2.28}$$

A l'ordre ε^{-3} :

$$\int_\Omega \sigma_{33}^{-3}\partial_3 v_3 dx = \left\langle \sigma_{33}^{-3}, \bar{v}_3 \right\rangle, \ \forall v_3 \in V(\Omega) \tag{2.29}$$

A l'ordre ε^{-2} :

$$\int_\Omega \sigma_{33}^{-2}\partial_3 v_3 dx + \int_\Omega \sigma_{\alpha\beta}^{-2}\partial_\beta v_\alpha dx + \int_\Omega \sigma_{\alpha 3}^{-2}\left(\partial_\alpha v_3 + \partial_3 v_\alpha\right) = \left\langle \sigma_{33}^{-2}, \bar{v}_3 \right\rangle, \forall v \in V(\Omega) \tag{2.30}$$

A l'ordre ε^{-1} :

$$\int_{\Omega} \sigma_{33}^{-1} \partial_3 v_3 dx + \int_{\Omega} \sigma_{\alpha\beta}^{-1} \partial_\beta v_\alpha dx + \int_{\Omega} \sigma_{\alpha 3}^{-1} \left(\partial_\alpha v_3 + \partial_3 v_\alpha \right) = \left\langle \sigma_{33}^{-1}, \bar{v}_3 \right\rangle, \forall v \in V(\Omega) \quad (2.31)$$

A l'ordre ε^{0} :

$$\int_{\Omega} \sigma_{33}^{0} \partial_3 v_3 dx + \int_{\Omega} \sigma_{\alpha\beta}^{0} \partial_\beta v_\alpha dx + \int_{\Omega} \sigma_{\alpha 3}^{0} \left(\partial_\alpha v_3 + \partial_3 v_\alpha \right) = L(v) + \left\langle \sigma_{33}^{0}, \bar{v}_3 \right\rangle, \forall v \in V(\Omega) \quad (2.32)$$

Les intégrales précédentes sont bien définies. En effet, tout les coefficients $\sigma_{\alpha\beta}^{-2}, \sigma_{\alpha\beta}^{-1}, \ldots$, trouvés dans (2.27), appartiennent à $L^2(\Omega)$.

Lemme 19 *Si une fonction* $\phi \in L^2(\Omega)$, *vérifiant* $\int_{\Omega} \phi \partial_3 \psi dx = 0$, *pour tout* $\psi \in \overrightarrow{V}(\Omega)$ *tel que* $\overline{\psi} = 0$ *sur* Γ_+. *Alors,* $\phi = 0$ *p.p sur* Ω.

Preuve. Soit $\varphi \in D(\Omega)$,on prend $\psi = -\int_{x_3}^{1} \varphi(x_1, x_2, t)\, dt$ qui appartient à $\overrightarrow{V}(\Omega)$, vérifie $\overline{\psi} = 0$ et $\partial_3 \psi = \varphi$.

Donc $\int_{\Omega} \phi \partial_3 \psi dx = 0$ implique que $\int_{\Omega} \phi\ \varphi dx = 0$ ce qui entraine $\varphi = 0$ p.p sur Ω. ■

On introduit l'espace des déplacements de type Kirchhoff-Love V_{KL} tel que :

$$V_{KL}(\Omega) = \left\{ v = (v_i) \in \overrightarrow{V}(\Omega) \ / \ \partial_i v_3 + \partial_3 v_i = 0 \right\}$$

Corollaire 20 *On peut définir l'espace* V_{KL} *par :*

$$V_{KL}(\Omega) = \left\{ \begin{array}{c} v = (v_i) \in \left(H^1(\Omega) \right)^3 \ / \ v_\alpha = \eta_\alpha - x_3 \partial_\alpha \eta_3, v_3 = \eta_3 \ \textit{tels que} \\ \eta_\alpha \in H_0^1(\omega), \eta_3 \in H_0^2(\omega) \end{array} \right\}$$

De plus cet espace est isomorphe à l'espace :

$$V(\omega) = H_0^1(\omega) \times H_0^1(\omega) \times H_0^2(\omega).$$

Preuve. Soit $v \in \mathrm{V}_{KL}(\Omega)$ alors $\partial_3 v_3 = 0$ dans Ω et $v_3 = 0$ sur Γ_0 donc v_3 est indépendent de x_3. Par conséquent, il existe $\eta_3 \in H_0^1(\omega)$ telle que $v_3 = \eta_3$.

L'équation $\partial_\alpha v_3 + \partial_3 v_\alpha = 0$ implique que $\partial_{33} v_\alpha = -\partial_\alpha(\partial_3 v_3) = 0$ (au sens des distributions). D'où , avec $v_\alpha = 0$ sur Γ_0, il existe η_α, $\eta_\alpha^1 \in H_0^1(\omega)$ telles que $v_\alpha = \eta_\alpha + x_3 \eta_\alpha^1$. On a $\partial_\alpha v_3 + \partial_3 v_\alpha = \partial_\alpha \eta_3 + \eta_\alpha^1 = 0$, d'où $\eta_3 \in H_0^2(\omega)$. Inversement, si $v_\alpha = \eta_\alpha - x_3 \partial_\alpha \eta_3, v_3 = \eta_3$ avec $(\eta_\alpha, \eta_3) \in H_0^1(\omega) \times H_0^2(\omega)$, il est claire que $v \in \overrightarrow{V}(\Omega)$ et $\partial_i v_3 + \partial_3 v_i = 0$. Pour avoir l'isomorphisme, il suffit de montrer le homomorphisme, ce qui est facile à établir. ■

Corollaire 21 *Si $u(\varepsilon)$ est solution du problème variationnel $P(\varepsilon).V$ et définie par (2.24), alors u^0 est solution du problème $P_{KL}^0.V$:*

$$\begin{aligned}
\textit{Trouver } u^0 &\in V_{KL}(\Omega) \cap \overrightarrow{K}(\Omega) \quad \textit{tel que} \\
\int_\Omega \sigma_{\alpha\beta}^0 \partial_\beta v_\alpha dx &= L(v) + \left\langle \sigma_{33}^0, \bar{v}_3 \right\rangle, \ \forall\, v \in V_{KL}(\Omega) \qquad (2.33) \\
\left\langle \sigma_{33}^0, \bar{v}_3 - \bar{u}_3^0 \right\rangle &\geq 0, \ \forall\, v_3 \in K(\Omega) \qquad (2.34)
\end{aligned}$$

tel que :

$$\sigma_{\alpha\beta}^0 = \lambda^* e_{\gamma\gamma}(u^0)\delta_{\alpha\beta} + 2\mu e_{\alpha\beta}(u^0) \quad \textit{avec} \quad \lambda^* = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \qquad (2.35)$$

Preuve. En prenant $\bar{v}_3 = 0$ dans (2.28), on trouve :

$$\int_\Omega \sigma_{33}^{-4} \partial_3 v_3 dx = 0, \ \forall v_3 \in V(\Omega)$$

par le moyen du lemme 19, $\sigma_{33}^{-4} = 0$, ce qui donne :

$$\partial_3 u_3^0 = 0 \qquad (2.36)$$

De (2.29), on a $\int_\Omega \sigma_{33}^{-3} \partial_3 v_3 dx = 0$, pour $v_3 \in V(\Omega)$ et $\bar{v}_3 = 0$, ce qui entraine $\sigma_{33}^{-3} = 0$,

d'où :

$$\partial_3 u_3^1 = 0 \tag{2.37}$$

De (2.36) et (2.37), on déduit que :

$$\sigma_{\alpha\beta}^{-2} = 0 \ et \quad \sigma_{\alpha\beta}^{-1} = 0 \tag{2.38}$$

Dans (2.30), on pose $v_3 = 0$, on obtient $\int_\Omega \sigma_{\alpha 3}^{-2} \partial_3 v_\alpha = 0, \forall\ v_\alpha \in V(\Omega)$. Ce qui reste vraie pour les éléments qui vérifient $v = 0$ sur Γ_+, donc on peut appliquer le lemme 19. D'où,

$$\sigma_{\alpha 3}^{-2} = 0 \ et \ \partial_\alpha u_3^0 + \partial_3 u_\alpha^0 = 0 \tag{2.39}$$

Toujours, dans (2.30) on pose $v_\alpha = 0$ puis $\bar{v}_3 = 0$, on trouve que :

$$\sigma_{33}^{-2} = 0 \tag{2.40}$$

En utilisant le même procédé, dans (2.31) on trouve que $\sigma_{\alpha 3}^{-1} = 0$.

On remarque de (2.36) et (2.39) que u^0 est de type Kirchhoff-Love. Donc l'espace des déplacements admissibles avec contact est $V_{KL}(\Omega) \cap \overrightarrow{K}(\Omega)$. Ce qui réduit (2.32) à :

$$\int_\Omega \sigma_{\alpha\beta}^0 \partial_\beta v_\alpha dx = L(v) + \left\langle \sigma_{33}^0, \bar{v}_3 \right\rangle, \forall v \in V_{KL}(\Omega)$$

avec

$$\sigma_{\alpha\beta}^0 = \lambda \partial_\gamma u_\gamma^0 \delta_{\alpha\beta} + \mu \left(\partial_\alpha u_\beta^0 + \partial_\beta u_\alpha^0 \right) + \lambda \partial_3 u_3^2 \delta_{\alpha\beta} \tag{2.41}$$

d'où (2.33). Puis on tire $\partial_3 u_3^2$ de l'équation $\sigma_{33}^{-2} = 0$, et on l'introduit dans (2.41), on trouve (2.35).

Aprés introduction de (2.24) dans (2.23) et de l'écriture de $\sigma_{33}(\varepsilon)$; les produits qui en dérivent ont un sens. Ceci est du à la condition dans (2.24), le premier membre de (2.23) devient un polynôme en $\varepsilon > 0$, positif, donc sa constante à l'origine est positive.

D'où (2.34). ■

On note $\overrightarrow{K}(\omega) = H_0^1(\omega) \times H_0^1(\omega) \times K(\omega)$ avec $K(\omega) = \left\{v \in H_0^2(\omega) / v \leq d\right\}.$

Remarque 22 *D'après le corollaire 20, chercher* u^0 *dans* $V_{KL}(\Omega) \cap \overrightarrow{K}(\Omega)$ *revient à chercher* (ξ_1, ξ_2, ξ_3) *dans* $\overrightarrow{K}(\omega)$*, d'où on peut ramener notre problème tridimensionnel* $P_{KL}^0.V$ *à un problème bidimensionnel.*

Théorème 23 *Soit* u^0 *tel que* $u_\alpha^0 = \xi_\alpha - x_3\partial_\alpha\xi_3$, $u_3^0 = \xi_3$, ξ_α, ξ_3 *sont assez réguliers. Si* u^0 *est solution du problème* $P_{KL}^0.V$ *alors* ξ_α, ξ_3 *vérifient le problème bidimensionnel* $P^0.B$ *suivant :*

$$\begin{aligned} \textit{Trouver } \xi_\alpha &\in H_0^1(\omega), \xi_3 \in K(\omega) \quad \textit{tels que} \\ k\Delta^2\xi_3 &= h_3^0 + h_1^1 + h_2^1 + \sigma_{33}^0 && (2.42) \\ -\partial_\beta n_{\alpha\beta} &= h_\alpha^0 && (2.43) \\ \left\langle \sigma_{33}^0, d - \xi_3 \right\rangle &= 0, \quad \sigma_{33}^0 \leq 0 \ \textit{dans } H^{-2}(\omega) && (2.44) \end{aligned}$$

où :

$$k = \frac{8}{3}\mu\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}, \ h_i^0 = \int_{-1}^{+1} f_i dx_3 + g_i^-, \ h_i^1 = \int_{-1}^{+1} x_3\partial_i f_i dx_3 - \partial_i g_i^-, g_i^- = g_i(x_1, x_2, -1) \tag{2.45}$$

$$n_{\alpha\beta} = \frac{4\lambda\mu}{\lambda+2\mu} e_{\gamma\gamma}(\xi)\,\delta_{\alpha\beta} + 4\mu e_{\alpha\beta}(\xi) \tag{2.46}$$

Preuve. Soit u^0 solution du problème $\mathrm{P}_{KL}^0.\mathrm{V}$ alors ξ_α, ξ_3 vérifient $\xi_\alpha \in H_0^1(\omega)$, $\xi_3 \in H_0^2(\omega)$, $\xi_3 \leq d$.

On introduit u^0 dans l'expression de $e_{\alpha\beta}(v)$,on obtient :

$$e_{\alpha\beta}\left(u^0\right) = e_{\alpha\beta}(\xi) - x_3\partial_{\alpha\beta}\xi_3 \tag{2.47}$$

On substitut (2.47) dans (2.35), on trouve :

$$\sigma^0_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\ n_{\alpha\beta} + \frac{3}{2} x_3 m_{\alpha\beta} \tag{2.48}$$

avec :

$$\begin{aligned} n_{\alpha\beta} &= \frac{4\lambda\mu}{\lambda+2\mu} e_{\gamma\gamma}(\xi)\,\delta_{\alpha\beta} + 4\mu e_{\alpha\beta}(\xi) \\ m_{\alpha\beta} &= -\frac{4}{3}\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+2\mu}\Delta\xi_3\delta_{\alpha\beta} + \mu\partial_{\alpha\beta}\xi_3\right) \end{aligned} \tag{2.49}$$

On prend $v = (-x_3\partial_1\eta_3, -x_3\partial_2\eta_3, \eta_3)$ donc, le premier membre de (2.33) devient :

$$\begin{aligned} \int_\Omega \sigma^0_{\alpha\beta}\partial_\beta v_\alpha dx &= \int_\Omega -\frac{1}{2}\ n_{\alpha\beta} x_3 \partial_{\alpha\beta}\eta_3 dx + \int_\Omega -\frac{3}{2} x_3^2 m_{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta}\eta_3 dx \\ &= \int_\Omega x_3^2 (\frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}\Delta\xi_3\Delta\eta_3 + 2\mu\partial_{\alpha\beta}\xi_3\partial_{\alpha\beta}\eta_3) dx \\ &= \frac{4}{3}\int_\omega (\frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}\Delta\xi_3\Delta\eta_3 + 2\mu\partial_{\alpha\beta}\xi_3\partial_{\alpha\beta}\eta_3) dx' \end{aligned}$$

On a pour $\xi_3, \eta_3 \in D(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \int_\omega \Delta\xi_3\Delta\eta_3 dx' &= \int_\omega \Delta^2\xi_3\eta_3 dx' \\ \int_\omega \partial_{\alpha\beta}\xi_3\partial_{\alpha\beta}\eta_3 dx' &= \int_\omega \Delta^2\xi_3\eta_3 dx' \end{aligned}$$

ce qui, par densité, restent vraie pour les éléments de $H^2_0(\omega)$. D'où,

$$\int_\Omega \sigma^0_{\alpha\beta}\partial_\beta v_\alpha dx = \frac{8}{3}\mu\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\ \int_\omega \Delta^2\xi_3\eta_3 dx' \tag{2.50}$$

D'autre part, le deuxième membre de (2.33) devient :

$$\begin{aligned}
L(v) + \langle \sigma_{33}^0, \bar{v}_3 \rangle &= \int_\Omega f_\alpha v_\alpha dx + \int_\Omega f_3 v_3 dx + \int_{\Gamma_-} g_\alpha^- \underline{v}_\alpha d\Gamma + \int_{\Gamma_-} g_3^- \underline{v}_3 d\Gamma \\
&+ \int_{\Gamma_+} \sigma_{33}^0 \bar{v}_3 d\Gamma \\
&= \int_\omega \left\{ \int_{-1}^{+1} x_3 \partial_\alpha f_\alpha dx_3 - \partial_\alpha g_\alpha^- \right\} \eta_3 dx' \\
&+ \int_\omega \left\{ \int_{-1}^{+1} f_3 dx_3 + g_3^- \right\} \eta_3 dx' + \int_\omega \sigma_{33}^0 \eta_3 dx' \\
&= \int_\omega \left(h_3^0 + h_\alpha^1 + \sigma_{33}^0 \right) \eta_3 dx' \qquad (2.51)
\end{aligned}$$

D'où, de (2.50) et (2.51) on trouve (2.42), au sens des disributions. On prend $\bar{v}_3 = d$ puis $\bar{v}_3 = 2u_3^0 - d$ dans (2.34) on trouve $\langle \sigma_{33}^0, d - \xi_3 \rangle = 0$ d'où $\langle \sigma_{33}^0, \eta_3 - d \rangle \geq 0$, $\forall \eta_3 \in K(\omega)$, ce qui entraine $\sigma_{33}^0 \leq 0$ dans $H^{-2}(\omega)$. D'où (2.44).

On prend maitenant $v = (\eta_1, \eta_2, 0)$ toujours dans (2.33), on obtient :

$$\int_\Omega \sigma_{\alpha\beta}^0 \partial_\beta \eta_\alpha dx = \int_\Omega f_\alpha \eta_\alpha dx + \int_{\Gamma_-} g_\alpha^- \eta_\alpha d\Gamma, \forall \eta_\alpha \in H_0^1(\omega)$$

ce qui donne :

$$\int_\omega n_{\alpha\beta} \partial_\beta \eta_\alpha dx' = \int_\omega h_\alpha^0 \eta_\alpha dx'$$

d'où :

$$-\int_\omega \partial_\beta n_{\alpha\beta} \eta_\alpha dx' = \int_\omega h_\alpha^0 \eta_\alpha dx'$$

par conséquent, on trouve (2.43) au sens des distributions. ■

2.1.4 Etude de la convergence

Dans cette partie, on va étudier la convergence de la suite $u(\varepsilon)$ solution du problème variationnel $\mathrm{P}(\varepsilon)$.V et on va prouver que sa limite est solution d'un problème bidimensionnel, ce qui valide les résultats précédents.

Etant donné $u(\varepsilon)$ solution du problème P(ε).V.

On définit le tenseur $K(\varepsilon, v)$ par :

$$K_{\alpha\beta}(\varepsilon, v) = e_{\alpha\beta}(v), K_{\alpha 3}(\varepsilon, v) = \varepsilon^{-1} e_{\alpha 3}(v), K_{33}(\varepsilon, v) = \varepsilon^{-2} e_{33}(v) \tag{2.52}$$

On introduit (2.52), avec $v = u$ dans (2.21), on trouve :

$$\begin{cases} \sigma_{\alpha\beta}(\varepsilon) = \lambda K_{pp}(\varepsilon, u)\delta_{\alpha\beta} + 2\mu K_{\alpha\beta}(\varepsilon, u) \\ \sigma_{\alpha 3}(\varepsilon) = \varepsilon^{-1} 2\mu K_{\alpha 3}(\varepsilon, u) \\ \sigma_{33}(\varepsilon) = \varepsilon^{-2}(\lambda K_{pp}(\varepsilon, u) + 2\mu K_{33}(\varepsilon, u)) \end{cases} \tag{2.53}$$

Donc, en utilisant (2.53) dans la forme bilinéaire (2.22), qui devient :

$$a^{\varepsilon}(u(\varepsilon), v) = \int_{\Omega} [\lambda K_{ii}(\varepsilon, u) K_{jj}(\varepsilon, v) + 2\mu K_{ij}(\varepsilon, u) K_{ij}(\varepsilon, v)]\, dx$$

L'espace $\mathrm{L}_s^2(\Omega)$ muni du produit scalaire $\langle \sigma, \tau \rangle = \int_{\Omega} \sigma_{ij}\tau_{ij} dx$ est un espace de Hilbert réel. On définit sur $\mathrm{L}_s^2(\Omega)$ la forme bilinéaire $A(.,.)$ par :

$$A(\sigma, \tau) = \int_{\Omega} (\lambda \sigma_{ii}\tau_{jj} + 2\mu\sigma_{ij}\tau_{ij})\, dx.$$

Corollaire 24 *La norme associée à A, i.e, $\|\sigma\|_A = A(\sigma, \sigma)^{1/2}$ définit une norme sur $L_s^2(\Omega)$ équivalente à la norme euclidienne : $\|\sigma\|_{0,\Omega} = \langle \sigma, \sigma \rangle^{1/2}$.*

Preuve. On a : $\|\sigma\|_A^2 = \int_{\Omega} (\lambda\sigma_{ii}\sigma_{jj} + 2\mu\sigma_{ij}\sigma_{ij})\, dx$.

Puisque $\sigma_{ii}\sigma_{jj} \geq 0$ il vient que $\|\sigma\|_A^2 \geq 2\mu \|\sigma\|_{0,\Omega}^2$ d'où $\|\sigma\|_A \geq (2\mu)^{1/2} \|\sigma\|_{0,\Omega}$.

D'autre part, on a $\|\sigma\|_A^2 \leq (\lambda + 2\mu) \int_{\Omega} (\sigma_{ii}\sigma_{jj} + \sigma_{ij}\sigma_{ij})\, dx$. Du fait que $\sigma_{ii}\sigma_{jj} \leq 3\sigma_{ii}\sigma_{ii}$ alors $\|\sigma\|_A^2 \leq 4(\lambda + 2\mu) \|\sigma\|_{0,\Omega}^2$ par conséquent $\|\sigma\|_A \leq 2(\lambda + 2\mu)^{1/2} \|\sigma\|_{0,\Omega}$. ■

Corollaire 25 *Soit $u(\varepsilon)$ solution du problème $P(\varepsilon).V$. Si $0 < \varepsilon \leq 1$, alors les suites $\{K(\varepsilon)\}$ et $\{u(\varepsilon)\}$ sont bornées ($K(\varepsilon) = K(\varepsilon, u)$), respectivement dans $L_s^2(\Omega)$ et*

$V(\Omega)$. On en déduit qu'il existe des sous-suites toujours notées $\{K(\varepsilon)\}$ et $\{u(\varepsilon)\}$ et des éléments $K(0) \in L_s^2(\Omega)$ et $u(0) \in V(\Omega)$ tels que :

$$K(\varepsilon) \rightharpoonup K(0) \quad et \ u(\varepsilon) \rightharpoonup u(0).$$

Preuve. En prenant $v_3 = 0$ dans (2.23), ce qui donne $\langle \sigma_{33}(\varepsilon), \bar{u}_3(\varepsilon) \rangle \leq 0$, d'où il vient de (2.22) que :

$$a^\varepsilon(u(\varepsilon), u(\varepsilon)) \leq L(u(\varepsilon))$$

donc :

$$\|K(\varepsilon)\|_A^2 \leq L(u(\varepsilon)).$$

Et puisque :

$$L(u(\varepsilon)) \leq C \ \|u(\varepsilon)\|_{1,\Omega}$$

alors :

$$\|K(\varepsilon)\|_A^2 \leq C \ \|u(\varepsilon)\|_{1,\Omega} \tag{2.54}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \|K(\varepsilon)\|_{0,\Omega}^2 &= \sum_{i,j=1}^{3} \|K_{ij}(\varepsilon)\|_{0,\Omega}^2 \\ &= \|e_{\alpha\beta}(\varepsilon)\|_{0,\Omega}^2 + \frac{2}{\varepsilon}\|e_{\alpha 3}(\varepsilon)\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}\|e_{33}(\varepsilon)\|_{0,\Omega}^2 \\ &\geq \|e(\varepsilon)\|_{0,\Omega}^2 \end{aligned}$$

d'où :

$$\|K(\varepsilon)\|_{0,\Omega}^2 \ \geq \ \|e(\varepsilon)\|_{0,\Omega}^2 \tag{2.55}$$

A l'aide de l'inégalité de Korn, on trouve :

$$\|e(\varepsilon)\|_{0,\Omega}^2 \geq C' \|u(\varepsilon)\|_{1,\Omega}^2 \tag{2.56}$$

Du corollaire 24, on a : $\|K(\varepsilon)\|_A^2 \geq 2\mu \|K(\varepsilon)\|_{0,\Omega}^2$, ce qui donne avec (2.54) :

$$\|K(\varepsilon)\|_{0,\Omega}^2 \leq C" \|u(\varepsilon)\|_{1,\Omega} \tag{2.57}$$

De (2.55)-(2.57), on déduit :

$$C' \|u(\varepsilon)\|_{1,\Omega}^2 \leq \|e(\varepsilon)\|_{0,\Omega}^2 \leq \|K(\varepsilon)\|_{0,\Omega}^2 \leq C" \|u(\varepsilon)\|_{1,\Omega}$$

D'où, il existe des constantes C_1 et C_2 indépendentes de ε telles que :

$$\|u(\varepsilon)\|_{1,\Omega} \leq C_1 \quad et \quad \|K(\varepsilon)\|_{0,\Omega} \leq C_2$$

On déduit que les suites $\{K(\varepsilon)\}$ et $\{u(\varepsilon)\}$ sont bornées, respectivement dans $\mathrm{L}_s^2(\Omega)$ et $\overrightarrow{V}(\Omega)$. Ce qui nous permet d'en extraire des sous suites toujours notées $\{K(\varepsilon)\}$ et $\{u(\varepsilon)\}$, qui admettent des limites faibles respectivement dans $\mathrm{L}_s^2(\Omega)$ et $\overrightarrow{V}(\Omega)$ qu'on note $K(0)$ et $u(0)$ respectivement. ■

Corollaire 26 *Les limites faibles $u(0), K(0)$ vérifient :*

$$u(0) \in V_{KL}(\Omega) \cap \overrightarrow{K}(\Omega) \tag{2.58}$$

$$K_{\alpha\beta}(0) = e_{\alpha\beta}(u(0)), K_{\alpha 3}(0) = 0, K_{33}(0) = \frac{-\lambda}{\lambda + 2\mu} e_{\alpha\alpha}(u(0)) \tag{2.59}$$

Preuve. On déduit de (2.52) que $\|e_{\alpha 3}(u(\varepsilon))\|_{0,\Omega} \leq \varepsilon C_2$ et $\|e_{33}(u(\varepsilon))\|_{0,\Omega} \leq \varepsilon^2 C_2$. Puisque la norme est s.c.i, on a :

$$\begin{aligned} \|e_{\alpha 3}(u(0))\|_{0,\Omega} &\leq \liminf_{\varepsilon \to 0} \|e_{\alpha 3}(u(\varepsilon))\|_{0,\Omega} = 0 \\ \|e_{33}(u(0))\|_{0,\Omega} &\leq \liminf_{\varepsilon \to 0} \|e_{33}(u(\varepsilon))\|_{0,\Omega} = 0 \end{aligned}$$

d'où $e_{i3}(u(0)) = 0$, puisque $\mathrm{K}(\Omega)$ est convexe donc faiblement fermé d'où $u(0) \in \mathrm{K}(\Omega)$,par conséquent (2.58).

On a $u(\varepsilon) \rightharpoonup u(0)$ dans $(H^1(\Omega))^3$, donc $e_{\alpha\beta}(u(\varepsilon)) \rightharpoonup e_{\alpha\beta}(u(0))$ dans $L^2(\Omega)$. D'autre part $K_{\alpha\beta}(\varepsilon) \rightharpoonup K_{\alpha\beta}(0)$ dans $L^2(\Omega)$, puisque la limite faible est unique on conclut que $K_{\alpha\beta}(0) = e_{\alpha\beta}(u(0))$.

Pour établir la suite, on va procéder comme suite :

En introduisant (2.52) dans l'expression de $a^\varepsilon(u(\varepsilon), v)$, on trouve :

$$\begin{aligned} a^\varepsilon(u(\varepsilon), v) &= \int_\Omega (\lambda K_{ii}(\varepsilon) e_{\beta\beta}(v) + 2\mu K_{\alpha\beta}(\varepsilon) e_{\alpha\beta}(v))\, dx + \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega 2\mu K_{\alpha 3}(\varepsilon)(\partial_\alpha v_3 + \partial_3 v_\alpha)\, dx \\ &+ \frac{1}{\varepsilon^2}\int_\Omega (\lambda K_{ii}(\varepsilon) + 2\mu K_{ii}(\varepsilon))\, e_{33}(v)\, dx \\ &= L(v) + \langle \sigma_{33}(\varepsilon), \bar{v}_3 \rangle, \ \forall v \in V(\Omega) \end{aligned} \tag{2.60}$$

En posant $v_3 = 0$ et $\bar{v}_\alpha = 0$ dans (2.60), puis en multipliant par ε, on obtient aprés passage à la limite :

$$\int_\Omega K_{\alpha 3}(0)\, \partial_3 v_\alpha dx = 0, \ \forall v_\alpha \in V(\Omega)$$

et à l'aide du lemme 19 on trouve $K_{\alpha 3}(0) = 0$.

Et on choisit, toujours dans (2.60), $v_\alpha = 0$ et $\bar{v}_3 = 0$ puis en multipliant par ε^2, après tendre ε vers 0, on trouve :

$$\int_\Omega (\lambda K_{\alpha\alpha}(0) + \lambda K_{33}(0) + 2\mu K_{33}(0))\, \partial_3 v_3 dx = 0, \forall v_3 \in V(\Omega).$$

D'où :

$$K_{33}(0) = \frac{-\lambda}{\lambda + 2\mu} e_{\alpha\alpha}(u(0)).$$

■

Corollaire 27 *Si $u(\varepsilon)$ est solution de P(ε). V, alors $u(0)$ est l'unique solution du problème $P_{KL}(0)$.*

$$\textit{Trouver } \ u(0) \in V_{KL}(\Omega) \cap \overrightarrow{K}(\Omega) \ \textit{ tel que}$$

$$a_*^0(u(0), v) = L(v) + \langle \sigma_{33}(0), \bar{v}_3 \rangle, \quad \forall v \in V_{KL}(\Omega) \tag{2.61}$$

$$\langle \sigma_{33}(0), \bar{v}_3 - \bar{u}_3(0) \rangle \geq 0, \ \forall v_3 \in K(\Omega) \tag{2.62}$$

tels que:

$$\begin{aligned} a^0_*(u(0),v) &= \int_\Omega \left(\lambda^* e_{\alpha\alpha}(u(0))\, e_{\beta\beta}(v) + 2\mu e_{\alpha\beta}(u(0))\, e_{\alpha\beta}(v)\right) dx \ \textit{avec} \ \lambda^* = \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu} \\ \sigma_{33}(\varepsilon) &\rightharpoonup \sigma_{33}(0) \quad \textit{dans} \ H^{-2}(\omega) \end{aligned} \tag{2.63}$$

Preuve. Au début, on va établir (2.63). On a de (2.22) et (2.60) :

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{33}(\varepsilon), v_3 \rangle &= \int_\Omega \left(\lambda K_{ii}(\varepsilon) e_{\beta\beta}(v) + 2\mu K_{\alpha\beta}(\varepsilon)\, e_{\alpha\beta}(v)\right) dx - L(v) \\ &= \int_\Omega \left(\lambda K_{ii}(\varepsilon)\delta_{\alpha\beta} + 2\mu K_{\alpha\beta}(\varepsilon)\right) e_{\alpha\beta}(v)\, dx - L(v), \ \forall v \in V_{KL}(\Omega). \end{aligned}$$

Par passage à la limite, on trouve :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \langle \sigma_{33}(\varepsilon), v_3 \rangle = \int_\Omega \left(\lambda^* e_{\alpha\alpha}(u(0)) e_{\beta\beta}(v) + 2\mu e_{\alpha\beta}(u(0))\, e_{\alpha\beta}(v)\right) dx - L(v) \ \textit{avec} \ \lambda^* = \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}$$

On pose :

$$a^0_*(u(0),v) = \int_\Omega \left(\lambda^* e_{\alpha\alpha}(u(0))\, e_{\beta\beta}(v) + 2\mu e_{\alpha\beta}(u(0))\, e_{\alpha\beta}(v)\right) dx.$$

L'application $v_3 \rightarrow a^0_*(u(0),v) - L(v)$ est une forme linéaire sur $H^2_0(\omega)$, donc il existe $\varphi \in H^{-2}(\omega)$ telle que $a^0_*(u(0),v) - L(v) = \langle \varphi, v_3 \rangle$, φ représente la limite faible-$\star$ de $\sigma_{33}(\varepsilon)$ dans $H^{-2}(\omega)$. On l'a note $\sigma_{33}(0)$, d'où $\sigma_{33}(\varepsilon) \rightharpoonup \sigma_{33}(0)$ dans $H^{-2}(\omega)$ faible-$\star$ et vérifie avec $u(0)$:

$$a^0_*(u(0),v) - L(v) = \langle \sigma_{33}(0), v_3 \rangle, \forall v \in V_{KL}(\Omega)$$

d'où (2.63) et (2.61).

On prend maintenant dans (2.23) $v_3 = d$ puis $v_3 = 2u_3(\varepsilon) - d$ on trouve $\langle \sigma_{33}(0), d - u_3(\varepsilon) \rangle = 0$.

Puisque $d \in H_0^2(\omega)$ donc :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \langle \sigma_{33}(\varepsilon), u_3(\varepsilon) \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \langle \sigma_{33}(\varepsilon), d \rangle = \langle \sigma_{33}(0), d \rangle \tag{2.64}$$

De (2.61), on déduit que :

$$\langle \sigma_{33}(0), u(0) \rangle = a_*^0(u(0), u(0)) - L(u(0)).$$

Posons pour simplifier $e_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta}(u(0))$.

On a :

$$\begin{aligned}
\|K(0)\|_A^2 &= A(K(0), K(0)) \\
&= \int_\Omega (\lambda |K_{ii}(0)|^2 + 2\mu K_{ij}(0) K_{ij}(0)) dx \\
&= \int_\Omega \left[\lambda \left| e_{\alpha\alpha} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} e_{\alpha\alpha} \right|^2 + 2\mu e_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta} + 2\mu \left| - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} e_{\alpha\alpha} \right| \right] dx \\
&= \int_\Omega \left(\frac{2\lambda}{\lambda + 2\mu} e_{\alpha\alpha} e_{\alpha\alpha} + 2\mu e_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta} \right) dx \\
&= a_*^0(u(0), u(0))
\end{aligned}$$

d'où :

$$\langle \sigma_{33}(0), u(0) \rangle = \|K(0)\|_A^2 - L(u(0))$$

et du fait que la norme est faiblement s.c.i, donc :

$$\|K(0)\|_A^2 \leq \lim_{\varepsilon \to 0} \inf \|K(\varepsilon)\|_A^2$$

il vient que :

$$\begin{aligned}\langle \sigma_{33}(0), u(0)\rangle &\leq \liminf_{\varepsilon\to 0}(\|K(\varepsilon)\|_A^2 - L(u(\varepsilon))) \\ &\leq \liminf_{\varepsilon\to 0}\ \langle \sigma_{33}(\varepsilon), u(\varepsilon)\rangle \end{aligned} \tag{2.65}$$

Par ailleurs, nous avons :

$$\langle \sigma_{33}(\varepsilon), \bar{v}_3 - \bar{u}_3(\varepsilon)\rangle \geq 0, \quad \forall v_3 \in K(\Omega)$$

Pour $v \in V_{KL}(\Omega)$, $v_3 = \eta_3 \in K(\omega)$, il vient que :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{\varepsilon\to 0}\ \langle \sigma_{33}(\varepsilon), \bar{v}_3 - \bar{u}_3(\varepsilon)\rangle \\ &\leq \lim_{\varepsilon\to 0}\ \langle \sigma_{33}(\varepsilon), \bar{v}_3\rangle - \lim_{\varepsilon\to 0}\ \langle \sigma_{33}(\varepsilon), \bar{u}_3(\varepsilon)\rangle \end{aligned}$$

De la convergence faible de $\sigma_{33}(\varepsilon)$ dans $H^{-2}(\omega)$ et de (2.65), on déduit (2.62).

On remarque que la limite de la suite $\{u(\varepsilon)\}$ est solution d'un problème de contact unilatéral avec conditions de Signorini.

Le problème (2.61)-(2.62) admet une solution unique qui réalise dans $V_{KL}(\Omega) \cap \overrightarrow{K}(\Omega)$ le minimum de la fonctionnelle : $I(v) = \dfrac{1}{2}a_*^0(v,v) - L(v)$ puisqu'elle est strictement convexe, coercive et s.c.i faiblement.

Du fait que les limites de toutes les sous-suites convergentes de $\{u(\varepsilon)\}$ sont caractérisées par le même problème, on en déduit que toute la suite converge vers $u(0)$. Le résultat est valable pour la suite$\{K(\varepsilon)\}$. ■

Corollaire 28 *(La convergence forte)*

$$\begin{aligned} u(\varepsilon) &\rightarrow u(0) \ \ dans \ \left(H^1(\Omega)\right)^3 \ \ fort & (2.66) \\ K(\varepsilon) &\rightarrow K(0) \ \ dans \ L^2(\Omega) \ \ fort & (2.67) \\ \sigma_{33}(\varepsilon) &\rightarrow \sigma_{33}(0) \ \ dans \ H^{-2}(\omega) & (2.68) \end{aligned}$$

Preuve. On fait l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} \|K(\varepsilon) \rightarrow K(0)\|_A^2 &= A(K(0) - K(\varepsilon), K(0) - K(\varepsilon)) \\ &= A(K(0), K(0) - 2K(\varepsilon)) + A(K(\varepsilon), K(\varepsilon)) \\ &\leq A(K(0), K(0) - 2K(\varepsilon)) + L(u(\varepsilon)) + \langle \sigma_{33}(\varepsilon), \ \bar{u}_3(\varepsilon) \rangle \end{aligned}$$

Par passage à la limite, on trouve :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|K(\varepsilon) \rightarrow K(0)\|_A^2 \leq -A(K(0), K(0)) + \lim_{\varepsilon \to 0} L(u(\varepsilon)) + \lim_{\varepsilon \to 0} \langle \sigma_{33}(\varepsilon), \ \bar{u}_3(\varepsilon) \rangle \quad (2.69)$$

d'où d'aprés (2.64), on conclut que :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \langle \sigma_{33}(\varepsilon), \ \bar{u}_3(\varepsilon) \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \langle \sigma_{33}(\varepsilon), \ d \rangle$$

et si on prend dans (2.62) $v_3 = d$ puis $v_3 = 2u_3 - d$ on trouve :

$$\langle \sigma_{33}(0), \ d \rangle = \langle \sigma_{33}(0), \ \bar{u}_3(0) \rangle .$$

Par conséquent :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \langle \sigma_{33}(\varepsilon), \ \bar{u}_3(\varepsilon) \rangle = \langle \sigma_{33}(0), \ \bar{u}_3(0) \rangle$$

d'où (2.69) devient :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|K(\varepsilon)-K(0)\|_A^2 \leq -a_\star^0(K(0),K(0))+\lim_{\varepsilon\to 0}L(u(\varepsilon))+\langle\sigma_{33}(0),\ \bar{u}_3(0)\rangle=0$$

d'où (2.67).

Par moyen de l'inégalité de Korn, on déduit que :

$$\|K(\varepsilon)-K(0)\|_A^2=a_\star^0(u(0)-u(\varepsilon),u(0)-u(\varepsilon))\geq c\,\|u(\varepsilon)-u(0)\|_{1,\Omega}^2$$

d'où (2.66).

On a pour tout $v\in V_{KL}(\Omega)$:

$$\begin{aligned}
\langle\sigma_{33}(\varepsilon),\eta_3\rangle &= \int_\Omega(\lambda K_{ii}(\varepsilon)\delta_{\alpha\beta}+2\mu K_{\alpha\beta}(\varepsilon))\,e_{\alpha\beta}(v)\,dx-L(v)\\
\langle\sigma_{33}(0),\eta_3\rangle &= \int_\Omega(\lambda K_{ii}(0)\delta_{\alpha\beta}+2\mu K_{\alpha\beta}(0))\,e_{\alpha\beta}(v)\,dx-L(v)
\end{aligned}$$

d'où :

$$\langle\sigma_{33}(\varepsilon)-\sigma_{33}(0),\eta_3\rangle=\int_\Omega[\lambda(K_{ii}(\varepsilon)-K_{ii}(0))\delta_{\alpha\beta}+2\mu(K_{\alpha\beta}(\varepsilon)-K_{\alpha\beta}(0))]\,e_{\alpha\beta}(v)\,dx$$

Il vient que :

$$\begin{aligned}
\|\sigma_{33}(\varepsilon)-\sigma_{33}(0)\|_{-2,\omega} &\leq \sup_{\eta_3\in H_0^2(\Omega)}\frac{\langle\sigma_{33}(\varepsilon)-\sigma_{33}(0),\eta_3\rangle}{\|\eta_3\|_{2,\omega}},\eta_3\neq 0\\
&\leq c\,\|K(\varepsilon)-K(0)\|_{0,\Omega}
\end{aligned}$$

d'où (2.68). ■

En utilisant les corollaires précédents, on aboutit au théorème :

Théorème 29 *Si* $u(\varepsilon)$ *est solution de* $P(\varepsilon).V$*, alors :*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|u(\varepsilon) - u(0)\|_{1,\Omega} = 0, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \|\sigma_{33}(\varepsilon) - \sigma_{33}(0)\|_{-2,\omega} = 0$$

où $u(0)$ *est l'unique solution du problème* $P_{KL}(0).V$ *:*

$$\begin{cases} \text{Trouver } \ u(0) \in V_{KL}(\Omega) \cap \overrightarrow{K}(\Omega) \ \text{ telque} \\ a_*^0(u(0), v) = L(v) + \langle \sigma_{33}(0), \bar{v}_3 \rangle, \quad \forall v \in V_{KL}(\Omega) \\ \langle \sigma_{33}(0), \bar{v}_3 - \bar{u}_3(0) \rangle \geq 0, \ \forall v_3 \in K(\omega) \end{cases}$$

On a vu qu'on peut ramener ce problème à un problème bidimensionnel. Les démarches sont les mêmes que celles faites au corollaire 20 et au théorème 23, d'où le théorème :

Théorème 30 *Soit* $u(0)$ *telque* $u_\alpha(0) = \xi_\alpha - x_3\partial_\alpha\xi_3$, $u_3(0) = \xi_3$, ξ_α, ξ_3 *sont assez réguliers. Si* $u(0)$ *est solution du problème* $P_{KL}^0.V$ *alors* ξ_α, ξ_3 *vérifient le problème bidimentionnel* $P^0.B$ *suivant :*

$$\begin{cases} \text{Trouver } \ \xi_\alpha \in H_0^1(\omega), \xi_3 \in K(\omega) \ \text{ tels que} \\ k\Delta^2\xi_3 = h_3^0 + h_1^1 + h_2^1 + \sigma_{33}(0) \\ -\partial_\beta n_{\alpha\beta} = h_\alpha^0 \\ \langle \sigma_{33}(0), d - \xi_3 \rangle = 0, \ \sigma_{33}(0) \leq 0 \ \text{dans } H^{-2}(\omega) \end{cases}$$

où :

$$\begin{aligned} k &= \frac{8}{3}\mu\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}, \ h_i^0 = \int_{-1}^{+1} f_i dx_3 + g_i^-, \ h_i^1 = \int_{-1}^{+1} x_3\partial_i f_i dx_3 - \partial_i g_i^-, \ g_i^- = g_i(x_1, x_2, -1) \\ n_{\alpha\beta} &= \frac{4\lambda\mu}{\lambda+2\mu} e_{\gamma\gamma}(\xi)\,\delta_{\alpha\beta} + 4\mu e_{\alpha\beta}(\xi) \end{aligned}$$

2.2 Le cas de contact avec frottement

On va étudier dans cette partie, le même problème précédent en supposant que le contact unilatéral est avec frottement de coulomb. L'étude variationnelle de ce problème est déjà faite dans le chapitre 1, pour cela, on s'intéresse qu'à l'étude asymptotique en utilisant l'approche en déplacement.

2.2.1 Problème classique P^ε.C

$$\begin{cases} \text{Trouver } \; u^\varepsilon \; \text{ tel que} \\ -\partial_j^\varepsilon \sigma_{ij}^\varepsilon = f_i^\varepsilon \text{ dans } \; \Omega^\varepsilon \\ \sigma_{ij}^\varepsilon n_j^\varepsilon = g_i^\varepsilon \quad \text{sur } \Gamma_-^\varepsilon \\ u^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0^\varepsilon \\ \bar{u}_3^\varepsilon \leq \varepsilon d, \sigma_{33}^\varepsilon \leq 0, \sigma_{33}^\varepsilon \left(\bar{u}_3^\varepsilon - \varepsilon d\right) = 0 \text{ sur } \; \Gamma_+^\varepsilon \\ \left|\sigma_T^\varepsilon\right| < \nu \left|\sigma_{33}^\varepsilon\right| \Rightarrow \bar{u}_T^\varepsilon = 0 \;\text{ sur }\; \Gamma_+^\varepsilon \\ \left|\sigma_T^\varepsilon\right| = \nu \left|\sigma_{33}^\varepsilon\right| \Rightarrow \exists \delta > 0,\, \bar{u}_T^\varepsilon = -\delta \sigma_T^\varepsilon, \;\sigma_T^\varepsilon = \left(\sigma_{\alpha 3}^\varepsilon\right) \;\text{ sur } \Gamma_+^\varepsilon \end{cases}$$

Remarque 31 *σ_{33}^ε représente la densité de la force de pression et $\sigma_{\alpha 3}^\varepsilon$ les densités des forces de frottement.*

2.2.2 Problème variationnel

Théorème 32 *Si u^ε est solution de $P^\varepsilon.C$ alors u^ε vérifie le problème $P^\varepsilon.V$:*

$$\begin{cases} \textit{Trouver } \; u^\varepsilon \in \overrightarrow{K}\left(\Omega^\varepsilon\right) \quad \textit{tel que} \\ a^\varepsilon \left(u^\varepsilon, v^\varepsilon\right) = L^\varepsilon \left(v^\varepsilon\right) + \left\langle \sigma_{i3}^\varepsilon, \bar{v}_i^\varepsilon \right\rangle, \forall \; v^\varepsilon \in \overrightarrow{V}\left(\Omega^\varepsilon\right) \\ \left\langle \sigma_{33}^\varepsilon, \bar{v}_3^\varepsilon - \bar{u}_3^\varepsilon \right\rangle \geq 0, \forall \;\; v_3^\varepsilon \in K\left(\Omega^\varepsilon\right) \\ \;\left\langle \sigma_{\alpha 3}^\varepsilon, \bar{v}_\alpha^\varepsilon - \bar{u}_\alpha^\varepsilon \right\rangle + \left\langle \nu \left|\sigma_{33}^\varepsilon\right|, \left|\bar{v}_T^\varepsilon\right| - \left|\bar{u}_T^\varepsilon\right| \right\rangle \geq 0, \; \forall \; v_\alpha^\varepsilon \in V\left(\Omega^\varepsilon\right) \end{cases}$$

Preuve. La démonstration est similaire à celle du théorème 11 du chapitre1. ■

Remarque 33 *Pour* u^ε *assez régulier, alors les problèmes* $P^\varepsilon.C$ *et* $P^\varepsilon.V$ *sont équivalents.*

Remarque 34 *D'après le premier chapitre, ce problème est équivalent au problème :*

$$\begin{cases} \text{Trouver } u^\varepsilon \in \overrightarrow{K}(\Omega^\varepsilon) \quad \text{tel que :} \\ a^\varepsilon(u^\varepsilon, v^\varepsilon - u^\varepsilon) + J(v^\varepsilon) - J(u^\varepsilon) \geq \quad L^\varepsilon(v^\varepsilon - u^\varepsilon), \forall v^\varepsilon \in \overrightarrow{K}(\Omega^\varepsilon) \end{cases}$$

qui admed une solution unique sous les conditions $f_i^\varepsilon \in L^2(\Omega^\varepsilon)$, $g_i^\varepsilon \in H^{-1/2}\left(\Gamma_-^\varepsilon\right)$ *et* ν *assez petit, cette solution réalise le minmimum de la fonctionnelle :*

$$F(v^\varepsilon) = \frac{1}{2}a^\varepsilon(v^\varepsilon, v^\varepsilon) + J(v^\varepsilon) - L^\varepsilon(v^\varepsilon), \forall v^\varepsilon \in \overrightarrow{K}(\Omega^\varepsilon).$$

2.2.3 Etude asymptotique

Mise à l'échelle des données

On garde la même mise à l'échelle pour les données que celle faite dans le cas sans frottement.

Mise à l'échelle du problème variationnel

Théorème 35 *Si* u^ε *est solution du problème* $P^\varepsilon.V$ *alors* $u(\varepsilon)$ *vérifie le problème* $P(\varepsilon).V$ *:*

$$\text{Trouver } u(\varepsilon) \in \overrightarrow{K}(\Omega) \quad \text{tel que}$$

$$a^\varepsilon(u(\varepsilon), v) = L(v) + \langle \sigma_{i3}(\varepsilon), \bar{v}_i \rangle, \forall\, v \in \overrightarrow{V}(\Omega) \tag{2.70}$$

$$\langle \sigma_{33}(\varepsilon), \bar{v}_3 - \bar{u}_3(\varepsilon) \rangle \geq 0, \forall\, v_3 \in K(\Omega) \tag{2.71}$$

$$\langle \sigma_{\alpha 3}(\varepsilon), \bar{v}_\alpha - \bar{u}_\alpha(\varepsilon) \rangle + \varepsilon \langle \nu |\sigma_{33}(\varepsilon)|, |\bar{v}_T| - |\bar{u}_T(\varepsilon)| \rangle \geq 0, \ \forall\, v_\alpha \in V(\Omega) \tag{2.72}$$

tels que :

$$a^{\varepsilon}\left(u(\varepsilon),v\right)=\int_{\Omega}\sigma_{ij}(\varepsilon)\partial_j v_i dx$$
$$L\left(v\right)=\int_{\Omega}f_i v_i dx+\int_{\Gamma_-}g_i\underline{v_i}d\Gamma$$

où :

$$\left\{\begin{array}{l}\sigma_{\alpha\beta}(\varepsilon)=\lambda e_{\gamma\gamma}(u\left(\varepsilon\right))\delta_{\alpha\beta}+2\mu e_{\alpha\beta}(u\left(\varepsilon\right))+\varepsilon^{-2}\lambda e_{33}(u\left(\varepsilon\right))\delta_{\alpha\beta}\\ \sigma_{\alpha3}(\varepsilon)=\varepsilon^{-2}2\mu e_{\alpha3}(u\left(\varepsilon\right))\\ \sigma_{33}(\varepsilon)=\varepsilon^{-4}\ \left(\lambda+2\mu\right)e_{33}(u\left(\varepsilon\right))+\varepsilon^{-2}\lambda e_{\gamma\gamma}(u\left(\varepsilon\right))\end{array}\right. \tag{2.73}$$

Preuve. La preuve est similaire à celle du théorème 18 du chapitre 2. ■

Ce problème admet au moins une solution $u\left(\varepsilon\right)$ sous les conditions $f_i\in L^2\left(\Omega\right)$, $g_i\in H^{-1/2}\left(\Gamma_-\right)$ et ν assez petit, cette solution réalise le minmimum de la fonctionnelle :

$$F\left(v\right)=\frac{1}{2}a^{\varepsilon}\left(v,v\right)+J(v)-\ L\left(v\right),\ \forall v\in\overrightarrow{K}\left(\Omega\right).$$

Problème bidimensionnel

Pour $u\left(\varepsilon\right)$ et $e_{ij}\left(\varepsilon\right)$ définis par (2.24) et (2.25) et après utilisation du même procédé dans le paragraphe 2-1-3 on trouve :

A l'ordre ε^{-4} :

$$\int_{\Omega}\sigma_{33}^{-4}\partial_3 v_3 dx=\left\langle\sigma_{33}^{-4},\bar{v}_3\right\rangle,\ \forall v_3\in V\left(\Omega\right) \tag{2.74}$$

A l'ordre ε^{-3} :

$$\int_{\Omega}\sigma_{33}^{-3}\partial_3 v_3 dx=\left\langle\sigma_{33}^{-3},\bar{v}_3\right\rangle,\forall v_3\in V\left(\Omega\right) \tag{2.75}$$

A l'ordre ε^{-2} :

$$\int_{\Omega}\sigma_{33}^{-2}\partial_3 v_3 dx+\int_{\Omega}\sigma_{\alpha\beta}^{-2}\partial_\beta v_\alpha dx+\int_{\Omega}\sigma_{\alpha3}^{-2}\left(\partial_\alpha v_3+\partial_3 v_\alpha\right)=\left\langle\sigma_{i3}^{-2},\bar{v}_i\right\rangle,\forall v\in\overrightarrow{V}\left(\Omega\right) \tag{2.76}$$

A l'ordre ε^{-1} :

$$\int_\Omega \sigma_{33}^{-1}\partial_3 v_3 dx + \int_\Omega \sigma_{\alpha\beta}^{-1}\partial_\beta v_\alpha dx + \int_\Omega \sigma_{\alpha 3}^{-1}\left(\partial_\alpha v_3 + \partial_3 v_\alpha\right) = \left\langle \sigma_{i3}^{-1}, \bar{v}_i \right\rangle, \forall v \in \overrightarrow{V}(\Omega) \quad (2.77)$$

A l'ordre ε^{0} :

$$\int_\Omega \sigma_{33}^{0}\partial_3 v_3 dx + \int_\Omega \sigma_{\alpha\beta}^{0}\partial_\beta v_\alpha dx + \int_\Omega \sigma_{\alpha 3}^{0}\left(\partial_\alpha v_3 + \partial_3 v_\alpha\right) = L(v) + \left\langle \sigma_{i3}^{0}, \bar{v}_i \right\rangle, \forall v \in \overrightarrow{V}(\Omega) \quad (2.78)$$

Théorème 36 *Si* $u(\varepsilon)$ *est solution du problème variationnel* $P(\varepsilon).V$ *et définie par (2.24), alors* u^0 *est solution du problème* $P_{KL}^0.V$ *:*

$$\textit{Trouver } u^0 \in V_{KL}(\Omega) \cap \overrightarrow{K}(\Omega) \textit{ tel que :}$$

$$\int_\Omega \sigma_{\alpha\beta}^{0}\partial_\beta v_\alpha dx = L(v) + \left\langle \sigma_{i3}^{0}, \bar{v}_i \right\rangle, \forall\, v \in V_{KL}(\Omega) \quad (2.79)$$

$$\left\langle \sigma_{33}^{0}, \bar{v}_3 - \bar{u}_3^0 \right\rangle \geq 0,\ \forall\, v_3 \in K(\Omega) \quad (2.80)$$

$$\left\langle \sigma_{\alpha 3}^{0}, \bar{v}_\alpha \right\rangle \geq 0, \forall\, v_\alpha \in V(\Omega) \quad (2.81)$$

tel que :

$$\sigma_{\alpha\beta}^{0} = \lambda^* e_{\gamma\gamma}(u^0)\delta_{\alpha\beta} + 2\mu e_{\alpha\beta}(u^0) \textit{ avec } \lambda^* = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \quad (2.82)$$

Preuve. En prenant $\bar{v}_3 = 0$ dans (2.74) et (2.75), on trouve :

$$\int_\Omega \sigma_{33}^{-4}\partial_3 v_3 dx = \int_\Omega \sigma_{33}^{-3}\partial_3 v_3 dx = 0,\ \forall v_3 \in V(\Omega)$$

d'où, par le moyen du lemme 19, $\sigma_{33}^{-4} = \sigma_{33}^{-3} = 0$ ce qui donne :

$$\partial_3 u_3^0 = 0 \ \textit{ et } \ \partial_3 u_3^1 = 0 \quad (2.83)$$

De (2.83), on déduit que :

$$\sigma_{\alpha\beta}^{-2} = 0 \textit{ et } \quad \sigma_{\alpha\beta}^{-1} = 0 \quad (2.84)$$

Dans (2.76), on pose $v_3 = \bar{v}_\alpha = 0$,on obtient :

$$\int_\Omega \sigma_{\alpha 3}^{-2} \partial_3 v_\alpha = 0, \ \forall v_\alpha \in V(\Omega).$$

En applicant le du lemme 19 on trouve $\sigma_{\alpha 3}^{-2} = 0$, d'où :

$$\partial_\alpha u_3^0 + \partial_3 u_\alpha^0 = 0 \tag{2.85}$$

Toujours dans (2.76) on pose $v_\alpha = 0$ puis $\bar{v}_3 = 0$,on trouve que :

$$\sigma_{33}^{-2} = 0 \tag{2.86}$$

En utilisant le même procédé, de (2.77) on trouve que $\sigma_{\alpha 3}^{-1} = 0$.

On remarque de (2.83) et (2.85) que u^0 est de type Kirchhoff-Love. Donc l'espace des déplacements admissibles avec contact est $V_{KL}(\Omega) \cap \overrightarrow{K}(\Omega)$.

Ce qui réduit (2.78) à :

$$\int_\Omega \sigma_{\alpha\beta}^0 \partial_\beta v_\alpha dx = L(v) + \left\langle \sigma_{i3}^0, \bar{v}_i \right\rangle, \forall v \in V_{KL}(\Omega)$$

avec :

$$\sigma_{\alpha\beta}^0 = \lambda \partial_\gamma u_\gamma^0 \delta_{\alpha\beta} + \mu \left(\partial_\alpha u_\beta^0 + \partial_\beta u_\alpha^0 \right) + \lambda \partial_3 u_3^2 \delta_{\alpha\beta} \tag{2.87}$$

d'où (2.79). Puis on tire $\partial_3 u_3^2$ de l'équation $\sigma_{33}^{-2} = 0$ et on l'introduit dans (2.87), on trouve (2.82).

Par la même argumentation utilisée pour prouver (2.34), on trouve (2.80) et (2.81).

■

Remarque 37 *D'aprés le corollaire 20, chercher* u^0 *dans* $V_{KL}(\Omega) \cap \overrightarrow{K}(\Omega)$ *revient à chercher* (ξ_1, ξ_2, ξ_3) *dans* $\overrightarrow{K}(\omega)$ *d'où on peut ramener notre problème tridimensionnel* $P_{KL}^0.V$ *à un problème bidimensionnel.*

Théorème 38 *Soit* u^0 *tel que* $u_\alpha^0 = \xi_\alpha - x_3\partial_\alpha\xi_3$, $u_3^0 = \xi_3$, ξ_α, ξ_3 *sont assez réguliers. Si* u^0 *est solution du problème* $P_{KL}^0.V$ *alors* ξ_α, ξ_3 *vérifient le problème bidimensionnel* $P^0.B$ *suivant :*

$$\text{Trouver } \xi_\alpha \in H_0^1(\omega), \xi_3 \in K(\omega) \text{ tels que}$$

$$k\Delta^2\xi_3 = h_3^0 + h_1^1 + h_2^1 + \sigma_{33}^0 \tag{2.88}$$

$$-\partial_\beta n_{\alpha\beta} = h_\alpha^0 \tag{2.89}$$

$$\langle \sigma_{33}^0, d - \xi_3 \rangle = 0,\ \sigma_{33}^0 \leq 0 \text{ dans } H^{-2}(\omega) \tag{2.90}$$

$$\sigma_{\alpha 3}^0 = 0 \text{ sur } \omega \tag{2.91}$$

où k, h_i^0, h_i^1 *et* $n_{\alpha\beta}$ *sont définis par (2.45) et (2.46).*

Preuve. Soit u^0solution du problème P_{KL}^0.V alors ξ_α, ξ_3 vérifient $\xi_\alpha \in H_0^1(\omega), \xi_3 \in H_0^2(\omega)$, $\xi_3 \leq d$ et $e_{\alpha\beta}(u^0)$, $\sigma_{\alpha\beta}^0$ vérifient (2.47) et (2.48). Par conséquent :

$$\int_\Omega \sigma_{\alpha\beta}^0 \partial_\beta v_\alpha dx = \frac{8}{3}\mu\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\int_\omega \Delta^2\xi_3\eta_3 dx' \tag{2.92}$$

On montre au début (2.91). On peut voir de (2.81) que $\langle \sigma_{\alpha 3}^0, \eta_\alpha \rangle = 0, \forall \eta_\alpha \in H_0^1(\omega)$ d'où $\sigma_{\alpha 3}^0 = 0$ p.p dans ω.

D'autre part, le deuxiéme membre de (2.79) devient :

$$\begin{aligned}
L(v) + \langle \sigma_{i3}^0, \bar{v}_i \rangle &= \int_\Omega f_\alpha v_\alpha dx + \int_\Omega f_3 v_3 dx + \int_{\Gamma_-} g_\alpha^- \underline{v}_\alpha d\Gamma + \int_{\Gamma_-} g_3^- \underline{v}_3 d\Gamma + \int_{\Gamma_+} \sigma_{i3}^0 \bar{v}_i d\Gamma \\
&= \int_\omega \left\{ \int_{-1}^{+1} x_3 \partial_\alpha f_\alpha dx_3 - \partial_\alpha g_\alpha^- \right\} \eta_3 dx' + \int_\omega \left\{ \int_{-1}^{+1} f_3 dx_3 + g_3^- \right\} \eta_3 dx' \\
&\quad + \int_\omega \sigma_{33}^0 \eta_3 dx' \\
&= \int_\omega \left(h_3^0 + h_\alpha^1 + \sigma_{33}^0 \right) \eta_3 dx'
\end{aligned} \tag{2.93}$$

D'où, de (2.92) et (2.93) on trouve (2.88), au sens des distributions. On prend $\bar{v}_3 = d$ puis $\bar{v}_3 = 2u_3^0 - d$ dans (2.80), on trouve $\langle \sigma_{33}^0, d - \xi_3 \rangle = 0$. D'où $\langle \sigma_{33}^0, \eta_3 - d \rangle \geq 0$,

$\forall \eta_3 \in K(\omega)$, ce qui entraine $\sigma_{33}^0 \leq 0$ dans $H^{-2}(\omega)$ d'où (2.90). Et (2.89) provient de la même façon que dans le théorème 23. ■

2.2.4 Etude de la convergence

Soit $u(\varepsilon)$ solution du problème $\mathrm{P}(\varepsilon).\mathrm{V}$. On va étudier le comportement de $u(\varepsilon)$ et $\sigma_{i3}(\varepsilon)$ quand $\varepsilon \to 0$.

Théorème 39 *Si $u(\varepsilon)$ est solution du problème $P(\varepsilon).V$ alors :*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|u(\varepsilon) - u(0)\|_{1,\Omega} = 0$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|\sigma_{33}(\varepsilon) - \sigma_{33}(0)\|_{-2,\omega} = 0$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|\sigma_{\alpha 3}(\varepsilon)\|_{-1,\omega} = 0$$

où $u(0)$ est l'unique solution du problème $P_{KL}(0).V$:

$$\begin{cases} \text{Trouver } u(0) \in V_{KL}(\Omega) \cap \overrightarrow{K}(\Omega) \text{ tel que} \\ a_*^0(u(0), v) = L(v) + \langle \sigma_{33}(0), \bar{v}_3 \rangle, \quad \forall v \in V_{KL}(\Omega) \\ \langle \sigma_{33}(0), \bar{v}_3 - \bar{u}_3(0) \rangle \geq 0, \ \forall v_3 \in K(\omega) \end{cases}$$

Preuve. La preuve de ce théorème se fait en plusieurs étapes. ■

On définit $K(\varepsilon, v)$ comme au (2.52),on rappelle :

$$K_{\alpha\beta}(\varepsilon, v) = e_{\alpha\beta}(v), K_{\alpha 3}(\varepsilon, v) = \varepsilon e_{\alpha 3}(v), K_{33}(\varepsilon, v) = \varepsilon^{-2} e_{33}(v).$$

Lemme 40 *Soit $u(\varepsilon)$ solution du problème $P(\varepsilon).V$. Si $0 < \varepsilon \leq 1$, alors les suites $\{K(\varepsilon)\}$ et $\{u(\varepsilon)\}$ sont bornées ($K(\varepsilon) = K(\varepsilon, u)$), respectivement dans $L_s^2(\Omega)$ et $\overrightarrow{V}(\Omega)$. On en déduit qu'il existe des sous-suites toujours notées $\{K(\varepsilon)\}$ et $\{u(\varepsilon)\}$ et des* *éléments* $K(0) \in L^2_s(\Omega)$ *et* $u(0) \in \overrightarrow{V}(\Omega)$ *telsque :*

$$K(\varepsilon) \rightharpoonup K(0) \quad et \ u(\varepsilon) \rightharpoonup u(0).$$

Preuve. En prenant $v_3 = 0$ dans (2.71), ce qui donne $\langle \sigma_{33}(\varepsilon), \bar{u}_3(\varepsilon) \rangle \leq 0$, puis on prend $v_T = 0$ dans (2.72), on trouve :

$$\langle \sigma_{\alpha 3}(\varepsilon), \ \bar{u}_\alpha(\varepsilon) \rangle \leq -\varepsilon \langle \nu |\sigma_{33}(\varepsilon)|, |\bar{u}_T(\varepsilon)| \rangle \leq 0$$

d'où il vient de (2.70) que $a^\varepsilon(u(\varepsilon), u(\varepsilon)) \leq L(u(\varepsilon))$ donc $\|K(\varepsilon)\|_A^2 \leq L(u(\varepsilon))$.
Et puisque $L(u(\varepsilon)) \leq C \|u(\varepsilon)\|_{1,\Omega}$ alors :

$$\|K(\varepsilon)\|_A^2 \leq C \|u(\varepsilon)\|_{1,\Omega} \tag{2.94}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \|K(\varepsilon)\|_{0,\Omega}^2 &= \sum_{i,j=1}^{3} \|K_{ij}(\varepsilon)\|_{0,\Omega}^2 \\ &= \|e_{\alpha\beta}(\varepsilon)\|_{0,\Omega}^2 + \frac{2}{\varepsilon} \|e_{\alpha 3}(\varepsilon)\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \|e_{33}(\varepsilon)\|_{0,\Omega}^2 \\ &\geq \|e(\varepsilon)\|_{0,\Omega}^2 \end{aligned}$$

d'où :

$$\|K(\varepsilon)\|_{0,\Omega}^2 \geq \|e(\varepsilon)\|_{0,\Omega}^2 \tag{2.95}$$

A l'aide de l'inégalité de Korn, on trouve :

$$\|e(\varepsilon)\|_{0,\Omega}^2 \geq C' \|u(\varepsilon)\|_{1,\Omega}^2 \tag{2.96}$$

Du corollaire 29, on a $\|K(\varepsilon)\|_A^2 \geq 2\mu \|K(\varepsilon)\|_{0,\Omega}^2$, ce qui donne avec (2.95) :

$$\|K(\varepsilon)\|_{0,\Omega}^2 \leq C" \|u(\varepsilon)\|_{1,\Omega} \tag{2.97}$$

De (2.95)-(2.97), on déduit :

$$C' \|u(\varepsilon)\|_{1,\Omega}^2 \leq \ \|e(\varepsilon)\|_{0,\Omega}^2 \leq \ \ \|K(\varepsilon)\|_{0,\Omega}^2 \leq \ C" \|u(\varepsilon)\|_{1,\Omega}$$

D'où, il existe des constantes C_1 et C_2 indépendentes de ε telles que :

$$\|u(\varepsilon)\|_{1,\Omega} \leq C_1 \quad \textit{et} \quad \|K(\varepsilon)\|_{0,\Omega} \leq C_2.$$

On déduit que les suites $\{K(\varepsilon)\}$ et $\{u(\varepsilon)\}$ sont bornées, respectivement dans $\mathrm{L}_s^2(\Omega)$ et $\overrightarrow{V}(\Omega)$. Ce qui nous permet d'en extraire des sous suites toujours notées $\{K(\varepsilon)\}$ et $\{u(\varepsilon)\}$, qui admettent des limites faibles respectivement dans $\mathrm{L}_s^2(\Omega)$ et $\overrightarrow{V}(\Omega)$ qu'on les note $K(0)$ et $u(0)$ respectivement. ■

Lemme 41 *Les limites faibles $u(0)$ et $K(0)$ vérifient :*

$$u(0) \in V_{KL}(\Omega) \cap \overrightarrow{K}(\Omega) \tag{2.98}$$

$$K_{\alpha\beta}(0) = e_{\alpha\beta}(u(0)), K_{\alpha 3}(0) = 0, K_{33}(0) = \frac{-\lambda}{\lambda + 2\mu} e_{\alpha\alpha}(u(0)) \tag{2.99}$$

Preuve. On déduit de (2.52), la définition de $K(\varepsilon)$, que :

$$\|e_{\alpha 3}(u(\varepsilon))\|_{0,\Omega} \leq \varepsilon C_2 \textit{ et } \|e_{33}(u(\varepsilon))\|_{0,\Omega} \leq \varepsilon^2 C_2$$

Puisque la norme est s.c.i, on a :

$$\begin{aligned}
\|e_{\alpha 3}(u(0))\|_{0,\Omega} &\leq \liminf_{\varepsilon\to 0}\|e_{\alpha 3}(u(\varepsilon))\|_{0,\Omega}=0\\
\|e_{33}(u(0))\|_{0,\Omega} &\leq \liminf_{\varepsilon\to 0}\|e_{33}(u(\varepsilon))\|_{0,\Omega}=0
\end{aligned}$$

D'où $e_{i3}(u(0))=0$. Puisque $\overrightarrow{K}(\Omega)$ est convexe donc faiblement fermé, ce qui entraine $u(0)\in\overrightarrow{K}(\Omega)$,d'où (2.98). On a $u(\varepsilon)\rightharpoonup u(0)$ dans $\overrightarrow{H^1}(\Omega)$, donc $e_{\alpha\beta}(u(\varepsilon))\rightharpoonup e_{\alpha\beta}(u(0))$ dans $L^2(\Omega)$. D'autre part, $K_{\alpha\beta}(\varepsilon)\rightharpoonup K_{\alpha\beta}(0)$ dans $L^2(\Omega)$, puisque la limite faible est unique, on conclut que : $K_{\alpha\beta}(0)=e_{\alpha\beta}(u(0))$.

Pour établir la suite, on va procéder comme suite :

En introduisant (2.52) dans l'expression de $a^\varepsilon(u(\varepsilon),v)$, on trouve :

$$\begin{aligned}
a^\varepsilon(u(\varepsilon),v) &= \int_\Omega(\lambda K_{ii}(\varepsilon)e_{\beta\beta}(v)+2\mu K_{\alpha\beta}(\varepsilon)e_{\alpha\beta}(v))\,dx+\frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega 2\mu K_{\alpha 3}(\varepsilon)(\partial_\alpha v_3+\partial_3 v_\alpha)\,dx+\\
&\quad \frac{1}{\varepsilon^2}\int_\Omega(\lambda K_{ii}(\varepsilon)+2\mu K_{ii}(\varepsilon))\,e_{33}(v)\,dx\\
&= L(v)+\langle\sigma_{i3}(\varepsilon),\bar{v}_i\rangle,\ \forall v\in V(\Omega) \qquad (2.100)
\end{aligned}$$

En posant $v_3=0$ et $\bar{v}_\alpha=0$ dans (2.100), puis multipliant par ε, on obtient aprés passage à la limite :

$$\int_\Omega K_{\alpha 3}(0)\,\partial_3 v_\alpha dx=0,\forall v_\alpha\in V(\Omega),$$

à l'aide du corollaire 19 on trouve $K_{\alpha 3}(0)=0$.

Et on choisit, toujours dans (2.100), $v_\alpha=0$ et $\bar{v}_3=0$, puis en multipliant par ε^2, aprés tendre ε vers 0, on trouve :

$$\int_\Omega(\lambda K_{\alpha\alpha}(0)+\lambda K_{33}(0)+2\mu K_{33}(0))\,\partial_3 v_3 dx=0,\forall v_3\in V(\Omega).$$

D'où :

$$K_{33}(0)=\frac{-\lambda}{\lambda+2\mu}e_{\alpha\alpha}(u(0)).$$

■

Lemme 42 *Si $u(\varepsilon)$ est solution de $P(\varepsilon).V$, alors $u(0)$ est l'unique solution du problème $P_{KL}(0).V$:*

$$\text{Trouver } \ u(0) \in V_{KL}(\Omega) \cap K(\Omega) \ \text{ tel que}$$

$$a_*^0(u(0), v) = L(v) + \langle \sigma_{33}(0), \bar{v}_3 \rangle, \forall v \in V_{KL}(\Omega) \tag{2.101}$$

$$\langle \sigma_{33}(0), \bar{v}_3 - \bar{u}_3(0) \rangle \geq 0, \ \forall v_3 \in K(\Omega) \tag{2.102}$$

De plus, on a :

$$\sigma_{33}(\varepsilon) \ \rightharpoonup \ \sigma_{33}(0) \quad dans \ H^{-2}(\omega) \tag{2.103}$$

$$\sigma_{\alpha 3}(\varepsilon) \ \rightharpoonup \ \sigma_{\alpha 3}(0) \quad dans \ H^{-1}(\omega) - faible - \star \tag{2.104}$$

Preuve. Au début ; on montre que : $\lim_{\varepsilon \to 0} \langle \varepsilon \sigma_{33}(\varepsilon), v_3 \rangle = 0, \ \forall v_3 \in H_0^1(\omega)$. Pour cela, on prend $v = (0, 0, v_3)$ de $V_{KL}(\Omega)$ dans (2.100), puis on multiplie par ε il vient que :

$$\langle \varepsilon \sigma_{33}(\varepsilon), v_3 \rangle = 2\mu \int_\Omega K_{\alpha 3}(\varepsilon) \partial_\alpha v_3 dx - \varepsilon \int_\Omega f_3 v_3 dx - \varepsilon \int_\omega g_3 v_3 d\Gamma$$

On fait tendre ε vers 0 on trouve :

$$lim_{\varepsilon \to 0} \langle \varepsilon \sigma_{33}(\varepsilon), v_3 \rangle = 0, \ \forall v_3 \in H_0^1(\omega) \tag{2.105}$$

On prend maintenant $\bar{v}_\alpha = 0$, puis $\bar{v}_\alpha = 2\bar{u}_\alpha$ dans (2.96) on trouve :

$$\langle \sigma_{\alpha 3}(\varepsilon), \bar{u}_\alpha(\varepsilon) \rangle + \varepsilon \langle \nu |\sigma_{33}(\varepsilon)|, |\bar{u}_T(\varepsilon)| \rangle = 0$$

d'où :

$$\langle \sigma_{\alpha 3}(\varepsilon), \bar{v}_\alpha \rangle + \varepsilon \langle \nu |\sigma_{33}(\varepsilon)|, |\bar{v}_T| \rangle \geq 0, \ \forall v_\alpha \in V(\Omega).$$

Dans cette inégalité on prend $\pm\bar{v}_\alpha$, on trouve que :

$$|\langle \sigma_{\alpha 3}(\varepsilon), \bar{v}_\alpha \rangle| \leq \varepsilon \langle \nu |\sigma_{33}(\varepsilon)|, |\bar{v}_T| \rangle$$

On en déduit que :

$$|\langle \sigma_{\alpha 3}(\varepsilon), \eta_\alpha \rangle| \leq \varepsilon \langle \nu |\sigma_{33}(\varepsilon)|, |\eta_T| \rangle, \forall \eta_\alpha \in H_0^1(\omega).$$

Par passage à la limite et tenant compte de (2.105), on trouve (2.104).

On va établir maitenant (2.103). On a de (2.96) et (2.100) :

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{33}(\varepsilon), v_3 \rangle &= \int_\Omega (\lambda K_{ii}(\varepsilon) e_{\beta\beta}(v) + 2\mu K_{\alpha\beta}(\varepsilon) e_{\alpha\beta}(v))\, dx - L(v) - \langle \sigma_{\alpha 3}(\varepsilon), \bar{v}_\alpha \rangle \\ &= \int_\Omega (\lambda K_{ii}(\varepsilon) \delta_{\alpha\beta} + 2\mu K_{\alpha\beta}(\varepsilon))\, e_{\alpha\beta}(v)\, dx - L(v) - \langle \sigma_{\alpha 3}(\varepsilon), \bar{v}_\alpha \rangle, \ \forall v \in V_{KL}(\Omega) \end{aligned} \tag{2.106}$$

Par passage à la limite, on trouve :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \langle \sigma_{33}(\varepsilon), v_3 \rangle = \int_\Omega (\lambda^* e_{\alpha\alpha}(u(0)) e_{\beta\beta}(v) + 2\mu e_{\alpha\beta}(u(0))\, e_{\alpha\beta}(v))\, dx - L(v) \ avec\ \lambda^* = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}$$

On pose :

$$a_*^0(u(0), v) = \int_\Omega (\lambda^* e_{\alpha\alpha}(u(0))\, e_{\beta\beta}(v) + 2\mu e_{\alpha\beta}(u(0))\, e_{\alpha\beta}(v))\, dx.$$

L'application $v_3 \to a_*^0(u(0), v) - L(v)$ est une forme linéaire sur $H_0^2(\omega)$, donc il existe $\varphi \in H^{-2}(\omega)$ tel que :

$$a_*^0(u(0), v) - L(v) = \langle \varphi, v_3 \rangle$$

φ représente la limite faible-$\star$ de $\sigma_{33}(\varepsilon)$ dans $H^{-2}(\omega)$. On l'a note $\sigma_{33}(0)$, d'où $\sigma_{33}(\varepsilon) \rightharpoonup \sigma_{33}(0)$ dans $H^{-2}(\omega)$ faible-$\star$ et vérifie avec $u(0)$:

$$a_*^0(u(0), v) - L(v) = \langle \sigma_{33}(0), v_3 \rangle, \forall v \in V_{KL}(\Omega),$$

d'où (2.103) et (2.102).

On prend maintenant dans (2.95) $v_3 = d$ puis $v_3 = 2u_3(\varepsilon) - d$, on trouve :

$$\langle \sigma_{33}(0), d - u_3(\varepsilon) \rangle = 0.$$

Puisque $d \in H_0^2(\omega)$ donc :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \langle \sigma_{33}(\varepsilon), u_3(\varepsilon) \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \langle \sigma_{33}(\varepsilon), d \rangle = \langle \sigma_{33}(0), d \rangle \tag{2.107}$$

De (2.101), on déduit que :

$$\langle \sigma_{33}(0), u(0) \rangle = a_*^0(u(0), u(0)) - L(u(0)).$$

Posons, pour simplifier $e_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta}(u(0))$.

On a :

$$\begin{aligned}
\|K(0)\|_A^2 &= A(K(0), K(0)) \\
&= \int_\Omega (\lambda |K_{ii}(0)|^2 + 2\mu K_{ij}(0) K_{ij}(0)) dx \\
&= \lambda \left| e_{\alpha\alpha} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} e_{\alpha\alpha} \right|^2 + 2\mu e_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta} + 2\mu \left| - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} e_{\alpha\alpha} \right| dx \\
&= \int_\Omega \left(\frac{2\lambda}{\lambda + 2\mu} e_{\alpha\alpha} e_{\alpha\alpha} + 2\mu e_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta} \right) dx \\
&= a_*^0(u(0), u(0))
\end{aligned}$$

d'où :

$$\langle \sigma_{33}(0), u(0) \rangle = \|K(0)\|_A^2 - L(u(0))$$

et du fait que la norme est faiblement s.c.i donc :

$$\|K(0)\|_A^2 \leq \liminf_{\varepsilon \to 0} \|K(\varepsilon)\|_A^2$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\langle \sigma_{33}(0), u(0) \rangle &\leq \liminf_{\varepsilon \to 0} (\|K(\varepsilon)\|_A^2 - L(u(\varepsilon))) \\
&\leq \liminf_{\varepsilon \to 0} \langle \sigma_{i3}(\varepsilon), u_i(\varepsilon) \rangle \\
&\leq \lim_{\varepsilon \to 0} \langle \sigma_{33}(\varepsilon), u_3(\varepsilon) \rangle
\end{aligned} \tag{2.108}$$

Par ailleurs nous avons :

$$\langle \sigma_{33}(\varepsilon), \bar{v}_3 - \bar{u}_3(\varepsilon) \rangle \geq 0, \forall v_3 \in K(\Omega)$$

Pour $v \in V_{KL}(\Omega)$, $v_3 = \eta_3 \in K(\omega)$, il vient que :

$$\begin{aligned}
0 &\leq \lim_{\varepsilon \to 0} \langle \sigma_{33}(\varepsilon), \bar{v}_3 - \bar{u}_3(\varepsilon) \rangle \\
&\leq \lim_{\varepsilon \to 0} \langle \sigma_{33}(\varepsilon), \bar{v}_3 \rangle - \lim_{\varepsilon \to 0} \langle \sigma_{33}(\varepsilon), \bar{u}_3(\varepsilon) \rangle
\end{aligned}$$

De la convergence faible de $\sigma_{33}(\varepsilon)$ dans $H^{-2}(\omega)$ et de (2.108), on déduit (2.102).

On remarque que la limite de la suite $\{u(\varepsilon)\}$ est solution d'un problème de contact unilatéral avec conditions de Signorini sans frottement.

Le problème (2.101)-(2.102) admet une solution unique qui réalise dans $V_{KL}(\Omega) \cap \overrightarrow{K}(\Omega)$ le minimum de la fonctionnelle $I(v) = \dfrac{1}{2} a_*^0(v, v) - L(v)$ (puisqu'elle est strictement convexe, coercive et s.c.i faiblement).

Du fait que les limites de toutes les sous-suites convergentes de $\{u(\varepsilon)\}$ sont caractérisées par le même problème, on en déduit que toute la suite converge vers $u(0)$. Le résultat est valable pour la suite$\{K(\varepsilon)\}$ et $\{\sigma_{33}(\varepsilon)\}$. ■

Lemme 43 *(La convergence forte)*

$$u(\varepsilon) \;\rightarrow\; u(0) \;\; dans \;\; H^1(\Omega) \;\; fort \tag{2.109}$$

$$\sigma_{33}(\varepsilon) \;\rightarrow\; \sigma_{33}(0) \;\; dans \;\; H^{-2}(\omega) \;\; fort \tag{2.110}$$

$$\sigma_{\alpha 3}(\varepsilon) \;\rightarrow\; 0 \; dans \;\; H^{-1}(\omega) \;\; fort \tag{2.111}$$

Preuve. On fait l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}
\|K(\varepsilon) \rightarrow K(0)\|_A^2 &= A(K(0) - K(\varepsilon), K(0) - K(\varepsilon)) \\
&= A(K(0), K(0) - 2K(\varepsilon)) + A(K(\varepsilon), K(\varepsilon)) \\
&\leq A(K(0), K(0) - 2K(\varepsilon)) + L(\, u(\varepsilon)) + \langle \sigma_{\alpha 3}(\varepsilon),\; \bar{u}_\alpha(\varepsilon)\rangle \\
&\leq A(K(0), K(0) - 2K(\varepsilon)) + L(\, u(\varepsilon)) + \langle \sigma_{33}(\varepsilon),\; \bar{u}_3(\varepsilon)\rangle
\end{aligned}$$

par passage à la limite on trouve :

$$\underset{\varepsilon\rightarrow 0}{lim} \|K(\varepsilon) \rightarrow K(0)\|_A^2 \leq -A(K(0), K(0)) + L(\, u(\varepsilon)) + \lim_{\varepsilon\rightarrow 0} \langle \sigma_{33}(\varepsilon),\; \bar{u}_3(\varepsilon)\rangle \tag{2.112}$$

d'où d'aprés (2.107), on conclut que :

$$\lim_{\varepsilon\rightarrow 0} \langle \sigma_{33}(\varepsilon),\; \bar{u}_3(\varepsilon)\rangle = \lim_{\varepsilon\rightarrow 0} \langle \sigma_{33}(\varepsilon),\; d\rangle$$

et si on prend, dans (2.102) $v_3 = d$ puis $v_3 = 2u_3 - d$, on trouve :

$$\langle \sigma_{33}(0),\; d\rangle = \langle \sigma_{33}(0),\; \bar{u}_3(0)\rangle .$$

Par conséquent :

$$\lim_{\varepsilon\rightarrow 0} \langle \sigma_{33}(\varepsilon),\; \bar{u}_3(\varepsilon)\rangle = \langle \sigma_{33}(0),\; \bar{u}_3(0)\rangle$$

d'où (2.112) devient :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|K(\varepsilon)-K(0)\|_A^2 \leq -a_\star^0(K(0)\,,K(0))+L(u(\varepsilon))+\langle\sigma_{33}(0)\,,\ \bar{u}_3(0)\rangle=0.$$

Par moyen de l'inégalité de Korn, on déduit que :

$$\|K(\varepsilon)-K(0)\|_A^2 = a_\star^0(u(0)-u(\varepsilon)\,,u(0)-u(\varepsilon)) \geq c\,\|u(\varepsilon)-u(0)\|_{1,\Omega}^2$$

d'où (2.109).

De l'inégalité :

$$|\langle\sigma_{\alpha 3}(\varepsilon)\,,\eta_\alpha\rangle| \leq \varepsilon\,\langle\nu\,|\sigma_{33}(\varepsilon)|\,,|\eta_T|\rangle\,,\forall\eta_\alpha\in H_0^1(\omega)$$

on déduit (2.111).

On a pour tout $v\in V_{KL}(\Omega)$ avec $\eta_\alpha=0$:

$$\langle\sigma_{33}(\varepsilon)\,,\eta_3\rangle=\int_\Omega(\lambda K_{ii}(\varepsilon)\delta_{\alpha\beta}+2\mu K_{\alpha\beta}(\varepsilon))\,e_{\alpha\beta}(v)\,dx-L(v)-\langle\sigma_{\alpha 3}(\varepsilon)\,,\partial_\alpha\eta_3\rangle$$

et :

$$\langle\sigma_{33}(0)\,,\eta_3\rangle=\int_\Omega(\lambda K_{ii}(0)\delta_{\alpha\beta}+2\mu K_{\alpha\beta}(0))\,e_{\alpha\beta}(v)\,dx-L(v)$$

d'où :

$$\langle\sigma_{33}(\varepsilon)-\sigma_{33}(0)\,,\eta_3\rangle=\int_\Omega[\lambda(K_{ii}(\varepsilon)-K_{ii}(0))\delta_{\alpha\beta}+2\mu(K_{\alpha\beta}(\varepsilon)-K_{\alpha\beta}(0))]\,e_{\alpha\beta}(v)\,dx-\langle\sigma_{\alpha 3}(\varepsilon)\,,\partial_\alpha\eta$$

Il vient que :

$$\begin{aligned}\|\sigma_{33}(\varepsilon)-\sigma_{33}(0)\|_{-2,\omega} &\leq \sup_{\eta_3\in H_0^2(\Omega)} \frac{\langle \sigma_{33}(\varepsilon)-\sigma_{33}(0), \eta_3\rangle}{\|\eta_3\|_{2,\omega}}, \eta_3\neq 0 \\ &\leq c(\|K(\varepsilon)-K(0)\|_{0,\Omega}+\|\sigma_{\alpha 3}(\varepsilon)\|_{-1,\omega})\end{aligned}$$

d'où (2.110). ■

Ce qui achève la preuve du théorème.

Chapitre 3

Etude asymptotique d'un problème de contact unilatéral d'une plaque mince contre un obstacle rigide dans le cadre de l'élasticité non linéaire

D'après le chapitre précédent, quand on a utilisé le tenseur de déformation linéarisé, on a trouvé que notre problème tridimensionnel avec frottement peut être ramener à un problème bidimensionnel sans frottement. On se pose la question :"Est ce qu'on aura le même résultat si on remplace le tenseur de déformation par sa forme intiale (non linéaire) ?". C'est l'objet de ce chapitre.

Dans le même cadre de l'élasticité. On va faire l'étude variationnelle et asymptotique du même problème de contact déjà étudié dans le deuxième chapitre, en remplaçant le tenseur de déformation linéarisé par sa forme initiale non linéaire.

Comme au deuxième chapitre, on va diviser l'étude en deux parties, cas de contact sans frottement et cas de contact avec frottement. On procède à l'approche en déplacement .

La position du problème reste la même en signalant que la fonction d'interstrice d est positive dans $H_0^2(\omega)$.

Dans cette partie et dans la partie qui se suit on s'intéresse qu'à l'étude asymptotique formelle du problème.

3.1 Le cas sans frottement

3.1.1 Problème Classique $P^\varepsilon.C$

$$\begin{aligned}
&\text{Trouver } \ u^\varepsilon \ \ \text{tel que} \\
&-\partial_j^\varepsilon \hat{\sigma}_{ij}^\varepsilon = f_i^\varepsilon \quad \text{dans } \ \Omega^\varepsilon && (3.1)\\
&\hat{\sigma}_{ij}^\varepsilon n_j^\varepsilon = g_i^\varepsilon \quad \text{sur } \Gamma_-^\varepsilon && (3.2)\\
&u^\varepsilon = 0 \ \text{ sur } \Gamma_0^\varepsilon && (3.3)\\
&\bar{u}_3^\varepsilon \leq \varepsilon d, \hat{\sigma}_{33}^\varepsilon \leq 0, \hat{\sigma}_{33}^\varepsilon\left(\bar{u}_3^\varepsilon - \varepsilon d\right) = 0, \hat{\sigma}_{\alpha 3}^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_+^\varepsilon && (3.4)
\end{aligned}$$

où :

$$\hat{\sigma}_{ij}^\varepsilon = \sigma_{ij}^\varepsilon + \sigma_{kj}^\varepsilon \partial_k^\varepsilon u_i^\varepsilon \text{ et } \ \sigma_{ij}^\varepsilon = \lambda E_{pp}^\varepsilon\left(u^\varepsilon\right)\delta_{ij} + 2\mu E_{ij}^\varepsilon\left(u^\varepsilon\right) \tag{3.5}$$

avec le tenseur des déformations $E_{ij}^\varepsilon\left(u^\varepsilon\right)$ dont la forme initiale est :

$$E_{ij}^\varepsilon\left(u^\varepsilon\right) = \frac{1}{2}(\partial_i^\varepsilon u_j^\varepsilon + \partial_j^\varepsilon u_i^\varepsilon + \partial_i^\varepsilon u_k^\varepsilon \partial_j^\varepsilon u_k^\varepsilon) \tag{3.6}$$

Remarque 44 *La quantité $\hat{\sigma}_{33}^\varepsilon$ représente la densité de la force de pression sur Γ_+^ε.*

3.1.2 Problème variationnel

On pose :

$$\begin{aligned}
&V(\Omega^\varepsilon) = \{v \in W^{1,4}(\Omega^\varepsilon)/v = 0 \ \text{ sur } \Gamma_0^\varepsilon\} \\
&K(\Omega^\varepsilon) = \left\{v \in V(\Omega^\varepsilon)/\bar{v} \leq \varepsilon d \ \text{ sur } \ \Gamma_+^\varepsilon\right\} \\
&\overrightarrow{V}(\Omega^\varepsilon) = V(\Omega^\varepsilon) \times V(\Omega^\varepsilon) \times V(\Omega^\varepsilon) \\
&\overrightarrow{K}(\Omega^\varepsilon) = V(\Omega^\varepsilon) \times V(\Omega^\varepsilon) \times K(\Omega^\varepsilon).
\end{aligned}$$

Théorème 45 *Si u^ε est solution du problème classique $P^\varepsilon.C$ alors u^ε vérifie le problème*

$P^\varepsilon.V$:

$$\textit{Trouver}\quad u^\varepsilon \in \overrightarrow{K}(\Omega^\varepsilon) \quad \textit{tel que}$$

$$a^\varepsilon(u^\varepsilon, v^\varepsilon) = L^\varepsilon(v^\varepsilon) + \langle \hat{\sigma}^\varepsilon_{33}, \bar{v}^\varepsilon_3 \rangle, \ \forall\ v^\varepsilon \in \overrightarrow{V}(\Omega^\varepsilon) \tag{3.7}$$

$$\langle \hat{\sigma}^\varepsilon_{33}, \bar{v}^\varepsilon_3 - \bar{u}^\varepsilon_3 \rangle \geq 0, \ \forall\ \ v^\varepsilon_3 \in K(\Omega^\varepsilon) \tag{3.8}$$

où :

$$a^\varepsilon(u^\varepsilon, v^\varepsilon) = \int_{\Omega^\varepsilon} \sigma^\varepsilon_{ij}(u^\varepsilon)\,\partial^\varepsilon_j v^\varepsilon_i dx^\varepsilon + \int_{\Omega^\varepsilon} \sigma^\varepsilon_{kj}(u^\varepsilon)\,\partial^\varepsilon_k u^\varepsilon_i \partial^\varepsilon_j v^\varepsilon_i dx^\varepsilon \tag{3.9}$$

$$L^\varepsilon(v^\varepsilon) = \int_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon_i v^\varepsilon_i dx^\varepsilon + \int_{\Gamma^\varepsilon_-} g^\varepsilon_i \underline{v_i}^\varepsilon d\Gamma$$

$$\langle\ .,.\ \rangle \ \textit{produit de dualité de}\ W^{-\frac{3}{4},\frac{4}{3}}\left(\Gamma^\varepsilon_+\right) \quad \textit{dans}\ W^{\frac{3}{4},4}\left(\Gamma^\varepsilon_+\right)$$

Preuve. Soit u^ε solution de P$^\varepsilon$.C. En prenant v^ε de $\overrightarrow{V}(\Omega^\varepsilon)$, donc (3.1) implique que :

$$\int_{\Omega^\varepsilon} -\partial^\varepsilon_j \hat{\sigma}^\varepsilon_{ij} v^\varepsilon_i dx^\varepsilon = \int_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon_i v^\varepsilon_i dx^\varepsilon$$

En utilisant la formule de Green et (3.2)-(3.3) et $\hat{\sigma}^\varepsilon_{\alpha 3} = 0$ sur Γ^ε_+, on trouve (3.7). On a :

$$\begin{aligned}
\langle \hat{\sigma}^\varepsilon_{33}, \bar{v}^\varepsilon_3 - \bar{u}^\varepsilon_3 \rangle &= \langle \hat{\sigma}^\varepsilon_{33}, \bar{v}^\varepsilon_3 - \varepsilon d + \varepsilon d - \bar{u}^\varepsilon_3 \rangle \\
&= \langle \hat{\sigma}^\varepsilon_{33}, \bar{v}^\varepsilon_3 - \varepsilon d \rangle + \langle \hat{\sigma}^\varepsilon_{33}, \varepsilon d - \bar{u}^\varepsilon_3 \rangle \\
&= \langle \hat{\sigma}^\varepsilon_{33}, \bar{v}^\varepsilon_3 - \varepsilon d \rangle \geq 0, \forall v_3 \in K(\Omega^\varepsilon)
\end{aligned}$$

d'où (3.8).

■

Théorème 46 *Supposons que u^ε est assez régulier. Si u^ε est solution de $P^\varepsilon.V$ alors u^ε vérifie $P^\varepsilon.C$.*

Preuve. Soit u^ε, assez régulier, solution de P$^\varepsilon$.V. On prend v^ε de $(D(\Omega^\varepsilon))^3$ dans (3.7), on obtient :

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon \partial_j^\varepsilon v_i^\varepsilon dx^\varepsilon + \int_{\Omega^\varepsilon} \sigma_{kj}^\varepsilon (u^\varepsilon) \partial_k^\varepsilon u_i^\varepsilon \partial_j^\varepsilon v_i^\varepsilon dx^\varepsilon = \int_{\Omega^\varepsilon} f_i^\varepsilon v_i^\varepsilon dx^\varepsilon \tag{3.10}$$

d'où, en utilisant la formule de Green, on trouve (3.1) au sens des distributions. Puis on prend v^ε de $\left(D(\Omega^\varepsilon \cup \Gamma_-^\varepsilon)\right)^3$ dans (3.7), avec (3.10) on trouve :

$$\int_{\Gamma_-^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon n_j^\varepsilon \underline{v}_i^\varepsilon dx^\varepsilon + \int_{\Gamma_-^\varepsilon} \sigma_{kj}^\varepsilon \partial_k^\varepsilon u_i^\varepsilon n_j^\varepsilon \underline{v}_i^\varepsilon dx^\varepsilon = \int_{\Gamma_-^\varepsilon} g_i^\varepsilon \underline{v}_i^\varepsilon dx^\varepsilon$$

d'où (3.2) au sens des distributions.

On prend φ de $\left(D(\Omega^\varepsilon \cup \Gamma_+^\varepsilon)\right)^3$ dans (3.7), et en utilisant (3.1) et (3.2) on trouve : $\langle \hat{\sigma}_{\alpha 3}^\varepsilon, \bar{\varphi}_\alpha \rangle = 0$ d'où $\hat{\sigma}_{\alpha 3}^\varepsilon = 0$ p.p sur Γ_+^ε.

Puis on prend $v^\varepsilon = u^\varepsilon + \varphi$ dans (3.8) avec $\varphi \in \left(D(\Omega^\varepsilon \cup \Gamma_+^\varepsilon)\right)^3$ et $\bar{\varphi}_3 \leq 0$ sur Γ_+^ε, on obtient : $\langle \hat{\sigma}_{33}^\varepsilon, \bar{\varphi}_3 \rangle \geq 0$ ce qui donne $\hat{\sigma}_{33}^\varepsilon \leq 0$ sur Γ_+^ε.

Pour finir, on prend $\bar{v}_3^\varepsilon = \varepsilon d$ puis $\bar{v}_3^\varepsilon = 2\bar{u}_3^\varepsilon - \varepsilon d$ dans (3.8) on trouve $\langle \hat{\sigma}_{33}^\varepsilon, \bar{u}_3^\varepsilon - \varepsilon d \rangle = 0$, et puisque $\hat{\sigma}_{33}^\varepsilon (\bar{u}_3^\varepsilon - \varepsilon d) \geq 0$ alors $\hat{\sigma}_{33}^\varepsilon (\bar{u}_3^\varepsilon - \varepsilon d) = 0$ sur Γ_+^ε. Par conséquent (3.4).

■

3.1.3 Etude asymptotique

Mise à l'échelle des données :

On effectue une mise à l'échelle similaire à celle utilisée au deuxième chapitre.

On note ainsi :

$$\begin{aligned}
V(\Omega) &= \left\{v \in W^{1,4}(\Omega) / v = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0\right\} \\
K(\Omega) &= \{v \in V(\Omega) / \ \bar{v}_3 \leq d \quad \text{sur} \quad \Gamma_+\} \\
\overrightarrow{\mathrm{V}}(\Omega) &= V(\Omega) \times V(\Omega) \times V(\Omega) \\
\overrightarrow{\mathrm{K}}(\Omega) &= V(\Omega) \times V(\Omega) \times K(\Omega)
\end{aligned}$$

Mise à l'échelle du problème variationnel

On pose :

$$\left\{\begin{array}{l}
E^0_{ij}(v) = \frac{1}{2}(\partial_i v_j + \partial_j v_i + \partial_i v_3 \partial_j v_3) \\
E^2_{ij}(v) = \frac{1}{2}\partial_i v_\alpha \partial_j v_\alpha
\end{array}\right. \tag{3.11}$$

Donc le tenseur des déformations mis à l'échelle est de la forme :

$$\left\{\begin{array}{l}
E^\varepsilon_{\alpha\beta}(u^\varepsilon) = \varepsilon^2 E^0_{\alpha\beta}(u(\varepsilon)) + \varepsilon^4 E^2_{\alpha\beta}(u(\varepsilon)) \\
E^\varepsilon_{\alpha 3}(u^\varepsilon) = \varepsilon E^0_{\alpha 3}(u(\varepsilon)) + \varepsilon^3 E^2_{\alpha 3}(u(\varepsilon)) \\
E^\varepsilon_{33}(u^\varepsilon) = E^0_{33}(u(\varepsilon)) + \varepsilon^2 E^2_{33}(u(\varepsilon))
\end{array}\right. \tag{3.12}$$

D'où :

$$\left\{\begin{array}{l}
\sigma^\varepsilon_{\alpha\beta} = \lambda E^0_{33}(u(\varepsilon))\,\delta_{\alpha\beta} + \varepsilon^2\left[\lambda\left(E^0_{\gamma\gamma}(u(\varepsilon)) + E^2_{33}(u(\varepsilon))\right)\delta_{\alpha\beta} + 2\mu E^0_{\alpha\beta}(u(\varepsilon))\right] \\
\qquad\qquad + \varepsilon^4\left[\lambda E^2_{\gamma\gamma}(u(\varepsilon))\,\delta_{\alpha\beta} + 2\mu E^2_{\alpha\beta}(u(\varepsilon))\right] \\
\sigma^\varepsilon_{\alpha 3} = \varepsilon\left[2\mu E^0_{\alpha 3}(u(\varepsilon))\right] + \varepsilon^3\left[2\mu E^2_{\alpha 3}(u(\varepsilon))\right] \\
\sigma^\varepsilon_{33} = (\lambda + 2\mu)\,E^0_{33}(u(\varepsilon)) + \varepsilon^2\left[\lambda E^0_{\gamma\gamma}(u(\varepsilon)) + (\lambda + 2\mu)\,E^2_{33}(u(\varepsilon))\right] \\
\qquad\qquad + \varepsilon^4 \lambda E^2_{\gamma\gamma}(u(\varepsilon))
\end{array}\right. \tag{3.13}$$

Théorème 47 *Le problème variationnel $P^{\varepsilon}.V$ est équivalent au problème suivant $P(\varepsilon).V$:*

$$\text{Trouver } \ u(\varepsilon) \in \overrightarrow{K}(\Omega) \quad \text{tel que :}$$

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}(\varepsilon)\,\partial_j v_i dx + \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\varepsilon)\,\partial_i u_3(\varepsilon)\,\partial_j v_3 dx + \varepsilon^2 \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\varepsilon)\,\partial_i u_\alpha(\varepsilon)\,\partial_j v_\alpha dx$$
$$= L(v) + \langle \hat{\sigma}_{33}(\varepsilon), \bar{v}_3 \rangle, \forall v \in \overrightarrow{V}(\Omega) \tag{3.14}$$

$$\langle \hat{\sigma}_{33}(\varepsilon), \bar{v}_3 - \bar{u}_3(\varepsilon) \rangle \ \geq 0, \ \forall v_3 \in K(\Omega) \tag{3.15}$$

tels que : $\quad \hat{\sigma}_{33}(\varepsilon) = \sigma_{33}(\varepsilon) + \sigma_{k3}(\varepsilon)\,\partial_k u_3(\varepsilon).$

$$\sigma_{\alpha\beta}(\varepsilon) = \varepsilon^{-2}\sigma^{\varepsilon}_{\alpha\beta}; \sigma_{\alpha 3}(\varepsilon) = \varepsilon^{-3}\sigma^{\varepsilon}_{\alpha 3}; \sigma_{33}(\varepsilon) = \varepsilon^{-4}\sigma^{\varepsilon}_{33}. \tag{3.16}$$

$$L^{\varepsilon}(v^{\varepsilon}) = \varepsilon^5 L(v) \quad \text{avec} \quad L(v) = \int_{\Omega} f_i v_i dx + \int_{\Gamma_-} g_i \underline{v}_i d\Gamma. \tag{3.17}$$

Preuve. On a de (3.7) :

$$\int_{\Omega^{\varepsilon}} \sigma^{\varepsilon}_{\alpha\beta}(u^{\varepsilon})\,\partial^{\varepsilon}_{\beta} v^{\varepsilon}_{\alpha} dx^{\varepsilon} + \int_{\Omega^{\varepsilon}} \sigma^{\varepsilon}_{\alpha 3}(u^{\varepsilon})\,(\partial^{\varepsilon}_{3} v^{\varepsilon}_{\alpha} + \partial^{\varepsilon}_{\alpha} v^{\varepsilon}_{3})\,dx^{\varepsilon} + \int_{\Omega^{\varepsilon}} \sigma^{\varepsilon}_{33}(u^{\varepsilon})\,\partial^{\varepsilon}_{3} v^{\varepsilon}_{3} dx^{\varepsilon} +$$
$$\int_{\Omega^{\varepsilon}} \sigma^{\varepsilon}_{\alpha\beta}(u^{\varepsilon})\,\partial^{\varepsilon}_{\alpha} u^{\varepsilon}_{\gamma}\partial^{\varepsilon}_{\beta} v^{\varepsilon}_{\gamma} dx^{\varepsilon} + \int_{\Omega^{\varepsilon}} \sigma^{\varepsilon}_{\alpha 3}(u^{\varepsilon})\,\partial^{\varepsilon}_{\alpha} u^{\varepsilon}_{\rho}\partial^{\varepsilon}_{3} v^{\varepsilon}_{\rho} dx^{\varepsilon} + \int_{\Omega^{\varepsilon}} \sigma^{\varepsilon}_{3\alpha}(u^{\varepsilon})\,\partial^{\varepsilon}_{3} u^{\varepsilon}_{\rho}\partial^{\varepsilon}_{\alpha} v^{\varepsilon}_{\rho} dx^{\varepsilon}$$
$$+ \int_{\Omega^{\varepsilon}} \sigma^{\varepsilon}_{\alpha\beta}(u^{\varepsilon})\,\partial^{\varepsilon}_{\alpha} u^{\varepsilon}_{3}\partial^{\varepsilon}_{\beta} v^{\varepsilon}_{3} dx^{\varepsilon} + \int_{\Omega^{\varepsilon}} \sigma^{\varepsilon}_{\alpha 3}(u^{\varepsilon})\,\partial^{\varepsilon}_{\alpha} u^{\varepsilon}_{3}\partial^{\varepsilon}_{3} v^{\varepsilon}_{3} dx^{\varepsilon} + \int_{\Omega^{\varepsilon}} \sigma^{\varepsilon}_{3\alpha}(u^{\varepsilon})\,\partial^{\varepsilon}_{3} u^{\varepsilon}_{3}\partial^{\varepsilon}_{\alpha} v^{\varepsilon}_{3} dx^{\varepsilon}$$
$$+ \int_{\Omega^{\varepsilon}} \sigma^{\varepsilon}_{33}(u^{\varepsilon})\,\partial^{\varepsilon}_{3} u^{\varepsilon}_{3}\partial^{\varepsilon}_{3} v^{\varepsilon}_{3} dx^{\varepsilon} + \int_{\Omega^{\varepsilon}} \sigma^{\varepsilon}_{33}(u^{\varepsilon})\,\partial^{\varepsilon}_{3} u^{\varepsilon}_{\gamma}\partial^{\varepsilon}_{3} v^{\varepsilon}_{\gamma} dx^{\varepsilon} = L^{\varepsilon}(v^{\varepsilon}) + \langle \sigma^{\varepsilon}_{33} + \sigma^{\varepsilon}_{k3}\partial^{\varepsilon}_{k} u^{\varepsilon}_{3}, \bar{v}^{\varepsilon}_{3} \rangle \tag{3.18}$$

D'après la mise à l'échelle des données et du déplacement on trouve (3.17). On insert (3.16) et (3.17) dans (3.18) puis on divise par ε^5 on trouve (3.14) puis (3.15). ∎

Problème bidimensionnel

On postule :

$$u(\varepsilon) = u^0 + \varepsilon u^1 + \varepsilon^2 u^2 + ..., \; u^p \in \overrightarrow{K}(\Omega) \quad p \in \{0, 1, 2, 3, 4, ...\} \tag{3.19}$$

On introduit (3.19) dans (3.11), on trouve :

$$\begin{cases} E_{ij}^0(u(\varepsilon)) = \dfrac{1}{2}\left[\sum\limits_{n\in N} \varepsilon^n(\partial_i u_j^n + \partial_j u_i^n) + \sum\limits_{n\in N} \varepsilon^n \sum\limits_{p+q=n} (\partial_i u_3^p \partial_j u_3^q)\right], \;\; \text{p,q} \in N \\ E_{ij}^2(u(\varepsilon)) = \dfrac{1}{2}\left[\sum\limits_{n\in N} \varepsilon^n \sum\limits_{p+q=n} \partial_i u_\alpha^p \partial_j u_\alpha^q\right] \end{cases} \tag{3.20}$$

Le système (3.13) nous permet d'écrire :

$$\begin{cases} \sigma_{\alpha\beta}(\varepsilon) = \varepsilon^{-2}\sigma_{\alpha\beta}^{-2} + \varepsilon^{-1}\sigma_{\alpha\beta}^{-1} + \varepsilon^0\sigma_{\alpha\beta}^0 + ... \\ \sigma_{\alpha 3}(\varepsilon) = \varepsilon^{-2}\sigma_{\alpha 3}^{-2} + \varepsilon^{-1}\sigma_{\alpha 3}^{-1} + \varepsilon^0\sigma_{\alpha 3}^0 + ... \\ \sigma_{33}(\varepsilon) = \varepsilon^{-4}\sigma_{33}^{-4} + \varepsilon^{-3}\sigma_{33}^{-3} + \varepsilon^{-2}\sigma_{33}^{-2} + \varepsilon^{-1}\sigma_{33}^{-1} + \varepsilon^0\sigma_{33}^0 + ... \end{cases} \tag{3.21}$$

Donc de (3.21), on déduit que :

$$\sigma_{33}^{-4} = \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu)\,\partial_3 u_3^0 \left(2 + \partial_3 u_3^0\right) \tag{3.22}$$

$$\sigma_{33}^{-3} = (\lambda + 2\mu)\,\partial_3 u_3^1 \left(1 + \partial_3 u_3^0\right) \tag{3.23}$$

A l'ordre de ε^{-4} :

$$\int_\Omega \sigma_{33}^{-4}\left(1 + \partial_3 u_3^0\right)\partial_3 v_3 dx = \left\langle \sigma_{33}^{-4}\left(1 + \partial_3 u_3^0\right), \bar{v}_3 \right\rangle, \;\; \forall v_3 \in V(\Omega) \tag{3.24}$$

On prend $\bar{v}_3 = 0$ dans (3.24), on trouve :

$$\int_\Omega \sigma_{33}^{-4}\left(1 + \partial_3 u_3^0\right)\partial_3 v_3 dx = 0$$

D'après le lemme 19, on obtient que :

$$\left(1+\partial_3 u_3^0\right)\partial_3 u_3^0\left(2+\partial_3 u_3^0\right)=0$$

Si on suppose que $\partial_3 u_3^0 \in C^0\left(\bar{\Omega}\right)$,du fait que $u_3^0=0$ sur Γ_0 on déduit que :

$$\partial_3 u_3^0 = 0 \text{ sur } \bar{\Omega} \tag{3.25}$$

A l'ordre de ε^{-3} :

$$\int_\Omega \left[\sigma_{33}^{-3}\left(1+\partial_3 u_3^0\right)+\sigma_{33}^{-4}\partial_3 u_3^1\right]\partial_3 v_3 dx = 0, \forall v_3 \in V\left(\Omega\right), \ \bar{v}_3 = 0$$

En prenant compte de (3.25), on a :

$$\sigma_{33}^{-4} = 0 \tag{3.26}$$

d'où : $\int_\Omega \sigma_{33}^{-3}\partial_3 v_3 dx = 0$, ce qui donne :

$$\sigma_{33}^{-3} = 0 \tag{3.27}$$

par conséquent, de (3.21) on déduit que :

$$\partial_3 u_3^1 = 0 \tag{3.28}$$

En utilisant (3.25) et (3.28), on trouve :

$$\sigma_{\alpha\beta}^{-2} = \sigma_{\alpha\beta}^{-1} = 0 \tag{3.29}$$

A l'ordre de ε^{-2} :

$$\int_{\Omega}\left(\sigma_{\alpha 3}^{-2}(\partial_3 v_\alpha+\partial_\alpha v_3+\partial_\alpha u_3^0\partial_3 v_3)+\sigma_{33}^{-2}\partial_3 v_3\right)dx=\left\langle\sigma_{33}^{-2}+\sigma_{\alpha 3}^{-2}\partial_\alpha u_3^0,\bar{v}_3\right\rangle,\forall v\in\overrightarrow{V}(\Omega) \tag{3.30}$$

On prend $v_3=0$ dans (3.30), on trouve :

$$\int_{\Omega}\sigma_{\alpha 3}^{-2}\partial_3 v_\alpha dx=0,\forall v_\alpha\in V(\Omega) \tag{3.31}$$

Pour $\bar{v}_\alpha=0$ sur Γ_+, (3.31) donne :

$$\sigma_{\alpha 3}^{-2}=0 \tag{3.32}$$

On a de (3.21) $\sigma_{\alpha 3}^{-2}=\mu(\partial_\alpha u_3^0+\partial_3 u_\alpha^0)$ donc :

$$\partial_\alpha u_3^0+\partial_3 u_\alpha^0=0 \tag{3.33}$$

On revient à (3.30), après tenir compte de (3.32) et utiliser le lemme 19, on trouve :

$$\sigma_{33}^{-2}=0 \tag{3.34}$$

A l'ordre de ε^{-1} :

$$\int_{\Omega}\left(\sigma_{\alpha 3}^{-1}\partial_3 v_\alpha+\sigma_{33}^{-1}\partial_3 v_3\right)dx=\left\langle\sigma_{33}^{-1}+\sigma_{\alpha 3}^{-1}\partial_\alpha u_3^0,\bar{v}_3\right\rangle,\forall v\in\overrightarrow{V}(\Omega) \tag{3.35}$$

On prend $v_3=0$ et $\bar{v}_\alpha=0$ sur Γ_+ puis $\bar{v}_3=0$ dans (3.35), on trouve respectivement :

$$\sigma_{\alpha 3}^{-1}=0 \text{ et } \sigma_{33}^{-1}=0 \tag{3.36}$$

comme de (3.21) on a $\sigma_{\alpha 3}^{-1}=\mu(\partial_\alpha u_3^1+\partial_3 u_\alpha^1)$ alors :

$$\partial_\alpha u_3^1+\partial_3 u_\alpha^1=0 \tag{3.37}$$

A l'ordre de ε^0 :

$$\int_\Omega \sigma_{ij}^0 \partial_j v_i dx+\int_\Omega \sigma_{ij}^0 \partial_i u_3^0 \partial_j v_3 dx=L(v)+\left\langle \sigma_{33}^0+\sigma_{\alpha 3}^0 \partial_\alpha u_3^0, \bar{v}_3\right\rangle, \forall v \in V(\Omega) \tag{3.38}$$

tels que :

$$\begin{aligned}
\sigma_{\alpha\beta}^0 &= \lambda(\partial_3 u_3^2+\partial_\gamma u_\gamma^0+\frac{1}{2}\partial_\gamma u_3^0 \partial_\gamma u_3^0+\frac{1}{2}\partial_3 u_\gamma^0 \partial_3 u_\gamma^0)\delta_{\alpha\beta} && (3.39)\\
&\quad +\mu(\partial_\alpha u_\beta^0+\partial_\beta u_\alpha^0+\partial_\alpha u_3^0 \partial_\beta u_3^0)\\
\sigma_{\alpha 3}^0 &= \mu(\partial_\alpha u_3^2+\partial_3 u_\alpha^2+\partial_\alpha u_3^0 \partial_3 u_3^2+\partial_\alpha u_\gamma^0 \partial_3 u_\gamma^0) && (3.40)\\
\sigma_{33}^0 &= (\lambda+2\mu)\,(\partial_3 u_3^4+\frac{1}{2}\partial_3 u_3^2 \partial_3 u_3^2+\partial_3 u_\gamma^0 \partial_3 u_\gamma^2+\frac{1}{2}\partial_3 u_\gamma^1 \partial_3 u_\gamma^1)\\
&\quad +\lambda(\partial_\gamma u_\gamma^2+\partial_\gamma u_3^0 \partial_\gamma u_3^2+\frac{1}{2}\partial_\gamma u_3^1 \partial_\gamma u_3^1+\frac{1}{2}\partial_\gamma u_\alpha^0 \partial_\gamma u_\alpha^0) && (3.41)
\end{aligned}$$

On a de (3.21) : $\sigma_{33}^{-2}=(\lambda+2\mu)\,(\partial_3 u_3^2+\frac{1}{2}\partial_3 u_\gamma^0 \partial_3 u_\gamma^0)+\dfrac{\lambda}{2}(2\partial_\gamma u_\gamma^0+\partial_\gamma u_3^0 \partial_\gamma u_3^0)$
Donc, avec (3.34), on peut conclure que :

$$\partial_3 u_3^2=\frac{-\lambda}{\lambda+2\mu}(\partial_\gamma u_\gamma^0+\frac{1}{2}\partial_\gamma u_3^0 \partial_\gamma u_3^0)-\frac{1}{2}\partial_3 u_\gamma^0 \partial_3 u_\gamma^0 \tag{3.42}$$

Après insertion de (3.42) dans (3.39), on trouve que :

$$\sigma_{\alpha\beta}^0=\frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}E_{\gamma\gamma}^0\left(u^0\right)\delta_{\alpha\beta}+2\mu E_{\alpha\beta}^0\left(u^0\right) \tag{3.43}$$

De (3.25) et (3.33), on constate que u^0 est de type Kirchhoff-Love. On introduit l'espace :

$$\tilde{V}_{KL}(\Omega) = \left\{ v = (v_i) \in \ \overrightarrow{V}(\Omega) / \partial_i v_3 + \partial_3 v_i = 0 \right\}$$

Cet espace peut être défini par :

$$\tilde{V}_{KL}(\Omega) = \left\{ \begin{array}{c} v = (v_i) \in \left(W^{1,4}(\Omega)\right)^3 / v_\alpha = \eta_\alpha - x_3 \partial_\alpha \eta_3, \ v_3 = \eta_3 \ \text{ tels que} \\ \eta_\alpha \in W_0^{1,4}(\omega), \ \eta_3 \in W_0^{2,4}(\omega) \end{array} \right\}$$

En effet, soit $v \in \tilde{V}_{KL}(\Omega)$ alors $\partial_3 v_3 = 0$ dans Ω et $v_3 = 0$ sur Γ_0 donc v_3 est indépendent de x_3. Par conséquent, il existe $\eta_3 \in W_0^{1,4}(\omega)$ telle que $v_3 = \eta_3$.

L'équation $\partial_\alpha v_3 + \partial_3 v_\alpha = 0$ implique que $\partial_{33} v_\alpha = -\partial_\alpha (\partial_3 v_3) = 0$ (au sens des distributions). D'où, avec $v_\alpha = 0$ sur Γ_0, il existe η_α, $\eta_\alpha^1 \in W_0^{1,4}(\omega)$ telles que $v_\alpha = \eta_\alpha + x_3 \eta_\alpha^1$. On a $\partial_\alpha v_3 + \partial_3 v_\alpha = \partial_\alpha \eta_3 + \eta_\alpha^1 = 0$, d'où $\eta_3 \in W_0^{2,4}(\omega)$. Inversement, si $v_\alpha = \eta_\alpha - x_3 \partial_\alpha \eta_3, v_3 = \eta_3$ avec $(\eta_\alpha, \eta_3) \in W_0^{1,4}(\omega) \times W_0^{2,4}(\omega)$, il est claire que $v \in \overrightarrow{V}(\Omega)$ et $\partial_i v_3 + \partial_3 v_i = 0$.

L'espace $\tilde{V}_{KL}(\Omega)$ est inclu dans l'espace $V_{KL}(\Omega)$ tel que :

$$V_{KL}(\Omega) = \left\{ \begin{array}{c} v = (v_i) / v_\alpha = \eta_\alpha - x_3 \partial_\alpha \eta_3, \ v_3 = \eta_3 \ \text{ tels que} \\ \eta_\alpha \in H_0^1(\omega), \ \eta_3 \in H_0^2(\omega) \end{array} \right\}$$

Des résultats précédents et de (3.15) on déduit que : $\langle \sigma_{33}^0 + \sigma_{\alpha 3}^0 \partial_\alpha u_3^0, \bar{v}_3 - \bar{u}_3^0 \rangle \geq 0$, $\forall v_3 \in K(\Omega)$.

On pose :

$$\tau_{\alpha j} = \sigma_{\alpha j}(\varepsilon) + \varepsilon^2 \sigma_{kj}(\varepsilon) \partial_k u_\alpha(\varepsilon) \quad \text{et} \quad \tau_{3j} = \sigma_{3j}(\varepsilon) + \sigma_{kj}(\varepsilon) \partial_k u_3(\varepsilon) \tag{3.44}$$

Après insertion de (3.44) dans (3.14), on trouve :

$$\int_\Omega \tau_{ij}\partial_j v_i dx = L(v) + \langle \tau_{33}, \bar{v}_3 \rangle, \forall v \in \overrightarrow{V}(\Omega) \tag{3.45}$$

Pour φ de $(D(\Omega))^3$ puis de $(D(\Omega \cup \Gamma_+))^3$ dans (3.45), on trouve : $-\partial_j \tau_{ij} = f_i$ p.p sur Ω puis $\int_{\Gamma_+} \tau_{ij} n_j \bar{\varphi}_i d\Gamma = \langle \tau_{33}, \bar{\varphi}_3 \rangle$ d'où $\int_{\Gamma_+} \tau_{i3} \bar{\varphi}_i d\Gamma = \langle \tau_{33}, \bar{\varphi}_3 \rangle$ donc $\int_{\Gamma_+} \tau_{\alpha 3} \bar{\varphi}_\alpha d\Gamma = 0$ par conséquent $\tau_{\alpha 3} = 0$ p.p sur Γ_+. Il vient que $\sigma_{\alpha 3}(\varepsilon) + \varepsilon^2 \sigma_{k3}(\varepsilon)\partial_k u_\alpha(\varepsilon) = 0$ d'où $\sigma^0_{\alpha 3} = 0$ p.p sur Γ_+.

L'étude précédente nous permet d'établir le théorème suivant :

Théorème 48 *Soit* $u(\varepsilon)$ *solution de* $P(\varepsilon).V$ *assez régulier. Supposons que :*

$$u(\varepsilon) = u^0 + \varepsilon u^1 + \varepsilon^2 u^2 + ..., u^p \in \overrightarrow{K}(\Omega); \quad p \in \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$
$$\partial_3 u^0_3 \in C^0\left(\bar{\Omega}\right),$$

alors u^0 *est solution du problème* $P^0_{KL}.V$ *:*

$$\begin{aligned}
\textit{Trouver } u^0 &\in V_{KL}(\Omega) \cap \overrightarrow{K}(\Omega) \quad \textit{tel que :} \\
\int_\Omega \sigma^0_{\alpha\beta}\partial_\beta v_\alpha dx + \int_\Omega \sigma^0_{\alpha\beta}\partial_\alpha u^0_3 \partial_\beta v_3 dx &= L(v) + \left\langle \sigma^0_{33}, \bar{v}_3 \right\rangle, \forall v \in V_{KL}(\Omega) && (3.46)\\
\left\langle \sigma^0_{33}, \bar{v}_3 - \bar{u}^0_3 \right\rangle &\geq 0, \forall v_3 \in K(\Omega) && (3.47)
\end{aligned}$$

On a $u^0 \in V_{KL}(\Omega) \cap \overrightarrow{K}(\Omega)$ donc il existe $\xi_\alpha \in H^1_0(\omega)$ et $\xi_3 \in H^2_0(\omega)$ avec $\xi_3 \leq d$ de telle sorte que :

$$u^0_\alpha = \xi_\alpha - x_3 \partial_\alpha \xi_3, \; u^0_3 = \xi_3 \tag{3.48}$$

Chercher u^0 revient à chercher ξ_α et ξ_3. Pour cela, on introduit au début (3.48) dans l'expression de $E^0_{\alpha\beta}(v)$, on trouve :

$$E^0_{\alpha\beta}\left(u^0\right) = E^0_{\alpha\beta}(\xi) - x_3 \partial_{\alpha\beta}\xi_3 \tag{3.49}$$

d'où :

$$\sigma_{\alpha\beta}^{0}=\left[\lambda^{\star}E_{\gamma\gamma}^{0}\left(\xi\right)\delta_{\alpha\beta}+2\mu E_{\alpha\beta}^{0}\left(\xi\right)\right]-x_{3}\left[\lambda^{\star}\triangle\xi_{3}\delta_{\alpha\beta}+2\mu\partial_{\alpha\beta}\xi_{3}\right],\ \lambda^{\star}=\frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}\tag{3.50}$$

Maintenant on prend $v=(-x_3\partial_1\eta_3,-x_3\partial_2\eta_3,\eta_3)$ dans (3.46), on trouve :

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega}\left[(\lambda^{\star}E_{\gamma\gamma}^{0}\left(\xi\right)\delta_{\alpha\beta}+2\mu E_{\alpha\beta}^{0}\left(\xi\right))-x_{3}(\lambda^{\star}\triangle\xi_{3}\delta_{\alpha\beta}+2\mu\partial_{\alpha\beta}\xi_{3})\right](-x_{3}\partial_{\alpha\beta}\eta_{3})dx\\&\quad+\int_{\Omega}\left[(\lambda^{\star}E_{\gamma\gamma}^{0}\left(\xi\right)\delta_{\alpha\beta}+2\mu E_{\alpha\beta}^{0}\left(\xi\right))-x_{3}(\lambda^{\star}\triangle\xi_{3}\delta_{\alpha\beta}+2\mu\partial_{\alpha\beta}\xi_{3})\right]\partial_{\alpha}\xi_{3}\partial_{\beta}\eta_{3}dx\\&\qquad=L(v)+\left\langle\sigma_{33}^{0},\eta_{3}\right\rangle,\forall\eta_{3}\in H_{0}^{2}\left(\omega\right)\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega}x_{3}^{2}(\lambda^{\star}\triangle\xi_{3}\delta_{\alpha\beta}+2\mu\partial_{\alpha\beta}\xi_{3})\partial_{\alpha\beta}\eta_{3}dx+\int_{\Omega}(\lambda^{\star}E_{\gamma\gamma}^{0}\left(\xi\right)\delta_{\alpha\beta}+2\mu E_{\alpha\beta}^{0}\left(\xi\right))\partial_{\alpha}\xi_{3}\partial_{\beta}\eta_{3}dx\\&=\int_{\Omega}-x_{3}f_{\alpha}\partial_{\alpha}\eta_{3}dx+\int_{\Omega}f_{3}\eta_{3}dx+\int_{\Gamma_{-}}g_{\alpha}^{-}\partial_{\alpha}\eta_{3}d\Gamma+\int_{\Gamma_{-}}g_{3}^{-}\eta_{3}d\Gamma+\int_{\Gamma_{+}}\sigma_{33}^{0}\eta_{3}d\Gamma,\forall\eta_{3}\in H_{0}^{2}\left(\omega\right)\end{aligned}\tag{3.51}$$

On pose :

$$m_{\alpha\beta}=-\left(\frac{2}{3}\lambda^{\star}\triangle\xi_{3}\delta_{\alpha\beta}+\frac{4}{3}\mu\partial_{\alpha\beta}\xi_{3}\right)\tag{3.52}$$

$$n_{\alpha\beta}=2\lambda^{\star}E_{\gamma\gamma}^{0}\left(\xi\right)\delta_{\alpha\beta}+4\mu E_{\alpha\beta}^{0}\left(\xi\right)\tag{3.53}$$

d'où (3.51) devient :

$$\int_\omega -m_{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta}\eta_3 dx' + \int_\omega n_{\alpha\beta}\partial_\alpha\xi_3\partial_\beta\eta_3 dx' = \int_\omega \left[\left(\int_{-1}^{+1} -x_3 f_\alpha \partial_\alpha \eta_3 dx_3 \right) + g_\alpha \partial_\alpha \eta_3 \right] dx'$$
$$+ \int_\omega \left(\int_{-1}^{+1} f_3 dx_3 + g_3 \right) \eta_3 dx' + \int_\omega \sigma_{33}^0 \eta_3 dx', \forall \eta_3 \in H_0^2(\omega)$$

Du fait que, pour $\xi_3, \eta_3 \in D(\omega)$, on a :

$$\int_\omega \Delta\xi_3 \partial_{\alpha\alpha}\eta_3 dx' = \int_\omega \Delta^2 \xi_3 \eta_3 dx' \tag{3.54}$$
$$\int_\omega \partial_{\alpha\beta}\xi_3 \partial_{\alpha\beta}\eta_3 dx' = \int_\omega \Delta^2 \xi_3 \eta_3 dx' \tag{3.55}$$

par densité (3.54) et (3.55) restent vraies pour $\xi_3,\ \eta_3 \in H_0^2(\omega)$.

Il vient de (3.51) que ξ_3 vérifie :

$$\int_\omega \left[k\Delta^2\xi_3 - \partial_\beta(n_{\alpha\beta}\partial_\alpha\xi_3) \right] \eta_3 dx' = \int_\omega (h_1^1 + h_2^1 + h_3^0 + \sigma_{33}^0)\eta_3 dx', \forall \eta_3 \in D(\omega) \tag{3.56}$$

avec :

$$k = \frac{8}{3}\mu\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu};\, h_i^0 = \int_{-1}^{+1} f_i dx_3 + g_i^-;\ \ h_i^1 = \int_{-1}^{+1} x_3 \partial_\alpha f_\alpha dx_3 - \partial_\alpha g_\alpha^- \tag{3.57}$$

Maintenant pour trouver ξ_α, on prend $v = (\eta_1, \eta_2, 0)$ dans (3.46) on obtient :

$$\int_\Omega \sigma_{\alpha\beta}^0 \partial_\beta \eta_\alpha dx = \int_\Omega f_\alpha \eta_\alpha dx + \int_{\Gamma_-} g_\alpha^- \eta_\alpha d\Gamma, \quad \forall \eta_\alpha \in H_0^1(\omega) \tag{3.58}$$

D'où :

$$\int_\omega n_{\alpha\beta}\partial_\beta\eta_\alpha dx' = \int_\omega h_\alpha^0 \eta_\alpha dx',\ \forall \eta_\alpha \in H_0^1(\omega) \tag{3.59}$$

Pour $\eta_\alpha \in D(\omega)$, on a $\int_\omega n_{\alpha\beta}\partial_\beta\eta_\alpha dx' = -\int_\omega \partial_\beta n_{\alpha\beta}\eta_\alpha dx'$.

Pour la condition du contact unilatéral, on prend $v_3 = d$ puis $v_3 = 2u_3^0 - d$ dans (3.47), on trouve :

$$\left\langle \sigma_{33}^0, d - \xi_3 \right\rangle = 0 \text{ sur } \omega \text{ et } \sigma_{33}^0 \leq 0 \text{ dans } H^{-2}(\omega) \tag{3.60}$$

D'où d'après (3.48), (3.56), (3.59) et (3.60), on aboutit au théorème suivant :

Théorème 49 *Si u^0 est solution de $P_{KL}^0.V$ tel que $u_\alpha^0 = \xi_\alpha - x_3\partial_\alpha\xi_3$ et $u_3^0 = \xi_3$, ξ_α, ξ_3 assez réguliers. Alors ξ_α, ξ_3 vérifient le problème bidimensionnel $P^b(0)$:*

$$\begin{cases} \textit{Trouver } \xi_\alpha \in H_0^1(\omega),\ \xi_3 \in H_0^2(\omega),\ \xi_3 \leq d \ \textit{ tels que :} \\ k\Delta^2\xi_3 - \partial_\beta(n_{\alpha\beta}\partial_\alpha\xi_3) = h_1^1 + h_2^1 + h_3^0 + \sigma_{33}^0 \\ -\partial_\beta n_{\alpha\beta} = h_\alpha^0 \\ \langle \sigma_{33}^0, d - \xi_3 \rangle = 0 \\ \sigma_{33}^0 \leq 0 \quad \textit{dans } \ H^{-2}(\omega) \end{cases}$$

où :

$$\begin{aligned} n_{\alpha\beta} &= 2\lambda^\star E_{\gamma\gamma}^0(\xi)\,\delta_{\alpha\beta} + 4\mu E_{\alpha\beta}^0(\xi) \\ k &= \frac{8}{3}\mu\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}; \quad h_i^0 = \int_{-1}^{+1} f_i dx_3 + g_i^-;\ h_i^1 = \int_{-1}^{+1} x_3\partial_i f_i dx_3 - \partial_i g_i^-. \end{aligned}$$

3.2 Le cas de contact avec frottement de Coulomb

3.2.1 Problème classique P$^\varepsilon$.C

$$\begin{cases} \text{Trouver } \ u^\varepsilon \quad \text{ tel que :} \\ -\partial_j^\varepsilon \hat{\sigma}_{ij}^\varepsilon = f_i^\varepsilon \quad \text{ dans } \ \Omega^\varepsilon \\ \hat{\sigma}_{ij}^\varepsilon n_j^\varepsilon = g_i^\varepsilon \quad \text{ sur } \Gamma_-^\varepsilon \\ u^\varepsilon = 0 \quad \text{ sur } \Gamma_0^\varepsilon \\ \bar{u}_3^\varepsilon \leq \varepsilon d, \hat{\sigma}_{33}^\varepsilon \leq 0, \hat{\sigma}_{33}^\varepsilon \left(\bar{u}_3^\varepsilon - \varepsilon d\right) = 0, \quad \text{ sur } \ \Gamma_+^\varepsilon \\ \left|\hat{\sigma}_T^\varepsilon\right| < \nu \left|\hat{\sigma}_{33}^\varepsilon\right| \Rightarrow \bar{u}_T^\varepsilon = 0 \quad \text{ sur } \ \Gamma_+^\varepsilon \\ \left|\hat{\sigma}_T^\varepsilon\right| = \nu \left|\hat{\sigma}_{33}^\varepsilon\right| \Rightarrow \exists \delta > 0, \ \bar{u}_T^\varepsilon = -\delta \hat{\sigma}_T^\varepsilon, \ \hat{\sigma}_T^\varepsilon = \left(\hat{\sigma}_{\alpha 3}^\varepsilon\right) \quad \text{ sur } \Gamma_+^\varepsilon \end{cases}$$

où :

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{ij}^\varepsilon &= \sigma_{ij}^\varepsilon + \sigma_{kj}^\varepsilon \partial_k^\varepsilon u_i^\varepsilon \\ \sigma_{ij}^\varepsilon &= \lambda E_{pp}^\varepsilon \left(u^\varepsilon\right) \delta_{ij} + 2\mu E_{ij}^\varepsilon \left(u^\varepsilon\right) \\ E_{ij}^\varepsilon \left(u^\varepsilon\right) &= \frac{1}{2} (\partial_i^\varepsilon u_j^\varepsilon + \partial_j^\varepsilon u_i^\varepsilon + \partial_i^\varepsilon u_k^\varepsilon \partial_j^\varepsilon u_k^\varepsilon). \end{aligned}$$

Remarque 50 *Les quantités $\hat{\sigma}_{\alpha 3}^\varepsilon$ et $\hat{\sigma}_{33}^\varepsilon$ représentent respectivement les densités des forces de frottement et la densité de la force pression sur Γ_+^ε.*

3.2.2 Problème variationnel

On procède de la même façon que celle dans la deuxième section du chapitre précédent, on aboutit au théorème :

Théorème 51 *Si u^ε est assez régulier alors le problème $P^\varepsilon.C$ est équivalent au problème*

$P(\varepsilon).V$:

$$\textit{Trouver} \quad u^\varepsilon \in \overrightarrow{K}(\Omega^\varepsilon) \quad \textit{tel que}$$

$$a^\varepsilon(u^\varepsilon, v^\varepsilon) = L^\varepsilon(v^\varepsilon) + \langle \hat{\sigma}^\varepsilon_{i3}, \overline{v}^\varepsilon_i \rangle, \ \forall \ v^\varepsilon \in \overrightarrow{V}(\Omega^\varepsilon) \tag{3.61}$$

$$\langle \hat{\sigma}^\varepsilon_{33}, \overline{v}^\varepsilon_3 - \overline{u}^\varepsilon_3 \rangle \geq 0, \ \ \forall \ \ v^\varepsilon_3 \in K(\Omega^\varepsilon) \tag{3.62}$$

$$\langle \hat{\sigma}^\varepsilon_{\alpha 3}, \overline{v}^\varepsilon_\alpha - \overline{u}^\varepsilon_\alpha \rangle + \langle \nu \left| \hat{\sigma}^\varepsilon_{33} \right|, \left| \overline{v}^\varepsilon_T \right| - \left| \overline{u}^\varepsilon_T \right| \rangle \geq 0, \ \forall v^\varepsilon_\alpha \in V(\Omega^\varepsilon) \tag{3.63}$$

où :

$$\begin{aligned} a^\varepsilon(u^\varepsilon, v^\varepsilon) &= \int_{\Omega^\varepsilon} \sigma^\varepsilon_{ij}(u^\varepsilon)\, \partial^\varepsilon_j v^\varepsilon_i dx^\varepsilon + \int_{\Omega^\varepsilon} \sigma^\varepsilon_{ij}(u^\varepsilon)\, \partial^\varepsilon_i u^\varepsilon_k \partial^\varepsilon_j v^\varepsilon_k dx^\varepsilon \\ L^\varepsilon(v^\varepsilon) &= \int_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon_i v^\varepsilon_i dx^\varepsilon + \int_{\Gamma^\varepsilon_-} g^\varepsilon_i \underline{v_i}^\varepsilon d\Gamma. \end{aligned}$$

3.2.3 Etude asymptotique

Mise à l'échelle du problème

On garde la même mise à l'échelle que celle dans le cas sans frottement.

On pose :

$$\varepsilon^{-2}\sigma^\varepsilon_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}(\varepsilon)\,; \varepsilon^{-3}\sigma^\varepsilon_{\alpha 3} = \sigma_{\alpha 3}(\varepsilon)\,; \varepsilon^{-4}\sigma^\varepsilon_{33} = \sigma_{33}(\varepsilon) \tag{3.64}$$

Donc pour le premier membre de (3.61) on aura la même forme trouvée dans (3.9).

D'autre part on a :

$$\begin{aligned} \langle \hat{\sigma}^\varepsilon_{\alpha 3}, \overline{v}^\varepsilon_\alpha \rangle &= \langle \sigma^\varepsilon_{\alpha 3} + \sigma^\varepsilon_{k3} \partial^\varepsilon_k u^\varepsilon_\alpha, \overline{v}^\varepsilon_\alpha \rangle \\ &= \varepsilon^5 \langle \sigma_{\alpha 3}(\varepsilon), \overline{v}_\alpha \rangle + \varepsilon^7 \langle \sigma_{k3}(\varepsilon)\, \partial_k u_\alpha, \overline{v}_\alpha \rangle \end{aligned} \tag{3.65}$$

Après division par ε^5 on trouve de (3.61) que :

$$\int_{\Omega}\sigma_{ij}(\varepsilon)\,\partial_j v_i dx+\int_{\Omega}\sigma_{ij}(\varepsilon)\,\partial_i u_3(\varepsilon)\,\partial_j v_3 dx+\varepsilon^2\int_{\Omega}\sigma_{ij}(\varepsilon)\,\partial_i u_\alpha(\varepsilon)\,\partial_j v_\alpha dx = L(v)+\langle\hat{\sigma}_{33}(\varepsilon),\bar{v}_3\rangle$$
$$+\langle\sigma_{\alpha3}(\varepsilon),\bar{v}_\alpha\rangle+\varepsilon^2\langle\sigma_{k3}(\varepsilon)\,\partial_k u_\alpha,\bar{v}_\alpha\rangle,\forall v \in \overrightarrow{V}(\Omega).$$

Pour (3.62) et (3.63) on trouve :

$$\langle\hat{\sigma}_{33}(\varepsilon),\bar{v}_3-\bar{u}_3(\varepsilon)\rangle\geq 0,\ \forall v_3\in K(\Omega)$$
$$\langle\sigma_{\alpha3}(\varepsilon),\bar{v}_\alpha-\bar{u}_\alpha(\varepsilon)\rangle+\varepsilon\langle\nu|\hat{\sigma}_{33}(\varepsilon)|,|\bar{v}_T|-|\bar{u}_T(\varepsilon)|\rangle+\varepsilon^2\langle\sigma_{k3}(\varepsilon)\,\partial_k u_\alpha,\bar{v}_\alpha-\bar{u}_\alpha(\varepsilon)\rangle\geq 0,\ \forall v_\alpha\in V(\Omega$$

D'où le théorème :

Théorème 52 *Le problème variationnel $P^\varepsilon.V$ est équivalent au problème suivant $P(\varepsilon).V$:*

$$\textit{Trouver}\ \ u(\varepsilon)\in\ \overrightarrow{K}(\Omega)\quad\textit{tel que}$$
$$\int_{\Omega}\sigma_{ij}(\varepsilon)\,\partial_j v_i dx+\int_{\Omega}\sigma_{ij}(\varepsilon)\,\partial_i u_3(\varepsilon)\,\partial_j v_3 dx+\varepsilon^2\int_{\Omega}\sigma_{ij}(\varepsilon)\,\partial_i u_\alpha(\varepsilon)\,\partial_j v_\alpha dx = L(v)$$
$$+\langle\hat{\sigma}_{33}(\varepsilon),\bar{v}_3\rangle+\langle\sigma_{\alpha3}(\varepsilon),\bar{v}_\alpha\rangle+\varepsilon^2\langle\sigma_{k3}(\varepsilon)\,\partial_k u_\alpha,\bar{v}_\alpha\rangle,\forall v\in\ \overrightarrow{V}(\Omega) \tag{3.66}$$
$$\langle\hat{\sigma}_{33}(\varepsilon),\bar{v}_3-\bar{u}_3(\varepsilon)\rangle\ \ \geq 0,\forall v_3\in K(\Omega) \tag{3.67}$$
$$\langle\sigma_{\alpha3}(\varepsilon),\bar{v}_\alpha-\bar{u}_\alpha(\varepsilon)\rangle+\varepsilon\langle\nu|\hat{\sigma}_{33}(\varepsilon)|,|\bar{v}_T|-|\bar{u}_T(\varepsilon)|\rangle+$$
$$\varepsilon^2\langle\sigma_{k3}(\varepsilon)\,\partial_k u_\alpha(\varepsilon),\bar{v}_\alpha-\bar{u}_\alpha(\varepsilon)\rangle\ \ \geq 0,\ \forall\ v_\alpha\in V(\Omega) \tag{3.68}$$

Problème bidimensionnel

On postule :

$$u(\varepsilon)=\ u^0+\ \varepsilon u^1+\ \varepsilon^2u^2+....,u^p\in\overrightarrow{K}(\Omega)\ \text{ avec } p\in\{0,1,2,3,4,...\} \tag{3.69}$$

On trouve les mêmes résultats, i.e, (3.20) et le système (3.21). Après insertion dans (3.66), on trouve :

A l'ordre de ε^{-4} :

$$\int_{\Omega} \sigma_{33}^{-4}\left(1+\partial_3 u_3^0\right)\partial_3 v_3 dx = \left\langle \sigma_{33}^{-4}\left(1+\partial_3 u_3^0\right), \bar{v}_3 \right\rangle, \ \forall v_3 \in V\left(\Omega\right) \tag{3.70}$$

On prend $\bar{v}_3 = 0$ dans (3.70), on trouve :

$$\int_{\Omega} \sigma_{33}^{-4}\left(1+\partial_3 u_3^0\right)\partial_3 v_3 dx = 0$$

D'après le lemme 19, on obtient que :

$$\left(1+\partial_3 u_3^0\right)\partial_3 u_3^0\left(2+\partial_3 u_3^0\right) = 0$$

Si on suppose que $\partial_3 u_3^0 \in C^0\left(\bar{\Omega}\right)$, du fait que $u_3^0 = 0$ sur Γ_0, alors

$$\partial_3 u_3^0 = 0 \text{ sur } \bar{\Omega}. \tag{3.71}$$

On peut conclure de (3.71) que u_3^0 est indépendent de $x_3$et $\sigma_{33}^{-4} = 0$.
A l'ordre de ε^{-3} :

$$\int_{\Omega} \sigma_{33}^{-3}\partial_3 v_3 dx = 0, \forall v_3 \in V\left(\Omega\right), \ \bar{v}_3 = 0$$

d'où, grâce au lemme 19 on a : $\sigma_{33}^{-3} = 0$ d'où $\partial_3 u_3^1 = 0$ ce qui donne $\sigma_{\alpha\beta}^{-2} = \sigma_{\alpha\beta}^{-1} = 0$.
A l'ordre de ε^{-2} :

$$\int_{\Omega}\left(\sigma_{\alpha 3}^{-2}\partial_3 v_\alpha + \sigma_{\alpha 3}^{-2}\partial_\alpha v_3 + \sigma_{33}^{-2}\partial_3 v_3\right) dx = \left\langle \sigma_{33}^{-2} + \sigma_{k3}^{-2}\partial_k u_3^0, \bar{v}_3 \right\rangle + \left\langle \sigma_{\alpha 3}^{-2}, \bar{v}_\alpha \right\rangle, \forall v \in \overrightarrow{V}\left(\Omega\right) \tag{3.72}$$

On prend $v_3 = 0$ et $\bar{v}_\alpha = 0$ dans (3.72), on trouve : $\int_\Omega \sigma_{\alpha 3}^{-2}\partial_3 v_\alpha dx = 0, \forall v_\alpha \in V\left(\Omega\right)$ d'où $\sigma_{\alpha 3}^{-2} = 0$ toujours grâce au lemme 19.

On a : $\sigma_{\alpha 3}^{-2} = \mu(\partial_\alpha u_3^0 + \partial_3 u_\alpha^0)$ donc :

$$\partial_\alpha u_3^0 + \partial_3 u_\alpha^0 = 0 \tag{3.73}$$

De (3.72), on trouve :

$$\sigma_{33}^{-2} = 0 \tag{3.74}$$

A l'ordre de ε^{-1} :

$$\int_\Omega \left(\sigma_{\alpha 3}^{-1}\partial_3 v_\alpha + \sigma_{33}^{-1}\partial_3 v_3\right) dx = \left\langle \sigma_{33}^{-1} + \sigma_{k3}^{-1}\partial_k u_3^0, \bar{v}_3 \right\rangle + \left\langle \sigma_{\alpha 3}^{-1}, \bar{v}_\alpha \right\rangle, \forall v \in \overrightarrow{V}(\Omega) \tag{3.75}$$

On prend $v_3 = 0$ et $\bar{v}_\alpha = 0$ sur Γ_+ puis $\bar{v}_3 = 0$ dans (3.75),on trouve :

$$\sigma_{\alpha 3}^{-1} = \sigma_{33}^{-1} = 0 \tag{3.76}$$

Comme on a : $\sigma_{\alpha 3}^{-1} = \mu(\partial_\alpha u_3^1 + \partial_3 u_\alpha^1)$ alors :

$$\partial_\alpha u_3^1 + \partial_3 u_\alpha^1 = 0 \tag{3.77}$$

A l'ordre de ε^0 :

$$\int_\Omega \sigma_{ij}^0 \partial_j v_i dx + \int_\Omega \sigma_{ij}^0 \partial_i u_3^0 \partial_j v_3 dx = L(v) + \left\langle \hat{\sigma}_{33}^0 + \sigma_{k3}^0 \partial_k u_3^0, \bar{v}_3 \right\rangle + \left\langle \sigma_{\alpha 3}^0, \bar{v}_\alpha \right\rangle, \forall v \in \overrightarrow{V}(\Omega) \tag{3.78}$$

tels que σ_{ij}^0 définis par (3.39)-(3.41) et $\hat{\sigma}_{33}^0 = \sigma_{33}^0 + \sigma_{k3}^0 \partial_k u_3^0$.

De (3.71) et (3.73) on déduit que u^0 est de type Kirchhoff-Love donc $u^0 \in V_{KL}(\Omega) \cap \overrightarrow{K}(\Omega)$

De la condition (3.67) et la condition (3.68), on déduit :

$$\begin{aligned}\left\langle \hat{\sigma}^0_{33}, \bar{v}_3 - \bar{u}^0_3 \right\rangle &\geq 0, \forall v_3 \in K(\Omega)\\ \left\langle \sigma^0_{\alpha 3}, \bar{v}_\alpha - \bar{u}^0_\alpha \right\rangle &\geq 0, \forall v_\alpha \in V(\Omega)\end{aligned}$$

Pour des fonctions de teste convenables de $D(\Omega)$, on déduit que : $\sigma^0_{\alpha 3} = 0$ p.p sur Γ_+. D'où le théorème :

Théorème 53 *Soit* $u(\varepsilon)$ *solution de* $P(\varepsilon).V$. *Supposons que :*

$$u(\varepsilon) = u^0 + \varepsilon u^1 + \varepsilon^2 u^2 + ..., \ u^p \in \overrightarrow{K}(\Omega), \quad p \in \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$
$$\partial_3 u^0_3 \in C^0\left(\bar{\Omega}\right),$$

alors u^0 *est solution du problème* $P^0_{KL}.V$ *:*

$$\begin{aligned} \textit{Trouver} \quad u^0 &\in V_{KL}(\Omega) \cap \overrightarrow{K}(\Omega) \quad \textit{tel que}\\ \int_\Omega \sigma^0_{\alpha\beta}\partial_\beta v_\alpha dx + \int_\Omega \sigma^0_{\alpha\beta}\partial_\alpha u^0_3 \partial_\beta v_3 dx &= L(v) + \left\langle \sigma^0_{33}, \bar{v}_3 \right\rangle +, \forall v \in V_{KL}(\Omega)\\ \left\langle \sigma^0_{33}, \bar{v}_3 - \bar{u}^0_3 \right\rangle &\geq 0, \forall v_3 \in \overrightarrow{K}(\Omega)\end{aligned}$$

avec :

$$\sigma^0_{\alpha\beta} = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} E^0_{\gamma\gamma}\left(u^0\right)\delta_{\alpha\beta} + 2\mu E^0_{\alpha\beta}\left(u^0\right).$$

Remarque 54 *On déduit que le déplacement* u^0 *est caractérisé par le même problème* $P^0_{KL}.V$ *que celui trouvé dans le cas sans frottement. Donc, notre problème tridimensionnel avec frottement tend à un problème bidimentionnel sans frottement.*

Chapitre 4

Etude asymptotique d'un problème de contact d'une plaque mince contre un obstacle rigide avec les conditions de Von Kármán

Dans ce chapitre on va faire l'étude asymptotique du même problème étudié au chapitre 3. On garde les mêmes conditions sur la face supérieure et la face inférieure, pour la face latérale au lieu de l'encastrement on va imposer des forces de directions parallèles au plan de ω de composantes F_α^ε, puisque cette face est mince on va prendre la moyenne des densités F_α^ε sur chaque portion $\{(x_1, x_2)\} \times [-\varepsilon, +\varepsilon]$ et on l'exèrce sur le point $(x_1, x_2, 0) \in \gamma = \omega \times \{0\}$, on la note $\tilde{F}_\alpha^\varepsilon$. Donc les déplacements u^ε qui en découlent vérifient u_α^ε indépendents de x_3^ε et $u_3^\varepsilon = 0$ sur la partie latérale Γ_0^ε. Cette condition s'appelle la condition de Von Kármán. Toujours de la même manière, on va étudier les deux cas, le cas sans frottement et le cas avec frottement de Coulomb.

4.1 le cas de contact sans frottement

4.1.1 Problème classique P$^{\varepsilon}$.C :

$$\text{Trouver} \quad u^{\varepsilon} \quad \text{tel que}$$

$$-\partial_j^{\varepsilon}\hat{\sigma}_{ij}^{\varepsilon} = f_i^{\varepsilon} \quad \text{dans} \;\; \Omega^{\varepsilon} \tag{4.1}$$

$$\hat{\sigma}_{ij}^{\varepsilon}n_j^{\varepsilon} = g_i^{\varepsilon} \quad \text{sur } \Gamma_-^{\varepsilon} \tag{4.2}$$

$$\tilde{F}_{\alpha}^{\varepsilon} = \frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} F_{\alpha}^{\varepsilon}dx_3^{\varepsilon} \;\; \text{sur } \gamma \tag{4.3}$$

$$u_{\alpha}^{\varepsilon} \text{ indépendents de } x_3^{\varepsilon}, \; u_3^{\varepsilon} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0^{\varepsilon} \tag{4.4}$$

$$\bar{u}_3^{\varepsilon} \leq \varepsilon d, \; \hat{\sigma}_{33}^{\varepsilon} \leq 0, \; \hat{\sigma}_{33}^{\varepsilon}\left(\bar{u}_3^{\varepsilon} - \varepsilon d\right) = 0, \; \hat{\sigma}_{\alpha 3}^{\varepsilon} = 0 \quad \text{sur } \;\Gamma_+^{\varepsilon} \tag{4.5}$$

où :

$$\begin{aligned} F_{\alpha}^{\varepsilon} &= \hat{\sigma}_{\alpha\beta}^{\varepsilon}.\nu_{\beta}^{\varepsilon} = \left(\sigma_{\alpha\beta}^{\varepsilon} + \sigma_{k\beta}^{\varepsilon}\partial_k^{\varepsilon}u_{\alpha}^{\varepsilon}\right)\nu_{\beta}^{\varepsilon} && (4.6)\\ \sigma_{ij}^{\varepsilon} &= \lambda E_{pp}^{\varepsilon}\left(u^{\varepsilon}\right)\delta_{ij} + 2\mu E_{ij}^{\varepsilon}\left(u^{\varepsilon}\right) && (4.7)\\ E_{ij}^{\varepsilon}\left(u^{\varepsilon}\right) &= \frac{1}{2}(\partial_i^{\varepsilon}u_j^{\varepsilon} + \partial_j^{\varepsilon}u_i^{\varepsilon} + \partial_i^{\varepsilon}u_k^{\varepsilon}\partial_j^{\varepsilon}u_k^{\varepsilon}) && (4.8) \end{aligned}$$

4.1.2 Problème variationnel

On pose :

$$\begin{aligned} V(\Omega^{\varepsilon}) &= \left\{v \in W^{1,4}(\Omega^{\varepsilon})/v \text{ indépendent de } x_3^{\varepsilon} \text{ sur } \Gamma_0^{\varepsilon}\right\}\\ V_0(\Omega^{\varepsilon}) &= \left\{v \in W^{1,4}(\Omega^{\varepsilon})/v = 0 \text{ sur } \Gamma_0^{\varepsilon}\right\}\\ K(\Omega^{\varepsilon}) &= \left\{v \in V_0(\Omega^{\varepsilon})/\bar{v} \leq \varepsilon d \;\; \text{sur } \;\Gamma_+^{\varepsilon}\right\}\\ \overrightarrow{\mathrm{V}}(\Omega^{\varepsilon}) &= V(\Omega^{\varepsilon}) \times V(\Omega^{\varepsilon}) \times V_0(\Omega^{\varepsilon})\\ \overrightarrow{\mathrm{K}}(\Omega^{\varepsilon}) &= V(\Omega^{\varepsilon}) \times V(\Omega^{\varepsilon}) \times K(\Omega^{\varepsilon}). \end{aligned}$$

Théorème 55 *Si u^ε est solution du problème classique $P^\varepsilon.C$ alors u^ε vérifie le problème $P^\varepsilon.V$:*

$$\begin{aligned}
\textit{Trouver } u^\varepsilon &\in \overrightarrow{K}(\Omega^\varepsilon) \quad \textit{tel que} \\
\int_{\Omega^\varepsilon} \hat{\sigma}^\varepsilon_{ij}\partial^\varepsilon_j v^\varepsilon_i dx^\varepsilon &= L^\varepsilon(v^\varepsilon) + 2\varepsilon \int_\gamma \tilde{F}^\varepsilon_\alpha \tilde{v}^\varepsilon_\alpha d\gamma + \langle \hat{\sigma}^\varepsilon_{33}, \bar{v}^\varepsilon_3\rangle, \ \forall\ v^\varepsilon \in \overrightarrow{V}(\Omega^\varepsilon) \qquad (4.9) \\
\langle \hat{\sigma}^\varepsilon_{33}, \bar{v}^\varepsilon_3 - \bar{u}^\varepsilon_3\rangle &\geq 0, \ \forall\ v^\varepsilon_3 \in K(\Omega^\varepsilon) \qquad (4.10)
\end{aligned}$$

où : $\tilde{v}^\varepsilon_i = \dfrac{1}{2\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} v^\varepsilon_i dx^\varepsilon_3$ *et* $L^\varepsilon(v^\varepsilon) = \int_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon_i v^\varepsilon_i dx^\varepsilon + \int_{\Gamma^\varepsilon_-} g^\varepsilon_i \underline{v_i}^\varepsilon d\Gamma$.

Preuve. Soit $v^\varepsilon \in \overrightarrow{V}(\Omega^\varepsilon)$ donc (4.1) devient :

$$-\int_{\Omega^\varepsilon} \partial^\varepsilon_j \hat{\sigma}^\varepsilon_{ij} v^\varepsilon_i dx^\varepsilon = \int_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon_i v^\varepsilon_i dx^\varepsilon$$

ce qui donne :

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \hat{\sigma}^\varepsilon_{ij}\partial^\varepsilon_j v^\varepsilon_i dx^\varepsilon = \int_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon_i v^\varepsilon_i dx^\varepsilon + \int_{\Gamma^\varepsilon_-} \hat{\sigma}^\varepsilon_{ij} n^\varepsilon_j \underline{v_i}^\varepsilon d\Gamma + \int_{\Gamma^\varepsilon_+} \hat{\sigma}^\varepsilon_{ij} n^\varepsilon_j \bar{v}^\varepsilon_i d\Gamma + \int_{\Gamma^\varepsilon_0} \hat{\sigma}^\varepsilon_{ij}\nu^\varepsilon_j v^\varepsilon_i d\Gamma$$

On a :

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma^\varepsilon_0} \hat{\sigma}^\varepsilon_{ij}\nu^\varepsilon_j v^\varepsilon_i d\Gamma &= \int_{\Gamma^\varepsilon_0} \hat{\sigma}^\varepsilon_{\alpha j}\nu^\varepsilon_j v^\varepsilon_\alpha d\Gamma, (v^\varepsilon_3 = 0 \text{ sur } \Gamma^\varepsilon_0) \\
&= \int_{\Gamma^\varepsilon_0} \hat{\sigma}^\varepsilon_{\alpha\beta}\nu^\varepsilon_\beta v^\varepsilon_\alpha d\Gamma, \quad (\nu^\varepsilon_3 = 0)
\end{aligned}$$

On sait que $\hat{\sigma}^\varepsilon_{\alpha\beta}\nu^\varepsilon_\beta$ est la densité de la force exercée sur la portion de Γ^ε_0 dont la normale est $(\nu^\varepsilon_1, \nu^\varepsilon_2, 0)$, puisque ε assez petit ; on prend, pour chaque portion $\{(x_1, x_2)\} \times [-\varepsilon, +\varepsilon]$, $(x^\varepsilon_1, x^\varepsilon_2, 0) \in \gamma$, la moyenne $\tilde{F}^\varepsilon_\alpha$ des densités F^ε_α et on l'applique sur le point

$(x_1^\varepsilon, x_2^\varepsilon, 0)$. De même pour les déplacements v_α^ε. Donc on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_0^\varepsilon} \tilde{F}_\alpha^\varepsilon v_i^\varepsilon d\Gamma &= \int_\gamma (\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \tilde{F}_\alpha^\varepsilon \tilde{v}_\alpha^\varepsilon dx_3^\varepsilon) d\gamma \\
&= \int_\gamma \tilde{F}_\alpha^\varepsilon \tilde{v}_\alpha^\varepsilon (\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} dx_3^\varepsilon) d\gamma \\
&= 2\varepsilon \int_\gamma \tilde{F}_\alpha^\varepsilon \tilde{v}_\alpha^\varepsilon d\gamma
\end{aligned}$$

d'où (4.9).

On a : $\forall\ v_3^\varepsilon \in K(\Omega^\varepsilon)$,

$$\begin{aligned}
\langle \hat{\sigma}_{33}^\varepsilon, \bar{v}_3^\varepsilon - \bar{u}_3^\varepsilon \rangle &= \langle \hat{\sigma}_{33}^\varepsilon, \bar{v}_3^\varepsilon - \varepsilon d + \varepsilon d - \bar{u}_3^\varepsilon \rangle \\
&= \langle \hat{\sigma}_{33}^\varepsilon, \bar{v}_3^\varepsilon - \varepsilon d \rangle \geq 0
\end{aligned}$$

d'où (4.10). ■

Théorème 56 *Supposons que u^ε est assez régulier. Alors u^ε est solution de $P^\varepsilon.C$ si et seulement si u^ε est solution de $P^\varepsilon.V$.*

Preuve. On prend au début v^ε de $(D(\Omega^\varepsilon))^3$ dans (4.9), on trouve (4.1) puis on prend v^ε de $\left(D\left(\Omega^\varepsilon \cup \Gamma_-^\varepsilon\right)\right)^3$ toujours dans (4.9), on trouve (4.2). Pour avoir (4.3), on prend v^ε de $(D(\Omega^\varepsilon \cup \Gamma_0^\varepsilon))^3$, on trouve.

$$\int_{\Gamma_0^\varepsilon} \hat{\sigma}_{\alpha\beta}^\varepsilon \nu_\beta^\varepsilon v_\alpha^\varepsilon d\Gamma = 2\varepsilon \int_\gamma \tilde{F}_\alpha^\varepsilon \tilde{v}_\alpha^\varepsilon d\gamma$$

d'où :

$$\int_{\Gamma_0^\varepsilon} F_\alpha^\varepsilon v_\alpha^\varepsilon d\Gamma = 2\varepsilon \int_\gamma \tilde{F}_\alpha^\varepsilon \tilde{v}_\alpha^\varepsilon d\gamma$$

ce qui donne.

$$\int_\gamma (\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} F_\alpha^\varepsilon \tilde{v}_\alpha^\varepsilon dx_3^\varepsilon) d\gamma = 2\varepsilon \int_\gamma \tilde{F}_\alpha^\varepsilon \tilde{v}_\alpha^\varepsilon d\gamma$$

Puis pour les éléments de $D(\gamma)$, v_α^ε est indépendent de x_3^ε. On trouve que :

$$\int_\gamma (\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} F_\alpha^\varepsilon dx_3^\varepsilon) v_\alpha^\varepsilon d\gamma = 2\varepsilon \int_\gamma \tilde{F}_\alpha^\varepsilon v_\alpha^\varepsilon d\gamma$$

d'où $\tilde{F}_\alpha^\varepsilon = \dfrac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} F_\alpha^\varepsilon dx_3^\varepsilon$ p.p sur γ donc (4.3).

Pour le reste la démonstration est déjà faite au chapitre 3. ■

4.1.3 Etude asymptotique

Mise à l'échelle des données

On garde la même mise à l'échelle faite aux chapitres précédents pour les inconnus et les forces f et g. Pour $\tilde{F}$, on suppose :

$$\tilde{F}_\alpha^\varepsilon = \varepsilon^2 \tilde{F}_\alpha \tag{4.11}$$

Donc, on note :

$$\begin{aligned}
V(\Omega) &= \{v \in W^{1,4}(\Omega)/v \text{ indépendent de } x_3 \text{ sur } \Gamma_0\} \\
V_0(\Omega) &= \{v \in W^{1,4}(\Omega)/v = 0 \text{ sur } \Gamma_0\} \\
K(\Omega) &= \{v \in V_0(\Omega)/\bar{v} \leq d \ \text{ sur } \ \Gamma_+\} \\
\overrightarrow{V}(\Omega) &= V(\Omega) \times V(\Omega) \times V_0(\Omega) \\
\overrightarrow{K}(\Omega) &= V(\Omega) \times V(\Omega) \times K(\Omega).
\end{aligned}$$

Problème variationnel mis à l'échelle

Théorème 57 *Si u^ε est solution du problème $P^\varepsilon.V$ alors $u(\varepsilon)$ est solution du problème* *suivant* $P(\varepsilon).V$ *:*

$$\textit{Trouver } \ u(\varepsilon) \in \overrightarrow{K}(\Omega) \quad \textit{tel que :}$$

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}(\varepsilon)\, \partial_j v_i dx + \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\varepsilon)\, \partial_i u_3(\varepsilon)\, \partial_j v_3 dx + \varepsilon^2 \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\varepsilon)\, \partial_i u_\alpha(\varepsilon)\, \partial_j v_\alpha dx$$

$$= L(v) + \langle \hat{\sigma}_{33}(\varepsilon), \bar{v}_3 \rangle + \int_{\gamma} \tilde{F}_\alpha (\int_{-1}^{+1} v_\alpha dx_3) d\gamma, \ \forall v \in \overrightarrow{V}(\Omega) \tag{4.12}$$

$$\langle \hat{\sigma}_{33}(\varepsilon), \bar{v}_3 - \bar{u}_3(\varepsilon) \rangle \ \geq 0, \ \forall v_3 \in K(\Omega) \tag{4.13}$$

où $\sigma_{ij}(\varepsilon)$ *et* $L(v)$ *sont définis rspectivement par (3.16) et (3.17).*

Preuve. On a de (4.9) :

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \sigma^\varepsilon_{\alpha\beta}(u^\varepsilon)\, \partial^\varepsilon_\beta v^\varepsilon_\alpha dx^\varepsilon + \int_{\Omega^\varepsilon} \sigma^\varepsilon_{\alpha 3}(u^\varepsilon)\left(\partial^\varepsilon_3 v^\varepsilon_\alpha + \partial^\varepsilon_\alpha v^\varepsilon_3\right) dx^\varepsilon + \int_{\Omega^\varepsilon} \sigma^\varepsilon_{33}(u^\varepsilon)\, \partial^\varepsilon_3 v^\varepsilon_3 dx^\varepsilon +$$
$$\int_{\Omega^\varepsilon} \sigma^\varepsilon_{\alpha\beta}(u^\varepsilon)\, \partial^\varepsilon_\alpha u^\varepsilon_\gamma \partial^\varepsilon_\beta v^\varepsilon_\gamma dx^\varepsilon + \int_{\Omega^\varepsilon} \sigma^\varepsilon_{\alpha 3}(u^\varepsilon)\, \partial^\varepsilon_\alpha u^\varepsilon_\rho \partial^\varepsilon_3 v^\varepsilon_\rho dx^\varepsilon + \int_{\Omega^\varepsilon} \sigma^\varepsilon_{3\alpha}(u^\varepsilon)\, \partial^\varepsilon_3 u^\varepsilon_\rho \partial^\varepsilon_\alpha v^\varepsilon_\rho dx^\varepsilon$$
$$+ \int_{\Omega^\varepsilon} \sigma^\varepsilon_{\alpha\beta}(u^\varepsilon)\, \partial^\varepsilon_\alpha u^\varepsilon_3 \partial^\varepsilon_\beta v^\varepsilon_3 dx^\varepsilon + \int_{\Omega^\varepsilon} \sigma^\varepsilon_{\alpha 3}(u^\varepsilon)\, \partial^\varepsilon_\alpha u^\varepsilon_3 \partial^\varepsilon_3 v^\varepsilon_3 dx^\varepsilon + \int_{\Omega^\varepsilon} \sigma^\varepsilon_{3\alpha}(u^\varepsilon)\, \partial^\varepsilon_3 u^\varepsilon_3 \partial^\varepsilon_\alpha v^\varepsilon_3 dx^\varepsilon$$
$$+ \int_{\Omega^\varepsilon} \sigma^\varepsilon_{33}(u^\varepsilon)\, \partial^\varepsilon_3 u^\varepsilon_3 \partial^\varepsilon_3 v^\varepsilon_3 dx^\varepsilon + \int_{\Omega^\varepsilon} \sigma^\varepsilon_{33}(u^\varepsilon)\, \partial^\varepsilon_3 u^\varepsilon_\gamma \partial^\varepsilon_3 v^\varepsilon_\gamma dx^\varepsilon = L^\varepsilon(v^\varepsilon) + 2\varepsilon \int_{\gamma} \tilde{F}^\varepsilon_\alpha v^\varepsilon_i d\gamma + \langle \hat{\sigma}^\varepsilon_{33}, \bar{v}^\varepsilon_3 \rangle \tag{4.14}$$

Après insertion des inconnus et les données mis à l'échelle dans (4.14) puis on divise ses deux membres par ε^5, on trouve (4.12). De la même façon pour avoir (4.13). ■

Problème bidimensionnel

On postule :

$$u(\varepsilon) = \ u^0 + \ \varepsilon u^1 + \ \varepsilon^2 u^2 + ..., u^p \in \overrightarrow{K}(\Omega) \quad p \in \{0, 1, 2, 3, 4, ...\} \tag{4.15}$$

On introduit l'ensemble des déplacements admissibles de type Kirchhoff-Love $\tilde{V}_{KL}(\Omega)$ tel que :

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_{KL}(\Omega) &= \left\{ v \in \overrightarrow{V}(\Omega) / \partial_i v_3 + \partial_3 v_i = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{array}{c} v = (v_i) \in \left(W^{1,4}(\Omega)\right)^3 / v_\alpha = \eta_\alpha - x_3 \partial_\alpha \eta_3, v_3 = \eta_3 \text{ tels que :} \\ \eta_\alpha \in W^{1,4}(\omega), \eta_3 \in W_0^{2,4}(\omega) \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

Cet espace est inclu dans l'espace :

$$V_{KL}(\Omega) = \left\{ \begin{array}{c} v = (v_i) / v_\alpha = \eta_\alpha - x_3 \partial_\alpha \eta_3, \ v_3 = \eta_3 \ \text{ tels que :} \\ \eta_\alpha \in H^1(\omega), \ \eta_3 \in H_0^2(\omega) \end{array} \right\} \tag{4.16}$$

Théorème 58 *Si* $u(\varepsilon)$ *est solution de* $P(\varepsilon).V$ *et* $\partial_3 u_3^0 \in C^0(\bar{\Omega})$. *Alors* u^0 *est solution du problème* $P_{KL}^0.V$ *:*

$$\text{Trouver} \quad u^0 \in \ V_{KL}(\Omega) \cap \overrightarrow{K}(\Omega) \quad \text{tel que :}$$

$$\int_\Omega \sigma_{\alpha\beta}^0 \partial_\beta v_\alpha dx + \int_\Omega \sigma_{\alpha\beta}^0 \partial_\alpha u_3^0 \partial_\beta v_3 dx = L(v) + \left\langle \sigma_{33}^0, \bar{v}_3 \right\rangle \tag{4.17}$$

$$+ \int_\gamma \tilde{F}_\alpha \left(\int_{-1}^{+1} v_\alpha dx_3 \right) d\gamma, \ \forall v \in \ V_{KL}(\Omega)$$

$$\left\langle \sigma_{33}^0, \bar{v}_3 - \bar{u}_3^0 \right\rangle \geq 0, \ \forall v_3 \in K(\Omega) \tag{4.18}$$

avec :

$$\sigma_{\alpha\beta}^0 = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} E_{\gamma\gamma}^0\left(u^0\right) \delta_{\alpha\beta} + 2\mu E_{\alpha\beta}^0\left(u^0\right) \tag{4.19}$$

Preuve. De (3.21), on déduit que :

$$\sigma_{33}^{-4} = \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu) \partial_3 u_3^0 \left(2 + \partial_3 u_3^0\right) \tag{4.20}$$

$$\sigma_{33}^{-3} = (\lambda + 2\mu) \partial_3 u_3^1 \left(1 + \partial_3 u_3^0\right) \tag{4.21}$$

A l'ordre de ε^{-4} et ε^{-3} :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \sigma_{33}^{-4}\left(1+\partial_3 u_3^0\right) \partial_3 v_3 dx &= 0, \forall v_3 \in V_0(\Omega),\ \bar{v}_3=0 \qquad (4.22)\\
\int_{\Omega}\left[\sigma_{33}^{-3}\left(1+\partial_3 u_3^0\right)+\sigma_{33}^{-4} \partial_3 u_3^1\right] \partial_3 v_3 dx &= 0, \forall v_3 \in V_0(\Omega),\ \bar{v}_3=0 \qquad (4.23)
\end{aligned}$$

En utilisant le lemme 19, (4.22) donne $\sigma_{33}^{-4}\left(1+\partial_3 u_3^0\right)=0$ donc $\left(1+\partial_3 u_3^0\right) \partial_3 u_3^0\left(2+\partial_3 u_3^0\right)=0$. Si on suppose que $\partial_3 u_3^0 \in C^0(\bar{\Omega})$, du fait que $u_3^0=0$ sur Γ_0 on déduit que

$$\partial_3 u_3^0=0 \text { sur } \bar{\Omega} \qquad (4.24)$$

De même pour (4.23), on trouve $\partial_3 u_3^1=0$.

A l'ordre de ε^{-2} :

$$\int_{\Omega}\left(\sigma_{\alpha 3}^{-2} \partial_3 v_\alpha+\sigma_{\alpha 3}^{-2} \partial_\alpha v_3+\sigma_{33}^{-2} \partial_3 v_3\right) dx=\left\langle\sigma_{33}^{-2}+\sigma_{k 3}^{-2} \partial_k u_3^0, \bar{v}_3\right\rangle, \forall v \in \overrightarrow{V}(\Omega) \qquad (4.25)$$

On prend $v_3=0$ dans (4.25), on trouve :

$$\sigma_{\alpha 3}^{-2}=0 \qquad (4.26)$$

D'autre part, de (3.21) on a : $\sigma_{\alpha 3}^{-2}=\mu(\partial_\alpha u_3^0+\partial_3 u_\alpha^0)$ donc :

$$\partial_\alpha u_3^0+\partial_3 u_\alpha^0=0 \qquad (4.27)$$

A l'ordre de ε^{-1} :

$$\int_{\Omega}\left(\sigma_{\alpha 3}^{-1} \partial_3 v_\alpha+\sigma_{33}^{-1} \partial_3 v_3\right) dx=\left\langle\sigma_{33}^{-1}+\sigma_{k 3}^{-1} \partial_k u_3^0, \bar{v}_3\right\rangle, \forall v \in \overrightarrow{V}(\Omega) \qquad (4.28)$$

On prend $v_3 = 0$ et $\bar{v}_\alpha = 0$ sur Γ_+ puis $\bar{v}_3 = 0$ dans (4.28), on trouve :

$$\sigma_{\alpha 3}^{-1} = \sigma_{33}^{-1} = 0 \tag{4.29}$$

Comme de (3.21) on a $\sigma_{\alpha 3}^{-1} = \mu(\partial_\alpha u_3^1 + \partial_3 u_\alpha^1)$ alors :

$$\partial_\alpha u_3^1 + \partial_3 u_\alpha^1 = 0 \tag{4.30}$$

A l'ordre de ε^0 : $\forall v \in \overrightarrow{V}(\Omega)$:

$$\int_\Omega \sigma_{ij}^0 \partial_j v_i dx + \int_\Omega \sigma_{ij}^0 \partial_i u_3^0 \partial_j v_3 dx = L(v) + \int_\gamma \tilde{F}_\alpha (\int_{-1}^{+1} v_\alpha dx_3) d\gamma \ + \left\langle \sigma_{33}^0 + \sigma_{k3}^0 \partial_k u_3^0, \bar{v}_3 \right\rangle \tag{4.31}$$

tels que σ_{ij}^0 sont définis par (3.39)-(3.42).

On a de (3.21) :

$$\sigma_{33}^{-2} = (\lambda + 2\mu)\left(\partial_3 u_3^2 + \frac{1}{2}\partial_3 u_\gamma^0 \partial_3 u_\gamma^0\right) + \frac{\lambda}{2}(2\partial_\gamma u_\gamma^0 + \partial_\gamma u_3^0 \partial_\gamma u_3^2)$$

Si on revient à (4.25) on trouve $\sigma_{33}^{-2} = 0$. Donc on peut conclure que :

$$\partial_3 u_3^2 = \frac{-\lambda}{\lambda + 2\mu}(\partial_\gamma u_\gamma^0 + \frac{1}{2}\partial_\gamma u_3^0 \partial_\gamma u_3^0) - \frac{1}{2}\partial_3 u_\gamma^0 \partial_3 u_\gamma^0 \tag{4.32}$$

Après insertion de (4.32) dans (3.39), on trouve que $\sigma_{\alpha\beta}^0 = \dfrac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} E_{\gamma\gamma}^0 (u^0) + 2\mu E_{\alpha\beta}^0 (u^0)$ d'où (4.19).

De (4.24) et de (4.27) on déduit que u^0 est de type de Kirchhoff-Love.

De la même façon que dans le chapitre précédent, dans le cas sans frottement, on peut avoir $\sigma_{\alpha 3}^0 = 0$ p.p sur Γ_+.

Donc, pour avoir (4.17) et (4.18), il suffit d'introduire (3.21) et (4.15) dans (4.12) et (4.13) tout en prenant en compte les résultats précédents. ∎

Théorème 59 *Si u^0 est solution de $P^0_{KL}.V$ telle que $u^0_\alpha = \xi_\alpha - x_3\partial_\alpha\xi_3$ et $u^0_3 = \xi_3$, ξ_α, ξ_3 assez réguliers. Alors ξ_α, ξ_3 vérifient le problème bidimensionnel $P^b(0)$:*

$$\begin{aligned}
\textit{Trouver } \xi_\alpha &\in H^1(\omega),\ \xi_3 \in H^2_0(\omega),\ \xi_3 \leq d \ \ \textit{tels que} \\
k\Delta^2\xi_3 - \partial_\beta(n_{\alpha\beta}\partial_\alpha\xi_3) &= h^1_1 + h^1_2 + h^0_3 + \sigma^0_{33} \ \textit{sur}\ \omega && (4.33)\\
-\partial_\beta n_{\alpha\beta} &= h^0_\alpha \quad \textit{sur}\ \ \omega && (4.34)\\
n_{\alpha\beta}\nu_\beta &= 2\tilde{F}_\alpha \quad \textit{sur}\ \ \gamma && (4.35)\\
\sigma^0_{33}(d-\xi_3) &= 0 \ \textit{sur}\ \omega,\ \sigma^0_{33} \leq 0 \quad\ \textit{dans}\ \ H^{-2}(\omega) && (4.36)
\end{aligned}$$

où $n_{\alpha\beta} = 2\lambda^\star E^0_{\gamma\gamma}(\xi)\,\delta_{\alpha\beta} + 4\mu E^0_{\alpha\beta}(\xi)$
$k = \dfrac{8}{3}\mu\dfrac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}$; $h^0_i = \int_{-1}^{+1} f_i dx_3 + g^-_i$; $h^1_i = \int_{-1}^{+1} x_3\partial_i f_i dx_3 - \partial_i g^-_i$; $g^-_i = g_i(x_1,x_2,-1)$.

Preuve. De $u^0 \in \mathrm{V}_{KL}(\Omega) \cap \overrightarrow{K}(\Omega)$, on conclut qu'il existe $(\xi_\alpha, \xi_3) \in H^1(\omega) \times H^2_0(\omega)$, $\xi_3 \leq d$ tels que $u^0_\alpha = \xi_\alpha - x_3\partial_\alpha\xi_3$, $u^0_3 = \xi_3$. D'autre part on a $E^0_{\alpha\beta}(u^0) = E^0_{\alpha\beta}(\xi) - x_3\partial_{\alpha\beta}\xi_3$ d'où :

$$\sigma^0_{\alpha\beta} = \left[\lambda^\star E^0_{\gamma\gamma}(\xi)\,\delta_{\alpha\beta} + 2\mu E^0_{\alpha\beta}(\xi)\right] - x_3\left[\lambda^\star \triangle\xi_3\delta_{\alpha\beta} + 2\mu\partial_{\alpha\beta}\xi_3\right], \lambda^\star = \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}$$

avec $m_{\alpha\beta}$ et $n_{\alpha\beta}$ définis respectivement par (3.52) et (3.53), on peut écrire :

$$\sigma^0_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}n_{\alpha\beta} + \frac{3}{2}x_3 m_{\alpha\beta} \tag{4.37}$$

Chercher u^0 revient à chercher ξ_α et ξ_3. Pour cela on prend au début $v =$

$(-x_3\partial_1\eta_3, -x_3\partial_2\eta_3, \eta_3)$ dans (4.17) on trouve :

$$\int_\Omega (\frac{1}{2}n_{\alpha\beta} + \frac{3}{2}x_3 m_{\alpha\beta})(-x_3\partial_{\alpha\beta}\eta_3)dx + \int_\Omega (\frac{1}{2}n_{\alpha\beta} + \frac{3}{2}x_3 m_{\alpha\beta})\partial_\alpha\xi_3\partial_\beta\eta_3 dx$$
$$= L(v) + \langle \sigma_{33}^0, \eta_3 \rangle + \int_\gamma \tilde{F}_\alpha (\int_{-1}^{+1} -x_3\partial_\alpha\eta_3 dx_3)d\gamma, \forall\eta_3 \in H_0^2(\omega)$$

d'où :

$$\int_\omega -m_{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta}\eta_3 dx' + \int_\omega n_{\alpha\beta}\partial_\alpha\xi_3\partial_\beta\eta_3 dx' = \int_\omega (\int_{-1}^{+1} -x_3 f_\alpha dx_3 + g_\alpha^-)\partial_\alpha\eta_3 dx'$$
$$+ \int_\omega (\int_{-1}^{+1} f_3 dx_3 + g_3^-)\eta_3 dx' + \int_\omega \sigma_{33}^0\eta_3 dx', \forall\eta_3 \in H_0^2(\omega)$$

Il vient que ξ_3 vérifie :

$$\int_\omega \left[k\Delta^2\xi_3 - \partial_\beta(n_{\alpha\beta}\partial_\alpha\xi_3)\right]\eta_3 dx' = \int_\omega (h_1^1 + h_2^1 + h_3^0 + \sigma_{33}^0)\eta_3 dx', \forall\eta_3 \in H_0^2(\omega)$$

avec : $k = \dfrac{8}{3}\mu\dfrac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}$; $h_i^0 = \int_{-1}^{+1} f_i dx_3 + g_i^-$; $h_i^1 = \int_{-1}^{+1} x_3\partial_i f_i dx_3 - \partial_i g_i^-$; $g_i^- = g_i(x_1, x_2, -1)$.

d'où, au sens des distributions, (4.33).

Maintenant pour trouver ξ_α, on prend $v = (\eta_1, \eta_2, 0)$ dans (4.17) on obtient :

$$\int_\Omega \sigma_{\alpha\beta}^0\partial_\beta\eta_\alpha dx = \int_\Omega f_\alpha\eta_\alpha dx + \int_{\Gamma_-} g_\alpha^-\eta_\alpha d\Gamma + \int_\gamma \tilde{F}_\alpha(\int_{-1}^{+1}\eta_\alpha dx_3)d\gamma, \quad \forall\eta_\alpha \in H^1(\omega)$$

D'où :

$$\int_\omega n_{\alpha\beta}\partial_\beta\eta_\alpha dx' = \int_\omega h_\alpha^0\eta_\alpha dx' + \int_\gamma \tilde{F}_\alpha(\int_{-1}^{+1}\eta_\alpha dx_3)d\gamma, \ \forall\eta_\alpha \in H^1(\omega)$$

Pour η_α de $D(\omega)$ on conclut (4.34) puis (4.35).

Pour la condition de contact unilatéral, on prend $v_3 = d$ puis $v_3 = 2\xi_3 - d$ dans (4.18), on trouve :

$\langle \sigma_{33}^0, d - \xi_3 \rangle = 0$ sur ω et $\sigma_{33}^0 \leq 0$ dans $H^{-2}(\omega)$ d'où (4.36). ■

Les équations $(4.33), (4.34)$ et (4.35) s'appellent les équations de Von Kármán. Ces équations, avec d'autres conditions, ont été étudiées par Ciarlet[2]

4.2 Le cas de contact avec frottement de Coulomb

On va garder la même position du problème en ajoutant la condition de frottement de Coulomb.

4.2.1 Problème classique P$^\varepsilon$.C

$$\begin{cases} \text{Trouver } u^\varepsilon \text{ tel que :} \\ -\partial_j^\varepsilon \hat{\sigma}_{ij}^\varepsilon = f_i^\varepsilon \quad \text{dans } \Omega^\varepsilon \\ \hat{\sigma}_{ij}^\varepsilon n_j^\varepsilon = g_i^\varepsilon \quad \text{sur } \Gamma_-^\varepsilon \\ \tilde{F}_\alpha^\varepsilon = \dfrac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} F_\alpha^\varepsilon dx_3^\varepsilon \text{ sur } \gamma \\ u_\alpha^\varepsilon \text{ indépendents de } x_3^\varepsilon,\ u_3^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0^\varepsilon \\ \bar{u}_3^\varepsilon \leq \varepsilon d,\ \hat{\sigma}_{33}^\varepsilon \leq 0,\ \hat{\sigma}_{33}^\varepsilon (\bar{u}_3^\varepsilon - \varepsilon d) = 0 \text{ sur } \Gamma_+^\varepsilon \\ |\hat{\sigma}_T^\varepsilon| < \nu |\hat{\sigma}_{33}^\varepsilon| \Rightarrow u_T^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_+^\varepsilon \\ |\hat{\sigma}_T^\varepsilon| = \nu |\hat{\sigma}_{33}^\varepsilon| \Rightarrow \exists \delta > 0,\ u_T^\varepsilon = -\delta \hat{\sigma}_T^\varepsilon,\ \hat{\sigma}_T^\varepsilon = (\hat{\sigma}_{\alpha 3}^\varepsilon) \text{ sur } \Gamma_+^\varepsilon \end{cases}$$

4.2.2 Problème variationnel

Théorème 60 *Si u^{ε} est solution du problème classique $P^{\varepsilon}.C$ alors u^{ε} vérifie le problème $P^{\varepsilon}.V$:*

$$\begin{cases} \text{Trouver } \ u^{\varepsilon} \in \overrightarrow{K}(\Omega^{\varepsilon}) \quad \text{tel que} \\ \int_{\Omega} \hat{\sigma}_{ij}^{\varepsilon} \partial_j^{\varepsilon} v_i^{\varepsilon} dx^{\varepsilon} = L^{\varepsilon}(v^{\varepsilon}) + 2\varepsilon \int_{\gamma} \tilde{F}_{\alpha}^{\varepsilon} \tilde{v}_{\alpha}^{\varepsilon} d\gamma + \langle \hat{\sigma}_{i3}^{\varepsilon}, \overline{v}_i^{\varepsilon} \rangle \,, \ \forall \ v^{\varepsilon} \in \overrightarrow{V}(\Omega^{\varepsilon}) \\ \langle \hat{\sigma}_{33}^{\varepsilon}, \overline{v}_3^{\varepsilon} - \overline{u}_3^{\varepsilon} \rangle \geq 0, \ \forall \ \ v_3^{\varepsilon} \in K(\Omega^{\varepsilon}) \\ \ \langle \hat{\sigma}_{\alpha 3}^{\varepsilon}, \overline{v}_{\alpha}^{\varepsilon} - \overline{u}_{\alpha}^{\varepsilon} \rangle + \langle \nu \left| \hat{\sigma}_{33}^{\varepsilon} \right|, \left| \overline{v}_T^{\varepsilon} \right| - \left| \overline{u}_T^{\varepsilon} \right| \rangle \geq 0, \ \forall \ v_{\alpha}^{\varepsilon} \in V(\Omega^{\varepsilon}) \end{cases}$$

Preuve. La preuve est similaire à celle du théorème 55 (cas sans frottement), en ajoutant la formulation faible de la condition de frottement de Coulomb. ∎

Remarque 61 *Si de plus u^{ε} est assez regulier alors ces deux problèmes sont équivalents.*

4.2.3 Etude asymptotique

Mise à l'echelle du problème variationnel

On garde la même mise à l'échelle des donnèes et des inconnues que celle faite dans le cas sans frottement. De la même manière on trouve le théorème :

Théorème 62 *Le problème variationnel $P^{\varepsilon}.V$ est équivalent au problème suivant*

$P(\varepsilon).V$:

$$\text{Trouver } u(\varepsilon) \in \overrightarrow{K}(\Omega) \quad \text{tel que :}$$

$$\int_\Omega \sigma_{ij}(\varepsilon)\,\partial_j v_i dx + \int_\Omega \sigma_{ij}(\varepsilon)\,\partial_i u_3(\varepsilon)\,\partial_j v_3 dx + \varepsilon^2 \int_\Omega \sigma_{ij}(\varepsilon)\,\partial_i u_\alpha(\varepsilon)\,\partial_j v_\alpha dx$$

$$= L(v) + \langle \hat{\sigma}_{33}(\varepsilon), \bar{v}_3 \rangle + \int_\gamma \tilde{F}_\alpha (\int_{-1}^{+1} v_\alpha dx_3) d\gamma + \langle \sigma_{\alpha 3}(\varepsilon), \bar{v}_\alpha \rangle$$

$$+\varepsilon^2 \langle \sigma_{k3}(\varepsilon)\,\partial_k u_\alpha, \bar{v}_\alpha \rangle, \ \forall v \in \overrightarrow{V}(\Omega) \tag{4.38}$$

$$\langle \hat{\sigma}_{33}(\varepsilon), \bar{v}_3 - \bar{u}_3(\varepsilon) \rangle \geq 0, \ \forall v_3 \in K(\Omega) \tag{4.39}$$

$$\langle \sigma_{\alpha 3}(\varepsilon), \bar{v}_\alpha - \bar{u}_\alpha(\varepsilon) \rangle + \varepsilon \langle \nu\, |\hat{\sigma}_{33}(\varepsilon)|, |\bar{v}_T| - |\bar{u}_T(\varepsilon)| \rangle$$

$$+ \varepsilon^2 \langle \sigma_{k3}(\varepsilon)\,\partial_k u_\alpha(\varepsilon), \bar{v}_\alpha - \bar{u}_\alpha(\varepsilon) \rangle \geq 0, \ \forall\ v_\alpha \in V(\Omega) \tag{4.40}$$

Problème bidimensionnel

Théorème 63 *Soit* $u(\varepsilon)$ *solution de* $P(\varepsilon).V$. *Supposons que :*

$$u(\varepsilon) = u^0 + \varepsilon u^1 + \varepsilon^2 u^2 + ..., u^p \in \overrightarrow{K}(\Omega), \quad p \in \{0,1,2,3,4,....\}$$

$$\partial_3 u_3^0 \in C^0(\bar{\Omega})$$

alors u^0 *est solution du problème* $P^0_{KL}.V$:

$$\text{Trouver} \quad u^0 \in V_{KL}(\Omega) \cap \overrightarrow{K}(\Omega) \quad \text{tel que :}$$

$$\int_\Omega \sigma^0_{\alpha\beta} \partial_\beta v_\alpha dx + \int_\Omega \sigma^0_{\alpha\beta} \partial_\alpha u_3^0 \partial_\beta v_3 dx = L(v) + \langle \sigma^0_{33}, \bar{v}_3 \rangle$$

$$+ \int_\gamma \tilde{F}_\alpha (\int_{-1}^{+1} v_\alpha dx_3) d\gamma, \forall v \in V_{KL}(\Omega) \tag{4.41}$$

$$\langle \sigma^0_{33}, \bar{v}_3 - \bar{u}^0_3 \rangle \geq 0, \forall v_3 \in K(\Omega) \tag{4.42}$$

Preuve. Soit $u(\varepsilon)$ solution de P(ε).V. Supposons que :

$$u(\varepsilon) = u^0 + \varepsilon u^1 + \varepsilon^2 u^2 + ..., u^p \in \overrightarrow{K}(\Omega), \ p \in \{0,1,2,3,4,....\} \tag{4.43}$$

On introduit l'ensemble des déplacements admissibles de type Kirchhoff-Love $V_{KL}(\Omega)$ defini dans (4.16). On remarque que l'influence de la condition de frottement de Coulomb est uniquement sur le deuxième membre de la formulation faible de l'équation d'équilibre, donc, on procède de la même manière, on trouve :

A l'ordre de ε^{-4} :

$$\int_{\Omega} \sigma_{33}^{-4}\left(1+\partial_3 u_3^0\right)\partial_3 v_3 dx = 0,\ \forall v_3 \in V(\Omega), \bar{v}_3 = 0$$

Ce qui donne, grâce au lemme 19 et sous supposition de $\partial_3 u_3^0 \in C^0\left(\bar{\Omega}\right)$:

$$\partial_3 u_3^0 = 0 \text{ sur } \bar{\Omega} \tag{4.44}$$

A l'ordre de ε^{-3} et grâce lemme 19, on trouve $\sigma_{33}^{-3} = 0$ d'où $\partial_3 u_3^1 = 0$ ce qui donne $\sigma_{\alpha\beta}^{-2} = \sigma_{\alpha\beta}^{-1} = 0$.

A l'ordre de ε^{-2} :

$$\int_{\Omega}\left(\sigma_{\alpha 3}^{-2}\partial_3 v_\alpha + \sigma_{\alpha 3}^{-2}\partial_\alpha v_3 + \sigma_{33}^{-2}\partial_3 v_3\right)dx = \left\langle \sigma_{33}^{-2} + \sigma_{k3}^{-2}\partial_k u_3^0, \bar{v}_3\right\rangle + \left\langle \sigma_{\alpha 3}^{-2}, \bar{v}_\alpha\right\rangle, \forall v \in \overrightarrow{V}(\Omega) \tag{4.45}$$

On prend $v_3 = 0$ et $\bar{v}_\alpha = 0$ dans (4.45), on trouve :

$$\int_{\Omega} \sigma_{\alpha 3}^{-2}\partial_3 v_\alpha dx = 0, \forall v_\alpha \in V(\Omega)$$

d'où $\sigma_{\alpha 3}^{-2} = 0$ toujours grâce au lemme 19.

On a : $\sigma_{\alpha 3}^{-2} = \mu(\partial_\alpha u_3^0 + \partial_3 u_\alpha^0)$ donc :

$$\partial_\alpha u_3^0 + \partial_3 u_\alpha^0 = 0 \tag{4.46}$$

De (4.45) on trouve :

$$\sigma_{33}^{-2} = 0 \tag{4.47}$$

A l'ordre de ε^{-1} :

$$\int_{\Omega} \left(\sigma_{\alpha 3}^{-1} \partial_3 v_\alpha + \sigma_{33}^{-1} \partial_3 v_3\right) dx = \left\langle \sigma_{33}^{-1} + \sigma_{k3}^{-1} \partial_k u_3^0, \bar{v}_3 \right\rangle + \left\langle \sigma_{\alpha 3}^{-1}, \bar{v}_\alpha \right\rangle, \forall v \in \overrightarrow{V}(\Omega) \tag{4.48}$$

On prend $v_3 = 0$ et $\bar{v}_\alpha = 0$ sur Γ_+ puis $\bar{v}_3 = 0$ dans (4.48), on trouve : $\sigma_{\alpha 3}^{-1} = 0$ puis $\sigma_{33}^{-1} = 0$.

A l'ordre de ε^0 :

$\forall v \in \overrightarrow{V}(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^0 \partial_j v_i dx + \int_{\Omega} \sigma_{ij}^0 \partial_i u_3^0 \partial_j v_3 dx = L(v) + \left\langle \hat{\sigma}_{33}^0, \bar{v}_3 \right\rangle + \int_{\gamma} \tilde{F}_\alpha \left(\int_{-1}^{+1} v_\alpha dx_3 \right) d\gamma + \left\langle \sigma_{\alpha 3}^0, \bar{v}_\alpha \right\rangle \tag{4.49}$$

tels que σ_{ij}^0 sont définis par (3.39)-(3.42).

On a de (3.21) :

$$\sigma_{33}^{-2} = (\lambda + 2\mu)\left(\partial_3 u_3^2 + \frac{1}{2} \partial_3 u_\gamma^0 \partial_3 u_\gamma^0\right) + \frac{\lambda}{2}\left(2\partial_\gamma u_\gamma^0 + \partial_\gamma u_3^0 \partial_\gamma u_3^2\right)$$

et de (4.47) on conclut que : $\partial_3 u_3^2 = \dfrac{-\lambda}{\lambda + 2\mu}\left(\partial_\gamma u_\gamma^0 + \frac{1}{2} \partial_\gamma u_3^0 \partial_\gamma u_3^0\right) - \frac{1}{2} \partial_3 u_\gamma^0 \partial_3 u_\gamma^0$ puis on retrouve l'expression de $\sigma_{\alpha\beta}^0$.

De (4.44) et (4.46) on déduit que u^0 est de type Kirchhoff-Love donc, avec la condition dans (4.43) $u^0 \in V_{KL}(\Omega) \cap \overrightarrow{K}(\Omega)$. On a vu que de la condition (4.40), on peut conclure $\sigma_{\alpha 3}^0 = 0$ p.p sur Γ_+ . Ce qui nous permet d'établir (4.41) et (4.42) ■

Remarque 64 *On déduit que le déplacement u^0 est caractérisé par le même problème $P_{KL}^0 . V$ que celui trouvé dans le cas sans frottement. Donc, notre problème tridimensionnel avec frottement de contact unilatéral avec la condition de Von Kàrmàn tend à un problème bidimentionnel sans frottement.*

Conclusion

De ce travail, on résulte que, soit dans le cas linéaire ou dans le cas non linéaire, soit dans le cas d'encastrement ou dans le cas des conditions de Von Kármán, notre problème de contact unilatéral tridimensionnel avec frottement de Coulomb tend vers un problème de contact unilatéral bidimensionnel sans frottement. La perte du terme de frottement provient du fait que la force de frottement (en ε^3) est d'un ordre moins élevé que la force de pression de contact (en ε^4) et du fait que cette dernière controle la force de frottement. Donc, du moins formellement quand ε tend vers zéro, la force de frottement doit s'annuler.

On rappelle que dans le cadre de l'élasticité non linéaire, on a fait que l'étude asymptotique formelle des problèmes donc on se propose, comme perspectives, d'établir un théorème d'existence puis l'étude de la convergence. Ensuite, pour les équations de Von Kármán, une résolution complète avec les conditions de Signorini.

Bibliographie

[1] H.Brezis, Analyse fonctionnelle théories et applications.Dunod 1999.

[2] P.G.Ciarlet, Plates and Junctions in elastic multistrutures. Masson 1990.

[3] P.G.Ciarlet, P.Destuynder : *A justification of the two dimensional plate model*, J. Mécanique, 18 (1979) 315-344.

[4] H.B.Dhia, *Equilibre d'une plaque mince élastique avec contact unilatéral et frottement de type Coulomb*, C. R. Acad. Sci. Paris, Scr. I, 308 (1989) 293-296.

[5] S.Drabla, thèse de doctorat : analyse variationnelle de quelques problèmes aux limites en èlasticité et en viscoplasticité.Université de Ferhat Abbas, Setif, 1999.

[6] G.Duvaut, Mécanique du milieu continu. Dunod 1998.

[7] G.Duvaut, J.L.Lions, Les inéquations en mécanique et en physique. Dunod 1972.

[8] Eck et Jarušek, *Existence results for the static contact problem with Coulomb friction*, Math. Models Methods Appl. Sci., 8, 445-468 (1998).

[9] G.Fichera, *Problemi elastostatici con vincoli unilaterali : il problema di signorini con ambigue condizioni al contorno*, Mem. Accad. Naz. Lincei Ser., VIII(7), 91-140 (1964).

[10] R. Hassani, P.Hild et I.Ionescu, *Sufficient conditions of non-uniqueness for the Coulomb friction problem.*Math. Meth. Appli. Sci. 2004; 27 :47-67.

[11] J.Jarušek, *Contact Problem with Bounded Friction : Coercive case, Czechoslovak* Math. J.,33(108), 237-261 (1983).

[12] Y.Kato, *Signorini problem with friction in linear elasticity*, Japan J. Appl. Math., 4, 237-268 (1987).

[13] Kikuchi, Oden, Contact problems in elasticity : a study of variaional inéqualities and finit element methods, SIAM, Studies in applied mathematics, 1988.

[14] J.L.Lions, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Dunod 2002

[15] Lions et Magenes, Problèmes aux limites non homogènes et applications, vol.1 et 2, Dunod 1968.

[16] Néčas, Jarušek et Haslinger, *On the solution of the variational inequality to the signorini problem with small friction*, Boll. U.M.I. 5(17B), 796-811 (1980).

[17] J.C.Paumier, *Contact unilatéral des structures minces : modélisation, calcul et applications.* Annals of University of Craiova, Marth. Comp. Sci. Ser. Volume 30, 2003, Pages 177-187.

[18] J.C.Paumier, *Modélisation asymptotique d'un problème de plaque mince en contact unilatéral avec frottement sur un obstacle rigide*, Rapport technique LMC-IMAG, juillet 2002 [$http://www-lmc.imag.fr/\tilde{}pamier/signoplaque.ps$]

[19] J.J.Telega,T.Lewinski, Plates, Laminates and Shells : asymptotic analysis and homogenization.World scientific 2000.

[20] Vy Khoi Le, Klaus schmitt, Global bifurcation in variational inequalities. Springer-Verlag New York 1997.

Résumé: En 2002, J.C.Paumier [7] a réalisé une modélisation asymptotique d'un problème de contact unilatéral avec frottement de Coulomb d'une plaque mince encastrée de type Kirchhoff.-Love contre un obstacle rigide où il a prouvé que u (ε) solution du problème tridimensionnel tend vers u(0) caractérisé par un problème bidimensionnel sans frottement. L'objectif de ce travail est la validation de ce résultat en utilisant une étude asymptotique puis l'extension de cette étude pour un modèle non linéaire ensuite pour un autre type de conditions aux bords dit de Von Kàrmàn.

Mots clés: contact unilatéral, Signorini, étude asymptotique, frottement de Coulomb, condition s d e Von Kàrmàn.

Abstract: I n 2002, J.C.Paumier [7] has studied a Signorini problem with Coulomb friction of a clamped Kirchhoff.-Love thin plate model where he has proved that u(ε) the solution of the three-dimensional problem converges to u(0) characterized by two-dimensional problem without friction. The objective of this research paper is to valid this result using an asymptotic approach then the extension of this study to a nonlinear model after that to another type of boundary conditions called Von Kàrmàn conditions.

Key words: unilateral contact, Signorini, asymptotic analysis, Coulomb friction, Von Kàrmàn conditions.

ملخص: في 2002 قام J.C.Paumier [7] بدراسة مقاربة لمسألة تصادم أحادي الجانب مع احتكاك Coulomb بحاجز صلب تحت شروط Signorini الحدية لصفيحة رقيقة مرنة مثبتة الجانب من صنف Kirchhoff.-Love . أين بين أن u(ε) حل للصيغة الضعيفة للمسألة يؤول إلى u(0) محدد بمسألة ثنائية البعد بدون احتكاك. الهدف من هذا البحث هو الوصول إلى نفس النتيجة باستخدام نشر مقارب لـ u(ε) . ثم تمديد هذه الدراسة إلى مسألة لا خطية بعد ذلك نقوم بدراسة نفس المسألة مع تغيير الشروط الحدية، عوض الصفيحة مثبتة نطبق شروط Von Kàrmàn. و في الأخير ندرج النتائج الأساسية مع ذكر بعض التطلعات.

الكلمات الدالة: التصادم أحادي الجانب، التحليل المقارب، شروط Signorini، احتكاك Coulomb، النشر المقارب، شروط Von Kàrmàn.