UNIVERSITE KASDI MERBAH
OUARGLA

Faculté des Sciences et Sciences de l'ingénieur

DEPARTEMENT DE :
MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

N° d'ordre :
N° de série :

MAGISTER

Spécialité : Mathématiques
Option : Analyse numérique et E. D. P

Par : MERABET Ismail

Thème

Quelques problèmes de perturbations singulières rencontrés dans l'analyse asymptotique de coques élastiques minces

Soutenu publiquement le : 01/03/2006

Devant le jury composé de :

Settou Noureddine	Maître de conférences à l'université de KASDI MERBAH - Ouargla	**Président**
Mekias Hocine	Professeur à l'université FERHAT ABBAS - Sétif	**Examinateur**
Benabderhmane Benyettou	Maître de conférences à l'université de THLEDJI AMAR - Laghouat	**Examinateur**
Mohemmed Said Said	Maître de conférences à l'université de KASDI MERBAH- Ouargla	**Examinateur**
Djamel Ahmed Chacha	Maître de conférences à l'université de KASDI MERBAH - Ouargla	**Rapporteur**

Remerciements

Ce travail a été réalisé à l'université de KASDI MERBAH OUARGLA, Sous la direction de Monsieur Djamel Ahmed Chacha, qui a rendu possible la réalisation de ce mémoire, par le soutien constant qu'il m'a' apporté.

Je luis en suis d'autant plus reconnaissant qu'il m'a laissé une très grande liberté de travail aussi bien dans la conception que dans l'orientation de ma réflexion tout en me conseillant en veillant ce que je ne me disperse pas trop. Sa rigueur et son honnêteté me serviront toujours d'exemple et j'ai énormément apprécié sa disponibilité.

J'adresse mes plus vifs remerciements aux examinateurs Monsieur H. Mekias, Monsieur M S. Said et Monsieur B. Benyettou pour avoir accepté d'examiner ce travail. Leur participation au jury est une marque à laquelle je suis très fier.

Je voudrais également remercier Monsieur N. Settou qui me fait l'honneur d'être président de mon jury.

Je tiens à remercier les membres du département de mathématiques et informatique Messieurs M. Assila, M. Mefleh, O. Bahiou, N. Hermass, M. Reguiat, A. Meche, B. Amieur, K. Guerbati, E. Younbouai, B Brahim.

Je voudrais remercier tous mes amis en particulier A. Bensayeh avec qui nous refaisons l'univers mathématique et à O. Bentouila, A. Mammenou, T. Benmoussa, M. Agti, A. Guemiche, N. Leheleli, Y. Chiba.

Un grand merci à Z Tidjani pour sa grande disponibilité sa gentillesse et sa bonne humeur en toute circonstance.

Je ne pourrais pas terminer sans rendre hommage à mes parents et à mes frères Je ne saurai pas témoigner suffisamment toute ma gratitude pour m'avoir toujours soutenu.

Table des matières

Introduction 5
Notations et conventions 8

1 Rappel sur la théorie des surfaces et la théorie classique des coques minces 9

1.1 Rappel sur la théorie locale des surfaces 10
1.1.1 La dérivée covariante d'un vecteur (ou tenseur) 11
1.1.2 Classification des surfaces et lignes asymptotiques 12
1.1.3 Surfaces réglées 13

1.2 Problème de Cauchy et courbes caractéristiques 16
1.2.1 Cas d'un système du premier ordre 16
1.3 La théorie classique des coques minces: Le modèle bidimensionnel linéarisé de W.T Koiter 20
1.3.1 La formulation variationnelle 21
1.3.2 Etude de la coercivité 22
1.4 Classification des coques élastiques minces 24
1.4.1 Classification inhibée et non inhibée 24
1.4.2 Classification suivant l'énergie dominante 27
1.5 Étude des coques inhibées : 30
1.5.1 L'espace V_m 30

2 Problèmes de perturbations singulières avec problème limite à énergie non bornée 33

2.1 Exemples en dimension un 33
2.1.1 Étude du problème limite 34
2.1.2 Exemple 1: 36
2.1.3 Exemple 2 : 41
2.2 Problèmes des coques minces à énergie non bornée :Cas des coques elliptiques : 45
2.2.1 Régularité de la solution du problème limite 45
2.2.2 Étude d 'un problème modèle 46

3 Propagation et réflexion des singularités dans la théorie des coques minces 57
3.1 Exemple : 57
3.2 **La** théorie classique des propagations des singularités 58
3.2.1 Le spectre singulier différentiable (le front d'onde). 58
3.2.2 Propagation des singularités pour les coques paraboliques . . . 60
3.3 Étude des chargements utilisés. 60
3.4 Étude de quelques cas tests. 62
3.5 Réflexion des singularités pour les coques paraboliques 70
3.5.1 Structure des couches internes 72
3.5.2 Le processus asymptotique**:** 74
3.5.3 Existence et unicité de U_0 75
3.5.4 La détermination de U_0. 76

4 Les problèmes sensitifs et le phénomène de complexification dans la théorie des coques minces 79
4.1 Le premier problème modèle 80
4.1.1 La formulation variationnelle**:** 81
4.1.2 L'étude du problème limite P(0) 84
4.2 Deuxième problème modèle 92

I Conclusion et perspectives 97

II Bibliographie 101

III Annexes 107

A Commentaire sur les suites complexifiantes 109

B Programmes en MATLAB pour tracer les graphes de $\hat{u}^\varepsilon$ et u^ε 117

Introduction

Une coque mince est un corps tridimensionnel caractérisé par sa surface moyenne et sa petite épaisseur. Nous définissons comme mince une coque dont le rapport ε de l'épaisseur à une autre caractéristique de la coque est petit ($\varepsilon < \frac{1}{10}\min(L_1, L_2)$).

L'intérêt de l'industrie moderne dans l'utilisation des coques minces est remarquable. La tendance à optimiser les structures, liée aux objectifs de performance et économie des matériaux utilisées, fait intervenir des structures de plus en plus fines.

Nous pouvons citer comme exemples d'application des coques minces : coques de navires, revêtements d'avions, structures spatiales entre autres.

Etant donnée une coque mince, définit en tant que matériau, élastique isotrope occupant dans son état naturel un domaine d'épaisseur ε autour d'une surface S on se ramène à un problème bidimensionnel permettant la détermination du déplacement u^ε de la surface S. Le comportement de la coque est très différent suivant que sa surface moyenne (avec conditions aux limites) est ou non géométriquement rigide (coque inhibée ou non inhibée). Rappelons que la rigidité géométrique d'une surface, au sens qui convient en théorie des coques, consiste en la non existence des déplacements inextensionnels .

Ce travail est consacré seulement au cas inhibée et dans ce cas le problème limite lorsque $\varepsilon \to 0$ apparaît comme un problème de perturbation singulière et conduit à la prise en compte de la forme bilinéaire d'énergie membranaire.

Les méthodes numériques utilisées (éléments finis) pour résoudre les problèmes des coques élastiques minces, peuvent échouer, par exemple, en raison d'un phénomène de verrouillage ou blocage membranaire qui apparaissent lorsqu'on traite des structures de faible épaisseur. C'est donc de façon naturelle que, des modèles bidimensionnels posés sur la surface moyenne de coque ont été développées (nous reviendrons au chapitre 1 sur ces modèles). C'est modèles présentent par ailleurs l'avantage de diminuer le temps de calcul de l'ordinateur, parce que au lieu de modéliser un corps tridimensionnel, on modélise en deux dimensions.

Notons que on s'intéresse dans ce mémoire, au modèle de W T. Koiter qui est représentatif d'une grande classe des modèles de Kirchhoff-Love.

On se propose aussi, dans ce mémoire, l'étude d'autres phénomènes très importants notamment, le manque de la régularité des solutions des problèmes limites; c'est tout à fait normale puisque nous avons affaire à des problèmes de perturbations singulières. En effet l'espace des déplacements admissibles (noté V où il existe u^ε) est plus petit que l'espace (noté V_m) du problème limite qui est associé à la forme bilinéaire en membrane.

Donc il arrive souvent que les chargements $f \in V'$ mais $f \notin V_m$ de sorte que la solution de problème limite appartenant seulement à un espace qui est plus grand que V_m et dans certain cas il peut ne pas être contenu dans l'espace des distributions (Chapitre 4 de ce mémoire).

Bien que la solution du problème limite quand $\varepsilon \to 0$ ne soit pas régulière, avec

u^ε pour $\varepsilon > 0$ est régulière ((u_3^ε) est H^2 régulière). Alors un phénomène de couches limites lié à l'abaissement de l'ordre de dérivation de u_3 apparaît. En fait, nous savons qu'en passant de u^ε à u la troisième composante passe de H^2 à un espace plus grand qui est dans le meilleur cas L^2, perdant ainsi les conditions aux limites en ce qui concerne u_3 et pour ε petit il y a donc une couche limite ou interne. Il est évident qu'une approximation de la solution n'est possible que si l'on raffine suffisamment le maillage dans les couches, ceci veut dire qu'en dehors des couches un maillage plus grossier suffit mais dans les couches un maillage plus fin est nécessaire.

On note aussi, que le phénomène de propagation des singularités se manifeste lorsque on étudie des coques minces a surface moyenne, parabolique ou hyperbolique, puisque la résolution des ces problèmes relève de la résolution des systèmes paraboliques ou hyperboliques. Suivant les recherches développées par Sanchez Palencia-[37], Sanchez-Hubert, Sanchez-Palencia et P. Karamian [27], la résolution des problèmes à énergie non bornée dans le cas où il y a une propagation des singularités consiste à performer une dilatation de la coordonnée portante de la singularité pour avoir un nouveau problème avec problème limite à énergie bornée.

Ce mémoire, hormis l'introduction, est constitué de quatre chapitres

Le premier est consacré à un rappel de la théorie locale des surfaces et la théorie classique des coques minces. Dans ce premier chapitre, nous rappelons les définitions de la première forme fondamentale, liée à la métrique, et de la seconde forme fondamentale liée à la courbure et permettant de définir le caractère elliptique, parabolique ou hyperbolique de chaque point de la surface. En effet, en chaque point la seconde forme fondamentale détermine localement la position de la surface par rapport au plant tangent en ce point. Les directions asymptotiques sont celles qui limitent au voisinage de chaque point les régions de la surface tangentes en chacun de leur point à une direction asymptotique. Les lignes asymptotiques sont les courbes tangent en chacun de leur point à une direction asymptotique. Nous y rappelons quelques théorèmes concernant le problème de Cauchy. Nous y rappelons la formulation variationnelle du modèle bidimensionnel linéarisé de coques de W.T. KOITER et nous exposons la classification des coques minces. Nous étudions enfin, le comportement asymptotique des coques inhibées.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude des problèmes des coques à énergie non borné. Nous mettons en évidence son comportement singulier quand son épaisseur tend vers zéro. L'existence des couches limites ou internes qui sont développées au voisinage des caractéristiques prend une grande importance, grâce à la concentration de la partie dominante de l'énergie de déformation dans ces couches.

Le troisième chapitre concernant les problèmes de propagation et de la réflexion des singularités aux frontières. Nous montrons sur des exemples qu'on peut avoir des réflexions des singularités pour les coques paraboliques même si on utilise des conditions aux limites admissible pour les coques. Nous faisons enfin la structure des couches internes dans le cas où il n' y a pas des réflexions des singularités pour un

exemple d'une surface cylindrique.

Dans le quatrième chapitre, nous présentons les problèmes sensitifs, nous étudions des problèmes modèles simplifiés. L'étude du problème limite de ces problèmes fait intervenir des espaces fonctionnels inhabituels (non contenus dans l'espace des distributions). La difficulté majeure dans ces problèmes c'est l'impossibilité de la simulation numérique .

Notations et conventions

Dans toute la suite de ce mémoire, nous utiliserons les conventions suivantes:

→ les indices latins ($i,\ j,\ k,\ ...$) varient de 1 à 3.

→ les indices grecs ($\alpha,\ \beta\ ,\ \gamma,\ \lambda,\ \mu, ...$) varient de 1 à 2.

→ les composantes contravariantes d'un vecteur (ou d'un tenseur) sont notées avec des indices supérieurs et les composantes covariantes avec indices inférieurs. La convention de sommation sur les indices répétés est utilisée.
$u_i v^i = \sum_{i=1}^{i=3} u_i v^i$

→ pour les dérivations par rapport à une variable nous utiliserons
$\dfrac{\partial u}{\partial y^\alpha} = u_{,\alpha} = \partial_\alpha u$

→ S désigne une surface dans l'espace Euclidien habituel.

→ Ω désigne un ouvert borné connexe de R^2 de frontière $\partial\Omega$.

→ Γ_0 désigne une partie de la frontière de mesure non nulle.

→ le triplet (a^1, a^2, a^3) forme la base contravariante en tout point de S.

→ H désigne la fonction (ou la distribution) de Heaviside.

→ δ désigne la distribution de Dirac à l'origine.

→ $C\,(\Omega)$: espace des fonctions continues définies sur Ω.

→ $C^k\,(\Omega)\,, k > 0$: espace des fonctions continues définies sur Ω, dont les dérivées partielles d'ordres $\leq k$ sont continues .

→ $C^\infty\,(\Omega)$: espace des fonctions indéfiniment différentiables sur Ω

→ $D\,(\Omega)$: espace des fonctions de $C^\infty\,(\Omega)$ à support compact.

→ $H^s\,(\Omega)$: espace de Sobolev d'ordre s.

→ $a_f(u, v)$: la forme bilinéaire d'énergie de déformation en flexion.

→ $a_m(u, v)$: la forme bilinéaire d'énergie de déformation membranaire..

→ $\sum_f$: la courbe portante des singularités de f.

→ $[|u|]$: le saut de u au passage de la discontinuité.

→ ε : l'épaisseur ou le rapport de l'épaisseur à une autre dimension de la coque

→ $\triangle,\ \triangle^2$: le laplacien et le bilaplacien .

→ Z ou A : espace des fonctions analytiques .

→ $\hat{u}$: la transformation de Fourier de u .

→ $\rightharpoonup$: la convergence faible.

Chapitre 1
RAPPEL SUR LA THÉORIE DES SURFACES ET LA THÉORIE CLASSIQUE DES COQUES MINCES

"Shell theory attemps the impossible: to provide a two-dimensional representation of three-dimensional intrinsically phenomenon."

Koiter & Simmonds,1972

Une coque mince est un corps tridimensionnel, caractérisé géométriquement par sa surface moyenne et sa petite épaisseur, la surface moyenne S est une surface compacte plongée dans R^3.

Dans la théorie linéarisée des coques minces, il existe plusieurs modèles qui sont obtenus à l'aide d'hypothèses a priori convenables. Par la suite nous décrivons le modèle bidimensionnel linéarisé de W.T Koiter (voir [3], [11], [13]).

Ce modèle est représentatif de la famille des modèles classiques de Kirchhoff-Love ([24], [11]). On considère l'épaisseur (ε) petite mais fixée ce qui permet de faire certaines approximations heuristiques en terme de déformation de la surface moyenne.

Suivant les recherches développées par Sanchez-H et Sanchez-P [30] le comportement asymptotique de déplacement u^ε lorsque $\varepsilon \to 0$, prend deux formes très différentes suivant que la surface moyenne est géométriquement rigide ou non, donc cette étude met en evidence l'influence déterminante de la géométrie pour ε trés petit. Le vecteur de déplacement d'une coques mince peut être calculer par l'utilisation du modèle de W.T Koiter, (ce qui nous intéresse dans ce mémoire) basé sur les hypothèses de Kirchhoff-Love (le déplacement du tout point est une fonction affine de la variable y_3). Ces hypothèses ont été justifiées par V. Lods et C. Mardar [24] à partir d'une étude asymptotique rigoureuse. On note aussi qu'il existe d'autres modèles par exemple, le modèle de Naghdi, le modèle Donnel-Valsov, et Mushtari-Marguerre..., pour plus de détails on se refère Telega et Lewinski [20], Destuynder [11].

Avant de présenter la théorie classique des coques minces, nous donnons quelques éléments de la théorie locale des surfaces et nous rappelons quelques théorèmes concernant le problème de Cauchy.

1.1 Rappel sur la théorie locale des surfaces

Soient Ω un ouvert borné connexe de R^2 rapporté aux paramètres (x^1, x^2)et ψ une application de Ω dans R^3 tel que la surface S est l'image de Ω par ψ .

$$r : \left(x^1, x^2\right) \rightarrow \left(\psi^1\left(x^1, x^2\right), \psi^2\left(x^1, x^2\right), \psi^3\left(x^1, x^2\right)\right) \tag{1.1}$$

Les vecteurs tangents à la surface S,

$$\mathbf{r}_{,\alpha} = \vec{a}_\alpha = \frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha} \tag{1.2}$$

avec le vecteur normal unitaire à S

$$\vec{a}_3 = \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|} \tag{1.3}$$

définissent un repère locale en chaque point de S nous l'appelons base **covariante** et la coque est donnée par :

$$S^\varepsilon = \left\{ p(x) = \vec{r}\left(x^1, x^2\right) + x^3 \vec{a}_3 / \left(x^1, x^2, x^3\right) \in \Omega \times \left] \frac{-\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2} \right[\right\} \tag{1.4}$$

La longueur d'un élément d'arc ds le long d'une courbe Γ de classe C^1de S est donnée par:

$$ds^2 = a_{11} dx^1 dx^1 + 2a_{12} dx^1 dx^2 + a_{22} dx^2 dx^2 \tag{1.5}$$

La forme quadratique définit en (1.5) est appelée première forme fondamentale de la surface S en tout point P et $a_{\alpha\beta}$ sont les coefficients de sa représentation matricielle.

Aux vecteurs a_α nous associons deux autres vecteurs a^β définis par

$$\vec{\mathbf{a}}_\alpha . \vec{\mathbf{a}}^\beta = \delta_\alpha^\beta \tag{1.6}$$

La deuxième forme fondamentale qui mesure les courbures de la surface est de la forme :

$$b_{11} dx^1 dx^1 + 2b_{12} dx^1 dx^2 + b_{22} dx^2 dx^2 \tag{1.7}$$

$$b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha} = \vec{a}_3 . \vec{a}_{\alpha,\beta} = -\vec{a}_\alpha . \vec{a}_{3,\beta} = \vec{a}_3 . \vec{a}_{\beta,\alpha} \tag{1.8}$$

1.1.1 La dérivée covariante d'un vecteur (ou tenseur)

Soit v un champ de vecteurs exprimé dans le repère locale, lorsqu'on passe d'un point P à un point infiniment voisin P+dP non seulement les composantes du vecteurs varient mais le repère local est lui aussi modifié. Par conséquence, les dérivées partielles n'obéissent pas aux régles de dérivations usuelles. Les formules de Gauss et de Weingarten donnent les régles de dérivation dans ces bases .

$$a_{\alpha,\beta} = \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\vec{\mathbf{a}}_{\gamma} + b_{\alpha\beta}\vec{\mathbf{a}}_3 \tag{1.9}$$

$$\vec{\mathbf{a}}^{\alpha}_{,\beta} = -\Gamma^{\alpha}_{\beta\lambda}\vec{\mathbf{a}}^{\lambda} + b^{\alpha}_{\beta}\vec{\mathbf{a}}_3 \tag{1.10}$$

$$\vec{\mathbf{a}}_{3,\alpha} = -b^{\lambda}_{\alpha}\vec{\mathbf{a}}_{\lambda} \tag{1.11}$$

où les coefficients $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$ sont les symboles de Christoffel définits par

$$\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\gamma}_{\beta\alpha} = \vec{a}^{\gamma}.\vec{a}_{\alpha,\beta} \tag{1.12}$$

La dérivée covariante (D_k) est donnée comme suit

$$D_k v_i = \partial_k v_i - \ \Gamma^{\gamma}_{ki} v_{\gamma} \tag{1.13}$$

L'expression de l'élément d'aire de la surface est donnée par

$$dS = |\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|\, dx^1 dx^2 = \sqrt{a} dx^1 dx^2 \tag{1.14}$$

$$a = a_{11}a_{22} - (a_{12})^2 \tag{1.15}$$

1.1.2 Classification des surfaces et lignes asymptotiques .

Soit S une surface définie par une carte (Ω, r) en tout point P de S, on définit la fonction qui à tout vecteur U unitaire tangent à S en P, associe le nombre :

$$U\left(t^1, t^2\right) \rightarrow II_P\left(U\right) = b_{11}t^1t^1 + 2b_{12}t^1t^2 + b_{22}t^2t^2 \tag{1.16}$$

Cette fonction atteint ses deux valeurs extrémales $k_1$et k_2 sont appelées **courbures principales** les directions U correspondantes sont appelées **directions principales.**

Définition 1.1: *On appelle **ligne de courbure** toute courbe dont tous les vecteurs tangents sont proportionnels à une direction principale. Les directions U pour lesquelles la fonction II_P s'annule sont appelées **directions asymptotiques.** La notion de direction asymptotique conduit à la classification des surfaces et sera d'une grande importance à l'étude de propagation et réflexion des singularités (chapitre 3 de ce mémoire).*

Définition 1.2: *Une **ligne asymptotique** d'une surface S est une courbe dont chaque vecteur tangent est proportionnel à une direction asymptotique.*

Définition 1.3: *En chaque point d'une surface, on appelle courbure totale ou courbure de Gauss de la surface, le produit des deux courbures principales, on la note k. On appelle courbure moyenne en chaque point de la surface, la somme des deux courbures principales, on la note H*

$$k = k_1k_2 \tag{1.17}$$

$$H = k_1 + k_2 \tag{1.18}$$

Suivant le signe de la courbure de Gauss k, nous avons la classification usuelle d'un point P de S.

Si k >**0** : les courbures principales de S passant par M sont de même signe, et il n'y a pas de directions asymptotiques en P. La surface se trouve d'un même côté du plan tangent. On dit que le point est **elliptique.**

Si k <0 : les courbures principales sont de signe opposé. Le plan tangent traverse la surface suivant les deux directions asymptotiques et on dit que le point est **hyperbolique.**

Si **k=0** : k_1 ou k_2 s'annule, il y a deux possibilités:

1) $k_1 \neq 0$ ou $k_2 \neq 0$. Les courbures sont de même signe, le plan tangent colle à la surface le long de la direction principale de courbure nulle (qui est donc une direction asymptotique), on dit que le point est **parabolique.**

2) $k_1 = 0$ ou $k_2 = 0$. Toutes les courbes passant par P ont une courbure nulle, on dit que le point est **méplat.**

Proposition 1.1.1 *(2.3.8 de [13]) Le signe de la courbure de Gauss k dépend du signe de $det(II_p)$, et nous avons*

$$k = \frac{b_{11}b_{22} - (b_{12})^2}{a_{11}a_{22} - (a_{12})^2} \tag{1.19}$$

Proposition 1.1.2 *(2.3.9 de [13]) Soit C une courbe définit par la carte (I, c = $r(\varphi_1(s), \varphi_2(s))$. Alors la courbe C est une ligne asymptotique de S si*

$$\left(\varphi_1^{'}\right)^2 b_{11} - 2\varphi_1^{'}\varphi_2^{'}b_{12} + \left(\varphi_2^{'}\right)^2 b_{22} = 0 \tag{1.20}$$

Définition 1.4: *Soit $S = (\Omega, r)$ une surface paramétrée. On dit que S est uniformément hyperbolique, parabolique ou elliptique, suivant que k est négatif, nul ou positif .*

Remarque 1.1

-Sur une surface elliptique, les directions asymptotiques sont complexes non réelles, donc il n'y a pas de lignes asymptotiques .

-Sur une surface hyperbolique il existe deux familles de lignes asymptotiques

-Sur une surface parabolique ($k_1 \neq 0$ ou $k_2 \neq 0$) les lignes asymptotiques sont doubles.

1.1.3 Surfaces réglées

Une surface **réglée** S est une surface engendrée par le déplacement d'une droite, appelée **génératrice**. Désignons par $\vec{\mathbf{e}}(x^1)$ le vecteur unitaire porté par la direction de la génératrice passant par un point $A(x^1)$ donné sur une courbe C de S, dont l'équation est de la forme:

$$\overrightarrow{\mathbf{OA}} = \vec{\varrho}\left(x^1\right) \tag{1.21}$$

Un point P de S appartient à une génératrice et donc on a

$$\overrightarrow{\mathbf{OP}} = \overrightarrow{\mathbf{OA}} + \overrightarrow{\mathbf{AP}} = \vec{\varrho}\left(x^1\right) + x^2\vec{\mathbf{e}}(x^1) \tag{1.22}$$

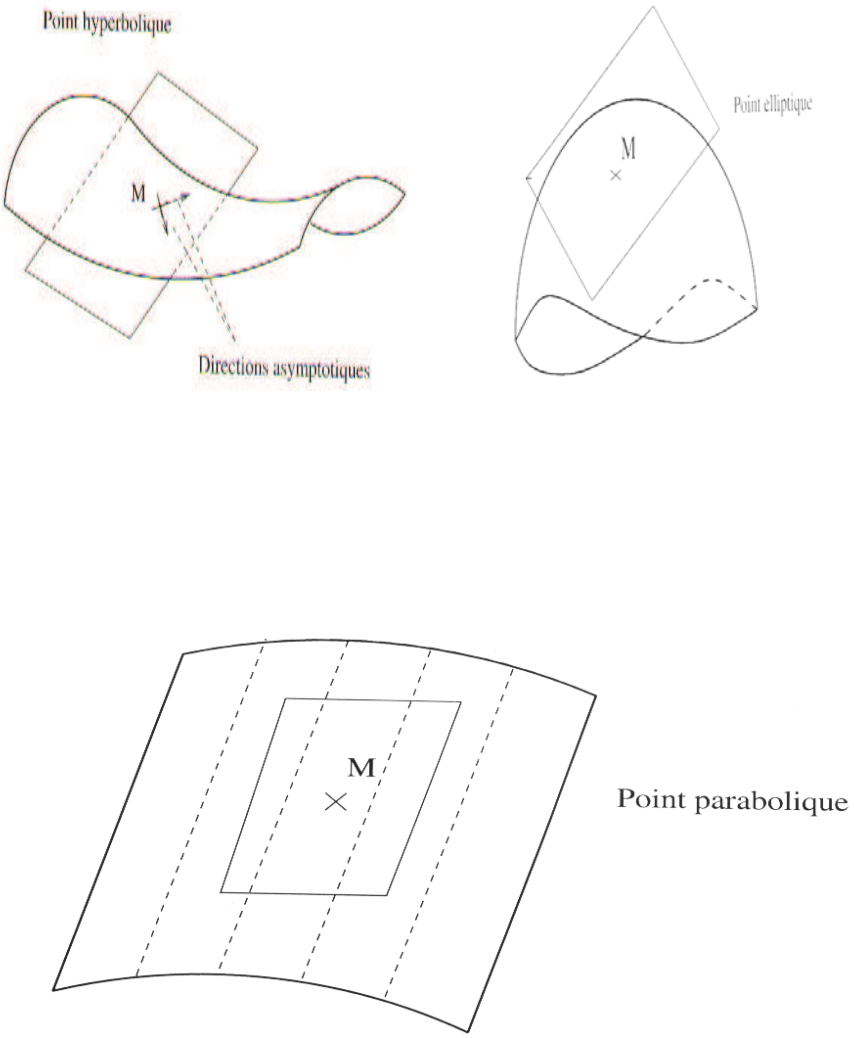

Figure 1.1 Classification des surfaces [Choï, 13]

On écrit

$$r\left(x^1, x^2\right) = \vec{\varrho}\left(x^1\right) + x^2\vec{\mathbf{e}}(x^1) \tag{1.23}$$

Proposition 1.1.3 *Soit une surface réglée. Alors les coefficients de la seconde forme fondamentale et les symboles de Christoffel se simplifient :*

$$\Gamma^{\alpha}_{22} = b_{22} = 0 \tag{1.24}$$

Preuve. Nous savons

$$\vec{a}_2 = r_{,2} = \vec{\mathbf{e}}(x^1) \rightarrow \vec{a}_{2,2} = \vec{r}_{,22} = 0 \tag{1.25}$$

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha} = \vec{a}^{\alpha}.\vec{a}_{\alpha,\beta} \rightarrow \Gamma^{\alpha}_{22} = \vec{a}^{\gamma}.\vec{a}_{2,2} = 0 \tag{1.26}$$

$$b_{22} = \vec{a}_3.\vec{a}_{2,2} = 0 \tag{1.27}$$

■

Remarque 1.2 : *La relation $b_{22} = 0$ indique que les génératrices $x^1 = cte$ sont les lignes asymptotiques de S.*

Définition 1.5 : *Soit S une surface réglée. On dit que S est* ***développable*** *si la normale unitaire à S est constante le long des génératrices. Autrement dit, une surface réglée est développable si et seulement si*

$$\vec{a}_{3,2} = 0 \tag{1.28}$$

On a

$$b_{\alpha\beta} = -\vec{a}_{\alpha}.\vec{a}_{3,\beta} \rightarrow b_{12} = 0 \tag{1.29}$$

Exemples de surfaces développables

1- Cylindre généralisé $\left(\vec{U}(x^1) = cte\right)$. C'est une surface développable qui peut être définie par une carte (Ω, r) avec $r(x^1, x^2) = \vec{\varrho}(x^1) + x^2\vec{U}_0$, où C= $\vec{\varrho}(x^1)$ définie une courbe plane et $\vec{U}_0$ un vecteur transversal au plan C.

2- Cône $(\vec{\varrho}(x^1) = cte)$. Un cône de sommet y est une surface S=(Ω, r) définie par

$$r(x^1, x^2) = y + x^2\vec{U}(x^1) \tag{1.30}$$

1.2 Problème de Cauchy et courbes caractéristiques

Relativement à une équation différentielle ordinair d'ordre m pour l'inconnu u(t), le théorème d'existence et d' unicité classique afirme que la donnée de $u(0), ..., u^{m-1}(0)$ permet de déterminer une solution unique dans un voisinage de $t = 0$. Ce type de problème est appelé problème aux valeurs initiales ou problème de Cauchy.

Le problème analogue pour les équations aux dérivées partielles d'ordre m à deux variables y^1, y^2 et une inconnue $u\left(y^1, y^2\right)$ est bien plus compliqué, dépend de l'équation et de la courbe sur laquelle on se donne les valeurs initiales. Dans ce mémoire nous nous limiterons au cas linéaire à deux variables indépendantes .

Considérons une équation d'ordre m de la forme

$$\partial_1 u = F\left(y^1, y^2, u, ..., \partial_1^{m-1}\partial_2 u\right) \tag{1.31}$$

Définition 1.6 *On appelle problème de Cauchy formel sur la courbe $y^1 = 0$ le problème qui consiste, en se donnant m fonction*

$$\varphi_0(y^2), ..., \varphi_{m-1}(y^2) \tag{1.32}$$

sur un certain intervalle I de cette courbe et en supposant que u existe dans un voisinage de I, à déterminer, sur I, u et toutes ses dérivées, satisfaisant aux conditions de Cauchy

$$u(0, y^2) = \varphi_0(y^2), ..., \partial_1^{m-1} u(0, y^2) = \varphi_{m-1}(y^2) \tag{1.33}$$

1.2.1 Cas d'un système du premier ordre .

Soit Ω un ouvert connexe de R^2 avec les paramètres $y^1,\ y^2$

$$u = (u_1, u_2, u_3)\ ,\ u : \Omega\ \rightarrow R^3, \quad u_{,\alpha} = \frac{\partial u}{\partial y^\alpha} \tag{1.34}$$

Soit l'opérateur différentiel du 1^{er}ordre

$$p(u) = A\frac{\partial u}{\partial y^1} + B\frac{\partial u}{\partial y^2}\ /\quad A = (a_{ij})\,, B = (b_{ij}) \tag{1.35}$$

Considérons le système linéaire d' e.d.p du 1^{er}ordre

$$\begin{cases} p(u) = f \\ u = \varphi \quad \text{sur} \quad \Gamma \end{cases} \tag{1.36}$$

tel que

$$\Gamma = \left\{ \left(y^1, y^2\right) \in \Omega / \phi\left(y^1, y^2\right) = 0 \right\} \tag{1.37}$$

Définition 1.7: *On dit que le problème (1.36) (de Cauchy) est bien posé dans un espace fonctionel V s'il admet une solution unique dans V.*

Définition 1.8: *Une courbe est dite libre où non caractéristique si*

$$det(\phi_{,1}A + \phi_{,2}B) \neq 0 \quad . \tag{1.38}$$

partout le long de Γ.

la question qui se pose est

Comment on introduit $\phi_{,1}, \phi_{,2}$ dans l'équation (1.38) ?

En dérivant $u = \varphi$ le long de Γ (i.e) suivant les directions tangentes le long de Γ, rappelons que :

·La dérivée suivant un vecteur $\vec{T}$ est la projection du gradient sur $\vec{T}$

$\rightarrow$ La dérivée suivant les tangentes est nulle.

$\cdot \frac{\partial \cdot}{\partial T} = \frac{\partial \cdot}{\partial y^1} \cos\alpha + \frac{\partial \cdot}{\partial y^2} \sin\alpha$

$\cdot\ \vec{n}$ // **grad** u (le même sens)

On obtient

$$\begin{cases} A\frac{\partial u}{\partial y^1} + B\frac{\partial u}{\partial y^2} = f(\varphi) \\ -\frac{\partial u}{\partial y^1}\frac{\partial \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial \phi}{\partial y^1}\frac{\partial u}{\partial y^2} = \varphi' \end{cases} \tag{1.39}$$

Proposition 1.2.1: *Le problème de Cauchy (1.36) a une solution unique si et seulement si la courbe Γ est libre, si la courbe Γ est caractéristique le problème est conditionnel (i.e) la donnée de Cauchy doit satisfaite une condition de compatibilité, et dans ce cas on aura une infinité des solutions.*

Exemples: 1) $\begin{cases} u_t = -2tu_x + 2t + 4tx = F(t,x,u_x,u) \\ u(t,x) = x^2 + x \text{ sur } \Gamma \end{cases} \quad /\Gamma = \{(\sqrt{x}, x)\,/x \geq 0\}$

On remarque que Γ est une courbe caractéristique et $F(\sqrt{x}, x, \varphi_x) = 0$ donc la donnée de Cauchy vérifie une équation de compatibilité, $u(t,x) = x^2 + t^2 + \alpha$, $/\alpha \in R$

2) $\begin{cases} u_t + 2u_x = 0 \\ u(t,x) = 2x \quad \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad \Gamma = \left\{\left(\frac{x}{2}, x\right)/x \in R\right\}$

Si u existe $u(t,x) = \varphi(x-2t) = 2x - 4t$, mais $u(\frac{x}{2}, x) \neq 2x$

3) E.D.P du seconde ordre (l'utilisation des caractéristiques)

Considérons l'équation $R \times u_{,11} + S \times u_{,12} + T \times u_{,22} = W$, telles que R, S, T sont des fonctions en y^1, y^2 ,on pose $p = u_{,1}$, $r = u_{,11}$, $t = u_{,22}$ $q = u_{,2}$ $s = u_{,12}$.

On obtient $\begin{cases} dp = rdy^1 + sdy^2 \\ dq = sdy^1 + tdy^2 \end{cases}$

$$\rightarrow \begin{cases} R \times r + S \times s + T \times t = W \\ rdy^1 + sdy^2 \qquad\qquad = dp \\ \qquad\qquad sdy^1 + tdy^2 \quad = dq \end{cases}$$

Ce système admet une solution unique si et seulement si

$D = det \begin{pmatrix} R & S & T \\ dy^1 & dy^2 & 0 \\ 0 & dy^1 & dy^2 \end{pmatrix} \neq 0$ et n'admet pas une solution unique si

$D = 0 \rightarrow R\left(\frac{dy^2}{dy^1}\right)^2 - S\left(\frac{dy^2}{dy^1}\right) + T = 0$

si $D = 0$ pour l'existence des solutions il faut que (w, dp, dq)

vérifient $\begin{vmatrix} R & T & W \\ dy^1 & 0 & dp \\ 0 & dy^2 & dq \end{vmatrix} = 0$ (équation de compatibilité)

4) $\quad u_{,22} + 2u_{,12} + u_{,11} + c^2 u_{,12} = 0$

les courbes caractéristiques : $\left(\dfrac{dy^2}{dy^1}\right)^2 - 2\left(\dfrac{dy^2}{dy^1}\right) + 1 = 0$

$\rightarrow \left(\dfrac{dy^2}{dy^1} - 1\right)^2 = 0 \rightarrow x - y = cte$

on effectue le changement de variable $\left\{\begin{array}{l} \xi = x - y \\ \eta = x \end{array}\right\} \rightarrow \frac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \dfrac{\partial u}{\partial \xi}$

Théorème 1.2.1: (de Holmogren) : *Soit $u \in H^2$ une solution du problème $P(u) = 0$ où les coefficients de P sont analytiques et $u = 0$ sur une courbe Γ libre de classe C^2. Alors u est identiquement nulle dans un voisinage de chaque point de Γ le théorème de Holmogren a été étendu par Carleman pour des systèmes à coefficients de classe C^2 à caractéristiques simples (i.e) det $(\zeta_1 A - \zeta_2 B)$ admet des racines simples ..*

Théorème 1.2.2: (de Carleman) *Soit $u \in C^m(\Omega)$, $m \geq 0$ tel que $P(u) = 0$, les coefficients de P sont de classe C^2 et a des caractéristiques simples. Soit Γ une portion*

de courbe régulière (C^2) de Ω. Si u est nulle sur Γ. Alors u est identiquement nulle dans un voisinage de chaque point de Γ.

Remarque 1.3 *Dans le cadre des distributions, imposer des données de Cauchy sur une courbe caractéristique n'a pas de sens, ces conditions sont remplacées par $u_{/\Omega^-} = 0$.*

Théorème 1.2.3: *Soit $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^- \cup \Gamma$, Γ passe par (y^1, y^2). Soit u une distribution sur Ω , $P(u) = 0$ sur Ω et $u_{/\Omega^-} = 0$. Alors il existe un voisinage w de (y^1, y^2) tel que $u = 0$ sur w^+.*

Théorème 1.2.4: *Considérons un système $A(u) = 0$ d'ordre m sans caractéristiques multiples, dans un domaine Ω, les coefficients sont supposés réels de classe C^β, $\beta \geq 1$, soit $u \in C^m, A(u) = 0$, $u = 0$ sur Γ (de classe C^m) libre. Alors u s'annule dans un voisinage de chaque point de Γ.*

Théorème 1.2.5: *Soit Ω un ouvert connexe de R^2, $u \in H^1$ solution de $P(u) = 0$ P un opérateur différentiel du seconde ordre, elliptique à coefficients lipshitziens. Alors, si u s'annule dans un ouvert $w \neq \emptyset$ Alors u s'annule sur Ω .*

Cas d'un système hyperbolique

Soit u une fonction définie sur Ω. Considérons l'opérateur différentiel du premier ordre comme en (1.36) mais en prenant, sans perte de généralité $A = I_2$.

Définition 1.9: *On dit que le système (1.36) est* ***hyperbolique*** *dans la région considérée, si $Det(B - \lambda I_2)$ a toutes ses racines réelles si de plus, toutes ses racines sont réelles et distinctes le système (1.36) est dit* ***strictement hyperbolique****. Dans le cas où les racines sont complexes, non réels, le système est* ***elliptique.***

Théorème d'existence et d'unicité pour les systèmes hyperboliques . On cite maintenant un cas particulier d'un théorème d'existence et d' unicité trés général dont la démonstration figure dans (M.Taylor [44]).

Théorème 1.2.6: *On suppose que le système (1.36) est hyperbolique pour tout $y \in K, K$ une variété compacte sans bord. Pour certain $s \in R$, on considère le problème de Cauchy avec la donnée $u(y, 0) = u_0(y)$. Alors si $u_0 \in H^s(K)$ (l'espace de Sobolev d'ordre réel [18]) et $f \in L^2(0, X; H^s_y(K))$, il existe une solution unique de (1.36) , $u \in C^0_x([0, X], H^s_y(K))$. Si de plus, pour certain entier $\ell \geq 0$, on a $f \in H^\ell_x(0, X; H^s_y(K))$. Alors $u \in C^k_x([0, X], H^{s-k}_y(K))$ pour $0 \leq k \leq \ell$.*

1.3 La théorie classique des coques minces: Le modèle bidimensionnel linéarisé de W.T Koiter

Soit une coque mince S^ε. En effet, en mécanique une coque est qualifiée de mince si en tout point P de la surface moyenne S l'épaisseur est au plus de l'ordre $\frac{1}{10}\min(L_1, L_2)$ où L_1 et L_2 sont les autres deux dimensions de la coque, S^ε est définit à partir d'une surface S donnée par une carte (Ω, r) :

$S^\varepsilon = \left\{p(y^1, y^2, y^3) = \vec{r}(y^1, y^2) + y^3\vec{a}_3 / \left|y^3\right| < \frac{\varepsilon}{2}\right\}$.

Le modèle de Koiter repose sur les hypothèses suivantes :

-les normales à la surface moyenne non déformée sont encore normales à la surface moyenne après déformation.

-au cours de déformation, les contraintes sont approximativement planes et parallèles au plan tangent à la surface moyenne.

Le problème mécanique consiste à trouver le champ de déplacement u^ε de la surface moyenne S sous l'effet d'un champ de forces extérieures. La coque est soumise à des conditions aux limites cinématiques, par exemple fixée sur une partie (ou la totalité) de son bord et les forces extérieures sont supposées suffisament petites pour entraîner des déplacements et des déformations, également petits afin que la coque déformée soit proche de son état naturel. Sous l'hypothèses de W.T. Koiter le problème tridimensionnel se réduit à un problème bidimensionnel, sur la surface moyenne S .

On rappele aussi que la théorie classique linéarisée (voir [30]) consiste à admettre que les contraintes membranaires et les moments sont des fonctions linéaires des tenseurs de déformation et de changement de courbure de S, ces derniers représentent les variations des coefficients de la représentation matricielle de la premiere et la deuxième forme fondamentale, sont notés réspectivement $\gamma_{\alpha\beta}$ et $\varrho_{\alpha\beta}$

$$\gamma_{\alpha\beta}(u) = \frac{1}{2}\left(D_\alpha u_\beta + D_\beta u_\alpha\right) - b_{\alpha\beta}u_3. \tag{1.40}$$

$$\varrho_{\alpha\beta}(u) = \partial_{\alpha\beta}u_3 - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\partial_\gamma u_3 - b^\gamma_\alpha b_{\gamma\beta}u_3 + D_\alpha(b^\gamma_\beta u_\gamma) + b^\gamma_\alpha D_\beta u_\gamma. \tag{1.41}$$

Les contraintes et les moments membranaires $T^{\alpha\beta}$ et $M^{\alpha\beta}$:

$$\tilde{T}^{\alpha\beta}u = \varepsilon A^{\alpha\beta\lambda\mu}\gamma_{\lambda\mu}(u). \tag{1.42}$$

$$\tilde{M}^{\alpha\beta} = \frac{\varepsilon^3}{12}A^{\alpha\beta\lambda\mu}\varrho_{\lambda\mu}(u). \tag{1.43}$$

$A^{\alpha\beta\lambda\mu}$sont les coefficients d'élasticité donnés par

$$A^{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{E}{2(1+\nu)}\left(a^{\alpha\lambda}a^{\beta\mu} + a^{\alpha\mu}a^{\beta\lambda} + \frac{2\nu}{1-\nu}a^{\alpha\beta}a^{\lambda\mu}\right). \tag{1.44}$$

$$T^{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta\lambda\mu}\gamma_{\lambda\mu}(u). \tag{1.45}$$

$$M^{\alpha\beta} = \frac{1}{12}A^{\alpha\beta\lambda\mu}\varrho_{\lambda\mu}(u). \tag{1.46}$$

La forme d'énergie s'écrit

$$\varepsilon\int_S T^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta}(v)\,dS \;+\varepsilon^3\int_S M^{\alpha\beta}\varrho_{\alpha\beta}(v)\,dS \;=\varepsilon^3\int_S (f^\alpha v_\alpha + f^3 v_3)dS \tag{1.47}$$

L'étude asymptotique montre que la forme bilinéaire d'énergie en membrane a_m est :

$$\frac{\varepsilon}{2}a_m(u,u) = \frac{\varepsilon}{2}\int_S T^{\alpha\beta}(u)\,\gamma_{\alpha\beta}(u)\,dS \tag{1.48}$$

La forme bilinéaire d'énergie en flexion est :

$$\frac{\varepsilon^3}{2}a_f(u,u) = \frac{\varepsilon^3}{2}\int_S M^{\alpha\beta}(u)\,\varrho_{\alpha\beta}(u)\,dS \tag{1.49}$$

1.3.1 La formulation variationnelle

On suppose que la coque S^ε est encastrée le long d'une partie Γ_0 de son bord et libre par le rest Γ_1, la condition d'encastrement est définit par

$$v_1 = v_2 = v_3 = \frac{\partial v_3}{\partial n} = 0 \;\; sur \;\; \Gamma_0 \tag{1.50}$$

($\frac{\partial}{\partial n}$désigne la dérivée suivant la normale)

Ainsi, de l'équation (1.47) la formulation variationnelle s'exprime sous la forme:

$$P(\varepsilon)\begin{cases} \text{Etant donné } f \in V' \text{ trouver } u^{\varepsilon} \text{ satisfaisant à} \\ \varepsilon^{-2} a^{m}\left(u^{\varepsilon}, w\right) + a^{f}\left(u^{\varepsilon}, w\right) = \langle f, w\rangle \quad \forall w \in V \end{cases} \tag{1.51}$$

$$a^{m}(u,v) = \int_{S} A_{11}^{\alpha\beta\lambda\mu} \gamma_{\lambda\mu}(u)\, \gamma_{\alpha\beta}(v)\, dS \tag{1.52}$$

$$a^{f}(u,v) = \int_{S} A_{22}^{\alpha\beta\lambda\mu} \varrho_{\lambda\mu}(u)\, \varrho_{\alpha\beta}(v)\, dS \tag{1.53}$$

De la forme de $\gamma_{\lambda\mu}(u)$ et $\varrho_{\lambda\mu}(u)$on déduit le cadre fonctionnel approprié (l'espace des déplacement admissibles)

$$V = \left\{ v \in H^{1}(\Omega) \times H^{1}(\Omega) \times H^{2}(\Omega) + C.C \right\} \tag{1.54}$$

$$C.C: \; v_1 = v_2 = v_3 = \frac{\partial v_3}{\partial n} = 0 \; sur \; \Gamma_0$$

munit de la norme

$$\|u\|_{V} = \left(\sum_{\alpha=1}^{2} \|u_{\alpha}\|_{H^1}^{2} + \|u_3\|_{H^2}^{2} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.55}$$

1.3.2 Etude de la coercivité

Dans ce paragraphe, nous démontrons la coercivité de la forme bilinéaire symétrique $a^m + a^f$, le point de départ est l'inégalité de Korn, il convient de noter que la démonstration de l'ellipticité du modèle de Koiter figure dans Bernado [3], Sanchez-P et Sanchez-H [30] et P G. Ciarlet [8].

Lemme 1.1: *$\exists C > 0$ telle que $A_{11}^{\alpha\beta\lambda\mu}\, \gamma_{\lambda\mu}\gamma_{\alpha\beta} \geq C \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \left(\gamma_{\alpha\beta}\right)^2$*

Preuve. On a $A^{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{E}{2(1+\nu)}\left(a^{\alpha\lambda}a^{\beta\mu} + a^{\alpha\mu}a^{\beta\lambda} + \frac{2\nu}{1-\nu}a^{\alpha\beta}a^{\lambda\mu}\right) \to A_{11}^{\alpha\beta\lambda\mu}\gamma_{\lambda\mu}\gamma_{\alpha\beta}$

$$= \frac{E}{2(1+\nu)}\left(a^{\alpha\lambda}a^{\beta\mu}\gamma_{\lambda\mu}\gamma_{\alpha\beta} + a^{\alpha\mu}a^{\beta\lambda} + \frac{2\nu}{1-\nu}a^{\alpha\beta}a^{\lambda\mu}\gamma_{\lambda\mu}\gamma_{\alpha\beta}\right)$$

on a
$$\begin{aligned} a^{\alpha\lambda}a^{\beta\mu}\gamma_{\lambda\mu}\gamma_{\alpha\beta} &= a^{11}[a^{11}\gamma_{11} + 2a^{12}\gamma_{12} + a^{22}\gamma_{22}]\gamma_{11} \\ &+2a^{12}[a^{11}\gamma_{11} + 2a^{12}\gamma_{12} + a^{22}\gamma_{22}]\gamma_{12} \\ &+a^{22}[a^{11}\gamma_{11} + 2a^{12}\gamma_{12} + a^{22}\gamma_{22}]\gamma_{22} \\ &=[a^{11}\gamma_{11} + 2a^{12}\gamma_{12} + a^{22}\gamma_{22}]^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Et on a

tele que A= $\begin{pmatrix} a^{11} & 2a^{11}a^{12} & (a^{12})^2 \\ 2a^{11}a^{12} & 2a^{11}a^{22} & 2a^{12}a^{22} \\ (a^{12})^2 & 2a^{12}a^{22} & (a^{22})^2 \end{pmatrix}$

$detA = 2\left(a_{11}a_{22} - (a_{12})^2\right)^{-1} > 0$, et de plus A est une matrice définit positive (i.e) $\langle Ax, x\rangle > 0 \quad si \;\; x \neq 0$ donc on peut trouver C >0 tel que $A_{11}^{\alpha\beta\lambda\mu}\gamma_{\lambda\mu}\gamma_{\alpha\beta} \geq C\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\left(\gamma_{\alpha\beta}\right)^2$ ■

La même chose pour $A_{11}^{\alpha\beta\lambda\mu}\varrho_{\lambda\mu}\varrho_{\alpha\beta}$ par conséquent $\exists C > 0$ /

$\int_\Omega \left(T^{\alpha\beta}(u)\gamma_{\alpha\beta}(u) + M^{\alpha\beta}(u)\varrho_{\alpha\beta}(u)\right)dS \geq C\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}(\left\|\gamma_{\alpha\beta}\right\|_{0,\Omega}^2 + \left\|\varrho_{\alpha\beta}\right\|_{0,\Omega}^2)$

pour tout $u \in V$.

Lemme 1.2: *$\exists c > 0$ telle que* $\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}(\left\|e_{\alpha\beta}(v)\right\|_{0,\Omega}^2 + \left\|\partial_{\alpha\beta}^2(v)\right\|_{0,\Omega}^2) + \|v\|_{L^2\times L^2\times H^1}^2 \geq c\|v\|_{H^1\times H^1\times H^2}^2$ *pour tout* $v \in H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)\times H^2(\Omega)$

$$e_{\alpha\beta}(v) = \frac{1}{2}(\partial_\alpha v_\beta + \partial_\beta v_\alpha). \tag{1.56}$$

Preuve.

D'après l'inégalité de Korn (Ciarlet [8] ou bien Sanchez-P et Sanchez - H [30]) on a

$$\sum_{\alpha,\beta}\int_\Omega (e_{\alpha\beta}(\hat{v}))^2 dx + \sum_\alpha \int_\Omega v_\alpha^2 dx \geq c_1\|\hat{v}\|_{(H^1(\Omega))^2}^2. \tag{1.57}$$

pour $\hat{v} = (v_1, v_2) \in (H^1(\Omega))^2$ *on pose* $v = (\hat{v}, v_3)$, *on adjoutant* $\|v_3\|_{H^2(\Omega)}^2$ *aux deux membres on obtient*

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}(\left\|e_{\alpha\beta}(v)\right\|_{0,\Omega}^2 + \left\|\partial_{\alpha\beta}^2(v)\right\|_{0,\Omega}^2) + \|v\|_{L^2\times L^2\times H^1}^2 \geq c\|v\|_V^2 \tag{1.58}$$

■

■

Proposition 1.3.1 *(1-6- de Sanchez-H et Sanchez-P [30] p192)* $\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}(\left\|\gamma_{\alpha\beta}(v)\right\|_{0,\Omega}^{2}+$ $\left\|\varrho_{\alpha\beta}(v)\right\|_{0,\Omega}^{2})^{2} \geq c\left\|v\right\|_{V}^{2}$ *pour tout* $v \in V$. *La démonstration se trouve dans [30] p192 ou bien Ciarlet [8] p128.*

Conclusion : De la positivité de $A_{11}^{\alpha\beta\lambda\mu}$ et de la proposition précédente on déduit que $a^m + a^f$ est coercive sur V. Par conséquence le problème P(ε) admet une solution unique dans V si $f \in V'$.

1.4 Classification des coques élastiques minces

Nous nous décrivons les diverses classifications des coques, suivant que la coque est à énergie de déformation en membrane dominante $\left(E^m >> E^f\right)$ où à énergie de déformation en flexion dominante $\left(E^m << E^f\right)$, puisque la classification nous aide à déterminer u^0 $(resp : u^\varepsilon)$ (explicitement ou numériquement).

Deux classifications ont été proposées la première, (en 1989) par **Sanchez-**P suivant que $G = \{v \in V/a^m(v,w) = 0, \forall w \in V\}$ est réduit à l'élément nul où non,

si $G = \{0\}$,(coque inhibée)$\rightarrow$ (fort possible) $E^m >> E^f$,

si $G \neq \{0\}$, (coque non inhibée)$\rightarrow$ (fort possible) $E^m << E^f$, et dans cette classification on a besoin de résoudre un problème de Cauchy sous forme d'un système linéaire du 1er ordre parceque (voir ci-après) $G = \left\{v \in V/\gamma_{\alpha\beta}(v) = 0\right\}, \alpha, \beta = 1, 2$

La deuxième classification (A. Blouza, F. Brezzi et C. Lovadina), consiste à chercher α tel que $0 < C_1 \leq \varepsilon^{-\alpha}E(u^\varepsilon(\alpha)) \leq C_2$, la détermination de α nous permet de comparer les deux énergies de déformation par rapport à l'énergie de déformation totale.

1.4.1 Classification inhibée et non inhibée

Considérons une coque élastique isotrope et homogène S_ε, d'épaisseur ε>0, autour de la surface moyenne S dans son état naturel, cette coque est définie par une carte (Ω, r) où Ω est un ouvert borné de R^2 dans le plan des paramètres, (y^1, y^2) et le problème variationnel est: (P^ε)

$$\begin{cases} \text{trouver } u^\varepsilon \in V = H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^2(\Omega) + C.C \\ \varepsilon^{-2}a^m(u^\varepsilon, w) + a^f(u^\varepsilon, w) = \langle f, w\rangle \quad \forall w \in V \end{cases} \tag{1.59}$$

C.C : les conditions cinématiques d'encastrement données en (1.50) telles que

$$a^m(u,v) = \int_S A_{11}^{\alpha\beta\lambda\mu}\gamma_{\lambda\mu}(u)\,\gamma_{\alpha\beta}(v)\,dS \tag{1.60}$$

$$a^f(u,v) = \int_S A_{22}^{\alpha\beta\lambda\mu}\varrho_{\lambda\mu}(u)\,\varrho_{\alpha\beta}(v)\,dS \tag{1.61}$$

où les coefficients satisfont les conditions usuelles de symétrie

$$A^{\alpha\beta\lambda\mu} = A^{\beta\alpha\lambda\mu} = A^{\lambda\mu\alpha\beta} \tag{1.62}$$

et de positivité :

$$\exists C > 0 : A^{\alpha\beta\lambda\mu}\gamma_{\lambda\mu}\gamma_{\alpha\beta} \geq C\gamma^2_{\alpha\beta} \tag{1.63}$$

$$\gamma_{\lambda\mu}(u) = \frac{1}{2}\left(D_\lambda u_\mu + D_\mu u_\lambda\right) - b_{\lambda\mu}u_3 \tag{1.64}$$

$$\varrho_{\lambda\mu}(u) = \partial_{\lambda\mu}u_3 - \Gamma^\gamma_{\lambda\mu}\partial_\gamma u_3 - b^\gamma_\lambda b_\gamma u_3 + D_\lambda\left(b^\gamma_\mu u_\gamma\right) + b^\gamma_\lambda D_\mu u_\gamma \tag{1.65}$$

γ et ϱ sont les tenseur de déformation et de variation de courbure pour le modèle linéaire de Koiter. L'existence et l'unicité de u^ε sont assurées par le théorème de **Lax-milgrame ([6].p 84).**

On remarque que la solution aura tendance à annuler la forme $a_m(,)$ lorsque $\varepsilon \to 0$, donc le comportement de la solution sera trés différent suivant que $G = \{v \in V/a^m(v,w) = 0, \forall w \in V\}$, est réduit à l'élément nul ou non.

Corollaire 1.4.1 $G = \{v \in V/a^m(v,v) = 0\} = \{v \in V/\gamma_{\alpha\beta}(v) = 0, \alpha,\beta = 1,2\}$
$= \begin{cases} v \in H^2(S)/\gamma_{\alpha\beta}(v) = 0 \\ v_1 = v_2 = v_3 = \frac{\partial v_3}{\partial n} = 0 \ sur \ \Gamma_0 \end{cases}$

Preuve. Il suffit montrer que si $v \in G \to \mathbf{v}_T \in H^2(S)$ telle que $\mathbf{v}_T = v_1\vec{a}_1 + v_2\vec{a}_2$ on a $v \in G \to e_{11}(\mathbf{v}_T) = \partial_1 v_1 = \Gamma^\alpha_{11}u_\alpha + b_{11}u_3 \in H^1$ $e_{22}(\mathbf{v}_T) = \partial_2 v_2 = \Gamma^\alpha_{22}u_\alpha + b_{22}u_3 \in H^1$ $e_{12}(\mathbf{v}_T) = \frac{1}{2}(\partial_1 v_2 + \partial_1 v_2) = \Gamma^\alpha_{12}u_\alpha + b_{12}u_3 \in H^1 \to \mathbf{v}_{T,\gamma} \in L^2(S)$ $\gamma = \overline{1,2}$ on applique l'inégalité du Korn on obtient $\sum \|e_{11}(\mathbf{v}_{T,\gamma})\|^2_{L^2} + \|\mathbf{v}_{T,\gamma}\|^2_{L^2} \geq Cte\,\|\mathbf{v}_{T,\gamma}\|^2_{H^1} \to \mathbf{v}_{T,\gamma} \in H^1 \to \mathbf{v}_T \in H^2(S)$ ■

Définition 1.10 : *Le système $\gamma_{\alpha\beta}(v) = 0$, est appelé système de rigidité de S (ou système de flexion linéarisé) et les solutions sont les déplacements u laissant invariante la premier forme (1.5) (i.e déplacements inextensionnels linéarisés). Si la surface S n'admet pas des déplacements inextensionnels (i.e) $G = \{0\}$, la coque est dite* ***inhibée*** *(géométriquement rigide), et* ***non inhibée*** *si $G \neq \{0\}$. Il est claire que pour montrer qu'une coque est inhibée ou non, il faut résoudre un problème de Cauchy sous forme d'un système linéaire d'e.d.p du 1er ordre.*

Exemples des coques inhibées

Exemple: cas elliptique. On étudie une coque a une surface moyenne uniformément elliptique $b_{11}b_{22} - b_{12}^2 > 0$ (dans le cas le plus simple) $b_{11} = b_{22} = 1 = a_{11} = a_{22}$ et $b_{12} = 0 = a_{12}$ et $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} = 0$ on montre que : si cette coque est fixée sur $\Gamma = \{x = 0\}$ alors,$\left\{\gamma_{\alpha\beta}(u) = 0, u \in H^2\right\} \to u = 0$

En effet, $\gamma_{\alpha\beta}(u) = 0 \to$

$$\begin{cases} u_{1,1} - u_3 = 0 \\ u_{2,2} - u_3 = 0 \\ u_{2,1} + u_{1,2} = 0 \end{cases} \tag{1.66}$$

on remaque que $p(u) = A\dfrac{\partial u}{\partial y^1} + B\dfrac{\partial u}{\partial y^2}$ / $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On a $\det(\zeta_1 A - \zeta_2 B) = 0 \to \zeta_1 = \zeta_2 = 0$, une racine simple $z = 0$ les courbes caractéristiques sont $dy^1 = 0$, $dy^2 = 0 \to y^1 = cte$, $y^2 = cte$ ce qui résulte que toute courbe est caractéristique (le système est dit non Kowaleskien).

Mais on a déja vu que $G \subset H^2(S)$ on doit montrer donc que: si $u \in H^2(\Omega), P(u) = 0$, $u = 0$ sur $\Gamma \to u = 0$ dans Ω , on a

$$(1.66) \to \begin{cases} u_{1,122} - u_{3,22} = 0 \\ u_{2,211} - u_{3,11} = 0 \\ u_{2,121} + u_{1,221} = 0 \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} u_{3,22} - u_{3,11} = 0 \\ u_3 = 0 \text{ dans } O \subset \Omega \end{cases} \tag{1.67}$$

d'après le théorème I.2.2 et 1.2.5 $u_3 = 0$ dans Ω
$\to u_{1,1} = u_{2,2} = 0$
d'aprés le théorème I.2.4 si u $\in C^1(\Omega), P(u) = 0$
$\to u = (u_1(y^2), u_2(y^1), 0) \to u_1 = -u_2 = cte$
donc dans la classe C^1 $u = 0$, on déduit que dans H^2 $u = 0$
En effet, d'aprés les injections de Sobolev ([6]) :
$\Omega \subset R^n, m.p > n \to w^{m,p}(\Omega) \subseteq C(\bar{\Omega})$, avec injection compact, donc si

$$\begin{cases} u \in H^2 \\ p(u) = 0 \end{cases} \to \begin{cases} u \in C(\bar{\Omega}) \\ p(u) = 0 \end{cases} \to u \in C^1(\Omega)$$

donc $u = 0$ dans H^2.

Exemple Cas d'une surface uniformément parabolique: D'après les résults du section 1.1.3 de ce chapitre, les surfaces paraboliques sont des surfaces réglées développables. Dans ce cas les caractéristiques sont doubles et coïcident naturellement avec les génératrices de la surface. Il y a donc lieu de distinguer deux cas suivant que la courbe de contact coïcide avec une génératrice ou non, si la courbe Γ est une génératrice la coque est non inhibée. Si la courbe n'est pas une génératrice, la coque est inhibée. Pour plus de détails on se refère [30].

Cas non inhibée

Exemple I.4.3 Soit $\Omega =]-1,1[\times \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
$\rightarrow \varphi(y^1, y^2) = (y^1, \sin y^2, \cos y^2)$

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{a}}_1 = (1\ ,\ 0\ ,0) \\ \vec{\mathbf{a}}_2 = (0, \cos y^2, -\sin y^2) \\ \vec{\mathbf{a}}_3 = (0, \sin y^2, \cos y^2) \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} b_{11} = 0 \\ b_{22} = -1 \\ b_{12} = 0 \end{cases}$$

$$\gamma_{\alpha\beta} = 0 \rightarrow \begin{cases} u_{1,1} = 0 \\ u_{1,2} + u_{2,1} = 0 \\ u_{2,2} = -u_3 \end{cases} \quad \text{on remarque que}$$

$u = (0, g(y^2), -g'(y^2)$ telle que $g \in C_0^\infty\left(\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right)$ appartienne à G, et de plus dans ce cas, la coque est à énergie de déformation en flexion dominante puique il existe $g \in C_0^\infty\left(\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right)$et $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} g(y^2) \sin y^2 dy^2 \neq 0$.

1.4.2 Classification suivant l'énergie dominante

Il est bien connu que la résolution numérique (par éléments finis par exemple) ce n'est qu'une minimisation de l'énergie, et on a déja énoncer que l'énergie de déformation est la somme de E^f et E^m. Donc la connaissence de quelle énergie est dominante joue un rôle trés important dans la résolution numérique. Il intéressant à noter que :

si $G = \{0\}$,(coque inhibée)$\rightarrow$ (fort possible) $E^m >> E^f$,

si $G \neq \{0\}$,(coque non inhibée)$\rightarrow$(fort possible) $E^m << E^f$,

La relation entre l 'énergie de déformation et la surface

Cas : non inhibée **G**$\neq \{0\}$

On a $\varepsilon^{-2} a^m(u^\varepsilon, w) + a^f(u^\varepsilon, w) = \langle f, w\rangle \quad \forall w \in V$, on fixe w dans V,

on obtient $u^\varepsilon \rightarrow u \in G$ dans V telle que u est la solution du problème

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in G \\ a^f(u, w) = \langle f, w\rangle . \forall w \in G \end{cases} \tag{1.68}$$

Théorème 1.4.1: *Soit u^ε la solution de $P(\varepsilon)$ (1.59). Alors $u^\varepsilon \rightharpoonup u$ dans V faible où u est la solution de (1.68).*

Preuve. La forme $a^m + a^f$ est coercive sur V, donc a^f est coercive sur G. Donc d'aprés le théorème de Lax-Milgrame (Brezis [6]) le problème (1.59) admet une solution unique dans G. Posons $v = u^\varepsilon$ dans (1.59) on obtient $c\|u^\varepsilon\|_V^2 \leq a^m(u^\varepsilon, u^\varepsilon) + a^f(u^\varepsilon, u^\varepsilon) \leq \varepsilon^{-2} a^m(u^\varepsilon, u^\varepsilon) + a^f(u^\varepsilon, u^\varepsilon) \leq C\|u^\varepsilon\|_V$

$\rightarrow \|u^\varepsilon\|_V \leq cte \rightarrow \varepsilon^{-2} a^m(u^\varepsilon, u^\varepsilon) + a^f(u^\varepsilon, u^\varepsilon)$ reste bornée. Donc $a^m(u^\varepsilon, u^\varepsilon) \rightarrow \mathbf{0}$ (lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$).

L'espace V est réflexif, donc la famille $a^m(u^\varepsilon, u^\varepsilon)$ est faiblement compacte dans V et donc on peut extraire une sous suite qui converge faiblement vers une fonction u dans V, d'après ce qui précède $u \in G$. En prenant $v \in$G dans (1.59) on obtient

$a^f(u^\varepsilon, v) = \langle f, v\rangle$. En passant à la limite, on déduit que u satisfait au problème (1.68). ■

Revenant maintenant à l'estimation de l'énergie.

D'après le théorème précédent on a $a^m(u,u) = 0$ et $a^f(u,u) = cte$.

Mais le probléme c'est que si $f = 0$ sur G et $f \neq 0$ sur V avec $\mathbf{G} \neq \{0\}$.

dans ce cas on obtient $a^f(u^0, u^0) = a^m(u^0, u^0) = 0$.

Généralement si $f \notin G_0^\perp = \{f \in V' / \langle f, w\rangle = 0, \forall w \in G\}$

$\rightarrow \exists w \neq 0 / \langle f, w\rangle \neq 0 \rightarrow a^f(u^0, w) \neq 0 \rightarrow u^0 \neq 0 \rightarrow E^f \neq 0$

Donc une coque non inhibée, n'est pas forcement à énergie de déformation en flexion dominante $\left(E^f >> E^m\right)$.

Cas inhibée : Si $G = \{0\} \rightarrow u^\varepsilon \rightarrow 0$ dans V on pose

$$u^\varepsilon = \varepsilon^2 v^\varepsilon \rightarrow a^m(u^\varepsilon, w) + \varepsilon^2 a^f(u^\varepsilon, w) = \langle f, w\rangle \ \ \forall w \in V \tag{1.69}$$

$\tilde{w}$ est le complété de w par la norme $(a^m(v,v))^{\frac{1}{2}}$, on remarque que $V \subset \tilde{w}$ on fixe w dans V, si $f \in (\tilde{w})' \rightarrow a^m(v^\varepsilon, w) + \varepsilon^2 a^f(v^\varepsilon, w) = \langle f, w\rangle$

$\rightarrow 1 + \dfrac{\varepsilon^2 a^f(v^\varepsilon, w)}{a^m(v^\varepsilon, w)} = \dfrac{\langle f, w\rangle}{a^m(v^\varepsilon, w)} \rightarrow \lim \dfrac{\varepsilon^2 a^f(v^\varepsilon, w)}{a^m(v^\varepsilon, w)} = 0$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Remarque 1.4: On doit montrer dans le théorème 1.5.1 que $v^\varepsilon \rightarrow v^0$ forte

donc si $f \in (\tilde{w})' \rightarrow \varepsilon^3 a^f(v^0, v^0) = o\left(\varepsilon a^m(v^0, v^0)\right)$.

Mais, on peut avoire des coques inhibée (resp : non inhibée) qui ne sont pas à énergie de déformation en membrane dominante (resp :$E^f >> E^m$). Comme il montre l'exemple suivant :

Exemple 3 : On considère un demi-cylindre encastré sur une partie de sa frontière de mesure non nulle, subit d'une force sous forme -$\delta(0,0)$ (poids)

$f = (0, 0, -\delta)$, puisque le demi-cylindre est encastré donc

$G = \{0\}$,et $\langle f, u\rangle = -u_3(0,0)$

$G = \{0\} \rightarrow u^\varepsilon \rightarrow 0 \in G$ on pose $\varepsilon^2 u^\varepsilon = v^\varepsilon \ \rightarrow$

$a^m(v^\varepsilon, w) + \varepsilon^2 a^f(v^\varepsilon, w) = \langle f, w\rangle \quad \forall w \in V$, on définie l'espace

$\tilde{w} = \left\{\text{le complété de } V - G \text{ par la norme } a^m(,)^{\frac{1}{2}}\right\}$, on a $\delta \notin (\tilde{w})\prime$ puisque

$$a^m(u,u) = cte \int_\Omega \left(\nu(\gamma_{11} + \gamma_{22})^2 + (1-\nu)\sum_{i,j=1}^{2} \gamma_{ij}^2\right) dy \ / \ 0 < \nu < \frac{1}{2} \tag{1.70}$$

$$\rightarrow a^m(u,u)^{\frac{1}{2}} \cong \|\gamma_{11}\|_{L^2} + \|\gamma_{22}\|_{L^2} + \|\gamma_{12}\|_{L^2} \tag{1.71}$$

$$\rightarrow a^m(u,u)^{\frac{1}{2}} \leq \|u_{1,1}\|_{L^2} + \|u_{2,2}\|_{L^2} + \|u_{1,2}+u_{2,1}\|_{L^2} + \|u_3\|_{L^2} \tag{1.72}$$

On déduit que $H^1 \times H^1 \times L^2 \subset \tilde{w} \rightarrow \delta \notin (\tilde{w})'$ pour étudier cet exemple on a besoin de ce:

Préliminaire

Soient les problèmes $P^\varepsilon \begin{cases} \text{trouver} \quad u^\varepsilon \\ \varepsilon a^m(v^\varepsilon, w) + \varepsilon^3 a^f(v^\varepsilon, w) = \langle f, w\rangle \quad \forall w \in V \end{cases}$

$P^\varepsilon_\alpha \begin{cases} \text{trouver} \quad u^\varepsilon(\alpha) \\ \varepsilon a^m(u^\varepsilon(\alpha), w) + \varepsilon^3 a^f(u^\varepsilon(\alpha), w) = \varepsilon^\alpha \langle f, w\rangle \quad \forall w \in V \end{cases}$

On pose $E(w) = \varepsilon a^m(w,w) + \varepsilon^3 a^f(w,w)$

Définition 1.11 : *On dit que (P^ε) est d'ordre α ssi il existe C_1, C_2, indépendants de ε telles que $0 < C_1 \leq \varepsilon^\alpha E(u^\varepsilon(\alpha)) \leq C_2$*

Remarque 1.5 : Si $\alpha = 3 \rightarrow E^f >> E^m$
Si $\alpha = 1 \rightarrow E^f << E^m$

Théorème 1.4.2: *Pour P^ε on a $E(u^\varepsilon(\beta)) = E(\varepsilon;\beta) \in L^\infty(0,1)$ ssi $f \in [w';V']_{\theta,\infty}$ tel que $\beta = 2\theta + 1$.*

Théorème 1.4.3: *Si $f \in [w';V']_{\theta,\infty}$ pour certain $0 < \theta < 1$. Alors (P^ε) est d'ordre $\alpha = \inf\left\{2\theta+1; f \in [w';V']_{\theta,\infty}\right\}$.*

d'après le théorème 4-3 de (Lions - Magenes[18]) on a $\delta \in H^{-s}$ pour $s > \frac{1}{2} \rightarrow \delta \in [H^0; H^2]_\theta$ pour $\theta > \frac{1}{4}$

$\rightarrow \inf\left\{2\theta+1; \delta \in [H^0; H^{-2}]_{\theta,\infty}\right\} = 1.5$, d'aprés le théorème précédent le probléme est d'ordre 1.5 donc, ni à énergie en flexion ni en membrane dominante (voir [4]). C'est un cas intermédiaire, il nous dirige vers une nouvelle classification qui a été proposée par C. Baochi, A. Blouza et C. Lovadina ([4],[5]), cette classification est basée sur la théorie d' interpolation. De façon plus précise, en cherche dans quel espace se trouve les chargements f ce qui nous permetre à déterminer $1 \leq \alpha \leq 3$ qui est caractérisé par la relation $E^f(\varepsilon) + E^m(\varepsilon) = O(\varepsilon^\alpha)$. Pour plus de détails (voir [4] et [5]). Notons qu' après la publication de l'article [4] Sanchez-P a pensé qu'il existe une relation entre

$$\alpha \text{ et } R(\varepsilon) = \lim \frac{E^f(\varepsilon)}{E(\varepsilon)} (\varepsilon \rightarrow 0) \tag{1.73}$$

ce qui est démontré par C. Baouchi et C. Lovadina dans [5] théorème 5.1 $\frac{1-\alpha}{2} = \lim \frac{E^f(\varepsilon)}{E(\varepsilon)} (\varepsilon \rightarrow 0)$.

1.5 Étude des coques inhibées :

Nous considérons à présent le cas des coques inhibées (i.e) $G = \{0\}$.

Donc u^ε la solution de $P(\varepsilon)$ converge vers 0 dans V, on pose $u^\varepsilon = \varepsilon^2 v^\varepsilon$ alors $P(\varepsilon)$ s'ecrit sous la forme :

$$\begin{cases} \text{trouver } v^\varepsilon \in V \\ a^m(v^\varepsilon, w) + \varepsilon^2 a^f(v^\varepsilon, w) = \langle f, w \rangle \qquad \forall w \in V \end{cases} \tag{1.74}$$

Le problème limite $\varepsilon = 0$

$$\begin{cases} \text{trouver } v^0 \\ a^m(v^0, w) = \langle f, w \rangle \qquad \forall w \in V \end{cases} \tag{1.75}$$

On remarque que la solution du problème limite v^0 est une solution d'un problème d'ordre de dérivation inférieur donc v^0 (si elle existe) est moins régulière que u^ε, donc le cas inhibée entre dans le cadre des problèmes de perturbation singulière. Il est claire que le problème limite est associé un un espace plus grand que V (noté V_m) donc dans le cas d'existence de la solution v^0 une perte de la régularité est sûre, en fait la situation est encore plus mauvaise puisque $V \subset V_m \to V_m^{'} \subset V^{'}$donc il arrive souvent que $f \in V^{'}$et $f \notin V_m^{'}$ de sort que la solution du problème limite appartient à un espace qui est encore plus grand que V_m et dans certain cas **il ne peut être contenu dans l'espace des distributions** (voir chapitre 4 de ce mémoire). Alors un phénomène de couche limite (resp : interne) apparaît (ce phénomène sera étudier dans le chapitre 3).

1.5.1 L'espace V_m

Il est claire que pour avoir la formulation variationnelle (1.74), il faut prendre les conditions aux limites (dites admissibles pour les coques).

$$u^\varepsilon_{/\partial\Omega} = 0 \text{ ou bien } \begin{cases} u^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ T^{\alpha\beta} u^\varepsilon \cdot n_\beta = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \end{cases} \tag{1.76}$$

On suppose qu'on a choisi $u^\varepsilon_{/\partial\Omega} = 0$

Rappelons que V_m est le complété de V par la norme

$\|u\|_{V_m} = (a^m(u,u))^{\frac{1}{2}}$. En adjoutant à V les éléments qui sont limite des suites de Cauchy par la norme $\|\|_{V_m}$.

$u^\varepsilon_{/\partial\Omega} = 0 \to V = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$

$a^m(u,u) = \int_S A_{11}^{\alpha\beta\lambda\mu} \gamma_{\lambda\mu}(u) \gamma_{\alpha\beta}(u) \sqrt{a} dy$

$\to \exists C > 0 / a^m(u,u) \leq C \int_\Omega \left(\nu(\gamma_{11} + \gamma_{22}^2) + (1-\nu) \sum \gamma_{\alpha\beta}^2(u)\right) \sqrt{a} dy$

$\to a^m(u,u) \leq Cte \|\partial_1 u_1\|_{L^2} + \|\partial_2 u_2\|_{L^2} + \|\partial_2 u_1 + \partial_1 u_2\|_{L^2} + \|u_3\|_{L^2}$

Donc si $u \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \to a^m(u,u) < \infty$. D'autre part $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ avec injection compact et dense (Brezis [6] p174) $\to H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ donc si $u \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \to a^m(u,u) < \infty$ et $\exists u_n \in V / u_n \to u$ on déduit que $V_m = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$

$$V_m' = H^{-1}(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

le cas $u^\varepsilon_{/\Gamma_0} = 0$, on obtient seulement $V_m' \subset (H^1 \times H^1 \times L^2)'$, donc on peut tester si $f \in V_m'$ ou non, à partir $(H^1 \times H^1 \times L^2)'$, mais la détermination de $V_m(V_m')$ dans le cas générale, est trés difficile (Sanchez-P [38]).

Une condition suffisante pour l'approximation membranaire

Nous restons toujourd dans le cas inhibée, on cite un théorème nous permet d' approximer v^ε par v^0.

Théorème 1.5.1: *Soit $f \in V'$, tel que*

$$\exists C > 0 / \left|\langle f, v\rangle\right| \leq C\left(a^m(v,v)\right)^{\frac{1}{2}} \text{ pour tout } v \in V \tag{1.77}$$

Alors $v^\varepsilon \to v^0$ fortement dans V, où v^ε et v^0 solutions de (1.74) et (1.75) respectivement.

Preuve.: D'après la proposition 1.3.1 la forme $a^m + a^f$ est coercive sur V$\to$ $\|v^\varepsilon\|_{V_m}^2 + \varepsilon^2 a^f(v^\varepsilon, v^\varepsilon) \geq C_1 \varepsilon^2 \|v^\varepsilon\|_V^2$ à l'aide de (1.77) $\exists C_2 > 0 / \|v^\varepsilon\|_{V_m}^2 + \varepsilon^2 C_2 \|v^\varepsilon\|_V^2 \leq C_3 \|v^\varepsilon\|_V \to \|v^\varepsilon\|_{V_m} \leq C_3$ et $\varepsilon \|v^\varepsilon\|_V \leq C_4 \to v^\varepsilon \rightharpoonup v^*$dans V_m faible de plus on a $\varepsilon^2 a^f(v^\varepsilon, w) \leq \varepsilon^2 \left(a^f(v^\varepsilon, v^\varepsilon)\right)^{\frac{1}{2}} \left(a^f(w,w)\right)^{\frac{1}{2}} \to 0 \to v^* = v^0$ il reste à prouver que la convergence est forte.

On a $a^m(v^\varepsilon - v^0, v^\varepsilon - v^0) + \varepsilon^2 a^f(v^\varepsilon, v^\varepsilon) = \langle f, v^\varepsilon\rangle - 2\langle f, v^\varepsilon\rangle + \langle f, v^0\rangle$
$=\langle f, v^0 - v^\varepsilon\rangle \to a^m(v^\varepsilon - v^0, v^\varepsilon - v^0) \to 0$ ■

Remarque 1.6: L'hypothèse (1.77) est trés réstrictive, l'espace V_m, est très grand (relativement à V) ça se résulte du fait que la forme bilinéaire d'énergie de déformation en membrane fait intervenir les dérivées partielles premières des composantes u_1, u_2 mais non celles de u_3.

Chapitre 2

PROBLÈMES DE PERTURBATIONS SINGULIÈRES AVEC PROBLÈME LIMITE À ÉNERGIE NON BORNÉE

"*Qui peut le plus, ne peut pas forcément le moins*"
Evariste Sanchez-Palencia

Ce chapitre est consacré à l'étude d'une classe de problèmes de perturbations singulières, apparaît dans la théorie des coques minces. Dans ces problèmes on considère des chargements f appartenant à $V\prime$ (dual de l'espace des déplacements admissibles) mais ne sont pas dans V'_m(V_m l'espace d'énergie du problème limite).

Donc pour $\varepsilon > 0$ les problèmes sont variationnels, mais les problèmes limites ne le sont pas. Ce qui peut être considérer comme un cas des problèmes mal posés. On remarque que la solution de problème limite (si elle existe) est moins régulière que la solution de problème $P(\varepsilon)$; c'est le problème de perturbation singulière. Alors un phénomène de couches limites ou internes apparaît et la partie dominante de l'énergie se concentre dans ces couches. Ce qui demande une discrétisation raffinée (adaptation de maillage voir C.A. De Souza [7] ou bien P. Karamian [21]) aux voisinage des couches limites ou internes pour l'approximation par éléments finis.

Avant d'étudier le cas de coques minces, on se propose deux exemples (qui ne sont pas forcement des problèmes des coques), mais sont résolubles explicitement (à l'intérieure et à l'extérieure de la couche). Puis on étudie le cas des coques à surface moyenne elliptique. s

2.1 Exemples en dimension un

Soit V un espace de Hilbert a et b deux formes bilinéaires symétriques sur V telles que.

$$|a(u,v)| \leq C \|u\| \|v\| \qquad \forall u, v \in V \tag{2.1}$$

$$|b(u,v)| \leq C \|u\| \|v\| \qquad \forall u, v \in V \tag{2.2}$$

$$a(u,u) \geq 0 \ , \ b(u,u) \ \geq 0 \qquad \forall u \ \in V \tag{2.3}$$

$$a(u,u) = 0 \Longrightarrow u = 0 \tag{2.4}$$

$$a(u,u) + b(u,u) \geq c \|u\|^2 \qquad \forall u \ \in V \tag{2.5}$$

On considère le problème variationnel

$$(P^\varepsilon) \begin{cases} \text{trouver } u^\varepsilon \in V \text{ tel que} \\ a(u^\varepsilon, v) + \varepsilon^2 b(u^\varepsilon, v) = \langle f, v \rangle \ \forall v \in V \end{cases} \tag{2.6}$$

telle que $f \in V'$.

Il est claire que, d'après le théorème de Lax-Milgram pour $\varepsilon > 0$ il existe $u^\varepsilon \in V$ solution unique de (P^ε).

2.1.1 Étude du problème limite

$$\left(P^0\right) \begin{cases} \text{trouver } u^0 \\ a(u^0, v) = \langle f, v \rangle \, \forall v \in V \end{cases} \tag{2.7}$$

d'aprés (2.4) $\|v\|_m = (a(v,v))^{\frac{1}{2}}$ est une norme sur V, on note V_m, le complété de V par cette norme, (i,e) nous ajoutons à V les éléments qui sont limites des suites de Cauchy par la norme $\|.\|_m$. Il est claire que on a $V \subset V_m$ et $V'_m \subset V'$.

Théorème 2.1.1: *Soit $f \in V'_m$ une fonction indépendante de ε, et soit u^ε et u^0 les solutions de (P^ε) et (P^0). Alors $u^\varepsilon \to u^0$ dans V fortement et il existe une constante C telle que l'énergie est bornée*

$$(i.e) \ E_0 = \frac{1}{2} a\left(u^0, u^0\right) \leq C \tag{2.8}$$

La démonstration de la convergence forte est la même de théorème 1.5.1

Théorème 2.1.2: *Soit $f \in V'$ une fonction indépendante de ε et u^ε la solution de (P^ε) et $(P^{(0)})$. Alors*
$E(u^\varepsilon) = \frac{1}{2}[a(u^\varepsilon, u^\varepsilon) + \varepsilon^2 b(u^\varepsilon, u^\varepsilon)]$ reste bornée lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$ ssi $f \in V'_m$
2)-si $f \notin V'_m$ alors $E(u^\varepsilon) \longrightarrow \infty$ lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$:

Preuve. On suppose que $E(u^\varepsilon)$ reste bornée lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$

$$\rightarrow a\left(u^\varepsilon, u^\varepsilon\right) + \varepsilon^2 b\left(u^\varepsilon, u^\varepsilon\right) \leq Cte \tag{2.9}$$

$$\rightarrow \begin{cases} b\left(u^\varepsilon, u^\varepsilon\right) \leq Cte\frac{1}{\varepsilon^2} \\ \left\|u^\varepsilon\right\|_m \leq Cte \end{cases} \tag{2.10}$$

$$u^\varepsilon \rightharpoonup u^* = u^0 \text{ faiblement dans } V_m \tag{2.11}$$

$$\text{et } \varepsilon^2 b\left(u^\varepsilon, v\right) \leq \varepsilon c \rightarrow 0 \tag{2.12}$$

$a\left(u^\varepsilon, v\right) \rightarrow a\left(u^0, v\right)$ pour tout $v \in V$, donc $a\left(u^0, v\right) = \langle f, v\rangle \ \forall v \in V$, on remarque que le premier membre $a\left(u^0, v\right)$ définit une forme linéaire et continue sur V_m , alors $\langle f, v\rangle$ définit une forme linéaire continuei sur V_m.

Réciproquement, de la même manière de la démonstration de théorème 1.5.1 , on trouve que $u^\varepsilon \rightarrow u^0 \in V_m$ (fortement)$\rightarrow \lim \ \left\|u^\varepsilon\right\|_m < \infty$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, on pose $v = u^\varepsilon$ dans (2.6), on trouve que $E\left(u^\varepsilon\right)$ reste bornée lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. ■

Remarque 2.1 Dans le cas où $f \notin V'_m$, l'existence de la solution de (P^0) n'est pas assurée, comme il le montre l'exemple 2 ci-dessous et dans le cas d'existence la solution n'est pas dans l'espace V_m. Mais grosso modo si f appartienne à un espace pivot H de type L^2 sachant que H est un espace son dual peut s'identifier à un espace de distributions, avec $V \subset H \subset V'$. On peut montrer l'existence et l'unicité de la solution de (P^0), dans notre premier exemple on utilise les espaces $\Xi^s(\Omega)$.

Les espaces $\Xi^s(\Omega)$

Soit Ω un ouvert borné de R^n , $\varrho(x) \in D\left(\bar{\Omega}\right)$, $\varrho(x) \geq 0$, nulle sur $\partial\Omega$ *et*

$$\left(Lim\frac{\varrho(x)}{d\left(x, \partial\Omega\right)} = d \neq 0 \text{ lorsque } x \rightarrow x_0 \in \partial\Omega\right), \ s \geq 0 \tag{2.13}$$

Définition 2.1: $\Xi^s(\Omega) = \left\{u / \varrho^{|\alpha|} D^{|\alpha|} u \in L^2, |\alpha| \leq s\right\} = \{u \in D'(\Omega) / \varrho^s u \in H^s_0(\Omega)\}$ *muni de la norme*

$$\|u\|_{E^s(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq s} \left\|\varrho^{|\alpha|} D^{|\alpha|} u\right\|_{L^2} \tag{2.14}$$

$\Xi^s(\Omega)$ *est un espace de Hilbert* $H^s \subset \Xi^s(\Omega) \subset L^2$.

Proposition 2.1.1 (6.2 de [18]) *$D(\Omega)$ est dense dans $\Xi^s(\Omega)$.*

Conséquence : $\Xi^s(\Omega)$ est un espace de distributions son dual peut s'identifier à un espace de distributions. $\Xi^{-s}(\Omega) = (\Xi^s(\Omega))'$, $s > 0$

Proposition 2.1.2 (6.4 de [18]): *Pour $s > 0$, tout élément f de $\Xi^{-s}(\Omega)$ se représente (de façon non unique) sous la forme $f = \sum_{|\alpha| \leq s} D^\alpha \varrho^{|\alpha|} f_\alpha \qquad f_\alpha \in L^2$.*

2.1.2 Exemple 1:

On considère l'exemple suivant

$$\begin{cases} \text{trouver } u^\varepsilon \\ -\frac{d^2u^\varepsilon}{dx^2} + \varepsilon^2 \frac{d^4u^\varepsilon}{dx^4} = \delta'_{\frac{1}{2}} \\ u^\varepsilon(0) = u^\varepsilon(1) = \frac{d}{dx}u^\varepsilon(0) = \frac{d}{dx}u^\varepsilon(1) = 0 \end{cases} \tag{2.15}$$

par integration par parties on obtient

$$a(u^\varepsilon, v) + \varepsilon^2 b(u^\varepsilon, v) = \int_0^1 \delta'_{\frac{1}{2}} v dx \quad \forall v \in H_0^2\,]0,1[\tag{2.16}$$

telles que

$$a(u, v) = \int_0^1 u\prime(x)\, v\prime(x)\, dx \tag{2.17}$$

$$b(u, v) = \int_0^1 u''(x)\, v''(x)\, dx \tag{2.18}$$

$$\rightarrow a(u, u) = \|u'\|_{L^2}^2 \backsim \|u\|_{H_0^1}^2 \rightarrow V_m = H_0^1(]0,1[) \tag{2.19}$$

$$(P^0) : \begin{cases} \text{trouver } u \\ -\frac{d^2u}{dx^2} = \delta'_{\frac{1}{2}} \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{2.20}$$

Mais le problème c'est que

$$\delta'_{\frac{1}{2}} \notin \ H_0^{-1}\left(]0,1[\right) \tag{2.21}$$

et on peut montrer que

$$\delta'_{\frac{1}{2}} \in \Xi^{-2}\left(]0,1[\right) \tag{2.22}$$

et que

$$\delta'_{\frac{1}{2}} \in H_0^{-2}\left(]0,1[\right). \tag{2.23}$$

Pour montrer ces assertions on a besoin de ce théorème.

Théorème 2.1.3 *(12.1.* **Lions − Magenes** *[18]). Soit $m \geq 0$ entier. Alors tout élément f de $H^{-m}(\Omega)$ peut se représenter, de façon non unique par $f = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha f_\alpha$ $f_\alpha \in L^2$..*

Supposons que $\delta'_{\frac{1}{2}} \in H^{-1}(\Omega)$
$\rightarrow \delta'_{\frac{1}{2}} = f_0 + Df_1 \quad f_\alpha \in L^2 \rightarrow \delta_{\frac{1}{2}} = T_h$
$h \in L^1_{loc}$ ce qui est impossible. On peut montrer l'assersion précédente d'une autre manière on a $v\prime(\frac{1}{2})$, peut n'exister pas puisque il existe $v \in H_0^1(\Omega)$ et $v\prime(\frac{1}{2})$ n'est pas définie. Par contre, $\delta'_{\frac{1}{2}} \in H^{-2}(\Omega)$ puisque $\delta'_{\frac{1}{2}} = f_0 + Df_1 + D^2 f_2$

$$f_i = 0,\ i = \overline{0,1}\ et\ f_2 = H_{\frac{1}{2}}(x) = \begin{cases} 1 \text{ si} & x \geq \frac{1}{2} \\ 0 \text{ si} & x < \frac{1}{2} \end{cases} \tag{2.24}$$

l'égalité est au sens des distributions. On montre que

$$\delta'_{\frac{1}{2}} \in \Xi^{-2}(\Omega) \tag{2.25}$$

Soit

$$v \in \Xi^2(\Omega) \rightarrow \begin{cases} v \in L^2(\Omega) \\ \varrho v' \in L^2(\Omega) \\ \varrho^2 v'' \in L^2(\Omega) \end{cases} \tag{2.26}$$

On remaque que

$$\left(\varrho^2 v'\right) \in H_0^1(\Omega) \tag{2.27}$$

puisque

$$\left(\varrho^2 v'\right)' = 2\varrho\varrho' v' + \varrho^2 v'' \in L^2(\Omega) \tag{2.28}$$

$$\rightarrow v \in \Xi^2(\Omega) \rightarrow \varrho^2 v' \in H^1\left(\left]0, \frac{1}{2}\right[\right) \tag{2.29}$$

$$\rightarrow \left|\varrho^2\left(\frac{1}{2}\right) v'\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leq cte \left\|\varrho^2 v'\right\|_{L^\infty} \leq C \left\|\varrho^2 v'\right\|_{H_0^1}$$

$$= \left\|\varrho^2 v'\right\|_{L^2} + \left\|2\varrho\varrho' v' + \varrho^2 v''\right\|_{L^2}$$

$$\leq C^* \left(\left\|\varrho^2 v''\right\|_{L^2} + \left\|\varrho v'\right\|_{L^2} + \left\|v\right\|_{L^2}\right).$$

$\rightarrow \delta'_{\frac{1}{2}} \in \Xi^{-2}(\Omega)$.

Lemme 2.1 : *La forme $a(u,v)$ est coercive et continue sur $\Xi^2(\Omega)$*

Preuve. Il suffit prouver $\Xi^2(\Omega) \subset H^1(\Omega)$. Soit $v \in \Xi^2(\Omega) \rightarrow \begin{cases} v \in L^2(\Omega) \\ \varrho v' \in L^2(\Omega) \\ \varrho^2 v'' \in L^2(\Omega) \end{cases} \rightarrow$ $\varrho\left(\varrho v'\right)' \in L^2(\Omega)$ puisque on a $\varrho\left(\varrho v'\right)' = \varrho\left(\varrho' v'\right) + \varrho^2 v'' = \varrho'\left(\varrho v'\right) + \varrho^2 v'' \in L^2(\Omega)$ donc on obtient $\varrho v' \in \Xi^1(\Omega) \rightarrow \exists u_n \in H_0^1(\Omega) \quad / \; u_n \rightarrow \varrho v'$ dans $L^2(\Omega)$ (puisque $H_0^1(\Omega) \subset \Xi^1(\Omega)$ et $D(\Omega)$ et dense dans $\Xi^1(\Omega)$)

Soit w $\in L^2(\Omega)$ on a d'après la condition (2.13) $\exists \alpha > 0 \; / \; \frac{\varrho(x)}{x(1-x)} \geq \alpha$

On utilise l'inégalité de Hardy (Brezis [6] p147) pour u_n on obtient $\dfrac{u_n}{x(1-x)} \in L^2(]0,1[)$, $\left|\int_0^1 \dfrac{u_n w}{x(1-x)} dx\right| \rightarrow \left|\int_0^1 \dfrac{\varrho(x) v' w}{x(1-x)} dx\right| \geq \alpha \left|\int_0^1 v' w dx\right| \rightarrow v' \in L^2$ donc v et v' sont dans $L^2 \rightarrow \Xi^2(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ pour $\Omega =]0\,,1[$, donc $a(u,v)$ est continue et coercive sur $\Xi^2(\Omega) \rightarrow \exists u$ unique dans $\Xi^2(\Omega)$ solution de(P^0).

■

Il est naturel de chercher $u(x)$ sous la forme

$$u = \begin{cases} \alpha x + \beta \text{ si } x < \frac{1}{2} \\ \gamma x + \lambda \text{ si } x > \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow u = \begin{cases} x & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ x - 1 & \text{si } x > \frac{1}{2} \end{cases} \tag{2.30}$$

donc il y a un problème de couche interne au point $x = \frac{1}{2}$ on effectue la dilatation

$$y = \frac{x - \frac{1}{2}}{\varepsilon} \text{ on pose } v(y) = u(\frac{x - \frac{1}{2}}{\varepsilon}) \tag{2.31}$$

on obtient

$$-\frac{d^2 v^0}{dy^2} + \frac{d^4 v^0}{dy^4} = \begin{cases} \delta'_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2} + 0\right) \text{ si } y > 0 \\ \delta'_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2} - 0\right) \text{ si } y < 0 \end{cases} \tag{2.32}$$

donc si

$$y > 0 \begin{cases} \frac{d^2 v^0}{dy^2} - v^0 = 1 \\ v^0(0) = 0 \\ v^0(+\infty) = ? \end{cases} \rightarrow \; y > 0 \rightarrow v^0\,(y) = c_1 e^y - c_1$$

$$\text{pour } y < 0 \begin{cases} \frac{d^2 v^0}{dy^2} - v^0 = 0 \\ v^0(0) = 0 \\ v^0(-\infty) = ? \end{cases} \rightarrow v^0\,(y) = C_2 e^y - C_2 \tag{2.33}$$

on a la condition de raccordement pour $\varepsilon > 0$
$v(y) = u(\frac{x-\frac{1}{2}}{\varepsilon})$

$$\rightarrow \begin{cases} v^0\,(-\infty) = u(\frac{1}{2} - 0) \\ v^0\,(+\infty) = u(\frac{1}{2} + 0) \end{cases} \tag{2.34}$$

$$\rightarrow v^0\,(+\infty) = -\frac{1}{2} \; et \; v^0\,(-\infty) = \frac{1}{2} \tag{2.35}$$

$$u^\varepsilon \simeq \begin{cases} -\frac{1}{2} e^{\frac{1}{\varepsilon}\left(x - \frac{1}{2}\right)} + \frac{1}{2} ... & x < \frac{1}{2} \\ +\frac{1}{2} e^{\frac{-1}{\varepsilon}\left(x - \frac{1}{2}\right)} - \frac{1}{2} .... & x > \frac{1}{2} \; . \end{cases} \tag{2.36}$$

L'estimation de l'énergie :

1) À l'extérieur de la couche

$$E\left(u^{\varepsilon}\right) \simeq \frac{1}{2}\left(\int_{0}^{\frac{1}{2}-\varepsilon} dx+\int_{\frac{1}{2}+\varepsilon}^{1} dx\right)=O(1) \tag{2.37}$$

2) À l'intérieur de la couche

$$E\left(u^{\varepsilon}\right) \simeq \frac{1}{2}\left(\int_{\frac{1}{2}-\varepsilon}^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\left(\left(v^{0}\right)'\right)^{2} dx+\varepsilon^{2} \int_{\frac{1}{2}-\varepsilon}^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\left(\left(v^{0}\right)''\right)^{2} dx\right) \simeq O\left(\varepsilon^{-1}\right) \tag{2.38}$$

puisqu ε est trés petit l'énergie à l'extérieure est négligeable par raport à l'intérieure de la couche . Aux voisinage de $x=0$ et $x=1$ il existe des " petites" couches limites où l'énergie est d'ordre $O(\varepsilon)$.

Étude de la convergence :

Il est claire que la convergence ne peut être ni dans V, ni dans V_m puisque $f \notin V_m'$, malgrés que les formes a et b vérifient les conditions (2.1), (2.2), (2.3), (2.4), (2.5). Par la suite, nous déterminons l'espace où $u^{\varepsilon} \rightarrow v^{0}$.

On note que cet espace (de la variable y) ne peut coïncider avec V. Alors on introduit

$$U^{\varepsilon}(y)=u^{\varepsilon}\left(\varepsilon y+\frac{1}{2}\right) \tag{2.39}$$

par conséquent le problème $P(\varepsilon)$ se transforme à

$$\tilde{P}(\varepsilon)\left\{\begin{array}{c} \text{trouver } U^{\varepsilon} \in V_{\varepsilon}=H_{0}^{2}\left(\frac{-1}{2\varepsilon}, \frac{1}{2\varepsilon}\right) \\ \int_{\frac{-1}{2\varepsilon}}^{\frac{1}{2\varepsilon}}\left[\left(\partial_{y} U^{\varepsilon}\right)\left(\partial_{y} W\right)+\left(\partial_{y}^{2} U^{\varepsilon}\right)\left(\partial_{y}^{2} W\right)\right] dy=-\partial_{y} W(0) \end{array}\right. \tag{2.40}$$

Remarque 2.2 : D'après le théorème 8.1 de Lions-Magenes [18], les éléments de V_{ε} peuvent être prolonger par "0" pour $|y|>\frac{1}{2\varepsilon}$. Soit $\tilde{V}_{\varepsilon}$ l'espace des fonctions de V_{ε} qui sont définies à une constante additive, on définit en suite l'espace H le complété de $\cup \tilde{V}_{\varepsilon}$ par la norme

$$\|U\|_{H}=\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\left(\partial_{y} U\right)^{2}+\left(\partial_{y}^{2} U\right)^{2}\right] dy\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.41}$$

On obtient un problème limite variationnel $\tilde{P}(0)$:

$$\left\{\begin{array}{c} \text{trouver } U \in H \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\left(\partial_{y} U\right)\left(\partial_{y} W\right)+\left(\partial_{y}^{2} U\right)\left(\partial_{y}^{2} W\right)\right] dy=-\partial_{y} W(0) \end{array}\right. \tag{2.42}$$

Théorème 2.1.4 : *Soit U^ε solution de $\tilde{P}(\varepsilon)$ et U solution de $\tilde{P}(0)$. Alors $U^\varepsilon \to U$ dans H (forte)*

Preuve : On prend $W = U^\varepsilon$ dans (2.40) on obtient

$$\| U^\varepsilon \|_H \leq C \tag{2.43}$$

$\to \exists\, U^* \in H \;/\; U^\varepsilon \rightharpoonup U^*$ faiblement.
L'étape suivante c'est la démonstration que $U^* = U$

On remarque que la forme bilinéaire définit en (2.40) est un produit scalaire donc faiblement continue, pour W fixé le premier membre de (2.40) admet le premier membre de (2.42) comme limite lorsque $\varepsilon \to 0$. (i.e) $U^* = U$.

Pour achever la démonstration, il reste à montrer que la convergence $U^\varepsilon \to U$ est forte dans H . On pose $\tilde{a}(U, W) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[(\partial_y U)(\partial_y W) + \left(\partial_y^2 U\right)\left(\partial_y^2 W\right) \right] dy \to \|U^\varepsilon - U\|_H^2 = \tilde{a}(U^\varepsilon - U, U^\varepsilon - U) = \tilde{a}(U^\varepsilon, U^\varepsilon) - 2\tilde{a}(U, U^\varepsilon) + \tilde{a}(U, U) = (-\partial_y U^\varepsilon + 2\partial_y U^\varepsilon - \partial_y U)(0)$

On a $(-\partial_y U^\varepsilon + 2\partial_y U^\varepsilon - \partial_y U)(0)$ définit une forme linéaire et continue sur $H \to (-\partial_y U^\varepsilon + 2\partial_y U^\varepsilon - \partial_y U)(0) \to 0. (\varepsilon \to 0)$ et par conséquent $\|U^\varepsilon - U\|_H \to 0$. ■

Remarque 2.3 : Il arrive souvent qu'on ne peut pas montrer la convergence même faible, et dans ce cas il faut déterminer un développement asymptotique formel complet. Notons qu'une éude rigoureuse concernant le développement asymptotique complet pour les coques minces se trouve dans la thèse de E. Faou [14].

2.1.3 Exemple 2 :

$f(x) = x^{-p-2} + (1-x)^{-p-2}, p \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$. Considèrons le problème

$$\begin{cases} \text{trouver } u^\varepsilon \\ -\frac{d^2 u^\varepsilon}{dx^2} + \varepsilon^2 \frac{d^4 u^\varepsilon}{dx^4} = x^{-p-2} + (1-x)^{-p-2} \;/\; p \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\\ u^\varepsilon(0) = u^\varepsilon(1) = \frac{d}{dx} u^\varepsilon(0) = \frac{d}{dx} u^\varepsilon(1) = 0 \end{cases} \tag{2.44}$$

On remarque que $f(x) = \frac{d^2}{dx^2}\left(x^{-p} + (1-x)^{-p}\right) \quad p \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\to$

$f \in H^{-2}$. Donc l'existence et l'unicité de u^εpour $\varepsilon > 0$, est une conséquence directe de théorème de Lax-Milgram ([6] p 84).

Le problème limite $p(0)$

$$\begin{cases} \text{trouver } u \\ -\frac{d^2 u}{dx^2} = x^{-p-2} + (1-x)^{-p-2} \;\text{ si }\; x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{2.45}$$

On remarque que ce problème ne peut admet une solution, parceque une telle solution ne peut écrir que sous la forme $u(x) = x^{-p} + (1-x)^{-p} + Ax + B$ et donc les conditions aux bord ne peuvent être satisfaites $\forall A$ et B. Autrement dit, un problème de couche limite est apparait aux voisinage de $x = 0$ *et* $x = 1$.

Pour déterminer la solution au voisinage de la couche limite ($x = 0$) on cherche

$$u^{\varepsilon}(x) = v^{0}(y) + ... \qquad y = \frac{x}{\varepsilon} \tag{2.46}$$

donc on obtient, v^0 est la solution de

$$\begin{cases} \left(\frac{d^4}{dy^4} - \frac{d^2}{dy^2}\right) v^0 = \varepsilon^{-p} y^{-p-2} + \varepsilon^2 (1-\varepsilon y)^{-p-2}, y \in (0, +\infty) \\ v^0(0) = \frac{d}{dy} v^0(0) = 0 \\ v^0 \text{ reste bornée sur } (0, +\infty) \end{cases} \tag{2.47}$$

On remarque que $\varepsilon^2 (1-\varepsilon y)^{-p-2} = o(\varepsilon^{-p} y^{-p-2})$ lorsque $\varepsilon \to 0$
Donc on cherche v^0solution de

$$\begin{cases} -v^0(y) + \frac{d^2}{dy^2} v^0(y) = \frac{-1}{(p+1)p} \varepsilon^{-p} y^{-p} \quad / y \in (0, +\infty) \\ v^0(0) = \frac{d}{dy} v^0(0) = 0 \\ v^0 \text{ reste bornée sur } (0, +\infty) \end{cases} \tag{2.48}$$

On utilise la méthode de la variation de la constante, en posant
$v^0(y) = C_1(y) e^y + C_2(y) e^{-y}$
$\to \begin{cases} C_1'(y) e^y + C_2'(y) e^{-y} = 0 \\ C_1'(y) e^y + C_2'(y) e^{-y} = \frac{-1}{(p+1)p} \varepsilon^{-p} y^{-p} \end{cases}$
$\to C_1(y) = \frac{\varepsilon^{-p}}{2} \int_0^y t^{-p} e^{-t} dt = \frac{\varepsilon^{-p}}{2} y^{1-p} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^k}{k(k+1-p)}$
et $C_1(y) = \frac{\varepsilon^{-p}}{2} \int_0^y t^{-p} e^{t} dt = \frac{\varepsilon^{-p}}{2} y^{1-p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k(k+1-p)}$
$\to v^0(y) = \varepsilon^{-1} x^{1-p} + ...$
la condition de raccordement $v^0(+\infty) = u^{\varepsilon}_{ext}(x)_{x \geq \varepsilon}$
à l'extérieur de la couche est $u^{\varepsilon}_{ext}(x) = \varepsilon^{-p} C + ...$
Le même travail pour $x = 1$ (une couche limite symétrique en $x = 1$)

L'estimation de l'énergie

1) À l'intérieur de la couche ($x = 0$)
$2E(u^{\varepsilon}_{int}) \simeq \varepsilon^{-2} \int_0^{\varepsilon} (1-p)^2 x^{-2p} dx + \varepsilon^2 \varepsilon^{-2} \int_0^{\varepsilon} ((-p)(1-p))^2 x^{-2p-2} dx$
$\to E(u^{\varepsilon}_{int}) = O(\varepsilon^{-2p-1})$
1) À l'extérieur de les couches ($x = 0$) et ($x = 1$)
$E(u^{\varepsilon}_{ext}) = O(\varepsilon^{-2p})$

La formulation variationnelle correspandante

Soit H le complété de $H_0^2(0, \infty)$, par la norme :
$\|u\|_H^2 = \int_0^{\infty} \left[(\partial_y u)^2 + (\partial_y^2 u)^2 \right] dy$

Donc la formulation variationnelle correspandante à (2.48) est

$$\left\{\begin{array}{c} \text{trouver } v^0 \in H \\ \int_0^{+\infty}\left[\left(\partial_y v^0\right)\left(\partial_y u\right)+\left(\partial_y^2 v^0\right)\left(\partial_y^2 w\right)\right] dy=\int_0^{+\infty} w\left(y\right) y^{-p-2} dy \end{array}\right. \tag{2.49}$$

Lemme 2.2 *L'application* $: w \rightarrow \int_0^{+\infty} w\left(y\right) y^{-p-2} dy$ *définit une forme linéaire et continue sur* H.

Preuve. On pose $t=\frac{1}{y} \rightarrow \left|\int_0^{+\infty} w\left(y\right) y^{-p-2} dy\right| = \left|\int_0^{+\infty} w\left(t\right) t^p dt\right|$. Il est claire que la fonction $t \rightarrow t^p \quad p \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ est une fonction localement H^{-2}. Donc il reste à régler le problème au voisinage de l'infini. Soit φ une fonction égale à t^p pour t assez grand et $\int_0^{+\infty} \varphi\left(t\right) dt = 0$

On introduit $\phi\left(t\right)=\int_0^t \varphi\left(z\right) dz \rightarrow \phi\left(+\infty\right)=0$

$\phi\left(t\right)=\frac{t^{p+1}}{p+1} \rightarrow \phi \in L^2(0,\infty)$ et on a $\left|\int_0^{+\infty} \varphi\left(y\right) w(y) dy\right| = \left|\int_0^{+\infty} \phi'\left(y\right) w(y) dy\right| = \left|\int_0^{+\infty} \phi\left(y\right) w'(y) dy\right|$

$\leq \|\phi\|_{L^2(0,\infty)} \|w'\|_{L^2(0,\infty)} \leq C \|w\|_H$. ■

Étude de la convergence :

Pour montrer la convergence à l'intérieur de la couche $x=0$,

on effectue le changement suivant $u^\varepsilon\left(x\right)=\varepsilon^{-p} U^\varepsilon\left(y\right), \qquad y=\frac{x}{\varepsilon}$

On obtient le nouveau problème

$$\left\{\begin{array}{c} \text{trouver } U^\varepsilon \in H_0^2\left(0, \frac{1}{\varepsilon}\right) \\ \int_0^{\frac{1}{\varepsilon}}\left[\left(\partial_y U^\varepsilon\right)\left(\partial_y W\right)+\left(\partial_y^2 U^\varepsilon\right)\left(\partial_y^2 W\right)\right] dy= \\ \int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} W\left[y^{-p-2}+\left(\frac{1}{\varepsilon}-y\right)^{-p-2}\right] dy \end{array}\right. \tag{2.50}$$

Théorème 2.1.5: *Soit* U^ε *solution de (2.50) et* v^0 *solution de (2.49)*

Alors $U^\varepsilon \rightharpoonup v^0$ (faiblement).

Remarque 2.4: Pour cet exemple, on a seulement la convegence faible et on ne peut pas montrer la convegence forte .

Remarque 2.5: La résolution par la méthode des éléments finis lorsqu' il y a une concentration de l'énergie dans les couches limites ou internes, demande une adaptation du maillage permet de raffiner le maillage dans les zones où il y a des variations rapides de la solution (couches limites ou internes), il faut essayer, autant que possible, de mettre en oeuvre des éléments finis anisotropes c'est-à-dire, très allongés dans la direction longitudinale des couches limites voir Fig.2.1 .

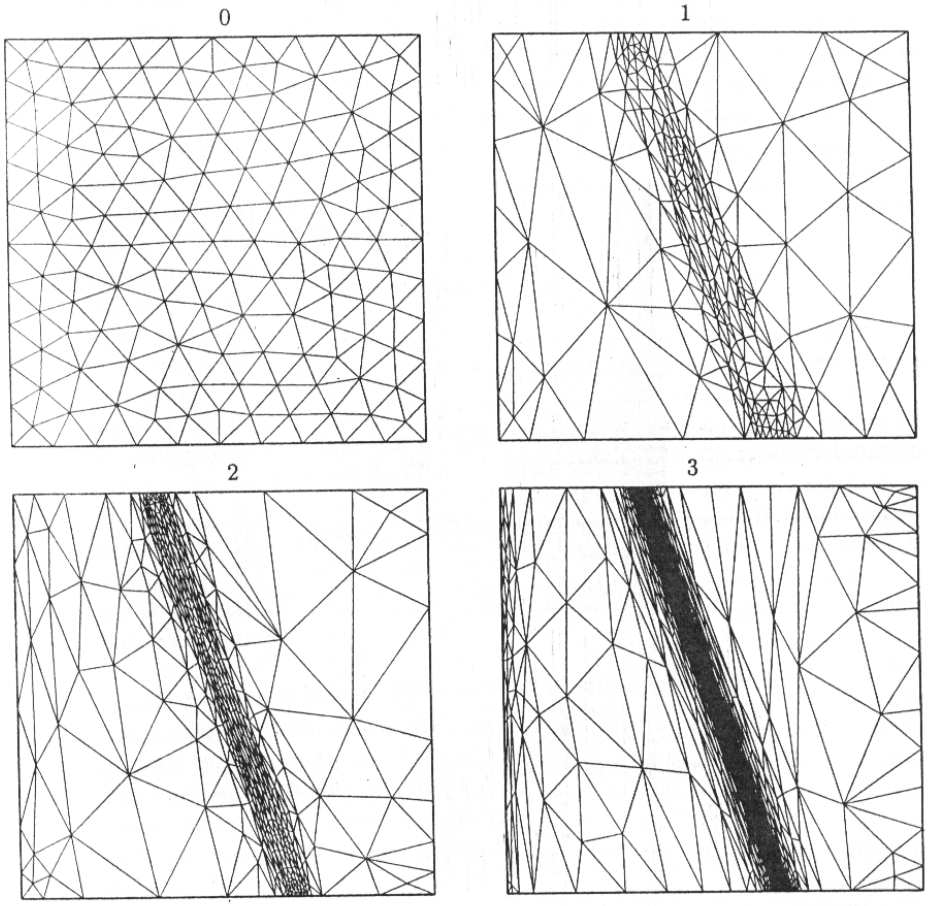

Figure 2.1 Exemples de maillage raffiné [De Souza [7]]

2.2 Problèmes des coques minces à énergie non bornée :Cas des coques elliptiques :

Considérons une surface elliptique S^{ε} définit par la carte $(\Omega; r)$

$b_{12} = 0$ et $b_{11} = b_{22}$, on suppose que Ω est totalement encastrée. Le problème variationnel (chapitre 1 partie 1.5)

$$\begin{cases} trouver\ u^{\varepsilon} \in V = \{H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times H_0^2(\Omega)\} \\ \quad a_m(u^{\varepsilon}, v) + \varepsilon^2 a_f(u^{\varepsilon}, v) = (f, v) \quad \forall v \in V \end{cases}$$

$a_m(u^{\varepsilon}, v) = \int_{\Omega} T^{\alpha\beta}(u^{\varepsilon}) \gamma_{\alpha\beta}(v) dy^1 dy^2$

$a_f(u^{\varepsilon}, v) = \int_{\Omega} M^{\alpha\beta}(u^{\varepsilon}) \rho_{\alpha\beta}(v) dy^1 dy^2$

D'après les résultats de chapitre I partie 1.3.2, $(a_m(v, v))^{\frac{1}{2}}$définit une norme sur V.

Soit V_m le complété de V par cette norme .

De la même manière de l'exemple 1 section 1.3 du chapitre I on trouve

$V_m = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$

Théorème 2.2.1: *Soit $f \in V'_m$ telle que $a_m(u^{\varepsilon}, v) = (f, v)\ \forall v \in V$ Alors $f \in V'_m$ si et seulement s'il existe $u \in V_m$ (unique) tel que $T^{\alpha\beta}u = T^{\beta\alpha}u$ et vérifiant* $\begin{cases} -D_{\alpha}T^{\alpha\beta} = f^{\beta} \\ -b_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} = f_3 \end{cases}$

Preuve. Supposons que $f \in V'_m$ et $a_m(u^{\varepsilon}, v) = (f, v)\ \forall v \in V \rightarrow \int_{\Omega} T^{\alpha\beta}(u) \frac{D_{\alpha}v_{\beta} + D_{\beta}v_{\alpha}}{2}$ $\int_{\Omega}(b_{11}T^{11} + b_{22}T^{22})v_3 = \int_{\Omega} f^i v_i$; donc on obtient formelement $\int_{\Omega} -D_{\alpha}T^{\alpha\beta}(u) v_{\beta} = \int_{\Omega} f^{\beta} v_{\beta}$ et $-\int_{\Omega} b_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}(u) v_3 = \int_{\Omega} f_3 v_3$, pour tout $v \in V \rightarrow \begin{cases} -D_{\alpha}T^{\alpha\beta} = f^{\beta} \\ -b_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} = f_3 \end{cases}$

Réciproquement supposons qu'il existe $u \in V_m$ tel que $T^{\alpha\beta}u = T^{\beta\alpha}u$ et vérifiant $\begin{cases} -D_{\alpha}T^{\alpha\beta} = f^{\beta} \\ -b_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} = f_3 \end{cases}$. Soit v $\in V \rightarrow \int_{\Omega} f^i v_i \leq cte(\sum_{\alpha,\beta} \|\partial_{\alpha}v_{\beta}\|_{0,\Omega} + \|v_3\|_{0,\Omega}) \rightarrow$ d'après le théorème de Hahn-Banach f se prolonge par continuité sur V_m. ■

Définition 2.2: *On dit que le problème $P(\varepsilon)$ est à énergie non bornée si $f \notin V'_m$ Dans le cas contraire est dit à énergie bornée.*

2.2.1 Régularité de la solution du problème limite

Pour une coque mince quelconque d'épaisseur ε le probléme $P(\varepsilon)$ peut aussi s'écrire (Sanchez -P et Sanchez-H [30] section 8)

$$\begin{cases} -D_{\alpha}T^{\alpha\beta} - \varepsilon^2 \left[b_{\gamma}^{\beta} D_{\alpha} M^{\alpha\gamma} + D_{\gamma}\left(b_{\gamma}^{\gamma} M^{\alpha\beta}\right)\right] = f^{\beta} \\ -b_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} + \varepsilon^2 \left[D_{\alpha}D_{\beta}M^{\alpha\beta} - b_{\alpha}^{\delta} b_{\beta\delta} M^{\alpha\beta}\right] = f_3 \end{cases} \tag{2.51}$$

avec les conditions cinématiques admissibles. Donc le problème limite P(0) ($\varepsilon \rightarrow 0$) pour une coque elliptique $b_{12} = 0$ *et* $b_{11} = b_{22}$ s'écrit

$$\left\{\begin{array}{l} -D_\alpha T^{\alpha\beta} = f^\beta \\ -b_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} = f_3 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} -D_1 T^{11} - D_2 T^{21} = f^1 \\ -D_1 T^{12} - D_2 T^{22} = f^2 \\ -b_{11} T^{11} - b_{22} T^{22} = f_3 \end{array}\right. \tag{2.52}$$

On a $D_\alpha T^{\alpha\beta} = \partial_\alpha T^{\alpha\beta} + \Gamma^\beta_{\alpha\lambda} T^{\alpha\lambda} + \Gamma^\alpha_{\alpha\lambda} T^{\beta\lambda} \rightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} -\partial_1 T^{11} - \partial_2 T^{12} - 2\Gamma^1_{1\lambda} T^{1\lambda} - \Gamma^2_{2\lambda} T^{1\lambda} - \Gamma^1_{2\lambda} T^{2\lambda} = f^1 \\ -\partial_1 T^{12} - \partial_2 T^{11} - \Gamma^2_{1\lambda} T^{1\lambda} - \Gamma^1_{1\lambda} T^{2\lambda} - \Gamma^2_{2\lambda} T^{2\lambda} = f^2 - \frac{\partial_2 f_3}{b_{11}} \end{array}\right. \tag{2.53}$$

donc le problème s'écrit

$$\partial_1 \begin{pmatrix} T^{11} \\ T^{12} \end{pmatrix} = A \times \partial_2 \begin{pmatrix} T^{11} \\ T^{12} \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} T^{11} \\ T^{12} \end{pmatrix} + F$$

$$\text{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2\Gamma^1_{11} - \Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{22} & 3\Gamma^1_{12} + \Gamma^2_{12} \\ \Gamma^2_{11} + \Gamma^1_{11} & -\Gamma^2_{12} + \Gamma^1_{12} \end{pmatrix}$$

$$\text{F}=\begin{bmatrix} f^1 - \frac{f^3}{b_{11}} \left(\Gamma^2_{22} + \Gamma^1_{22}\right) \\ f^2 - \frac{\partial_2 f^3}{b_{11}} - \left(\Gamma^2_{22} + \Gamma^1_{22}\right) f_3 \end{bmatrix} \rightarrow Det\left(\lambda I - A\right) = \lambda^2 + 1.$$

Les racines sont $\lambda = +i$ et $\lambda = -i \rightarrow$le système est elliptique en $T^{\alpha\beta}$, on peut montrer aussi que le système est elliptique en u_1 et u_2, on utilise

$T^{11} = C_{11_{\alpha\beta}} \gamma_{\alpha\beta}; T^{22} = C_{22\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta}$ et $u_3 = \frac{1}{2}\left(\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 - f_3\right)$. Par conséquence, d'après le corrollaire 8.3.2 de Hörmander [22], il n' y a pas de propagation des singularités dans le cas d'une coque elliptique. Mais si $f \notin V'_m$ peut présente des singularités de type δ, H, δ'...., et ces singularités se rapport en u (couches internes, solutions extérieures...).

2.2.2 Étude d 'un problème modèle

Notons que ce problème a été étudié par Sanchez-P dans [37]. Mais avec les hypothèses suivantes :

1) $b_{12} = 0$ et $b_{11} = b_{22} = 1$

2) $T^{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta}$.

Dans notre travail on essaye de généraliser. On garde seulement la première hypothèse, puisque pour une coque elliptique (E. Faou [14] $p193$), a montré qu'on peut choisir une telle paramètrisation telle que :

$b_{12} = 0$ et $b_{11} = b_{22}$.

$\Gamma^\alpha_{22} = 0$, $\Gamma^2_{12} = 0$ et $a^{11} = a^{22} = 1$ et $a^{12} = 0$

Le problème modèle:

$\Omega =]0, \pi[\times]-1, 1[$, $b_{12} = 0$ et $b_{11} = b_{22}$.

$\Gamma^\alpha_{22} = 0$, $\Gamma^2_{12} = 0$ et Γ^2_{11} et $a^{11} = a^{22} = 1$ et $a^{12} = 0$

On suppose que la coque est totalement encastrée, donc d'après l'exemple 1 partie 1.4 chapitre 1, la coque est inhibée et on a le problème variationnel de perturbations singulières suivant :

$P^{\varepsilon}:\begin{cases} \text{trouver } u^{\varepsilon}\in V=\{H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)\times H_0^2(\Omega)\} \\ a_m(u^{\varepsilon},v)+\varepsilon^2 a_f(u^{\varepsilon},v)=(f,v) \quad \forall v\in V \end{cases}$
$V_m=H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)\to V_m'=H^{-1}\times H^{-1}\times L^2$
On prend $f=(0,0,\delta(y^2))$ qui génère une singularité suivant la courbe $y^2=0$, il est claire que $f\notin V_m'(\delta\notin L^2)$ donc le problème est à énergie non bornée.
En cherche

$$\begin{cases} u_{\alpha}^{\varepsilon}=\varphi_{\alpha}(y^1)H(y^2)+..... \\ u_3^{\varepsilon}=\psi(y^1)\delta(y^2)+..... \end{cases} \tag{2.54}$$

Remarque 2.6: Le choix de cette forme est justifié par le théorème de la régularité elliptique ou bien de la forme de la solution extérieure.

Structure des couches internes

On performe la dilatation $z^1=y^1$ et $z^2=\frac{y^2}{\eta(\varepsilon)}$ tel que $\eta(\varepsilon)\to 0\,(\varepsilon\to 0)$

$$\partial_1=\tilde{\partial}_1 \; et \; \tilde{\partial}_2=\frac{\partial}{\partial z^2}=\frac{\partial}{\partial y^2}\frac{\partial y^2}{\partial z^2}=\eta^{+1}\partial_2 \tag{2.55}$$

$a_m(u,v)=\int_{\Omega}T^{\alpha\beta}(u)\gamma_{\alpha\beta}(v)\,dy^1dy^2$
$T^{\alpha\beta}(u)=A^{\alpha\beta\lambda\mu}\gamma_{\lambda\mu}(u)$
$A^{\alpha\beta\lambda\mu}=\frac{E}{2(1+\nu)}\left(a^{\alpha\lambda}a^{\beta\mu}+a^{\alpha\mu}a^{\beta\lambda}+\frac{2\nu}{1-\nu}a^{\alpha\beta}a^{\lambda\mu}\right)$
$E>0$ et $0<\nu<\frac{1}{2}$
On obtient

$$\begin{cases} A^{1111}=\frac{E}{(1+\nu)}\frac{\nu}{1-\nu}=A^{2222} \\ A^{1212}=\frac{E}{2(1+\nu)} \\ A^{2211}=A^{1122}=\nu A^{1111} \end{cases} \tag{2.56}$$

Les autres coefficients sont nuls.
D'autre part on a
$a_m(u,v)=\int_{\Omega}A^{1111}\gamma_{11}(u)\gamma_{11}(v)\,dy^1dy^2+2\int_{\Omega}A^{1212}\gamma_{12}(u)\gamma_{12}(v)\,dy^1dy^2$
$+\int_{\Omega}A^{1122}\gamma_{11}(u)\gamma_{22}(v)\,dy^1dy^2+\int_{\Omega}A^{2211}\gamma_{22}(u)\gamma_{11}(v)\,dy^1dy^2$
$\int_{\Omega}A^{2222}\gamma_{22}(u)\gamma_{22}(v)\,dy^1dy^2.$
$a_f(u,v)=\int_{\Omega}B^{1111}\varrho_{11}(u)\gamma_{11}(v)\,dy^1dy^2+2\int_{\Omega}B^{1212}\varrho_{12}(u)\varrho_{12}(v)\,dy^1dy^2$
$+\int_{\Omega}B^{1122}\varrho_{11}(u)\varrho_{22}(v)\,dy^1dy^2+\int_{\Omega}B^{2211}\varrho_{22}(u)\varrho_{11}(v)\,dy^1dy^2$
$\int_{\Omega}B^{2222}\varrho_{22}(u)\varrho_{22}(v)\,dy^1dy^2$
On pose $u_{\alpha}^{\varepsilon}=U_{\alpha}^{\eta}(z^1,z^2)\,;\; u_3^{\varepsilon}=\eta^{-1}U_3^{\eta}(z^1,z^2)$
$\tilde{\gamma}_{11}(U^{\eta})=\gamma_{11}(u^{\varepsilon})=D_1u_1^{\varepsilon}-u_3^{\varepsilon}=D_1U_1^{\eta}-\eta^{-1}U_3^{\eta}$
$\tilde{\gamma}_{12}(U^{\eta})=\gamma_{12}(u^{\varepsilon})=\frac{1}{2}\left(\partial_1U_2^{\eta}+\eta^{-1}\tilde{\partial}_2U_1^{\eta}\right)-\Gamma_{12}^{\lambda}U_{\lambda}^{\eta}$

$=\frac{1}{2}\left(\partial_1 U_2^\eta - 2\Gamma_{12}^\lambda U_\lambda^\eta\right) + \frac{1}{2}\eta^{-1}\tilde{\partial}_2 U_1^\eta = \bar{D}_{12}U_2^\eta + \frac{1}{2}\eta^{-1}\tilde{\partial}_2 U_1^\eta$
$\tilde{\boldsymbol{\gamma}}_{22}\left(U^\eta\right) = \gamma_{22}\left(u^\varepsilon\right) = \eta^{-1}\left(\tilde{\partial}_2 U_2^\eta - U_3^\eta\right)$
$\tilde{\boldsymbol{\rho}}_{11}\left(U^\eta\right) = \boldsymbol{\rho}_{11}\left(u^\varepsilon\right) = \rho_{11}^0\left(U^\eta\right) + \eta^{-1}\rho_{11}^1\left(U^\eta\right) + \eta^{-2}\rho_{11}^2\left(U^\eta\right)$
$\tilde{\boldsymbol{\rho}}_{12}\left(U^\eta\right) = \boldsymbol{\rho}_{12}\left(u^\varepsilon\right) = \rho_{12}^0\left(U^\eta\right) + \eta^{-1}\rho_{12}^1\left(U^\eta\right) + \eta^{-2}\rho_{12}^2\left(U^\eta\right)$
$\tilde{\boldsymbol{\rho}}_{22}\left(U^\eta\right) = \boldsymbol{\rho}_{22}\left(u^\varepsilon\right) = \rho_{22}^0\left(U^\eta\right) + \eta^{-1}\rho_{22}^1\left(U^\eta\right) + \eta^{-3}\rho_{22}^3\left(U^\eta\right)$
On obtient
$\boldsymbol{\gamma}_{11}\left(u^\varepsilon\right)\boldsymbol{\gamma}_{11}\left(v\right) = \eta^0 D_1 U_1^\eta D_1 V_1 + \eta^{-1}\left[\left(-U_3^\eta D_1 V_1\right) + D_1 U_1\left(-V_3\right)\right]$
$+\eta^{-2}U_3^\eta V_3$
$\boldsymbol{\gamma}_{12}\left(u^\varepsilon\right)\boldsymbol{\gamma}_{12}\left(v\right) = \eta^0 \bar{D}_{12}U_2^\eta \bar{D}_{12}V_2 + \eta^{-1}\left[\bar{D}_{12}U_2^\eta\tilde{\partial}_2 V_1 + \bar{D}_{12}V_1\tilde{\partial}_2 U_2^\eta\right]$
$+\frac{\eta^{-2}}{4}\tilde{\partial}_2 U_1^\eta \tilde{\partial}_2 V_1$
$\boldsymbol{\gamma}_{22}\left(u^\varepsilon\right)\boldsymbol{\gamma}_{11}\left(v\right) = \eta^{-1}\left(\tilde{\partial}_2 U_2^\eta - U_3^\eta\right)D_1 V_1 + \eta^{-2}\left(\tilde{\partial}_2 U_2^\eta - U_3^\eta\right)\left(-V_3\right)$
$\boldsymbol{\gamma}_{11}\left(u^\varepsilon\right)\boldsymbol{\gamma}_{22}\left(v\right) = \eta^{-1}D_1 U_1\left(\tilde{\partial}_2 V_2 - V_3\right) + \eta^{-2}\left(-U_3\right)\left(\tilde{\partial}_2 V_2 - V_3\right)$

$\boldsymbol{\gamma}_{22}\left(u^\varepsilon\right)\boldsymbol{\gamma}_{22}\left(v\right) = \eta^{-2}\left(\tilde{\partial}_2 U_2^\eta - U_3^\eta\right)\left(\tilde{\partial}_2 V_2 - V_3\right)$
$\boldsymbol{\rho}_{11}\left(u^\varepsilon\right)\boldsymbol{\rho}_{11}\left(v\right) = \eta^{-4}\rho_{11}^2\left(U^\eta\right)\rho_{11}^2\left(V\right) + ...$
$\boldsymbol{\rho}_{12}\left(u^\varepsilon\right)\boldsymbol{\rho}_{12}\left(v\right) = \eta^{-4}\rho_{12}^2\left(U^\eta\right)\rho_{12}^2\left(V\right) + ...$
$\boldsymbol{\rho}_{11}\left(u^\varepsilon\right)\boldsymbol{\rho}_{22}\left(v\right) = \eta^{-5}\rho_{11}^2\left(U^\eta\right)\rho_{22}^3\left(V\right) + ...$
$\boldsymbol{\rho}_{22}\left(u^\varepsilon\right)\boldsymbol{\rho}_{11}\left(v\right) = \eta^{-5}\rho_{11}^3\left(U^\eta\right)\rho_{22}^2\left(V\right) + ...$
$\boldsymbol{\rho}_{22}\left(u^\varepsilon\right)\boldsymbol{\rho}_{22}\left(v\right) = \boldsymbol{\eta}^{-6}\rho_{22}^3\left(U^\eta\right)\rho_{22}^3\left(V\right) + ...$
De l'autre côté

$$\int_\Omega f_3 v_3 dy^1 dy^2 = \eta^{-1}\int_0^\pi V_3\left(y^1, 0\right)dy^1 \tag{2.57}$$

On choisit $\eta\left(\varepsilon\right)$ tel que le premier terme (dominant) en flexion soit d'ordre η^0 pour obtenir un nouveau problème $P\left(\eta\right)$ à énergie bornée. Donc il faut choisir

$$\eta\left(\varepsilon\right) \quad \text{de telle sorte que } \varepsilon^2\eta^{-6}\eta^2 = 1 \rightarrow \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\epsilon}^{\frac{1}{2}} \tag{2.58}$$

Étude du problème $P\left(\eta\right)$:

$$\left\{\begin{array}{c} \textit{trouver } U^\eta \\ \sum_{j=0}^{j=6}\eta^j a_j\left(U^\eta, V\right) = \int_0^\pi V_3\left(y^1, 0\right)dy^1 \end{array}\right\} \tag{2.59}$$

telles que

$a_0\left(U, V\right) = \int_{B^\eta}[A^{1111}U_3 V_3 + \frac{1}{2}A^{1212}\tilde{\partial}_2 U_1\tilde{\partial}_2 V_1 + A^{1122}(\ \ \ell_{22}\left(U\right)\left(-V_3\right)$
$+\left(-U_3\right)\ell_{22}\left(V\right)) + A^{2222}\ell_{22}\left(U\right)\ell_{22}\left(V\right) + B^{2222}\rho_{22}^3\left(U\right)\rho_{22}^3\left(V\right)]dz^1 dz^2$

$a_1(U,V) =$
$\int_{B^\eta}[A^{1111}(-U_3D_1V - D_1U_1V_3) + 2A^{1212}\left(\tilde{\partial}_2U_1\bar{D}_{12}V_2 + \bar{D}_{12}U_2\tilde{\partial}_2V_1\right)$
$+A^{1122}(\ \ \ell_{22}(U)(D_1V_1 + D_1U_1\ell_{22}(V)) + B^{1122}(\rho^2_{11}(U)\rho^3_{22}(V) +$
$\rho^3_{22}(U)\rho^2_{11}(V)]dz^1dz^2.$

$a_2(U,V) =$
$\int_{B^\eta}[A^{1111}(D_1U_1D_1V + 2A^{1212}\left(\bar{D}_{12}U_2\bar{D}_{12}V_2\right) + B^{1111}\rho^2_{11}(U)\rho^2_{11}(V)$
$+B^{1122}(\rho^1_{11}(U)\rho^3_{22}(V) + \rho^3_{22}(U)\rho^1_{11}(V) + 2B^{1122}(\rho^2_{12}(U)\rho^3_{12}(V)]dz^1dz^2.$

$a_3(U,V) = \int_{B^\eta}[B^{1111}(\rho^2_{11}(U)\rho^1_{11}(V) + \rho^1_{11}(U)\rho^2_{11}(V))+$
$2B^{1212}(\rho^1_{12}(U)\rho^0_{11}(V) + \rho^1_{22}(U)\rho^2_{11}(V)) + B^{1122}(\rho^0_{11}(U)\rho^3_{22}(V)$
$+\rho^2_{11}(U)\rho^1_{22}(V) + \rho^3_{22}(U)\rho^0_{11}(V) + \rho^1_{22}(U)\rho^2_{11}(V)]dz^1dz^2$
$a_4(U,V) = \int_{B^\eta}[B^{1111}(\rho^1_{11}(U)\rho^1_{11}(V) + \rho^1_{11}(U)\rho^0_{11}(V)) + \rho^0_{11}(U)\rho^2_{11}(V))$
$+B^{1122}(\rho^1_{11}(U)\rho^1_{22}(V) + \rho^1_{22}(U)\rho^1_{11}(V) + 2B^{1212}(\rho^0_{12}(U)\rho^0_{12}(V)$
$+\rho^2_{12}(U)\rho^0_{12}(V) + \rho^1_{12}(U)\rho^1_{12}(V)) + B^{2222}((\rho^1_{22}(U)\rho^1_{22}(V))]dz^1dz^2$
$a_5(U,V) =$
$\int_{B^\eta}[B^{1111}\rho^1_{11}(U)\rho^0_{11}(V) + B^{1122}(\rho^0_{11}(U)\rho^1_{22}(V)) + \rho^1_{22}(U)\rho^0_{11}(V))]dz^1dz^2$
$a_6(U,V) = \int_{B^\eta}[B^{1111}(\rho^0_{11}(U)\rho^0_{11}(V) + B^{1122}\rho^0_{22}(U)\rho^0_{11}(V))+$
$2B^{1212}\rho^0_{12}(U)\rho^0_{12}(V)]dz^1dz^2.$
avec $[\ \ell_{21}(U), \ell_{22}(U), \rho^3_{22}(U)] = [\tilde{\partial}_2U_1,\ \tilde{\partial}_2U_2 - U_3,\ \tilde{\partial}^2_2U_3]$
$\left[D_1U_1, \bar{D}_{12}(u)\right] = [\partial_1U_1 - U_3\ \ , \frac{1}{2}\partial_1U_2 - 2\Gamma^\lambda_{12}U_\lambda]$

Existence et unicité de U^η : On définit sur $B_\eta =]0,\pi[\times\left]\frac{-1}{\eta}, +\frac{1}{\eta}\right[$ l'espace
$\mathrm{V}^\eta = (H^1_0(B_\eta))^2 \times H^2_0(B_\eta)$
On a $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}_{11}(U^\eta) = \gamma_{11}(u^\varepsilon)$ et $\tilde{\boldsymbol{\rho}}_{\alpha\beta}(U^\eta) = \boldsymbol{\rho}_{\alpha\beta}(u^\varepsilon)$
$a_m(u^\varepsilon, v) + \varepsilon^2 a_f(u^\varepsilon, v) = (f\ ,\ v)\ \forall v \in V$

$\rightarrow \int_{B_\eta} A^{\alpha\beta\lambda\mu}\tilde{\boldsymbol{\gamma}}_{\lambda\mu}(U^\eta)\tilde{\boldsymbol{\gamma}}_{\lambda\mu}(V) + \eta^4\int_{B_\eta} B^{\alpha\beta\lambda\mu}\tilde{\boldsymbol{\rho}}_{\lambda\mu}(U^\eta)\tilde{\boldsymbol{\rho}}_{\alpha\beta}(V)$
$=\eta^{-2}\int_0^\pi V_3(y^1,0)\,dy^1$
En effet, pour $\varepsilon > 0$ fixé ($\eta = \varepsilon^{\frac{1}{2}}$) u^ε existe et unique on a

$$\eta\,\|U^\eta_\alpha\|^2_{H^1(B_\eta)} \ = \ \|u^\varepsilon_\alpha\|^2_{H^1(\Omega)} \tag{2.60}$$

$$\|u^\varepsilon_3\|^2_{H^2(\Omega)} = \eta^{-5}\,\|U^\eta_\alpha\|^2_{H^2(B^\eta)} \tag{2.61}$$

donc de la coercivité et la continuité de $a_m + a_f$, plus la continuité sur V^η de la forme linéaire $\int_0^\pi V_3(y^1,0)\,dy^1$.

On déduit (d'après le théorème de Lax- Milgram) que pour η fixé, l'existence et l'unicité de U^η dans V^η.

Mais ce qui nous intéresse est le problème limite ($\eta \to 0$)

Étude du problème limite

On pose

$$\ell(u) = [u_3, \ell_{21}(u), \ell_{22}(u), \rho^3_{22}(u)] = [u_3, \tilde{\partial}_2 u_1, \tilde{\partial}_2 u_2 - u_3, \tilde{\partial}^2_2 u_3] \tag{2.62}$$

On définit l'espace H sur $B =]0, \pi[\times R$

$$u \in H \Leftrightarrow u\left(z^1, \infty\right) = 0 \text{ et } \ell(u) \in \left[L^2(B)\right]^4 \tag{2.63}$$

$$a_0(u,v) = \int_\Omega [A^{1111} u_3 v_3 + \tfrac{1}{2} A^{1212} \tilde{\partial}_2 u_1 \tilde{\partial}_2 v_1 + A^{1122}(\ \ell_{22}(u)(-v_3)$$
$$+(-u_3)\ell_{22}(v)) + A^{2222}\ell_{22}(u)\ell_{22}(v) + B^{2222}\rho^3_{22}(u)\rho^3_{22}(v)]dz^1 dz^2$$

Lemme 2.3: *$(a_0(u,u))^{\frac{1}{2}}$ définit une norme sur H.*

Preuve: $a_0(u,u) = A^{1111}\|u_3\|^2_{0,B} + 2A^{1212}\|\ell_{21}(u)\|^2_{0,B} + A^{2222}\|\ell_{22}(u)\|_{0,B} + B^{2222}\left\|\tilde{\partial}^2_2 u_3\right\|^2_{0,B} - 2A^{2211}\int_\Omega \ell_{22}(u)\, u_3 dy^1 dz^2$

On applique l'inégalité de Hölder on déduit qu'il existe C >0 :$a_0(u,u) \geq C\left[\|u_3\|^2_{0,B} + \|\ell_{21}(u)\|^2_{0,B} + \|\ell_{22}(u)\|^2_{0,B} + \left\|\tilde{\partial}^2_2 u_3\right\|^2_{0,B}\right]$

donc $a_0(u,u) = 0 \to \begin{cases} u_3 = 0 \\ \ell_{22}(u) = 0 \\ \ell_{21}(u) = 0 \end{cases} \to u_1$et u_2 dépent de z^1 mais puisque $u = 0$ pour z^2assez grand $\to u = 0$ donc $(a_0(u,u))^{\frac{1}{2}}$définit une norme sur H ■

Soit $\tilde{H}$ le complété de H par cette norme .

Lemme 2.4: *La forme $v \to \int_0^\pi v_3(y^1, 0)\, dy^1$ définit une forme linéaire et continue sur $\tilde{H}$*

Preuve: Soit $v \in \tilde{H} \to v_3 \in W(-\infty; +\infty)$ tel que W est l'espace de ($Lions - Magenes$ [18] p 13)avec $X = Y = L^2]0, \pi[$, $m = 2$ donc d'après le théorème (2.3 $Lions - Magenes$ [18]) $v^{(j)} = \frac{d^j v}{(\partial z)^j} \in L^2(R; L^2]0, \pi[)$ pour $1 \leq j \leq m-1$ donc $\exists C > 0$ telle que $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left\|\tilde{\partial}_2 v_3\right\|^2_{L^2_{z^1}]0,\pi[} dz^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq c\left(\left\|\tilde{\partial}^2_2 v_3\right\|^2_{L^2(B)} + \|v_3\|^2_{L^2(B)}\right)^{\frac{1}{2}}$

$\rightarrow \left|\int_0^{\pi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\tilde{\partial}_2 v\right)dz^2\right)dz^1\right| \leq c\left(\left\|\tilde{\partial}_2^2 v_3\right\|_{L^2(B)}^2 + \|v_3\|_{L^2(B)}^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$\rightarrow \left|\int_0^{\pi} v_3\left(y^1,0\right)dy^1\right| \leq cte\left(a_0\left(v,v\right)\right)^{\frac{1}{2}}$ ■

On déduit que le problème limite est à énergie bornée.

donc il existe u unique dans $\tilde{\mathrm{H}}$ solution de

$$a_0(U^0,V) = \int_0^{\pi} V_3\left(y^1,0\right)dy^1 \forall V \in \tilde{H} \tag{2.64}$$

Étude de la convergence

Lemme 2.5: *Il existe une Cte (indépendente de η) telle que*

$$\left\|\tilde{\partial}_2^2 U_3^{\eta}\right\|_{0,B^{\eta}} \leq Cte \tag{2.65}$$

Preuve : On a $u_3^{\varepsilon}\left(y^1,y^2\right) = \eta^{-1}U_3^{\eta}\left(y^1,z^2\right) \rightarrow \left\|\tilde{\partial}_2^2 u_3^{\varepsilon}\right\|_{0,\Omega} = \eta^{-5}\left\|\tilde{\partial}_2^2 U_3^{\eta}\right\|_{0,B^{\eta}}$

D'autre part on a $a^m(u^{\varepsilon},v)+\varepsilon^2 a^f(u^{\varepsilon},v) = \int_0^{\pi} v_3\left(y^1,0\right)dy^1 = \eta^{-1}\int_0^{\pi} V_3\left(y^1,0\right)dy^1$

$= \eta^{-1}\sum_{j=0}^{6}\eta^j a_j(U^{\eta},V)$ de la coercivité de la forme $a^m + a^f$ on obtient

$\eta^4\eta^{-5}\left\|\tilde{\partial}_2^2 U_3^{\eta}\right\|_{0,B^{\eta}}^2 \leq \eta^{-1}\sum_{j=0}^{6}\eta^j a_j(U^{\eta},V) \leq cte\ \eta^{-1}\left\|\tilde{\partial}_2^2 U_3^{\eta}\right\|_{0,B^{\eta}}$

$\rightarrow \left\|\tilde{\partial}_2^2 U_3^{\eta}\right\|_{0,B^{\eta}} \leq Cte.$ ■

Lemme 2.6: *Il existe une constante C telle que*

$$\sum_{j=1}^{6}\eta^j a_j(U,U) + C\left\|\tilde{\partial}_2^2 U_3\right\|_{0,B^{\eta}}^2 > 0 \quad \textit{pour tout } U \textit{ de } V^{\eta} \tag{2.66}$$

Preuve. Pour $C = (3B^{1122} + B^{2222})$ on trouve que $\sum_{j=1}^{6}\eta^j a_j(U,U) + (3B^{1122} + B^{2222})\left\|\tilde{\partial}_2^2 U_3\right\|_0^2$ est sous forme d'un somme des carrés ■

Lemme 2.7: *Il existe une Cte (indépendente de η) telle que*

$$\|U^{\eta}\|_{\tilde{H}} = \left(a_0(U^{\eta},U^{\eta})\right)^{\frac{1}{2}} \leq Cte \tag{2.67}$$

.

Preuve. On utilise les deux lemmes précédents, plus la continuité de la forme $\int_0^\pi V_3\left(y^1,0\right)dy^1$ sur $\tilde{H}$ on obtient ■

$a_0(U^\eta,U^\eta)\leq cte\left\{\left\|\tilde{\partial}_2^2U_3\right\|_{0,B^\eta}^2+\left\|\tilde{\partial}_2^2U_3\right\|_{0,B^\eta}\right\}\leq Cte.$

Par conséquence $\exists U^*\in\tilde{H}\ \ /\ U^\eta\rightharpoonup U^*$ faible dans $\tilde{H}$.

Théorème 2.2.2 : *Soit U^η et U^0 solution de (2.59) et (2.64) respectivement. Alors $U^\eta\rightharpoonup U^0$ lorsque $\eta\to 0$ faiblement dans $\tilde{H}$ (i.e $U^0=U^*$).*

Pour simplifier, nous décomposons la démonstration en trois lemmes.

Lemme 2.8 : *$\exists C_1>0$ telle que*

$$\|\partial_1U_i^\eta\|_{0,B^\eta}\leq\eta^{-1}C_1 \tag{2.68}$$

$$\left\|\tilde{\partial}_2U_\alpha^\eta\right\|_{0,B^\eta}\leq C_1 \tag{2.69}$$

$$\left\|\tilde{\partial}_1^2U_i^\eta\right\|_{0,B^\eta}\leq\eta^{-1}C_1 \tag{2.70}$$

$$\left\|\tilde{\partial}_2^2U_3^\eta\right\|_{0,B^\eta}\leq C_1 \tag{2.71}$$

$$\left\|\partial_1\tilde{\partial}_2U_i^\eta\right\|_{0,B^\eta}\leq C_1 \tag{2.72}$$

Preuve. De la coercivité de la forme a^m sur l'espace $(H^1)^2\times L^2$ (voir [30] p 237), on a $\|\partial_1u_i^\varepsilon\|_{0,B^\eta}^2\leq a^m\left(u^\varepsilon,u^\varepsilon\right)\leq\eta^{-1}\int U_3^\eta\left(y^1,0\right)\ dy^1$

$\to\eta\left\|\partial_1U_i^\eta\right\|_{0,B^\eta}^2\leq\eta^{-1}C\to\left\|\partial_1U_i^\eta\right\|_{0,B^\eta}^2\leq\eta^{-1}C_1$ ■

Et de la même manière

$\|\partial_2u_\alpha^\varepsilon\|_{0,B^\eta}^2\leq\eta^{-1}C_1\to\eta\int\eta^{-2}\left(\tilde{\partial}_2\ U_\alpha^\eta\right)^2dz^1dz^2\leq\eta^{-1}C_1$

$\to\left\|\tilde{\partial}_2U_\alpha^\eta\right\|_{0,B^\eta}\leq C_1$

Lemme 2.9: *Soit U^η solution de (2.59), alors pour tout V fixé de V^η, on a $\sum_{j=2}^6\eta^ja_j(U^\eta,V)\to 0$ lorsque $\eta\to 0$*

Preuve. D'après le lemme 2.8 et la forme de a_j $j = \overline{2,3,...,6}$, il existe une constante C tel que $|a_j(U^\eta, V)| \leq \eta^{-1}C \rightarrow \eta^j |a_j(U^\eta, V)| \rightarrow 0$ lorsque $\eta \rightarrow 0$ pour $j = \overline{2,3,...,6}$. ■

Pour achever la démonstration de théorème 2.2.2, il reste à montrer que $\eta a_1(U^\eta, V) \rightarrow 0$ lorsque $\eta \rightarrow 0$.

Lemme 2.10: *Soit U^η solution de (2.59), alors pour tout V fixé de V^η, on a $\eta a_1(U^\eta, V) \rightarrow 0$ lorsque $\eta \rightarrow 0$.*

Preuve. On utilise l'inégalité de Hölder on déduit que $\exists Cte$ $|a_1(U^\eta, V)| \leq \eta^{-1}Cte \rightarrow |a_1(\eta U^\eta, V)|$ est bornée, ce qui implique l'existence de v^* tel que $\eta U^\eta \rightharpoonup v^*$ faiblement, on doit montrer que $v^* = 0$

On a $a_0(\eta U^\eta, V) \rightarrow 0$ lorsque $\eta \rightarrow 0$ pour tout V fixé de $V^\eta \rightarrow \eta U^\eta \rightharpoonup 0$ faiblement dans $\tilde{H}$, de l'unicité de la limite faible on déduit que $v^* = 0$. On passe à la limite dans (2.59) on obtient, U^*est la solution de $a_0(U^*, V) = \int_0^\pi V_3(y^1, 0)\, dy^1$pour tout V fixé de V^η $(i.e)$ $U^* = U^0$ ■

La détermination de U^0 : On postule

$$U^\eta = U^0 + \eta U^1 + ... \tag{2.73}$$

$P(0)$:

$$\int_\Omega T_0^{\alpha\beta}(U^0)\, \gamma_{\alpha\beta}^0(V) + B^{2222}\rho_{22}^3(U^0)\, \rho_{22}^3(V)\, dz = \int_0^\pi V_3(y^1, 0)\, dy^1 \tag{2.74}$$

tels que : $$T_0^{\alpha\beta}(U^0) = A^{\alpha\beta\lambda\mu}\gamma_{\lambda\mu}^0(U^0)$$

$$\begin{cases} \gamma_{11}^0(V) = -V_3 \\ \gamma_{12}^0(V) = \frac{1}{2}\tilde{\partial}_2 V_1 \\ \gamma_{22}^0(V) = \tilde{\partial}_2 V_2 - V_3 \end{cases} \tag{2.75}$$

$P(0)$: $\int_B [A^{1111}U_3^0 V_3 + \frac{1}{2}A^{1212}\tilde{\partial}_2 U_1^0 \tilde{\partial}_2 V_1 + A^{1122}(\ \ell_{22}(U^0)(-V_3)$
$+(-U_3^0)\,\ell_{22}(V)) + A^{2222}\ell_{22}(U^0)\,\ell_{22}(V) + B^{2222}\rho_{22}^3(U^0)\,\rho_{22}^3(V)]dz^1 dz^2$

$$= \int_0^\pi V_3(y^1, 0)\, dy^1 \ \forall V \in \tilde{H} \tag{2.76}$$

On prend des fonctions tests $V_3 = V_2 = 0$ et V_1 arbitraire on trouve
$\int_B T_0^{12}(U^0)\,\tilde{\partial}_2 V_1 = 0 \rightarrow -\tilde{\partial}_2 T_0^{12}(U^0) = 0$
on a $U^0 \in \tilde{H} \rightarrow \ell_{22}(U^0) \in L^2(B) \rightarrow T_0^{12}(U^0) \in L^2(B)$

$T_0^{12}(U^0)$ est une fonction de la variable z^{1}et $T_0^{12}(U^0)=0$ pour z^{2}assez grand $\rightarrow$

$T_0^{12}(U^0)=0$
On prend V_2 arbitraire et $V_1=V_3=0$
$\rightarrow \int_B A^{2222}\ell_{22}U^0\left(\tilde{\partial}_2V_2\right)+A^{1122}\left(-U_3^0\right)\left(\tilde{\partial}_2V_2\right)=0$
on a $\mathrm{T}_0^{11}=A^{1111}\gamma_{11}^0+A^{2211}\gamma_{22}^0$
$\mathrm{T}_0^{22}=A^{2211}\gamma_{11}^0+A^{2222}\gamma_{22}^0$

$$\rightarrow\left\{\begin{array}{l} A^{2222}\gamma_{22}^0=T_0^{22}-A^{2211}\gamma_{11}^0 \\ A^{2211}\gamma_{22}^0=T_0^{11}=A^{1111}\gamma_{11}^0 \end{array}\right. \tag{2.77}$$

On a $\int_B\left[A^{2222}\gamma_{22}^0(U^0)+A^{1122}\gamma_{11}^0(U^0)\right]\tilde{\partial}_2V_2=0$
$\rightarrow \int_B\left[T_0^{22}-A^{2222}\gamma_{11}^0(U^0)+A^{1122}\gamma_{11}^0(U^0)\right]\left(\tilde{\partial}_2V_2\right)=0$
$\rightarrow -\tilde{\partial}T_0^{22}=0\rightarrow T_0^{22}=0$ (de la même manière précédente)
Finalement si $V_1=V_2=0$ *et* V_3 arbitraire

$$-T_0^{11}\left(U^0\right)+B^{2222}\tilde{\partial}_2^4U_3^0=\delta\left(z^2\right) \tag{2.78}$$

$$T_0^{11}(U^0)=A^{1111}\gamma_{11}^0+A^{2211}\gamma_{22}^0\rightarrow\gamma_{22}^0=\tfrac{A^{2211}}{A^{2222}}\gamma_{11}^0$$

$$\rightarrow\left(A^{1111}-\frac{\left(A^{2211}\right)^2}{A^{2222}}\right)U_3^0+B^{2222}\tilde{\partial}_2^4U_3^0=\delta\left(z^2\right). \tag{2.79}$$

$\rightarrow \frac{1}{12}A^{1111}\left[12\left(1-\nu^2\right)U_3^0+\tilde{\partial}_2^4U_3^0\right]=\delta\left(z^2\right)$
$\rightarrow A\times U_3^0+B\times\tilde{\partial}_2^4U_3^0=\delta\left(z^2\right)$
$A=A^{1111}\left(1-\nu^2\right)>0$
$B=B^{2222}=\frac{1}{12}A^{1111}$.

Donc la détermination de U_3^0 relève de la résolution de l'équation **différentielle** (2.79) . En effet U_3^0est la solution de l'équation homogène correspandante avec une troisième dérivée discontinue en $y^2=0$, mais la première et la deuxième sont continues.

On pose $\lambda=\frac{A}{B}$ alors l'équation (2.79) s'écrit sous la forme
$\tilde{\partial}_2^4U_3^0+\lambda U_3^0=\frac{1}{B}\delta\left(z^2\right)$
$\rightarrow U_3^0\left(z^1,z^2\right)=\left\{\begin{array}{l} c_1e^{\alpha_1z^2}+c_2e^{\alpha_2z^2}\ si\ \ z^2>0 \\ c_3e^{\alpha_3z^2}+c_4e^{\alpha_4z^2}\ si\ \ z^2<0 \end{array}\right.$.
avec $\alpha_k=\lambda^{\frac{1}{4}}e^{\frac{2ki\pi}{4}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(1+i)\qquad k=\overline{1,2,3,4}\ ,\ i^2=-1$

U_3^0, $\tilde{\partial}_2 U_3^0$ *et* $\tilde{\partial}_2^2 U_3^0$ sont continues et $\tilde{\partial}_2^3 U_3^0$ admet un saut en " 0 ".

$$\rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 - c_3 - c_4 = 0 \\ \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 - \alpha_3 c_3 - \alpha_4 c_4 = 0 \\ \alpha_1^2 c_1 + \alpha_2^2 c_2 - \alpha_3^2 c_3 - \alpha_4^2 c_4 = 0 \\ \alpha_1^3 c_1 + \alpha_2^3 c_2 + \alpha_3^3 c_3 + \alpha_4^3 c_4 = 0 \end{cases}$$

ce qui nous permet de déterminer les constantes c_k.

Chapitre 3

PROPAGATION ET RÉFLEXION DES SINGULARITÉS DANS LA THÉORIE DES COQUES MINCES

"Conceptually it is of course agreat advantage that one knowns unbiguously in which direction a singularity described by a point in WF(u) is going to travel."
Lars Hörmander,1983

Introduction :

Dans ce chapitre, on étudie le phénomène de propagation des singularités dans la théorie des coques minces. Notre but est l'application des résultats généraux démontrés notamment par Hörmander [22], P. Gerard, S. Alinac [17], R. Melrose [26].

Par analogie à la construction de la propagation d'onde, (dû à Hyghens) Hörmander a montré que les singularités peuvent se propager avec une fréquence constante et suivant une direction bien déterminée. Il est maintenant bien connu (voir Sanchez-P and Al [27]) que la propagation des singularités joue un rôle très important dans la détermination de la solution d'un problème aux limites de coques minces. D'autre part P. Karamian [21] a montré qu'il n' y a pas de réflexion des singularités si on choisit les conditions aux limites admissibles pour les coques hyperboliques. Dans ce chapitre, on commence par un exemple introductif, puis nous étudions le cas des coques paraboliques. Notons que pour les coques hyperboliques une étude rigoureuse a été réalisée par Sanchez-P, Sanchez-H et P Karamian [27], et grâce à un résultat général (corollaire 8.3.2 de L Hörmander [22]), pour le cas des coques elliptiques il n' y a pas de propagation des singularités.

3.1 Exemple :

On se propose maintenant un exemple, qui n'est pas un exemple des coques, pour donner une idée générale sur la propagation des singularités.

Considérons l'équation d'onde suivante

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \\ u(x,0) = H(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } & x < 0 \\ 1 \text{ si } & x \geq 0 \end{cases} \end{cases} \tag{3.1}$$

On remaque que la donnée initiale a une discontinuité (ou singularité) aux points $(x, 0)$, $x \in R$. On doit montrer que cette singularité "se propage" (se trouve) sur des courbes (directions) bien connues.

On utilise la méthode de D'Alembert ([16]) pour trouver la solution aux instants $t = 0$, $t = \frac{1}{2}$, $t = 1$, $t = 2$

On obtient la solution pour:

$$t = 0 \to u(x, o) = \begin{cases} 0 \text{ si } \ \mathrm{x} < 0 \\ 1 \text{ si } \ \mathrm{x} \geq 0 \end{cases}$$

$$t = \frac{1}{2} \to u(x, \frac{1}{2}) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < -\frac{C}{2} \\ \frac{1}{2} \text{ pour } & \frac{-C}{2} < x < \frac{C}{2} \\ 1 \text{ pour } & x \geq \frac{C}{2} \end{cases} \tag{3.2}$$

$$t = 1 \to u(x, 1) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < -C \\ \frac{1}{2} \text{ pour } & -C < x < C \\ 1 \text{ pour } & x \geq C \end{cases} \tag{3.3}$$

$$t = 2 \to u(x, 2) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < -2C \\ \frac{1}{2} \text{ pour } & -2C < x < 2C \\ 1 \text{ pour } & x \geq 2C \end{cases} \tag{3.4}$$

On remarque que les discontinuités de u se trouvent sur les deux droites $x - ct = 0$ et $x + ct = 0$ (les caractéristiques).

Donc la question de la propagation des singularités se présente en deux parties

1) Peut-on localiser les singularités de $u(x, t)$ en connaissant le lieu des singularités de (u_0, f)?

2) Peut-on estimer les singularités de $u(x, t)$ en connaissant la nature (l'intensité) des singularités de (u_0, f) ?

3.2 La théorie classique des propagations des singularités

Notons que pour une étude approfondie de la théorie classique des propagations des singularités, on se refère: Hörmander [22], P. Gerard et S. Alinac [17] ou bien R. Melrose [26].

3.2.1 Le spectre singulier différentiable (le front d'onde).

Par l'utilisation des propriétés de la transformation de Fourier on a (voir Melrose [26]) si $u \in (C^\infty(R^n))'$. Alors $u \in C_0^\infty(R^n)$ si et seulement si :

$$|\hat{u}(\zeta)| \leq C_N \ (1+|\zeta|)^{-N} \quad , \ N = 1, 2, ... \tag{3.5}$$

donc si u est quelconque dans $(C^\infty \ (R^n))'$, il peut avoir des singularités.

Définition 3.1 : *Pour $u \in (C^\infty(R^n))'$ nous appelons support singulier de u le complémentaire de l'ensemble des points où $u \in C^\infty$ on le note supp sing u. Donc $x \notin$ supp sing $u \Leftrightarrow \exists V \in \mathcal{U}(x) : u \in C^\infty(V) \rightarrow$ supp sing $u = C\{x ; u$ est C^∞ près de $x\}$ où C désigne le complémentaire.*

De la même manière on définit le cône noté $\sum(u)$ comme le complémentaire (dans $\mathrm{R}^n \setminus \{0\}$) de l'ensemble des directions $\zeta \in \mathrm{R}^n \setminus \{0\}$au voisinage (conique) desquelles $\hat{u}$ satisfait (3.5).

Remarques 3.1 :

1) supp sing u représente l'ensemble des mauvais points de u, et $\sum(u)$ est l'ensemble des mauvaises directions de u.

2) On a

$$\hat{u}(\zeta) = \int e^{-i\langle\eta,\zeta\rangle} u(\eta) d\eta \tag{3.6}$$

$$u(\eta) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{+i\langle\eta,\zeta\rangle} \ \hat{u}(\zeta) d\zeta \tag{3.7}$$

donc pour tester u est C^∞ ou non on utilise (3.6). Mais pour déterminer $\sum(u)$ on utilise (3.7). Soit Ω un ouvert de R^n, $u \in D'(\Omega)$. On pose pour $x \in \Omega$

$\sum_x(u) = \cap_\phi \sum(\phi u) / \quad \phi \in C_0^\infty(\Omega), \phi(x) \neq 0.$

Définition 3.2 : *Le fermé conique de $\Omega \times R^n \setminus \{0\}$ définit par : $WF(u) = \{(x,\zeta) \in \Omega \times R^n \setminus \{0\} /$ appelé le front d'onde de u .*

La propostion suivante montre que $WF(u)$ est l'ensemble des mauvaises directions spectrales de u au-dessu de supp sing u.

Proposition 3.1.1 : *(Gérard et Alinac [17] p 105). La projection de $WF(u)$ sur Ω est supp sing u .*

Exemple :

Considérons δ la masse de dirac à l'origine. Pour tout
$\varphi \in C_0^\infty; \varphi(0) \neq 0$, on a

$\widehat{\varphi\delta}(\zeta) = \langle \delta, \varphi e^{-ix\zeta} \rangle = \varphi(0)$ et $\sum(\delta\varphi) = R^n \setminus \{0\}$
$\rightarrow WF(\delta) = \{(x, \zeta); x = 0 \; et \; \zeta \neq 0\}$

On cite maintenant deux théorèmes importants pour l'étude du réflexion des singularités (section 3.5 de ce chapitre), les démonstrations de ces théorèmes figurent dans ([22] chapitre 8).

Théorème 3.1.1 : *Soit P un opérateur elliptique (voir [18] p119) d'ordre m à coefficients C^∞, alors $WF(u) = WF(P(u))$.*

Définition 3.3: *Soit P un opérateur différentiel, P_m sa partie principale ([30] p 37). P est dit de type principal réel si $P\prime_m(\zeta) \neq 0$ pour tout $\zeta \neq 0$ / $\langle mP\prime_m(\zeta), \zeta \rangle = mP_m(\zeta)$*

Théorème 3.1.2: *Soit P un opérateur de type principal réel si $u \in D'(\Omega)$ / $P(u) = f$ et $(x, \zeta) \in WF(u) \setminus WF(f)$. Alors $P_m(\zeta) = 0$ et $I \times \{\zeta\}$ ou I est le segment contenant x et de direction $P\prime_m(\zeta)$, (i.e) les singularités de u se propagent suivant la direction $P_m(\zeta)$ avec la fréquence ζ.*

3.2.2 Propagation des singularités pour les coques paraboliques

Dans cette section on considère des problèmes de perturbations singulières, qui proviennent de la théorie des coques paraboliques minces, la forme des problèmes variationnels pour $\varepsilon > 0$ est donnée par la formule (1.74).

Comme on a déja signalé, la résoulution du problème relève de l'approximation de $P(\varepsilon)$ par $P(0)$ (i.e) u^ε par u^0(approximation membranaire). Mais cette approximation est valable si $f \in V'_m$. Cette dernière hypothèse est très restrictive (dans la théorie des coques minces) et la plus part des problèmes sont à énergie non bornée (i.e) $f \notin V'_m$ (généralement les chargements sont de type , δ, δ'....) Dans ce cas la convergence de $u^\varepsilon \rightarrow u^0$ n'est pas assurée dans le cas général.

3.3 Étude des chargements utilisés.

Ce mémoire est consacré seulement aux chargements qui sont considérés comme des distributions de l'unique variable y à valeurs dans l'espace des distributions de la variable x on utilise les éléments de l'espace $D\prime(R_y, D'(R_x))$. Les fonctions apparaissent dans les applications de la théorie des coques minces sont de la forme:

$$f(x, y) = \begin{cases} \varphi(x, y) & \text{si } y > \psi(x) \\ 0 & \text{si} \quad \text{non} \end{cases} \tag{3.8}$$

Ce qui génère une (ou plusieurs) singularité(s) sur la courbe :
$\sum_f = \{ \ y = \psi(x)\}$. On remarque qu'on peut penser à remplacer f par une série de termes de la forme $yH\left(x\right), \delta\left(x\right)H\left(y\right), ...$

Exemple: 3.3.1

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ si } 0 < x < cy \text{ et } y > 0 \\ 0 \qquad \text{si non} \end{cases} \tag{3.9}$$

$$\rightarrow f(x,y) = H\left(x\right)\left(1 - H\left(x - cy\right)\right) \tag{3.10}$$

$$\text{si } y \neq 0 : \quad f(.,y) \in D'(R_x) \ et \ \partial_y^k \ \ f(.,y) = (-1)^{k+1} c^k \delta_{cy}^{(k-1)}\left(.\right)$$

Au voisinage de $y = 0$, y fixé ; pour toute $\theta \in D'(R_x)$ on a

$$\text{si } \ y > 0 : \langle \ f(.,y), \theta\left(.\right)\rangle = cy \langle \ \delta, \theta\rangle + ... \tag{3.11}$$

$$si \ y < 0 \ \langle \ f(.,y), \theta\left(.\right)\rangle = 0$$

$$\rightarrow \ f(.,y) = cy\delta\left(x\right)H(y) + ... \tag{3.12}$$

Exemple 3.3.2 :

$$f(x,y) = \left\{ \begin{array}{ccc} \varphi\left(x,y\right) & \text{si } y > \psi(x) \\ 0 & \text{si} \quad \text{non} \end{array} \right\}$$

On suppose que

$$\psi(0) = \psi'(0) = 0 \ et \ \ \psi''(0) > 0 \tag{3.13}$$

$$\rightarrow f(x,y) = \varphi\,(x,y)\,H(y-\psi(x)) \quad ;\psi(x) \simeq \psi''(x)\frac{x}{2} + ... \tag{3.14}$$

$$\langle\ f(.,y), \theta\,(.)\rangle \simeq 2\int_0^{c\sqrt{y}} \theta\,(t)\,dt \qquad c = \sqrt{2}\,(\psi''(0))^{-\frac{1}{2}} \tag{3.15}$$

$$\rightarrow \langle\ f(.,y), \theta\,(.)\rangle = (2)^{\frac{3}{2}}\,(\psi''(0))^{-\frac{1}{2}}\,\varphi\,(0,0)\,\delta\,(x)\,H\,(y)\,y^{\frac{1}{2}} + ... \tag{3.16}$$

(pour plus des détails sur ce type de distributions on se refère [28])

3.4 Étude de quelques cas tests.

Considérons une coque a surface moyenne S uniformément parabolique encastrée le long d'une partie Γ_0 de son bord et libre par le reste Γ_1. Rappelons que pour les surfaces développables (chapitre 1 section 1.1 de ce mémoire).Tout point P de S appartient à une génératrice et donc on a

$$\overrightarrow{\mathbf{OP}} = \overrightarrow{\mathbf{OA}} + \overrightarrow{\mathbf{AP}} = \vec{\varrho}\left(y^1\right) + y^2\vec{\mathbf{e}}(y^1) \tag{3.17}$$

On écrit

$$r\left(y^1, y^2\right) = \vec{\varrho}\left(y^1\right) + y^2\vec{\mathbf{e}}(y^1) \tag{3.18}$$

tels que $\vec{\mathbf{e}}(y^1)$ est le vecteur unitaire porté par la direction de la génératrice et on obtient

$$b_{22} = 0 \tag{3.19}$$

de plus une surface est développable si et seulement si :

$$\vec{\mathbf{e}}\prime \times \vec{\mathbf{e}} = \mathbf{0} \qquad ([30]\ p13) \tag{3.20}$$

donc $\vec{a}_{1,2} = \frac{\partial \vec{a}_1}{\partial y^2} //\ \ \vec{a}_2$ et $\vec{a}^1 \perp \vec{a}_2 \rightarrow \langle \vec{a}^1, \vec{a}_{1,2}\rangle = 0 \rightarrow \Gamma^1_{12} = 0$, et on a

$$b_{22} = 0 \rightarrow \Gamma^1_{22} = 0 \tag{3.21}$$

donc le problème limite $P(0)$ se réduit à

$$\begin{cases} -\partial_2 T^{12} = f^1 + \partial_1 T^{11} + 2\Gamma^1_{11} T^{11} \\ -\partial_2 T^{22} = f^2 + \partial_1 T^{12} + \Gamma^1_{11} T^{12} + \Gamma^2_{11} T^{11} \\ -b_{11} T^{11} = f_3 \end{cases} \tag{3.22}$$

Dans ce qui suit, on considère une coque a surface moyenne S uniformément parabolique (développable), encastrée le long d'une partie Γ_0 de son bord et libre par le rest Γ_1, $\Omega =]-1,1[\times]0,1[$; $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_0$

$$\Gamma_0 = \left\{ y^2 = 0 \right\} \tag{3.23}$$

D'après les résultats de chapitre 1 section 1.4, la coque est inhibée .

Rappelons que le problème $P(\varepsilon)$ est

$$\begin{cases} \text{trouver } u^\varepsilon \in V = H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^2(\Omega) + C.C \\ a^m(u^\varepsilon, w) + \varepsilon^2 a^f(u^\varepsilon, w) = \langle f, w \rangle \quad \forall w \in V \end{cases}$$

C.C : $u_1^\varepsilon = u_2^\varepsilon = u_3^\varepsilon = \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial n} = 0$ sur Γ_0

On remarque que le système (3.22) est hyperbolique en T^{12} et T^{22}, on a Γ_1 est libre de contraintes donc

$$T^{\alpha\beta} \cdot n_\beta = 0 \tag{3.24}$$

Cette condition aux limites détermine T^{12} et T^{22} sur Γ_0, puisque T^{12} est connu et de fait que la frontière n'est pas tangente aux caractéristiques le système (3.22) avec condition de Cauchy peut être résolu.

Soit $\vec{n}$ la normale à $\Gamma_0 = \{y^2 = 0\}$ dans le plan tangent $\vec{n} = n_1\vec{a}_1 + n_2\vec{a}_2$, il est claire que $\vec{a}_1$ est tangant à $\{y^2 = 0\}$

$\rightarrow \vec{n} \cdot \vec{a}_1 = 0 \rightarrow \vec{n} // \vec{a}^2 \rightarrow n_1 = 0 \; et \; n_2 \neq 0$

$$\rightarrow T^{\alpha\beta} \cdot n_\beta = 0 \;\Leftrightarrow \begin{cases} T^{11} n_1 + T^{12} n_2 = 0 \\ T^{21} n_1 + T^{22} n_2 = 0 \end{cases} \tag{3.25}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} T^{12}(y^1, 0) = 0 \\ T^{22}(y^1, 0) = 0 \end{cases} \tag{3.26}$$

Le système (3.22) s'écrit

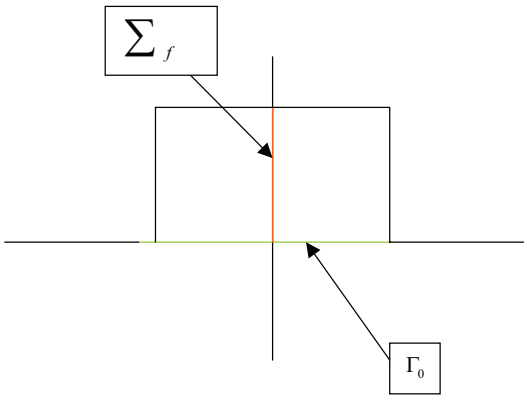

Figure 3.1 Singularités suivant une courbe caractéristique

$$\left\{ \begin{array}{c} \partial_1 \begin{pmatrix} T^{12} \\ T^{22} \end{pmatrix} = A \times \partial_2 \begin{pmatrix} T^{12} \\ T^{12} \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} T^{12} \\ T^{22} \end{pmatrix} + F \\ T^{12}(y^1, 1) = T^{22}(y^1, 1) = 0 \end{array} \right. \tag{3.27}$$

L'étude préalable des problèmes modèles est essentielle à la compréhension des phénomènes de propagation et de réflexion des singularités dans la solution des coques minces .

Considérons un demi-cylindre mince S définit comme l'image de Ω par ψ : $r : (y^1, y^2) \to \left(\psi^1(y^1, y^2), \psi^2(y^1, y^2), \psi^3(y^1, y^2)\right) = (y^2, \cos y^1, \sin y^1)$ et $\Gamma_0 = \{y^2 = 0\}$

Exemple 3.4.1 Singularités suivant les caractéristiques :Fig(3.1)

Soit $\Omega =]-1,1[\times]0,1[$; $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_0$ / $\Gamma_0 = \{y^2 = 0\}$ $f^\alpha = 0$, $f_3 = \mathrm{H}(y^1)$

donc la coque est inhibée. $r(y^1, y^2) = (y^2, \cos y^1, \sin y^1)$

$$\to \quad \left\{ \begin{array}{c} \vec{a}_1 = (0, -\sin y^1, \cos y^1) = \vec{a}^1 \\ \vec{a}_2 = (1, 0, 0) = \vec{a}^2 \\ \vec{a}_3 = (0, \cos y^1, \sin y^1) \end{array} \right. \tag{3.28}$$

$\to a_{11} = a_{22} = 1$ et $a_{12} = 0$ et $b_{11} = -1$, $b_{12} = b_{22} = 0 = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$

$$P(0) : \left\{ \begin{array}{c} -\partial_2 T^{12} = -\delta(y^1) \\ -\partial_2 T^{22} - \partial_1 T^{12} = 0 \\ T^{12}(y^1, 1) = T^{22}(y^1, 1) = 0 \end{array} \right. \tag{3.29}$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{c} T^{12} = (y^2-1)\delta\left(y^1\right) \\ T^{22} = -\frac{1}{2}(y^2-1)\delta'\left(y^1\right) \end{array} \right. \rightarrow T^{\alpha\beta} \notin L^2\left(\Omega\right) \tag{3.30}$$

→le problème est à énergie non bornée .
On a de la relation (1.45) on a
$T^{\alpha\beta}(u) = A^{\alpha\beta\lambda\mu}\gamma_{\lambda\mu}$
$A^{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{E}{2(1+\nu)}\left(a^{\alpha\lambda}a^{\beta\mu} + a^{\alpha\mu}a^{\beta\lambda} + \frac{2\nu}{1-\nu}a^{\alpha\beta}a^{\lambda\mu}\right)$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{c} A^{1111} = \frac{E}{(1+\nu)}\frac{\nu}{1-\nu} = A^{2222} \\ A^{1212} = \frac{E}{2(1+\nu)} \\ A^{2211} = A^{1122} = \nu A^{1111} \end{array} \right. \tag{3.31}$$

Les autres coefficients sont nuls. Donc on obtient

$$\left\{ \begin{array}{c} T^{22} = A^{2211}\gamma_{11} + A^{2222}\gamma_{22} \\ T^{11} = A^{2222}\gamma_{11} + A^{2211}\gamma_{22} \\ T^{12} = 2A^{1212}\gamma_{12} \end{array} \right. \tag{3.32}$$

On pose $k_{11} = A^{2211}, \quad k_{22} = A^{2222}, \quad k_{12} = 2A^{1212}$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{(k_{11})^2 - (k_{22})^2} \begin{pmatrix} k_{11} & -k_{22} \\ -k_{22} & k_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^{22} \\ T^{11} \end{pmatrix} \tag{3.33}$$

On a de la relation (1.40)
$$\left\{ \begin{array}{c} \gamma_{11} = \partial_1 u_1 + u_3 \\ \gamma_{12} = \frac{1}{2}\left(\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1\right) \\ \gamma_{22} = \partial_2 u_2 \end{array} \right.$$
on utilise la condition $u_2\left(y^1, 0\right) = 0$ pour déterminer u_2 puis on détermine u_1, et finalement on trouve u
On pose $C_{11} = \frac{k_{11}}{(k_{11})^2-(k_{22})^2}, \quad C_{22} = \frac{-k_{22}}{(k_{11})^2-(k_{22})^2}$,on trouve

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{11} = C_{11}T^{22} + C_{22}T^{11} \\ \gamma_{22} = C_{22}T^{22} + C_{11}T^{11} \end{array} \right. \tag{3.34}$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \partial_2 u_2 = \frac{-C_{22}}{2}\left((y^2-1)\delta'\left(y^1\right)\right) \\ u_2\left(y^1, 0\right) = 0 \end{array} \right. \tag{3.35}$$

$$\rightarrow u_2\left(y^1,y^2\right)=\frac{-C_{22}}{4}\left((y^2-1)^2+1)\delta'\left(y^1\right)\right) \tag{3.36}$$

D'autre part $T^{12}=k_{12}\gamma_{12}$

$$\rightarrow\left\{\begin{array}{c}\partial_2u_1=\frac{-1}{2k_{12}}\left((y^2-1)\delta\left(y^1\right)\right)-\partial_1u_2\\ u_1\left(y^1,0\right)=0\end{array}\right. \tag{3.37}$$

$\rightarrow u_1\left(y^1,y^2\right)=\frac{C_{22}}{12}((y^2-1)^3+1)\delta''\left(y^1\right)-\frac{1}{2k_{12}}((y^2-1)^2-1)\delta\left(y^1\right)$
$u_3\left(y^1,y^2\right)=-\partial_1u_1+C_{11}T^{22}+C_{22}T^{11}$
$=\frac{C_{22}}{12}((y^2-1)^3+1)\delta'''\left(y^1\right)+\frac{1}{2k_{12}}((y^2-1)^2-1)\delta'\left(y^1\right)$
$+\frac{C_{22}}{2}(y^2-1)\delta'\left(y^1\right)+C_{11}H\left(y^1\right).$

Donc on obtient $\left\{\begin{array}{c}u_1\simeq\delta''\left(y^1\right)U_1^0\left(y^2\right)+...\\ u_2\simeq\delta'\left(y^1\right)U_2^0\left(y^2\right)+...\\ u_3\simeq\delta'''\left(y^1\right)U_3^0\left(y^2\right)+...\end{array}\right.$

Remarque 3.2 :

1) Il est claire que $u_i\notin V_m$ puisque $f\notin V'_m$.

2) La singularité généré suivant $y^1=0$ se propage suivant les caractéristiques, plus précisement les courbes asymptotiques.

3) Il n'y a pas de réflexion des singularités.

4) Des couches internes sont développées suivant $y^1=0$.

Exemple 3.4.2 Dans cet exemple on génère une autre singularité suivant une caractéristique (non courbe asymptotique).

$f^\alpha=0,\ \ f_3=\delta\left(y^2-\frac{1}{2}\right)H(y^1)$ et $\Gamma_0=\{y^2=0\}$.

$$P(0)\rightarrow\left\{\begin{array}{c}-\partial_2T^{12}=\delta\left(y^1\right)\delta\left(y^2-\frac{1}{2}\right)\\ \partial_2T^{22}=\partial_1T^{12}\end{array}\right. \tag{3.38}$$

$$\rightarrow\left\{\begin{array}{c}T^{12}=H(y^2-\frac{1}{2})\delta\left(y^1\right)+\varphi\left(y^1\right)\\ T^{12}\left(y^1,1\right)=0\end{array}\right. \tag{3.39}$$

$$\rightarrow T^{12}=(H(y^2-\frac{1}{2})-1)\delta\left(y^1\right)$$

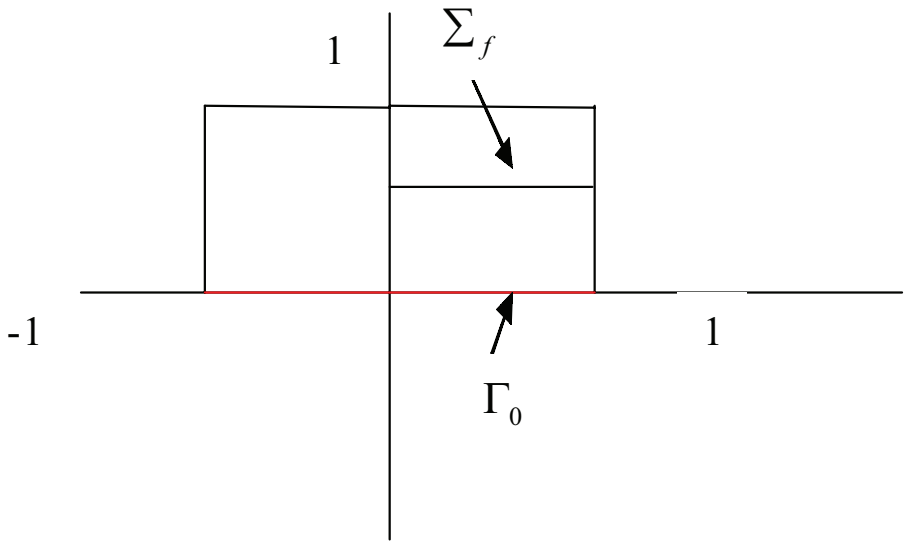

Figure 3.2 Singularités suivant une courbe non asymptotique

$$\begin{cases} \partial_2 T^{22} = (H(y^2 - \frac{1}{2}) - 1)\delta'(y^1) \\ T^{22}(y^1, 1) = 0 \end{cases} \tag{3.40}$$

$\rightarrow T^{22}(y^1, y^2) = (\frac{1}{2}\left(\left|y^2 - \frac{1}{2}\right| + y^2 - \frac{1}{2}\right) - y^2)\delta'(y^1)$
de la même manière de l'exemple 3.4.1 on obtient

$$\begin{cases} u_1 \simeq \delta''(y^1)\, U_1^0(y^2) + ... \\ u_2 \simeq \delta'(y^1)\, U_2^0(y^2) + ... \\ u_3 \simeq \delta'''(y^1)\, U_3^0(y^2) + ... \end{cases}$$

Remarque 3.3:
Il n'y a pas de propagation des singularités suivant $y^2 = Cte$.

Exemple : 3.4.3: Dans cet exemple on génère une discontinuité suivant une courbe ni caractéristique ni asymptotique.

$$f^\alpha = 0,\ f_3 = H(y^2 - y^1)\ et\ \Gamma_0 = \left\{y^2 = 0\right\}\ Fig.(3.2) \tag{3.41}$$

On note que la dérivée faible d'une fonction composée demande quelques conditions (Brezis [6] p155) qui ne sont pas satisfaites généralement dans nos problèmes. Pour cette raison nous préférons l'utilisation des changements de variable.

$$\left\{\begin{array}{c} -\partial_2 T^{12} = -\partial_1 H\left(y^2 - y^1\right) \\ \partial_2 T^{22} = \partial_1 T^{12} \end{array}\right. \text{ et } \left\{\begin{array}{l} T^{12}\left(y^1, 1\right) = 0 \\ T^{22}\left(y^1, 1\right) = 0 \end{array}\right. \tag{3.42}$$

On pose $\eta = y^1$, $\zeta = y^2 - y^1 \rightarrow \partial_1 = \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \zeta}$, $\partial_2 = \frac{\partial}{\partial \zeta}$

$$\rightarrow T^{12}\left(y^1, y^2\right) = H\left(y^2 - y^1\right) - H\left(1 - y^1\right) \tag{3.43}$$

$$T^{22}\left(y^1, y^2\right) = H\left(y^2 - y^1\right) + \left(y^2 - 1\right)\delta\left(1 - y^1\right) - H\left(1 - y^1\right) \tag{3.44}$$

$$\left\{\begin{array}{l} u_1 \simeq \delta^{'}\left(1 - y^1\right) U_1^0\left(y^2\right) + \delta\left(1 - y^1\right) U_1^1\left(y^2\right) + H\left(y^1\right) U_1^3\left(y^2\right) \\ u_2 \simeq \delta\left(1 - y^1\right) U_2^0\left(y^2\right) + H\left(1 - y^1\right) U_2^1\left(y^2\right) + \ldots\ldots\ldots \\ u_3 \simeq \delta''\left(1 - y^1\right) U_3^0\left(y^2\right) + \delta'\left(1 - y^1\right) U_3^1\left(y^2\right) + \delta\left(y^1\right) U_3^3\left(y^2\right) + .. \end{array}\right.$$

Remarques 3.4: La singularité s'est réfléchie suivant les courbes $y^1 = 0$ et $y^1 = 1$. Les poins de réflexion sont les points de contact de la courbe portante de la singularité et la frontière.

Cet exemple montre qu'on peut avoir la réflexion des singularités pour les coques paraboliques (contrairement au cas hyperbolique), et la singularité la plus importante se trouve sur la courbe $y^1 = 1$.

Exemple 3.4.4 :

$\Gamma_0 = \{y^2 = 0\}$ $f^\alpha = 0$, $f_3 = H(y^2 - 2y^1)$ Fig (3)

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{c} -\partial_2 T^{12} = -\partial_1 H\left(y^2 - 2y^1\right) \\ \partial_2 T^{22} = \partial_1 T^{12} \end{array}\right\} et \left\{\begin{array}{l} T^{12}\left(y^1, 1\right) = 0 \\ T^{22}\left(y^1, 1\right) = 0 \end{array}\right. \tag{3.45}$$

$$\left\{\begin{array}{l} T^{12}\left(y^1, y^2\right) = 2\left(H\left(y^2 - 2y^1\right) - H\left(1 - 2y^1\right)\right) \\ T^{22}\left(y^1, y^2\right) = 4\left(y^2\delta\left(1 - 2y^1\right) - H\left(1 - 2y^1\right)\right) - H\left(y^2 - 2y^1\right) \end{array}\right. \tag{3.46}$$

$$\left\{\begin{array}{l} u_1 = U_1^0\left(y^2\right)\delta'\left(1 - 2y^1\right) + U_1^1\left(y^2\right)\delta\left(1 - 2y^1\right) + U_1^2\left(y^2\right) H\left(y^1\right) + \\ u_2 = U_2^0\left(y^2\right)\delta\left(1 - 2y^1\right) + U_2^1\left(y^2\right) H\left(1 - 2y^1\right) + \ldots \\ u_3 = U_3^0\left(y^2\right)\delta''\left(1 - 2y^1\right) + U_3^1\left(y^2\right)\delta'\left(1 - 2y^1\right) + U_3^2\left(y^2\right)\delta\left(y^1\right) + \end{array}\right. \tag{3.47}$$

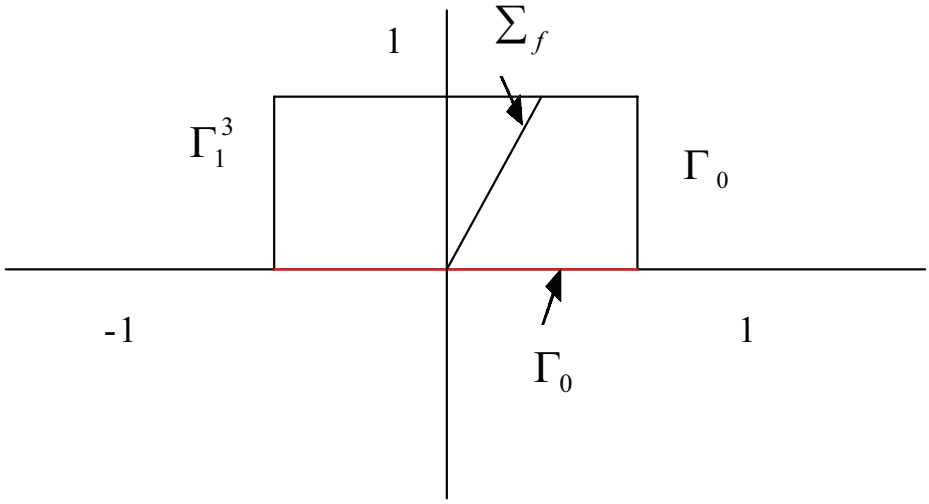

Figure 3.3 Singularités suivant une courbe a un contact avec la frontière libre horizontale

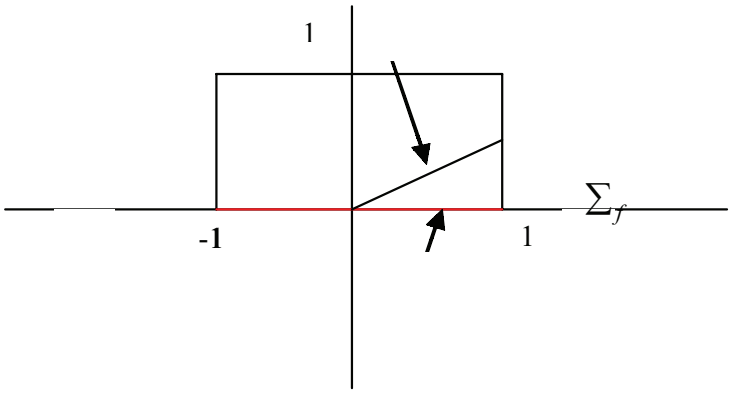

Figure 3.4 Singularités suivant une courbe a un contact avec la frontière libre verticale

Remarque *3.5*: Les points de réflexion sont les points de contact avec Γ_0 et Γ_1^1 (fig.3) et les directions de propagation sont les courbes asymptotiques $y^1 = cte$

Exemple 3.4.5 :

$\Gamma_0 = \{y^2 = 0\}$ $f^\alpha = 0$, $f_3 = H(y^1 - 2y^2)$ Fig (3.4), on trouve

$$\left\{ \begin{array}{l} T^{12}(y^1, y^2) = \frac{1}{2}\delta(y^1 - 2y^2) \\ T^{22}(y^1, y^2) = \frac{1}{4}\delta(y^1 - 2y^2) \end{array} \right\} \tag{3.48}$$

$$u_3\left(y^1, y^2\right) = C_1 y^2 \delta'(y^1) + C_2\delta(y^1 - 2y^2) - C_3\ \delta\left(y^1\right) \tag{3.49}$$

C_i des constantes.

On remarque que la singularité s'est réfléchie suivant $y^1 = 0$, avec intensitée une fois plus et ne s'est pas réfléchie suivant $y^1 = 1$

Exemple : 3.4.6 Dans cet exemple on génère une singularité suivant une courbe $\sum_f$ telle que

$\sum_f \cap (\Gamma_0 \cup \Gamma_1^1) = \emptyset$, et $f^\alpha = 0$, $f_3 = H(y^1 - 4y^2 + 2)$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \partial_2 T^{12}(y^1, y^2) = \frac{1}{2}\delta(y^1 - 4y^2 + 2) \\ T^{12}(y^1, 1) = 0 \end{array} \right. \tag{3.50}$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} T^{12}(y^1, y^2) = -\frac{1}{4}\delta(y^1 - 4y^2 + 2) \\ T^{22}(y^1, y^2) = \frac{1}{16}\delta(y^1 - 4y^2 + 2) \end{array} \right. \tag{3.51}$$

On remarque que la singularité ne s'est pas réfléchie dans une autre direction

3.5 Réflexion des singularités pour les coques paraboliques .

Dans cette partie nous étudions le délicat problème des réflexions des singularités aux frontières ; concernant les équations membranaires des coques **paraboliques** inhibée. Il est intéressant de noter, que P. Karamian a montré dans sa thèse ([21] p 129), qu'il n' y a pas des réflexions des singularités aux sens classique (i.e) on génère une singularité suivant une courbe (pour f) , on la trouve sur une autre direction (en u) pour les coques **hyperboliques** inhibée. Mais il y a une pseudo-réflexion , si on choisit les conditions aux limites admissible pour les coques minces. Par contre dans le cas parabolique les exemples 3.4.3 , 3.4.4 et 3.4.5 de ce chapitre montrent que le phénomène de réflexion peut apparaitre. L'utilisation de la définition classique de la réflexion est un peut gênante, donc on utilise une définition plus générale et plus éfficace.

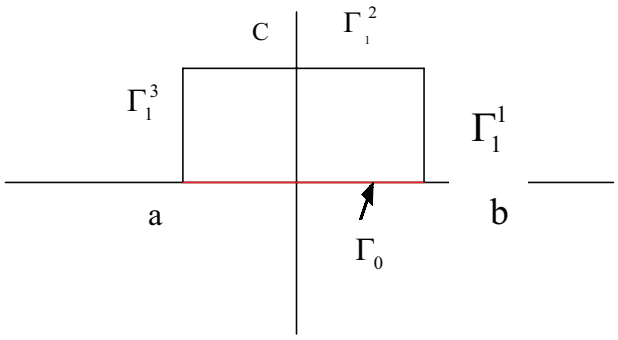

Figure 3.5 Réflexion des singularités

Définition 3.4 : *Considérons un système différentiel avec donnée de Cauchy non caractéristique. Nous disons :*
1)Il y a une réflexion, si la singularité d'une des inconnues se report par l'intermédiaire des conditions aux limites, aux autres inconnues.
2) Il y a une pseudo-réflexion, si la singularité d'une des inconnues se transporte par couplage des inconnues et des équations aux autres inconnues.

Remarque 3.6:

Dans l'exemple 1, 2 et 6 il y a une pseudo-réflexion.
Dans l'exemple 3, 4 et 5 il y a une réflexion.

Proposition 3.5.1: *Soit S une surface parabolique de R^3 sa projection sur R^2 est* $\Omega =]a, b[\times]0, c[$, Γ_0 , $\Gamma_1^1, \Gamma_1^2, \Gamma_1^3$ *Fig (3.5)*

Considérons le système

$$\begin{cases} \partial_2 T^{12} = \frac{\partial_1 f^3}{b_{11}} + 2\Gamma_{11}^1 f^3 \\ \partial_2 T^{22} + \partial_1 T^{12} + \Gamma_{11}^1 T^{12} = \Gamma_{11}^2 f^3 \\ T^{12}(y^1, c) = T^{22}(y^1, c) = 0 \end{cases} \tag{3.52}$$

$f^\alpha = 0$, $u_1(y^1, 0) = u_2(y^1, 0) = u_3(y^1, 0) = 0$

$\sum_f$ la courbe qui porte la singularité de f^3
Si :$\sum_f \cap (\Gamma_0 \cup \Gamma_1^2) \neq \varnothing$ et $\sum_f \neq \Gamma_0, \sum_f \neq \Gamma_1^2$.
Alors il y a une réflexion de singularité.
Si $\sum_f \cap (\Gamma_0 \cup \Gamma_1^2;) = \varnothing$ ou bien $\sum_f // \Gamma_1^1$.
Alors il n'y a pas de réflexion, mais il y a une pseudo-réflexion.

Preuve. *1) Si* $\sum_f \cap (\Gamma_0 \cup \Gamma_1^2;) \neq \varnothing$ *et* $\sum_f \neq \Gamma_0$; $\sum_f \neq \Gamma_1^2$. *D'après le théorème (3.2) les singularités se propagent suivant les courbes* $y^1 = cte$ *puisque les courbes asymptotiques sont* $y^1 = cte$ *et l'opérateur est hyperbolique donc de type principal réel* $y^1 = cte$ *et les points de réflexion sont les points d'intersection. Si* $\sum_f \cap (\Gamma_0 \cup \Gamma_1^2) = \varnothing$, *on a* $\begin{cases} \partial_2 T^{12} = \frac{\partial_{1f^3}}{b_{11}} + 2\Gamma_{11}^1 f^3 \\ T^{12}(y^1, c) = 0 \end{cases} \rightarrow T^{12}$ *sera régulière aux points* (y^1, c) $a \leq c \leq b$ *et donc sur* $y^1 = a$ *et* $y^2 = b$ *qui sont les seules directions possibles de réflexion . Mais le couplage des inconnues dans la deuxième équation transporte les singularités d'où pseudo-réflexion.* ■

Remarque 3.7 : La régularité de T^{12} sur $y^1 = a$ (resp : $y^1 = b$) peut être considérer comme une propagation de régularité.

La non réflexion des singularités est une propriété importante, qui nous aide à la détermination de la solution dans les couches internes.

3.5.1 Structure des couches internes .

Notre objectif dans cette partie est la description de la structure de couches internes qui sont développées aux voisinage de la courbe $y^1 = 0$ pour l'exemple 3.4.1 de cette section. Rappelons qu' on a considéré dans l'exemple 3.4.1 une surface cylindrique tels que : $a_{11} = a_{22} = 1$ et $a_{12} = 0$ et $b_{11} = -1$, $b_{12} = b_{22} = 0 = \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$

D'après la forme de la solution à l'extérieur de la couche, on cherche

$$\begin{cases} u_1^\varepsilon = \eta^{-3} U_1^\eta (z^1, z^2) \\ u_2^\varepsilon = \eta^{-2} U_2^\eta (z^1, z^2) \\ u_3^\varepsilon = \eta^{-4} U_3^\eta (z^1, z^2) \end{cases} \tag{3.53}$$

tels que

$$z^2 = y^2; \qquad z^1 = \eta^{-1} y^1 \quad \tilde{\partial}_1 = \frac{\partial}{\partial z^1} = \eta \partial_1 \tag{3.54}$$

on a $P(\varepsilon)$:
$\begin{cases} \text{trouver } u^\varepsilon \in V = H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^2(\Omega) + C.C \\ a^m(u^\varepsilon, w) + \varepsilon^2 a^f(u^\varepsilon, w) = \langle f, w \rangle . \quad \forall w \in V \end{cases}$
C.C : $u_1^\varepsilon = u_2^\varepsilon = u_3^\varepsilon = \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial n} = 0$ sur Γ_0

et $a_m(u, v) = \int_\Omega A^{1111} \gamma_{11}(u) \gamma_{11}(v) dy^1 dy^2 + 2 \int_\Omega A^{1212} \gamma_{12}(u) \gamma_{12}(v) dy^1 dy^2$

$+\int_\Omega A^{1122}\gamma_{11}(u)\,\gamma_{22}(v)\,dy^1dy^2+\int_\Omega A^{2211}\gamma_{22}(u)\,\gamma_{11}(v)\,dy^1dy^2$
$\int_\Omega A^{2222}\gamma_{22}(u)\,\gamma_{22}(v)\,dy^1dy^2.$
$a_f(u,v)=\int_\Omega B^{1111}\varrho_{11}(u)\,\gamma_{11}(v)\,dy^1dy^2+2\int_\Omega B^{1212}_{12}\varrho_{12}(u)\,\varrho_{12}(v)\,dy^1dy^2$
$+\int_\Omega B^{1122}\varrho_{11}(u)\,\varrho_{22}(v)\,dy^1dy^2+\int_\Omega B^{2211}\varrho_{22}(u)\,\varrho_{11}(v)\,dy^1dy^2$
$\int_\Omega B^{2222}\varrho_{22}(u)\,\varrho_{22}(v)\,dy^1dy^2$
Donc on obtient
$\boldsymbol{\gamma}_{11}(u^\varepsilon)\,\boldsymbol{\gamma}_{11}(v)=\eta^{-8}(\tilde\partial_1U_1^\eta+U_3^\eta)\left(\tilde\partial_1V_1+V_3\right).$
$\boldsymbol{\gamma}_{12}(u^\varepsilon)\,\boldsymbol{\gamma}_{12}(v)=\frac14\eta^{-6}(\tilde\partial_1U_2^\eta+\tilde\partial_2U_1^\eta)(\tilde\partial_1V_2+\tilde\partial_2V_1).$
$\boldsymbol{\gamma}_{22}(u^\varepsilon)\,\boldsymbol{\gamma}_{11}(v)=\eta^{-6}\left(\tilde\partial_2U_2^\eta\right)(\tilde\partial_1V_1+V_3)$
$\boldsymbol{\gamma}_{11}(u^\varepsilon)\,\boldsymbol{\gamma}_{22}(v)=\eta^{-6}(\tilde\partial_1U_1^\eta+U_3^\eta)\left(\tilde\partial_2V_2\right)$

$\boldsymbol{\gamma}_{22}(u^\varepsilon)\,\boldsymbol{\gamma}_{22}(v)=\eta^{-4}\left(\tilde\partial_2U_2^\eta\right)\left(\tilde\partial_2V_2\right)$
$\boldsymbol{\rho}_{11}(u^\varepsilon)\,\boldsymbol{\rho}_{11}(v)=\eta^{-12}\left(\tilde\partial_1^2U_3^\eta\right)\left(\tilde\partial_1^2V_3\right)$
$\boldsymbol{\rho}_{12}(u^\varepsilon)\,\boldsymbol{\rho}_{12}(v)=\eta^{-10}\left(\tilde\partial_1\tilde\partial_2U_3^\eta\right)\left(\tilde\partial_1\tilde\partial_2V_3\right)$
$\boldsymbol{\rho}_{11}(u^\varepsilon)\,\boldsymbol{\rho}_{22}(v)=\eta^{-10}\left(\tilde\partial_1^2U_3^\eta\right)\left(\tilde\partial_2^2V_3\right)$
$\boldsymbol{\rho}_{11}(u^\varepsilon)\,\boldsymbol{\rho}_{22}(v)=\eta^{-10}\left(\tilde\partial_1^2V_3\right)\left(\tilde\partial_1^2U_3^\eta\right)$
$\boldsymbol{\rho}_{22}(u^\varepsilon)\,\boldsymbol{\rho}_{22}(v)=\eta^{-8}\left(\tilde\partial_2^2U_3^\eta\right)\left(\tilde\partial_2^2V_3\right).$
De l'autre côté $\int_\Omega f_3v_3dy^1dy^2=\eta^{-3}\int_B f_3(\eta z^1,z^2)V_3(z^1,z^2)\,dz^1dz^2$
on pose $B^\eta=\left]\frac{-1}{\eta},\frac1\eta\right[\times]0,1[$
$a_0(U^\eta,V)=A^{2222}\int_B\ell_2(U^\eta)\,\ell_2(V)\,dz+\varepsilon^2\eta^{-8}B^{1111}\int_B\ell_3(U^\eta)\,\ell_3(V)\,dz$
$a_{-2}(U^\eta,V)=$
$2A^{1212}\int_B\ell_{12}(U^\eta)\,\ell_{12}(V)\,dz+A^{1122}\int_B[\ell_2(U^\eta)\,\ell_{11}(V)+\ell_{11}(U^\eta)\,\ell_2(V)]\,dz$
$a_{-4}(U^\eta,V)=A^{1111}\int_B\ell_{11}(U^\eta)\,\ell_{11}(V)\,dz$
avec $B=]-\infty,+\infty[\times]0,1[$
$\ell(V)=[\ell_2(V),\ell_{11}(V),\ell_{12}(V),\ell_3(V)]=\left[\partial_2V_2,\tilde\partial_1V_1+V_3,\frac{\tilde\partial_1V_2+\partial_2V_1}{2},\partial_2^2V_3\right]$
On choisit η de sort que le terme dominant en flexion soit d'ordre

$$\eta^0\to\eta=\varepsilon^{\frac14}\tag{3.55}$$

On obtient $P(\eta)$

$$\begin{cases}\text{trouver } U^\eta\in V^\eta\\ \eta^{-4}a_{-4}(U^\eta,V)+\eta^{-2}a_{-2}(U^\eta,V)+a_0(U^\eta,V)+\ldots=\langle f,V\rangle\ \forall V\end{cases}\tag{3.56}$$

$V^\eta=\{H^1(B^\eta)\times H^1((B^\eta))\times H^2((B^\eta))+C.C\}$
C.C : $U_1^\eta=U_2^\eta=U_3^\eta=\frac{\partial U_3^\eta}{\partial n}=0$ sur $z^2=0$.

Remarque 3.8: 1) Le terme η représente l'épaisseur de la couche limite. Les estimations d'épaisseurs des couches pour les differents cas des surfaces figure dans DE Souza [7] ou bien Sanchez-P [33] .

2) L'existence et l'unicité de U^η sont des conséquences directes du théorème de Lax-Milgram.

3.5.2 Le processus asymptotique:

On définit l'espace H sur B

$V \in H \Leftrightarrow [\ell_2(V), \ell_{11}(V), \ell_{12}(V), \ell_3(V)] \in (L^2(B))^4$

et $V(\infty,\ z^2) = 0$ et $V_1 = V_2 = V_3 = \frac{\partial V_3}{\partial n} = 0$ pour $z^2 = 0$

Lemme 3.1: *$[a(u,u)]^{\frac{1}{2}} = [a_{-4}(u,u) + a_{-2}(u,u) + a_0(u,u)]^{\frac{1}{2}}$ définit une norme sur H.*

Preuve. Soit u $\in H$. On a $a(u,u) = \int_B [A^{1111}(\ell_{11}(u))^2 + A^{2222}(\ell_2(u))^2 + B^{1111}(\ell_3(u))^2 + 2A^{1212}(\ell_{12}(u))^2$

$+2A^{1122}\ell_2(u)\ell_{11}(u)]dz$

avec $A^{1111} = \nu A^{1122} = 12B^{1111} > 0$ et $\frac{1}{2} > \nu > 0$ donc il existe une constante C >0 $a(u,u) > C\left[\|\ell_{11}(u)\|^2_{0,B} + \|\ell_{12}(u)\|^2_{0,B} + \|\ell_2(u)\|^2_{0,B} + \|\ell_3(u)\|^2_{0,B}\right]$ donc $a(u,u) = 0 \to u_1 = u_2 = u_3 = 0$. ■

Soit $\tilde{\mathrm{H}}$ le complété de H par cette norme .

On introduit $G_1 = \{u \in H / \ell_{11}(u) = 0\}$

$G_2 = \{u \in H / \ell_{11}(u) = \ell_{12}(u) = 0\}$

il est claire que G_1 et G_2 sont deux sous espaces fermés de $\tilde{\mathrm{H}}$

Remarque 3.9:

$G_2 \neq \{0\}$ le problème $P(\eta)$ est un problème de pénalisation.

On postule

$$U^\eta = U^0 + \eta U^1 + ... \tag{3.57}$$

On substitue (3.57) dans (3.56) on trouve :

à l'ordre :

$$\eta^{-4} : a_{-4}(U^0, V^0) = 0 \to U^0 \in G_1 \tag{3.58}$$

$$\eta^{-3} : a_{-4}(U^1, V^0) + a_{-4}(U^0, V^1) = 0 \to a_{-4}(U^1, V^0) = 0 \tag{3.59}$$

$$\eta^{-2} : a_{-2}(U^0, V^0) + a_{-4}(U^0, V^2) + a_{-4}(U^2, V^0) + a_{-4}\left(U^1, V^1\right) = 0 \tag{3.60}$$

$$\eta^{-1} : a_{-4}\left(U^0, V^3\right) + a_{-4}(U^3, V^0) + a_{-4}\left(U^1, V^2\right) + a_{-4}(U^2, V^1) + a_{-2}(U^0, V^1)$$
$$+a_{-2}(U^1, V^0) = 0 \tag{3.61}$$

η^0 :
$a_{-4}\left(U^0, V^4\right) + a_{-4}\left(U^4, V^0\right) + a_{-4}\left(U^1, V^3\right) + a_{-4}\left(U^3, V^1\right) + a_{-4}\left(U^2, V^2\right)$
$+a_{-2}\left(U^2, V^2\right) + a_{-2}\left(U^1, V^1\right) + a_{-2}\left(U^0, V^2\right) + a_{-2}\left(U^2, V^0\right) + a_0\left(U^0, V^0\right)$

$$= \left\langle f, V^0 \right\rangle \tag{3.62}$$

On prend V^0arbitraire dans G_1et $V^2 = 0$ dans (3.60) , on trouve $U^0 \in G_2$, on prend dans la dernière équation $V^1 = 0$ *et* V^2 , V^0 arbitraires dans G_2 on obtient $a_0\left(U^0, V^0\right) = \langle f, V^0\rangle$ pour tout $V^0 \in G_2$
Donc le problème limite

$$\begin{cases} \text{trouver } U^{\,0} \in G_2 \qquad \text{telle que} \\ \qquad a_0\left(U^0, V^0\right) = \langle f, V^0\rangle \quad \text{pour tout } V^0 \in G_2 \end{cases} \tag{3.63}$$

3.5.3 Existence et unicité de U_0

Lemme 3.2 : *la forme linéaire* $V \to \int_0^1 V\left(0, z^2\right) dz^2$ *est continue sur* G_2

Preuve. Soit $V \in G_2 \to \ell_{11}(V) = \ell_{12}(V) = 0 \to \tilde{\partial}_1 V_1 = -V_3$ *et* $.\tilde{\partial}_1^2 V_3 \in L^2(B)$ et de plus et $\underset{z^1 \to \infty}{Lim}\, V\left(z^1, z^2\right) = 0$

On a $\int_B f\left(\eta z^1, z^2\right) V_3\left(z^1, z^2\right) dz^1 dz^2 = \langle f, V\rangle$
$f_3\left(\eta z^1, z^2\right) = f_3\left(1, z^2\right) + O(\eta) \;= 1 + O(\eta)$ (développement au voisinage de $z^1 = \eta^{-1}$) on pose $B^+ =]0, +\infty[\times]0, 1[$
$V \in G_2 \to \langle f, V\rangle = \int_{B^+} [1 + O(\eta)\,] \left(-\tilde{\partial}_1 V_1\left(z^1, z^2\right)\right) dz^1 dz^2$
$\to \langle f, V\rangle = \int_0^1 V_1\left(0, z^2\right) dz^2 + O(\eta)$
On a $V \in G_2 \to \ell_3(V) \in L^2(B) \to \tilde{\partial}_1^2 V_3 \in L^2(B^+)$
$\to \int_{B^+} \left(\tilde{\partial}_1^2 V_1\left(z^1, z^2\right)\right)^2 dz^1 dz^2 < \infty \to V_1 \in W(0, +\infty)$
(l'espace de Lions-Magenes [18] p13) d'après le théorème 3.2 de [18]
$\int_0^1 V_1\left(0, z^2\right) dz^2 \leq cte \left\|V_1\right\|_{L^2(0,\infty)} \leq cte \left\|V_1\right\|_{\tilde{H}}$. ■

Lemme 3.3: $[a_0(,)]^{\frac{1}{2}}$ *définit une norme sur* G_2

Preuve. $V \in G_2$ et $a_0(V,V) = 0 \rightarrow \begin{cases} \tilde{\partial}_1^2 V_3 = \tilde{\partial}_2 V_2 = 0 \\ \ell_{11}(V) = \ell_{12}(V) = 0 \end{cases} \rightarrow V = 0$

Donc d'après le théorème de Lax -Milgram
il existe $U^0 \in G_2$ unique telle que
$a_0(U^0, V) = \langle f, V \rangle$ pour tout $V \in G_2$ ■

3.5.4 La détermination de U_0.

On a $U_0 \in G_2 \rightarrow \exists \varphi(z^1, z^2)$ telle que

$$\begin{cases} U_0^1 = \tilde{\partial}_1 \varphi(z^1, z^2) \\ U_0^2 = -\partial_2 \varphi(z^1, z^2) \\ U_0^3 = -\tilde{\partial}_1^2 \varphi(z^1, z^2) \end{cases} \tag{3.64}$$

$V \in G_2 \rightarrow \exists \psi(z^1, z^2)$ telle que

$$\begin{cases} V^1 = \tilde{\partial}_1 \psi(z^1, z^2) \\ V^2 = -\partial_2 \psi(z^1, z^2) \\ V^3 = -\tilde{\partial}_1^2 \psi(z^1, z^2) \end{cases} \tag{3.65}$$

$$\text{et pour tout } V \in G_2 \; a(U_0, V) = \int_0^1 V\left(0, z^2\right) dz^2 \tag{3.66}$$

$$\int_B \left(A^{2222} \partial_2^2 \varphi \partial_2^2 \psi + B^{1111} \tilde{\partial}_1^6 \varphi \tilde{\partial}_1^4 \psi \right) dz = -\int_B H\left(z^1\right) \tilde{\partial}_1^2 \psi\left(z^1, z^2\right) \; dz$$

$$\rightarrow A^{2222} \partial_2^4 \varphi + B^{1111} \tilde{\partial}_1^8 \varphi = -\delta'\left(z^1\right) \tag{3.67}$$

Donc pour déterminer U^0 il suffit résoudre l'équation (3.67) avec les conditions

$$\begin{cases} \tilde{\partial}_1 \varphi(z^1, 0) = \tilde{\partial}_2 \varphi(z^1, 0) = \tilde{\partial}_1^2 \varphi(z^1, 0) = 0 \\ \tilde{\partial}_1 \varphi(\pm\infty, z^2) = 0 = \tilde{\partial}_1^2 \varphi(\pm\infty, z^2) = \tilde{\partial}_2 \varphi(\pm\infty, z^2) = 0 \end{cases} \tag{3.68}$$

Pour ceci, soit λ_n et ϕ_n les valeurs et les vecteurs propres de l'opérateur ∂_2^4 (i.e) $\partial_2^4\phi_n = \lambda_n\phi_n$ tels que $\partial_2\phi_n\left(z^2\right)_{z^2=0} = 0$ il est naturel de chercher

$$\varphi\left(z^1, z^2\right) = \sum_n \phi_n\left(z^2\right)\alpha_n\left(z^1\right) \ . \tag{3.69}$$

On remarque qu'on peut prendre $\phi_n\left(z^2\right) = \cos n\pi z^2$.

D'autre part on a le développement suivant les cosinus des arcs multiples de la fonction $f(z^2) = 1$ pour 0<z^2 < 1 est égal à 1 (i.e)

$f(z^2) = \sum_n a_n \cos n\pi z^2 \to a_0 = 1$ et $a_n = 0$ pour $n \geq 1$

Donc on cherche $\varphi\left(z^1, z^2\right) = \sum_n \alpha_n\left(z^1\right)\cos n\pi z^2$. On divise B en $B^+ =]0, +\infty[\times]0, 1[$ et $B^- =]-\infty, 0[\times]0, 1[$

$$\text{sur } B^+ \quad \varphi\left(z^1, z^2\right) = \sum_n \alpha_n^+\left(z^1\right)\cos n\pi z^2 \tag{3.70}$$

$$\text{sur } B^- \quad \varphi\left(z^1, z^2\right) = \sum_n \alpha_n^-\left(z^1\right)\cos n\pi z^2 \tag{3.71}$$

On obtient

$$\alpha_n^-\left(z^1\right) = \sum_{k=0}^{2} C_{kn}^- \exp[\sqrt[8]{12}n^{\frac{1}{2}}\exp(\frac{(k-1)\pi i}{4}z^1)] \tag{3.72}$$

$$\alpha_n^-\left(z^1\right) = \sum_{k=3}^{5} C_{kn}^+ \exp[\sqrt[8]{12}n^{\frac{1}{2}}\exp(\frac{k\pi i}{4}z^1)] \tag{3.73}$$

les constantes C$_{kn}$ se déterminent des conditions

$[|\alpha_n|] = \left[|\alpha_n|^{(1)}\right] = \left[|\alpha_n|^{(2)}\right] = \left[|\alpha_n|^{(3)}\right] = \left[|\alpha_n|^{(4)}\right] = \left[|\alpha_n|^{(5)}\right] = 0$

et $\left[|\alpha_n|^{(6)}\right] = -\frac{a_n}{A^{2222}}$ tel que $[|w|] = w\left(0^+\right) - w\left(0^-\right)$.

Chapitre 4
LES PROBLÈMES SENSITIFS ET LE PHÉNOMÈNE DE COMPLEXIFICATION DANS LA THÉORIE DES COQUES MINCES

À présent, nous allons étudier un type de problèmes de perturbations singulières, dont l'étude de l'existence et l'unicité de la solution du problème limite fait intervenir des espaces fonctionnels inhabituels (non contenus dans l'espace des distributions), et de plus la solution du problème limite peut cesser d'exister si le second membre f ou les conditions aux limites subissent des petites variations ($f + \delta f$ /δf peuvent être C^∞). Ce qui peut être interprété comme un cas d'instabilité globale connu sous le nom "sensitivité" (Sanchez-P et J L. Lions [35]). Il est intéréssant de noter que dans [35] et [36] Sanchez-P et J L. Lions ont montré deux résultats importants :

Le premier : Dans le cas des problèmes elliptiques la sensitivité peut se présenter lorsque les conditions aux limites ne satisfont pas à la condition de Shapiro-Lopatinski (la condition de recouvrement [30] , [18]).

Le deuxième : Lorsqu' on fait l'approximation numérique de ces problèmes on rencontre plusieurs difficultés qui peuvent rendre la simulation numérique impossible.

Par la suite on considére des problèmes de perturbations singulières de la forme:

$$P^\varepsilon \begin{cases} \text{Trouver } u^\varepsilon \in V \text{ tel que} \\ a\left(u^\varepsilon, v\right) + \varepsilon^2 b\left(u^\varepsilon, v\right) = \langle f, v \rangle \text{ pour tout v} \in V \end{cases} \tag{4.1}$$

où V est un espace de Hilbert, $f \in V'$, a *et* b sont deux formes hermitiennes continues positives sur V et ε un petit paramètre strictement positif. On suppose aussi que la forme $a(u,u)^{\frac{1}{2}}$ définit une norme sur V, (i.e)

$$a(u,u) = 0 \rightarrow u = 0 \tag{4.2}$$

et que $a + b$ est coercive, (i.e)

$$\exists c > 0 \ /a(u,u) + b(u,u) \geq c \left\| u \right\|_V^2 \tag{4.3}$$

Alors d'après le théorème de Lax-Milgram, le problème variationnel P^ε admet une solution unique dans V . À l'aide de (4.2) on construit l'espace: $V_a =$ le complété de l'espace V par la norme :

$$\left\| u \right\|_{V_a} = a(u,u)^{\frac{1}{2}} \tag{4.4}$$

Alors, le problème limite s'écrit :

$$P^0 \begin{cases} \text{Trouver } u \\ a(u,v) = \langle f, v \rangle \ \text{ pour tout } v \in V_a \end{cases} \tag{4.5}$$

Il est claire que le problème limite sera bien posé si et seulement si $f \in V_a'$. Dans ce chapitre on s'intéresse au cas $f \notin V_a'$.

Définition 4 1: *Pour une équation aux dérivées partielles sur un domaine Ω, on dit que le problème P^0 est sensitif si V_a est non contenu dans l'espace des distributions $D\prime(\Omega)$.*

Dans cette partie, nous étudions deux problèmes sensitifs purement mathématique (on suppose que le coefficient de Poisson $\nu = 1$), il s'agit d'un modèle simplifié d'une coque élastique mince elliptique ayant une partie du bord encastrée Γ_0 et libre par le reste Γ_1 dans le cadre de la théorie de Koiter.

On montre explicitement dans le premier exemple que la solution du problème limite n'est pas une distribution, et dans le deuxième en expliquant à l'aide d'une étude graphique le phénomène de complexification .

4.1 Le premier problème modèle

Dans le plan (x_1, x_2) , soit $\Omega =]0,1[\times]0,1[\, , \partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 / \Gamma_1 = \{x_2 = 1\}$, soit le problème de perturbations singulières qui dépend d'un petit paramètre ε>0

$$\triangle^2 u^\varepsilon + \varepsilon^2 \partial_1^8 u^\varepsilon = f \qquad \text{dans } \Omega \tag{4.6}$$

$$u^\varepsilon = \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n} = 0 \qquad \text{sur } \Gamma_0 \tag{4.7}$$

$$\triangle u^\varepsilon = g_0 \ , \ -\frac{\partial \triangle u^\varepsilon}{\partial n} = g_1 \quad sur \ \ \Gamma_1 \tag{4.8}$$

tels que

$$f(x_1, x_2) = \delta(x_1) \quad \text{(la masse de Dirac)} \tag{4.9}$$

$$g_0(x_1, x_2) = 0 \tag{4.10}$$

$$g_1(x_1, x_2) = \delta(x_1) \tag{4.11}$$

$\triangle^2$: le bilaplacien
$\frac{\partial}{\partial n}$: la dérivée suivant la normale extérieure.

4.1.1 La formulation variationnelle:

On définit l'espace suivant

$$V = \left\{ u \ /\triangle u \in L^2(\Omega) \ , \partial_1^4 u \in L^2(\Omega), \quad u^\varepsilon_{/\Gamma_0} = \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n}_{/\Gamma_0} = 0 \ \right\} \tag{4.12}$$

Lemme 4.1.1: *$D(\Omega)$ est dense dans l'espace V, (i.e) $\overline{D(\Omega)}^{\|\|_V} = V$*

Preuve. Soit $u \in V \rightarrow$

$$\triangle u \in L^2(\Omega) \rightarrow \exists w \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \ /\triangle u = \triangle w \tag{4.13}$$

On a

$$w \in H_0^1(\Omega) \rightarrow \exists w_n \in D(\Omega) \ / \ w_n \rightarrow w \ dans \ H^1(\Omega) \tag{4.14}$$

l'opérateur $\triangle$ est fermé de $H^2 \cap H_0^1$ dans L^2

$$\rightarrow \triangle w_n \rightarrow \triangle u \text{ dans } L^2 \tag{4.15}$$

$u \in V$, alors $\partial_1^4 w_n \rightarrow \partial_1^4 u$ dans L^2

Par conséquent $\|w_n - u\| \rightarrow 0$. ■

On utilise la formule de Green ([6] p179), on obtient

$$P(\varepsilon) : \left\{ \begin{array}{c} \text{trouver } u^\varepsilon \in V \\ a(u^\varepsilon, v) + \varepsilon^2 b(u^\varepsilon, v) = L(v) \ \forall v \in V \end{array} \right. \tag{4.16}$$

tels que

$$a\left(u^{\varepsilon}, v\right)=\int_{\Omega}\left(\triangle u^{\varepsilon} \triangle v\right) d x \tag{4.17}$$

$$b\left(u^{\varepsilon}, v\right)=\int_{\Omega} \partial_1^4 u^{\varepsilon} \partial_1^4 v d x \tag{4.18}$$

$$L(v)=\int_{\Omega} f v+\int_{\Gamma_1} g_1 v d \Gamma_1 \tag{4.19}$$

L'existence et l'unicité de u^{ε} (pour $\varepsilon>0$ fixé)
On munit l'espace V de la norme suivante

$$\|u\|_V=\|\triangle u\|_{L^2(\Omega)}+\left\|\partial_1^4 u\right\|_{L^2(\Omega)} . \tag{4.20}$$

Grâce à l'unicité du problème de Cauchy

$$\left\{\begin{array}{c} \triangle u=0 \\ u=\frac{\partial u}{\partial n}=0 \text{ sur } \Gamma_0 \end{array}\right. \tag{4.21}$$

on déduit que $\|u\|_V$ définit une norme sur V.

Lemme 4.2 : $V \subset\left\{u / \nabla u \in\left(H^1(\Omega)\right)^2, \nabla u=0 \text{ sur } \Gamma_0\right\}$

Preuve. Si $u \in V \rightarrow \exists w \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$
tel que $\triangle u=\triangle w$ p p dans $\Omega \rightarrow$

$$\left\{\begin{array}{c} \triangle(u-w)=0 \\ u=w=0 \text{ sur } \Gamma_0 \end{array}\right. \tag{4.22}$$

$\rightarrow \boldsymbol{\nabla} u=\nabla w$ p.p dans $\Omega \rightarrow \nabla u \in\left(H^1(\Omega)\right)$
$\boldsymbol{\nabla} u // \vec{n}$ et $\frac{\partial u}{\partial n}=\nabla u \times \vec{n} \rightarrow \nabla u=0$ sur Γ_0 ■

Remarque 4.1 : Il est bien connu que l'utilisation de l'inégalité de Poincaré est valable pour les éléments de $H_0^1(\Omega)$, ce qui est susceptible de nombreuses généralisations comme il montre le corollaire suivant.

Corollaire 4.1.1 : *(D. AZE' [12] p 54) Soit $\Omega \subset R^n$ ouvert borné lipchitzien, $\Gamma_0 \subset \partial \Omega$, un sous ensemble de mesure positive. On pose $W=\{u \in H^1(\Omega)\ \gamma_0 u=0$ sur $\Gamma_0\}$ où γ_0 désigne la trace sur Γ_0. Alors $\exists C>0$ telle que :*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{pour tout } u \in W \tag{4.23}$$

On déduit de ce qui précéde $\exists C > 0$ telle que :

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\triangle u\|_{L^2(\Omega)} \text{ pour tout } u \in W \tag{4.24}$$

de la même manière :

$$\|\partial_1 u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left\|\partial_1^4 u\right\|_{L^2(\Omega)} \tag{4.25}$$

Lemme 4.3:

$$L(v) = \int_\Omega \delta(x_1)\, v(x_1, x_2)\, dx + \int_{\Gamma_1} \delta(x_1)\, v(x_1, 1)\, dx_1 \tag{4.26}$$

définit une forme linéaire continue sur V.

Preuve. On a

$$L(v) = \int_0^1 v(0, x_2)\ dx_2 + v(0,1)\ \forall v \in V \tag{4.27}$$

$$\rightarrow |L(v)| \leq \left|\int_0^1 v(0, x_2)\, dx_2\right| + |v(0,1)|\ \forall v \in V \tag{4.28}$$

$$\rightarrow \left|\int_0^1 v(0, x_2)\, dx_2\right| \leq \left(\int_\Omega |\partial_1 v(x_1, x_2)|^2\, dx_1 dx_2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.29}$$

$$\rightarrow \left|\int_0^1 v(0, x_2)\, dx_2\right| \leq c \left\|\partial_1^4 u\right\|_{L^2(\Omega)} \tag{4.30}$$

d'autre par d'après le théorème de trace sur H^1

$$|v(0,1)| \leq c\left(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\right) \leq C \|\triangle u\|_{L^2(\Omega)}. \tag{4.31}$$

■

Il est claire que $a+b$ définit une forme bilinéaire continue coercive sur V, pour utiliser le théorème de Lax-Milgram, il reste à montrer que V est de Banach pour la norme $\|\|_V$.

En effet, soit $u_n \in V$, on remarque que $V \subset W(-1,1)$ l'espace de Lions -Magenes ([18] p 13) qui est de Hilbert.

$$\rightarrow \exists u \in W(-1,1) \,/\, \partial_1^k u_n \rightarrow \partial_1^k u \quad , k = 1,2,3,4 \tag{4.32}$$

$$u_n \rightarrow u \quad \text{dans } L^2(\Omega) \tag{4.33}$$

On a l'opérateur $\triangle$ est fermé $(D(\triangle) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega))$.
et puisque $D(\triangle)$ est dense dans $L^2(\Omega)$

$$\rightarrow \triangle u_n \rightarrow \triangle u \text{ dans } L^2(\Omega) \tag{4.34}$$

donc

$$\|\triangle u - \triangle u_n\|_{L^2(\Omega)} + \left\|\partial_1^4 u - \partial_1^4 u_n\right\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0 \tag{4.35}$$

de plus les opérateurs de trace $u_{/\Gamma_0}$et $\left(\frac{\partial}{\partial n}\right)_{/\Gamma_0}$sont continus (donc fermés) de $H^2(\Omega) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et de $H^2(\Omega) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, par conséquent
$u \in V \rightarrow V$ est de Banach.
Ce qui nous donne, d'après le théorème de Lax- Milgram l'existence et l'unicité de $u^\varepsilon \in V$ solution de (4.16).

4.1.2 L'étude du problème limite P(0)

Il est à noter qu'on peut faire une étude spéciale de notre problème, mais nous préférons, de rappeler l'étude générale qui a été faite par Sanchez-P et J L. Lions [36] .

$$\triangle^2 u = f \qquad \text{dans } \Omega \tag{4.36}$$

$$u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma_0. \tag{4.37}$$

$$\triangle u^\varepsilon = g_0, \; -\frac{\partial \triangle u^\varepsilon}{\partial n} = g_1 \text{ sur } \Gamma_1 \tag{4.38}$$

$$V = \left\{ u \in D'(\Omega), \triangle u \in L^2(\Omega), \partial_1^4 u \in L^2(\Omega), \; u^\varepsilon = \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \right\}$$

Lemme *4.4:* $(a(u,u))^{\frac{1}{2}}$ *définit une norme sur* V *.*

La démonstration est une conséquence directe de l'unicité du problème de Cauchy.

Soit V^a le complété de V par la norme $(a(u,u))^{\frac{1}{2}}$, il est claire que le problème est bien posé dans V^a si $L(v)$ définit une forme linéaire continue sur V^a munit de la norme $\|u\|_{V^a} = (a(u,u))^{\frac{1}{2}}$. Ceci exige d'introduire l'espace $E(\Gamma_1)$.

L'espace $E(\Gamma_1)$

pour $\theta \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)$ (dual de $H^{\frac{1}{2}}_{00}(\Gamma_0)$ voir J. Telega -T. Lewinski [20] ou bien Lions et Magenes [18]) on définit φ solution de

$$\begin{cases} \triangle\varphi = 0 \\ \varphi = \theta \text{ sur } \Gamma_0 \text{ et } \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \end{cases} \tag{4.39}$$

d'aprés le théorème 8-3 de [18] on déduit que l'application

$\theta \to \varphi$ est linéaire et continue de $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0) \to L^2\ (\Omega)$.

et l 'application $\theta \to \frac{\partial\varphi}{\partial n}$ est bien définit de $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0) \to H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma_1)$

Lions et Sanchez ont introduit $E(\Gamma_1)$ comme l'espace parcouru par $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ lorsque θ parcouru $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)$. L'espace $E(\Gamma_1)$ munit de la norme

$$\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right\|_{E(\Gamma_1)} = \|\theta\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)} \tag{4.40}$$

est un espace de Hilbert .

Remarque 4.2 : φ est analytique réel dans Ω et au voisinage de Γ_1 $\to E(\Gamma_1) \subset A(\Gamma_1)$ l'espace des fonctions analytiques réelles sur Γ_1

Proposition 4.1.1 : *Soit* $g_1 \in E(\Gamma_1)$

Alors $v \to \int_{\Gamma_1} g_1\ v\ d\Gamma_1$définit une forme linéaire continue sur V^a

Preuve. Si $g_1 \in E(\Gamma_1) \to \int_{\Gamma_1} g_1\ v\ d\Gamma_1 - \int_\Omega \nabla\varphi\nabla v dx = \int_\Omega (\triangle\varphi)\, v dx$ tel que

$$\begin{cases} \varphi \in L^2\ (\Omega)\, et\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} = g_1 \text{sur } \Gamma_1 \\ \triangle\varphi = 0 \text{ dans } \quad \Omega \end{cases} \tag{4.41}$$

$$\left|\int_{\Gamma_1} g_1\ v\ d\Gamma_1\right| \leq cte\, \|\nabla\varphi\|\, \|\triangle v\|_{L^2\ (\Omega)} \tag{4.42}$$

$$\to \exists C > 0\ tel\ que \left|\int_{\Gamma_1} g_1\ v\ d\Gamma_1\right| \leq C\, \|\triangle v\|_{L^2\ (\Omega)} \tag{4.43}$$

par conséquent si $\int_\Omega f v dx$ se prolonge par continuité sur V^a, on obtient $v \to \int_{\Gamma 1} g_1\ v\ d\Gamma_1$est une forme linéaire continue sur V , si bien qu'elle se prolonge par continuité à V^a . Alors il existe u unique solution de

$$a\,(u, v) = L\,(v)\ \ \forall v \in V^a \tag{4.44}$$

■

Remarque 4.3 : La proposition (4.1.1) est optimale, il est nécessaire que $g_1 \in E(\Gamma_1)$ pour que la proposition 4.1.1 soit vraie (voir ci après). On a donc déja la sensitivité de u dans V^a par apport à des variations de g_1 qui font sortir de l'espace $E(\Gamma_1)$ ce qui peut arriver même avec des petites variations C^∞ de g_1 sur Γ_1.

Pour démontrer la nécesssité il faut connaitre la structure de V^a.

Structure de V^a

On suppose qu'il existe (unique) u $\in V^a$ solution de (4.44) et soit $v \in V^a$.

Alors $\int_{\Gamma_1} g_1 v \, d\Gamma_1 = a(u,v) + \int_\Omega f v dx$ donc $v_{/\Gamma_1}$ est défini de manière unique dans $E\prime(\Gamma_1)$. Désignons par $H(\Omega)$ l'espace des distributions $h \in D'(\Omega)$ $/\triangle h = 0$ d'après Sanchez. P et J L. Lions [36] l'application trace sur Γ est définit sur $H(\Omega)$ et établit un isomorphisme de $H(\Omega) \to A'(\Gamma)$ ($A(\Gamma)$ est l'espace des fonctions analytiques sur Γ)

En particulier; pour tout $\psi \in A'(\Gamma)$ il existe $h \in D'(\Omega)$ unique tel que

$$\triangle h = 0 \text{ dans } \Omega \textit{ et } h = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \textit{ et } h = \psi \textit{ sur } \Gamma_1 \tag{4.45}$$

et si $\psi \notin A'(\Gamma)$ il n'existe pas de solution de (4.44) dans $D'(\Omega)$.

Soit $\tilde{H}$ le complété de H par la norme $\|h\|_{\tilde{H}} = \left\|h_{/\Gamma_1}\right\|_{E\prime(\Gamma_1)}$.

Proposition 4.1.2 : *Tout élément de V^a peut être représenté par*

$v = w + h$ tels que $w \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ et $h \in \tilde{H}$

Preuve. Soit

$$v \in V^a \to \exists v_j \in V \text{ de Cauchy } v_j \to v \tag{4.46}$$

$$\textit{donc } \triangle v_j \to \psi \text{ dans } L^2(\Omega) \tag{4.47}$$

On introduit :

$$w_j \text{ telle que } \triangle w_j = \triangle v_j \quad \text{dans } \Omega \text{ et } w_j = 0 \text{ sur } \Gamma \tag{4.48}$$

donc $w_j \to w$ dans $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ avec $\triangle w = \psi$ et $w = 0$ sur Γ, on définit en suite h_j par $h_j = w_j - v_j$

Par conséquent

$$\begin{cases} \triangle h_j = 0 \text{ dans } \Omega \\ h_j = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \text{ et } h_j = v_j \text{ sur } \Gamma_1 \end{cases} \tag{4.49}$$

et on obtient $h_{j/\Gamma_1} \to h_{/\Gamma_1} = v_{/\Gamma_1}$ dans $E\prime(\Gamma_1)$. Il est en résulte que h_j ne converge pas dans l'espace des distributions, mais dans un espace différent contient des éléments qui ne sont pas des distributions sur Ω. Et on a $v = w + h$. ■

Revenant à la proposition (4.1.1) s'il existe u unique $\in V^a$ solution de

$$a(u,v) = \int_{\Gamma_1} g_1 v \, d\Gamma_1 + \int_{\Omega} f v dx \; \forall v \in V^a \tag{4.50}$$

Alors $g_{\,1} \in E(\Gamma_1)$.
En effet, $u \in V^a$ et $\int_\Omega \triangle u \triangle v dx = \int_{\Gamma_1} g_1 v \, d\Gamma_1 + \int_\Omega f v dx . \forall v \in V^a$.
On prend $v \in V$, en appliquant la formule de Green ([6] p179) on obtient :

$$g_{1_{/\Gamma_1}} = \frac{\partial \triangle u}{\partial n}_{/\Gamma_1} \tag{4.51}$$

on a $u = w + h$ tels que $w \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ et $h \in \tilde{H}$
$\rightarrow u = h$ sur $\Gamma_1 \rightarrow \frac{\partial \triangle u}{\partial n}_{/\Gamma_1} = \frac{\partial \triangle h}{\partial n}_{/\Gamma_1}$
On a $\triangle h = 0 \in L^2(\Omega)$. D'après le théorème 8.3 de [18]
$\triangle h_{/\Gamma_0} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)$ et $\triangle h_{/\Gamma_1} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$.
Mais $\triangle h = 0$ et de la continuité de l'application trace de
$L^2(\Omega) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. On déduit que $\frac{\partial \triangle u}{\partial n}_{/\Gamma_1} \in E(\Gamma_1) \rightarrow g_1 \in E(\Gamma_1)$
En revenant à notre exemple on a $g(x_1, x_2) = \delta(x_1)$
si $g_1 \in E(\Gamma_1) \rightarrow \begin{cases} \triangle \varphi = 0 \\ \varphi = \theta \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0) \text{ sur } \Gamma_0 \text{ et } \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \end{cases}$
verifiant $\frac{\partial \varphi}{\partial n}_{/\Gamma_1} = g_1$, on remarque que sur Γ_1 $\vec{n} // \vec{a}_2$

$$\rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}_{/\Gamma_1} = \delta(x_1) \rightarrow \varphi(x_1, x_2) = x_2 \delta(x_1) + c \tag{4.52}$$

$$\varphi(x_1, 1) = 0 \rightarrow \varphi(x_1, x_2) = (x_2 - 1)\delta(x_1) \tag{4.53}$$

On remarque $\varphi(x_1, x_2)_{/\Gamma_0} \notin H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)$ parceque si $s \leq \frac{1}{2}, \delta \notin H^{-s}$, donc $g_1 \notin E(\Gamma_1) \rightarrow$il n'existe pas de solution de $P(0)$ dans V^a. Pour résoudre, ce problème on utilise une technique simulaire à celle du chapitre 2 et 3 de ce mémoire (problèmes à énergie non bornée).

On cherche un autre problème $\hat{P}(\varepsilon)$ équivalent à $P(\varepsilon)$ mais $P(0)$ soit bien posé, pour ceci on utilise la transformtion de Fourier de $P(\varepsilon)$

D' après la formule de Parseval (Hörmander [22] p 163) on a

$$\int \phi \bar{\psi} dx = (2\pi)^{-1} \int \hat{\phi} \overline{\hat{\psi}} d\zeta \tag{4.54}$$

$$\hat{\phi}(\zeta) = \int_R e^{-ix\zeta}\phi(x)\,dx \tag{4.55}$$

On a aussi

$$\zeta^\alpha D^\beta \hat{\phi}(\zeta) = \int_R e^{-ix\zeta} D^\alpha \left((-x)^\beta \phi(x)\right) dx \tag{4.56}$$

On effectue la transformation de Fourier par rapport à x_1 on obtient

$$\begin{array}{c} \int_\Omega \left[\left(\partial_2^2 - \zeta^2\right)\hat{u}^\varepsilon \left(\partial_2^2 - \zeta^2\right)\hat{v} + \varepsilon^2\zeta^8\hat{u}^\varepsilon\hat{v}\right] d\zeta dx_2 \\ = \int_\Omega \hat{v}(\zeta, x_2)\, d\zeta dx_2 + \int_{-\infty}^{\infty} \hat{v}(\zeta, 1)\, d\zeta \end{array} \tag{4.57}$$

Notons que ζ est considéré comme un paramètre.
(4.57) $\rightarrow \hat{P}(\varepsilon)$:

$$\left\{ \begin{array}{c} \int_0^1 \left[\left(\partial_2^2 - \zeta^2\right)\hat{u}^\varepsilon \left(\partial_2^2 - \zeta^2\right)\hat{v} + \varepsilon^2\zeta^8\hat{u}^\varepsilon(\zeta, x_2)\,\hat{v}(\zeta, x_2)\right] dx_2 \\ = \int_0^1 \hat{v}(\zeta, x_2)\, dx_2 + \hat{v}(\zeta, 1) \end{array} \right. \tag{4.58}$$

$$\rightarrow \left(\left(\partial_2^2 - \zeta^2\right)\left(\partial_2^2 - \zeta^2\right) + \varepsilon^2\zeta^8\right)\hat{u}^\varepsilon(\zeta, x_2) = 1 \tag{4.59}$$

avec les conditions aux limites

$$u^\varepsilon(x_1, 0) \qquad \rightarrow \quad \hat{u}^\varepsilon(\zeta, 0) = 0 \tag{4.60}$$

$$\frac{\partial u^\varepsilon(x_1, 0)}{\partial n} \qquad = 0 \quad \rightarrow \frac{\partial \hat{u}^\varepsilon(\zeta, 0)}{\partial n} = 0 \quad (\vec{n}//\vec{a}_2 \text{sur} \quad x_2 = 0) \tag{4.61}$$

$$\triangle u^\varepsilon(x_1, 1) \qquad = 0 \quad \rightarrow \left(\partial_2^2 - \zeta^2\right)\hat{u}^\varepsilon(\zeta, 1) = 0. \tag{4.62}$$

$$-\frac{\partial \triangle u^{\varepsilon}}{\partial n}(x_1,1) = g_1 \rightarrow -\partial_2\left(\partial_2^2-\zeta^2\right)\hat{u}^{\varepsilon}\left(\zeta,1\right)=0 \tag{4.63}$$

Le problème $\hat{P}\left(\varepsilon\right)$ est un problème de pertubations, il dépend de deux parmètres $\varepsilon \rightarrow 0$ et $\zeta \rightarrow \infty$.

On remarque que pour ε fixé et $|\zeta| \rightarrow \infty$
le terme dominant sera :

$$\varepsilon^2\zeta^8\hat{u}^{\varepsilon}\left(\zeta,x_2\right)=1 \tag{4.64}$$

On cherche $\hat{u}^{\varepsilon}$ tel que $\hat{u}^0$ est la solution de

$$\left(\partial_2^2-\zeta^2\right)\left(\partial_2^2-\zeta^2\right)\hat{u}^0\left(\zeta,x_2\right)=0 \tag{4.65}$$

$$\hat{u}^0\left(\zeta,0\right)=\frac{\partial \hat{u}^0\left(\zeta,0\right)}{\partial n}=0 \tag{4.66}$$

$$\left(\partial_2^2-\zeta^2\right)\hat{u}^0\left(\zeta,1\right)=0 \tag{4.67}$$

$$-\partial_2\left(\partial_2^2-\zeta^2\right)\hat{u}^0\left(\zeta,1\right)=0 \tag{4.68}$$

On remarque que si on pose

$$w=\exp\left(|\zeta|\,x_2\right)\rightarrow\left(\partial_2^2-\zeta^2\right)w=0 \tag{4.69}$$

donc on résoud l'équation suivante

$$\left(\partial_2^2-\zeta^2\right)\hat{u}^0\left(\zeta,x_2\right)=\exp\left(|\zeta|\,x_2\right) \tag{4.70}$$

donc on cherche $\hat{u}^0$à l'aide de les deux solutions linéairement indépendantes

$$w_A=\left(\frac{sh(|\zeta|\,x_2)}{\zeta}-x_2\exp-\left(|\zeta|\,x_2\right)\right) \tag{4.71}$$

$$et \qquad w_B = x_2 sh\left(|\zeta|\, x_2\right) \tag{4.72}$$

et $\hat{u}^0(\zeta, x_2) = A(\zeta)\, w_A + B(\zeta)\, w_B$
avec les conditions aux limites, (4.66) , $(4.67\ )$ et (4.68) on obtient

$$A(\zeta) = \frac{ch\zeta}{2\zeta^2} \quad \text{et } B(\zeta) = \frac{e^{-|\zeta| x}}{2\zeta^2} \tag{4.73}$$

$$\hat{u}^0(\zeta, x_2) \simeq \frac{(ch\zeta)\, sh\left(|\zeta|\, x_2\right)}{2\zeta^3} \quad |\zeta| \quad \text{assez grand et } x_2 \neq 0 \tag{4.74}$$

il est claire que $\hat{u}^0(\zeta, x_2)$ n'est pas une distribution tempérée. D'après le théorème de Plancherel (voir par exemple [22]) $u^0(x_1, x_2)$ ne peut être une distribution sur Ω, ce qui confirme le caractère sensitif du problème.

La convergence de $\hat{u}^\varepsilon \to \hat{u}^0$ et $u^\varepsilon \to u^{\ 0}$. Dans cette partie on doit montrer l'existence et l'unicité de $\hat{u}^\varepsilon, \hat{u}^0$ puis la convergence $\hat{u}^\varepsilon \to \hat{u}^0$ pour donner un sens à l'approximation de $\hat{u}^\varepsilon$ par $\hat{u}^0$ et on déduit finalement dans quel espace $u^\varepsilon \to u^0$ On a le problème :

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{trouver } \hat{u}^\varepsilon \in \hat{V} \\ \int_0^1 \left[\left(\partial_2^2 - \zeta^2\right) \hat{u}^\varepsilon \left(\partial_2^2 - \zeta^2\right) \hat{v} + \varepsilon^2 \zeta^8 \hat{u}^\varepsilon \hat{v}\right] dx_2 \\ = \left\{ \begin{array}{c} \int_0^1 \hat{v}(\zeta, x_2)\, dx_2 \ 0 < x_2 < 1 \\ \hat{v}(\zeta, 1)\, dx_2 \end{array} \right. \end{array} \right\} \tag{4.75}$$

$$\hat{V} = \left\{ v \in H^2\left]0,1\right[, v(0) = \partial_2 v(0) = 0 \right\} \tag{4.76}$$

Lemme 4.5: $(u, v) \to \int_0^1 \left(\partial_2^2 - \zeta^2\right) u \left(\partial_2^2 - \zeta^2\right) v dx_2 + \int_0^1 uv dx_2$
définit une forme bilinéaire continue et coercive sur $\hat{V}$ munit de la norme.

$$\|u\|_{\hat{V}} = \|u\|_{L^2\left]0,1\right[} + \left\|\partial_2^2 u\right\|_{L^2\left]0,1\right[} \tag{4.77}$$

pour ζ fixé de R on a le lemme suivant:

Lemme 4.6: *Les applications :*

$$\hat{v} \to \int_0^1 \hat{v}\left(\zeta, x_2\right) dx_2 \tag{4.78}$$

$$\hat{v} \to \hat{v}\left(\zeta, 1\right) \tag{4.79}$$

définissent deux formes linéaires et continues sur $\hat{V}$

Preuve. A' l'aide du corollaire 4.1.1 et de théorème 8.3 [18]

$$\exists C > 0 / \left| \int_0^1 \hat{v}\left(\zeta, x_2\right) dx_2 \right| \leq C \left\| \hat{v} \right\|_{H^2(0,1)} \tag{4.80}$$

$$\left| \quad \hat{v}\left(\zeta, 1\right) \right| \leq C \left\| \hat{v} \right\|_{H^2(0,1)} \tag{4.81}$$

Donc d'après le théorème de Lax-Milgram le problème
$\hat{P}\left(\varepsilon\right)$ admet une solution unique dans $\hat{V}$. ■

Remarque 4.4: On a pas rencontrer et nous rencontrons pas des difficultés pour appliquer le théorème de Lax-Milgram et pour étudier la convergence puisque le problème $\hat{P}\left(\varepsilon\right)$ n'est pas de perturbations singulières, en effet l'ordre de dérivation de $\hat{P}\left(\varepsilon\right)$ et $\hat{P}\left(0\right)$ sont les mêmes .

Lemme 4.7: *Soit* $\hat{u}^{\varepsilon}(\zeta, \cdot)$ *et* $\hat{u}^{0}(\zeta, \cdot)$ *les solutions de* $\hat{P}(\varepsilon)$ *et* $\hat{P}(0)$

si ζ est fixé. Alors $\hat{u}^{\varepsilon}(\zeta, \cdot) \to \hat{u}^{0}(\zeta, \cdot)$ fortement dans $\hat{V}$.

Preuve. On pose

$$\hat{a}\left(\hat{u}^{\varepsilon}, \hat{v}\right) = \int_0^1 \left(\partial_2^2 - \zeta^2\right) \hat{u}^{\varepsilon}\left(\zeta, x_2\right) \left(\partial_2^2 - \zeta^2\right) \hat{v}\left(\zeta, x_2\right) dx_2 \tag{4.82}$$

$$\hat{b}\left(\hat{u}^{\varepsilon}, \hat{v}\right) = \int_0^1 \hat{u}^{\varepsilon}\left(\zeta, x_2\right) \hat{v}\left(\zeta, x_2\right) dx_2 \tag{4.83}$$

on a

$$\hat{a}\left(\hat{u}^{\varepsilon}, \hat{u}^{\varepsilon}\right) \geq cte \left\| \hat{u}^{\varepsilon} \right\|_{\hat{V}}^2 \tag{4.84}$$

$$\to cte \left\| \hat{u}^{\varepsilon} \right\|_{\hat{V}}^2 \leq \hat{a}\left(\hat{u}^{\varepsilon}, \hat{u}^{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 \zeta^8 \hat{b}\left(\hat{u}^{\varepsilon}, \hat{u}^{\varepsilon}\right) \leq c \left\| \hat{u}^{\varepsilon} \right\|_{\hat{V}} \tag{4.85}$$

$$\to \exists C \text{ (indépendant de } \varepsilon) > 0 / \left\| \hat{u}^{\varepsilon} \right\|_{\hat{V}} \leq C \tag{4.86}$$

$\rightarrow \exists u^* \in \hat{V}$ $\quad \hat{u}^\varepsilon \rightharpoonup u^*$faiblement dans $\hat{V}$ il est claire que $\hat{b}(\hat{u}^\varepsilon, \hat{u}^\varepsilon)$ reste bornée lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, par conséquent

$$u^* = \hat{u}^0 \tag{4.87}$$

il nous reste à montrer que la convergence est forte. En effet d'après le théorème de Rellich-Kondrashov ([6])

$$\hat{u}^\varepsilon \rightarrow \hat{u}^0 \text{ fortement dans } L^2\,]0,1[\,(\text{i,e}) \left\|\hat{u}^\varepsilon - \hat{u}^0\right\|_{L^2]0,1[} \rightarrow 0 \tag{4.88}$$

D'autre part on a :$\|\partial_2^2 \hat{u}^\varepsilon - \partial_2^2 \hat{u}^0\|^2_{L^2]0,1[} \leq$

$\hat{a}(\hat{u}^\varepsilon - \hat{u}^0, \hat{u}^\varepsilon - \hat{u}^0) + 2\zeta^2 \|\partial_2^2 \hat{u}^\varepsilon - \partial_2^2 \hat{u}^0\| \|\hat{u}^\varepsilon - \hat{u}^0\| - \zeta^4 \|\hat{u}^\varepsilon - \hat{u}^0\|$

$=\langle f, \hat{u}^\varepsilon - \hat{u}^0\rangle - \varepsilon^2 \zeta^8 \hat{b}(\hat{u}^\varepsilon - \hat{u}^0, \hat{u}^\varepsilon - \hat{u}^0) + 2\zeta^2 C \|\hat{u}^\varepsilon - \hat{u}^0\|$-$\zeta^4 \|\hat{u}^\varepsilon - \hat{u}^0\|^2$

le second membre tend vers 0 lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$

$\rightarrow \|\partial_2^2 \hat{u}^\varepsilon - \partial_2^2 \hat{u}^0\|^2_{L^2]0,1[} \rightarrow 0$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$

(i,e) $\hat{u}^\varepsilon$ converge fortement dans $\hat{\mathrm{V}}$ vers $\hat{u}^0$ ■

Théorème 4.1.1 *: Pour x_2 fixé on a $\hat{u}^\varepsilon(\cdot, x_2) \rightarrow \hat{u}^0(\cdot, x_2)$ dans $D\prime(R_\zeta)$ $\quad u^\varepsilon(\cdot, x_2) \rightarrow u^0(\cdot, x_2)$ dans $Z\prime(R_{x_1})$ tel que $Z\prime(R_{x_1}) = \digamma^{-1}(D\prime(R_\zeta))$ (voir annexe A)*

Pr. Pour montrer que $\hat{u}^\varepsilon(\cdot, x_2) \rightarrow \hat{u}^0(\cdot, x_2)$ dans $D\prime(R_\zeta)$ il suffit montrer que $\hat{u}^\varepsilon(\cdot, x_2) \rightarrow \hat{u}^0(\cdot, x_2)$ dans $L^1_{loc}(R_\zeta)$ donc soit ζ dans un ensemble bornée de R on a les éléments de $\hat{\mathrm{V}}$ ont des traces pour $x_2 \in [0,1]$ parceque $\hat{V} \subset H^2$

$$\rightarrow \left|\hat{u}^\varepsilon(\cdot, x_2) - \hat{u}^0(\cdot, x_2)\right| \leq cte \left\|\hat{u}^\varepsilon(\cdot, x_2) - \hat{u}^0(\cdot, x_2)\right\|_{\hat{V}} \rightarrow 0 \tag{4.89}$$

$$\rightarrow \hat{u}^\varepsilon(\cdot, x_2) \rightarrow \hat{u}^0(\cdot, x_2) \ \textit{dans}\ L^1_{loc}(R_\zeta) \tag{4.90}$$

d'après la définition de $Z\prime(R_{x_1}) = \digamma^{-1}(D\prime(R_\zeta))$ et la continuité de $\digamma^{-1}$ on déduit que

$$u^\varepsilon(\cdot, x_2) \rightarrow u^0(\cdot, x_2) \text{ dans } Z\prime(R_{x_1}). \tag{4.91}$$

■

4.2 Deuxième problème modèle

Soit $\Omega = R \times]0,1[$dans le plan des variables (x_1, x_2)

on pose la partie encastrée $\Gamma_0 = \{x_2 = 0\}$

Considérons le problème variationnel

$$\begin{cases} \text{Trouver } u^\varepsilon \in V \\ a(u^\varepsilon, v) + \varepsilon^2 b(u^\varepsilon, v) = L(v) \ \forall v \in V \end{cases} \tag{4.92}$$

tels que

$$V = \left\{ v \in H^2(\Omega) \, ; \triangle v = 0, v_{/\Gamma_0} = 0 \right\} \tag{4.93}$$

$$a(u^\varepsilon, v) = \int_{\Gamma_0} \partial_2 u^\varepsilon (x_1, 0) \, \partial_2 v (x_1, 0) \, dx_1 \tag{4.94}$$

$$b(u^\varepsilon, v) = \int_\Omega \sum_{|\alpha|=2} \partial_\alpha u^\varepsilon \partial_\alpha v dx \tag{4.95}$$

de la même manière du l'exemple précédent en effectue le transformé de Fourier par rapport à x_1 on obtient

$$\hat{P}(\varepsilon) : \begin{cases} \text{trouver } \hat{u}^\varepsilon \in \hat{V} \\ \hat{a}(\hat{u}^\varepsilon, \hat{v}) + \varepsilon^2 \hat{b}(\hat{u}^\varepsilon, \hat{v}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{v}(\zeta, 1) \, d\zeta \ \forall \hat{v} \in \hat{V} \end{cases} \tag{4.96}$$

tels que

$$\hat{V} = \begin{cases} \hat{v} \in L^2(\Omega) \, / \left(\zeta^2 \hat{v}, \zeta \partial_2 \hat{v}, \partial_2^2 \hat{v} \right) \in \left(L^2(\Omega) \right)^3 \\ \left(\partial_2^2 - \zeta^2 \right) \hat{v} = 0 \text{ et } \hat{v}(\zeta, 0) = 0 \end{cases} \tag{4.97}$$

$$\hat{a}(\hat{u}^\varepsilon, \hat{v}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_2 \hat{u}^\varepsilon (\zeta, 0) \, \overline{\partial_2 \hat{v}(\zeta, 0)} d\zeta \tag{4.98}$$

$$\hat{b}(\hat{u}^\varepsilon, \hat{v}) = \int_\Omega \left(\zeta^4 \hat{u}^\varepsilon \overline{\hat{v}} + \partial_2^2 \hat{u}^\varepsilon \overline{\partial_2^2 \hat{v}} + 2\zeta^2 \partial_2 \hat{u}^\varepsilon \overline{\partial_2 \hat{v}} \right) dx_2 d\zeta \tag{4.99}$$

On remarque que l'espace V (resp :$\hat{\text{V}}$) peut s'identifier à un espace d'une seule variable grâce à les conditions $\triangle v = 0$ et $v_{/\Gamma_0} = 0$ (resp: $\left(\partial_2^2 - \zeta^2 \right) \hat{v} = 0$, et $\hat{v}(\zeta, 0) = 0$) il est en résulte que

$$\hat{v}(\zeta, x_2) = \partial_2 \hat{v}(\zeta, 0) \left[\zeta^{-1} sh(\zeta x_2) \right] \tag{4.100}$$

$$\left[1+\varepsilon^2\phi^2(\zeta)\right]\partial_2\hat{u}^\varepsilon(\zeta,0)=\zeta^{-1}sh(\zeta) \tag{4.101}$$

avec $\phi(\zeta)=(\zeta sh(2\zeta))^{\frac{1}{2}}$.
En utilisant les conditions aux limites on obtient

$$\hat{u}^\varepsilon(\zeta,x_2)=\left[1+\varepsilon^2\phi^2(\zeta)\right]^{-1}\left[\zeta^{-1}sh(\zeta x_2)\right]\left[\zeta^{-1}sh(\zeta)\right] \tag{4.102}$$

$$\rightarrow \hat{u}^\varepsilon(\zeta,1)=\left[1+\varepsilon^2\phi^2(\zeta)\right]^{-1}\left[\zeta^{-1}sh(\zeta)\right]^2 \tag{4.103}$$

d'après le théorème 4.1.1 $\hat{u}^\varepsilon(\zeta,x_2)\rightarrow\left[\zeta^{-1}sh(\zeta)\right]\left[\zeta^{-1}sh(\zeta x_2)\right]$ dans $Z\prime$
$\hat{u}^\varepsilon(\zeta,1)\rightarrow\left[\zeta^{-1}sh(\zeta)\right]^2$dans $Z\prime$.
Donc on a $\hat{u}^0(\zeta,1)=\left[\zeta^{-1}sh(\zeta)\right]^2\rightarrow u^0(x_1,1)=F^{-1}\left[\zeta^{-1}sh(\zeta)\right]^2$
il est connu que $sh(\zeta)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\zeta^{2k+1}}{2k+1}\rightarrow\zeta^{-1}sh(\zeta)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\zeta^{2k}}{2k+1}$, et que

$$F^{-1}(\zeta^m)=i^m\delta^{(m)}(x_1)$$

$$\rightarrow u^0(x_1,1)=\sum_{m=0}^{\infty}C_m\delta^{(2m)}(x_1) \tag{4.104}$$

tels que $\mathrm{C}_m=(-1)^m\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{(2k+1)(2k)\times\ldots\times2\times1\times(2(m-k)+1)(2(m-k))\times\ldots\times2}$
$u^0(x_1,1)$ ne peut être une distribution parceque les distributions sont localement d'ordre fini (i.e) sont localement égales à des dérivées (d'ordre fini) des fonctions continues, ce qui ne peut être verifier en "0 "pour $u^0(x_1,1)$.
$u^0(x_1,1)$ représente une suite complexifiante (voir annexe A de ce mémoire)
Revenant à $\hat{u}^\varepsilon$ et u^ε
on a $\hat{u}^\varepsilon(\zeta,1)=\left[1+\varepsilon^2\phi^2(\zeta)\right]^{-1}\left[\zeta^{-1}sh(\zeta)\right]^2$
$\boxed{u^\varepsilon(x,1)=F^{-1}\hat{u}^\varepsilon(\zeta,1)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[1+\varepsilon^2\phi^2(\zeta)\right]^{-1}\left[\zeta^{-1}sh(\zeta)\right]^2\cos(x_1\zeta)\,d\zeta}$
(figures 4.1, 4.2 et 4.3).

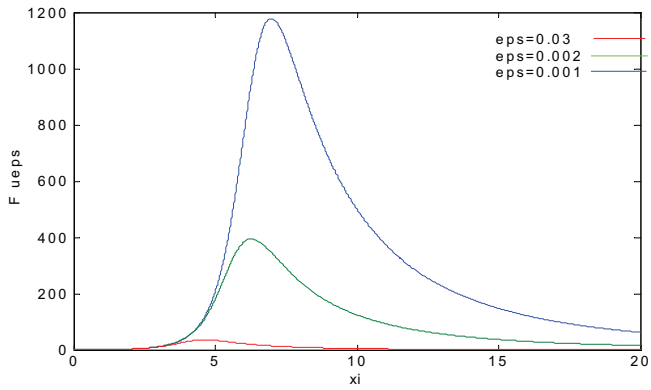

Fig. 4.1 : $\hat{u}^{\varepsilon}(\zeta, 1)$ *pour* $\varepsilon = 0.001$ $\varepsilon = 0.002$ $\varepsilon = 0.03$

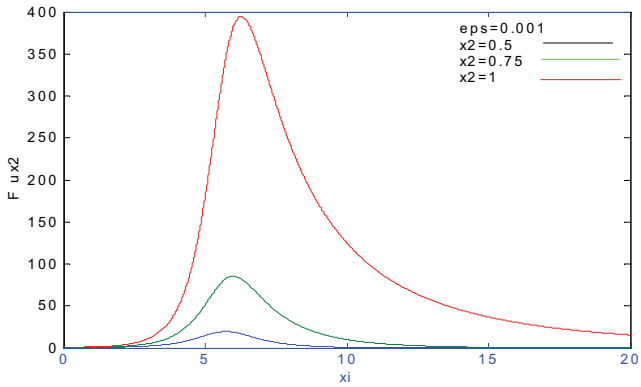

Fig.4.2 : $\hat{u}^{\varepsilon}(\zeta, x_2)$ *pour* $\varepsilon = 0.001,\ x_2 = 0.5,\ x_2 = 0.75$ $x_2 = 1$

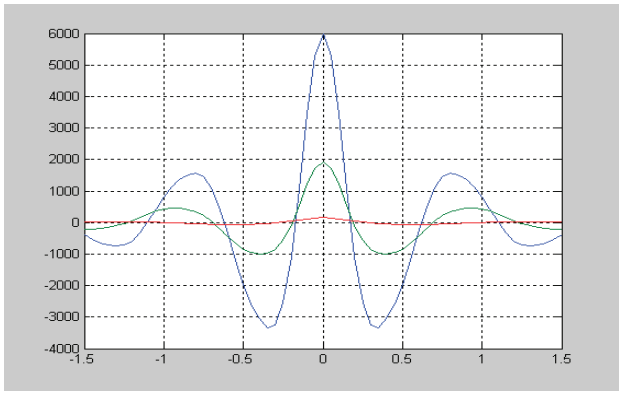

Fig.4.3 : $u^{\varepsilon}(x_1, 1)$ *pour* $\varepsilon = 0.001$, $\varepsilon = 0.002$, $\varepsilon = 0.03$

Conclusion et perspectives

Conclusion et perspectives

Dans ce mémoire, des problèmes de perturbations singulières avec probléme limite mal posé, apparaissant dans la théorie des coques minces ont été étudiés. Nous avons mis en évidence les phénomènes de manque de la régularité qui se manifestent par l'apparition des couches limites et internes. Ce qui rend la simulation numérique difficile. Nous avons établi les phénomènes de propagation et de réflexion des singularités pour les coques paraboliques, nous avons montré qu'on peut avoir des réflexions des singularités pour les coques paraboliques même si on utilise les conditions aux limites admissibles pour les coques minces.

Par ailleurs, nous avons établi à partir d'un modèle simplifié, le phénomène de la sensitivité qui rend la simulation numérique impossible.

L'idée principale de ce mémoire est la recherche d'un problème équivalent à notre problème sachant que le nouveau problème a un problème limite à énergie bornée.

Les extensions prévues de notre travail concernent plusieurs domaines, tel que

→Etude du coques elliptiques avec des chargements quelconques.

→Etude du coques paraboliques avec l'existence des réflexions des singularités.

→Etude du phénomène de sensitivité dans le calcul des coques elliptiques .

Bibliographie

Références bibliographies

[1] **A** . **Tveito and R** . **Winther**. Introduction to Partial Differential Equations Springer 1998.
[2] **Baiochi C and Lovadina C** . A shell classification b y interpolation, Mathematical models and applied Sciences. 2002.
[3] **BERNADOU M** . Méthodes d'éléments finis pour les problèmes de coques minces. Masson 1994 .
[4] **Blouza**. **A** , **Brezzi**. **F and Lovadina** . **C** . A new classification for shell problems, IAN –CNR 1999.
[5] **Blouza**. **A** , **Brezzi**. **F and Lovadina C** . Sur la classification des coques linéairement élastiques.
[6] **BREZIS**. **H**. Analyse fonctionnelle. Masson 1983.
[7] **C A. DE SOUZA**.Techniques de maillage adaptatif pour le calcul des solutions de coques élastiques minces. **Thèse de Doctorat de l' université Paris 6, 2003.**
[8] **CIARLET**. **P G**. Mathematical modeling of linerly elastic shells. Acta Numerica 2001.
[9] **CIARLET**. **P G and LODS**. **V** . Asymptotic analysis for linearly elastic shells. journal of elasticity 1996.
[10] **DUVAUT** . **G**. Mécanique des milieux continus. DUNOD 1998.
[11] **DESTUYNDER Ph** . Modélisation des coques minces élastiques. MASSON 1990.
[12] **D** . **Azé**. Eléments d'analyse convexe et variationnelle. Elipses 1997.
[13] **D** . **CHOI** .Sur la rigidité géométrique des surfaces. Application à la théorie des coques minces .**Thèse de Doctorat de l' université Paris 6**, **1995**.
[14] **E**. **FAOU** . Développements asymptotiques dans les coques minces linéairement élastiques. **Thèse de Doctorde l' université de RENNES 1**, **2000**.
[15] **Francis Hirsh et Gilles Lacombe**. Eléments d'analyse fonctionnelle. DUNOD 1999.
[16] **G**. **Evans**, **J**, **Blakledge and P** . **Yardley**. Analytic Methods for Partial Differential Equations.Springer,1999.
[17] **Gérard**. **P et Alinac**. **S** . Les opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Mozart-Nash.
[18] **J. L**. **LIONS et E**. **MAGENES**. Problèmes aux limites non homogènes et applications. vol I.Dunod,1968.
[19] **J. L**. **LIONS**. Perturbations singulières dans les problèmes aux limites et en contrôle optimal. Springer, 1973.

[20] **J**. **J**. **Telega and T Lewinski**. Plates, Laminates and shells. World scientific 2000.
[21] **KARAMIAN P.** Coques élastiques minces inhibées. Calcul de problème limite par éléments finis et non réflexion des singularités. **Thèse de doctorat de l' université de Caen 1999**.
[22] **Lars Hormander**. The Analysis of linear Partial Differential Operators I, Springer 1990.
[23] **Lars Hormander**. The Analysis of linear Partial Differential Operators II, Springer 1990.
[24] **LODS**. **V and MARDARE** . **C** . Asymptotic justification of the Kirchhoff-love assumptions for a linearly clamped shell, journal of elasticity 2000.
[25] **Pitkaranta J**, **Matache AM and Schwab C** . Fourier mode analysisof layers in shallow shell deformation. Research report 98-18, seminar für Angewandte Mathematiik.1998.
[26] **R** . **MELROSE**. Introduction to microlocal analysis, Massachussets, 2003
[27] **Sanchez- Hubert**, **Sanchez- Palencia and P** . **Karamian**. Propagation of singularities and stucture of layers in shells Hyperbolic cas,Computers and structures 2002.
[28] **Sanchez- Hubert**, **Sanchez- Palencia and P** . **Karamian**. Pseudo-reflection phenomena for singularities in thin elastic shells. Math. Meth. Appl .Sci 2003.
[29] **Sanchez- Hubert**, **Sanchez- Palencia and P** . **Karamian**. Non-smoothness in the asymptotics of thin shells and propagation of singularities. Hyperbolic case. Appl. Math.Comput Sci 2002.
[30] **Sanchez- Hubert et Sanchez- Palencia E**. Coques élastiques minces . MASSON 1997
[31] **Sanchez- Hubert et Sanchez- Palencia E**. Singular perturbations with non-smooth limit and finit element approximation of layers for model problems of shells.
[32] **Sanchez- Hubert et Sanchez- Palencia**.**E** Introduction aux méthodes asymptotiques et à l'homogénéisation. MASSON 1992.
[33] **Sanchez- Hubert et Sanchez- Palencia**. Pathological phenomena in computation of thin elastic shells CSME. Vol 22.1998.
[34] **Sanchez- Palencia**.**E and D** . **CAILLERIE**. A new kind of singular stiff problems and application to thin elastic shells.Mathematical models and methods in applied Sciences.1995.
[35] **Sanchez- Palencia**. **E et J**. **L**. **LIONS**. Problèmes sensitifs et coques élastiques minces.
[36] **Sanchez- Palencia**. **E et J**. **L**. **LIONS**. Problèmes aux limites sensitifs C.R.A.S.série I . 1994

[37] **Sanchez- Palencia E**.On internal and boundary layers with unbounded energy in shell theory, elliptic case. Asymptotic analysis (2003)169-185.
[38] **Sanchez- Palencia**. **E** .Singular perturbation going out of the energie space, european Conference Elliptic and parabolic problems Rolduc and Gaeta 2001.
[39] **Sanchez- Palencia**. **E** .Complexification phenomenomena iin certain singular perturbations Simplicity, rigor and relevance in fluid mechanics spain 2004.
[40] **Sanchez- Palencia**. **E** .On the structure of layers for singulary perturbed equations in the case of unbounded energiy. ESAIM Vol.8 , 2002.
[41] **Sanchez- Palencia E** ..Passage à l a limite de l'élasticité tridimensionnelle à la théorie asymptotique des coques minces. C.R.A.S. Paris série II .1990.
[42] **Sanchez- Palencia E**. On a kind of singular perturbations for transmission problems 2003 Klover Academic Publishs .
[43] **Sheng Zheng**. A linear shell theory based on variationnel of principle.
The Pennsylvania state university thesis 2001.
[44] **Taylor M**. **E**. Pseudo differential operators. Princeton University press 1981.

Annexes

Appendix A
COMMENTAIRE SUR LES SUITES COMPLEXIFIANTES

Note : Cette annexe est inspirée de l'article: complexification phenomena in certain singular perturbtions. Sanchez-P et C.A. De Souza [39].

Il existe plusieurs définitions équivalentes de la transformation de Fourier, parmi ces définitions on utilise souvent les définitions de le transformé de Fourier et son inverse suivantes :

$\hat{f}(\zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ix\zeta} dx \qquad et \qquad f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\zeta) e^{+ix\zeta} d\zeta$

Cette définition admet les propriétés classiques

$$\begin{aligned}
\widehat{f^{(p)}(x)} &= (i\zeta)^p \hat{f}(\zeta) \\
\hat{f}^{(p)}(\zeta) &= (-ix)^p f(x) \\
\widehat{f^{(p)}(\tfrac{x}{\mu})}(\zeta) &= \mu \hat{f}(\mu\zeta) \\
\widehat{f(x-\mu)}(\zeta) &= e^{-i\mu\zeta} \hat{f}(\zeta) \\
\widehat{e^{i\mu\zeta} f(x)}(\zeta) &= \hat{f}(\zeta - \mu)
\end{aligned}$$

On note qu'on peut définir le transformé de Fourier généralisé (i.e) pour les distributions et les fonctions généralisées, et on a par exemple

$$\begin{aligned}
\widehat{\delta(x)}(\zeta) &= 1_\zeta \\
\widehat{(2\pi)^{-1} 1_x}(\zeta) &= \delta(\zeta).
\end{aligned}$$

telles que que les fonctions 1_x et 1_ζ désignent les fonctions égalent à 1 pour les variables x et ζ respectivement.

Dans cette annexe on présente des commentaires concernant, la complexification, les distributions et les fonctions analytiques .

I- Commentaires sur les distributions et les fonctions analytiques

Considérons des fonctions (ou distributions, ou fonctions généralisées) de la variable x sur R, notre objectif est l'étude des singularités aux voisinage de 0.

Il existe plusieurs exemples des singularités, on peut citer par exemple, les distributions classiques

$$\delta(x), \delta'(x), \delta''(x) .... \tag{A.1}$$

qui appartiennent aux espaces de Sobolev H^{-s} pour s $>\frac{1}{2}, > \frac{3}{2}, > \frac{5}{2}$...

$$H^{-s} \subset H^{-r} pour\ s < r \tag{A.2}$$

Définition A.1.1: On dit qu'une fonction (distribution) f est plus singulière que g si $f$appartient à un espace H^{-s} (pour certain s) qui ne contient pas g.

Remarque A.1.1: Les distributions sont localement d'ordre finis c'est-à-dire sont des dérivés (d'ordre fini) des fonctions continues dans des intervalles finis par exemple $\delta\,(x)$ est la dérivée seconde de la fonction $y(x) = \frac{1}{2}(x + |x|)$

De ce qui précède, l'expression

$$u(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \delta^{(k)}(x) \tag{A.3}$$

tels que c_k ne sont pas nuls à partire d'un certain rang, ne peut être une distribution puisque elle ne peut être une dérivée (d'ordre m) d'une fonction continue en "0". Par contre l'expression

$$v(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \delta^{(k)}(x - k) \tag{A.4}$$

est une distribution , puisque elle est d'ordre fini dans des intervalles finis.

On cite maintenant une autre méthode pour construire des singularités à l'aide de la transformation de Fourier. Il est bien connu que la décroissance rapide de $\hat{f}(\zeta)$ mesure la régularité de $f(x)$. Dans le même sens, la croissance de $\hat{f}(\zeta)$ à l'infini mesure le caractère singulier de $f(x)$.

Exemple A.1.1 la transformation de Fourier de $(A.1)$ s'écrit sous la forme

$$1_\zeta, i\zeta, (i\zeta)^2, ... \tag{A.5}$$

Il convient de noter que la transformation de Fourier formelle de $(A.3)$ est

$$\hat{u}(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k (i\zeta)^k \tag{A.6}$$

elle définit une distribution, si les coefficients $c_k \to 0$ lorsque $k \to \infty$

Exemple A.1.2**:** La fonction $cosh(\zeta)$

Il est connu qu'on peut représenter la fonction $cosh$ par la série

$$cosh(\zeta) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k) \times (2k-1) \times ... \times 1} \zeta^{2k} \tag{A.7}$$

On obtient formellement sa transformation de Fourier

$$u(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k) \times (2k-1) \times ... \times 1} (i)^{2k} \delta^{(2k)}(x) \tag{A.8}$$

d'après ce qui précède (A.8) ne peut être une distribution, l'expression (A.8) représente un nouveau type des fonction qui s'appel les entités, qui sont plus générales que les distributions. On peut définir les entités comme des inverses des distributions par la transformation de Fourier et on désigne par $Z(R)$ l'espace des entités. les éléments de $Z\prime$ sont des fonctionnelles analytiques (i.e) les formes linéaires et continues sur Z. l'espace des fonctions test des distribution sur R est $D\prime(R)$ ou bien l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact, on remarque que si $\hat{\theta} \in D(R)$. Alors $\hat{\theta}(\zeta)$ ne peut être une fonction analytique, puisque si elle est analytique elle doit être égale à la fonction nulle. Mais on peut vérifier facilement que $\hat{\theta}^{-1}$ est une fonction $\theta(x)$ analytique donc $F^{-1}(D(R_\zeta)) = Z(R_x)$.

Par dualité (l'inverse) de la transformation de Fourier de $D\prime(R)$ constitue $Z'(R)$.

Donc les expressions comme $u(x)$ dans (A.8) sont des fonctionnelles sur Z (i.e) sont des éléments de Z'. D'autre part $u(x)$ dans (A.8) ne peut être une distribution puisque u ne peut actionner sur aucune fonction test de $D(R)$

En effet, il existe des fonctions telles que les dérivations d'ordre k en" 0" rendent la somme

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k) \times (2k-1) \times ... \times 1} (i)^{2k} \theta^{(2k)}(0) \tag{A.9}$$

divergente. Par conséquence $u(x)$ dans (A.8) ne peut actionner que sur des fonctions tests analytiques ont des des dérivations en "0" et converge rapidement pour $k \to +\infty$

De ce qui précède les exressions définis comme en (A.8) peuvent définir des fonctionnelles analytiques (des formes linéaires continues sur Z) qui généralisent les distributions.

A.1.2: Suites des fonctions convergent vers une distribution .

Par la suite, on considère des approximations du fonctions généralisées, on utilisant la technique de troncature .

Etant donné $f(x)$ et sa transformation de Fourier $\hat{f}(\zeta)$. On construit

$$\hat{f}_\lambda(\zeta) = \left\{ \begin{array}{ll} \hat{f}(\zeta) & \text{pour } |\zeta| < \lambda \\ 0 & \text{pour } |\zeta| < \lambda \end{array} \right\} \tag{A.10}$$

Et soit $f_\lambda(x) = F^{-1}\hat{f}_\lambda(\zeta)$, evidament $\hat{f}_\lambda$ converge vers f dans $D\prime$ alors

$$f(x) \ \rightarrow f_\lambda(x) \text{ dans } Z\prime \tag{A.11}$$

On considère maintenant $f\ (x) = \delta\,(x)$ la masse de Dirac, alors $\hat{f}\,(\zeta) = 1$ et

$$f_\lambda(x) \ = \frac{\sin(\lambda x)}{\pi x} \tag{A.12}$$

on peut approximer f par des fonctions analytiques f_λ Mais on remarque aussi que les f_λ ont la même physionomie lorsque $\lambda \rightarrow \infty$ tend vers l'infini.

Comme un autre exemple on considère $f(x) = \delta''(x)$

On a donc,

$$f_\lambda(x) = \lambda^3 F(\lambda x) \tag{A.13}$$

$$F(y) = \frac{-1}{\pi}\left[\frac{\sin y}{y} + 2\frac{\cos y}{y^2} - 2\frac{\sin y}{y^3}\right] \tag{A.14}$$

on remarque que (A.14) est holmorphique et que les fonctions sont les mêmes à un facteur et à une dilatation de la variable x (i.e) ont la même physionomie.

On combine entre les deux exemples précédentes, on obtient

$$\delta' + \delta'' = \lim\left[\frac{1}{\pi}\frac{\sin \lambda x}{x} + \lambda^3 F(\lambda x)\right] \tag{A.15}$$

telle que F est donnée dans (A.14). Les fonctions $f^{\ \lambda}$ n'avons pas la même physionomie, mais pour λ assez grand le terme dominant $\lambda^3 F(\lambda x)$ a la même physionomie, autrement dit lorsqu'on mixte les deux singularités l'approximation par troncation est une suite des fonctions avec physiognmie adaptée au terme le plus singulier.

A.1.3 :Exemples des fonctions convergent vers une fonctionnelle analytique. On considère la transformation de Fourier suivante

$$\hat{f}\,(\zeta) = \cosh\,(\zeta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\zeta^{2n}}{(2n) \times (2n-1) \times .... \times 1} \tag{A.16}$$

$$\rightarrow f\,(x) = \delta\,(x) - \frac{\delta''(x)}{4} + \frac{\delta^{(4)(x)}}{8 \times 7 \times ... \times 1} - ..... \tag{A.17}$$

et les fonctions d'approximation sont

$$f_\lambda(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda} \cosh(\zeta)\cos(\zeta x)d\zeta \tag{A.18}$$

$$= \frac{1}{2\pi(x^2+1)}\left\{e^{\lambda}\left[\cos(\lambda x) + x\sin(\lambda x)\right] - e^{-\lambda}\left[\cos(\lambda x) - x\sin(\lambda x)\right]\right\}.$$

Donc pour $\lambda \to +\infty$ $f_\lambda(x) \simeq \frac{1}{2\pi(x^2+1)}e^{\lambda}\left[\cos(\lambda x) + x\sin(\lambda x)\right]$. On remarque que les deux termes $\frac{1}{x^2+1}\cos(\lambda x)$ *et* $\frac{x\sin(\lambda x)}{x^2+1}$ ont une physiognomie non constante et la même chose pour $\psi_\lambda(x) = \frac{1}{2\pi(x^2+1)}\left[\cos(\lambda x) + x\sin(\lambda x)\right]$.

De plus on dit que $\psi_\lambda(x)$ est une suite complixifiante dans le sens, le nombre "significatif" de maximum et minimum tend vers l'infini lorsque $\lambda \to \infty$.("significatif" sa veut dire que les maximums et les minimums sont (en module) d'ordre 10^{-2}.) par conséquence $f_\lambda(x)$ est aussi une suite complexifiante (figure A.1 page 114).

A.2 Commentaire

La notion d'une suite de fonctions avec une physiognomie constante ou non a été définit dans la deuxième section (les fonctions sont les memes à un facteur et à une dilatation de la variable x). Mais on a pas définit parfaitement la notion d'une suite complexifiante. De ce qui précède, on peut dire, qu'elle représente une sous classe des suite avec une une physiognomie non constante.mais il est claire que cette définition est trés ambiguë.Dans le cas des fonctions oscillantes on peut adapter une définition basée sur le nombre des muximums et minimums significatifs, mais aussi cette définition ne peut être applicable pour touts les cas .

Remarque A.2.1: On peut obtenir des résultas analogues à ceux obtenaient par la tchechnique de troncature. En effet, on définit $\hat{f}_\lambda(\zeta)$. pour $\zeta > \lambda$ comme une fonction de la forme $c\zeta^{-q}$ $(q > 0)$ et égale pour $\zeta = \lambda$ à $\hat{f}(\lambda)$ et par analogie pour $\zeta < -\lambda$. Mais cette moification s'élever à ajouter une suite de physiognomie constante, don le caractère, physiognomie non constante de la suite $\hat{f}_\lambda$ est préservé.

En effet, la modification par troncature pour $\zeta > \lambda$(et par analogie pour $\zeta < -\lambda$.) revenir à ajouter à la suite d'approximation $\hat{f}_\lambda$ la suite $\hat{f}_\lambda(\lambda)\hat{\psi}_\lambda(\zeta)$

tele que

$$\hat{\psi}_\lambda(\zeta) = \left\{\begin{array}{ll} 0\square & \text{pour}\square\zeta\square < \lambda \\ \left(\frac{\zeta}{\lambda}\right)^{-q} & \text{pour}\square\zeta\square > \lambda \end{array}\right\} \tag{A.19}$$

Mais

$$\hat{\psi}_\lambda(\zeta) = \hat{\psi}_1\left(\frac{\zeta}{\lambda}\right) \tag{A.20}$$

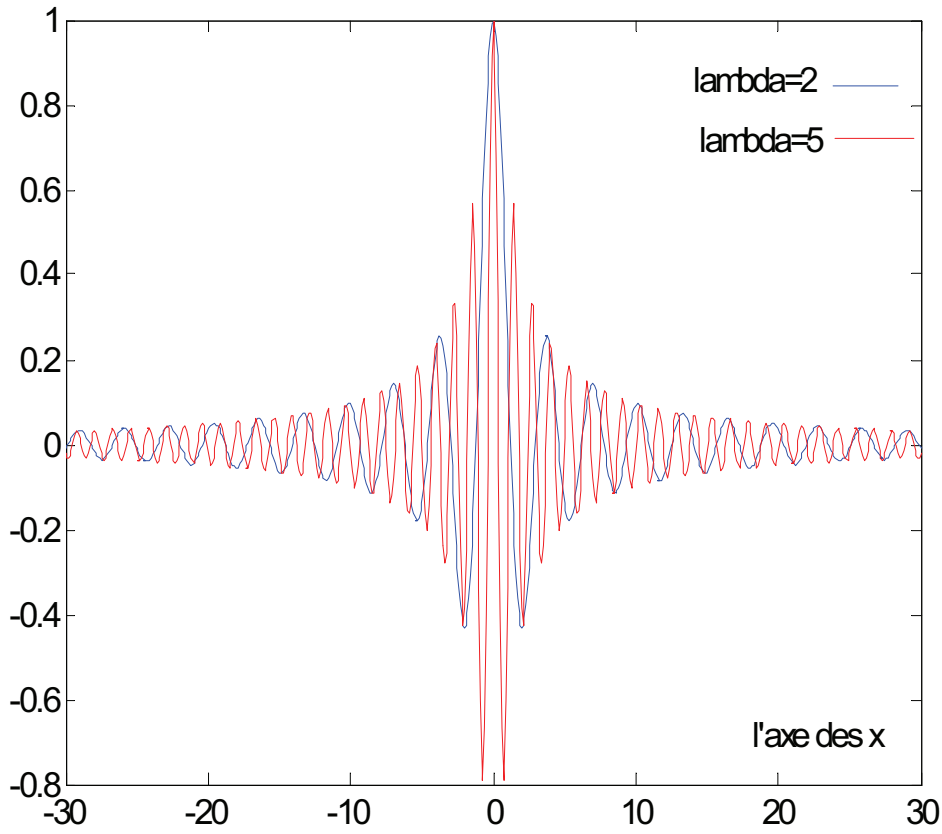

Figure 1 Exemple de la suite ψ_λ avec physionomie non constante pour $\lambda = 5$, $\lambda = 2$

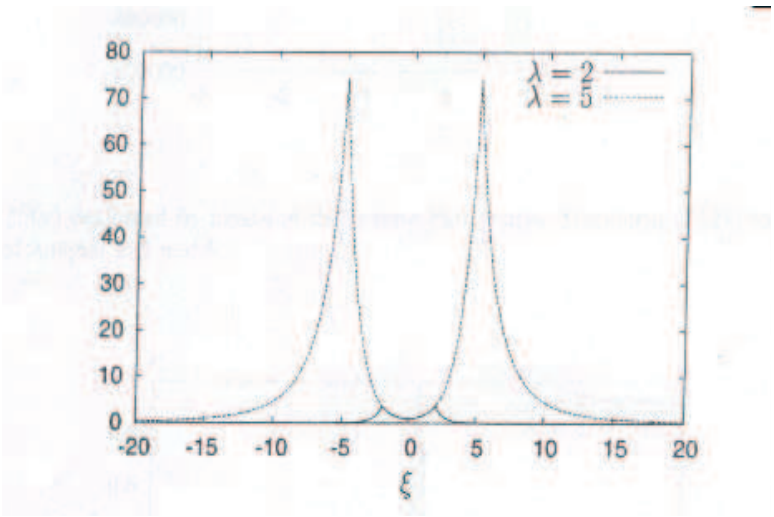

Figure 2 Fig.A.2: Fonction d'approximation $f^{\lambda}(\zeta)$ *pour* $q = 4$

Soit $\psi_{\lambda}(x) = F^{-1}(\hat{\psi}_{\lambda}(\zeta))$ en utilisant la dilatation de la variable ζ , la modification revenir à ajouter à la suite d'approximation $\hat{f}_{\lambda}$ la suite de physiognomie constante

$$\hat{f}_{\lambda}(\lambda)\,\psi_1(\zeta) \tag{A.21}$$

Exemple A.2.1 on considère $\hat{f}(\zeta) = \cosh(\zeta)$. On prend

$$\hat{f}_{\lambda}(\zeta) = \begin{cases} \cosh(\zeta) & \text{pour} \quad |\zeta| < \lambda \\ \cosh(\lambda)\left(\frac{\zeta}{\lambda}\right)^{-q} & \text{pour} \quad |\zeta| > \lambda \end{cases} \tag{A.22}$$

la figure $(A.2)$ représente les graphes de $\hat{f}_{\lambda}(\zeta)$ pour $q = 4$ et $\lambda = 2$ et $\lambda = 5$

Appendix B
PROGRAMMES EN MATLAB POUR TRACER LES GRAPHES DE $\hat{U}^\varepsilon$ ET U^ε

On note qu' un programme simulaire en FORTRON 90 se trouve à l'addresse
http://momonga.t.u-tokyo.ac.jp/~ooura/fft.html.

1) Programme en MATLAB pour tracer les graphes $\hat{u}^\varepsilon(\zeta, 1)$

```
eps=[0.00 0.001 0.002 0.01];
xi=(0.01:0.01:20)';
x2=[0.5 0.75 1]
% for j=1:2
for i=1:4
for d=1:length(xi)
ueps(i,d)=(1+eps(i)^2*xi(d)*sinh(2*xi(d)))^-1*(xi(d))^-1*sinh(x2(3)*xi(d))
*(xi(d))^-1*sinh(xi(d));
% end
        end
            end
for l=1:3
for d=1:length(xi)
ux2(l,d)=(1+eps(2)^2*xi(d)*sinh(2*xi(d)))^-1*(xi(d))^-1*sinh(x2(l)*xi(d))
*(xi(d))^-1*sinh(xi(d));
% end

         end
                end
ueps=ueps';
figure,plot(xi,ueps)
xlable('xi')
grid.
```

2) **Programme (intégration numérique de** $u^\varepsilon(x_1, 1)$)

```
clear all
clc
close all
```

```
eps=[0.001 0.002 0.01];
xi=(0.01:0.01:20)';
x2=[0.5 0.75 1];
x1=(-1.5:0.05:1.5)';
% for j=1:2
for i=1:length(eps)
for q=1:length(x1)
int=0;
somme1=(1+eps(i)^2*xi(1)*sinh(2*xi(1)))^(-1)*(xi(1))^(-2)*sinh(xi(1))^(2)
*cos(x1(q)*xi(1)) ;
for d=2:length(xi)
ueps(i,d)=(1+eps(i)^2*xi(d)*sinh(2*xi(d)))^(-1)*(xi(d))^(-1)*sinh(x2(3)*xi(d))
*(xi(d))^(-1)*sinh(xi(d));
somme2=(1+eps(i)^2*xi(d)*sinh(2*xi(d)))^(-1)*(xi(d))^(-2)*sinh(xi(d))^(2)
*cos(x1(q)*xi(d)) ;
int=int+(somme1+somme2)/2*(xi(d)-xi(d-1));
somme1=somme2;
% end
end
uepsnew(i,q)=int;
end
        end
pause
for l=1:length(x2)
for d=1:length(xi)
ux2(l,d)=(1+eps(2)^2*xi(d)*sinh(2*xi(d)))^-1*(xi(d))^-1*sinh(x2(l)*xi(d))*
(xi(d))^-1*sinh(xi(d));
% end
end
end
ueps=ueps';
ux2=ux2';
figure, plot(xi, ueps)
ylabel('F ueps')
xlabel('xi')
grid
figure, plot(xi, ux2)
ylabel('F ux2')
xlabel('xi')
grid
figure, plot(x1,uepsnew'),grid
```

ملخص المد كرة

في هده المد كرة تطرقنا إلى دراسة أحد أنواع المسائل المتعلقة بوسيط حقيقي موجب والتي تظهر في تطبيقات نظرية الصفائح المنحنية المرنة و التي تكون قابلة للحل في فضاء الانتقالات المقبولةV من اجل $\varepsilon>0$ ولكنها من اجل $\varepsilon = 0$ لا تقبل حلا في V.كما تطرقنا في هدا العمل إلى دراسة بعض الظواهر مثل وجود الطبقات الحدية وعدم صقالة الحل بل الإضافة إلى المسائل الحساسة للمعطيات ودلك من خلال نماذج مختلفة بالنسبة للطبقات الحدية قمنا بتحديد سمكها ومكان تواجدها ودلك بالنسبة لمسائل نموذجية كما تطرقنا أيضا إلى دراسة ظاهرة انتشار النقط الشاذة.

وفي الفقرة الأخيرة من هدا البحث تطرقنا الى دراسة المسائل الحساسة للمعطيات من خلال مسائل رياضية نموذجية بحتة.

كلمات مفتاحيه:

الصفائح المنحنية المرنة الاضطرابات الشاذة التحليل الفرعي الطبقات الحدية

Abstract:

In this dissertation, we have studied a kind of singular perturbation problems depending on small parameter, which are classical for $\varepsilon >0$ but ill-posed for $\varepsilon = 0$, the motivation comes from the thin elastic shell theory.

We have interesting on the boundary layers, the propagation of singularities and the sensitivity phenomena. For the internal layers, we have described there structures for an elliptic and parabolic model problem, we also studied the propagation and the reflexion of singularities, In the last chapter we proposed tow examples of sensitive singular problems.

Key words : thin elastic shell, singular perturbation, asymptotic analysis, boundary and inernal layers.

Résumé:

Dans ce mémoire, des problèmes de perturbations singulières dépendent d'un petit paramètre $\varepsilon >0$, apparaissant dans la théorie des coques minces ont été étudiés. Ces problèmes sont bien posés dans l'espace des déplacements admissibles pour $\varepsilon >0$ mais pour $\varepsilon =0$ sont mal posés. Nous avons mis en évidence les phénomènes de manque de la régularité qui se manifestent par l'apparition des couches limites et internes, ce qui rend la simulation numérique difficile Nous avons établi les phénomènes de propagation et de réflexion des singularités pour les coques paraboliques, nous avons montré que qu'on peut avoir des réflexions des singularités pour les coques paraboliques .
Par ailleurs, nous avons établi à partir d'un modèle simplifiée le phénomène de la sensitivité qui rend la simulation numérique impossible.

Mots-clés :coques élastiques minces, perturbation singulière, analyse asymptotique, couches limites et internes.

ملخص المد كرة

في هده المد كرة تطرقنا إلى دراسة أحد أنواع المسائل المتعلقة بوسيط حقيقي موجب والتي تظهر في تطبيقات نظرية الصفائح المنحنية المرنة و التي تكون قابلة للحل في فضاء الانتقالات المقبولةV من اجل $\varepsilon>0$ ولكنها من اجل $\varepsilon = 0$ لا تقبل حلا في V.كما تطرقنا في هدا العمل إلى دراسة بعض الظواهر مثل وجود الطبقات الحدية وعدم صقالة الحل بل الإضافة إلى المسائل الحساسة للمعطيات ودلك من خلال نماذج مختلفة بالنسبة للطبقات الحدية قمنا بتحديد سمكها ومكان تواجدها ودلك بالنسبة لمسائل نموذجية كما تطرقنا أيضا إلى دراسة ظاهرة انتشار النقط الشاذة.

وفي الفقرة الأخيرة من هدا البحث تطرقنا الى دراسة المسائل الحساسة للمعطيات من خلال مسائل رياضية نموذجية بحتة.

كلمات مفتاحيه:

الصفائح المنحنية المرنة الاضطرابات الشاذة التحليل الفرعي الطبقات الحدية

Abstract:

In this dissertation, we have studied a kind of singular perturbation problems depending on small parameter, which are classical for $\varepsilon >0$ but ill-posed for $\varepsilon = 0$, the motivation comes from the thin elastic shell theory.

We have interesting on the boundary layers, the propagation of singularities and the sensitivity phenomena. For the internal layers, we have described there structures for an elliptic and parabolic model problem, we also studied the propagation and the reflexion of singularities, In the last chapter we proposed tow examples of sensitive singular problems.

Key words : thin elastic shell, singular perturbation, asymptotic analysis, boundary and inernal layers.

Résumé:

Dans ce mémoire, des problèmes de perturbations singulières dépendent d'un petit paramètre $\varepsilon >0$, apparaissant dans la théorie des coques minces ont été étudiés. Ces problèmes sont bien posés dans l'espace des déplacements admissibles pour $\varepsilon >0$ mais pour $\varepsilon =0$ sont mal posés. Nous avons mis en évidence les phénomènes de manque de la régularité qui se manifestent par l'apparition des couches limites et internes, ce qui rend la simulation numérique difficile Nous avons établi les phénomènes de propagation et de réflexion des singularités pour les coques paraboliques, nous avons montré que qu'on peut avoir des réflexions des singularités pour les coques paraboliques .
Par ailleurs, nous avons établi à partir d'un modèle simplifiée le phénomène de la sensitivité qui rend la simulation numérique impossible.

Mots-clés :coques élastiques minces, perturbation singulière, analyse asymptotique, couches limites et internes.