Ministère de l'Enseignement Superieur et de la Recherche Scientifique

****

Centre Universitaire de Ouargla

Vice Rectorat chargé de la Post-Gradyuation et de la Recherche Scientifique

****

Tel/Fax : 029.71.19.31

Ref.: ……... / ……….

MAGISTER

Spécialité : Mathématiques
Option : EDO-EDP

Par : MEZABIA Mohammed Elhadi

Thème

Modélisation du problème de Signorini pour les coques minces

Soutenu publiquement le : 03/07/2011

Devant le jury composé de :

Mr. SETTOU Noureddine	Pr. à l'université de KASDI Merbah - Ouargla	**Président**
Mr. SAID Mohammed Saïd	M. C à l'université de KASDI Merbah - Ouargla	**Examinateur**
Mr. GUERFI Amara	M. C à l'université de KASDI Merbah - Ouargla	**Examinateur**
Mr. CHACHA Djamel Ahmed	Pr. à l'université de KASDI Merbah - Ouargla	**Rapporteur**
Mr. BENSAYAH Abdallah	M. A à l'université de KASDI Merbah - Ouargla	**Invité**

Dédication

A mes parents Fatma et Cheikh, qui sont la graine de mon existence, pour leurs encouragements et leurs sacrifices, à ma femme, mes filles, mes fils, mes frères Mohammed, Ahmed, Noureddine, Aissa ; mes soeurs Khadra, Halima et Zinab en particulier à l'âme de ma soeur défunte (Zohra).

Remerciements

J'exprime ma reconnaissance à monsieur. D.A.chacha qui a assuré la direction de ce travail, et qui m'a fait l'honneur de partager sa passion pour la recherche.

Je n'oublie pas Mr. Abdallah Bensayah qui m'a beaucoup aidé surtout dans le calcul asymptotique, je le remercie très sincèrement pour tout et aussi de m'avoir supporté avec mes questions qui se répétaient.

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements à Mr. N.Settou, Professeur à la faculté des sciences et de la technologie et des sciences de la matière de l'université KASDI MERBAH Ouargla pour m'avoir fait l'honneur d'accepter la présidence du jury.

Je voudrai adresser mes remerciements les plus respectueux à Mr. M. S. SAID maître de conférences à la faculté des sciences et de la technologie et des sciences de la matière de l'université KASDI Merbah Ouargla d'avoir accepter d'être un membre du jury.

Je remercie infiniment Mr. Guerfi Amara maître de conférences à la faculté des sciences et de la technologie et des sciences de la matière de l'université KASDI Merbah Ouargla d'avoir accepter d'être un membre du jury.

J'en profite pour adresser un remerciement particulier à Ghezal Abderrezak pour les conseils et les idées qu'il m'a suggérés, et qui a répondu à chaque fois que je lui ai téléphoné.

Je tiens à remercier aussi tous les professeurs qui m'ont enseigné en particulier Mr. M. Assila.

Mes remerciements vont également à tous mes camarades et à tous ceux qui m'ont aidé ou soutenu au cours de ce travail, en particulier mon fils abdnacer, Mezabia Abdelkader, Sadawi, Edi et le Dr. A. Boukhetta.

Table des matières

Table des figures

Introduction

Dans la plupart des systèmes de la mécanique des structures, il existe des situations dans les quelles un corps déformable entre en contact avec d'autres corps. La problématique du contact est essentiellement de savoir comment les forces sont appliquées sur une structure et comment réagissent ces structures lorsequ'elles subissent ces forces.

ll est évident que le caractère de ce contact peut jouer un rôle fondamental dans le comportement de la structure : sa déformation, son mouvement, la distribution des efforts, etc... . En dépit du rôle fondamental du contact dans les mécanismes des solides et des structures, les efforts de contacts sont rarement pris en considération dans l'analyse des structures.

Le contact unilatéral des corps solides, avec ou sans frottement, est une contrainte mécanique souvent rencontrée en modélistion. Citons par exemple le frottement d'une tôle dans un procédé d'emboutissage, le contact d'un pneu sur la route, le déploiement d'un airbag. le problème de contact uniltéral (dit de Signorini) qui est issu de la mécanique des structures et où les inéquations portent sur la frontière. La condition de contact a été formulée par Signorini [4] en 1959. La formulation variationnnelle associée à ce type de condition a été étudiée mathématiquement par Fichera [19] en 1964. Ensuite, viennent les travaux de G.Duvaut et J.L.Lions [17] qui ont rajouté le frottement aux problèmes de contact et ils ont pu écrire ce problème sous forme d'un problème de minimisation de fonctionnelle quadratique dans le cas d'un frottement de Tresca (i.e.avec un seuil de frottement fixe qui ne dépend pas de la contrainte normale). Dans [17], on peut trouver aussi des résultats d'existence et d'unicité pour le problème dit de Signorini (sans frottement).

L'approximation par la méthode des éléments finis a été discutée par nombreux auteurs. En particulier, on trouvera dans [22] une synthèse concernant le cas d'un solide déformable en contact avec un socle rigide.

Le premier résultat d'existence de solutions pour le problème de Signorini avec frottement a été établi au début des années 80. Nečas, Jaršek et Haslinger [25] ont prouvé un résultat d'existence pour une barre élastique en dimension deux sous la condition d'un coefficient de frottement assez petit. Des résultats plus généraux sont donnés ensuite par *Jarušek* [20] , Kato [27] , Eck et *Jarušek* [15]. Récement, R. Hassani, P.Hild et I.Ionescu [24] ont trouvé des conditions de non unicité des solutions. Dernièrement, Y.Renard [28] a donné un critère d'unicité de solution pour le problème de contact avec frottement. Ce résultat est très important pour la recherche de solutions multiples.

On désigne par structures minces les corps solides dont l'une des dimensions (l'épaisseur) est petite devant les autres. Ce sont les plaques, les coques, les barres, les filaments.... L'intérêt pour une modélisation fine de ces structures est d'autant plus grand que le nombre des applications industrielles va croissant. Une modélisation fine doit prendre en compte la faible épaisseur et en déduire des simplifications au modèle de départ qui est tridimensionnel. De nombreux modèles bidimensionnels ont ainsi été décrits depuis plus d'un siècle. Ces cas ont été proposés par Kirchhoff, Love, Reissner, Von Kármán et Koiter. Suivant quelques hypothèses, ils ont posé des modèles. Parmi ces modèles le modèles de Kirchhoff-Love et Mindlin-Reissner. Dans les trente dernières années, P.G. Ciarlet et Destuynder [29] et ses collaborateurs se sont attachés à donner des justifications mathématiques à ces modèles et à en construire de nouveaux. l'étude d'un problème de contact unilatéral d'une plaque mince contre un obstacle rigide avec frottement de coulomb a été faite par Dhia [21] en utilisant une méthode de pénalisation. En 2002 ;J.C.Paumier [18] réalise une modélisation asymptotique d'un problème de contact unilatéral d'une plaque mince encastrée, de modèle de Kirchhoff-Love, contre un obstacle rigide où il a prouvé que ce problème tridimensionnel avec frottement tend vers un problème bidimensionnel sans frottement. Parmi les questions posées par J.C.Paumier[18] :"is this approach valid for shells and rods". Le même résultat est obtenu formellement par Chacha et Bensayah [14] pour une plaque elastique non linéaire de type von Kàrmàn.

En 2010 ; Léger et Miara [2] et [3] ont étudié pour les coques peu profonde en élasticité linéaire sans frottement par l'utilisation de la méthode de convergence.
Ce présent mémoire présente l'étude variationnelle et asymptotique d'un problème statique de contact unilatéral d'une coque mince élastique contre un obstacle rigide avec les conditions de complémentarité dites les conditions de Signorini et ceci sur la partie condidate au contact. Ce qui reste du bord est divisé en deux parties, une subit une force surfacique, l'autre est encastrée. Chaque fois, on fait l'étude du problème sans frottement puis avec frottement.

On débute notre mémoire par un chapitre qui comporte l'étude variationnelle de ce problème en supposant, en général, un corps élastique. Puis on établit un théorème d'existence et d'unicité dans le cas sans frottement et un théorème d'existence dans le cas avec frottement non local(loi de Tresca) puis local(loi de Coulomb). Et tout ceci dans le cadre de l'élasticité linéaire.

Dans le deuxième chapitre on va garder la même situation que celle du premier chapitre en remplaçant le corps élastique par une coque élastique mince. Ce chapitre est divisé en trois sections. La première section comporte la géométrie des coques minces. Dans la deuxième section, on part du problème classique formulé en coordonnées cartésiennes et puisque les coordonnées curvilignes sont mieux adaptées pour les coques, on reformule le problème variationnel en coordonnées curvilignes et ce ci dans le cas sans frottement. Dans la troisième section on fait la même procédure pour le cas avec frottement de Coulomb.

Dans le troisième chapitre, on garde la position du problème du chapitre précédent tout en proposant l'étude asymptotique des modèles bidimensionnels "membranaire" et "couplé flexion-membrane"pour des coques dans le cadre de l'élasticté linéaire, toujours en distinguant simultanément le cas sans frottement et le cas avec frottement de Coulomb.
Au dernier chapitre on fait l'étude de la convergence.
Enfin une conclusion qui comporte les résultats essentiels et quelques perspectives.

Notations et conventions

On utilise les conventions de notations suivantes : les indices ou exposants latins prennent leurs valeurs dans l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ tandis que les indices grecs prennent, à l'exception de ε , leurs valeurs dans l'ensemble $\{1, 2\}$. La convention des indices répétés (muets) est adoptée.

$u = (u_i)$ vecteur de composantes u_i.

$u.v = u_i v_i$ produit scalaire euclidien.

n normale unitaire extérieure.

$u_N = u.n$ la composante normale du déplacement.

$u = (u_T, u_N)$, u_T la composante tangentielle du déplacement.

$\sigma_N = (\sigma(u)n)n$ la composante de la force de pression appliquée sur une section de normale n.

$\sigma(u)n = (\sigma_T, \sigma_N)$, σ_T la composante tangentielle du vecteur $\sigma(u)n$.

$\partial_i u_j = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ dérivée de u_j par rapport à x_i.

$div\sigma(u) = \partial_j \sigma_{ij}$ divergence du tenseur $\sigma(u)$.

$|u| = \sqrt{u.u}$ norme vectorielle euclidienne.

$A = (A_{ijkl})$: tenseur d'ordre 4 de rigidité.

$D(\Omega)$: l'espace des fonctions tests Ω :domaine (ouvert borné connexe de frontière Lipshitzienne) de $\mathbb{R}^3$.

ω : domaine (ouvert borné connexe de frontière Lipshitzienne)de $\mathbb{R}^2$.

S : la surface moyenne de Ω.

(a_1, a_2, a_3) : (resp. (a^1, a^2, a^3)) base covariante (resp. contravariante) associée à la surface moyenne S.

(g_1, g_2, g_3) : (resp. (g^1, g^2, g^3)) base covariante (resp. contravariante) associée à Ω.

$a_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta}$: composantes covariantes du tenseur métrique et du tenseur de courbure associées à S.

g_{ij} : $(resp. g^{ij})$ composantes covariantes (resp. contravariante)du tenseur métrique associées à Ω.

Chapitre 1

Un exemple de contact unilatéral d'un corps élastique contre un obstacle rigide dans le cadre de l'élasticité linéaire

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$ occupé par un matériau élastique. La frontière de Ω est divisée en trois parties $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2$ (mes $(\Gamma_2) > 0$). Ce matériau entre en contact avec une fondation rigide en Γ_0, subit une force surfacique g sur Γ_1 et une force volumique f sur Ω. On suppose que la partie Γ_2 est encastrée, voir 1.1.

Supposons que le système est en état statique et le contact sur Γ_0 est avec les conditions de Signorini .

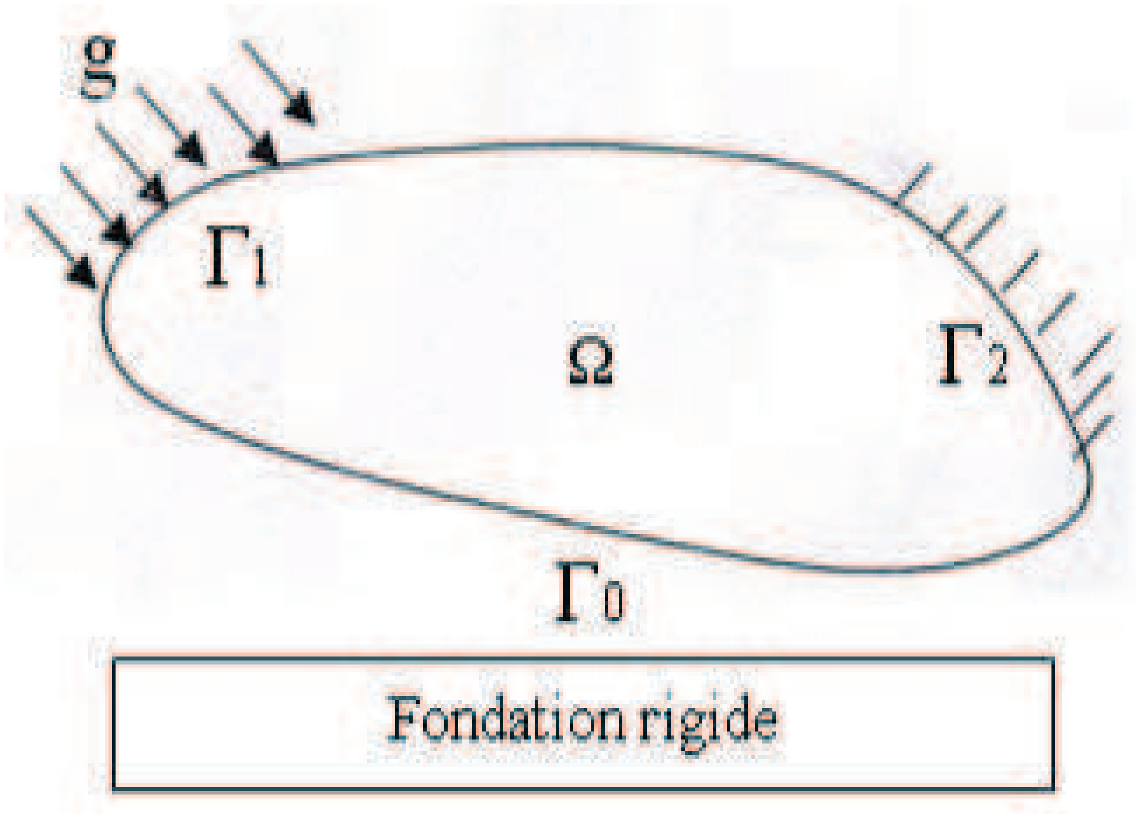

FIGURE 1.1 – Illustration du problème de contact.

Notre objectif est la recherche des déplacements des points de $\overline{\Omega}$.

1.1 Contact sans frottement

1.1.1 Problème classique P.C

Le phénomène précédent est interprété par le problème suivant

$$\text{Trouver} \quad u \quad \text{tel que :}$$

$$-\,div\sigma(u) = f \quad dans \quad \Omega \tag{1.1}$$

$$\sigma(u)n = g \quad sur \quad \Gamma_1 \tag{1.2}$$

$$u = 0 \quad sur \quad \Gamma_2 \tag{1.3}$$

$$u_N \leq d, \sigma_N \leq 0, \sigma_N(u_N - d) = 0, \sigma_\tau = 0 \quad sur \quad \Gamma_0 \tag{1.4}$$

L'équation (1.1) désigne l'équation d'équilibre du système telle que $\sigma(u) = (\sigma_{ij}(u))$ est le tenseur des contraintes et $\sigma_{ij}(u) = a_{ijkl}e_{kl}(u)$ où $e_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i)$ et $e(u) = (e_{ij}(u))$ est le tenseur des déformations linéarisé où $\partial_i u_j = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$. On simplifie l'écriture par $\sigma(u) = Ae(u)$ qui s'appelle la loi de comportement du corps élastique.

On suppose que les coefficients $a_{ijkl} \in L^\infty(\Omega)$ vérifient la propriété de la symétrie et la propriété de l'ellipticité i.e :

$$a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{klij}$$

$$\exists M > 0, a_{ijkl}e_{ij}(u)e_{kl}(u) \geq Me_{ij}(u)e_{ij}(u), \forall e_{ij} = e_{ji}$$

Les équations (1.2) et (1.3) sont les conditions imposées sur les bords respectivement Γ_1 et Γ_2. Les conditions dans (1.4) sont appelées les conditions de Signorini. $u_N = un$ désigne la composante normale du déplacement et n est la normale extérieure.

$u_N \leq d$ (décollement).

$\sigma_N = (\sigma(u)n)n$ la composante normale de la force de pression appliquée sur une section de normale n.

$\sigma_N(u_N - d) = 0$ décollement ou contact.

$\sigma_T = 0$ pas de frottement, pas de cisaillement.

d une fonction d'interstice définie sur Γ_0 et mesurée suivant la direction de la normale et supposée dans $H^{1/2}(\Gamma_0)$.

1.1.2 Problème variationnel P.V

On note $\mathbf{H}^1(\Omega) = (H^1(\Omega))^3, \mathbf{L}^2(\Omega) = (L^2(\Omega))^3$

$$V = \{v \in \mathbf{H}^1(\Omega)/v = 0 \quad sur \quad \Gamma_2\}$$

$K = \{v \in V/v_N \leq d \quad sur \quad \Gamma_0\}$ convexe fermé du sous espace vectoriel V.

Théorème 1.1 *Si u est solution de (P.C) alors u vérifie le problème (P.V) :*

Trouver $u \in K$ tel que :

$$a(u, v) = L(v) + \langle \sigma_N, v_N \rangle, \quad \forall v \in V \tag{1.5}$$

$$\langle \sigma_N, v_N - u_N \rangle \geq 0, \quad \forall v \in K \tag{1.6}$$

où

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_\Omega \sigma(u) : e(v) dx \\ L(v) &= \int_\Omega f v dx + \int_{\Gamma_1} g v d\Gamma \\ \langle \sigma_N, v_N \rangle &= \int_{\Gamma_0} \sigma_N v_N d\Gamma \end{aligned}$$

Preuve. *Formulation faible de (1.1) :*

Soit $v \in K$, (1.1) donne :

$$\int_\Omega -div\sigma(u) v dx = \int_\Omega f v dx \tag{1.7}$$

On a :

$$\int_\Omega div\sigma(u) v dx = \int_{\partial\Omega} \sigma(u) n v d\Gamma - \int_\Omega \sigma(u) : e(v) dx \tag{1.8}$$

avec $\sigma(u) : e(v) = \sigma_{ij}(u) e_{ij}(v)$.

On introduit (1.8) dans (1.7) et on utilise (1.2) et (1.3) on trouve (1.5).

Formulation faible de la condition de contact unilatéral ou de complémentarité :

On a :

$$\begin{aligned}\langle \sigma_N, v_N - u_N \rangle &= \langle \sigma_N, v_N - d + d - u_N \rangle \\ &= \langle \sigma_N, v_N - d \rangle + \langle \sigma_N, d - u_N \rangle \\ &= \langle \sigma_N, v_N - d \rangle \geq 0\end{aligned}$$

d'où (1.6). ■

Théorème 1.2 *On suppose que la solution u est assez régulière, alors u solution de $(P.C)$ si et seulement si u solution de $(P.V)$.*

Preuve. On prend dans (1.5) $v = \varphi$ pour tout $\varphi \in (D(\Omega))^3$ (puisque v reste dans V). On trouve que :

$$a(u, \varphi) = L(\varphi), \quad \forall \varphi \in (D(\Omega))^3 \tag{1.9}$$

d'où, en utilisant la formule de Green dans (1.9), on trouve : $\int_\Omega (-div\sigma(u) - f)\varphi \; dx = 0$. Par conséquent :

$$-\, div\sigma(u) - f = 0 \;\; p.p \;\; sur \;\; \Omega \tag{1.10}$$

d'où (1.1). Pour avoir (1.2), on prend $v = \varphi$ pour tout $\varphi \in (D(\Omega \cup \Gamma_2))^3$ dans (1.5), et en prenant en compte (1.10), on trouve : $\int_{\Gamma_2} (\sigma(u)n - g)\varphi \;\; d\Gamma = 0$ d'où (1.2).

On prend $v = \varphi$ dans (1.5) pour tout $\varphi \in (D(\Omega \cup \Gamma_0))^3$. Avec (1.9) on trouve $\langle \sigma_T, \varphi_T \rangle = 0$ d'où $\sigma_T = 0$ sur Γ_0.

On prend $v = u + \varphi$ dans (1.6) avec $\varphi \in (D(\Omega \cup \Gamma_0))^3$ et $\varphi_N \leq 0$ sur Γ_0, on trouve : $\langle \sigma_N, \varphi_N \rangle \geq 0$ ce qui donne $\sigma_N \leq 0$ sur Γ_0.

En prenant $v_N = d$ puis $v_N = 2v_N - d$ dans (1.6), on obtient $\langle \sigma_N, u_N - d \rangle = 0$ et puisque $\sigma_N(u_N - d) \geq 0$ alors $\sigma_N(u_N - d) = 0$ sur Γ_0 par conséquent (1.4). ■

1.1.3 Existence et unicité :

Théorème 1.3 *Si* $f_i \in L^2(\Omega), g_i \in L^2(\Gamma_1)$ *alors le problème* $(P.V)$ *admet une solution unique dans* V.

Preuve. i)$a(u,v)$ est une forme bilinéaire continue coercive. En effet, $a(u,v)$ est une forme bilinéaire (évident). On a :

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &= \left| \int_\Omega a_{ijkl} e_{kl}(u) e_{ij}(v) dx \right| \\
&\leq c \int_\Omega \mid e_{kl}(u) e_{ij}(v) \mid dx (9 \times 9 \ \ termes) \\
&\leq c \left(\int_\Omega (e_{kl}(u))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega (e_{ij}(v))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

D'autre part on a :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (e_{ij}(u))^2 dx &= \frac{1}{4} \int_\Omega (\partial_i u_j + \partial_j u_i)^2 dx \\
&\leq \frac{1}{2} \int_\Omega \left((\partial_i u_j)^2 + (\partial_j u_i)^2 \right) dx \\
&\leq \|u\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Donc

$$|a(u,v)| \leq 81c \|u\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|v\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$$

D'où la continuité de $a(u,v)$.
En utilisant la condition de l'ellipticité, on trouve :

$$\begin{aligned}
a(u,v) &= \int_\Omega a_{ijkl} e_{kl}(u) e_{ij}(v) dx \\
&\geq M \int_\Omega e_{kl}(u) e_{ij}(v) dx
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Korn i.e : Si Ω est borné de frontière régulière alors , il existe une constante $\gamma > 0$ telle que :

$$\forall u \in \mathbf{H}^1(\Omega), \int_\Omega e_{ij}(u) e_{ij}(u) dx + \int_\Omega u_i u_i dx \geq \gamma \|u\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$$

(démonstration dans [17]. On trouve qu'il existe une constante $k > 0$, telle que $\forall u \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, on a :

$$\int_\Omega |u|^2 dx = \int_\Omega u_i u_i dx \leq k \int_\Omega e_{ij}(u) e_{ij}(u) \quad dx = k \int_\Omega |e(u)|^2 dx.$$

En effet, on procède par l'absurde. Supposons $\{u_n\}$ une suite de $\mathbf{H}^1(\Omega)$ telle que $\|u_n\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = 1$ et $\int_\Omega |e(u_n)|^2 dx < \frac{1}{n}$ pour tout $n > 0$.

De l'inégalité de Korn, on déduit que $\|u_n\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} < k'$. Donc $\{u_n\}$ est une suite bornée dans $\mathbf{H}^1(\Omega)$. D'où $u_n \rightharpoonup u_0$ dans $\mathbf{H}^1(\Omega)$ et puisque l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte, alors $u_n \to u_0$ fortement dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. D'où$\|u_n\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = 1$.
Par ailleurs, nous avons :

$$a(u_n - u_0, u_n - u_0) = a(u_n, u_n) - a(u_0, u_0) - 2a(u_0, u_n - u_0) \geq 0.$$

Il résulte que :

$$\lim_{n\to\infty} \inf a(u_n, u_n) \geq a(u_0, u_0)$$

d'où $\int_\Omega |e(u_0)|^2 dx \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int_\Omega |e(u_n)|^2 dx = 0$, ce qui donne $\int_\Omega |e(u_0)|^2 dx = 0$ et puisque $u_0 = 0$ sur Γ_0, il en résulte que $u_0 = 0$ sur Ω (voir [16]). Ce qui contredit $\|u_0\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = 1$. Par conséquent : $\int_\Omega |e(u)|^2 dx \geq k \int_\Omega |u|^2 dx$, joignée à l'inégalité de Korn donne $\int_\Omega |e(u)|^2 dx \geq k" \|u\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$ tel que $k" = \frac{\gamma}{1+k}$. D'où $a(u,u) \geq Mk" \|u\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$ ce qui montre la coercivité.
ii) $L(v)$ est forme linéaire continue sur V. En effet ; on a :

$$\left| \int_\Omega f v dx \right| \leq \left(\int_\Omega |f|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Gamma_0} |v|^2 dx \right)^{1/2} \leq c \|v\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$$

et

$$\left| \int_{\Gamma_1} g v dx \right| \leq \|g\|_{L^2(\Gamma_1)} \|v\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma_1)}$$

En utilisant l'injection continue de l'application trace de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma_1)$ et l'injection continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ on trouve :

$$\begin{aligned} |L(v)| &\leq c(\|v\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|v\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma_1)}) \\ &\leq c' \|v\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

De (1.5) et (1.6) on a l'inéquation variationnelle : $a(u,v) \geq L(v), \forall v \in K$. De i) et ii) et par le moyen du théorème de Stampacchia (voir [5]), cette inéquation admet une solution unique, de plus, puisque $a(.,.)$ est symétrique, cette solution réalise le minimum de la fonctionnelle $I(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - l(v)$ dans K. ■

1.2 Contact avec frottement

On suppose qu'on exerce une force sur un corps élastique qui entre en contact avec une fondation rigide. On remarque que si la force tangentielle dépasse un certain seuil, ce corps perd sa résistance et entre en glissement. Ce phénomène est interprété par la loi de Tresca.

Donc la loi de Tresca impose sur la zone de contact les conditions suivantes : $|\sigma_T| \leq S$, S est le seuil de frottement.

$|\sigma_T| < S \longrightarrow u_T = 0$

$|\sigma_T| = S \longrightarrow \exists \delta > 0, u_T = -\delta\sigma_T$

De plus l'expérience montre que le seuil S est proportionnel à la composante normale de la force exercée sur la zone de contact, i.e, il existe $\nu > 0$ tel que $S = \nu|\sigma_N|, \nu$ s'appelle le coefficient de frottement qui dépend de la matière élastique et la fondation rigide. D'où la loi de Coulomb qui s'interprète par les conditions :

$|\sigma_T| \leq \nu|\sigma_N|$

$|\sigma_T| < \nu|\sigma_N| \longrightarrow u_T = 0$

$|\sigma_T| = \nu|\sigma_N| \longrightarrow \exists \delta > 0, u_T = -\delta\sigma_T.$

Dans ce chapitre, on va étudier ces deux lois.

1.2.1 Le cas de la loi de Tresca

Problème classique (P.C)

$$\text{Trouver} \quad u \quad \text{tel que}$$

$$-div\sigma(u) = f \quad dans \quad \Omega \tag{1.11}$$

$$\sigma(u)n = g \quad sur \quad \Gamma_1 \tag{1.12}$$

$$u = 0 \quad sur \quad \Gamma_2 \tag{1.13}$$

$$u_N \leq d, \sigma_N \leq 0, \sigma_N(u_N - d) = 0 \quad sur \quad \Gamma_0 \tag{1.14}$$

$$|\sigma_T| < S \longrightarrow u_T = 0 \quad sur \quad \Gamma_0 \tag{1.15}$$

$$|\sigma_T| = S \longrightarrow \exists \delta > 0, u_T = -\delta\sigma_T \quad sur \quad \Gamma_0 \tag{1.16}$$

Problème variationnel (P.V)

Théorème 1.4 *Si u est solution de (P.C) alors u vérifie le problème (P.V) :*

$$trouver\ u \in K\ tel\ que$$

$$a(u, v) = L(v) + \langle \sigma_N, v_N \rangle + \langle \sigma_T, v_T \rangle, \forall v \in V \tag{1.17}$$

$$\langle \sigma_N, v_N - u_N \rangle \geq 0, \forall v \in K \tag{1.18}$$

$$\langle \sigma_T, v_T - u_T \rangle + \langle S, |v_T| - |u_T| \rangle \geq 0, \forall v_T \in V_T \tag{1.19}$$

où $V_T = \{v \in (H^1(\Omega))^2 / v = 0\ sur\ \Gamma_2\}$

Preuve. De (1.11), on trouve :

$$\int_\Omega -div\sigma(u)vd(x) = \int_\Omega fvdx, \quad \forall v \in V \tag{1.20}$$

D'autre part, en utilisant la formule de Green, on a :

$$\int_\Omega -div\sigma(u)vdx = \int_\Omega \sigma(u) : e(v)dx - \int_{\Gamma_0} \sigma(u)nvd\Gamma - \int_{\Gamma_1} \sigma(u)nvd\Gamma - \int_{\Gamma_2} \sigma(u)nvd\Gamma \tag{1.21}$$

En utilisant (1.12)-(1.13) dans (1.21), puis on introduit le résultat dans (1.20), on trouve (1.17). On a :

$$\begin{aligned} \langle \sigma_N, v_N - u_N \rangle &= \langle \sigma_N, v_N - d + d - u_N \rangle \\ &= \langle \sigma_N, v_N - d \rangle + \langle \sigma_N, d - u_N \rangle \\ &= \langle \sigma_N, v_N - d \rangle \geq 0 \end{aligned}$$

d'où (1.18). Formulation faible des conditions de frottement :
On a :

$$
\begin{aligned}
-\int_{\Gamma_0} \sigma_T v_T d\Gamma &\leq \int_{\Gamma_0} |\sigma_T||v_T| d\Gamma \\
&\leq \int_{\Gamma_0} S|v_T| d\Gamma
\end{aligned}
\tag{1.22}
$$

Et pour $u_T = 0$ ou $u_T = -\delta\sigma_T$ on a :

$$
\begin{aligned}
\int_{\Gamma_0} \sigma_T u_T d\Gamma &= \int_{\Gamma_0} -\delta|\sigma_T|^2 d\Gamma \\
&= -\int_{\Gamma_0} |\sigma_T||u_T| d\Gamma \\
&= -\int_{\Gamma_0} S|u_T| d\Gamma
\end{aligned}
\tag{1.23}
$$

De (1.22) et (1.23), on déduit (1.19). ■

Théorème 1.5 *On suppose que u est assez régulière. Alors, u est solution du $(P.C)$ si et seulement si u est solution du $(P.V)$.*

Preuve. Si on prend $v = u \pm \varphi$, tel que $\varphi \in (D(\Omega))^3$, v reste dans V puis on l'introduit dans (1.17) on trouve :

$$
a(u, \varphi) = \int_\Omega f\varphi \ \ dx \tag{1.24}
$$

ce qui entraîne, après utilisation de la formule de Green,(1.11).
Pour $v = u \pm \varphi$ toujours dans (1.17) tel que $\varphi \in (D(\Omega \cup \Gamma_1))^3$, v demeure dans V, et en utilisant (1.24), on trouve (1.12).
Puis on prend $v = u + \varphi$ dans (1.18) avec $\varphi \in (D(\Omega \cup \Gamma_0))^3$ et $\varphi_N \leq 0$ sur Γ_0, on trouve $\langle \sigma_N, \varphi_N \rangle \geq 0$ ce qui donne $\sigma_N \leq 0$ sur Γ_0.
En prenant $v_N = d$ puis $v_N = 2u_N$ dans (1.18), on obtient $\langle \sigma_N, u_N - d \rangle = 0$ et puisque $\sigma_N(u_N - d) \geq 0$ alors $\sigma_N(u_N - d) = 0$ sur Γ_0. Par conséquent (1.14).

On pose $v = 0$ puis $v = 2u$ dans (1.19), on trouve :

$$
\langle \sigma_T, u_T \rangle + \langle S, |u_T| \rangle = 0 \tag{1.25}
$$

d'où (1.19) devient $\langle \sigma_T, v_T\rangle + \langle S, |v_T|\rangle \geq 0$ ou encore

$$\int_{\Gamma_0} (\sigma_T v_T - S|v_T|) d\Gamma \geq 0 \tag{1.26}$$

Soit $\varphi \in (D(\Omega))^3$, on a $|\varphi_T| \leq |\varphi|$ et $\sigma_T \varphi_T = \sigma_T \varphi$ puisque $\sigma_T n = 0$.
Donc (1.25) devient :

$$\int_{\Gamma_0} (\sigma_T \varphi - S|\varphi_T|) \ \ d\Gamma \geq 0 \ \ pour \ \ tout \ \ \varphi \in (D(\Omega))^3 \tag{1.27}$$

On prend $\pm\varphi$ dans (1.27), on trouve que :

$$\left| \int_{\Gamma_0} \sigma_T \varphi \ \ d\Gamma \right| \leq \int_{\Gamma_0} S|\varphi| \ \ d\Gamma \tag{1.28}$$

On a $\int_{\Gamma_0} S|\varphi| \ \ d\Gamma$ définie une norme sur $H^1(\Gamma_0)$ et $\varphi \longrightarrow \int_{\Gamma_0} \sigma_T \varphi \ \ d\Gamma$ est une forme linéaire sur $(D(\Omega))^3$. D'où de (1.28), on conclut qu'elle est continue et de norme ≤ 1.

On a :

$$\int_{\Gamma_0} \sigma_T \varphi \ \ d\Gamma = \int_{\Gamma_0} (S^{-1}\sigma_T)(S\varphi) \ \ d\Gamma$$

d'où :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_0} \sigma_T \varphi \ \ d\Gamma \right| &= \left| \int_{\Gamma_0} (S^{-1}\sigma_T)(S\varphi) \ \ d\Gamma \right| \\ &\leq |S^{-1}\sigma_T|_{L^\infty(\Gamma_0)} \times \left| \int_{\Gamma_0} S\varphi \ \ d\Gamma \right| \\ &\leq |S^{-1}\sigma_T|_{L^\infty(\Gamma_0)} \times \int_{\Gamma_0} S|\varphi| \ \ d\Gamma \end{aligned}$$

Ceci implique que $|S^{-1}\sigma_T|_{L^\infty(\Gamma_0)} \leq 1$ d'où $|S^{-1}\sigma_T| \leq 1$, par conséquent $|\sigma_T| \leq S$ sur Γ_0. Pour finir, de $|\sigma_T| \leq S$, on conclut que $-\sigma_T u_T \leq S|u_T|$ d'où $\sigma_T u_T + S|u_T| \geq 0$ avec 1.25 on déduit que :

$$\sigma_T u_T + S|u_T| = 0 \tag{1.29}$$

Deux cas se présentent :
si $|\sigma_T| = S$, de (1.29) on conclut (1.15).
si $|\sigma_T| < S$, supposons $u_T \neq 0$ on aura $\sigma_T u_T + S|u_T| < 0$ ce qui contredit (1.29), d'où (1.16). ■

Existence et unicité

On a besoin de quelques outils pour établir l'existence et l'unicité de la solution du problème variationnel.

Posons :

$$J(v) = \int_{\Gamma_0} S|v_T| d\Gamma, v \in K$$

On a :

$$I(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - L(v), v \in K$$

- J convexe sur K, non linéaire et non différentiable.
- I strictement convexe et G-différentiable de G-dérivée : $I'(u)w = a(u,w) - L(w), w \neq 0$.

Corollaire 1 *Soit $u \in K$, u est solution du problème variationnel si et seulement si u est solution de l'inéquation variationnelle :*

$$a(u, v-u) - L(v-u) + J(v) - J(u) \geq 0, \forall v \in K \tag{1.30}$$

Preuve. Supposons que u, la solution du problème variationnel, est assez régulière. L'équation (1.17) donne :

$$a(u, v-u) = L(v-u) + \langle \sigma_N, v_N - u_N \rangle + \langle \sigma_T, v_T - u_T \rangle. \tag{1.31}$$

Pour avoir (1.29, il suffit d'introduire (1.18) et(1.19) dans (1.17).
Inversement, supposons que u est assez régulière et vérifie (1.30). On procède de la même façon que dans la preuve du théorème 5. On introduit $v = u \pm \varphi$, tel que $\varphi \in (D(\Omega))^3$, dans (1.29), puis on récupère (1.17), ensuite (1.30). Après insertion de (1.11) et (1.12) dans (1.29), on trouve :

$$\langle \sigma_N, v_N - u_N \rangle + \langle \sigma_T, v_T - u_T \rangle + \langle \mathbf{S}, |v_T| - |u_T| \rangle \geq 0, \forall v_T \in V_T \tag{1.32}$$

On prend $v_T = u_T$ puis $v_N = u_N$ dans (1.31), on trouve respectivement (1.18) et (1.19). ■

Corollaire 2 *Soit $u \in K$. Les deux problèmes suivants sont équivalents :*

$$i)\begin{cases} Trouver \quad u \quad minimiseant \\ F(v) = I(v) + J(v), \quad v \in K \end{cases} \tag{1.33}$$

$$ii)\begin{cases} Trouve \quad u \quad dans \quad K \quad tel \quad que \\ a(u, v-u) - L(v-u) + J(v) - J(u) \geq 0, \quad \forall v \in K \end{cases} \tag{1.34}$$

Preuve. Montrons d'abord que i) implique ii). Soit u vérifiant i), on a : $\forall v \in K, \quad u + t(v-u) \in K, \forall t \in]0,1[$. Donc on a :

$$\begin{aligned} F(u) &\leq F(u + t(v-u)) \\ &\leq I(u + t(v-u) + J(u + t(v-u) \end{aligned}$$

d'où :

$$I(u) + J(u) \leq I(u + t(v-u)) + (1-t)Ju + tJ(v)$$

donc

$$\frac{I(u + t(v-u)) - I(u)}{t} + J(v) - J(u) \geq 0$$

En faisant tendre t vers zéros, on trouve ii).

Maintenant, on montre la réciproque. Puisque I est convexe et G-dérivable de G-dérivée $I'(u)w = a(u,w) - L(w), w \neq o$, alors $I(v) \geq I(u) + I'(u)(v-u)$ pour tout $v \in V$ d'où u vérifie ii).

En combinant avec ii), on trouve :

$$I(v) \geq I(u) + J(u) - J(v)$$

d'où

$$I(u) + J(u) \leq I(v) - J(v), \quad \forall v \in K$$

comme $u \in K$, il résulte que :

$$F(u) \leq F(v), \quad \forall v \in K$$

d'où ii). ■

Remarque 1.1 *Ce corollaire nous permet de passer du problème d'inéquation variationnelle à un prblème de minimisation.*

Corollaire 3 *Supposons que $f_i \in L^2(\Omega), g_i \in L^2(\Gamma_2)$ et $S \in L^2(\Gamma_0)$. Donc le problème de minimisation (1.33) admet au moins une solution dans K.*

Preuve. Pour établir l'existence de u, il suffit de montrer que F est faiblement s.c.i et coercive sur K. On a I est une fonction convexe et G-dérivable sur K donc, elle est faiblement s.c.i sur K. Donc il suffit de montrer que J est s.c.i. Pour cela il suffit de montrer que son épigraphe est fermé. Ce qui est facile à établir et ceci est due à la continuité de J.

Puisque la somme d'une fonction s.c.i et une fonction s.c.i faiblement est une fonction s.c.i alors F est s.c.i.

Il reste à établir la coercivité. D'après la coercivité de $a(.,.)$, la linéarité de $L(.)$ et la continuité de l'application trace de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$, on a :

$$|I(v)| \geq c\|v\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} - c'\|v\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$$

et

$$\begin{aligned} J(v) &= \int_{\Gamma_0} S|v_T| \;\; d\Gamma \\ &\leq \int_{\Gamma_0} S|v| \;\; d\Gamma \\ &\leq c"\|v\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \;\; pour S \in L^2(\Gamma_0). \end{aligned}$$

D'où $\lim F(v) = +\infty$ quand $\|v\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \to \infty$ par conséquent F est coercive.
Si de plus F est strictement convexe, cette solution est unique. ■

Théorème 1.6 *Pour $f_i \in L^2(\Omega), g_i \in L^2(\Gamma_2)$ et $S \in L^2(\Gamma_0)$, le problème (P.V) admet au moins une solution.*

Preuve. Il suffit d'utiliser les corollaires 1,2 et 3. ■

1.2.2 Le cas de la loi de Coulomb

Problème classique (P.C)

$$\text{Trouver} \quad u \quad \text{tel que}$$

$$-\,div\sigma(u) = f \;\; dans \;\; \Omega \tag{1.35}$$

$$\sigma(u)n = g \;\; sur \;\; \Gamma_1 \tag{1.36}$$

$$u = 0 \;\; sur \;\; \Gamma_2 \tag{1.37}$$

$$u_N \leq d, \sigma_N \leq 0, \sigma_N(u_N - d) = 0 \;\; sur \;\; \Gamma_0 \tag{1.38}$$

$$|\sigma_T| < \nu|\sigma_N| \longrightarrow u_T = 0 \;\; sur \;\; \Gamma_0 \tag{1.39}$$

$$|\sigma_T| = \nu|\sigma_N| \longrightarrow \exists\delta > 0, u_T = -\delta\sigma_T \;\; sur \;\; \Gamma_0 \tag{1.40}$$

Problème variationnel (P.V)

Théorème 1.7 *Si u est solution de (P.C) alors u vérifie le problème (P.V) :*

$$trouver\ u \in K\ tel\ que$$

$$a(u,v) = L(v) + \langle\sigma_N, v_N\rangle + \langle\sigma_T, v_T\rangle, \forall v \in V \tag{1.41}$$

$$\langle\sigma_N, v_N - u_N\rangle \geq 0, \forall v \in K \tag{1.42}$$

$$\langle\sigma_T, v_T - u_T\rangle + \langle\nu|\sigma_N|, |v_T| - |u_T|\rangle \geq 0, \forall v_T \in V_T \tag{1.43}$$

où $V_T = \{v \in (H^1(\Omega))^2 / v = 0 \;\; sur \;\; \Gamma_2\}$

Preuve. De (1.35), on trouve :

$$\int_\Omega -div\sigma(u)vdx = \int_\Omega fvdx \;\; \forall v \in V \tag{1.44}$$

D'autre part, en utilisant la formule de Green on a :

$$\int_\Omega -div\sigma(u)vdx = \int_\Omega \sigma(u) : e(v)dx - \int_{\Gamma_0} \sigma(u)nvd\Gamma - \int_{\Gamma_1} \sigma(u)nvd\Gamma - \int_{\Gamma_2} \sigma(u)nvd\Gamma \tag{1.45}$$

En utilisant (1.35)-(1.38) dans (1.45), puis on introduit le résultat dans (1.44), on trouve (1.41).

on a :

$$\begin{aligned}\langle \sigma_N, v_N - u_N\rangle &= \langle \sigma_N, v_N - d + d - u_N\rangle \\ &= \langle \sigma_N, v_N - d\rangle + \langle \sigma_N, d - u_N\rangle \\ &= \langle \sigma_N, v_N - d\rangle \geq 0\end{aligned}$$

d'où (1.42).

Formulation faible des conditions de frottement :

on a :

$$\begin{aligned}-\int_{\Gamma_0} \sigma_T v_T d\Gamma &\leq \int_{\Gamma_0} |\sigma_T||v_T| d\Gamma \\ &\leq \int_{\Gamma_0} \nu|\sigma_T||v_T| d\Gamma \qquad (1.46)\end{aligned}$$

Et pour $u_T = 0$ ou $u_T = -\delta\sigma_T$ on a :

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_0} \sigma_T u_T d\Gamma &= \int_{\Gamma_0} -\delta|\sigma_T|^2 d\Gamma \\ &= -\int_{\Gamma_0} |\sigma_T||u_T| d\Gamma \\ &= -\int_{\Gamma_0} \nu|\sigma_N||u_T| d\Gamma \qquad (1.47)\end{aligned}$$

De (1.46) et (1.47), on déduit (1.43). ■

Théorème 1.8 *On suppose que u est assez régulière alors u solution de (P.C) si et seulement si u est solution de (P.V).*

Preuve. Si on prend $v = u \pm \varphi$, tel que $\varphi \in (D(\Omega))^3$, v reste dans V, puis on l'introduit dans (1.41), on trouve :

$$a(u, \varphi) = \int_{\Omega} f\varphi \;\; dx$$

Ce qui entraîne, après utilisation de formule de Green,(1.35).

Pour $v = u \pm \varphi$ toujours dans (1.41) tel que $\varphi \in (D(\Omega \cup \Gamma_1))^3$, v reste dans V, et en utilisant ce qui précède, on trouve (1.36).

Puis on prend $v = u + \varphi$ dans (1.42) avec $\varphi \in (D(\Omega \cup \Gamma_0))^3$ et $\varphi_N \leq 0$ sur Γ_0, on trouve $\langle \sigma_N, \varphi_N \rangle \geq 0$ ce qui donne $\sigma_N \leq 0$ sur Γ_0.

En prenant $v_N = d$ puis $v_N = 2u_N - d$ dans (1.42), on obtient $\langle \sigma_N, u_N - d \rangle = 0$ et puisque $\sigma_N(u_N - d) \geq 0$ alors $\sigma_N(u_N - d) = 0$ sur Γ_0. Par conséquent (1.38).

On pose $v = 0$ puis $v = 2u$ dans (1.42), on trouve :

$$\langle \sigma_T, u_T \rangle + \langle \nu |\sigma_N|, |u_T| \rangle = 0$$

d'où (1.42) devient :

$$\langle \sigma_T, v_T \rangle + \langle \nu |\sigma_N|, |v_T| \rangle \geq 0$$

ou encore :

$$\int_{\Gamma_0} (\sigma_T v_T - \nu |\sigma_N| |v_T|) d\Gamma \geq 0 \tag{1.48}$$

Soit $\varphi \in (D(\Omega))^3$, on a $|\varphi_T| \leq |\varphi|$ et $\sigma_T \varphi_T = \sigma_T \varphi$ puisque $\sigma_T n = 0$.
Donc (1.48) devient :

$$\int_{\Gamma_0} (\sigma_T \varphi - \nu |\sigma_N| |\varphi_T|) d\Gamma \geq 0 \quad pour \quad tout \quad \varphi \in (D(\Omega))^3 \tag{1.49}$$

On prend $\pm\varphi$ dans (1.49), on trouve que :

$$\left| \int_{\Gamma_0} \sigma_T \varphi d\Gamma \right| \leq \int_{\Gamma_0} \nu |\sigma_N| |\varphi| d\Gamma \tag{1.50}$$

On a $\int_{\Gamma_0} \nu |\sigma_N| |\varphi| d\Gamma$ définie une norme sur $L^1(\Gamma_0)$ et $\varphi \to \int_{\Gamma_0} \sigma_T \varphi d\Gamma$ est une forme linéaire sur $(D(\Omega))^3$. D'où de (1.50), on conclut qu'elle est continue et de norme ≤ 1.
On a :

$$\int_{\Gamma_0} \sigma_T \varphi d\Gamma = \int_{\Gamma_0} ((\nu |\sigma_N|)^{-1} \sigma_T)(\nu |\sigma_N| \varphi) d\Gamma$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\Gamma_0} \sigma_T \varphi d\Gamma \right| &= \left| \int_{\Gamma_0} ((\nu |\sigma_N|)^{-1} \sigma_T)(\nu |\sigma_N| \varphi) d\Gamma \right| \\
&\leq |(\nu |\sigma_N|)^{-1} \sigma_T|_{L^\infty(\Gamma_0)} \times \left| \int_{\Gamma_0} \nu |\sigma_N| \varphi d\Gamma \right| \\
&\leq |(\nu |\sigma_N|)^{-1} \sigma_T|_{L^\infty(\Gamma_0)} \times \int_{\Gamma_0} \nu |\sigma_N| |\varphi| d\Gamma
\end{aligned}$$

Ceci implique $|(\nu|\sigma_N|)^{-1}\sigma_T|_{L^\infty(\Gamma_0)} \leq 1$ d'où $|(\nu|\sigma_N|)^{-1}\sigma_T| \leq 1$ par conséquent :

$$|\sigma_T| \leq \nu|\sigma_N| \quad sur \quad \Gamma_0.$$

Pour finir, de $|\sigma_T| \leq \nu|\sigma_N|$, on conclut que $-\sigma_T u_T \leq \nu|\sigma_N||u_T|$ doù $\sigma_T u_T + \nu|\sigma_N||u_T| \geq 0$, avec (1.48) implique que :

$$\sigma_T u_T + \nu|\sigma_N||u_T| = 0 \tag{1.51}$$

Deux cas se présentent :
– si $|\sigma_T| = \nu|\sigma_N|$, de (1.51) on conclut (1.40).
– si $|\sigma_T| < \nu|\sigma_N|$, supposons $u_T \neq 0$, on aura $\sigma_T u_T + \nu|\sigma_N||u_T| < 0$ ce qui contredit (1.51), doù (1.39). ■

Un théorème d'existence

Corollaire 4 *Le (P.V) est équivalent au problème :*

$$Trouver \quad u \quad dans \quad K \quad tel \quad que :$$

$$a(u, v-u) - L(v-u) + J(v) - J(u) \geq 0, \quad \forall v \in K \tag{1.52}$$

où $J(v) = \int_{\Gamma_0} \nu|\sigma_N||v_T|d\Gamma$.

Preuve. Au début, on peut avoir de (1.41) que :

$$a(u, v-u) = L(v-u) + \langle \sigma_N, v_N - \overline{u}_N \rangle + \langle \sigma_T, v_T - u_T \rangle \tag{1.53}$$

Conformément à la première partie de la preuve du théorème(1.4), de (1.52), on a (1.41).
Après insertion de (1.35) et (1.36) dans (1.53), on trouve :

$$\langle \sigma_N, v_N - u_N \rangle + \langle \sigma_T, v_T - u_T \rangle + \langle \nu|\sigma_N|, |v_T| - |u_N| \rangle \geq 0, \quad \forall v_T \in V_T \tag{1.54}$$

On prend $v_T = u_T$ puis $v_N = u_N$ dans (1.54), on trouve respectivement (1.42) et (1.43).

Pour avoir la réciproque, il suffit d'introduire (1.42) et (1.43) dans (1.53). ∎

Il existe plusieurs difficultés pour établir l'existence de la solution du problème variationnel avec $J(v) = \int_{\Gamma_0} \nu|\sigma_N||v_T|d\Gamma$ et ceci est due au couplement des contraintes et du déplacement et à la non-différentiabilité de J, de plus σ_N n'est pas en relation biunivoque avec u, ceci est due au moins à $\sigma_N(u_N - d) = 0$ donc, on ne peut pas écrire F uniquement en fonction de u. Par conséquent dans tout les cas, on ne peut pas passer à un problème de minimisation.

Pour dépasser ces difficultés, on va procéder à une stratégie de point fixe sur le seuil de frottement qui utilise l'existence de la solution dans le cas de la loi Tresca. Cette stratégie consiste à :

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Trouver le point fixe de l'application :} \\ S \to \nu|\sigma_N(u)| \quad \text{dans} \quad \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0) \end{array} \right. \tag{1.55}$$

où u est solution du problème auxiliaire :

$$P(S) \left\{ \begin{array}{c} \text{Trouver u dans K minimisant la fonction :} \\ F(v) = \frac{1}{2}a(u,v) - L(v) + J_S(v), \forall v \in K \\ avec \quad J_S(v) = \int_{\Gamma_0} S|v_T|d\Gamma \end{array} \right. \tag{1.56}$$

et $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma_0)$ est l'espace dual de $\mathbf{H}^{1/2}_{00}(\Gamma_0)^1$ (voir [23] ou [22] pour une définition de $\mathbf{H}^{1/2}_{00}(\Gamma_0)$), tout ceci pour avoir $S = \nu|\sigma_N|$. On peut simplifier, en posant $S = \nu s$ et on cherche s le point fixe de l'application $s \longrightarrow |\sigma_N|$ dans $\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)$).

Soient u^1, u^2 solutions de $P(S_1)$ et $P(S_2)$ respectivement. Donc ,

$$a(u^1, v - u^1) + J_{s_1}(v) - J_{s_1}(u^1) \geq L(v - u^1), \quad \forall v \in K \tag{1.57}$$

$$a(u^2, v - u^2) + J_{s_2}(v) - J_{s_2}(u^2) \geq L(v - u^2), \quad \forall v \in K \tag{1.58}$$

En prenant $v = u^1$ dans (1.57) et $v = u^2$ dans (1.58), on trouve :

$$\begin{aligned} a(u^1 - u^2, u^1 - u^2) &\leq J_{s_1}(u^2) - J_{s_1}(u^1) + J_{s_2}(u^1) - J_{s_2}(u^2) \\ &\leq \int_{\Gamma_0} (S_1 - S_2)(|u_T^2| - |u_T^1|) \;\; d\Gamma \end{aligned} \tag{1.59}$$

On a d'après la coercivité :

$$\|u^1 - u^2\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq \frac{1}{c} a(u^1 - u^2, u^1 - u^2) \tag{1.60}$$

et

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_0}(S_1-S_2)(|u_T^2|-|u_T^1|)\ \ d\Gamma &\leq |S_1-S_2|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)}\times \||u_T^2|-|u_T^1|\|_{\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)}\\ &\leq |\nu|_{L^\infty(\Gamma_0)}\times|S_1-S_2|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)}\times\|u_T^2-u_T^1\|_{\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)}\\ &\leq c'|\nu|_{L^\infty(\Gamma_0)}\times|S_1-S_2|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)}\times\|u_T^2-u_T^1\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\\ &\leq c'|\nu|_{L^\infty(\Gamma_0)}\times|S_1-S_2|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)}\times\|u^2-u^1\|_{H^1(\Omega)}\end{aligned}\tag{1.61}$$

En combinant (1.60)-(1.61), on trouve :

$$\|u^1-u^2\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\leq\frac{c'}{c}|\nu|_{L^\infty(\Gamma_0)}\times|S_1-S_2|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)}\tag{1.62}$$

D'autre part, on a :

$$||\sigma_N(u^1)|-|\sigma_N(u^2)||_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)}\leq|\sigma_N(u^1)-\sigma_N(u^2)||_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)}$$

et

$$\begin{aligned}|\sigma_N(u^1)-\sigma_N(u^2)|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)} &= |(\sigma(u^1)n)n-(\sigma(u^2)n)n|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)}\\ &= |(\sigma(u^1)n-\sigma(u^2n)n|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)}\\ &\leq\|\sigma(u^1)n-\sigma(u^2)n\|_{H^1(\Omega)}\\ &\leq\|\sigma(u^1)-\sigma(u^2)\|_(L^2(\Omega))^{3\times3}\\ &\leq c"\|e(u^1-u^2)\|_{(L^2(\Omega))^{3\times3}}\end{aligned}\tag{1.63}$$

Par ailleurs, nous avons :

$$\|e_{ij}(u)\|_{(L^2(\Omega))}\leq\|u\|_{H^1(\Omega)}$$

d'où :

$$\|e(u^1-u^2)\|_{(L^2(\Omega))^{3\times3}}\leq K\|u^1-u^2\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$$

Par conséquent (1.63), avec (1.62), devient :

$$\||\sigma_N(u^1)|-|\sigma_N(u^2)|\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)}\leq\gamma|\nu|_{L^\infty(\Gamma_0)}\times|s_1-s_2|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)}.$$

Donc s'il existe $\nu_0>0$ vérifiant $|\nu|_{L^\infty(\Gamma_0)}<\nu_0$, assez petit pour avoir $\gamma|\nu|_{L^\infty(\Gamma_0)}<1$, alors l'application $s\longrightarrow|\sigma_N(u)|$ admet un point fixe. D'où le théorème :

Théorème 1.9 *Supposons que* $f_i \in L^2(\Omega), g_i \in L^2(\Gamma_2)$ *et* $|\nu|_{L^\infty(\Gamma_0)} < \nu_0$, *pour* ν_0 *assez petit, le problème (P.V) admet au moins une solution dans* V.

On peut consulter Necas, Jarusek et Haslinger [25], pour avoir un résultat d'existence pour un problème bidimensionnel où ils supposent que le coefficient de frottement est assez petit. Récemment ; EcK et Jarusek [15] ont donné une démonstration, en utilisant la méthode de pénalisation. Par contre, pas de résultat d'unicité établi jusqu'à maintenant .

Chapitre 2

Présentation générale du problème de Signorini pour les coques minces

Introduction

Dans ce chapitre on garde la même situation que celle du premier chapitre en remplaçant le corps élastique par une coque élastique mince. Ce chapitre est divisé en trois sections. La première section comporte la géométrie des coques minces. Dans la deuxième section, on part du problème classique formulé en coordonnées cartésiennes et puisque les coordonnées curvilignes sont mieux adaptées pour les coques, on reformule le problème variationnel en coordonnées curvilignes et ce ci dans le cas sans frottement. Dans la troisième section on fait la même procédure pour le cas avec frottement de Coulomb.

2.1 Description de la géométrie d'une coque mince

Soit $\Omega^\varepsilon = \omega \times \,]-\varepsilon, +\varepsilon[\,, \varepsilon > 0$, un domaine ouvert borné de $\mathbb{R}^3$, tel que ω est un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2$, avec une frontière assez régulière γ. On note la frontière latérale de Ω^ε par $\Gamma_0^\varepsilon = \gamma \times [-\varepsilon, \varepsilon]$, la face supérieure et la face inférieure sont notées, respectivement par Γ_+^ε et Γ_-^ε. Soit $\theta^\varepsilon : \bar{\omega} \to \mathbb{R}^3$ une fonction de classe $\mathcal{C}^3$. La configuration de référence de la coque est $\{\widehat{\Omega}^\varepsilon\}^-$, où $\widehat{\Omega}^\varepsilon = \Theta^\varepsilon(\Omega^\varepsilon)$, $\widehat{x}^\varepsilon = \Theta^\varepsilon(x^\varepsilon)$, $\Theta^\varepsilon(x^\varepsilon) = \theta^\varepsilon(x_1, x_2) + x_3^\varepsilon a_3^\varepsilon(x_1, x_2)$ pour tout $x^\varepsilon = (x_1, x_2, x_3^\varepsilon) \in \bar{\Omega}^\varepsilon$ et a_3^ε est le vecteur unitaire normal à la surface moyenne $\widehat{\omega} = \Theta^\varepsilon(\bar{\omega})$ de la coque voir figure 2.1 [1]. Pour ε assez petit, l'application $\Theta^\varepsilon : \bar{\Omega}^\varepsilon \to \Theta^\varepsilon(\bar{\Omega}^\varepsilon)$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme (voir [10]) et on suppose aussi que Θ^ε préserve l'orientation, i.e $\det \nabla^\varepsilon \Theta^\varepsilon(x^\varepsilon) > 0, \ \forall x^\varepsilon \in \bar{\Omega}^\varepsilon$. On suppose que $\widehat{\Omega}^\varepsilon$ est occupé par corps linéairement élastique, homogène et isotrope (voir Annexe, définition 1, 2 et 3). Dans sa configuration naturelle : une coque d'épaisseur 2ε dont les constantes de Lamé sont notées par $\lambda > 0, \mu > 0$ et sont supposées indépendantes de ε. On suppose que la coque en question est soumise à des forces volumiques de densité $\widehat{f}^\varepsilon \in (L^2(\widehat{\Omega}^\varepsilon))^3$, sa face inférieure $\widehat{\Gamma}^\varepsilon_- = \Theta^\varepsilon(\Gamma^\varepsilon_-)$ soumise à des forces surfaciques de densité $\widehat{h}^\varepsilon \in (L^2(\widehat{\Gamma}^\varepsilon_-))^3$ sa face latérale est encastrée uniquement sur $\Theta^\varepsilon(\gamma_0 \times [-\varepsilon, \varepsilon])$ qui est une partie non vide de $\widehat{\Gamma}^\varepsilon_0 = \Theta^\varepsilon(\Gamma^\varepsilon_0)$ représentant sa face latérale totale. On suppose aussi que cette coque entre en contact unilatéral sur sa face supérieure $\widehat{\Gamma}^\varepsilon_+ = \Theta^\varepsilon(\Gamma^\varepsilon_+)$ contre une fondation rigide $\mathfrak{D}^\varepsilon = \{x^\varepsilon \in \mathbb{R}^3/(x^\varepsilon_1, x^\varepsilon_2) \in \omega, x^\varepsilon_3 \geq \widehat{d}\}$, où $\widehat{d}(\geq 0)$ est la fonction d'interstice définie sur $\widehat{\Gamma}^\varepsilon_+$ et qui désigne la distance entre la face supérieure et la fondation rigide mesurée dans la direction normale, Λ son coefficient de frottement. On suppose aussi que le système est en état statique. Notons que les indices Grecs appartiennent à l'ensemble $\{1, 2\}$, les indices Latin appartiennent à l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ et la convention de sommation de Einstein par rapport aux indices et exposants répétés est systématiquement utilisées, $\partial_i = \partial/\partial x$, $\partial^\varepsilon_i = \partial/\partial x^\varepsilon_i$, $\widehat{\partial}^\varepsilon_i = \partial/\partial \widehat{x}^\varepsilon_i$, $\widehat{n}^\varepsilon = (\widehat{n}^\varepsilon_i)$ est la normale unitaire extérieure le long de la frontière de la coque $\widehat{\Omega}^\varepsilon$. On note par l'indice T la composante tangentielle, et par l'indice N la composante normale, $\nu^\varepsilon = (\nu^\varepsilon_\alpha)$ et $\tau^\varepsilon = (\tau^\varepsilon_\alpha)$ sont respectivement la normale unitaire extérieure et le vecteur tangent unitaire tels que $\tau_1 = -\nu_2$ et $\tau_2 = \nu_1$ le long de la frontière de l'ensemble ω. Les opérateurs différentiels de la dérivée normale extérieure et de la dérivée tangentielle $\nu_\alpha \partial_\alpha$ et $\tau_\alpha \partial_\alpha$ le long de γ sont notées par ∂_ν et ∂_τ.

Dans toute la suite, on utilise la convention de notation suivante : les notations comportant un chapeau sont exprimées dans un système de coordonnées cartésiennes, celles sans chapeau étant exprimées dans un système de coordonnées curvilignes.

1. Cette figure et toutes les figures suivantes sont prises de [6]

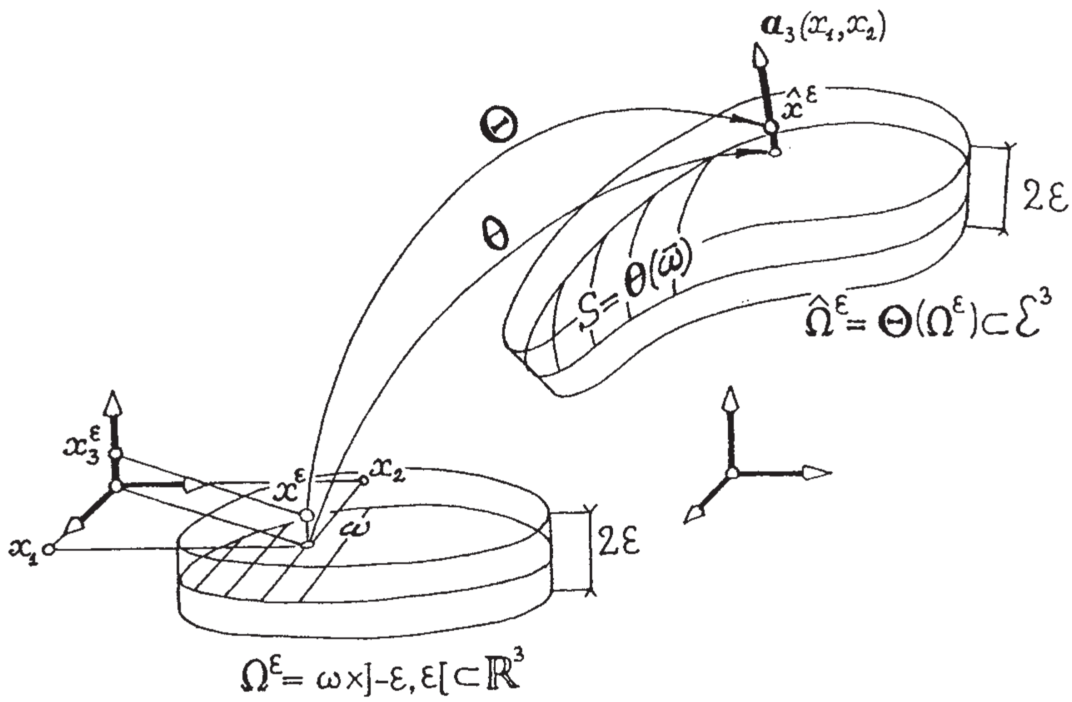

FIGURE 2.1 – Transformation du domaine

2.2 Le cas sans frottement

2.2.1 Problème classique $(\widehat{P}^\varepsilon.C)$

$$\left\{\begin{array}{c} Trouver\ \ \widehat{u}^\varepsilon\ telque \\ -\widehat{\partial}_j^\varepsilon \widehat{\sigma}_{ij}^\varepsilon = \widehat{f}_i^\varepsilon\ dans\ \widehat{\Omega}^\varepsilon \\ \widehat{\sigma}_{ij}^\varepsilon \widehat{n}_j^\varepsilon = \widehat{h}_i^\varepsilon\ sur\ \widehat{\Gamma}_- \\ \widehat{u}^\varepsilon = 0\ sur\ \widehat{\Gamma}_0^\varepsilon \\ \widehat{u}_N^\varepsilon \le \widehat{d}^\varepsilon, \widehat{G}_N^\varepsilon \le 0, \widehat{G}_N^\varepsilon(\widehat{u}_N^\varepsilon - \widehat{d}^\varepsilon) = 0, G_\alpha^\varepsilon = 0\ sur\ \widehat{\Gamma}_+^\varepsilon \end{array}\right. \tag{2.1}$$

tel que :

$$\widehat{\sigma}_{ij}^\varepsilon = \widehat{A}^{ijkl,\varepsilon} \widehat{e}_{kl}^\varepsilon, \widehat{G}_i^\varepsilon = \widehat{\sigma}_{ij}^\varepsilon \widehat{n}_j^\varepsilon \tag{2.2}$$

$$\widehat{e}_{ij}^\varepsilon(\widehat{u}^\varepsilon) = \frac{1}{2}(\widehat{\partial}_i^\varepsilon \widehat{u}_j^\varepsilon + \widehat{\partial}_j^\varepsilon \widehat{u}_i^\varepsilon) \tag{2.3}$$

Remarque 2.1 *$\widehat{G}_N^\varepsilon$ représente la densité de force de pression et $\widehat{G}_\alpha^\varepsilon$ les densités des forces de frottement.*

2.2.2 Problème variationnel $(\widehat{P}^{\varepsilon}\ .V)$

Théorème 2.1 *Le problème $(\widehat{P}^{\varepsilon}.C)$ est formellement équivalent au problème $(\widehat{P}^{\varepsilon}.V)$.*

$$\begin{cases} Trouver \quad (\widehat{u}^{\varepsilon}, \widehat{G}^{\varepsilon}) \in K(\widehat{\Omega}^{\varepsilon}) \times L^2(\widehat{\Gamma}^{\varepsilon}_{+}) \quad telque \\ \widehat{a}^{\varepsilon}(\widehat{u}^{\varepsilon}, \widehat{v}^{\varepsilon}) = \widehat{L}^{\varepsilon}(\widehat{v}^{\varepsilon}) + \langle \widehat{G}^{\varepsilon}_N, \widehat{v}^{\varepsilon}_N \rangle \quad \forall \widehat{v}^{\varepsilon} \in V(\widehat{\Omega}^{\varepsilon}) \\ \langle \widehat{G}^{\varepsilon}_N, \widehat{v}_N - \widehat{u}^{\varepsilon}_N \rangle \geq 0, \quad \forall \widehat{v}^{\varepsilon} \in K(\widehat{\Omega}^{\varepsilon}) \end{cases} \tag{2.4}$$

$$\widehat{a}^{\varepsilon}(\widehat{u}^{\varepsilon}, \widehat{v}^{\varepsilon}) = \int_{\widehat{\Omega}^{\varepsilon}} \widehat{A}^{ijkl,\varepsilon} \widehat{e}^{\varepsilon}_{kl} e^{\varepsilon}_{ij}(\widehat{v}) \quad d\widehat{x}^{\varepsilon}$$

$$\widehat{L}^{\varepsilon}(\widehat{v}) = \int_{\widehat{\Omega}^{\varepsilon}} \widehat{f}^{\varepsilon}_i \widehat{v}_i \quad d\widehat{x}^{\varepsilon} + \int_{\widehat{\Gamma}^{\varepsilon}_{-}} \widehat{h}^{\varepsilon}_i \widehat{v}_i \quad d\widehat{\Gamma}^{\varepsilon}$$

$$\langle \widehat{G}^{\varepsilon}_i, \widehat{\phi}^{\varepsilon}_i \rangle = \int_{\widehat{\Gamma}^{\varepsilon}_{+}} \widehat{G}^{\varepsilon}_i \widehat{\phi}^{\varepsilon}_i \quad d\widehat{\Gamma}^{\varepsilon}$$

$$V(\widehat{\Omega}^{\varepsilon}) = \{\widehat{v}^{\varepsilon} = (\widehat{v}^{\varepsilon}_i) \in \mathbf{H}^1(\widehat{\Omega}^{\varepsilon}), \widehat{v}^{\varepsilon} = 0 \quad sur \quad \widehat{\Gamma}^{\varepsilon}_0\}, \mathbf{H}^1(\widehat{\Omega}^{\varepsilon}) = (H^1(\widehat{\Omega}^{\varepsilon}))^3$$
$$K(\widehat{\Omega}^{\varepsilon}) = \{\widehat{v}^{\varepsilon} \in V(\widehat{\Omega}^{\varepsilon}) / \widehat{v}^{\varepsilon}_N \leq \widehat{d}^{\varepsilon} \quad sur \quad \widehat{\Gamma}^{\varepsilon}_{+}\}$$

Preuve. La démonstration est similaire à celle du Théorème (1.1) du chapitre 1. ■

Remarque 2.2 *D'après le première chapitre ce problème est équivalent à l'inéquation variationnelle :*

$$\widehat{a}^{\varepsilon}(\widehat{u}^{\varepsilon}, \widehat{v}^{\varepsilon} - \widehat{u}^{\varepsilon}) \geq \widehat{L}^{\varepsilon}(\widehat{u}^{\varepsilon} - \widehat{v}^{\varepsilon})$$

dans $K(\widehat{\Omega}^{\varepsilon})$ qui admet une solution unique sous les conditions $\widehat{f}^{\varepsilon}_i \in L^2(\widehat{\Omega}^{\varepsilon})$ et $\widehat{h}^{\varepsilon}_i \in L^2(\widehat{\Gamma}^{\varepsilon}_{-})$,cette solution réalise le minimum de la fonctionnelle :

$$\widehat{I}(\widehat{v}^{\varepsilon}) = \frac{1}{2}\widehat{a}^{\varepsilon}(\widehat{v}^{\varepsilon}, \widehat{v}^{\varepsilon}) - \widehat{L}^{\varepsilon}(\widehat{v}^{\varepsilon})$$

2.2.3 Problème variationnel $(\widehat{P}^{\varepsilon}.V)$ en coordonnées curvilignes

On note par $\widehat{e}^i$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $(g^{m,\varepsilon}(x^{\varepsilon}))$ sa base contravariante au point $\widehat{x}^{\varepsilon}$, définie par $g^{\varepsilon}_i(x^{\varepsilon}).g^{j,\varepsilon}(x^{\varepsilon}) = \delta^j_i$, dont la base covariante est $(g^{\varepsilon}_i(x^{\varepsilon}))$ donnée par $g^{\varepsilon}_i(x^{\varepsilon}) = \partial^{\varepsilon}_i \Theta^{\varepsilon}(x^{\varepsilon})\ \forall x^{\varepsilon} \in \Omega^{\varepsilon}$. On note respectivement les symboles de Christoffel et les composantes covariantes et contravariantes du tenseur métrique par $\Gamma^{k,\varepsilon}_{ij} = \partial^{\varepsilon}_i g^{\varepsilon}_j.g^{k,\varepsilon}, g^{\varepsilon}_{ij} = g^{\varepsilon}_i.g^{\varepsilon}_j, g^{ij,\varepsilon} = g^{i,\varepsilon}.g^{j,\varepsilon}$. L'élément de volume de $\Theta^{\varepsilon}(\bar{\Omega}^{\varepsilon})$ est $\sqrt{g^{\varepsilon}}dx^{\varepsilon}$, où $g^{\varepsilon} = det(g^{\varepsilon}_{ij})$. On note aussi les composantes contravariantes des forces volumiques et surfaciques respectivement par $\widehat{f}_i^\varepsilon(\widehat{x}^\varepsilon)\widehat{e}^i = f^{i,\varepsilon}(x^\varepsilon)g_i^\varepsilon(x^\varepsilon)\ \forall x^\varepsilon \in \Omega^\varepsilon, \widehat{h}_i^\varepsilon(\widehat{x}^\varepsilon)\widehat{e}^i = h^{i,\varepsilon}(x^\varepsilon)g_i^\varepsilon(x^\varepsilon)\ \forall x^\varepsilon \in (\Gamma_-^\varepsilon)$. Les composantes de chaque champs de vecteurs $\widehat{v}^\varepsilon = (\widehat{v}_i^\varepsilon) \in V(\widehat{\Omega}^\varepsilon)$ sont données par $\widehat{v}_i^\varepsilon(\widehat{x}^\varepsilon)\widehat{e}^i = v_j^\varepsilon(x^\varepsilon)g^{j,\varepsilon}(x^\varepsilon)\forall\widehat{x}^\varepsilon = \Theta^\varepsilon(x^\varepsilon) \in \{\widehat{\Omega}^\varepsilon\}^-$, et on utilise les relations $v_i^\varepsilon(x^\varepsilon) = \widehat{v}_i^\varepsilon(\widehat{x}^\varepsilon)[g_i^\varepsilon(x^\varepsilon)]^j$ oú $[g_i^\varepsilon(x^\varepsilon)]^j$ est la j^{eme} composante du vecteur $g_i^\varepsilon(x^\varepsilon)$. Pour plus de détails (voir [10] et [6])(voir figure 2.2) .

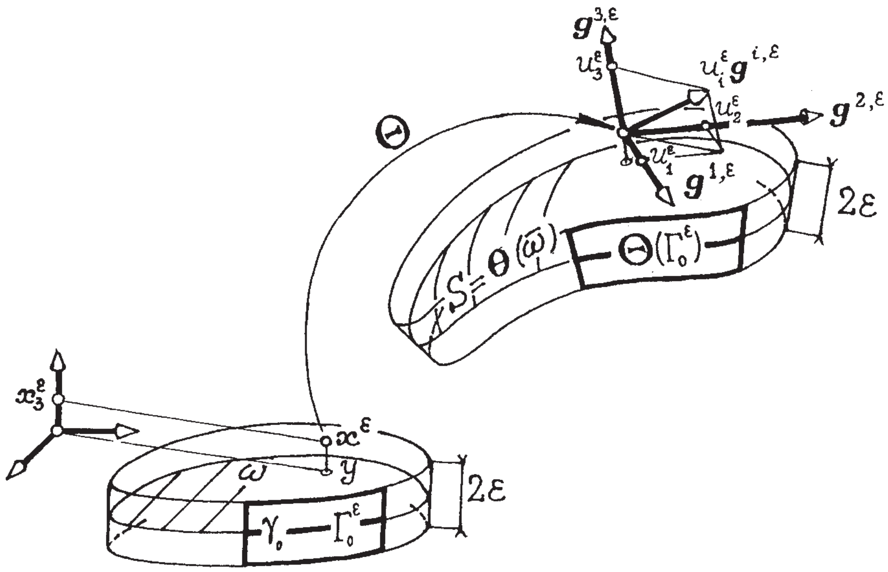

FIGURE 2.2 – Coordonnées curvilignes

Soient (u_i^ε) les composantes covariantes du champs de vecteurs $\widehat{u}_i^\varepsilon(\widehat{x}^\varepsilon)\widehat{e}^i$ et $G^{i,\varepsilon}$ sont les composantes contravariantes du champs de vecteurs $\widehat{G}_i^\varepsilon(\widehat{x}^\varepsilon)\widehat{e}^i$, donc on transforme le problème $(\widehat{P}^\varepsilon.V)$ écrit en cordonnées cartésiennes $\widehat{x}^\varepsilon = (\widehat{x}_i^\varepsilon)$ en un problème écrit en cordonnées curvilignes $x^\varepsilon = (x_i^\varepsilon)$ mieux adaptées à l'étude des coque, est décrite au théorème suivant

Théorème 2.2

$$(P^\varepsilon.V)\left\{\begin{array}{c} Trouver \quad (u^\varepsilon = \widehat{u}^\varepsilon \circ \Theta^\varepsilon) \in \mathbf{K}(\Omega^\varepsilon) \quad tels\ que \\ a^\varepsilon(u^\varepsilon, v^\varepsilon) = L^\varepsilon(v^\varepsilon) + \langle \delta^\varepsilon G^{i,\varepsilon}, v_i^\varepsilon \rangle, \quad \forall v^\varepsilon \in \mathbf{V}(\Omega^\varepsilon) \\ \langle \delta^\varepsilon G^{3,\varepsilon}, v_3^\varepsilon - u_3^\varepsilon \rangle \geq 0, \quad \forall v^\varepsilon \in \mathbf{K}(\Omega^\varepsilon) \end{array}\right. \tag{2.5}$$

tels que

$$a^\varepsilon(u^\varepsilon, v^\varepsilon) = \int_{\Omega^\varepsilon} A^{ijkl,\varepsilon} e^\varepsilon_{k\|l}(u^\varepsilon) e^\varepsilon_{i\|j}(v^\varepsilon)\delta^\varepsilon dx^\varepsilon, \ A^{ijkl,\varepsilon} = \lambda g^{ij,\varepsilon} g^{kl,\varepsilon} + \mu(g^{ik,\varepsilon}g^{jl,\varepsilon} + g^{il,\varepsilon}g^{jk,\varepsilon})$$

$$e^\varepsilon_{i\|j}(v^\varepsilon) := \frac{1}{2}(v^\varepsilon_{i\|j} + v^\varepsilon_{j\|i}), \ v^\varepsilon_{i\|j} := \partial^\varepsilon_j v^\varepsilon_i - \Gamma^{k,\varepsilon}_{ij} v^\varepsilon_k$$

$$L^\varepsilon(v^\varepsilon) = \int_{\Omega^\varepsilon} f^{i,\varepsilon} v_i^\varepsilon \delta^\varepsilon dx^\varepsilon + \int_{\Gamma^\varepsilon_-} h^{i,\varepsilon} v_i^\varepsilon \delta^\varepsilon d\Gamma^\varepsilon$$

$$\langle \delta^\varepsilon G^{i,\varepsilon}, v_i^\varepsilon \rangle = \int_{\Gamma^\varepsilon_+} G^{i,\varepsilon} v_i^\varepsilon \delta^\varepsilon d\Gamma^\varepsilon$$

$$\delta^\varepsilon = \sqrt{g^\varepsilon}$$

et

$$\mathbf{V}(\Omega^\varepsilon) = \{v^\varepsilon = (v_i^\varepsilon) \in \boldsymbol{H}^1(\Omega^\varepsilon), v^\varepsilon = 0 \quad sur \quad \Gamma_0^\varepsilon\}$$
$$\mathbf{K}(\Omega^\varepsilon) = \{v^\varepsilon \in \mathbf{V}(\Omega^\varepsilon) / v_3^\varepsilon \leq d^\varepsilon \quad sur \quad \Gamma_+^\varepsilon\}$$

Preuve. On rappelle que l'élément de volume $d\widehat{x}^\varepsilon = \sqrt{g^\varepsilon} dx^\varepsilon$ (voir [6, Theorem1.2.1(a)]) et l'élément de surface $d\widehat{\Gamma}^\varepsilon(\widehat{x}^\varepsilon) = \sqrt{g^\varepsilon}\sqrt{n_k^\varepsilon g^{\varepsilon,kl}(x^\varepsilon) n_l^\varepsilon(x^\varepsilon)} d\Gamma(x^\varepsilon)$ (voir [6, Theorem 1.2.1(b)])

i) On démontre maintenant que :

$$\int_{\widehat{\Omega}^\varepsilon} \widehat{f}^{i,\varepsilon} \widehat{v}_i d\widehat{x}^\varepsilon = \int_{\Omega^\varepsilon} f^{i,\varepsilon} v_i dx^\varepsilon$$

D'après la définition :

$$\widehat{f}^{i,\varepsilon} : \widehat{\Omega}^\varepsilon \longrightarrow \mathbb{R} \ et \ f^{i,\varepsilon} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\widehat{f}^{i,\varepsilon}(\widehat{x}^\varepsilon)\widehat{e}_i^\varepsilon =: f^{i,\varepsilon}(x^\varepsilon) g_i^\varepsilon(x_i^\varepsilon) \ pour\ tout\ \widehat{x}^\varepsilon = \Theta^\varepsilon(x^\varepsilon), x^\varepsilon \in \Omega^\varepsilon$$

on déduit que :

$$f^{i,\varepsilon}(x^\varepsilon) = \widehat{f}^{i,\varepsilon}(\widehat{x}^\varepsilon)[g^{i,\varepsilon}(x^\varepsilon)]_j$$

donc

$$f^{i,\varepsilon} \in L^2(\Omega^\varepsilon) \ si \ \widehat{f}^{i,\varepsilon} \in L^2(\widehat{\Omega}^\varepsilon).$$

et

$$\begin{aligned}\widehat{f}^{i,\varepsilon}(\widehat{x}^\varepsilon)\widehat{v}_i(\widehat{x}^\varepsilon) &= (\widehat{f}^{i,\varepsilon}(\widehat{x}^\varepsilon)\widehat{e}_i^\varepsilon)((\widehat{v}_j(\widehat{x})\widehat{e}^j) \\ &= (f^{i,\varepsilon}(x^\varepsilon)g_i^\varepsilon(x^\varepsilon))(v_i(x^\varepsilon)g^{i,\varepsilon}(x^\varepsilon)) \\ &= f^{i,\varepsilon}(x^\varepsilon)v_i(x^\varepsilon),\end{aligned}$$

pour tout $\widehat{x}^\varepsilon = \Theta^\varepsilon(x^\varepsilon), x^\varepsilon \in \Omega^\varepsilon$ alors :

$$\widehat{f}^{i,\varepsilon}(\widehat{x}^\varepsilon)\widehat{v}_i(\widehat{x}^\varepsilon)d\widehat{x}^\varepsilon = f^{i,\varepsilon}(x^\varepsilon)v_i\sqrt{g^\varepsilon(x^\varepsilon)}dx^\varepsilon \ pour \ tout \ \widehat{x}^\varepsilon = \Theta^\varepsilon(x^\varepsilon), x^\varepsilon \in \Omega^\varepsilon$$

$$\int_{\widehat{\Omega}^\varepsilon} \widehat{f}^{i,\varepsilon}\widehat{v}_i d\widehat{x}^\varepsilon = \int_{\Omega^\varepsilon} f^{i,\varepsilon}v_i\sqrt{g^\varepsilon(x^\varepsilon)}dx^\varepsilon$$

ii) On démontre maintenant que :

$$\int_{\widehat{\Gamma}_-^\varepsilon} \widehat{h}^{i,\varepsilon}\widehat{v}_i d\widehat{\Gamma}^\varepsilon = \int_{\Gamma_-^\varepsilon} h^{i,\varepsilon}v_i\sqrt{g^\varepsilon}d\Gamma^\varepsilon$$

D'après la définition :

$$\widehat{h}^{i,\varepsilon} : \widehat{\Gamma}_-^\varepsilon \longrightarrow \mathbb{R} \ et \ h^{i,\varepsilon} : \Gamma_-^\varepsilon \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\widehat{h}^{i,\varepsilon}(\widehat{x}^\varepsilon)\widehat{e}_i^\varepsilon d\widehat{\Gamma}^\varepsilon(\widehat{x}^\varepsilon) =: h^{i,\varepsilon}(x^\varepsilon)g_i^\varepsilon(x^\varepsilon)\sqrt{g^\varepsilon(x^\varepsilon)}d\Gamma^\varepsilon(x^\varepsilon) \ pour \ tout \ \widehat{x}^\varepsilon = \Theta^\varepsilon(x^\varepsilon), x^\varepsilon \in \Gamma_-^\varepsilon$$

et d'après la relation : $d\widehat{\Gamma}^\varepsilon(\widehat{x}^\varepsilon) = \sqrt{g^\varepsilon(x^\varepsilon)}\sqrt{n_k^\varepsilon(x^\varepsilon)g^{\varepsilon,kl}n_l^\varepsilon(x^\varepsilon)}d\Gamma^\varepsilon(x^\varepsilon)$ on obtient

$$\widehat{h}^{\varepsilon,i}(\widehat{x}^\varepsilon)\widehat{e}_i^\varepsilon = \{n_k^\varepsilon(x^\varepsilon)g^{\varepsilon,kl}n_l^\varepsilon(x^\varepsilon)\}^{-1/2}h^{\varepsilon,i}(x^\varepsilon)g_i^\varepsilon(x^\varepsilon) \ pour \ tout \ \widehat{x}^\varepsilon = \Theta^\varepsilon(x^\varepsilon), x^\varepsilon \in \Gamma_-^\varepsilon$$

on déduit que :

$$h^{\varepsilon,i}(x^\varepsilon) = \sqrt{n_k^\varepsilon(x^\varepsilon)g^{\varepsilon,kl}n_l^\varepsilon(x^\varepsilon)}\widehat{h}^{\varepsilon,i}(\widehat{x}^\varepsilon)[g^{\varepsilon,i}(x^\varepsilon)]_j$$

Donc

$$h^{\varepsilon,i} \in L^2(\Gamma_-^\varepsilon) \ si \ \widehat{h}^{\varepsilon,i} \in L^2(\widehat{\Gamma}_-^\varepsilon)$$

et

$$\int_{\widehat{\Gamma}_-^\varepsilon} \widehat{h}^{\varepsilon,i}\widehat{v}_i d\widehat{\Gamma}^\varepsilon = \int_{\Gamma_-^\varepsilon} h^{\varepsilon,i}v_i\sqrt{g^\varepsilon}d\Gamma^\varepsilon$$

iii) On montre maintenant que :

$$\langle \widehat{G}^{\varepsilon,i}, \widehat{v}_i \rangle = \langle \delta^\varepsilon G^{\varepsilon,i}, v_i \rangle$$

et

$$\langle \widehat{G}^\varepsilon_N, \widehat{v}_N \rangle = \langle \delta^\varepsilon G^\varepsilon_N, v_N \rangle$$

d'après la définition :

$$\widehat{G}^{\varepsilon,i}(\widehat{x}^\varepsilon)\widehat{e}^\varepsilon_i d\widehat{\Gamma}^\varepsilon(\widehat{x}^\varepsilon) = G^{\varepsilon,i}(x)g^\varepsilon_i(x)\sqrt{g^\varepsilon(x^\varepsilon)}d\Gamma^\varepsilon(x^\varepsilon) \textit{ pour tout } \widehat{x}^\varepsilon = \Theta^\varepsilon(x^\varepsilon), x^\varepsilon \in \Gamma^\varepsilon_+$$

et d'après la relation $d\widehat{\Gamma}^\varepsilon(\widehat{x}^\varepsilon) = \sqrt{g^\varepsilon(x^\varepsilon)}\sqrt{n^\varepsilon_k(x^\varepsilon)g^{\varepsilon,kl}n^\varepsilon_l(x^\varepsilon)}d\Gamma^\varepsilon(x^\varepsilon)$ et en utilisant la même procédure que celle utilisée dans l'étape précédente,
on déduit que :

$$G^{\varepsilon,i}(x^\varepsilon) = \sqrt{n^\varepsilon_k(x^\varepsilon)g^{\varepsilon,kl}n^\varepsilon_l(x^\varepsilon)}\widehat{G}^{\varepsilon,j}(\widehat{x}^\varepsilon)[g^{\varepsilon,i}]_j$$

et

$$\langle \widehat{G}^{\varepsilon,i}, \widehat{v}_i \rangle = \langle \delta^\varepsilon G^{\varepsilon,i}, v_i \rangle$$

et

$$\langle \widehat{G}^\varepsilon_N, \widehat{v}_N \rangle = \langle \delta^\varepsilon G^\varepsilon_N, v_N \rangle$$

On calcule maintenant $G^{\varepsilon,i}$:

$$\begin{aligned}
\widehat{G}^{\varepsilon,i} &= \widehat{\sigma}^{\varepsilon,ij}\widehat{n}^\varepsilon_j \\
&= [\lambda^\varepsilon \widehat{e}^\varepsilon_{pp}(\widehat{u}^\varepsilon)a^{ij} + 2\mu^\varepsilon \widehat{e}^\varepsilon_{ij}(\widehat{u}^\varepsilon)]\widehat{n}^\varepsilon_j \\
&= \left[\lambda^\varepsilon e^\varepsilon_{k\|l}g^{\varepsilon,kl}\delta^{ij} + 2\mu^\varepsilon e^\varepsilon_{k\|l}[g^{\varepsilon,k}]_i[g^{\varepsilon,l}]_j\right][a^3]_j \\
&= \lambda^\varepsilon e^\varepsilon_{k\|l}g^{\varepsilon,kl}[a^3]_i + 2\mu^\varepsilon e^\varepsilon_{k\|l}g^{\varepsilon,3l}[g^{k,\varepsilon}]_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G^{\varepsilon,i} &= B\widehat{G}^{\varepsilon,j}[g^{\varepsilon,i}]_j \\
&= B[\lambda^\varepsilon e^\varepsilon_{k\|l}g^{kl,\varepsilon}[a^3]_j + 2\mu^\varepsilon e^\varepsilon_{k\|l}g^{\varepsilon,3l}[g^{\varepsilon,k}]_j][g^{\varepsilon,i}]_j
\end{aligned}$$

tel que

$$B = \sqrt{n_k^\varepsilon(x^\varepsilon) g^{\varepsilon,kl} n_l^\varepsilon(x^\varepsilon)}$$

$$G^{\varepsilon,i} = B[\lambda^\varepsilon e^\varepsilon_{k\|l} g^{\varepsilon kl} g^{\varepsilon,3i} + 2\mu^\varepsilon e^\varepsilon_{k\|l} g^{\varepsilon,3l} g^{\varepsilon,ki}]$$

$$G^{\varepsilon,\alpha} = B[2\mu^\varepsilon e^\varepsilon_{k\|l} g^{\varepsilon,3l} g^{\varepsilon,k\alpha}]$$

$$G^{\varepsilon,3} = B[\lambda^\varepsilon e^\varepsilon_{k\|l} g^{\varepsilon,kl} + 2\mu^\varepsilon e^\varepsilon_{k\|l} g^{\varepsilon,3l} g^{\varepsilon,k3}]$$

iv) On démontre maintenant que :

$$\int_{\widehat{\Omega}^\varepsilon} \widehat{A}^{\varepsilon,ijkl} \widehat{e}^\varepsilon_{kl}(\widehat{u}^\varepsilon) \widehat{e}^\varepsilon_{ij}(\widehat{v}) d\widehat{x}^\varepsilon = \int_{\Omega^\varepsilon} A^{\varepsilon,ijkl} e^\varepsilon_{k\|l}(u^\varepsilon) e^\varepsilon_{i\|j}(v) \sqrt{g^\varepsilon} dx^\varepsilon$$

La définition des symboles de Christoffel $\Gamma^{\varepsilon,q}_{lk} : \overline{\Omega}^\varepsilon \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\Gamma^{\varepsilon,q}_{lk}(x^\varepsilon) = \Gamma^{\varepsilon,q}_{lm}(x^\varepsilon)\delta^m_l = \Gamma^{\varepsilon,q}_{lm}(x^\varepsilon) g^{\varepsilon,m}(x^\varepsilon) = -\partial^\varepsilon_l g^{\varepsilon,q}(x^\varepsilon) g^\varepsilon_k(x^\varepsilon)$$

$$\Gamma^{\varepsilon,a}_{kl} = \Gamma^{\varepsilon,a}_{lk}$$

Soient $\widehat{v}^\varepsilon = (\widehat{v}^\varepsilon_i) \in V^\varepsilon(\widehat{\Omega}^\varepsilon)$ et $v^\varepsilon = (v^\varepsilon_i)$ définis par :

$$\widehat{v}^\varepsilon_i(\widehat{x}^\varepsilon)\widehat{e}^{\varepsilon,i} = v^\varepsilon_i(x^\varepsilon) g^{\varepsilon,i}(x^\varepsilon) \ dans\ V(\Omega^\varepsilon);\ et\ \widehat{v}^\varepsilon_i(\widehat{x}^\varepsilon) = v^\varepsilon_k(x^\varepsilon)[g^{\varepsilon,k}(x^\varepsilon)]_i$$

on déduit que :

$$\begin{aligned}
\widehat{\partial}^\varepsilon_j \widehat{v}^\varepsilon_i(\widehat{x}^\varepsilon) &= \widehat{\partial}^\varepsilon_j v_k(\widehat{\Theta}^\varepsilon(\widehat{x}^\varepsilon))[g^{\varepsilon,k}(x^\varepsilon)]_i + v_q(x^\varepsilon)\widehat{\partial}^\varepsilon_j[g^{\varepsilon,q}(\widehat{\Theta}^\varepsilon(\widehat{x}^\varepsilon))]_i \\
&= (\partial^\varepsilon_l v_k(x^\varepsilon)[g^{\varepsilon,l}(x^\varepsilon)]_j [g^{\varepsilon,k}(x^\varepsilon)]_i + v_q(x^\varepsilon)(\partial^\varepsilon_l[g^{\varepsilon,k}(x^\varepsilon)]_i)[g^{\varepsilon,l}(x^\varepsilon)]_j \\
&= (\partial^\varepsilon_l v_k(x^\varepsilon) - \Gamma^{\varepsilon,q}_{lk}(x^\varepsilon) v_q(x^\varepsilon))[g^{\varepsilon,k}(x^\varepsilon)]_i [g^{\varepsilon,l}(x^\varepsilon)]_j \\
&= v_{k\|l}(x^\varepsilon)[g^{\varepsilon,k}(x^\varepsilon)]_i [g^{\varepsilon,l}(x^\varepsilon)]_j
\end{aligned}$$

où

$$v_{k\|l}(x^\varepsilon) := \partial_l v_k(x^\varepsilon) - \Gamma^{\varepsilon q}_{lk}(x^\varepsilon) v_q(x^\varepsilon)$$

$$\widehat{A}^{\varepsilon ijkl} \widehat{e}^\varepsilon_{kl}(\widehat{u}^\varepsilon) \widehat{e}^\varepsilon_{ij}(\widehat{v}) : \widehat{\Omega}^\varepsilon \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\widehat{A}^{\varepsilon,ijkl} = \lambda^\varepsilon \delta^{ij}\delta^{kl} + \mu^\varepsilon(\delta^{ik}\delta^{jl} + \delta^{il}\delta^{jk})$$

$$A^{\varepsilon,ijkl} := \lambda^\varepsilon g^{\varepsilon,ij} g^{\varepsilon,kl} + \mu^\varepsilon(g^{\varepsilon ik} g^{\varepsilon,jl} + g^{\varepsilon,il} g^{\varepsilon,jk}) = A^{\varepsilon,klij} \in C^1(\overline{\Omega}^\varepsilon)$$

$$
\begin{aligned}
e^{\varepsilon}_{i\|j}(v) &:= \frac{1}{2}(v_{i\|j} + v_{j\|i}) \\
&= \frac{1}{2}(\partial^{\varepsilon}_j v_i + \partial^{\varepsilon}_i v_j) - \Gamma^{\varepsilon,P}_{ij} v_P \\
&= e^{\varepsilon}_{j\|i}(v) \in L^2(\Omega^{\varepsilon})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\widehat{e}^{\varepsilon}_{ij}(\widehat{v})(\widehat{x}^{\varepsilon}) &= \frac{1}{2}(\widehat{\partial}^{\varepsilon}_j \widehat{v}_i + \widehat{\partial}^{\varepsilon}_i \widehat{v}_j)(\widehat{x}^{\varepsilon}) \\
&= \frac{1}{2}(v_{k\|l}[g^{\varepsilon,k}]_i[g^{\varepsilon,l}]_i + v_{k\|l}[g^{\varepsilon,k}]_j[g^{\varepsilon,l}]_i)(x^{\varepsilon}) \\
&= (e^{\varepsilon}_{k\|l}(v)[g^{\varepsilon,l}]_i[g^{\varepsilon,k}]_j)(x^{\varepsilon})
\end{aligned}
$$

on obtient :

$$
\begin{aligned}
\delta^{ij}\widehat{e}^{\varepsilon}_{ij}(\widehat{v})(\widehat{x}^{\varepsilon}) &= \widehat{e}^{\varepsilon}_{pp}(\widehat{v})(\widehat{x}^{\varepsilon}) \\
&= (e^{\varepsilon}_{k\|l}(v)[g^{\varepsilon,l}]_p[g^{\varepsilon,k}]_p)(x^{\varepsilon}) \\
&= (e^{\varepsilon}_{k\|l}(v) g^{\varepsilon,kl})(x^{\varepsilon})
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\delta^{ij}\delta^{kl}\widehat{e}^{\varepsilon}_{kl}(\widehat{u}^{\varepsilon})(\widehat{x}^{\varepsilon})\widehat{e}^{\varepsilon}_{ij}(\widehat{v})(\widehat{x}^{\varepsilon}) &= \widehat{e}^{\varepsilon}_{pp}(\widehat{v})(\widehat{x}^{\varepsilon})\widehat{e}^{\varepsilon}_{qq}(\widehat{v})(\widehat{x}^{\varepsilon}) \\
&= (g^{\varepsilon,ij} g^{\varepsilon,kl} e^{\varepsilon}_{k\|l}(u^{\varepsilon}) e^{\varepsilon}_{i\|j}(v))(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}(\delta^{ik}\delta^{jl} + \delta^{il}\delta^{jk})\widehat{e}^{\varepsilon}_{kl}(\widehat{u}^{\varepsilon})(\widehat{x}^{\varepsilon})\widehat{e}^{\varepsilon}_{ij}(\widehat{v})(\widehat{x}^{\varepsilon}) &= \widehat{e}^{\varepsilon}_{kl}(\widehat{u}^{\varepsilon})(\widehat{x}^{\varepsilon})\widehat{e}^{\varepsilon}_{ij}(\widehat{v})(\widehat{x}^{\varepsilon}) \\
&= (e^{\varepsilon}_{k\|l}(u^{\varepsilon}) e^{\varepsilon}_{m\|n}(v)[g^{\varepsilon,k}]_i[g^{\varepsilon,l}]_j[g^{\varepsilon,m}]_i[g^{\varepsilon,n}]_j)(x^{\varepsilon}) \\
&= (g^{\varepsilon,km} g^{\varepsilon,ln} e^{\varepsilon}_{k\|l}(u^{\varepsilon}) e^{\varepsilon}_{m\|n}(x^{\varepsilon}))(x^{\varepsilon}) \\
&= \frac{1}{2}[(g^{\varepsilon,ik} g^{\varepsilon,jl} + g^{\varepsilon,il} g^{\varepsilon,jk}) e^{\varepsilon}_{k\|l}(u^{\varepsilon}) e^{\varepsilon}_{m\|n}(v)](x^{\varepsilon})
\end{aligned}
$$

on déduite que :

$$
(\widehat{A}^{\varepsilon,ijkl}\widehat{e}^{\varepsilon}_{kl}(\widehat{u}^{\varepsilon})\widehat{e}^{\varepsilon}_{ij}(\widehat{v})(\widehat{x}^{\varepsilon}) = (A^{\varepsilon,ijkl} e^{\varepsilon}_{k\|l}(u^{\varepsilon}) e^{\varepsilon}_{i\|j}(v))(x^{\varepsilon})
$$

alors

$$
\int_{\widehat{\Omega}^{\varepsilon}} \widehat{A}^{\varepsilon,ijkl}\widehat{e}^{\varepsilon}_{kl}(\widehat{u}^{\varepsilon})\widehat{e}^{\varepsilon}_{ij}(\widehat{v}) d\widehat{x}^{\varepsilon} = \int_{\Omega^{\varepsilon}} A^{\varepsilon,ijkl} e^{\varepsilon}_{k\|l}(u^{\varepsilon}) e^{\varepsilon}_{i\|j}(v)\sqrt{g^{\varepsilon}} dx^{\varepsilon}
$$

D'après **i)**, **ii)**, **iii)** et **iv)**, on obtient alors le problème en coordonnées curvilignes.

■

2.3 Le cas avec frottement de Coulomb

On va étudier dans cette partie, le même problème précédent en supposant que le contact unilatéral est avec frottement de Coulomb. L'étude variationnelle de ce problème est déjà faite dans le chapitre 1.

2.3.1 Problème classique $(\widehat{P}^\varepsilon.C)$

$$\left\{\begin{array}{c} Trouver \quad \widehat{u}^\varepsilon \ telsque \\ -\widehat{\partial}_j^\varepsilon \widehat{\sigma}_{ij}^\varepsilon = \widehat{f}_i^\varepsilon \ dans \ \widehat{\Omega}^\varepsilon \\ \widehat{\sigma}_{ij}^\varepsilon \widehat{n}_j^\varepsilon = \widehat{h}_i^\varepsilon \ sur \ \widehat{\Gamma}_- \\ \widehat{u}^\varepsilon = 0 \ sur \ \widehat{\Gamma}_0^\varepsilon \\ \widehat{u}_N^\varepsilon \leq \widehat{d}^\varepsilon, \widehat{G}_N^\varepsilon \leq 0, \widehat{G}_N^\varepsilon(\widehat{u}_N^\varepsilon - \widehat{d}^\varepsilon) = 0, \ sur \ \widehat{\Gamma}_+^\varepsilon \\ |\widehat{\sigma}_\tau^\varepsilon| < \nu |\widehat{\sigma}_N^\varepsilon| \Rightarrow \widehat{u}_\tau^\varepsilon = 0 \quad sur \quad \widehat{\Gamma}_+^\varepsilon \\ |\widehat{\sigma}_\tau^\varepsilon| = \nu |\widehat{\sigma}_N^\varepsilon| \Rightarrow \exists \delta > 0, \widehat{u}_\tau^\varepsilon = -\delta \widehat{\sigma}_\tau^\varepsilon \quad sur \quad \widehat{\Gamma}_+^\varepsilon \end{array}\right. \tag{2.6}$$

tels que :

$$\widehat{\sigma}_{ij}^\varepsilon = \widehat{A}^{ijkl,\varepsilon} \widehat{e}_{kl}^\varepsilon, \widehat{G}_i^\varepsilon = \widehat{\sigma}_{ij}^\varepsilon \widehat{n}_j^\varepsilon \tag{2.7}$$

$$\widehat{e}_{ij}^\varepsilon(\widehat{u}^\varepsilon) = \frac{1}{2}(\widehat{\partial}_i^\varepsilon \widehat{u}_j^\varepsilon + \widehat{\partial}_j^\varepsilon \widehat{u}_i^\varepsilon) \tag{2.8}$$

2.3.2 Problème variationnel $(\widehat{P}^\varepsilon.V)$

Théorème 2.3 *Le problème précédent $(\widehat{P}^\varepsilon.C)$ est formellement équivalent au problème $(\widehat{P}^\varepsilon.V)$.*

$$\left\{\begin{array}{c} Trouver \quad (\widehat{u}^\varepsilon, \widehat{G}^\varepsilon) \in K(\widehat{\Omega}^\varepsilon) \times L^2(\widehat{\Gamma}_+^\varepsilon) \quad telque \\ \widehat{a}^\varepsilon(\widehat{u}^\varepsilon, \widehat{v}^\varepsilon) = \widehat{L}^\varepsilon(\widehat{v}^\varepsilon) + \langle \widehat{G}_N^\varepsilon, \widehat{v}_N^\varepsilon \rangle \quad \forall \widehat{v}^\varepsilon \in V(\widehat{\Omega}^\varepsilon) \\ \langle \widehat{G}_N^\varepsilon, \widehat{v}_N - \widehat{u}_N^\varepsilon \rangle \geq 0, \quad \forall \widehat{v}^\varepsilon \in K(\widehat{\Omega}^\varepsilon) \\ \left\langle \widehat{G}_\alpha^\varepsilon, \widehat{v}_\alpha^\varepsilon - \widehat{u}_\alpha^\varepsilon \right\rangle + \left\langle \nu |\widehat{G}_\alpha^\varepsilon|, |\widehat{v}_\tau^\varepsilon| - |\widehat{u}_\tau^\varepsilon| \right\rangle \geq 0, \forall \widehat{v}^\varepsilon \in V(\widehat{\Omega}^\varepsilon) \end{array}\right. \tag{2.9}$$

$$\widehat{a}^\varepsilon(\widehat{u}^\varepsilon, \widehat{v}^\varepsilon) = \int_{\widehat{\Omega}^\varepsilon} \widehat{A}^{ijkl,\varepsilon} \widehat{e}_{kl}^\varepsilon e_{ij}^\varepsilon(\widehat{v}) \quad d\widehat{x}^\varepsilon$$

$$\widehat{L}^\varepsilon(\widehat{v}) = \int_{\widehat{\Omega}^\varepsilon} \widehat{f}_i^\varepsilon \widehat{v}_i \quad d\widehat{x}^\varepsilon + \int_{\widehat{\Gamma}_-^\varepsilon} \widehat{h}_i^\varepsilon \widehat{v}_i \quad d\widehat{\Gamma}^\varepsilon$$

$$\langle \widehat{G}_i^\varepsilon, \widehat{\phi}_i^\varepsilon \rangle = \int_{\widehat{\Gamma}_+^\varepsilon} \widehat{G}_i^\varepsilon \widehat{\phi}_i^\varepsilon \quad d\widehat{\Gamma}^\varepsilon$$

$$V(\widehat{\Omega}^\varepsilon) = \{\widehat{v}^\varepsilon = (\widehat{v}_i^\varepsilon) \in \mathbf{H}^1(\widehat{\Omega}^\varepsilon), \widehat{v}^\varepsilon = 0 \quad sur \quad \widehat{\Gamma}_0^\varepsilon\}, \mathbf{H}^1(\widehat{\Omega}^\varepsilon) = (H^1(\widehat{\Omega}^\varepsilon))^3$$

$$K(\widehat{\Omega}^\varepsilon) = \{\widehat{v}^\varepsilon \in V(\widehat{\Omega}^\varepsilon)/\widehat{v}_N^\varepsilon \leq \widehat{d}^\varepsilon \quad sur \quad \widehat{\Gamma}_+^\varepsilon\}$$

Preuve. La démonstration est similaire à celle du théorème (1.7) chapitre 1. ■

Remarque 2.3 *Pour $\widehat{u}^\varepsilon$ assez régulier, alors les problème $\widehat{P}^\varepsilon.C$ et $\widehat{P}^\varepsilon.V$ sont équivalents.*

Remarque 2.4 *D'après le premier chapitre, ce problème est équivalent au problème :*

$$\begin{cases} Trouver \quad \widehat{u}^\varepsilon \quad \in K(\widehat{\Omega}^\varepsilon) \quad tel \quad que \\ \widehat{a}^\varepsilon(\widehat{u}^\varepsilon, \widehat{v}^\varepsilon - \widehat{u}^\varepsilon) + J(\widehat{v}^\varepsilon) - J(\widehat{u}^\varepsilon) \geq \widehat{L}^\varepsilon(\widehat{v}^\varepsilon - \widehat{u}^\varepsilon), \quad \forall v^\varepsilon \in K(\widehat{\Omega}^\varepsilon) \end{cases} \tag{2.10}$$

qui admet au moins une solution dans $\boldsymbol{V}$ sous les conditions $\widehat{f}^{i,\varepsilon} \in L^2(\widehat{\Omega}^\varepsilon), \widehat{h}^{i,\varepsilon} \in H^{-1/2}(\widehat{\Gamma}_-^\varepsilon)$ et ν assez petit, cette solution réalise le minimum de la fonctionnelle :

$$F(\widehat{v}^\varepsilon) = \frac{1}{2}\widehat{a}^\varepsilon(\widehat{u}^\varepsilon, \widehat{v}^\varepsilon) + J(\widehat{v}^\varepsilon) - \widehat{L}^\varepsilon(\widehat{v}^\varepsilon), \quad \forall v^\varepsilon \in K(\widehat{\Omega}^\varepsilon)$$

2.3.3 Problème variationnel $(\widehat{P}^\varepsilon.V)$ en coordonnées curvilignes

On transforme le problème précédent écrit en cordonnées cartésiennes $\widehat{x}^\varepsilon = (\widehat{x}_i^\varepsilon)$ en un problème écrit en cordonnées curvilignes $x^\varepsilon = (x_i^\varepsilon)$ mieux adaptées à l'étude des coques.

Théorème 2.4

$$(VP^\varepsilon)\begin{cases} Trouver \quad (u^\varepsilon = \widehat{u}^\varepsilon \circ \Theta^\varepsilon) \in \mathbf{K}(\Omega^\varepsilon) \quad tels \ que \\ a^\varepsilon(u^\varepsilon, v^\varepsilon) = L^\varepsilon(v^\varepsilon) + \langle \delta^\varepsilon G^{i,\varepsilon}, v_i^\varepsilon \rangle, \quad \forall v^\varepsilon \in \mathbf{V}(\Omega^\varepsilon) \\ \langle \delta^\varepsilon G^{3,\varepsilon}, v_3^\varepsilon - u_3^\varepsilon \rangle \geq 0, \quad \forall v^\varepsilon \in \mathbf{K}(\Omega^\varepsilon) \\ \langle \delta^\varepsilon G^{\alpha,\varepsilon}, v_\alpha^\varepsilon - u_\alpha^\varepsilon \rangle + \langle \Lambda \delta^\varepsilon |G^{3,\varepsilon}|, |v_T^\varepsilon| - |u_T^\varepsilon| \rangle \geq 0, \forall v^\varepsilon \in \mathbf{V}(\Omega^\varepsilon) \end{cases} \tag{2.11}$$

tels que

$$a^\varepsilon(u^\varepsilon, v^\varepsilon) = \int_{\Omega^\varepsilon} A^{ijkl,\varepsilon} e_{k\|l}^\varepsilon(u^\varepsilon) e_{i\|j}^\varepsilon(v^\varepsilon) \delta^\varepsilon dx^\varepsilon, \; A^{ijkl,\varepsilon} = \lambda g^{ij,\varepsilon} g^{kl,\varepsilon} + \mu(g^{ik,\varepsilon} g^{jl,\varepsilon} + g^{il,\varepsilon} g^{jk,\varepsilon})$$

$$e_{i\|j}^\varepsilon(v^\varepsilon) = \frac{1}{2}(v_{i\|j}^\varepsilon + v_{j\|i}^\varepsilon), \; v_{i\|j}^\varepsilon = \partial_j^\varepsilon v_i^\varepsilon - \Gamma_{ij}^{k,\varepsilon} v_k^\varepsilon$$

$$L^\varepsilon(v^\varepsilon) = \int_{\Omega^\varepsilon} f^{i,\varepsilon} v_i^\varepsilon \delta^\varepsilon dx^\varepsilon + \int_{\Gamma_-^\varepsilon} h^{i,\varepsilon} v_i^\varepsilon \delta^\varepsilon d\Gamma^\varepsilon$$

$$\langle \delta^\varepsilon G^{i,\varepsilon}, v_i^\varepsilon \rangle = \int_{\Gamma_+^\varepsilon} G^{i,\varepsilon} v_i^\varepsilon \delta^\varepsilon d\Gamma^\varepsilon$$

$$\delta^\varepsilon = \sqrt{g^\varepsilon}$$

et

$$\mathbf{V}(\Omega^\varepsilon) = \{v^\varepsilon = (v_i^\varepsilon) \in \boldsymbol{H}^1(\Omega^\varepsilon), v^\varepsilon = 0 \quad sur \quad \Gamma_0^\varepsilon\}$$

$$\mathbf{K}(\Omega^\varepsilon) = \{v^\varepsilon \in \mathbf{V}(\Omega^\varepsilon) / v_3^\varepsilon \leq d^\varepsilon \quad sur \quad \Gamma_+^\varepsilon\}$$

Preuve. La démonstration est similaire à celle du théorème 2.2 chapitre 2. ■

Chapitre 3

L'analyse asymptotique d'un problème de contact unilatéral d'une coque mince contre un obstacle rigide dans l'élasticité linéaire

3.1 Introduction

Ce chapitre [1] est consacré à l'obtention par l'analyse asymptotique *formelle* des modèles bidimensionnels "membranaire" et "couplé flexion-membrane" pour des coques élastiques minces.

L'idée de base d'une première famille de théories de coques est de prendre en compte la géométrie particulière d'un tel milieu et, par intégration sur l'épaisseur, d'obtenir un modèle bidimensionnel formulé sur la surface moyenne de la coque et représentant une bonne approximation du modèle tridimensionnel.

On considère une coque élastique mince dont l'épaisseur 2ε est petite par rapport à ses autres longueurs encastrée sur une partie de sa frontière, sous l'action des forces de volume et des forces de surface, il subit un champ de déplacement. Ce champ de déplacement et le tenseur des contraintes sont solutions d'un problème variationnel $P^{\varepsilon}(\Omega^{\varepsilon})$ en coordonnées curvilignes qui suivent de façon plus naturelle la géométrie de

1. Ce chapitre est l'objet d'une communication au seminaire international RAMA7, Batna, Algerie.

la coque. On écrit le problème variationnel sur un domaine indépendant de l'épaisseur (paragraphe 3.2.4). Le développement asymptotique permet d'obtenir formellement des modèles limites bidimensionnels posés sur la surface moyenne de la coque (paragraphe 3.2.5).

On considère une coque $\widehat{\Omega}^\varepsilon = \Theta^\varepsilon(\Omega^\varepsilon)$ de frontière $\widehat{\Gamma}^\varepsilon, (\Omega^\varepsilon = \omega\times]-\varepsilon, +\varepsilon[$ de frontière $\Gamma^\varepsilon)$, tel que ω est un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^2$, de frontière γ lipschitzienne , d'épaisseur 2ε (ε est petit), de surface moyenne $S = \Theta(\overline{\omega})$, telle que $\Theta \in C^3(\omega, \mathbb{R}^3)$, constituée d'un matériau élastique homogène et isotrope, son tenseur de rigidité $A^\varepsilon = (A^{ijkl,\varepsilon})$ vérifie :

$$\left\{\begin{array}{c} A^{ijkl,\varepsilon}(X^\varepsilon) \in L^\infty(\Omega^\varepsilon) \\ A^{ijkl,\varepsilon} = A^{jikl,\varepsilon} = A^{klij,\varepsilon} = A^{klji,\varepsilon} \\ \exists C > 0, A^{ijkl,\varepsilon}\tau_{ij}\tau_{kl} \geqslant C\tau_{ij}\tau_{ij}, \forall \tau_{ij} = \tau_{ji} \end{array}\right. \tag{3.1}$$

La coque est soumise à des forces volumiques dans $\widehat{\Omega}^\varepsilon$ et à des forces surfaciques sur $\widehat{\Gamma}^\varepsilon_-, (\widehat{\Gamma}^\varepsilon_\pm = \Theta^\varepsilon(\Gamma^\varepsilon_\pm = \omega \times \{\pm\varepsilon\}))$, les densités de ces forces sont respectivement données par leurs composantes contravariantes : $f^\varepsilon = (f^{i,\varepsilon}) \in (L^2(\Omega^\varepsilon))^3$ et $h^\varepsilon = (h^{i,\varepsilon}) \in (L^2(\Gamma^\varepsilon_-))^3$. De plus, la coque est encastrée sur la partie $\Theta^\varepsilon(\Gamma^\varepsilon_0), (\Gamma^\varepsilon_0 = \gamma_0 \times [-\varepsilon, +\varepsilon], \gamma_0 \subset \gamma)$ de la frontière latérale, alors $u^\varepsilon = 0$ sur Γ^ε_0, est entre en contact unilatéral avec un obstacle rigide occupant le domaine $\bigcirc^\varepsilon = \{x^\varepsilon \in \mathbb{R}^3/(x^\varepsilon_1, x^\varepsilon_2) \in \omega, x^\varepsilon_3 > d^\varepsilon\}, d^\varepsilon \geq 0$ dans $H^2_0(\omega)$, d est une fonction d'interstice définie sur ω.
La condition de contact est définie par l'inégalité : $\overline{v}_3 \leq d$ d'où la notation :
$K(\Omega^\varepsilon) = \{v \in V(\Omega^\varepsilon)/\overline{v}_3 \leq d\}$ est l'espace des déplacements admissibles avec condition de contact.
Dans l'étude asymptotique, on va procéder en déplacement u^ε qui vérifie le problème $P^\varepsilon(\Omega^\varepsilon)$ en coordonnées curvilignes .
On va étudier chaque fois le cas de contact sans frottement puis le cas de contact avec frottement de Coulomb.

3.2 Le cas de contact sans frottement

3.2.1 Position du problème variationnel sur un domaine indépendant de l'épaisseur

Pour cela il est important que le domaine sur lequel est posé le problème ne dépend pas de ε. On définit les ensembles suivants :
$\Omega = \omega \times]-1,+1[$ ainsi que $\Gamma = \gamma \times [-1,+1]$, $\Gamma_0 = \gamma_0 \times [-1,+1]$ *et* $\Gamma_\pm = \omega \times \{\pm 1\}$.
On note $x = (x_i)$ un point de $\overline{\Omega}$ et on pose $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$.

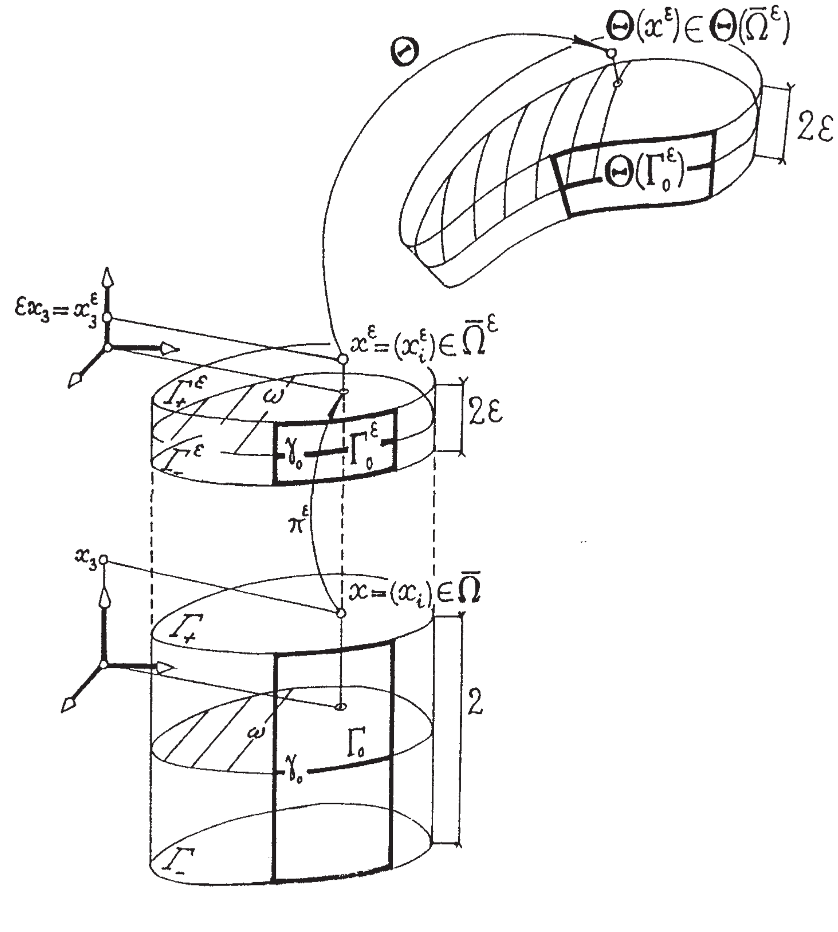

FIGURE 3.1 – Transformation en domaine indépendant de ε.

On construit l'application π^ε bijective de $\overline{\Omega}$ dans $\overline{\Omega}^\varepsilon$ de la façon suivante (voir figure 3.1) :

$$\pi^\varepsilon : x = (x_1, x_2, x_3) \in \overline{\Omega} \to \pi^\varepsilon(x) = x^\varepsilon = (x_1, x_2, \varepsilon x_3) \in \overline{\Omega}^\varepsilon \tag{3.2}$$

d'où : $\partial_\alpha^\varepsilon = \partial_\alpha \;\; et \;\; \partial_3^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\partial_3$.

A toute fonction κ^ε définie sur Ω^ε, on associe la fonction "mise à l'échelle" définie sur Ω par :

$$\kappa^\varepsilon(x^\varepsilon) = \kappa(\varepsilon)(x), x^\varepsilon \in \Omega^\varepsilon, x \in \Omega \tag{3.3}$$

On définit ainsi les fonctions :

$$\lambda^\varepsilon = \lambda \quad , \quad \mu^\varepsilon = \mu$$

$$u_i(\varepsilon)(x) = u_i^\varepsilon(x^\varepsilon), f^i(\varepsilon)(x) = f^{i,\varepsilon}(x^\varepsilon), v_i^\varepsilon(x^\varepsilon) = v_i(x)$$

$$A^{ijkl}(\varepsilon)(x) = A^{ijkl,\varepsilon}(x^\varepsilon), h^i(\varepsilon)(x) = h^{i,\varepsilon}(x^\varepsilon) \;\; pour \;\; x^\varepsilon \in \Gamma_-^\varepsilon \;\; et \;\; x \in \Gamma_-$$

$$G^{i,\varepsilon}(x^\varepsilon) = \varepsilon^p G^i(\varepsilon)(x); p \in \{1, 3\} \;\; pour \;\; x^\varepsilon \in \Gamma_+^\varepsilon \;\; et \;\; x \in \Gamma_+$$

$$e_{i\|j}^\varepsilon(u^\varepsilon) = e_{i\|j}(\varepsilon, u(\varepsilon)), \Gamma_{ij}^k(\varepsilon)(x) = \Gamma_{ij}^{k,\varepsilon}(x^\varepsilon), \forall x^\varepsilon \in \overline{\Omega^\varepsilon} \;\; et \;\; x \in \Omega$$

On peut alors récrire le problème variationnel $P^\varepsilon(\Omega^\varepsilon)$ sur l'ouvert fixe Ω :

$$P(\varepsilon, \Omega) \begin{cases} Trouver \;\; u(\varepsilon) \in \mathbf{K}(\Omega); tels \;\; que : \\ \int_\Omega A^{ijkl}(\varepsilon) e_{k\|l}(\varepsilon, u(\varepsilon)) e_{i\|j}(\varepsilon, v)\sqrt{g(\varepsilon)}dx \\ = \int_\Omega f^i(\varepsilon) v_i \sqrt{g(\varepsilon)}dx + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Gamma_-} h^i(\varepsilon) v_i \sqrt{g(\varepsilon)} d\Gamma \\ +\varepsilon^{p-1}\left\langle \sqrt{g(\varepsilon)} G^3(\varepsilon), v_3 \right\rangle \quad \forall v \in \mathbf{V}(\Omega) \\ \left\langle \sqrt{g(\varepsilon)} G^3(\varepsilon), v_3 - u_3(\varepsilon) \right\rangle \geqslant 0 \;\; \forall v \in \mathbf{K}(\Omega) \end{cases} \tag{3.4}$$

tels que :

$$e_{i\|j}(\varepsilon, v) = \frac{1}{2}(v_{i\|j}(\varepsilon) + v_{j\|i}(\varepsilon)) \tag{3.5}$$

$$v_{i\|j}(\varepsilon) = \partial_j v_i - \Gamma_{ij}^k(\varepsilon) v_k \tag{3.6}$$

$$\mathbf{V}(\Omega) = \{v = (v_i) \in \mathbf{H}^1(\Omega), v = 0 \;\; sur \;\; \Gamma_0\} \tag{3.7}$$

$$\mathbf{K}(\Omega) = \{v \in \mathbf{V}(\Omega)/v_3 \leq d\}, d = d^\varepsilon \tag{3.8}$$

3.2.2 Identification d'un problème variationnel bidimensionnel

Définition de la surface moyenne

Soit $\mathcal{E}^3$ l'espace euclidien habituel rapporté á un repére orthonormé fixe $(0, e_1, e_2, e_3)$, et soit ω un sous-ensemble ouvert borné du plan $\mathcal{E}^2$dont la frontière est notée γ. Alors, la surface moyenne $\overline{S}$ de la coque est l'image dans $\mathcal{E}^3$ de l'ensemble $\overline{\omega}$ (ω est appelé domaine de référence)par l'application θ :

$$\theta : (\zeta^1, \zeta^2) \in \overline{\omega} \subset \mathcal{E}^2 \to \theta(\zeta^1, \zeta^2) \in \overline{S} \subset \mathcal{E}^3.$$

Nous notons $\partial S = \theta(\gamma)$, *de telle sorte que* $\overline{S} = S \cup \partial S$, et nous supposons θ *et* γ suffisamment réguliéres. En particulier, nous supposons que tous les points de la surface moyenne $\overline{S} = \theta(\overline{\omega})$ sont réguliers de telle sorte que les vecteurs,

$$a_\alpha = \frac{\partial \theta}{\partial \zeta^\alpha}, \;\; \alpha = 1, 2,$$

sont linéairement indépendants pour tous les points $\zeta = (\zeta^1, \zeta^2) \in \overline{\omega}$. Ces deux vecturs définissent le plan tangent á la surface $\overline{S}$ *en tout point* $\theta(\zeta)$. Le vecteur normal au plan tangent est donné par,

$$a_3 = \frac{a_1 \times a_2}{|a_1 \times a_2|},$$

$|.|$ désignant la norme euclidienne dans l'espace ξ^3 équipé du produit scalaire habituel $(a, b) \to a.b$. Alors , le point $\theta(\zeta)$ et les trois vecteurs a_i définissent un repére local pour la surface moyenne (voir figure3.2), i.e., la base covariante attachée au point $\theta(\zeta)$.

Nous désignons par $a_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta}$ les premiére et seconde formes fondamentales de la surface moyenne S ; autrement dit,

$$a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha} = a_\alpha a_\beta$$

$$b_{\alpha\beta} = a_3.\partial_\alpha a_\beta = -\partial_\alpha a_3.a_\beta = b_{\beta\alpha}$$

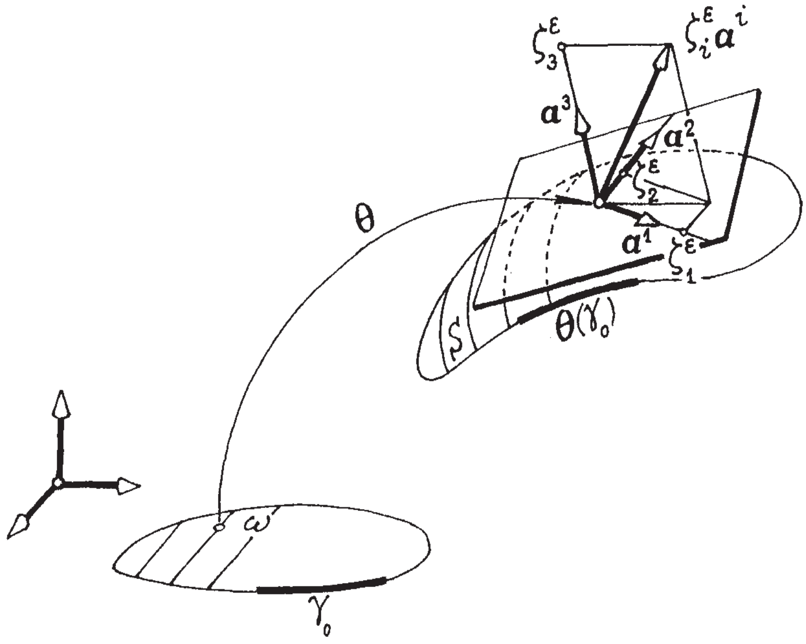

FIGURE 3.2 – Définition de la surface moyenne

Dans toute la suite, nous utilisons des lettres grecques,$\alpha, \beta, ...,$ pour des indices prenant leurs valeurs dans l'ensemble$\{1, 2\}$, des lettres latines, i, j,...,pour les indices prenant leurs valeurs dans l'ensemble $\{1, 2, 3\}$et nous adoptons la convention de sommation sur les indices répétés haut et bas. Aux vecteurs a_α, nous associons deux autres vecteurs a^β du plan tangent définis par,

$$a_\alpha.a^\beta = \delta_\alpha^\beta,$$

$$\delta_\alpha^\beta = \begin{cases} 1 \ si \ \alpha = \beta \\ 0 \ si \ \alpha \neq \beta \end{cases}, \tag{3.9}$$

Ces vecteurs sont reliés aux vecteurs a_α par les relations,

$$a_\alpha = a_{\alpha\beta}a^\beta,\ a^\alpha = a^{\alpha\beta}a_\beta,\ a^{\alpha\beta} = a^\alpha a^\beta = a^{\beta\alpha},$$

où la matrice $(a^{\alpha\beta})$ est l'inverse de la matrice $(a_{\alpha\beta})$. Cette matrice inverse est bien définie car tous les points de la surface moyenne S sont supposés réguliers.
L'ensemble (a^1, a^2, a^3) définit la base contravariante attachée au point $\theta(\zeta)$.
Pour un tenseur donné, les tenseurs métriques $(a_{\alpha\beta})$ et $(a^{\alpha\beta})$ nous permettent d'associer les composantes covariantes, contravariantes et mixtes d'un tenseur donné. Par exemple, aux composantes covariantes $b_{\alpha\beta}$ de la seconde forme fondamentale, nous pouvons associer les composantes mixtes et la contravariantes correspondantes

$$b_\alpha^\beta = a^{\beta\lambda}b_{\lambda\alpha};\quad b^{\alpha\beta} = a^{\alpha\lambda}a^{\beta\nu}b_{\lambda\nu},$$

et inversement,

$$b_{\alpha\beta} = a_{\alpha\lambda}b_\beta^\lambda = a_{\alpha\lambda}a_{\beta\nu}b^{\lambda\nu}.$$

Étant donné que les bases (a_1, a_2, a_3) et (a^1, a^2, a^3) ne sont en général ni normées ni orthogonales, il est commode d'introduire les symboles de Christoffel $\Gamma_{\beta\sigma}^\alpha$ pour,

$$\Gamma_{\beta\sigma}^\alpha = a^\alpha \partial_\beta a_\sigma = -\partial_\beta a^\alpha a_\sigma = \Gamma_{\sigma\beta}^\alpha.$$

Il est également commode de préciser les expressions de quelques produits vectoriels des fonctions de base :

$$\left\{\begin{array}{c} a_\alpha \times a_\beta = \varepsilon_{\alpha\beta}a^3;\ a^\alpha a^\beta = \varepsilon^{\alpha\beta}a_3 \\ a_3 \times a_\beta = \varepsilon_{\beta\lambda}a^\lambda;\ \ a_3 \times a^\beta = \varepsilon^{\beta\lambda}a_\lambda, \end{array}\right. , \tag{3.10}$$

où

$$a = a_{11}a_{22} - (a_{12})^2 \neq 0 \ \ (points\ \ rgulies).$$

Le paramètre dans l'expression de l'élément d'aire dS de la surface qui est donné par,

$$dS = |a_1 \times a_2| d\zeta^1 d\zeta^2 = \sqrt{a} d\zeta^1 d\zeta^2.$$

Remarque 3.1 *(Liens entre $a_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta}$ et les courbures de la surface moyenne.) La première forme fondamentale $a_{\alpha\beta}$ est attachée aux caractéristiques métriques de la surface moyenne tandis que la seconde forme fondamentale $b_{\alpha\beta}$ est attachée aux caractéristiques de courbure de cette surface moyenne. Ces formes $a_{\alpha\beta}$ et $b_{\alpha\beta}$ sont naturellement dépendantes du choix de la représentation θ choisie.*

Etude asymptotique

L'objectif de l'analyse asymptotique est de connaître le comportement de la solution $u(\varepsilon)$ du problème $P(\varepsilon, \Omega)$ lorsque ε tend vers zéro. Nous commençons maintenant l'analyse asymptotique du problème variationnel $P(\varepsilon, \Omega)$.
On suppose que la solution de ce problème admet un développement asymptotique formel.

$$u(\varepsilon) = u^0 + \varepsilon u^1 + \varepsilon^2 u^2 ... \quad u_0 \neq 0 \quad avec \quad u^q \in \mathbf{K}(\Omega), \quad q \in \{0, 1, 2, ...\} \tag{3.11}$$

Nous énonçons maintenant quelques résultats qu'on aura besoin par la suite.

Théorème 3.1 *Soit ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^2$ de frontière γ lipschitzienne, soit $\theta \in C^3(\overline{\omega}, \mathbb{R}^3)$ une application injective telle que les deux vecteurs $a_\alpha = \partial_\alpha \theta$ soient linéairement indépendants en tout point de $\overline{\omega}$ et soit $\varepsilon_0 > 0$ (existe toujours), tel que l'application $\Theta : \overline{\Omega_0} \to \mathbb{R}^3$ définie par $\Theta(y, x_3) = \theta(y) + x_3 a_3(y)$ pour tout $(y, x_3) \in \overline{\Omega_0}$, où $\Omega_0 = \omega \times] - \varepsilon_0, +\varepsilon_0[$, est C^1- difféomorphisme de $\overline{\Omega_0}$ dans $\Theta(\overline{\Omega}_0)$ et det $(g_1, g_2, g_3) > 0$ dans $\overline{\Omega}_0, g_i = \partial_i \Theta$, voir ([6, Theorem 3.1.1]). Les fonctions $g(\varepsilon), \Gamma^k_{ij}(\varepsilon), b_{\alpha\beta}, b^\sigma_\alpha, \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ sont définies dans la section 2.2.3 (chapitre 2), les dérivées covariantes $b^\sigma_{\beta|\alpha}$ sont définies par :*

$$b^\sigma_{\beta|\alpha} = \partial_\alpha b^\alpha_\beta + \Gamma^{\sigma *}_{\alpha\tau} b^\tau_\beta - \Gamma^{\tau *}_{\alpha\beta} b^\sigma_\tau,$$

et les fonctions $b_{\alpha\beta}$,b^σ_α,$\Gamma^{\gamma *}_{\alpha\beta}$,$b^\sigma_{\beta|\alpha}$et a(a=det($a_{\alpha\beta}$)) sont identifiées à des fonctions de $C^0(\overline{\Omega})$.

Alors :

$$\Gamma_{ij}^{k}(\varepsilon)(x) = \Gamma_{ij}^{k,0} + \varepsilon x_3 \Gamma_{ij}^{k,1} + O(\varepsilon^2),$$

$\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma,0} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma *}$, $\Gamma_{\alpha\beta}^{3,0} = b_{\alpha\beta}$, $\Gamma_{\alpha 3}^{\beta,0} = -b_{\alpha}^{\beta}$, $\Gamma_{i3}^{3,0} = \Gamma_{33}^{i,0} = 0$, $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma,1} = -b_{\alpha|\beta}^{\gamma}$, $\Gamma_{\alpha\beta}^{3,1} = -b_{\alpha}^{\sigma} b_{\sigma\beta}$, $\Gamma_{\alpha 3}^{\gamma,1} = -b_{\alpha}^{\sigma} b_{\sigma}^{\gamma}$, $\Gamma_{i3}^{3,1} = \Gamma_{33}^{i,1} = 0$.

$$\partial_3 \Gamma_{\alpha\beta}^{k}(\varepsilon) = O(\varepsilon), g(\varepsilon) = a + O(\varepsilon),$$

pour tout $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$*, ou* $O(\varepsilon)$*,* $O(\varepsilon^2)$ *sont définis par rapport à la norme usuelle de* L^{∞}*.*

Finallement, il existe des constantes a_0*,* g_0 *et* g_1 *telles que :* $0 < a_0 \leq a_y$ *pour tout* $y \in \overline{\omega}$*,* $0 < g_0 \leq g(\varepsilon)(x) \leq g_1$*, pour tout* $x \in \overline{\Omega}$ *et* $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$*.*

Preuve. La démonstration est similaire à celle du ([6, Theorem 3.3.1]). ■

Théorème 3.2 a) *Soient* ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^2$ *et* $\theta \in C^1(\overline{\omega}; \mathbb{R}^2)$ *une application injective telle que les deux vecteurs* $a_\alpha = \partial_\alpha \theta$ *soient linéairement indépendants en tout point de* $\overline{\Omega}$*.*

Soit $a^{\alpha\beta}$ *les composantes contravariantes du tenseur métrique de* $S = \theta(\overline{\omega})$*, les composants contravariantes* $2D$ *du tenseur de l'élasticté de la coque sont définies par :* $a^{\alpha\beta\sigma\tau} := \frac{4\lambda\mu}{\lambda+2\mu} a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + 2\mu(a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma})$

avec $\lambda \geq 0$ *et* $\mu > 0$*. Alors il existe une constante,* $C_e(\omega, \theta, \mu) > 0$ *telle que, pour tout* $y \in \overline{\omega}$ *et toutes les matrices symétriques* $(\tau_{\alpha\beta})$ $\sum_{\alpha,\beta} \mid \tau_{\alpha\beta} \mid^2 \leq C_e a^{\alpha\beta\sigma\tau}(y) \tau_{\sigma\tau} \tau_{\alpha\beta}$

b) *Soit* $\theta \in C^2(\overline{\omega}, \mathbb{R}^3)$ *et soit les autres suppositions sur l'application* θ *et la définitions de* ε_0 *est comme dans ([6, Theorem 3.1.1]). Les composantes contravariantes du tenseur de l'élasticité tridimensionnelle* $A^{ijkl}(\varepsilon) = A^{jikl}(\varepsilon) = A^{klij}(\varepsilon)$ *([6, Theorem 3.2.1]) satisfait :* $A^{ijkl}(\varepsilon) = A^{ijkl}(0) + O(\varepsilon)$ *et* $A^{\alpha\beta\sigma 3}(\varepsilon) = A^{\alpha 333}(\varepsilon) = 0$

pour tout $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ *où* $O(\varepsilon)$ *sont définis par rapport à la norme* $\|,\|_{0,\infty,\overline{\Omega}}$ *(définie dans ([6, Theorem 3.3.1])) et*

$A^{\alpha\beta\sigma\tau}(0) := \lambda a^{\alpha\beta}a^{\sigma\tau} + \mu(a^{\alpha\sigma}a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau}a^{\beta\sigma\sigma})$

$A^{\alpha\beta 33}(0) := \lambda a^{\alpha\beta}, A^{\alpha 3\sigma 3}(0) := \mu a^{\alpha\sigma}, A^{3333}(0) := \lambda + 2\mu$

$A^{\alpha\beta\sigma 3}(0) = A^{\alpha 333}(0) = 0$

Finalement il existe une constante $C_e > 0$ *telle que :*

$\sum_{i,j} \mid \tau_{ij} \mid^2 \leq C_e A^{ijkl}(\varepsilon)(x)\tau_{kl}\tau_{ij},$

ou $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$*, pour tout* $x \in \overline{\Omega}$ *et toutes les matrices symétriques* (τ_{ij})*.*

Preuve. La démonstration est similaire à celle du ([6, Theorem 3.3.2]). ■

Théorème 3.3 *Soient Les fonctions :* $\sigma(\varepsilon)^+ : \overline{\omega} \to \mathbb{R}$ *et* $\sigma(\varepsilon)^- : \overline{\omega} \to \mathbb{R}$ *définies par :*

$$\sigma(\varepsilon)^+(y) = \sigma(\varepsilon)(y,1), \sigma(\varepsilon)^-(y) = \sigma(\varepsilon)(y,-1) \;\; pour \;\; tout \;\; y \;\; \in \overline{\omega}$$

où la fonction $\sigma(\varepsilon) : \Gamma_+ \cup \Gamma_- \to \mathbb{R}$ *est définie par :*

$\sigma(\varepsilon)(x) := (det\nabla^\varepsilon\Theta(x^\varepsilon))\,|\nabla^\varepsilon\Theta(x^\varepsilon)^{-T}n^\varepsilon(x^\varepsilon)|$ *pour tout* $x^\varepsilon \in \Gamma_+^\varepsilon \cup \Gamma_-^\varepsilon$

alors : $\|\sigma(\varepsilon)^+ - \sqrt{a}\|_{1,\infty;\overline{\omega}} + \|\sigma(\varepsilon)^- - \sqrt{a}\|_{1,\infty;\overline{\omega}} < C\varepsilon$

Preuve. voir ([3, lemme 6.1] ■

D'après (3.11) et [6, Theorem 3.3.1], on obtient le développement asymptotique de $e_{i\|j}(\varepsilon; u(\varepsilon)),\;\; e_{i\|j}(\varepsilon.v)$.

$e_{i\|j}(\varepsilon; u(\varepsilon)) = \frac{1}{\varepsilon}e^{-1}_{i\|j} + e^0_{i\|j} + \varepsilon e^1_{i\|j} + \varepsilon^2 e^2_{i\|j} + ...$

où :

$$\left\{ \begin{array}{c} e^{-1}_{\alpha\|\beta} = 0 \\ e^{-1}_{\alpha\|3} = \frac{1}{2}\partial_3 u^0_\alpha \\ e^{-1}_{3\|3} = \partial_3 u^0_3 \end{array} \right. \tag{3.12}$$

$$\left\{\begin{array}{c} e^0_{\alpha\|\beta} = \frac{1}{2}(\partial_\beta u^0_\alpha + \partial_\alpha u^0_\beta) - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} u^0_\sigma - b_{\alpha\beta} u^0_3 \\ e^0_{\alpha\|3} = \frac{1}{2}(\partial_3 u^1_\alpha + \partial_\alpha u^0_3) + b^\sigma_\alpha u^0_\sigma \\ e^0_{3\|3} = \partial_3 u^1_3 \end{array}\right. \tag{3.13}$$

$$\left\{\begin{array}{c} e^1_{\alpha\|\beta} = \frac{1}{2}(\partial_\beta u^1_\alpha + \partial_\alpha u^1_\beta) - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} u^1_\sigma - b_{\alpha\beta} u^1_3 + x_3\{b^\sigma_{\beta|\alpha} u^0_\sigma + b^\sigma_\alpha b_{\sigma\beta} u^0_3\}, \\ e^1_{\alpha\|3} = \frac{1}{2}(\partial_3 u^2_\alpha + \partial_\alpha u^1_3) + b^\sigma_\alpha u^1_\sigma + x_3 b^\tau_\alpha b^\sigma_\tau u^0_\sigma \\ e^1_{3\|3} = \partial_3 u^2_3 \end{array}\right. \tag{3.14}$$

$e_{ij}(\varepsilon; v) = \frac{1}{\varepsilon} e^{-1}_{i\|j}(v) + e^0_{i\|j}(v) + \varepsilon e^1_{i\|j}(v) + \varepsilon^2 e^2_{i\|j}(v) + ...$
où :

$$\left\{\begin{array}{c} e^{-1}_{\alpha\|\beta}(v) = 0 \\ e^{-1}_{\alpha\|3}(v) = \frac{1}{2}\partial_3 v_\alpha \\ e^{-1}_{3\|3}(v) = \partial_3 v_3 \end{array}\right. \tag{3.15}$$

$$\left\{\begin{array}{c} e^0_{\alpha\|\beta}(v) = \frac{1}{2}(\partial_\beta v_\alpha + \partial_\alpha v_\beta) - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} v_\sigma - b_{\alpha\beta} v_3 \\ e^0_{\alpha\|3}(v) = \frac{1}{2}\partial_\alpha v_3 + b^\sigma_\alpha v_\sigma \\ e^0_{3\|3}(v) = 0 \end{array}\right. \tag{3.16}$$

$$\left\{\begin{array}{c} e^1_{\alpha\|\beta}(v) = x_3 b^\sigma_{\beta|\alpha} v_\sigma + x_3 b^\sigma_\alpha b_{\sigma\beta} v_3 \\ e^1_{\alpha\|3}(v) = x_3 b^\tau_\alpha b^\sigma_\tau v_\sigma \\ e^{-1}_{3\|3}(v) = 0 \end{array}\right. \tag{3.17}$$

Le comportement asymptotique des fonctions $g(\varepsilon)$, B^ε, $A^{ijkl}(\varepsilon)$ et G^ε (voir théorème,(3.1),(3.2) et (3.3)) implique que (rappelons que $\theta \in C^3(\overline{\omega}, \mathbb{R}^3)$ par hypothèse)

$$g(\varepsilon) = a + O(\varepsilon)$$

$$B^\varepsilon = 1 + O(\varepsilon)$$

$$A^{ijkl}(\varepsilon)\sqrt{g(\varepsilon)} = A^{ijkl}(0)\sqrt{a} + \varepsilon B^{ijkl,1} + \varepsilon^2 B^{ijkl,2} + o(\varepsilon^2)$$

$$\begin{aligned} G^{\alpha,\varepsilon} &= B^\varepsilon[2\mu^\varepsilon e^\varepsilon_{k\|l} g^{3l,\varepsilon} g^{k\alpha,\varepsilon}] \\ &= B^\varepsilon[2\mu^\varepsilon e^\varepsilon_{k\|3} g^{k\alpha,\varepsilon}] \\ &= \frac{1}{\varepsilon}(2\mu a^{\alpha\beta} e^{-1}_{\beta\|3}) + 2\mu(2x_3 a^{\alpha\sigma} b^\beta_\sigma e^{-1}_{\beta\|3} + a^{\alpha\beta} e^0_{\beta\|3}) + \varepsilon 2\mu(2x_3 a^{\alpha\sigma} b^\beta_\sigma e^0_{\beta\|3} + a^{\alpha\beta} e^1_{\beta\|3}) \\ &+ \varepsilon^2 2\mu(a^{\alpha\beta} e^2_{\beta\|3} + 2x_3 a^{\alpha\sigma} b^\beta_\sigma e^1_{\beta\|3}) + \varepsilon^3 2\mu(a^{\alpha\beta} e^3_{\beta\|3} + 2x_3 a^{\alpha\sigma} b^\beta_\sigma e^2_{\beta\|3}) + ... \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
G^{3\varepsilon} &= B^{\varepsilon}[\lambda^{\varepsilon} e^{\varepsilon}_{k\|l} g^{kl,\varepsilon} + 2u^{\varepsilon} e^{\varepsilon}_{k\|l} g^{3l,\varepsilon} g^{3k,\varepsilon}] \\
&= B^{\varepsilon}[\lambda^{\varepsilon} e^{\varepsilon}_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta,\varepsilon}] + (\lambda^{\varepsilon} + 2u^{\varepsilon}) e^{\varepsilon}_{3\|3}] \\
&= \frac{1}{\varepsilon}(\lambda + 2\mu) e^{-1}_{3\|3} + [\lambda a^{\alpha\beta} e^{0}_{\alpha\|\beta} + (\lambda + 2\mu) e^{0}_{3\|3}] + \varepsilon[2x_3 a^{\alpha\sigma} b^{\beta}_{\sigma} e^{0}_{\alpha\|\beta} + a^{\alpha\beta} e^{1}_{\alpha\|\beta} + (\lambda + 2\mu) e^{1}_{3\|3}] \\
&+ \varepsilon^2[a^{\alpha\beta} e^{2}_{\alpha\|\beta} + 2x_3 a^{\alpha\sigma} b^{\beta}_{\sigma} e^{1}_{\alpha\|\beta} + (\lambda + 2\mu) e^{2}_{3\|3}] + \varepsilon^3[a^{\alpha\beta} e^{3}_{\alpha\|\beta} + 2x_3 a^{\alpha\sigma} b^{\beta}_{\sigma} e^{2}_{\alpha\|\beta} + (\lambda + 2\mu) e^{3}_{3\|3}] + ...
\end{aligned}
$$

Théorème 3.4 *:*

Soit ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ de frontière γ, soit $\Omega = \omega \times]-1,1[$, et soit $\psi \in L^p(\Omega)$ $p > 1$

vérifiant $\int_\Omega \psi \partial_3 \upsilon dx = 0$, pour tout $\upsilon \in C^\infty(\overline{\Omega})$

tel que : $\upsilon = 0$ sur $\gamma \times [-1,1]$.

Alors : $\psi = 0$

Preuve. Soit $\varphi \in D(\Omega)$ et on prend $\upsilon : \overline{\Omega} \to R$ définie par :
$\upsilon(x_1, x_2, x_3) = \int_{-1}^{x_3} \varphi(x_1, x_2, \tau) d\tau$ pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \overline{\Omega}$.
alors $\upsilon \in C^\infty(\overline{\Omega})$ et $\upsilon = 0$ sur $\gamma \times [-1,1]$;
donc $\int_\Omega \psi \varphi dx = \int_\Omega \psi \partial_3 \upsilon dx = 0$
ce que entraîne $\psi = 0$ p.p sur Ω ■

3.2.3 Modèles des coques membranaires

On se propose quelques modèles bidimentionnels de coques membranaires obtenus par l'analyse asymptotique formelle à partir du modèle tridimentionnel de coques élastiques minces constituées d'un matériau isotrope et homogène.

On suppose qu'il existe deux fonctions $f^{i,0} \in L^2(\Omega)$ et $h^{i,1} \in L^2(\Gamma_-)$ telles que :

$$f^i(\varepsilon)(x) = f^{i,0}(x), \quad x \in \Omega \tag{3.18}$$

$$h^i(\varepsilon)(x) = \varepsilon h^{i,1}, \quad \textit{pour tout } x \in \Gamma_- \tag{3.19}$$

$$G^{3,\varepsilon}(x^\varepsilon) = \varepsilon G^3(\varepsilon)(x) \quad \textit{pour tout } x \in \Gamma_+ \tag{3.20}$$

On substitue (3.18),(3.19),(3.20) dans (3.4), et on identifie les termes du même ordre de ε; on obtient à l'ordre $\varepsilon^{-2}, \varepsilon^{-1}$ et ε^{0} respectivement :

$$P^{-2}\left\{\ \int_\Omega A^{ijkl}(0)e^{-1}_{k\|l}e^{-1}_{i\|j}(\upsilon)\sqrt{a}dx = \int_{\Gamma_+} G^{3,-2}\upsilon_3\sqrt{a}d\Gamma \quad \forall\upsilon \in \mathbf{V}(\Omega)\right. \tag{3.21}$$

$$P^{-1}\left\{\ \int_\Omega A^{ijkl}(0)\{e^{0}_{k\|l}e^{-1}_{i\|j}(\upsilon) + e^{-1}_{k\|L}e^{0}_{i\|j}\}\sqrt{a}dx = \int_{\Gamma_+} G^{3,-1}\upsilon_3\sqrt{a}d\Gamma \quad \forall\upsilon \in \mathbf{V}(\Omega)\right. \tag{3.22}$$

$$P^{0}\left\{\begin{array}{l} \int A^{ijkl}(0)\{e^{0}_{k\|l}e^{0}_{i\|j}(\upsilon) + e^{1}_{k\|l}e^{-1}_{i\|j}(\upsilon) + e^{-1}_{k\|l}e^{1}_{i\|j}(\upsilon)\}\sqrt{a}dx + \int_\Omega B^{ijkl,1}\{e^{0}_{k\|l}e^{-1}_{i\|j}(\upsilon) \\ \quad +e^{-1}_{k\|l}e^{0}_{i\|j}(\upsilon)\}dx = \int_\Omega f^{i,0}\sqrt{a}dx + \int_{\Gamma_-}\sqrt{a}h^{i,1}\upsilon_i d\Gamma + \int_{\Gamma_+}\sqrt{a}G^{3,0}\upsilon_3 d\Gamma \end{array}\right. \tag{3.23}$$

Proposition 3.1 *:*

On suppose qu'il existe deux fonctions $f^{i,0} \in L^2(\Omega)$ et $h^{i,1} \in L^2(\Gamma_-)$ tels que :

$$f^i(\varepsilon)(x) = f^{i,0}(x) pour \quad tout \quad x \quad \in \Omega$$

$$h^i(\varepsilon)(x) = \varepsilon h^{i,1}(x) \qquad pour \quad tout \quad x \in \Gamma_-$$

$$u(\varepsilon) = u^0 + \varepsilon u^1 + \varepsilon^2 u^2 + \ldots \quad avec \qquad u^q \in K(\Omega), q = 0, 1, 2, \ldots \quad et \quad u^0 \neq 0$$

$$G^{3,\varepsilon}(x^\varepsilon) = \varepsilon G^3(\varepsilon)(x) \qquad \forall x \in \Gamma_+$$

$$G^3(\varepsilon) = G^{3,0} + \varepsilon G^{3,1} + \varepsilon^2 G^{3,2} + \ldots.$$

et l'espace $V_0(\omega) = \{\eta \in H^1(\omega) \ \ ; \ \ \eta = 0 \quad sur \quad \gamma_0, \gamma_{\alpha\beta}(\eta) = 0 \quad dans \quad \omega \ \}$ et réduit à $\{0\}$.

Alors le premier terme u^0 de $u(\varepsilon)$ et indépendant de x_3 et peutêtre identifier avec un champ de vecteur $\xi : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ solution d'un problème variationel à deux dimension ; problème "$P_M(\omega)$" . d'une coque membranaire linéairement élastique ,

$$\left\{\begin{array}{c} \xi^0 \in \boldsymbol{K}(\omega) := \{\eta \in \boldsymbol{V}(\omega)/\eta_3 \leq d \quad sur \quad \Gamma_+\} \\ \int_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau}\gamma_{\sigma\tau}(\xi^0)\gamma_{\alpha\beta}(\eta)\sqrt{a} \quad dy = \int_\omega p^{i,0}\eta_i\sqrt{a}dy + \langle\sqrt{a}G^{3,0}, \eta_3\rangle \\ pour \quad tout \quad \eta = (\eta_i) \in \boldsymbol{V}(\omega) \\ \langle\sqrt{a}G^{3,0}, \overline{\eta_3} - \overline{\xi^0}_3\rangle \geq 0 \quad \forall\eta \in \boldsymbol{K}(\omega) \end{array}\right. \tag{3.24}$$

Preuve. La preuve de cette proposition est divisée en trois ètapes.

Étape 1 :

L'équation du problème (P^{-2}) .

$\forall \;\; \upsilon \in V(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} A^{ijkl}(0) e^{-1}_{k\|L} e^{-1}_{i\|j}(\upsilon)\sqrt{a} \;\; dx = \int_{\Gamma_+} G^{3,-2}\upsilon_3\sqrt{a} \;\; d\Gamma$$

pour tout $\upsilon \in \mathbf{V}(\Omega)$ est indépendent de x_3 et d'après 3.15 on obtient :

$$\int_{\Gamma_+} G^{3,-2}\upsilon_3\sqrt{a}d\Gamma = 0 \;\; alors \;\; G^{3,-2} = 0 \;\; p.p$$

En utilisant les expressions des fonctions $A^{ijkl}(0)$ et $e^{-1}_{k\|L}$, on trouve :
$\int_{\Omega} A^{ijkl}(0) e^{-1}_{k\|l} e^{-1}_{i\|j}(\upsilon)\sqrt{a}dx = \int_{\Omega}\{4A^{\alpha 3\sigma 3}(0) e^{-1}_{\sigma\|3} e^{-1}_{\alpha\|3}(\upsilon) + A^{3333}(0) e^{-1}_{3\|3} e^{-1}_{3\|3}(\upsilon)\}\sqrt{a}dx$
$= \int_{\Omega}\{\mu a^{\alpha\sigma}\partial_3 u^0_\sigma \partial_3 \upsilon_\alpha + (\lambda + 2\mu)\partial_3 u^0_3 \partial_3 \upsilon_3\}\sqrt{a}dx = 0 \qquad , \forall \upsilon \in V(\Omega)$

D'après le théorème (3.4) on obtient : $\partial_3 u^0_i = 0$ dans Ω alors le terme principale $u^0 \in V(\Omega)$ est indépendant de x_3 et peut être identifié avec un champ de vecteurs $\xi^0 \in H^1(\omega)$ satisfaisant $\xi^0 = 0$ sur γ_0 .

D'après l'identification des coefficients de ε^{-2} on obtient les relations :

$$\xi^0 \in V(\omega) = \{\eta = (\eta_i) \in H^1(\omega); \eta = 0 \; on \; \gamma_0\}$$

$$e^{-1}_{i\|j} = 0 \; dans \; \Omega$$

Étape 2 :

L'équation du problème (P^{-1}) est :(D'après l'étape 1,$e^{-1}_{i\|j} = 0$)

$$\int_{\Omega} A^{ijkl}(0) e^0_{k\|l} e^{-1}_{i\|j}(\upsilon)\sqrt{a}dx = \int_{\Gamma_+} G^{3,-1}\upsilon_3\sqrt{a}d\Gamma \qquad \forall \upsilon \in V(\Omega)$$

pour tout $\upsilon \in V(\Omega)$ et indépendent de x_3 et d'après (3.15) on obtient :

$$\int_{\Gamma_+} G^{3,-1}\upsilon_3\sqrt{a}d\Gamma = 0 \;\; alors, \;\; G^{3,-1} = 0, p.p$$

En utilisant les expressions des fonctions $A^{ijkl}(0)$ et $e^0_{k\|l}$ on trouve :
$\int_{\Omega} A^{ijkl}(0) e^0_{k\|l} e^{-1}_{i\|j}(\upsilon)\sqrt{a}dx = \int_{\Omega} 4A^{\alpha 3\sigma 3}(0) e^0_{\alpha\|3} e^{-1}_{\sigma\|3}(\upsilon)\sqrt{a}dx$

$+\int_\Omega (A^{\alpha\beta 33}(0)e^0_{\alpha\|\beta} + A^{3333}(0)e^0_{3\|3})e^{-1}_{3\|3}(v)\}\sqrt{a}dx =$
$\int_\Omega \left\{2\mu a^{\alpha\sigma}e^0_{\alpha\|3}\partial_3 v_\sigma + \left(\lambda a^{\alpha\beta}e^0_{\alpha\|\beta} + (\lambda+2\mu)e^0_{3\|3}\right)\partial_3 v_3\right\}\sqrt{a}dx = 0 \quad , \forall v \in V(\Omega)$

D'après le théorème (3.4) on obtient les équations :

$$e^0_{\alpha\|3} = 0 \ \ et \ \ e^0_{3\|3} = -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}a^{\alpha\beta}e^0_{\alpha\|\beta} \ \ dans \ \ \Omega$$

Étape 3 :

L'équation du problème (P^0) (D'après l'étape 1, $e^{-1}_{i\|j} = 0$) devient

$\int_\Omega A^{ijkl}(0)\{e^0_{k\|l}e^0_{i\|j}(v) + e^1_{k\|l}e^{-1}_{i\|j}(v)\}\sqrt{a}dx + \int_\Omega B^{ijkl,1}e^0_{k\|l}e^{-1}_{i\|j}(v)dx$
$= \int_\Omega f^{i,0}v_i\sqrt{a}dx + \int_{\Gamma_-} h^{i,1}v_i\sqrt{a}d\Gamma + \int_{\Gamma_+} G^{3,0}v_3\sqrt{a}d\Gamma \qquad \forall v \in V(\Omega)$

soit $v = \eta \in V(\omega)$,i,e. $v \in V(\Omega)$ et v est indépendant de x_3

alors :

$\int_\Omega A^{ijkl}(0)e^0_{k\|l}e^0_{i\|j}(\eta)\sqrt{a}dx = \int_\Omega \left(A^{\alpha\beta\sigma\tau}(0)e^0_{\sigma\|\tau} + A^{\alpha\beta 33}(0)e^0_{3\|3}\right)e^0_{\alpha\|\beta}(\eta)\sqrt{a}dx$
$= \int_\Omega \{\lambda a^{\alpha\beta}a^{\sigma\tau} + \mu(a^{\alpha\sigma}a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau}a^{\beta\sigma})\}\, e^0_{\sigma\|\tau}e^0_{\alpha\|\beta}(\eta)\sqrt{a}dx + \int_\Omega \lambda a^{\alpha\beta}e^0_{3\|3}e^0_{\alpha\|\beta}(\eta)\sqrt{a}dx =$
$\frac{1}{2}\int_\Omega a^{\alpha\beta\sigma\tau}e^0_{\sigma\|\tau}e^0_{\alpha\|\beta}(\eta)\sqrt{a}dx$
$= \int_\Omega f^{i,0}\eta_i\sqrt{a}dx + \int_{\Gamma_-} h^{i,1}\eta_i\sqrt{a}d\Gamma + \int_{\Gamma_+} G^{3,0}\eta_3\sqrt{a}d\Gamma \quad$ pour tout $\eta \in V(\omega)$,

où les fonctions ;

$a^{\alpha\beta\sigma\tau} := \frac{4\lambda\mu}{\lambda+2\mu}a^{\alpha\beta}a^{\sigma\tau} + 2\mu(a^{\alpha\sigma}a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau}a^{\beta\sigma})$

tel que ;

$\gamma_{\alpha\beta}(\eta) := \frac{1}{2}(\partial_\beta\eta_\alpha + \partial_\alpha\eta_\beta) - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\eta_\sigma - b_{\alpha\beta}\eta_3$

$e^0_{\alpha\|\beta} = \gamma_{\alpha\beta}(\xi^0)$ et $e^0_{\alpha\|\beta}(\eta) = \gamma_{\alpha\beta}(\eta)$ pour tout $\eta \in V(\omega)$

$\gamma_{\alpha\beta}(\eta) \in L^2(\omega)$ si $(\eta_i) \in H^1(\omega) \times H^1(\omega) \times H^2(\omega)$.

Alors d'après l'étape 3 le champ du vecteur ξ^0 devrait satisfaire le problème variationnel à deux dimensions $P_M(\omega)$ suivant :

$$\xi^0 \in V(\omega) = \{\eta = (\eta_i) \in H^1(\omega); \eta = 0 \ \ dans \ \ \gamma_0\}$$

$$\int_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau}\gamma_{\sigma\tau}(\xi^0)\gamma_{\alpha\beta}(\eta)\sqrt{a}\ dy = \int_\omega p^{i,0}\eta_i\sqrt{a}dy + \langle\sqrt{a}G^{3,0}, \eta_3\rangle$$

pour tout $\eta \in V(\omega)$ / Où $p^{i,0} := \int_{-1}^1 f^{i,0}dx_3 + h^{i,1}(.,-1)$

$$\langle\sqrt{g(\varepsilon)}.G^3(\varepsilon), v_3 - u_3(\varepsilon)\rangle \geq 0 \ \ \forall \ \ v \ \ \in K(\Omega) \tag{3.25}$$

$$\langle\sqrt{a}G^{3,0}, \overline{\eta}_3 - \overline{\xi}^0_3\rangle \geq 0 \ \ \forall \ \ \eta \ \ \in K(\omega) \tag{3.26}$$

le premier membre de 3.25 devient un polynôme en $\varepsilon > 0$, positif donc sa constante à l'origine est positive .(le premiere membre de (3.26)),

alors :

$$\langle \sqrt{a} G^{3,0}, (\eta_3 - \xi_3^0) \rangle \geq 0 \quad \forall \eta \in K(\omega) \ \blacksquare$$

3.2.4 Modèles formel couplé flexion-membranaires

On se propose de donner un modèle bidimensionnel obtenu par l'analyse asymptotique formelle à partir du modèle tridimensionnel de coques élastiques minces constuées d'un materiau isotrope et homogène. On donne également les équations formelles vérifiées par le tenseur limite des contraintes . On suppose qu'il existe deux fonctions $f^{i,2} \in L^2(\Omega)$ et $h^{i,3} \in L^2(\Gamma_-)$ telles que :

$$f^i(\varepsilon)(x) = \varepsilon^2 f^{i,2}(x), \quad pour \ \ tout \ \ x \in \Omega \tag{3.27}$$

$$h^i(\varepsilon)(x) = \varepsilon^3 h^{i,3}, \quad pour \ \ tout \ \ x \in \Gamma_- \tag{3.28}$$

$$G^{3,\varepsilon}(x^\varepsilon) = \varepsilon^3 G^3(\varepsilon)(x) \tag{3.29}$$

et l'ensemble des déplacements inextensionnels .

$$V_0(\omega) = \{\eta \in H^1(\omega); \eta = 0 \ \ on \ \ \gamma_0, \gamma_{\alpha\beta}(\eta) = 0 \ \ dans \ \ \omega\} \tag{3.30}$$

n'est pas réduit à $\{0\}$. On substitue (3.27) , (3.28) et(3.29) dans $(P(\varepsilon, \Omega))$, et on identifie les termes du même ordre de ε, on obtient à l'ordre $\varepsilon^{-1}, \varepsilon^0, \varepsilon^1$ et ε^2 respectivement :

(D'après l'étape 1 , $e^{-1}_{i\|j} = 0$)

$$P^{-1} \left\{ \ \forall v \in V(\Omega) \quad \int_\Omega A^{ijkl}(0) e^0_{k\|l} e^{-1}_{i\|j}(v) \sqrt{a} dx = \langle \sqrt{a} G^{3,-3}, v_3 \rangle \right. \tag{3.31}$$

$$P^0 \left\{ \begin{array}{l} \forall v \in V(\Omega) \quad \int_\Omega A^{ijkl}(0) \{ e^0_{k\|l} e^0_{i\|j}(v) + e^1_{k\|l} e^{-1}_{i\|j}(v) \} \sqrt{a} dx \\ \qquad + \int_\Omega B^{ijkl,1} e^0_{k\|l} e^{-1}_{i\|j}(v) dx = \langle \sqrt{a} G^{3,-2}, v_3 \rangle \end{array} \right. \tag{3.32}$$

$$P^1 \left\{ \begin{array}{l} \int_\Omega A^{ijkl}(0) \{ e^1_{k\|l} e^0_{i\|j}(v) + e^0_{k\|l} e^1_{i\|j}(v) + e^2_{k\|l} e^{-1}_{i\|j}(v) \} \sqrt{a} dx \\ + \int_\Omega B^{ijkl,1} \{ e^1_{k\|l} e^{-1}_{i\|j}(v) + e^0_{k\|l} e^0_{i\|j}(v) \} dx = \langle \sqrt{a} G^{3,-1}, v_3 \rangle \end{array} \right. \tag{3.33}$$

$$P^2\begin{cases} \int_\Omega A^{ijkl}(0)\{e^1_{k\|l}e^1_{i\|j}(\upsilon)+e^2_{k\|l}e^0_{i\|j}(\upsilon)+e^0_{k\|l}e^2_{i\|j}(\upsilon)+e^3_{k\|l}e^{-1}_{i\|j}(\upsilon)\}\sqrt{a}dx \\ +\int_\Omega B^{ijkl,1}\{e^1_{k\|l}e^0_{i\|j}(\upsilon)+e^0_{k\|l}e^1_{i\|j}(\upsilon)+e^2_{k\|l}e^{-1}_{i\|j}(\upsilon)\}dx+\int_\Omega B^{ijkl,2}\{e^1_{k\|l}e^{-1}_{i\|j}(\upsilon) \\ +e^0_{k\|l}e^0_{i\|j}(\upsilon)\}dx=\int_\Omega f^{i,2}\upsilon_i\sqrt{a}dx+\int_{\Gamma_-}h^{i,3}\upsilon_i\sqrt{a}d\Gamma_+\langle\sqrt{a}G^{3,0},\upsilon_3\rangle \end{cases} \tag{3.34}$$

Proposition 3.2 *:*

On suppose que l'espace $V_0(\omega)=\{\eta\in H^1(\omega);\eta=0$ *on* $\gamma_0\quad\gamma_{\alpha\beta}(\eta)=0$ *dans* $\omega\}$ *si l'espace* $V_0(\omega)$ *des déplacements n'est pas réduit à* $\{0\}$ *, on suppose qu'il existe* $f^{i,2}\in L^2(\Omega)$ *et* $h^{i,3}\in L^2(\Gamma_-)$ *indépendant de* ε *telles que :*

$f^i(\varepsilon)=\varepsilon^2 f^{i,2}, h^i(\varepsilon)=\varepsilon^3 h^{i,3}$, $G^{3,\varepsilon}(x^\varepsilon)=\varepsilon^3 G^3(\varepsilon)(x)$:

Alors $u^0:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}^3$ *et indépendant de* x_3 *et avec un champ de vecteurs* $\xi:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}^3$ *satisfaisent le problème variationnel à deux dimensions, "*$P_F(\omega)$*" d'une coque "en flexiont" lineairément élastique .*

$$\xi^0\in K(\Omega):=\{\eta\in V_F(\omega)/\eta_3\leq d\quad sur\quad\Gamma_+\}$$

$$V_F(\omega):=\{\eta=(\eta_i)\in H^1(\omega)\times H^1(\omega)\times H^2(\omega)\ ;\eta_i=\partial_\nu\eta_3=0\ \ sur\ \ \gamma_0,\gamma_{\alpha\beta}(\eta)=0\ \ dans\ \ \omega\}$$

$$\frac{1}{3}\int_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau}\rho_{\sigma\tau}(\xi^0)\rho_{\alpha\beta}(\eta)\sqrt{a}dy=\int_\omega p^{i,2}\eta_i\sqrt{a}dy+\langle\sqrt{a}G^{3,0},\eta_3\rangle$$

pour tout $\eta=(\eta_i)\in V_F(\omega)$.

et

$$\langle\sqrt{a}G^{3,0},\eta_3-\xi^0_3\rangle\geq 0,\quad\forall\quad\eta\quad\in\quad K(\omega)$$

où

$$\gamma_{\alpha\beta}(\eta):=\frac{1}{2}(\partial_\alpha\eta_\beta+\partial_\beta\eta_\alpha)-\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\eta_\sigma-b_{\alpha\beta}\eta_3$$

$$\rho_{\alpha\beta}(\eta):=\partial_{\alpha\beta}\eta_3-\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\partial_\sigma\eta_3-b^\sigma_\alpha b_{\sigma\beta}\eta_3+b^\sigma_\alpha(\partial_\beta\eta_\sigma-\Gamma^\tau_{\beta\sigma}\eta_\tau)+b^\tau_\beta(\partial_\alpha\eta_\tau-\Gamma^\sigma_{\alpha\tau}\eta_\sigma)+(\partial_\alpha b^\tau_\beta+\Gamma^\tau_{\alpha\sigma}b^\sigma_\beta-\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}b^\tau_\sigma)\eta_\tau$$

$$a^{\alpha\beta\sigma\tau}:=\frac{4\lambda\mu}{\lambda+2\mu}a^{\alpha\beta}a^{\sigma\tau}+2\mu(a^{\alpha\sigma}a^{\beta\tau}+a^{\alpha\tau}a^{\beta\sigma})$$

$$p^{i,2} := \int_{-1}^{+1} f^{i,2} dx_3 + h_-^{i,3} \quad et \quad h_-^{i,3} = h^{i,3}(.,-1)$$

Preuve.
(i)) si $V_0(\omega) \neq \{0\}$ et tout $\eta \in (V_0(\omega) - \{0\})$ par définition du problème "$P_M(\omega)$"

$$\int_\omega p^{i,0}\eta_i\sqrt{a}dy + \int_{\Gamma_+} G^{3,-2}\eta_3\sqrt{a}d\Gamma = 0 \quad alors \quad \int_{\Gamma_+} G^{3,-2}\eta_3\sqrt{a}d\Gamma = 0$$

on déduit que $G^{3,-2} = 0$ p.p.
D'après l'identification des coefficients de ε^{-1} et ε^0 (l'étape 2 et 3)
$P^{i,0} = G^{3,-2} = 0$, soit $\eta = \xi^0$ l' équation variationnelle du problème "$P_M(\omega)$" alors :

$$\int_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau}\gamma_{\sigma\tau}(\xi^0)\gamma_{\alpha\beta}(\xi^0)\sqrt{a}d\Gamma = 0$$

alors $\gamma_{\alpha\beta}(\xi^0) = 0$ et donc $\xi^0 \in V_0(\omega)$.
Comme $e^0_{\alpha\|\beta} = \gamma_{\alpha\beta}(\xi^0) = 0$, les relations

$$e^0_{\alpha\|3} = 0 \quad et \quad (\lambda + 2u)e^0_{3\|3} + \lambda a^{\alpha\beta}e^0_{\alpha\|\beta} = 0 \quad dans \quad \Omega$$

établits dans l'étape (2) impliquent :

$$\partial_3 u_3^1 = e^0_{3\|3} = 0$$

et

$$e^0_{\alpha\|3} = \frac{1}{2}(\partial_\alpha u_3^0 + \partial_3 u_\alpha^1) + b_\alpha^\sigma u_\sigma^0 = \frac{1}{2}(\partial_\alpha \xi_3^0 + \partial_3 u_\alpha^1) + b_\alpha^\sigma \xi_\sigma^0 = 0$$

alors :

$$\partial_3 u_\alpha^1 = -(\partial_\alpha \xi_3^0 + 2b_\alpha^\sigma \xi_\sigma^0) \quad , \quad u^1 \in V(\Omega).$$

Puis que chaque fonction $(\partial_\alpha \xi_3^0 + 2b_\alpha^\sigma \xi_\sigma^0)$ est indépendente de x_3 il existe $\xi^1 = (\xi_i^1) \in V(\omega)$ tel que $u_\alpha^1 = \xi_\alpha^1 - x_3(\partial_\alpha \xi_3^0 + 2b_\alpha^\sigma \xi_\sigma^0)$ et $u_3^1 = \xi_3^1$. Les premières relations exigent en plus que la fonction ξ_3^0 soit dans l'espace $H^2(\omega)$et vérifie la condition au bord $\partial_\nu \xi_3^0 = 0$ sur γ_0.
(∂_ν ; dénote la derivée normale extérieure le long γ). Comme$\xi_\alpha^0 = 0$ sur γ_0 d'après l' étape (1).
De ce que précède on a bien montrer que :

$$e^0_{i\|j} = 0 \quad dans \quad \Omega$$

$$\xi^0 \in K(\omega) := \{\eta = (\eta_i) \in V_F(\omega)/\eta_3 \leq d\}$$

$$u^1_\alpha = \xi^1_\alpha - x_3(\partial_\alpha \xi^0_\alpha + 2b^\sigma_\alpha \xi^0_\sigma) \quad et \quad u^1_3 = \xi^1_3$$

où $\xi^1 = (\xi^1_i) \in V(\omega)$.

(ii)Puis que $e^0_{i\|j} = 0$ l'annulation du coefficient de ε^0 en $P(\varepsilon, \Omega)$ réduit a :

$$\int A^{ijkl}(0) e^1_{k\|l} e^{-1}_{i\|j}(v)\sqrt{a}dx = 0 \quad pour \quad tout \quad v \in V(\omega)$$

par un calcul semblable à cela dans l'étape (2), nous obtenons.

$$e^1_{\alpha\|3} = 0 \quad et \quad e^1_{3\|3} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2u} a^{\alpha\beta} e^1_{\alpha\|\beta} \quad dans \quad \Omega$$

il reste le calcul des fonctions $e^1_{\alpha\|\beta}$.

$$b^\sigma_\alpha|_\beta := \partial_\beta b^\sigma_\alpha + \Gamma^\sigma_{\beta\tau} b^\tau_\alpha - \Gamma^\tau_{\alpha\beta} b^\sigma_\tau = b^\sigma_\beta|_\alpha$$

nous obtenons après quelques manipulations

$$e^1_{\alpha\|\beta} = \frac{1}{2}(\partial_\beta u^1_\alpha + \partial_\alpha u^1_\beta) - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} u^1_\sigma - b_{\alpha\beta} u^1_3 + x_3\{b^\sigma_\beta|_\alpha u^0_\sigma + b^\sigma_\alpha b_{\sigma\beta} u^0_3\}$$

$$= \frac{1}{2}(\partial_\beta \xi^1_\alpha + \partial_\alpha \xi^1_\beta) - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} \xi^1_\sigma - b_{\alpha\beta} \xi^1_3 - x_3\{\partial_{\alpha\beta} \xi^0_3 - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} \partial_\sigma \xi^0_3 - b^\sigma_\alpha b_{\sigma\beta} \xi^0_3$$
$$+ b^\sigma_\alpha(\partial_\beta \xi^0_\sigma - \Gamma^\tau_{\beta\sigma} \xi^0_\tau) + b^\tau_\beta(\partial_\alpha \xi^0_\tau - \Gamma^\sigma_{\alpha\tau} \xi^0_\sigma) - b^\tau_\beta|_\alpha \xi^0_\tau\}$$

avec

$$\rho_{\alpha\beta}(\eta) = \partial_{\alpha\beta}\eta_3 - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\partial_\sigma \eta_3 - b^\sigma_\alpha b_{\sigma\beta} n_3 + b^\sigma_\alpha(\partial_\beta \eta_\sigma - \Gamma^\tau_{\beta\sigma}\eta_\tau)$$
$$+ b^\tau_\beta(\partial_\alpha \eta_\tau - \Gamma^\sigma_{\alpha\tau}\eta_\sigma) + b^\tau_\beta|_\alpha \eta_\tau$$

$$\rho_{\alpha\beta}(\eta) \in L^2(\omega) \quad si \quad \eta = (\eta_i) \in H^1(\omega) \times H^1(\omega) \times H^2(\omega)$$

$$e^1_{\alpha\|\beta} = \gamma_{\alpha\beta}(\zeta^1) - x_3 \rho_{\alpha\beta}(\zeta^0) \tag{3.35}$$

(iii) léquation du problème (P^1) (D'apres l'étape 1 et (i), $e^{-1}_{i\|j} = e^0_{i\|j} = 0$

$$\int_\Omega A^{ijkl}(0)\{e^1_{k\|l} e^0_{i\|j}(v) + e^2_{k\|l} e^{-1}_{i\|j}(v)\}\sqrt{a}dx + \int_\Omega B^{ijkl,1} e^1_{k\|l} e^{-1}_{i\|j}(v) dx$$

$$= \int_{\Gamma_+} G^{3,-1} v_3 \sqrt{a} d\Gamma \quad pour \quad tout \quad v \in V(\Omega)$$

soit $\quad v = \eta \in V(\omega) \qquad (e^{-1}_{i\|j}(v) = 0)$

$$\int_\Omega A^{ijkl}(0) e^1_{k\|l} e^0_{i\|j}(\eta)\sqrt{a}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Omega a^{\alpha\beta\sigma\tau} e^0_{\sigma\|\tau} e^0_{\alpha\|\beta}(\eta)\sqrt{a}dx$$

$$= \int_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau}\gamma_{\sigma\tau}(\xi^1)\gamma_{\alpha\beta}(\eta)\sqrt{a}dx = \int_{\Gamma_+} G^{3,-1}\eta_3\sqrt{a}d\Gamma \quad \forall \eta \in V(\omega)$$

pour tout $\eta \in (V_0(\omega) - \{0\})$: $\int G^{3,-1}\eta_3\sqrt{a} = 0 \quad$ alors $\quad G^{3,-1} = 0$. Soit $\eta = \xi^1$ dans le problème du variationnel précédeur on obtient :

$$\int_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau}\gamma_{\sigma\tau}(\xi^1)\gamma_{\alpha\beta}(\xi^1)\sqrt{a}dy = 0$$

d'où :$\gamma_{\alpha\beta}(\xi^1) = 0$ et par conséquent,

$$\xi^1 \in V_0(\omega),$$

tout que $\xi^1 \in V(\omega)$ dans l'etape (i)

$$\int_\Omega A^{ijkl}(0)\{e^1_{k\|l}e^0_{i\|j}(v) + e^2_{k\|l}e^{-1}_{i\|j}(v)\}\sqrt{a}dx + \int_\Omega B^{ijkl,1}e^1_{k\|l}e^{-1}_{i\|j}(v)dx = 0$$

pour tout $v \in V(\Omega)$.
Etant donné un élément arbitrairie η dans l'espace $V_F(\omega)$.
Soit $v(\eta) = (v_i(n)) \quad$ définie par

$$v_\alpha(\eta) := x_3\{2b^\sigma_\alpha\eta_\sigma + \partial_\alpha\eta_3\} \quad et \quad v_3(\eta) := 0$$

Tout que, on peut poser $v = (v(\eta))$ dans l'equations précétédente ; ce qui donne les equations suivantes :

$$\int_\Omega A^{ijkl}(0)e^1_{k\|l}e^0_{i\|j}(v(\eta))\sqrt{a}dx + 4\int_\Omega A^{\alpha3\sigma3}(0)e^2_{\sigma\|3}(b^\tau_\alpha\eta_\tau + \frac{1}{2}\partial_\alpha\eta_3)\sqrt{a}dx$$
$$+4\int_\Omega B^{\alpha3\sigma3,1}e^1_{\sigma\|3}(b^\tau_\alpha\eta_\tau + \frac{1}{2}\partial_\alpha\eta_3)\sqrt{a}dx = 0 \quad pour \quad tout \quad \eta \in V_F(\omega)$$

(iv) L'équation du problème (P^2)($e_{ij}^{-1} = e_{i\|j}^{0} = 0$)

$$\int A^{ijkl}(0)\{e^1_{k\|l}e^1_{i\|j}(v)+e^2_{k\|l}e^0_{i\|j}(v)+e^3_{k\|l}e^{-1}_{i\|j}(v)\}\sqrt{a}dx+\int_\Omega B^{ijkl,1}\{e^1_{k\|l}e^0_{i\|j}(v)+e^2_{k\|l}e^{-1}_{i\|j}(v)\}dx$$

$$+\int_\Omega B^{ijkl,2}e^1_{k\|l}e^{-1}_{i\|j}(v) \quad dx = \int_\Omega f^{i,2}v_i\sqrt{a} \quad dx + \int_{\Gamma_-} h^{i,3}(v_i)\sqrt{a} \quad d\Gamma$$

$$+\int_{\Gamma_+} G^{3,0}v_3\sqrt{a}d\Gamma \quad pour \quad tout \quad v \in V_F(\Omega)$$

Soit $v = \eta \in V_F(\omega)$, alors pour une telle fonction v

$$e^{-1}_{ij}(v) = 0$$

$$e^0_{\alpha\|\beta}(v) = \gamma_{\alpha\beta}(\eta) = 0, \quad e^0_{\alpha\|3}(v) = \frac{1}{2}\partial_\alpha\eta_3 + b^\sigma_\alpha\eta_\sigma, \quad e^0_{3\|3}(v) = 0$$

D'autre part on a :

$$\int_\Omega A^{ijkl}(0)e^1_{k\|l}e^1_{i\|j}(\eta)\sqrt{a}dx+4\int_\Omega A^{\alpha3\sigma3}(0)e^2_{\sigma\|3}\{b^\tau_\alpha\eta_\tau+\frac{1}{2}\partial_\alpha\eta_3\}\sqrt{a}dx+4\int_\Omega B^{\alpha3\sigma3,1}e^1_{\sigma\|3}\{b^\tau_\alpha\eta_\tau$$

$$+\frac{1}{2}\partial_\alpha\eta_3\}\sqrt{a}dx = \int_\omega p^{i,2}\eta_i\sqrt{a}dy + \langle\sqrt{a}G^{3,0},\eta_3\rangle \quad pour \quad tout \quad \eta \in V_F(\omega)$$

où

$$p^{i,2} = \int_{-1}^{1} f^{i,2}dx_3 + h^{i,3}(.,-1)$$

En soustrayant les équations trouvées dans l'etape (iii) de ces équations nous trouvons :

$$\int_\Omega A^{ijkl}(0)e^1_{k\|l}\{e^1_{i\|j}(\eta)-e^0_{i\|j}(v(\eta))\}\sqrt{a}dx = \int_\omega p^{i,2}\eta_i\sqrt{a}dy+\langle\sqrt{a}G^{3,0},\eta_3\rangle \ pour \ tout \ \eta \in V_F(\omega)$$

En premier les relations (à etabli dans l'etape (ii))

$$e^1_{\alpha\|3} = 0 \quad et \quad e^1_{33} = -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}a^{\alpha\beta}e^1_{\alpha\|\beta} \quad dans \quad \Omega \quad et \quad e^1_{3\|3}(\eta) = e^0_{3\|3}(v(\eta)) = 0$$

$$A^{ijkl}(0)e^1_{k\|l}\{e^1_{i\|j}(\eta)-e^0_{i\|j}(v(\eta))\} = A^{\alpha\beta\sigma\tau}(0)e^1_{\sigma\|\tau}\{e^1_{\alpha\|\beta}(\eta)-e^0_{\alpha\|\beta}(v(\eta))\}+A^{\alpha\beta33}(0)e^1_{3\|3}\{e^1_{\alpha\|\beta}(\eta)-e^0_{\alpha\|\beta}(v($$

$$= \frac{1}{2}a^{\alpha\beta\sigma\tau}e^1_{\sigma\|\tau}\{e^1_{\alpha\|\beta}(\eta) - e^0_{\alpha\|\beta}(v(\eta))\}$$

Deuxièment :

$$e^1_{\sigma\|\tau} = -x_3\rho_{\sigma\tau}(\xi^0)$$

$$e^1_{\alpha\|\beta}(\eta) - e^0_{\alpha\|\beta}(v(\eta)) = x_3\{b^\sigma_\beta|_\alpha\eta_\sigma + b^\sigma_\alpha b_{\sigma\beta}\eta_3\} - x_3\{\partial_\alpha(b^\tau_\beta\eta_\tau) + \partial_\beta(b^\sigma_\alpha\eta_\sigma)$$
$$+\partial_{\alpha\beta}\eta_3 - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\partial_\sigma\eta_3 - 2\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}b^\tau_\sigma\eta_\tau\}$$

alors :

$$e^1_{\alpha\|\beta}(\eta) - e^0_{\alpha\|\beta}(v(\eta)) = -x_3\rho_{\alpha\beta}(\eta) \quad pour \quad tout \quad \eta \in V_F(\omega)$$

Nous avons donc derivé les équations :

$$\int_\Omega A^{ijkl}(0)e^1_{k\|l}\{e^1_{i\|j}(\eta) - e^0_{i\|j}(v(\eta))\}\sqrt{a}dx = \frac{1}{2}\int_\Omega x_3^2 a^{\alpha\beta\sigma\tau}\rho_{\sigma\tau}(\xi^0)\rho_{\alpha\beta}(\eta)\sqrt{a}dx$$
$$= \frac{1}{3}\int_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau}\rho_{\sigma\tau}(\xi^0)\rho_{\alpha\beta}(\eta)\sqrt{a}dy \quad pour \quad tout \quad \eta \in V_F(\omega)$$

Pour résumer, nous avons établi que quand $V_0(\omega) \neq \{0\}$ le champ de vecteur ξ^0 (doit satisfaire)le problème variationnel $P_F(\omega)$.

$$\xi^0 \in K(\Omega) = \{\eta \in V_F(\omega)/\eta_3 \leq d\}$$

$$\frac{1}{3}\int_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau}\rho_{\sigma\tau}(\xi^0)\rho_{\alpha\beta}(\eta)\sqrt{a}dy = \int_\Omega p^{i,2}\eta_i\sqrt{a}dy + \langle\sqrt{a}G^{3,0}, \eta_3\rangle \quad pour \quad tout \quad \eta \in V_F(\omega)$$

où

$$p^{i,2} := \int_{-1}^{1} f^{i,2}dx_3 + h^{i,3}(., -1)$$

$$\langle\sqrt{g(\varepsilon)}.G^3(\varepsilon), v_3 - u_3(\varepsilon)\rangle \geq 0 \quad \forall \quad v \quad \in K(\Omega) \tag{3.36}$$

$$\langle\sqrt{a}G^{3,0}, \overline{\eta}_3 - \overline{\xi}^0_3\rangle \geq 0 \quad \forall \quad \eta \quad \in K(\Omega) \tag{3.37}$$

Le premier membre de (3.36) devient un polynôme en $\varepsilon > 0$, positif donc sa constante à l'origine est positive .(le premier membre de (3.37))

alors :

$$\langle\sqrt{a}G^{3,0}, (\eta_3 - \xi^0_3)\rangle \geq 0 \quad \forall\eta \in K(\Omega)$$

■

3.3 Le cas de contact avec frottement

On va étudier dans cette partie, le même problème précédent en supposant que le contact unilatéral est avec frottement de Coulomb. L'étude variationnelle de ce problème est déjà faite dans le chapitre 2, pour cela on s'intéresse qu'à l'étude asymptotique en utilisant l'approche en déplacement.

3.3.1 Position du problème variationnel sur un domaine indépendant de l'épaisseur

L'objectif de l'analyse asymptotique est de connaître le comportement de la solution u^ε du problème $P^\varepsilon(\Omega^\varepsilon)$ lorsque ε tend vers zéro. Pour cela il est important que le domaine sur lequel est posé le problème ne dépend pas de ε .
On garde la même mise à l'échelle pour les données que celle faite dans le cas sans frottement.
On peut alors réécrire le problème variationnel $P^\varepsilon(\Omega^\varepsilon)$ sur l'ouvert fixe Ω :

$$P(\varepsilon,\Omega)\left\{\begin{array}{c} Trouver \;\; u(\varepsilon)\in\mathbf{K}(\Omega); tels \;\; que :\\ \int_\Omega A^{ijkl}(\varepsilon)e_{k\|l}(\varepsilon,u(\varepsilon))e_{i\|j}(\varepsilon,v)\sqrt{g(\varepsilon)}dx\\ =\int_\Omega f^i(\varepsilon)v_i\sqrt{g(\varepsilon)}dx+\frac{1}{\varepsilon}\int_{\Gamma_-} h^i(\varepsilon)v_i\sqrt{g(\varepsilon)}d\Gamma\\ +\varepsilon^{p-1}\left\langle\sqrt{g(\varepsilon)}G^i(\varepsilon),v_3\right\rangle \quad \forall v\in\mathbf{V}(\Omega)\\ \left\langle\sqrt{g(\varepsilon)}G^3(\varepsilon),v_3-u_3(\varepsilon)\right\rangle\geqslant 0 \quad \forall v\in\mathbf{K}(\Omega)\\ \left\langle\sqrt{g(\varepsilon)}G^\alpha(\varepsilon),v_\alpha-u_\alpha(\varepsilon)\right\rangle+\left\langle\nu\sqrt{g(\varepsilon)}|G^3(\varepsilon)|,|v_\tau|-|u_\tau|\right\rangle\geqslant 0 \quad \forall v\in V(\Omega)\end{array}\right. \tag{3.38}$$

tels que :

$$e_{i\|j}(\varepsilon,v)=\frac{1}{2}(v_{i\|j}(\varepsilon)+v_{j\|i}(\varepsilon)) \tag{3.39}$$

$$v_{i\|j}(\varepsilon)=\partial_j v_i-\Gamma^k_{ij}(\varepsilon)v_k \tag{3.40}$$

$$\mathbf{V}(\Omega)=\{v=(v_i)\in\mathbf{H}^1(\Omega), v=0 \;\; sur \;\; \Gamma_0\} \tag{3.41}$$

$$\mathbf{K}(\Omega)=\{v\in\mathbf{V}(\Omega)/v_3\leq d\} \tag{3.42}$$

3.3.2 Identification d'un problème variationnel bidimentionnel

Nous commençons maintenant l'analyse asymptotique du problème variationnel $\mathrm{P}(\varepsilon, \Omega)$.

On suppose que la solution de ce problème admet un développement asymptotique formel d'ordre zéro :

$$u(\varepsilon) = u^0 + \varepsilon u^1 + \varepsilon^2 u^2 ... \quad u_0 \neq 0 \quad avec \quad u^q \in \mathbf{K}(\Omega), \quad q \in \{0, 1, 2, ...\} \tag{3.43}$$

$$G^i(\varepsilon) = G^0 + \varepsilon G^1 + \varepsilon^2 G^2 + \varepsilon^3 G^3 + ... \tag{3.44}$$

$e_{i\|j}(\varepsilon; u(\varepsilon)) = \frac{1}{\varepsilon} e^{-1}_{i\|j} + e^0_{i\|j} + \varepsilon e^1_{i\|j} + \varepsilon^2 e^2_{i\|j} + ...$
$e_{i\|j}(\varepsilon; v) = \frac{1}{\varepsilon} e^{-1}_{i\|j}(v) + e^0_{i\|j}(v) + \varepsilon e^1_{i\|j}(v) + \varepsilon^2 e^2_{i\|j}(v) + ...$

3.3.3 Modèles de coques membranaires

On se propose quel que modèles bidimentionnels des coques membranaires obtenus par l'analyse asymptotique formelle à partir du modèle tridimentionnel de coques élastiques minces constituées d'un matériau isotrope et homogène entrant en contact avec frottemen de Coulomb contre un obstacle rigide. On suppose qu'il existe deux fonctions $f^{i,0} \in L^2(\Omega)$ et $h^{i,1} \in L^2(\Gamma_-)$ telles que :

$$f^i(\varepsilon)(x) = f^{i,0}(x), \qquad x \in \Omega \tag{3.45}$$

$$h^i(\varepsilon)(x) = \varepsilon h^{i,1}, \qquad pour \quad tout \quad x \in \Gamma_- \tag{3.46}$$

$$G^{i,\varepsilon}(x^\varepsilon) = \varepsilon G^i(\varepsilon)(x) \; pour \quad tout \quad x \in \Gamma_+ \tag{3.47}$$

On substitue (3.45), (3.46)et(3.47) dans (3.38), et on identifie les termes du même ordre de ε, on obtient à l'ordre $\varepsilon^{-2}, \varepsilon^{-1}$ et ε^0 respectivement :

$$P^{-2} \left\{ \int_\Omega A^{ijkl}(0) e^{-1}_{k\|l} e^{-1}_{i\|j}(v) \sqrt{a} dx = \int_{\Gamma_+} G^{i,-2} v_i \sqrt{a} d\Gamma \qquad \forall v \in \mathbf{V}(\Omega) \right. \tag{3.48}$$

$$P^{-1} \left\{ \int_\Omega A^{ijkl}(0) e^0_{k\|l} e^{-1}_{i\|j} \sqrt{a} dx = \int_{\Gamma_+} G^{i,-1} v_i \sqrt{a} d\Gamma \qquad \forall v \in \mathbf{V}(\Omega) \right. \tag{3.49}$$

$$P^0 \left\{ \begin{array}{c} \int A^{ijkl}(0) \{ e^0_{k\|l} e^0_{i\|j}(v) + e^1_{k\|l} e^{-1}_{i\|j}(v) \} + \int_\Omega B^{ijkl,1} e^0_{k\|l} e^{-1}_{i\|j}(v) dx = \\ \int_\Omega f^{i,0} \sqrt{a} dx + \int_{\Gamma_-} \sqrt{a} h^{i,1} v_i d\Gamma + \int_{\Gamma_+} \sqrt{a} G^{i,0} v_i d\Gamma \end{array} \right. \tag{3.50}$$

Proposition 3.3 *:*

On suppose qu'il existe deux fonctions $f^{i,0} \in L^2(\Omega)$ *et* $h^{i,1} \in L^2(\Gamma_-)$ *telles que :*

$$f^i(\varepsilon)(x) = f^{i,0}(x) pour \quad tout \quad x \quad \in \Omega$$

$$h^i(\varepsilon)(x) = \varepsilon h^{i,1}(x) \qquad pour \quad tout \quad x \in \Gamma_-$$

$$u(\varepsilon) = u^0 + \varepsilon u^1 + \varepsilon^2 u^2 + ... \quad avec \qquad u^q \in K(\Omega), q = 0, 1, 2, ... \quad et \quad u^0 \neq 0$$

$$G^{i,\varepsilon}(x^\varepsilon) = \varepsilon G^i(\varepsilon)(x) \qquad \forall x \in \Gamma_+,$$

$$G^i(\varepsilon) = G^{i,0} + \varepsilon G^{i,1} + \varepsilon^2 G^{i,2} + ...,$$

et l'espace $V_0(\omega) = \{\eta \in H^1(\omega) \quad ; \quad \eta = 0 \quad sur \quad \gamma_0, \gamma_{\alpha\beta}(\eta) = 0 \quad dans \quad \omega \ \}$ *est réduit à* $\{0\}$*. Alors le premier terme* u^0*de* $u(\varepsilon)$ *est indépendant de* x_3 *et s'identifie avec un champ de vecteurs* $\xi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ *satisfaisant le problème variationnel bidimensionnel; problème "*$P_M(\omega)$*" d'un coque " membranaire" linéairement élastique :*

$$\begin{cases} \xi^0 \in \boldsymbol{K}(\omega) := \{\eta \in \boldsymbol{V}(\omega)/\eta_3 \leq d \quad sur \quad \Gamma_+\} \\ \int_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau}\gamma_{\alpha\beta}(\xi^0)\gamma_{\alpha\beta}(\eta)\sqrt{a}dy = \int_\omega p^{i,0}\eta_i\sqrt{a}dy + \langle\sqrt{a}G^{i,0}, \eta_i\rangle \\ pour \quad tout \quad \eta = (\eta_i) \in \boldsymbol{V}(\omega) \\ \left\langle \sqrt{a}G^{3,0}, \overline{\eta_3} - \overline{\xi^0}_3 \right\rangle \geq 0 \quad \forall \eta \in \boldsymbol{K}(\omega) \\ \left\langle \sqrt{a}G^{\alpha,0}, \overline{\eta_\alpha} - \overline{\xi^0_\alpha} \right\rangle + \langle\sqrt{a}\nu|G^{3,0}|, |\eta_\tau| - |\xi^0_\tau|\rangle \geq 0 \quad \forall \eta \in \boldsymbol{V}(\omega) \end{cases} \tag{3.51}$$

Preuve. La preuve de cette proposition est divisée en trois étapes.
Etape 1 :
L'équation du problème (P^{-2}) .
$\forall \quad v \in V(\Omega)$:

$$\int_\Omega A^{ijkl}(0)e^{-1}_{k\|L}e^{-1}_{i\|j}(v)\sqrt{a}dx = \int_{\Gamma_+} G^{i,-2}v_i\sqrt{a} \quad d\Gamma$$

Pour tout $v \in V(\Omega)$ est indépendant de x_3 ; et d'après (3.15) l'équatition précédente se réduit à :

$$\int_{\Gamma_+} G^{i,-2} \upsilon_i \sqrt{a} d\Gamma = 0 \ \ alors \ \ G^{i,-2} = 0 \ \ p.p$$

En utilisant les expressions des fonctions $A^{ijkl}(0)$ et $e^{-1}_{k\|l}$ on trouve :
$\int_\Omega A^{ijkl}(0) e^{-1}_{k\|l} e^{-1}_{i\|j}(\upsilon)\sqrt{a}dx$
$= \int_\Omega \{4\mu A^{\alpha 3\sigma 3}(0) e^{-1}_{\sigma\|3} e^{-1}_{\alpha\|3}(\upsilon) + A^{3333}(0) e^{-1}_{3\|3} e^{-1}_{3\|3}(\upsilon)\}\sqrt{a}dx$
$= \int_\Omega \{\mu a^{\alpha\sigma}\partial_3 u^0_\sigma \partial_3 \upsilon_a + (\lambda+2\mu)\partial_3 u^0_3 \partial_3 \upsilon_3\}\sqrt{a}dx = 0 \qquad , \forall \upsilon \in V(\Omega)$

D'après le théorème (3.4) on obtient : $\partial_3 u^0_i = 0$ dans Ω alors le terme principal $u_0 \in V(\Omega)$ est indépendant de x_3 et peut être identifié avec un champ de vecteurs $\xi^0 \in H^1(\omega)$ satisfaisant $\xi^0 = 0$ sur γ_0 .

D'après l'identification des coefficients de ε^{-2} on obtient les relations

$$\xi^0 \in V(\omega) = \{\eta = (\eta_i) \in H^1(\omega); \eta = 0 \ \ on \ \ \gamma_0\}$$

$$e^{-1}_{i\|j} = 0 \ \ dans \ \ \Omega$$

Etape 2 :

L'équation du problème (P^{-1}) : (D'après l'étape 1 , $e^{-1}_{i\|j} = 0$)

$$\int_\Omega A^{ijkl}(0) e^0_{k\|l} e^{-1}_{i\|j}(\upsilon)\sqrt{a}dx = \int_{\Gamma_+} G^{i,-1}\upsilon_i\sqrt{a}d\Gamma \qquad \forall \upsilon \in V(\Omega)$$

Pour tout $\upsilon \in V(\Omega)$ indépendant de x_3 ; et d'après (3.4) l'equation précédente se réduit à :

$$\int_{\Gamma_+} G^{i,-1}\upsilon_i\sqrt{a}d\Gamma = 0 \ \ alors \ \ G^{i,-1} = 0, p.p.$$

En utilisant les expressions des fonctions $A^{ijkl}(0)$ et $e^0_{k\|l}$ on trouve
$\int_\Omega A^{ijkl}(0) e^0_{k\|l} e^{-1}_{i\|j}(\upsilon)\sqrt{a}dx = \int_\Omega 4A^{\alpha 3\sigma 3}(0) e^0_{\alpha\|3} e^{-1}_{\sigma\|3}(\upsilon)\sqrt{a}dx$
$+ \int_\Omega (A^{\alpha\beta 33}(0) e^0_{\alpha\|\beta} + A^{3333}(0) e^0_{3\|3}) e^{-1}_{3\|3}(\upsilon)\}\sqrt{a}dx =$
$\int_\Omega \left\{2\mu a^{\alpha\sigma} e^0_{\alpha\|3}\partial_3\upsilon_\sigma + \left(\lambda a^{\alpha\beta} e^0_{\alpha\|\beta} + (\lambda+2\mu) e^0_{3\|3}\right)\partial_3\upsilon_3\right\}\sqrt{a}dx = 0 \ , \forall \upsilon \in V(\Omega)$ D'après le théorème (3.4) on obtient les équations :

$$e^0_{\alpha\|3} = 0 \ \ et \ \ e^0_{3\|3} = -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu} a^{\alpha\beta} e^0_{\alpha\|\beta} \ \ dans \ \ \Omega$$

Etape 3 :

L'quation du problème (P^0) est : (d'après l'étape 1 , $e^{-1}_{i\|j} = 0$)

$\int_\Omega A^{ijkl}(0)\{e^0_{k\|l}e^0_{i\|j}(\upsilon)+e^1_{k\|l}e^{-1}_{i\|j}(\upsilon)\}dx+\int_\Omega B^{ijkl,1}e^0_{k\|l}e^{-1}_{i\|j}(\upsilon)\sqrt{a}dx$
$=\int_\Omega f^{i,0}\upsilon_i\sqrt{a}dx+\int_{\Gamma_-}h^{i,1}\upsilon_i\sqrt{a}d\Gamma+\int_{\Gamma_+}G^{i,0}\upsilon_i\sqrt{a}d\Gamma \qquad \forall\upsilon\in V(\Omega)$

Soit $\upsilon=\eta\in V(\omega)$.i,e, $\upsilon\in V(\Omega)$ et υ indépendant de x_3

alors :

$\int_\Omega A^{ijkl}(0)e^0_{k\|l}e^0_{i\|j}(\eta)\sqrt{a}dx=\int_\Omega\left(A^{\alpha\beta\sigma\tau}(0)e^0_{\sigma\|\tau}+A^{\alpha\beta33}(0)e^0_{3\|3}\right)e^0_{\alpha\|\beta}(\eta)\sqrt{a}dx$

$=\int_\Omega\left\{\lambda a^{\alpha\beta}a^{\sigma\tau}+\mu(a^{\alpha\sigma}a^{\beta\tau}+a^{\alpha\tau}a^{\beta\sigma})\right\}e^0_{\sigma\|\tau}e^0_{\alpha\|\beta}(\eta)\sqrt{a}dx+\int_\Omega\lambda a^{\alpha\beta}e^0_{3\|3}e^0_{\alpha\|\beta}(\eta)\sqrt{a}dx$
$=\frac{1}{2}\int_\Omega a^{\alpha\beta\sigma\tau}e^0_{\sigma\|\tau}e^0_{\alpha\|\beta}(\eta)\sqrt{a}dx$
$=\int_\Omega f^{i,0}\eta_i\sqrt{a}dx+\int_{\Gamma_-}h^{i,1}\eta_i\sqrt{a}d\Gamma+\int_{\Gamma_+}G^{i,0}\eta_i\sqrt{a}d\Gamma$ pour tout $\eta\in V(\omega)$,
où

$$a^{\alpha\beta\sigma\tau}:=\frac{4\lambda u}{\lambda+2u}a^{\alpha\beta}a^{\sigma\tau}+2u(a^{\alpha\sigma}a^{\beta\tau}+a^{\alpha\tau}a^{\beta\sigma})$$

tels que ;

$$\gamma_{\alpha\beta}(\eta):=\frac{1}{2}(\partial_\beta\eta_\alpha+\partial_\alpha\eta_\beta)-\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\eta_\sigma-b_{\alpha\beta}\eta_3$$

$$e^0_{\alpha\|\beta}=\gamma_{\alpha\beta}(\xi^0)ete^0_{\alpha\|\beta}(\eta)=\gamma_{\alpha\beta}(\eta)pourtout\eta\in V(\omega)$$

Alors d'après l'étape 3 le champs de vecteurs ξ^0 devrait satisfaire le problème variationnel bidimensionnel "$P_M(\omega)$"

$$\int_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau}\gamma_{\sigma\tau}(\xi^0)\gamma_{\alpha\beta}(\eta)\sqrt{a}dy=\int_\omega p^{i,0}\eta_i\sqrt{a}dy+\langle\sqrt{a}G^{i,0},\eta_i\rangle \;\; pour \;\; tout \;\; \eta\in V(\omega)$$

oú $p^{i,0}:=\int_{-1}^1 f^{i,0}dx_3+h^{i,1}(.,-1)$

On démontre maintenant que :

$$\langle\sqrt{a}G^{3,0},\overline{\eta}_3-\overline{\xi}^0_3\rangle\geq 0 \;\;\forall\;\;\eta\;\;\in K(\omega) \tag{3.52}$$

$$\left\langle\sqrt{a}G^{\alpha,0},\overline{\eta_\alpha}-\overline{\xi^0_\alpha}\right\rangle+\left\langle\sqrt{a}\nu|G^{3,0}|,|\eta_\tau|-|\xi^0_\tau|\right\rangle\geq 0 \;\;\forall\eta\in\mathbf{V}(\omega) \tag{3.53}$$

Par la même argumentation utilisée pour prouver (3.37), on trouve (3.52) et (3.53).
■

3.3.4 Modèle formel couplé flexion-membranaire

On se propose de donner un modèle bidimensionnel obtenu par l'analyse asymptotique formelle à partir du modèle tridimensionnel de coques élastiques minces constituées d'un materiau isotrope et homogène.On donne également les équations formelles vérifiées par le tenseur limite des contraintes .

On suppose qu'il existe deux fonctions $f^{i,2} \in L^2(\Omega)$ et $h^{i,3} \in L^2(\Gamma_-)$ telles que :

$$f^i(\varepsilon)(x) = \varepsilon^2 f^{i,2}(x), \quad pour \;\; tout \;\; x \in \Omega \tag{3.54}$$

$$h^i(\varepsilon)(x) = \varepsilon^3 h^{i,3}(x), \quad pour \;\; tout \;\; x \in \Gamma_- \tag{3.55}$$

$$G^{i,\varepsilon}(x^\varepsilon) = \varepsilon^3 G^i(\varepsilon)(x) \;\; pour \;\; tout \;\; x \in \Gamma_+ \tag{3.56}$$

et l'ensemble des déplacements inextensionnels .

$$V_0(\omega) = \{\eta \in H^1(\omega); \eta = 0 \;\; on \;\; \gamma_0, \gamma_{\alpha\beta}(\eta) = 0 \;\; dans \;\; \omega\} \tag{3.57}$$

n'est pas réduit à $\{0\}$. On substitue (3.54), (3.55) et(3.56) dans (3.38), *et on identifie les termes du* même ordre de ε on obtient à l'ordre $\varepsilon^{-1}, \varepsilon^0, \varepsilon^1$ et ε^2 respectivement : (D'après l'étape 1 , $e^{-1}_{i\|j} = 0$

$$P^{-1}\left\{ \;\forall v \in V(\Omega) \quad \int_\Omega A^{ijkl}(0) e^0_{k\|L} e^{-1}_{i\|j}(v)\sqrt{a}dx = \langle\sqrt{a}G^{i,-3}, v_i\rangle \right. \tag{3.58}$$

$$P^0\left\{ \begin{array}{l} \forall v \in V(\Omega) \quad \int_\Omega A^{ijkl}(0)\{e^0_{k\|L} e^0_{i\|j}(v) + e^1_{k\|L} e^{-1}_{i\|j}(v)\}\sqrt{a}dx \\ \qquad + \int_\Omega B^{ijkl,1} e^0_{k\|L} e^{-1}_{i\|j}(v)\}dx = \langle\sqrt{a}G^{i,-2}, v_i\rangle \end{array}\right. \tag{3.59}$$

$$P^1\left\{ \begin{array}{l} \int_\Omega A^{ijkl}(0)\{e^1_{k\|L} e^0_{i\|j}(v) + e^0_{k\|L} e^1_{i\|j}(v) + e^2_{k\|L} e^{-1}_{i\|j}(v)\}\sqrt{a}dx \\ + \int_\Omega B^{ijkl,1}\{e^1_{k\|L} e^{-1}_{i\|j}(v) + e^0_{k\|L} e^0_{i\|j}(v) + \}dx = \langle\sqrt{a}G^{i,-1}, v_i\rangle \end{array}\right. \tag{3.60}$$

$$P^2\left\{ \begin{array}{c} \int_\Omega A^{ijkl}(0)\{e^1_{k\|L} e^1_{i\|j}(v) + e^2_{k\|L} e^0_{i\|j}(v) + e^0_{k\|L} e^2_{i\|j}(v) + e^3_{k\|L} e^{-1}_{i\|j}(v)\}\sqrt{a}dx \\ + \int_\Omega B^{ijkl,1}\{e^1_{k\|L} e^0_{i\|j}(v) + e^0_{k\|L} e^1_{i\|j}(v) + e^2_{k\|L} e^{-1}_{i\|j}(v)\}dx + \int_\Omega B^{ijkl,2}\{e^1_{k\|L} e^{-1}_{i\|j}(v) + e^0_{k\|L} e^0_{i\|j}(v)\}dx \\ = \int_\Omega f^{i,2} v_i dx + \int_{\Gamma_-} h^{i,3} v_i \sqrt{a} d\Gamma_+ \langle\sqrt{a}G^{i,0}, v_i\rangle \end{array}\right. \tag{3.61}$$

Proposition 3.4 *:*

On Suppose que l'espace $V_0(\omega)=\{\eta\in H^1(\omega);\eta=0$ *on* $\gamma_0,\gamma_{\alpha\beta}(\eta)=0$ *dans* $\omega\}$ *n'est pas réduit à* $\{0\}$, , *et qu'il existe* $f^{i,2}\in L^2(\Omega)$ *et* $h^{i,3}\in L^2(\Gamma_-)$ *indépendantes de* ε *telles que :*

$f^i(\varepsilon)=\varepsilon^2 f^{i,2}, h^i(\varepsilon)=\varepsilon^3 h^{i,3}$, $G^{i,\varepsilon}(x^\varepsilon)=\varepsilon^3 G^i(\varepsilon)(x)$

Alors $u^0:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}^3$ *est indépendant de* x_3 *et qui s'identifie avec un champs de vecteurs* $\xi:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}^3$ *satisfaisant le problème variationnel bidimensionnel "*$P_F(\omega)$*" d'une coque "enflexion" linéairement élastique.*

$$\xi^0\in K(\omega):=\{\eta\in V_F(\omega)/\eta_3\le d\ \ sur\ \ \Gamma_+\}$$

$V_F(\omega):=\{\eta=(\eta_i)\in H^1(\omega)\times H^1(\omega)\times H^2(\omega)\ \ ,\eta_i=\partial_\nu\eta_3=0\ \ sur\ \ \gamma_0,\gamma_{\alpha\beta}(\eta)=0\ \ dans\ \ \omega\}$

$$\frac{1}{3}\int_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau}\rho_{\sigma\tau}(\xi^0)\rho_{\alpha\beta}(\eta)\sqrt{a}dy=\int_\omega p^{i,2}\eta_i\quad\sqrt{a}dy+\langle\sqrt{a}G^{i,0},\eta_i\rangle$$

pour tout $\eta=(\eta_i)\in V_F(\omega)$,

et

$$\langle\sqrt{a}G^{3,0},\eta_3-\xi_3^0\rangle\ge 0\ \ \forall\ \ \eta\ \ \in\ \ K(\omega)$$

$$\left\langle\sqrt{a}G^{\alpha,0},\overline{\eta_\alpha}-\overline{\xi_\alpha^0}\right\rangle+\left\langle\sqrt{a}\nu|G^{3,0}|,|\eta_\tau|-|\xi_\tau^0|\right\rangle\ge 0\ \ \forall\eta\in\boldsymbol{V}(\omega)\qquad(3.62)$$

où

$$\gamma_{\alpha\beta}(\eta):=\frac{1}{2}(\partial_\alpha\eta_\beta+\partial_\beta\eta_\alpha)-\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\eta_\sigma-b_{\alpha\beta}\eta_3$$

$$\rho_{\alpha\beta}(\eta):=\partial_{\alpha\beta}\eta_3-\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\partial_\sigma\eta_3-b^\sigma_\alpha b_{\sigma\beta}\eta_3+b^\sigma_\alpha(\partial_\beta\eta_\sigma-\Gamma^\tau_{\beta\sigma}\eta_\tau)+b^\tau_\beta(\partial_\alpha\eta_\tau-\Gamma^\sigma_{\alpha\tau}\eta_\sigma)+(\partial_\alpha b^\tau_\beta+\Gamma^\tau_{\alpha\sigma}b^\sigma_\beta-\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}b^\tau_\sigma)\eta_\tau$$

$$a^{\alpha\beta\sigma\tau}:=\frac{4\lambda\mu}{\lambda+2\mu}a^{\alpha\beta}a^{\sigma\tau}+2\mu(a^{\alpha\sigma}a^{\beta\tau}+a^{\alpha\tau}a^{\beta\sigma})$$

$$p^{i,2}:=\int_{-1}^{+1}f^{i,2}dx_3+h_-^{i,3}\ \ \ et\ \ \ h_-^{i,3}=h^{i,3}(.,-1)$$

Preuve.

(i) Si $V_0(\omega)\neq\{0\}$ et tout $\eta\in(V_0(\omega)-\{0\})$ par définition du problème "$P_M(\omega)$"

$$\int_\omega p^{i,0}\eta_i\sqrt{a}dy+\int_{\Gamma_+}G^{i,-2}\eta_i\sqrt{a}d\Gamma=0\ \ alors\ \ \int_{\Gamma_+}G^{i,-2}\eta_i\sqrt{a}=0$$

on déduit que : $G^{i,-2} = 0 \quad$ p.p
D'après identification des coefficients de ε^{-1} et ε^{0} (l'étape 2 et 3)
Or$p^{i,0} = G^{i,-2} = 0$, prenant $\eta = \xi^0$ dans le problème "$P_M(\omega)$" on obtient :

$$\int_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau}\gamma_{\sigma\tau}(\xi^0)\gamma_{\alpha\beta}(\xi_0)d\Gamma = 0$$

alors $\gamma_{\alpha\beta}(\xi^0) = 0$ et donc $\xi^0 \in V_0(\omega)$.
Comme $e^0_{\alpha\|\beta} = \gamma_{\alpha\beta}(\xi^0) = 0$, les relations

$$e^0_{\alpha\|3} = 0 \ \ et \ \ (\lambda + 2u)e^0_{3\|3} + \lambda a^{\alpha\beta}e^0_{\alpha\|\beta} = 0 \ \ dans \ \ \Omega$$

établits dans l'étape (2) impliquent :

$$\partial_3 u^1_3 = e^0_{3\|3} = 0$$

et

$$e^0_{\alpha\|3} = \frac{1}{2}(\partial_\alpha u^0_3 + \partial_3 u^1_\alpha) + b^\sigma_\alpha u^0_\sigma = \frac{1}{2}(\partial_\alpha \xi^0_3 + \partial_3 u^1_\alpha) + b^\sigma_\alpha \xi^0_\sigma = 0$$

alors :

$$\partial_3 u^1_\alpha = -(\partial_\alpha \xi^0_3 + 2b^\sigma_\alpha \xi^0_\sigma) \qquad u^1 \in V(\Omega)$$

Puis que chaque fonction $(\partial_\alpha \xi^0_3 + 2b^\sigma_\alpha \xi^0_\sigma)$ est indépendante de x_3 il existe $\xi^1 = (\xi^1_i) \in V(\omega)$ tel que $u^1_\alpha = \xi^1_\alpha - x_3(\partial_\alpha \xi^0_3 + 2b^\sigma_\alpha \xi^0_\sigma)$ et $u^1_3 = \xi^1_3$.Les premières relations exigent en plus que la fonction ξ^0_3 soit dans l'espace $H^2(\omega)$ et vérifie la condition au bord $\partial_\nu \xi^0_3 = 0$ sur γ_0 .
(∂_v ; dénote la dérivée normale extérieure le long γ) Comme $\xi^0_\alpha = 0$ sur γ_0 d'après l'étape (1).
De ce que précède on a bien montrer que :

$$e^0_{i\|j} = 0 \ \ dans \ \ \Omega$$

$$\xi^0 \in K(\omega) := \{\eta = (\eta_i) \in V_F(\omega)/\eta_3 \leq d\}$$

$$u^1_\alpha = \xi^1_\alpha - x_3(\partial_\alpha \xi^0_\alpha + 2b^\sigma_\alpha \xi^0_\sigma) \ \ et \ \ u^1_3 = \xi^1_3$$

où $\quad \xi^1 = (\xi^1_i) \in V(\omega)$.

(ii) Comme $e^0_{i\|j} = 0$; l'annulation du coefficient de ε^0 en $P(\varepsilon, \Omega)$ réduit a :

$$\int A^{ijkl}(0) e^1_{k\|l} e^{-1}_{i\|j}(v) \sqrt{a} dx = 0 \quad pour \quad tout \quad v \in V(\omega)$$

Par un calcul semblable à celui dans l'étape (2), nous concluons alors

$$e^1_{\alpha\|3} = 0 \quad et \quad e^1_{3\|3} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2u} a^{\alpha\beta} e^1_{\alpha\|\beta} \quad dans \quad \Omega$$

Il reste le calcul des fonctions $e^1_{\alpha\|\beta}$

$$b^\sigma_\alpha|_\beta := \partial_\beta b^\sigma_\alpha + \Gamma^\sigma_{\beta\tau} b^\tau_\alpha - \Gamma^\tau_{\alpha\beta} b^\sigma_\tau = b^\sigma_\beta|_\alpha$$

Nous obtenons après quelques manipulations

$$e^1_{\alpha\|\beta} = \frac{1}{2}(\partial_\beta u^1_\alpha + \partial_\alpha u^1_\beta) - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} u^1_\sigma - b_{\alpha\beta} u^1_3 + x_3 \{ b^\sigma_\beta|_\alpha u^0_\sigma + b^\sigma_\alpha b_{\sigma\beta} u^0_3 \}$$

$$= \frac{1}{2}(\partial_\beta \xi^1_\alpha + \partial_\alpha \xi^1_\beta) - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} \xi^1_\sigma - b_{\alpha\beta} \xi^1_3 - x_3 \{ \partial_{\alpha\beta} \xi^0_3 - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} \partial_\sigma \xi^0_3 + b^\sigma_\alpha b_{\sigma\beta} \xi^0_3$$
$$+ b^\sigma_\alpha (\partial_\beta \xi^0_\sigma - \Gamma^\tau_{\beta\sigma} \xi^0_\tau) + b^\tau_\beta (\partial_\alpha \xi^0_\tau - \Gamma^\sigma_{\alpha\tau} \xi^0_\sigma) - b^\tau_\beta|_\alpha \xi^0_\tau \}$$

avec

$$\rho_{\alpha\beta}(\eta) = \partial_{\alpha\beta}\eta_3 - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} \partial_\sigma \eta_3 - b^\sigma_\alpha b_{\sigma\beta} n_3 + b^\sigma_\alpha (\partial_\beta \eta_\sigma - \Gamma^\tau_{\beta\sigma} \eta_\tau)$$
$$+ b^\tau_\beta (\partial_\alpha \eta_\tau - \Gamma^\sigma_{\alpha\tau} \eta_\sigma) - b^\tau_\beta|_\alpha \eta_\tau$$
$$\rho_{\alpha\beta}(\eta) \in L^2(\omega) \quad si \quad \eta = (\eta_i) \in H^1(\omega) \times H^1(\omega) \times H^2(\omega)$$
$$e^1_{\alpha\|\beta} = \gamma_{\alpha\beta}(\xi^1) - x_3 \rho_{\alpha\beta}(\xi^0) \tag{3.63}$$

(iii) L'equation du problème (P^1)(D'après l'étape (1) et(i) , $e^{-1}_{i\|j} = e^0_{i\|j} = 0$)

$$\int_\Omega A^{ijkl}(0) \{ e^1_{k\|l} e^0_{i\|j}(v) + e^2_{k\|l} e^{-1}_{i\|j}(v) \} \sqrt{a} dx + \int_\Omega B^{ijkl,1} e^1_{k\|l} e^{-1}_{i\|j}(v) dx$$

$$= \int_{\Gamma_+} G^{i,-1} v_i \sqrt{a} d\Gamma \quad pour \quad tout \quad v \in V(\Omega)$$

Soit $\quad v = \eta \in V(\omega) \qquad (e^{-1}_{i\|j}(v) = 0)$

$$\int_\Omega A^{ijkl}(0) e^1_{k\|l} e^0_{i\|j}(\eta) \sqrt{a} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\Omega} a^{\alpha\beta\sigma\tau} e^{0}_{\sigma\|\tau} e^{0}_{\alpha\|\beta}(\eta)\sqrt{a}dx$$

$$= \int_{\omega} a^{\alpha\beta\sigma\tau}\gamma_{\sigma\tau}(\xi^1)\gamma_{\alpha\beta}(\eta)\sqrt{a}dx = \int_{\Gamma_+} G^{i,-1} v_i\sqrt{a}d\Gamma \quad \forall\eta \in (\omega)$$

pour tout $\eta \in (V_0(\omega) - \{0\})$; $\int G^{i,-1}\eta_i\sqrt{a} = 0$ alors $G^{i,-1} = 0$. Donc, en posant $\eta = \xi^1$ dans le problème du variationnel précédent on obtient :

$$\int_{\omega} a^{\alpha\beta\sigma\tau}\gamma_{\sigma\tau}(\xi^1)\gamma_{\alpha\beta}(\xi^1)\sqrt{a}dy = 0$$

d'où :$\gamma_{\alpha\beta}(\xi^1) = 0$ et par conséquent ,

$$\xi^1 \in V_0(\omega)$$

tout que $\xi^1 \in V(\Omega)$dans l'étape (i).

$$\int_{\Omega} A^{ijkl}(0)\{e^{1}_{k\|l} e^{0}_{i\|j}(v) + e^{2}_{k\|l} e^{-1}_{i\|j}(v)\}\sqrt{a}dx + \int_{\Omega} B^{ijkl,1} e^{1}_{k\|l} e^{-1}_{i\|j}(v) \;\; dx = 0$$

pour tout $v \in V(\omega)$.
Etant donné un élément arbitraire η dans l'espace $V_F(\omega)$,
soit $v(\eta) = (v_i(n))$ définie par

$$v_\alpha(\eta) := x_3\{2b^{\sigma}_{\alpha}\eta_\sigma + \partial_\alpha\eta_3\} \;\; et \;\; v_3(\eta) := 0$$

Comme $v(\eta) \in V(\Omega)$ nous pouvons laisser $v = v_i(\eta)$ dans les équations précédentes cela mêne aux équations.

$$\int_{\Omega} A^{ijkl}(0) e^{1}_{k\|l} e^{0}_{i\|j}(v(\eta))\sqrt{a}dx + 4\int_{\Omega} A^{\alpha 3\sigma 3}(0) e^{2}_{\sigma\|3}(b^{\tau}_{\alpha}\eta_\tau + \frac{1}{2}\partial_\alpha\eta_3)\sqrt{a} \;\; dx$$

$$+4\int_{\Omega} B^{\alpha 3\sigma 3,1} e^{1}_{\sigma\|3}(b^{\tau}_{\alpha}\eta_\tau + \frac{1}{2}\partial_\alpha\eta_3)\sqrt{a}dx = 0 \;\; pour \;\; tout \;\; \eta \in V_F(\omega)$$

(iv) L'équation du problème (P^2)($e^{-1}_{ij} = e^{0}_{i\|j} = 0$)

$$\int A^{ijkl}(0)\{e^{1}_{k\|l} e^{1}_{i\|j}(v) + e^{2}_{k\|l} e^{0}_{i\|j}(v) + e^{3}_{k\|l} e^{-1}_{i\|j}(v)\}\sqrt{a}dx + \int_{\Omega} B^{ijkl,1}\{e^{1}_{k\|l} e^{0}_{i\|j}(v) + e^{2}_{k\|l} e^{-1}_{i\|j}(v)\}dx$$

$$+\int_{\Omega} B^{ijkl,2} e^{1}_{k\|l} e^{-1}_{i\|j}(v)dx = \int_{\Omega} f^{i,2} v_i\sqrt{a}dx + \int_{\Gamma_-} h^{i,3}(v_i)\sqrt{a}d\Gamma$$

$$+\int_{\Gamma_+} G^{i,0} v_i \sqrt{a} d\Gamma \quad pour \quad tout \quad v \in V_F(\Omega)$$

Soit $v = \eta \in V_F(\omega)$, alors :

$$e_{ij}^{-1}(v) = 0$$

$$e^0_{\alpha\|\beta}(v) = \gamma_{\alpha\beta}(\eta) = 0, \quad e^0_{\alpha\|3}(v) = \frac{1}{2}\partial_\alpha \eta_3 + b^\sigma_\alpha \eta_\sigma, \quad e^0_{3\|3}(v) = 0$$

D'autre part on a :

$$\int_\Omega A^{ijkl}(0) e^1_{k\|l} e^1_{i\|j}(\eta)\sqrt{a}dx + 4\int_\Omega A^{\alpha 3\sigma 3}(0) e^2_{\sigma\|3}\{b^\tau_\alpha \eta_\tau + \frac{1}{2}\partial_\alpha \eta_3\}\sqrt{a}dx + 4\int_\Omega B^{\alpha 3\sigma 3,1} e^1_{\sigma\|3}\{b^\tau_\alpha \eta_\tau$$

$$+\frac{1}{2}\partial_\alpha \eta_3\}\sqrt{a}dx = \int_\omega p^{i,2}\eta_i \sqrt{a}dy + \langle \sqrt{a} G^{i,0}, \eta_i\rangle \quad pour \quad tout \quad \eta \in V_F(\omega)$$

où

$$p^{i,2} = \int_{-1}^{1} f^{i,2} dx_3 + h^{i,3}(.,-1)$$

En soustrayent les équations trouvées dans l'étap (iii) de ces équations nous obtenons :

$$\int_\Omega A^{ijkl}(0) e^1_{k\|l}\{e^1_{i\|j}(\eta) - e^0_{i\|j}(v(\eta))\}\sqrt{a}dx = \int_\omega p^{i,2}\eta_i\sqrt{a}dy + \langle \sqrt{a}G^{i,0}, \eta_i\rangle \ pour \ tout \ \eta \in V_F(\omega)$$

En premier les relations (établie dans l'étape (ii))

$$e^1_{\alpha\|3} = 0 \quad et \quad e^1_{33} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} a^{\alpha\beta} e^1_{\alpha\|\beta} \quad dans \quad \Omega \quad et \quad e^1_{3\|3}(\eta) = e^0_{3\|3}(v(\eta)) = 0$$

$$\begin{aligned} A^{ijkl}(0) e^1_{k\|l}\{e^1_{i\|j}(\eta) - e^0_{i\|j}(v(\eta))\} &= A^{\alpha\beta\sigma\tau}(0) e^1_{\sigma\|\tau}\{e^1_{\alpha\|\beta}(\eta) - e^0_{\alpha\|\beta}(v(\eta))\} \\ &+ A^{\alpha\beta 33}(0) e^1_{3\|3}\{e^1_{\alpha\|\beta}(\eta) - e^0_{\alpha\|\beta}(v(\eta))\} \\ &= \frac{1}{2} a^{\alpha\beta\sigma\tau} e^1_{\sigma\|\tau}\{e^1_{\alpha\|\beta}(\eta) - e^0_{\alpha\|\beta}(v(\eta))\} \end{aligned}$$

Deuxiement :

$$e^1_{\sigma\|\tau} = -x_3 \rho_{\sigma\tau}(\xi^0)$$

$$e^1_{\alpha\|\beta}(\eta) - e^0_{\alpha\|\beta}(v(\eta)) = x_3\{b^\sigma_\beta|_\alpha \eta_\sigma + b^\sigma_\alpha b_{\sigma\beta}\eta_3\} - x_3\{\partial_\alpha(b^\tau_\beta \eta_\tau) + \partial_\beta(b^\sigma_\alpha \eta_\sigma)$$

$$+\partial_{\alpha\beta}\eta_3 - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\partial_\sigma \eta_3 - 2\Gamma^\sigma_{\alpha\beta} b^\tau_\sigma \eta_\tau\}$$

alors :

$$e^1_{\alpha\|\beta}(\eta) - e^0_{\alpha\|\beta}(v(\eta)) = -x_3 \rho_{\alpha\beta}(\eta) \quad pour \quad tout \quad \eta \in V_F(\omega)$$

Nous avons donc les équations :

$$\int_\Omega A^{ijkl}(0) e^1_{k\|l}\{e^1_{i\|j}(\eta) - e^0_{i\|j}(v(\eta))\}\sqrt{a}dx = \frac{1}{2}\int_\Omega x_3^2 a^{\alpha\beta\sigma\tau}\rho_{\sigma\tau}(\xi^0)\rho_{\alpha\beta}(\eta)\sqrt{a}dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau}\rho_{\sigma\tau}(\xi^0)\rho_{\alpha\beta}(\eta)\sqrt{a}dy \quad pour \quad tout \quad \eta \in V_F(\omega)$$

Pour résumer, nous avons établi que quand le cas $V_0(\omega) \neq \{0\}$ le champs de vecteurs ξ^0 (doit satisfaire)le problème variationnel $P_F(\omega)$ suivant :

$$\xi^0 \in K(\Omega) = \{\eta \in V_F(\omega)/\eta_3 \leq d\}$$

$$\frac{1}{3}\int_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau}\rho_{\sigma\tau}(\xi^0)\rho_{\alpha\beta}(\eta)\sqrt{a}dy = \int_\omega p^{i,2}\eta_i\sqrt{a}dy + \langle\sqrt{a}G^{i,0},\eta_i\rangle \quad pour \quad tout \quad \eta \in V_F(\omega)$$

où

$$p^{i,2} := \int_{-1}^{1} f^{i,2} \quad dx_3 + h^{i,3}(.,-1)$$

$$\langle\sqrt{a}G^{3,0},\overline{\eta}_3 - \overline{\xi}^0_3\rangle \geq 0 \quad \forall \quad v \quad \in K(\Omega) \tag{3.64}$$

$$\left\langle\sqrt{a}G^{\alpha,0},\overline{\eta_\alpha} - \overline{\xi^0_\alpha}\right\rangle + \left\langle\sqrt{a}\nu|G^{3,0}|,|\eta_\tau| - |\xi^0_\tau|\right\rangle \geq 0 \quad \forall\eta \in \mathbf{V}(\Omega) \tag{3.65}$$

Par la même argumentation utilisée pour prouver (3.37) , on trouve (3.64) et (3.65). ∎

Chapitre 4

Etude de la convergence des solutions du problème variationnel mis à l'échelle $P(\varepsilon, \Omega)$ pour une coque elliptique membranaire.

Dans ce chapitre [1], on établit un théorème de la convergence des solutions du problème variationnel $P(\varepsilon, \Omega)$ d'une coque elliptique membranaire, i.e, sa surface moyenne $S = \theta(\bar{\omega})$ est elliptique qui se caractérise par la courbure Gaussienne (voir [10] ou [6, p.121]), e.g. une partie d'un ellipsoïde. On suppose aussi qu'elle est totalement encastrée. On va prouver que sa limite est solutions d'un problème bidimensionnel ce qui valide les résultats obtenus par la méthode des développements asymptotiques formels (Chapitre 3).

On va étudier chaque fois le cas de contact sans frottement puis le cas de contact avec frottement de Coulomb.

Nous énonçons maintenant quelques résultats qu'on aura besoin par la suite :

4.1 Le cas de contact sans frottement

Théorème 4.1 *On Suppose que $\theta \in C^3(\bar{\omega}, \mathbb{R}^3)$, et on considère une famille de coques membranaires, linéairement élastiques et elliptiques ; d'épaisseur 2ε qui s'approche de zéro, dont la surface moyenne $S = \theta(\bar{\omega})$ est la même pour toutes les coques. Soit*

1. La première section de ce chapitre est l'objet d'une communication au seminaire international TAMTAM'11, Sousse, Tunisie.

$u(\varepsilon)$ la solution du problème $P(\varepsilon,\Omega)$; si $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$; alors il existe des fonctions $u_\alpha \in H^1(\Omega)$ satisfaisants $u_\alpha = 0$ sur $\gamma \times [-1,1]$, $u_3 \in L^2(\Omega)$ et $G^3(0) \in L^2(\Gamma_+)$ tels que :

$$u_\alpha(\varepsilon) \to u_\alpha \ \textit{dans} \ H^1(\Omega)$$
$$u_3(\varepsilon) \to u_3 \ \textit{dans} \ L^2(\Omega)$$
$$G^3(\varepsilon) \to G^3(0) \ \textit{dans} \ H^{-2}(\omega)$$

quand $\varepsilon \to 0$.

$$u := (u_i) \ \textit{et indpendant de} \ x_3.$$

En outre la moyenne ; $\bar{u} := \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} u dx_3$ satisfait le problème variationnel bidimensionnel mis à l'échelle $P_M(\omega)$ d'une coque elliptique membranaire linéairement élastique suivant :

$$\bar{u} := (\bar{u}_i) \in K_M(\omega) = \{\eta = (\eta_i) \in V_M(\omega)/\eta_3 \leq d\};$$

$$V_M(\omega) = H_0^1(\omega) \times H_0^1(\omega) \times L^2(\omega)$$

$$\int_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau}\gamma_{\sigma\tau}(\bar{u})\gamma_{\alpha\beta}(\eta)\sqrt{a}dy = \int_\omega p^i\eta_i\sqrt{a}dy + \langle\sqrt{a}G^3(0), \bar{\eta}_3\rangle \ \textit{pour tout} \ \eta = (\eta_i) \in V_M(\omega)$$

$$\langle\sqrt{a}G^3(0), \bar{\eta}_3 - \bar{u}_3\rangle \geq 0 \quad \forall \quad \eta \in K_M(\omega)$$

tels que

$$\gamma_{\alpha\beta}(\eta) := \frac{1}{2}(\partial_\beta\eta_\alpha + \partial_\alpha\eta_\beta) - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\eta_\sigma - b_{\alpha\beta}\eta_3$$

$$a^{\alpha\beta\sigma\tau} := \frac{4\lambda u}{\lambda + 2u}a^{\alpha\beta}a^{\sigma\tau} + 2u(a^{\alpha\sigma}a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau}a^{\beta\sigma})$$

$$p^i := \int_{-1}^{1} f^i dx_3 + h^i_- \quad \textit{et} \quad h^i_- = h(.,-1)$$

Preuve.

La preuve de ce théorème est divisée en dix parties, comptées de (i) à (x). pour des raisons techniques la considération des forces de surface est prise en compte qu'à partir de la partie (ix), en d'autre termes nous supposons que $(u(\varepsilon), G(\varepsilon))$ satisfait le problème variationnel $P(\varepsilon,\Omega)$, dans les parties (i) à (viii).

(i) On montre dans cette partie que les suites $\{u_\alpha(\varepsilon)\}$,$\{u_3(\varepsilon)\}$ et $\{e_{i\|j}(\varepsilon)\}$ admettent des sous-suites notées aussi, respectivement par $\{u_\alpha(\varepsilon)\}$,$\{u_3(\varepsilon)\}$ et $\{e_{i\|j}(\varepsilon)\}$ vérifiant les convergences faibles suivantes :

$$\begin{aligned} u_\alpha(\varepsilon) &\rightharpoonup u_\alpha \text{ dans } H^1(\Omega), \\ u_3(\varepsilon) &\rightharpoonup u_3 \text{ dans } L^2(\Omega), \\ e_{i\|j}(\varepsilon) &\rightharpoonup e_{i\|j} \text{ dans } L^2(\Omega). \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Korn tridimensionnelle on obtient : $\exists$ des constantes C_M et C_e tels que :

$$\begin{aligned} C_M^{-2}\sum_i |u_i(\varepsilon)|^2_{0,\Omega} &\leq C_M^{-2}\left(\sum_\alpha \|u_\alpha(\varepsilon)\|^2_{1,\Omega} + |u_3(\varepsilon)|^2_{0,\Omega}\right) \\ &\leq \sum_{ij} |e_{i\|j}(\varepsilon)|^2_{0,\Omega} \\ &\leq C_e g_0^{\frac{-1}{2}} \int_\Omega A^{ijkl}(\varepsilon)e_{k\|l}(\varepsilon)e_{i\|j}(\varepsilon)\sqrt{g(\varepsilon)}dx \\ &= C_e g_0^{\frac{-1}{2}} \left(\int_\Omega f^i u_i(\varepsilon)\sqrt{g(\varepsilon)}dx + \langle \sqrt{g(\varepsilon)}G^3(\varepsilon), u_3(\varepsilon)\rangle\right) \\ &\leq C_e g_0^{\frac{-1}{2}} \int_\Omega f^i u_i(\varepsilon)\sqrt{g(\varepsilon)}dx \\ &\leq C_e g_0^{\frac{-1}{2}} g_1^{\frac{1}{2}} \left\{\sum_i |f^i|^2_{0,\Omega}\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{\sum_i |u_i(\varepsilon)|^2_{0,\Omega}\right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

D'où, il existe des constantes C_1, C_2 et C_3 indépendantes de ε telles que :
$\|u_\alpha(\varepsilon)\|_{1,\Omega} \leq C_1$, $|u_3(\varepsilon)|_{0,\Omega} \leq C_2$ et $|e_{i\|j}(\varepsilon)|_{0,\Omega} \leq C_3$.
On déduit que les suites $\{u_\alpha(\varepsilon)\}$, $\{u_3(\varepsilon)\}$ et $\{e_{i\|j}(\varepsilon)\}$ sont bornées, respectivement dans $H^1(\Omega)$, $L^2(\Omega)$ et $L^2(\Omega)$. Ce qui nous permet d'extraire des sous-suites toujours notées respectivement par $\{u_\alpha(\varepsilon)\}$, $\{u_3(\varepsilon)\}$ et $\{e_{i\|j}(\varepsilon)\}$ qui admettent des limites faibles respectivement dans $H^1(\Omega)$, $L^2(\Omega)$ et $L^2(\Omega)$ qu'on note u_α, u_3 et $e_{i\|j}$ respectivement.

(ii) On montre que les fonctions u_i trouvées dans (i) sont indépendantes de x_3.
D'aprés (i) :

$$\partial_3 u_\alpha(\varepsilon) + \varepsilon\partial_\alpha u_3(\varepsilon) = 2\varepsilon\{e_{\alpha\|3}(\varepsilon) + \Gamma^\sigma_{\alpha 3}(\varepsilon)u_\sigma(\varepsilon)\} \to 0 \;\; dans \;\; L^2(\Omega);$$

en effet, d'après (i) les fonctions $(u_3(\varepsilon))$ est bornée dans $L^2(\Omega)$ et $u_\alpha(\varepsilon) \rightharpoonup u_\alpha$ dans $H^2(\Omega)$ et $\Gamma^\sigma_{\alpha 3}(\varepsilon)$ convergent dans $C^0(\bar{\Omega})$ (voir [6, Thm.3.3.1]).
D'autre part, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\int_\Omega \partial_3 u_\alpha \varphi dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega \partial_3 u_\alpha(\varepsilon) \varphi dx,$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_\Omega \varepsilon \partial_\alpha u_3(\varepsilon) \varphi dx \right\} = - \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_\Omega \varepsilon u_3(\varepsilon) \partial_\alpha \varphi dx \right\} = 0$$

Donc :

$$0 = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_\Omega \left(\partial_3 u_\alpha(\varepsilon) + \varepsilon \partial_\alpha u_3(\varepsilon) \right) \varphi dx \right\} = \int_\Omega \partial_3 u_\alpha \varphi dx,$$

ce qui donne $\partial_3 u_\alpha = 0$ p.p. sur Ω.
La partie (i) également implique que $\partial_3 u_3(\varepsilon) = \varepsilon e_{3\|3}(\varepsilon) \to 0$ dans $L^2(\Omega)$.
Pour tout $\varphi \in D(\Omega)$, de $u_3(\varepsilon) \rightharpoonup u_3$ dans $L^2(\Omega)$ on a

$$\int_\Omega u_3 \partial_3 \varphi dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega u_3(\varepsilon) \partial_3 \varphi dx = - \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega \partial_3 u_3(\varepsilon) \varphi dx = 0$$

ce qui implique $\partial_3 u_3 = 0$ p.p. sur Ω au sens des distributions.

(iii) Les limites $e_{i\|j}$ la trouvées dans (i) sont indépendantes de x_3, de plus elles sont en rapport avec la limite $u := (u_i)$ par :

$$e_{\alpha\|\beta} = \gamma_{\alpha\beta}(u) := \frac{1}{2} \left(\partial_\alpha u_\beta + \partial_\beta u_\alpha \right) - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} u_\sigma - b_{\alpha\beta} u_3, \tag{4.1}$$

$$e_{\alpha\|3} = 0, \tag{4.2}$$

$$e_{3\|3} = - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} a^{\alpha\beta} e_{\alpha\|\beta}. \tag{4.3}$$

On rappelle que

$$e_{\alpha\|\beta}(\varepsilon) = \frac{1}{2} (\partial_\alpha u_\beta(\varepsilon) + \partial_\beta u_\alpha(\varepsilon)) - \Gamma^p_{\alpha\beta}(\varepsilon) u_p(\varepsilon).$$

D'après (i) on a $e_{\alpha\|\beta}(\varepsilon) \rightharpoonup e_{\alpha\|\beta}$ dans $L^2(\Omega)$, $u_\alpha(\varepsilon) \rightharpoonup u_\alpha$ dans $H^1(\Omega)$, $u_3(\varepsilon) \rightharpoonup u_3$ dans $L^2(\Omega)$. Et le fait que $\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}(\varepsilon) \to \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}$ et $\Gamma^3_{\alpha\beta}(\varepsilon) \to b_{\alpha\beta}$ dans $C^0(\bar{\Omega})$ (voir [6, Thm. 3.3-1]) ; on trouve que

$$\frac{1}{2} (\partial_\alpha u_\beta(\varepsilon) + \partial_\beta u_\alpha(\varepsilon)) - \Gamma^p_{\alpha\beta}(\varepsilon) u_p(\varepsilon) \rightharpoonup \gamma_{\alpha\beta}(u) \text{ dans } L^2(\Omega).$$

d'où (4.1).
De la partie (ii) on déduit que les fonctions $e_{\alpha\|\beta}$ sont indépendantes de x_3 depuis les fonctions u_i sont indépendantes de x_3.
Soit $\upsilon = (\upsilon_i)$ une fonction arbitraire dans l'espace

$$V(\Omega) = \{\upsilon = (\upsilon_i) \in H^1(\Omega); \upsilon = 0 \text{ on } \gamma \times [-1, 1]\}$$

Les relations suivantes sont des conséquences directes des définitions des $e_{i\|j}(\varepsilon, \upsilon)$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon e_{\alpha\|\beta}(\varepsilon, \upsilon) &\to 0 \text{ dans } L^2(\Omega) \\
\varepsilon e_{\alpha\|3}(\varepsilon, \upsilon) &\to \frac{1}{2}\partial_3 \upsilon_\alpha \text{ dans } L^2(\Omega) \\
\varepsilon e_{3\|3}(\varepsilon, \upsilon) &= \partial_3 \upsilon_3
\end{aligned}$$

pour tout $\varepsilon > 0$. Les équations du problème variationnel tri-dimensionnel mis à l'échelle $P(\varepsilon, \Omega)$ nous donnent

$$\begin{aligned}
\int_\Omega & A^{ijkl}(\varepsilon)\{\varepsilon e_{k\|l}(\varepsilon) e_{i\|j}(\varepsilon, \upsilon)\}\sqrt{g(\varepsilon)}dx \\
&= \int_\Omega \{A^{\alpha\beta\sigma\tau}(\varepsilon) e_{\sigma\|\tau}(\varepsilon) + A^{\alpha\beta 33}(\varepsilon) e_{3\|3}(\varepsilon)\}\{\varepsilon e_{\alpha\|\beta}(\varepsilon, \upsilon)\}\sqrt{g(\varepsilon)}dx \\
&+ \int_\Omega \{4A^{\alpha 3\sigma 3}(\varepsilon) e_{\sigma\|3}(\varepsilon)\}\{\varepsilon e_{\alpha\|3}(\varepsilon, \upsilon)\}\sqrt{g(\varepsilon)}dx \\
&+ \int_\Omega \{A^{33\sigma\tau}(\varepsilon) e_{\sigma\|\tau}(\varepsilon) + A^{3333}(\varepsilon) e_{3\|3}(\varepsilon)\}\{\varepsilon e_{3\|3}(\varepsilon, \upsilon)\}\sqrt{g(\varepsilon)}dx \\
&= \varepsilon \int_\Omega f^i \upsilon_i \sqrt{g(\varepsilon)}dx + \varepsilon\langle\sqrt{g(\varepsilon)}G^3(\varepsilon), \upsilon_3\rangle. \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

On choisit $\upsilon_3 = 0$ sur le bord Γ_+ dans (4.4) ; après passage à la limite, on trouve

$$\int_\Omega \left\{2\mu a^{\alpha\sigma} e_{\sigma\|3}\partial_3 \upsilon_\alpha + \left(\lambda a^{\sigma\tau} e_{\sigma\|\tau} + (\lambda + 2\mu) e_{3\|3}\right)\partial_3 \upsilon_3\right\}\sqrt{a}dx = 0$$

A l'aide des fonctions tests convenables, on déduit que $e_{\sigma\|3} = 0$ et $e_{3\|3} = \frac{-\lambda}{\lambda+2\mu} a^{\alpha\beta} e_{\alpha\|\beta}$ dans $L^2(\Omega)$.

(iv) On montre que $G^3(\varepsilon) \rightharpoonup G^3(0)$ dans $H^{-2}(\omega)$ et la fonction $\bar{u} := (\bar{u}_i)$ satisfait le problème variationnel bidimensionnel $P_M(\omega)$. Soit $v = (v_i) \in V(\Omega)$ indépendant de x_3 ; alors le comportement asymptotique des fonctions $\Gamma^p_{\alpha\beta}(\varepsilon)$ et $\Gamma^\sigma_{\alpha 3}(\varepsilon)$

(voir[6, Thm. 3.3-1]) ; montre que :

$$e_{\alpha\|\beta}(\varepsilon,\upsilon)\to\gamma_{\alpha\beta}(\upsilon):=\frac{1}{2}(\partial_\alpha\upsilon_\beta+\partial_\beta\upsilon_\alpha)-\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\upsilon_\sigma-b_{\alpha\beta}\upsilon_3 \text{ dans } L^2(\Omega)$$

$$e_{\alpha\|3}(\varepsilon,\upsilon)\to\{\frac{1}{2}\partial_\alpha\upsilon_3+b^\sigma_\alpha\upsilon_\sigma\} \text{ dans } L^2(\Omega)$$

$$e_{3\|3}(\varepsilon,\upsilon)=0$$

$$\begin{aligned}\langle\sqrt{g(\varepsilon)}G^3(\varepsilon),\bar{\upsilon}_3\rangle &= \int_\Omega A^{ijkl}(\varepsilon)e_{k\|l}e_{i\|j}(\varepsilon,\upsilon)\sqrt{g(\varepsilon)}dx-\int_\Omega f^i\upsilon_i\sqrt{g(\varepsilon)}dx\\ &= \int_\Omega\{A^{\alpha\beta\sigma\tau}(\varepsilon)e_{\sigma\|\tau}(\varepsilon)+A^{\alpha\beta33}(\varepsilon)e_{3\|3}(\varepsilon)\}\{e_{\alpha\|\beta}(\varepsilon,\upsilon)\}\sqrt{g(\varepsilon)}dx\\ &+\int_\Omega\{4A^{\alpha3\sigma3}(\varepsilon)e_{\sigma\|3}(\varepsilon)\}\{e_{\alpha\|3}(\varepsilon,\upsilon)\}\sqrt{g(\varepsilon)}dx+\int_\Omega\{A^{33\sigma\tau}(\varepsilon)e_{\sigma\|\tau}(\varepsilon)\\ &+A^{3333}(\varepsilon)e_{3\|3}(\varepsilon)\}\{e_{3\|3}(\varepsilon,\upsilon)\}\sqrt{g(\varepsilon)}dx-\int_\Omega f^i\upsilon_i\sqrt{g(\varepsilon)}dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to0}\langle\sqrt{g(\varepsilon)}G^3(\varepsilon),\bar{\upsilon}_3\rangle &= \int_\Omega\left\{\frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}a^{\alpha\beta}a^{\sigma\tau}+\mu(a^{\alpha\sigma}a^{\beta\tau}+a^{\alpha\tau}a^{\beta\sigma})\right\}e_{\sigma\|\tau}\gamma_{\alpha\beta}(\upsilon)\sqrt{a}dx\\ &-\int_\Omega f^i\upsilon_i\sqrt{a}dx.\end{aligned}$$

Laquelle nous pouvons l'écrire aussi (les deux fonctions u et v sont indépendantes de x_3) :

$$\lim_{\varepsilon\to0}\langle\sqrt{g(\varepsilon)}G^3(\varepsilon),\bar{\upsilon}_3\rangle=\int_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau}\gamma_{\sigma\tau}(\bar{u})\gamma_{\alpha\beta}(\bar{\upsilon})\sqrt{a}dy-\int_\omega\left\{\int_{-1}^1 f^i dx_3\right\}\bar{\upsilon}_i\sqrt{a}dy$$

L'application : $\bar{\upsilon}_3\to\int_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau}\gamma_{\sigma\tau}(\bar{u})\gamma_{\alpha\beta}(\bar{\upsilon})\sqrt{a}dy-\int_\omega\left\{\int_{-1}^1 f^i dx_3\right\}\bar{\upsilon}_i\sqrt{a}dy$ est une forme linéaire sur $H^2_0(\omega)$, donc il existe $\varphi\in H^{-2}(\omega)$ telle que :

$$\int_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau}\gamma_{\sigma\tau}(\bar{u})\gamma_{\alpha\beta}(\bar{\upsilon})\sqrt{a}dy-\int_\omega\left\{\int_{-1}^1 f^i dx_3\right\}\bar{\upsilon}_i\sqrt{a}dy=\langle\varphi,\bar{\upsilon}_3\rangle$$

φ représente la limite faible -* de $\sqrt{g(\varepsilon)}G^3(\varepsilon)$ dans $H^{-2}(\omega)$ qu'on la note $\sqrt{a}G^3(0)$

$$\sqrt{g(\varepsilon)}G^3(\varepsilon)\rightharpoonup\sqrt{a}G^3(0)\quad dans\quad H^{-2}(\omega)faible-*$$

et vérifie

$$\int_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau}\gamma_{\sigma\tau}(\bar{u})\gamma_{\alpha\beta}(\bar{v})\sqrt{a}dy = \int_\omega \left\{\int_{-1}^{1} f^i dx_3\right\} \bar{v}_i\sqrt{a}dx + \langle\sqrt{a}G^3(0), \bar{v}_3\rangle$$

On prend maintenant dans (3.4), $\upsilon_3 = d$ puis $\upsilon_3 = 2u(\varepsilon) - d$, on trouve $\langle\sqrt{g(\varepsilon)}G^3(\varepsilon), d - u_3(\varepsilon)\rangle = 0$ puisque $d \in H_0^1(\omega)$ donc :

$$\lim_{\epsilon\to 0}\langle\sqrt{g(\varepsilon)}G^3(\varepsilon), u_3(\varepsilon)\rangle = \lim_{\epsilon\to 0}\langle\sqrt{g(\varepsilon)}G^3(\varepsilon), d\rangle = \langle\sqrt{a}G^3(0), d\rangle$$

Par ailleurs, nous avons :

$$\langle\sqrt{g(\varepsilon)}G^3(\varepsilon), \bar{v}_3 - \bar{u}_3(\varepsilon)\rangle \geq 0; \forall v \in K(\Omega)$$

Pour $\upsilon = \eta \in K(\Omega)$, il vient que :

$$\begin{aligned}
0 &\leq \lim_{\epsilon\to 0}\langle\sqrt{g(\varepsilon)}G^3(\varepsilon), \bar{v}_3 - \bar{u}_3(\varepsilon)\rangle \\
0 &\leq \lim_{\epsilon\to 0}\langle\sqrt{g(\varepsilon)}G^3(\varepsilon), \bar{v}_3\rangle - \lim_{\epsilon\to 0}\langle\sqrt{g(\varepsilon)}G^3(\varepsilon), \bar{u}_3(\varepsilon)\rangle \\
0 &\leq \langle\sqrt{a}G^3(0), \bar{v}_3\rangle - \langle\sqrt{a}G^3(0), d\rangle \\
&\leq \langle\sqrt{a}G^3(0), \bar{v}_3\rangle - \langle\sqrt{a}G^3(0), \bar{u}_3\rangle \\
&= \langle\sqrt{a}G^3(0), \bar{v}_3 - \bar{u}_3\rangle
\end{aligned}$$

On remarque que la limite de la sous-suite $\{u(\varepsilon)\}$ est solution d'un problème de contact unilatéral avec conditions de Signorini.
Trouver $(\bar{u}, G^3(0)) \in K_M(\omega) \times H^{-2}(\omega)$ tels que

$$\int_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau}\gamma_{\sigma\tau}(\bar{u})\gamma_{\alpha\beta}(\bar{v})\sqrt{a}dy = \int_\omega \left\{\int_{-1}^{1} f^i dx_3\right\} \bar{v}_i\sqrt{a}dx + \langle\sqrt{a}G^3(0), \bar{v}_3\rangle$$

$$\langle\sqrt{a}G^3(0), \bar{v}_3 - \bar{u}_3\rangle \geq 0$$

Ce problème est équivalent à l'inéquation variationnelle

$$\int_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau}\gamma_{\sigma\tau}(\bar{u})\gamma_{\alpha\beta}(\bar{v} - \bar{u})\sqrt{a}dy \geq \int_\omega \left\{\int_{-1}^{1} f^i dx_3\right\} (\bar{v}_i - \bar{u}_i)\sqrt{a}dx$$

pour tout $v \in K_M(\omega)$. Les membres de cette inéquation remplissent les hypothèses du théorème de Stampacchia, donc elle admet une solution unique dans le convexe fermé $K_M(\omega)$, pour plus de details voir [6, Thm. 2.7-2, Thm. 3.3-2]. On en conclut que toute la suite $u(\varepsilon)$ est convergente vers u.

- On va établir $\sqrt{g(\varepsilon)}G^3(\varepsilon) \to \sqrt{g(0)}G^3(0)$ dans $H^{-2}(\omega)$

On a pour tout $v = \eta \in K_M(\omega)$

$$\langle \sqrt{g(\varepsilon)}G^3(\varepsilon), \eta_3 \rangle = \int_\Omega A^{ijkl}(\varepsilon)e_{k\|l}(\varepsilon)e_{i\|j}(\eta)\sqrt{g(\varepsilon)}dx - \int_\Omega f^i\eta_i\sqrt{g(\varepsilon)}dx,$$

$$\langle \sqrt{g(0)}G^3(0), \eta_3 \rangle = \int_\Omega A^{ijkl}(0)e_{k\|l}e_{i\|j}(\eta)\sqrt{g(0)}dx - \int_\Omega f^i\eta_i\sqrt{g(0)}dx,$$

d'où :

$$\langle \sqrt{g(\varepsilon)}G^3(\varepsilon) - \sqrt{g(0)}G^3(0), \eta_3 \rangle = \int_\Omega [A^{ijkl}(\varepsilon)e_{k\|l}(\varepsilon)\sqrt{g(\varepsilon)} - A^{ijkl}(0)e_{k\|l}\sqrt{g(0)}]e_{i\|j}(\eta)dx$$
$$- \int_\Omega f^i\eta_i(\sqrt{g(\varepsilon)} - \sqrt{g(0)})dx$$

Il vient que :

$$\|\sqrt{g(\varepsilon)}G^3(\varepsilon) - \sqrt{g(0)}G^3(0)\|_{-2,\omega} \le \sup_{\eta_3 \in L^2(\Omega)} \frac{\langle \sqrt{g(\varepsilon)}G^3(\varepsilon) - \sqrt{g(0)}G^3(0), \eta_3 \rangle}{\|\eta_3\|_{0,\omega}}$$

$$\le C\left(\|A^{ijkl}(\varepsilon)e_{k\|l}(\varepsilon)\sqrt{g(\varepsilon)} - A^{ijkl}(0)e_{k\|l}\sqrt{g(0)}\|_{0,\omega} + \|\sqrt{g(\varepsilon)} - \sqrt{g(0)}\|_{0,\omega}\right)$$

D'où : $\sqrt{g(\varepsilon)}G^3(\varepsilon) \to \sqrt{g(0)}G^3(0)$ dans $H^{-2}(\omega)$

(v) On va établir que $e_{i\|j}(\varepsilon) \to e_{i\|j}$ dans $L^2(\Omega)$. Nous prenons $v = u(\varepsilon)$ dans les équations du problème variationnel $P(\varepsilon, \Omega)$ nous déduisons en premier que :

$$C_e^{-1}g_0^{\frac{1}{2}}\sum_{i,j}|e_{i\|j}(\varepsilon) - e_{i\|j}|_{0,\Omega}^2 \le \Lambda(\varepsilon),$$

où

$$\Lambda(\varepsilon) := \int_\Omega A^{ijkl}(\varepsilon)(e_{k\|l}(\varepsilon) - e_{k\|l})(e_{i\|j}(\varepsilon) - e_{i\|j})\sqrt{g(\varepsilon)}dx$$

$$= \int_\Omega f^iu_i(\varepsilon)\sqrt{g(\varepsilon)}dx + \langle \sqrt{g(\varepsilon)}G^3(\varepsilon), u_3(\varepsilon) \rangle - \int_\Omega A^{ijkl}(\varepsilon)(2e_{k\|l}(\varepsilon) - e_{k\|l})e_{i\|j}\sqrt{g(\varepsilon)}dx$$

$$\Lambda := \lim_{\epsilon \to 0}\Lambda(\varepsilon) = \int_\Omega f^iu_i\sqrt{a}dx + \langle \sqrt{a}G^3(0), d \rangle - \int_\Omega A^{ijkl}(0)e_{k\|l}e_{i\|j}\sqrt{a}dx$$
$$= \int_\Omega f^iu_i\sqrt{a}dx + \langle \sqrt{a}G^3(0), \bar{u_3} \rangle - \int_\Omega A^{ijkl}(0)e_{k\|l}e_{i\|j}\sqrt{a}dx$$

Utilisant les expressions des fonctions $A^{ijkl}(0)$ (voir [6, Theorem 3.3.2]) et $e_{i\|3}$ (partie (iii)) nous obtenons finalement

$$\int_\Omega A^{ijkl}(0)e_{k\|l}e_{i\|j}\sqrt{a}dx = \int_\Omega \left\{\lambda a^{\alpha\beta}a^{\sigma\tau} + \mu(a^{\alpha\sigma}a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau}a^{\beta\sigma})\right\} e_{\sigma\|\tau}e_{\alpha\|\beta}\sqrt{a}dx + \int_\Omega \lambda a^{\alpha\beta}e_{3\|3}e_{\alpha\|\beta}$$

$$+ \int_\Omega 4\mu a^{\alpha\sigma}e_{\sigma\|3}e_{\alpha\|3}\sqrt{a}dx + \int_\Omega \{\lambda a^{\sigma\tau}e_{\sigma\|\tau} + (\lambda+2\mu)e_{3\|3}\}e_{3\|3}\sqrt{a}dx$$

$$= \int_\Omega \{\frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}a^{\alpha\beta}a^{\sigma\tau} + \mu(a^{\alpha\sigma}a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau}a^{\beta\sigma})e_{\sigma\|\tau}e_{\alpha\|\beta}\sqrt{a}dx = \int_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau}\gamma_{\alpha\beta}(\bar{u})\gamma_{\sigma\tau}(\bar{u})\sqrt{a}dx$$

$$= \int_\Omega f^i\bar{u}_i\sqrt{a}dx + \langle\sqrt{a}G^3(0), \bar{u}_3\rangle$$

On déduit que $\Lambda = 0$ alors $e_{i\|j}(\varepsilon) \to e_{i\|j}$ dans $L^2(\Omega)$.

(vi) On va établir : $\bar{u}_\alpha(\varepsilon) \to \bar{u}_\alpha$ dans $H^1(\omega)$ et $\bar{u}_3(\varepsilon) \to \bar{u}_3$ dans $L^2(\omega)$

D'après l'inégalité de Korn sur une surface elliptique ; (voir [6, Theorem 2.7.3]) prouver que ces convergences sont fortes est équivalent à :

$$\gamma_{\alpha\beta}(\bar{u}(\varepsilon)) \to \gamma_{\alpha\beta}(\bar{u}) = \bar{e}_{\alpha\|\beta} \ \ dans \ \ L^2(\Omega),$$

puisque $\gamma_{\alpha\beta}(u) = e_{\alpha\|\beta}$ d'après (iii). Mais comme $e_{\alpha\|\beta}(\varepsilon) \to e_{\alpha\|\beta}$ dans $L^2(\Omega)$ (partie (v)) nous concluons :

1) $\bar{e}_{\alpha\|\beta}(\varepsilon) \to \bar{e}_{\alpha\|\beta}$ dans $L^2(\omega)$ (voir[6, Theorem 4.2.1,(a)]),

2) $(\bar{e}_{\alpha\|\beta}(\varepsilon) - \gamma_{\alpha\beta}(\bar{u}(\varepsilon)) \to 0$ dans $L^2(\omega)$ (voir[6, Theorem 4.2.1,(d)])

De 1) et 2), on déduit que ;$\gamma_{\alpha\beta}(\bar{u}(\varepsilon) \to \gamma_{\alpha\beta}(\bar{u}) = \bar{e}_{\alpha\|\beta}$ dans $L^2(\omega)$

Alors : $\bar{u}_\alpha(\varepsilon) \to \bar{u}_\alpha$ dans $H^1(\omega)$ et $\bar{u_3}(\varepsilon) \to \bar{u_3}$ dans $L^2(\omega)$.

(vii) La convergence faible $u_3(\varepsilon) \rightharpoonup u_3$ dans $L^2(\Omega)$ établi dans la partie (i) est forte : $u_3(\varepsilon) \to u_3$ dans $L^2(\Omega)$.

En premier, nous avons $\partial_3 u_3(\varepsilon) = \varepsilon e_{3\|3}(\varepsilon) \to 0$ dans $L^2(\Omega)$; ensuite, nous avons déjà montré dans (vi) que $\bar{u}_3(\varepsilon) \to \bar{u}_3$ dans $L^2(\omega)$. D'où la conclusion d'après [6, Theorem 4.2.1,(c)] et le fait que la fonction u_3 est indépendente de x_3.

(viii) Il reste à montrer que les convergences faibles, $u_\alpha(\varepsilon) \rightharpoonup u_\alpha$ dans $H^1(\Omega)$ établies en partie (i) sont fortes c-à-d, $u_\alpha(\varepsilon) \to u_\alpha$ dans $H^1(\Omega)$.

A cette fin, nous observons que l'utilisation de l'inégalité de Korn 3D classique en coordonnées cartésiennes montre que le problème est équivalent à prouver :

$$e_{ij}(\acute{u}(\varepsilon)) \rightarrow e_{ij}(\acute{u}) \text{ dans } L^2(\Omega),$$

où :

$$e_{ij}(v) := \frac{1}{2}(\partial_j v_i + \partial_i v_j) \text{ et } \acute{u}(\varepsilon) := (u_1(\varepsilon), u_2(\varepsilon), 0), \acute{u} := (u_1, u_2, 0).$$

Puisque $e_{\alpha\|\beta} = e_{\alpha\beta}(\acute{u}(\varepsilon)) - \Gamma^p_{\alpha\beta}(\varepsilon)u_p(\varepsilon)$, les parties (iii) et (v) impliquent que : $e_{\alpha\|\beta}(\varepsilon) \rightarrow \{e_{\alpha\beta}(\acute{u}) - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}u_\sigma - b_{\alpha\beta}u_3\} = e_{\alpha\|\beta}$ dans $L^2(\Omega)$. Le comportement asymptotique des fonctions $\Gamma^P_{\alpha\beta}(\varepsilon)$ et les convergences fortes $u_i(\varepsilon) \rightarrow u_i$ dans $L^2(\Omega)$ établies dans les parties (i) et (vii) impliquent que : $e_{\alpha\beta}(\acute{u}(\varepsilon)) \rightarrow e_{\alpha\beta}(\acute{u})$ dans $L^2(\Omega)$, $e_{33}(\acute{u}(\varepsilon)) = e_{33}(\acute{u}) = 0$.
On a $\partial_3 u_\alpha(\varepsilon) = 2e_{\alpha 3}(\acute{u}(\varepsilon)) \rightarrow 0 = 2e_{\alpha 3}(\acute{u})$ dans $L^2(\Omega)$ $(\partial_3 u_\alpha = 0)$,
Où d'une façon équivalente

$$\partial_3 u_\alpha(\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ dans } H^{-1}(\Omega) \;\; et \;\; \partial_i \partial_3 u_\alpha(\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ dans } H^{-1}(\Omega)$$

L'équivalence entre les deux dernières relations est une conséquence du lemme de Lions [6, Theorem 1.7.1], avec le théorème du graphe fermé, implique que :

$$v \in l^2(\Omega) \rightarrow (v, \partial_1 v, \partial_2 v, \partial_3 v) \in H^{-1}(\Omega)$$

est un isomorphisme.
Puisque

$$\partial_3 u_\alpha(\varepsilon) = 2\varepsilon\left(e_{\alpha\|3}(\varepsilon) + \Gamma^\sigma_{\alpha 3}(\varepsilon)u_\sigma(\varepsilon)\right) - \varepsilon\partial_\alpha u_3(\varepsilon), \text{ pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

$$\int_\Omega \partial_3 u_\alpha(\varepsilon)\varphi dx = \varepsilon \int_\Omega \left\{2(e_{\alpha\|3}(\varepsilon) + \Gamma^\sigma_{\alpha 3}(\varepsilon)u_\sigma(\varepsilon))\varphi + u_3(\varepsilon)\partial_\alpha\varphi\right\} dx.$$

Et par conséquent, il existe d'après (i) une constante C_1 indépendante de ε telle que $\|\partial_3 u_\alpha(\varepsilon)\|_{-1,\Omega} \leq C_1\varepsilon$.
D'où

$$\partial_3 u_\alpha(\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ dans } H^{-1}(\Omega).$$

Par ailleurs, nous avons :

$$\begin{aligned}\partial_\beta\partial_3 u_\alpha(\varepsilon) &= \partial_3 e_{\alpha\beta}(\acute{u}(\varepsilon)) + \partial_\beta(\varepsilon e_{\alpha\|3}(\varepsilon) + \varepsilon\Gamma^\sigma_{\alpha3}(\varepsilon)u_\sigma(\varepsilon)) \\ &= \partial_\alpha(\varepsilon e_{\beta\|3}(\varepsilon) + \varepsilon\Gamma^\tau_{\beta3}(\varepsilon)u_\tau(\varepsilon)) \;\; dans \;\; \mathfrak{D}'(\Omega).\end{aligned}$$

Les convergences $e_{\alpha\beta}(\acute{u}(\varepsilon)) \to e_{\alpha\beta}(u)$ dans $L^2(\Omega)$ impliquent que :

$$\partial_3 e_{\alpha\beta}(u(\varepsilon)) \to \partial_3 e_{\alpha\beta}(\acute{u}) = 0 \text{ dans } H^{-1}(\Omega) \text{ puisque } \partial_3\partial_\beta u_\alpha = 0 \text{ dans } \mathfrak{D}'(\Omega).$$

Notons par $\langle ., . \rangle$ la dualité entre $\mathfrak{D}'(\Omega)$ et $\mathfrak{D}(\Omega)$, pour tout $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ en a :

$$\langle \partial_\beta \left(\varepsilon e_{\alpha\|3}(\varepsilon) + \varepsilon\Gamma^\sigma_{\alpha3}(\varepsilon)u_\sigma(\varepsilon)\right), \varphi\rangle = -\varepsilon\int_\Omega \left\{e_{\alpha\|3}(\varepsilon) + \Gamma^\sigma_{\alpha3}(\varepsilon)u_\sigma(\varepsilon))\right\}\partial_\beta\varphi dx,$$

Et par conséquent, il existe C_2 indépendante de ε telle que :

$$\|\partial_\beta \left(\varepsilon e_{\alpha\|3}(\varepsilon) + \varepsilon\Gamma^\sigma_{\alpha3}(\varepsilon)u_\sigma(\varepsilon)\right)\|_{-1,\Omega} \leq C_2\varepsilon; d'prs(i).$$

Le dernier terme dans l'expression $\partial_\beta\partial_3 u_\alpha(\varepsilon)$ est traité d'une manière analogue. D'où

$$\partial_\beta\partial_3 u_\alpha(\varepsilon) \to 0 \;\; dans \;\; H^{-1}(\Omega).$$

Finalement, nous avons pour tout $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$,

$$\begin{aligned}\langle \partial_3\partial_3 u_\alpha(\varepsilon), \varphi\rangle &= -\int_\Omega \partial_3 u_\alpha(\varepsilon)\partial_3\varphi dx \\ = -2\varepsilon\int_\Omega \left\{e_{\alpha\|3}(\varepsilon) + \Gamma^\sigma_{\alpha3}(\varepsilon)u_\sigma(\varepsilon))\right\}\partial_3\varphi dx &+ \varepsilon^2\int_\Omega e_{3\|3}(\varepsilon)\partial_\alpha\varphi dx.\end{aligned}$$

Et par conséquent, il existe d'après (i) une constante C_3 indépendante de ε telle que :

$$\|\partial_3\partial_3 u_\alpha(\varepsilon)\|_{-1,\Omega} \leq C_3\varepsilon.$$

D'où

$$\partial_3\partial_3 u_\alpha(\varepsilon) \to 0 \;\; dans \;\; H^{-1}(\Omega).$$

Ce qui achève la preuve.

(ix) Soit $X(\Omega) := \{v \in L^2(\Omega); \partial_3 v \in L^2(\Omega)\}$ ($\partial_3 v$ est la dérivée au sens des distributions). Alors la trace $v(.,s)$ de toute fonction $v \in X(\Omega)$ est bien définie comme une fonction dans $L^2(\omega)$ pour tout $s \in [-1,1]$ et l'opérateur de trace défini de cette façon est continu. En particulier ; il existe une constante C_4 telle que $\|v\|_{L^2(\Gamma_+\cup\Gamma_-)} \leq C_4\{|v|^2_{0,\Omega} + |\partial_3 v|^2_{0,\Omega}\}^{\frac{1}{2}}, \forall v \in X(\Omega)$.
. Par conséquent, il existe une constante C_5 telle que :

$$\|v_3\|_{L^2(\Gamma_+\cup\Gamma_-)} \leq C_5 \left\{ \sum_{i,j} |e_{ij}(\varepsilon; v)|^2_{0,\Omega} \right\}^{\frac{1}{2}}, \forall v \in X(\Omega)$$

Soit $v \in X(\Omega)$, $\forall$ y $\in \omega$, et $\forall$ $s \in [-1,1]$, on peut écrire,

$$v(y,-1) = v(y,s) - \int_{-1}^{s} \partial_3 v(y,x_3)dx_3.$$

Par conséquant ;

$$\begin{aligned} |v(.,-1)|^2_{0,\omega} &\leq 2\int_\omega |v(y,s)|^2 dy + 2\int_\omega |\int_{-1}^{s} \partial_3 v(y,x_3)dx_3|^2 dy \\ &\leq 2\int_\omega |v(y,s)|^2 dy + 2\int_\omega (1+s)\left\{\int_{-1}^{s} |\partial_3 v(y,x_3)|^2 dx_3\right\} dy \\ &\leq 2\int_\omega |v(y,s)|^2 dy + 4|\partial_3 v|^2_{0,\Omega}. \end{aligned}$$

En intégrant la dernière inégalité par rapport à $s \in [-1,1]$; on obtient

$$\|v\|_{L^2(\Gamma_-)} \leq \left\{|v|^2_{0,\Omega} + 4|\partial_3 v|^2_{0,\omega}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Comme $\|v\|_{L^2(\Gamma_+)}$ est également borné, la première inégalité est prouvée.
Pour $v = (v_i) \in V(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \|v_3\|_{L^2(\Gamma_+\cup\Gamma_-)} &\leq C_4\left\{|v_3|^2_{0,\Omega} + |\partial_3 v_3|^2_{0,\Omega}|\right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C_4\left\{|v_3|^2_{0,\Omega} + |e_{3\|3}(\varepsilon,v)|^2_{0,\Omega}\right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C_4(C+1)\left\{\sum_{i,j} |e_{i\|j}(\varepsilon,v)|^2_{0,\Omega}\right\}^{\frac{1}{2}}; \end{aligned}$$

par l'inégalité de Korn 3D pour une coque elliptique membranaire (voir [6, Theorem 4.3.1]).

(x) Considération des forces de surface :

Nous supposons désormais que seulement des forces de surface sont appliquées à la coque, c-à-d, le problème variationnel $P(\varepsilon,\Omega)$ prend la forme :

$$u(\varepsilon) \in K(\varepsilon) = \{v = (v_i) \in V(\Omega); v_3 < d\}$$

$$V(\Omega) = \{v = (v_i) \in \mathbf{H}_1(\Omega); v = 0 \ sur\ \gamma \times [-1,1]\}$$

$$\int_\Omega A^{ijkl}(\varepsilon)e_{k\|l}(\varepsilon)e_{i\|j}(\varepsilon,v)\sqrt{g(\varepsilon)}dx = \int_{\Gamma_-} h^i v_i\sqrt{g(\varepsilon)}d\Gamma + \langle\sqrt{g(\varepsilon)}G^3(\varepsilon),\bar{v_3}\rangle$$

pour tout $v \in V(\Omega)$. La réalisation d'une analyse asymptotique de $u(\varepsilon)$ quand $\varepsilon \to 0$ implique les mêmes étapes (i) à (ix) que celles étudiées précédemment pour les cas avec les forces de volumes.

Nous indiquons seulement les modifications qu'on a besoins pour manier le nouveau côté droit dans les équations variationnelles de $P(\varepsilon,\Omega)$.

Étape (1) $C_M^{-2}\left\{\sum_\alpha \|u(\varepsilon)\|^2_{1,\Omega} + \|u_3(\varepsilon)\|^2_{0,\Omega}\right\} \le \sum_{i,j}|e_{i\|j}(\varepsilon)|^2_{0,\Omega}$

$$\le C_e g_0^{\frac{-1}{2}}\left(\int_{\Gamma_-} h^\alpha u_\alpha(\varepsilon)\sqrt{g(\varepsilon)}d\Gamma + \int_{\Gamma_-} h^3 u_3(\varepsilon)\sqrt{g(\varepsilon)}d\Gamma + \langle\sqrt{g(\varepsilon)}G^3(\varepsilon),\bar{v_3}\rangle\right)$$
$$\le C_e g_0^{\frac{-1}{2}}\left(\int_{\Gamma_-} h^\alpha u_\alpha(\varepsilon)\sqrt{g(\varepsilon)}d\Gamma + \int_{\Gamma_-} h^3 u_3(\varepsilon)\sqrt{g(\varepsilon)}d\Gamma\right)$$
$$\le C_e g_0^{\frac{-1}{2}} g_1^{\frac{1}{2}}\left(\|h^\alpha\|_{L^2(\Gamma_-)}\|u_\alpha(\varepsilon)\|_{L^2(\Gamma_-)} + \|h^3\|_{L^2(\Gamma_-)}\|u_3(\varepsilon)\|_{L^2(\Gamma_-)}\right)$$
$$\le C_e g_0^{\frac{-1}{2}} g_1^{\frac{1}{2}}\left(C_6\left\{\sum_\alpha\|u_\alpha(\varepsilon)\|^2_{1,\Omega}\right\}^{\frac{1}{2}} + C_5\|h^3\|_{L^2(\Gamma_-)}\left\{\sum_{i,j}|e_{i\|j}(\varepsilon)|^2_{0,\Omega}\right\}^{\frac{1}{2}}\right)$$
$$\le C_e g_0^{\frac{-1}{2}} g_1^{\frac{1}{2}}\left(C_6C_M + C_7\right)\left\{\sum_{i,j}\|e_{i\|j}(\varepsilon)\|^2_{0,\Omega}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Étape (2) est la même.

Étape (3)

$$\int_\Omega A^{ijkl}(\varepsilon)e_{k\|l}(\varepsilon)\left\{\varepsilon e_{i\|j}(\varepsilon,v)\right\}\sqrt{g(\varepsilon)}dx = \varepsilon\int_{\Gamma_-} h^i v_i\sqrt{g(\varepsilon)}d\Gamma + \varepsilon\langle\sqrt{g(\varepsilon)}G^3(\varepsilon),\bar{v_3}\rangle \tag{4.5}$$

On choisit toujours dans (4.5) $\bar{v_3} = 0$

On obtient après passage à la limite

$$\int_\Omega\left\{2\mu a^{\alpha\sigma}e_{\sigma\|3}\partial_3 v_\alpha + \left(\lambda a^{\sigma\tau}e_{\sigma\|\tau} + (\lambda+2\mu)e_{3\|3}\right)\partial_3 v_3\right\}\sqrt{a}dx = 0.$$

On déduit : $e_{\sigma\|3} = 0 \ \ et \ \ e_{3\|3} = \frac{-\lambda}{\lambda+2\mu}a^{\alpha\beta}e_{\alpha\|\beta} \ \ dans \ \ L^2(\Omega).$

Étape (4) Soit $v = (v_i) \in V(\Omega)$ indépendant de x_3 ;

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_-} h^i v_i \sqrt{g(\varepsilon)} d\Gamma = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_-} h^i v_i \sqrt{a} dy = \int_\omega h^i \bar{v}_i \sqrt{a} dy$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \langle \sqrt{g(\varepsilon)} G^3(\varepsilon), \bar{v_3} \rangle = \int_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\alpha\beta}(u) \gamma_{\sigma\tau}(v) \sqrt{a} dy - \int_\omega h^i v_i \sqrt{a} dy$$

L'application : $v_3 \to \int_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\alpha\beta}(u) \gamma_{\sigma\tau}(v) \sqrt{a} dy - \int_\omega h^i v_i \sqrt{a} dy$ est une forme linéaire sur $H^2(\omega)$, donc il existe $\varphi \in H^{-2}(\omega)$ telle que :

$$\int_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\alpha\beta}(u) \gamma_{\sigma\tau}(v) \sqrt{a} dy - \int_\omega h^i v_i \sqrt{a} dy = \langle \varphi, \bar{v_3} \rangle$$

φ représente la limite faible -* de $\sqrt{g(\varepsilon)} G^3(\varepsilon)$ dans $H^{-2}(\omega)$ on l'a note $\sqrt{a} G^3(0)$,
$\sqrt{g(\varepsilon)} G^3(\varepsilon) \to \sqrt{a} G^3(0)$ dans $H^{-2}(\omega)$ faible -* et vérifie :

$$\int_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\alpha\beta}(u) \gamma_{\sigma\tau}(v) \sqrt{a} dy = \int_{\Gamma_-} h^i v_i \sqrt{a} dy + \langle \sqrt{a} G^3(0), \bar{v_3} \rangle.$$

La quelle nous pouvons l'écrire aussi comme (les deux fonctions u et v sont indépendantes de x_3).

$$\int_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\alpha\beta}(\bar{u}) \gamma_{\sigma\tau}(\bar{v}) \sqrt{a} dy = \int_\omega h^i \bar{v}_i \sqrt{a} dy + \langle \sqrt{a} G^3(0), \bar{v_3} \rangle.$$

La suite est la même.

Étape (5) nous avons maintenant ;

$$\Lambda(\varepsilon) = \int_{\Gamma_-} h^i u_i \sqrt{g(\varepsilon)} d\Gamma + \langle \sqrt{g(\varepsilon)} G^3(\varepsilon), u_3(\varepsilon) \rangle - \int_\Omega A^{ijkl}(\varepsilon) \left(2e_{k\|l}(\varepsilon) - e_{k\|l} \right) e_{i\|j} \sqrt{g(\varepsilon)} dx.$$

Depuis une affectation linéaire qui est continue fortement comme toute application linéaire fortement continue est aussi continue par rapport aux topologies faibles (voir, par exemple , Brezis [1983,p39]),
$u_\alpha(\varepsilon) \rightharpoonup u_\alpha$ dans $H^1(\Omega)$ implique $u_\alpha(\varepsilon) \rightharpoonup u_\alpha$ dans $L^2(\Gamma_+ \cup \Gamma_-)$
Donc :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_-} h^\alpha u_\alpha(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} d\Gamma = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_{\Gamma_-} h^\alpha u_\alpha(\varepsilon) (\sqrt{g(\varepsilon)} - \sqrt{a}) + \int_{\Gamma_-} h^\alpha u_\alpha(\varepsilon) \sqrt{a} d\Gamma \right\}$$

$$= \int_{\Gamma_-} h^\alpha u_\alpha \sqrt{a} d\Gamma = \int_\omega h^\alpha \bar{u}_\alpha \sqrt{a} dy$$

d'un côté

Pour la même raison les convergences faibles $u_3(\varepsilon) \rightharpoonup u_3$ dans $L^2(\Omega)$ et $\partial_3 u_3(\varepsilon) = \varepsilon e_{3\|3}(\varepsilon) \rightharpoonup 0 = \partial_3 u_3$ dans $L^2(\Omega)$ (cf, (i) et (ii)) et la première inégalité dans (ix). Ensemble impliquent :

$$u_3(\varepsilon)(., \pm 1) \rightharpoonup u_3(., \pm 1) \quad dans \quad L^2(\Omega)$$

Par conséquent ;

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_-} h^3 u_3(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} d\Gamma = \int_\omega h^3 \bar{u_3} \sqrt{a} dy$$

de l'autre côté. On conclut que $\Lambda = 0$.

Les étapes restantes (**6**), (**7**) et (**8**) restent inchangées ce qui achève la preuve.

■

4.2 Le cas de contact avec frottement

Théorème 4.2 *On suppose que $\theta \in C^3(\bar{\omega}, \mathbb{R}^3)$; et on considère une famille des coques membranaires linéairement élastiques elliptiques, avec épaisseur 2ε qui approche zéro ; ayant la même surface moyenne elliptique $S = \theta(\bar{\omega})$. Soit $u(\varepsilon)$ la solution du problème $P(\varepsilon, \Omega)$ si $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$; alors il existe des fonctions $u_\alpha \in H^1(\Omega)$ satisfaisants $u_\alpha = 0$ sur $\gamma \times [-1, 1]$ et $u_3 \in L^2(\Omega)$ et $G^3(0) \in L^2(\Gamma_+)$ tels que :*

$$u_\alpha(\varepsilon) \to u_\alpha \quad dans \quad H^1(\Omega) \quad et \quad u_3(\varepsilon) \to u_3 \quad dans \ {}^2(\Omega)$$

$u := (u_i)$ sont indépendants de x_3 .

$$G^3(\varepsilon) \to G^3(0) \quad dans \quad H^{-2}(\omega) \quad et \quad G^\alpha(\varepsilon) \to G^\alpha(0) \quad dans \quad H^{-1}(\omega)$$

La moyenne $\bar{u} := \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} u dx_3$ satisfait le problème variationnel á deux dimensions $P_M(\omega)$ d'une coque membranaire linéairement élastique et elliptique :

$$\bar{u} := (\bar{u}_i) \in V_M(\omega) = H_0^1(\omega) \times H_0^1(\omega) \times L^2(\omega)$$

$$\int_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau}\gamma_{\sigma\tau}(\bar{u})\gamma_{\alpha\beta}(\eta)\sqrt{a}dy = \int_\omega P^i\eta_i\sqrt{a}dy + \langle\sqrt{a}G^i(0),\eta_i\rangle \ \ pour \ \ tout \ \ \eta = (\eta_i) \in V_M(\omega)$$

$$\langle\sqrt{a}G^3(0), \eta_3 - \bar{u_3}\rangle \geq 0 \quad \forall \quad \eta \in K_M(\omega)$$

$$\langle\sqrt{a}G^\alpha(0), \bar{\eta_\alpha} - \bar{u_\alpha}\rangle + \langle\sqrt{a}|G^3(0)|, |\bar{\eta_\tau}| - |\bar{u_\tau}|\rangle \geq 0$$

$$K_M(\omega) = \{\eta = (\eta_i) \in V_M(\omega)/\eta_3 \leq d\}$$

$$\gamma_{\alpha\beta}(\eta) := \frac{1}{2}(\partial_\beta\eta_\alpha + \partial_\alpha\eta_\beta) - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\eta_\sigma - b_{\alpha\beta}\eta_3$$

$$a^{\alpha\beta\sigma\tau} := \frac{4\lambda u}{\lambda + 2u}a^{\alpha\beta}a^{\sigma\tau} + 2u(a^{\alpha\sigma}a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau}a^{\beta\sigma})$$

$$p^i := \int_{-1}^{1} f^i dx_3 + h^i_- \quad et \quad h^i = h(.,-1)$$

Preuve. La preuve de ce théorème est divisée en dix parties, comptées de (i) à (x). Pour des raisons techniques comme pour la démonstrations du théorème (4.1) la considération des forces de surface est prise en compte qu'à partir de la partie (ix). En d'autre termes nous supposons que $(u(\varepsilon), G(\varepsilon))$ satisfait le problème variationnel $P(\varepsilon, \Omega)$ dans les partées (i) à (viii).

i) On a démontré : $u_\alpha(\varepsilon) \rightharpoonup u_\alpha$ dans $H^1(\Omega), u_3(\varepsilon) \rightharpoonup u_3$ dans $L^2(\Omega), e_{i\|j}(\varepsilon) \rightharpoonup e_{i\|j}$ dans $L^2(\Omega)$.

$$C_M^{-2}\sum_i |u_i(\varepsilon)|^2_{0,\Omega} \leq C_M^{-2}\left(\sum_\alpha \|u_\alpha(\varepsilon)\|^2_{1,\Omega} + |u_3(\varepsilon)|^2_{0,\Omega}\right) \leq \sum_{ij}|e_{i\|j}(\varepsilon)|^2_{0,\Omega}$$

$$\leq C_e g_0^{\frac{-1}{2}}\int_\Omega A^{ijkl}(\varepsilon)e_{k\|l}(\varepsilon)e_{i\|j}(\varepsilon)\sqrt{g(\varepsilon)}dx$$

$$= C_e g_0^{\frac{-1}{2}}\left(\int_\Omega f^i u_i(\varepsilon)\sqrt{g(\varepsilon)}dx + \langle\sqrt{g(\varepsilon)}G^i(\varepsilon), u_i(\varepsilon)\rangle\right) \leq C_e g_0^{\frac{-1}{2}}\int_\Omega f^i u_i(\varepsilon)\sqrt{g(\varepsilon)}dx$$

$$\leq C_e g_0^{\frac{-1}{2}} g_1^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_i |f^i|^2_{0,\Omega}\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_i |u_i(\varepsilon)|^2_{0,\Omega}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

D'où, il existe des constantes C_1 et C_2 et C_3 indépendantes de ε telles que :
$\|u_\alpha(\varepsilon)\|_{1,\Omega} \leq C_1$, $|u_3(\varepsilon)|_{0,\Omega} \leq C_2$, $|e_{i\|j}(\varepsilon)|_{0,\Omega} \leq C_3$.
On déduit que les suites $\{u_\alpha(\varepsilon)\}$, $\{u_3(\varepsilon)\}$ et $\{e_{i\|j}(\varepsilon)\}$ sont bornées, respectivement dans $H^1(\Omega)$, $L^2(\Omega)$ et $L^2(\Omega)$. Ce qui nous permet d'en extraire des sous suites toujours

notées $\{u_\alpha(\varepsilon)\}$, $\{u_3(\varepsilon)\}$ et $\{e_{i\|j}(\varepsilon)\}$ qui admettent des limites faibles respectivement dans $H^1(\Omega)$, $L^2(\Omega)$ et $L^2(\Omega)$ qu'on note u_α, u_3 et $e_{i\|j}$ respectivement.

ii) Les u_i trouvées dans (i) sont indépendants de x_3.
D'après (i) ;

$$\partial_3 u_\alpha(\varepsilon) + \varepsilon\partial_\alpha u_3(\varepsilon) = 2\varepsilon\{e_{\alpha\|3}(\varepsilon) + \Gamma^\sigma_{\alpha 3}(\varepsilon)u_\sigma(\varepsilon)\} \to 0 \ \ dans \ \ L^2(\Omega);$$

car les fonctions $\Gamma^\sigma_{\alpha 3}(\varepsilon)$ convergent dans $C^0(\bar{\Omega})$ (voir [6, Theorem 3.3.1]).
Comme $u_\alpha(\varepsilon) \rightharpoonup u_\alpha$ dans $H^1(\Omega)$ et $(u_3(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $L^2(\Omega)$ par (i) ; soit $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$:

$$\int_\Omega \partial_3 u_\alpha \varphi dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_\Omega \partial_3 u_\alpha(\varepsilon)\varphi dx,$$

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left\{\int \varepsilon\partial_\alpha u_3(\varepsilon)\varphi dx\right\} = -\lim_{\epsilon\to 0}\left\{\int \varepsilon u_3(\varepsilon)\partial_\alpha\varphi dx\right\} = 0$$

Donc :

$$0 = \lim_{\epsilon\to 0}\left\{\int_\Omega \left(\partial_3 u_\alpha(\varepsilon) + \varepsilon\partial_\alpha u_3(\varepsilon)\right)\varphi dx\right\} = \int_\Omega \partial_3 u_\alpha \varphi dx,$$

d'où $\partial_3 u_\alpha = 0$ dans $L^2(\Omega)$.
La partie (i) également implique que $\partial_3 u_3(\varepsilon) = \varepsilon e_{3\|3}(\varepsilon) \to 0$ dans $L^2(\Omega)$
Soit $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$, de $u_3(\varepsilon) \rightharpoonup u_3$ dans $L^2(\Omega)$ par (i) on a

$$\int_\Omega u_3\partial_3\varphi dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_\Omega u_3(\varepsilon)\partial_3\varphi dx = -\lim_{\epsilon\to 0}\int_\Omega \partial_3 u_3(\varepsilon)\varphi dx = 0$$

Ce qui implique $\partial_3 u_3 = 0$ au sens des distributions.
iii) Les limites des $e_{i\|j}$ trouvées dans (i) sont indépendantes de x_3 et sont de plus en rapport avec la limite $u := (u_i)$ par :
$e_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta}(u) := \frac{1}{2}\left(\partial_\alpha u_\beta + \partial_\beta u_\alpha\right) - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}u_\sigma - b_{\alpha\beta}u_3, e_{\alpha\|3} = 0, e_{3\|3} = -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}a^{\alpha\beta}e_{\alpha\|\beta}.$
Les convergences :

$$e_{\alpha\|\beta}(\varepsilon) \rightharpoonup e_{\alpha\|\beta} \ \ dans \ \ L^2(\Omega), u_\alpha(\varepsilon) \rightharpoonup u_\alpha \ \ dans \ \ H^1(\Omega), u_3(\varepsilon) \rightharpoonup u_3 \ \ dans \ \ L^2(\Omega)(\text{partie (i)}).$$

$\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}(\varepsilon) \to \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}$ et $\Gamma^3_{\alpha\beta}(\varepsilon) \to b_{\alpha\beta}$ dans $C^0(\bar{\Omega})$ $(voir[6, Theorem 3.3.1])$;
ensemble impliquent :

$$e_{\alpha\|\beta}(\varepsilon) = \frac{1}{2}(\partial_\alpha u_\beta(\varepsilon) + \partial_\beta u_\alpha(\varepsilon)) - \Gamma^p_{\alpha\beta}(\varepsilon)u_p(\varepsilon) \rightharpoonup \gamma_{\alpha\beta}(u) = e_{\alpha\|\beta} \ \ dans \ \ L^2(\Omega).$$

En plus les fonctions $e_{\alpha\|\beta}$ sont indépendantes de x_3 car les fonctions u_i sont indépendantes de x_3 (partie (ii)).
Soit $\upsilon = (\upsilon_i)$ une fonction arbitraire dans l'espace $V(\Omega) = \{\upsilon = (\upsilon_i) \in H^1(\Omega); \upsilon = 0$ on $\gamma \times [-1, 1]$ $\}$. Les relations suivantes sont conséquences immédiates des définitions des $e_{i\|j}(\varepsilon, \upsilon)$:

$$\varepsilon e_{\alpha\|\beta}(\varepsilon, \upsilon) \to 0 \quad dans \quad L^2(\Omega)$$

$$\varepsilon e_{\alpha\|3}(\varepsilon, \upsilon) \to \frac{1}{2}\partial_3 v_\alpha \quad dans \quad L^2(\Omega)$$

$$\varepsilon e_{3\|3}(\varepsilon, \upsilon) = \partial_3 v_3 \quad pour \quad tout \quad \varepsilon > 0$$

En utilisant les équations dans le problème variationnel à trois dimensions $P(\varepsilon, \Omega)$, nous obtenons :

$$\int_\Omega A^{ijkl}(\varepsilon)\{\varepsilon e_{k\|l}(\varepsilon) e_{i\|j}(\varepsilon, \upsilon)\}\sqrt{g(\varepsilon)}dx = \int_\Omega \{A^{\alpha\beta\sigma\tau}(\varepsilon) e_{\sigma\|\tau}(\varepsilon)$$

$$+A^{\alpha\beta 33}(\varepsilon) e_{3\|3}(\varepsilon)\}\{\varepsilon e_{\alpha\|\beta}(\varepsilon, \upsilon)\}\sqrt{g(\varepsilon)}dx + \int_\Omega \{4A^{\alpha 3\sigma 3}(\varepsilon) e_{\sigma\|3}(\varepsilon)\}\{\varepsilon e_{\alpha\|3}(\varepsilon, \upsilon)\}\sqrt{g(\varepsilon)}dx$$

$$+ \int_\Omega \{A^{33\sigma\tau}(\varepsilon) e_{\sigma\|\tau}(\varepsilon) + A^{3333}(\varepsilon) e_{3\|3}(\varepsilon)\}\{\varepsilon e_{3\|3}(\varepsilon, \upsilon)\}\sqrt{g(\varepsilon)}dx$$

$$= \varepsilon \int_\Omega f^i v_i \sqrt{g(\varepsilon)}dx + \varepsilon\langle\sqrt{g(\varepsilon)}G^i(\varepsilon), v_i\rangle. \tag{4.6}$$

On choisit dans (4.6) $v_i = 0$ au sens trace sur Γ_+.
On obtient après passage à la limite

$$\int_\Omega \left\{2\mu a^{\alpha\sigma} e_{\sigma\|3}\partial_3 v_\alpha + \left(\lambda a^{\sigma\tau} e_{\sigma\|\tau} + (\lambda + 2\mu) e_{3\|3}\right)\partial_3 v_3\right\}\sqrt{a}dx = 0$$

On déduit que $e_{\sigma\|3} = 0$ et $e_{3\|3} = \frac{-\lambda}{\lambda+2\mu} a^{\alpha\beta} e_{\alpha\|\beta}$ dans $L^2(\Omega)$.
iv) - On va établir que $\sqrt{g(\varepsilon)}G^3(\varepsilon) \rightharpoonup \sqrt{a}G^3(0)$ dans $H^{-2}(\omega)$, $\sqrt{g(\varepsilon)}G^\alpha(\varepsilon) \rightharpoonup \sqrt{a}G^\alpha(0)$ dans $H^{-1}(\omega)$ et la fonction $\bar{u} := (\bar{u}_i)$ satisfait le problème variationnel à deux dimensions $P_M(\omega)$.

Soit $v = (v_i) \in V(\Omega)$ indépendants de x_3 ; alors le comportement asymptotique des fonctions $\Gamma^p_{\alpha\beta}(\varepsilon)$ et $\Gamma^\sigma_{\alpha 3}(\varepsilon)$ (voir [6, Theorem 3.3.1]) ; montre que :

$$e_{\alpha\|\beta}(\varepsilon, \upsilon) \to \gamma_{\alpha\beta}(\upsilon) := \frac{1}{2}(\partial_\alpha v_\beta + \partial_\beta v_\alpha) - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} v_\sigma - b_{\alpha\beta} v_3 \quad dans \quad L^2(\Omega)$$

$$e_{\alpha\|3}(\varepsilon,\upsilon)\rightarrow\{\frac{1}{2}\partial_\alpha v_3+b_\alpha^\sigma\upsilon_\sigma\}\quad dans\quad L^2(\Omega)$$

$$e_{3\|3}(\varepsilon,\upsilon)=0$$

$$\langle\sqrt{g(\varepsilon)}G^\alpha(\varepsilon),\bar{v}_\alpha\rangle=\int_\Omega A^{ijkl}(\varepsilon)e_{k\|l}e_{i\|j}(\varepsilon,\upsilon)\sqrt{g(\varepsilon)}dx-\int_\Omega f^i\upsilon_i\sqrt{g(\varepsilon)}dx-\langle\sqrt{g(\varepsilon)}G^3(\varepsilon),\bar{v}_3\rangle$$

$$=\int_\Omega\{A^{\alpha\beta\sigma\tau}(\varepsilon)e_{\sigma\|\tau}(\varepsilon)+A^{\alpha\beta33}(\varepsilon)e_{3\|3}(\varepsilon)\}\{e_{\alpha\|\beta}(\varepsilon,\upsilon)\}\sqrt{g(\varepsilon)}dx$$

$$+\int_\Omega\{4A^{\alpha3\sigma3}(\varepsilon)e_{\sigma\|3}(\varepsilon)\}\{e_{\alpha\|3}(\varepsilon,\upsilon)\}\sqrt{g(\varepsilon)}dx+\int_\Omega\{A^{33\sigma\tau}(\varepsilon)e_{\sigma\|\tau}(\varepsilon)$$

$$+A^{3333}(\varepsilon)e_{3\|3}(\varepsilon)\}\{e_{3\|3}(\varepsilon,\upsilon)\}\sqrt{g(\varepsilon)}dx-\int_\Omega f^i\upsilon_i\sqrt{g(\varepsilon)}dx-\langle\sqrt{g(\varepsilon)}G^3(\varepsilon),\bar{v}_3\rangle$$

On prend maintenant $\bar{v}_3=0$, par passage à la limite, on trouve :

$$\lim_{\epsilon\to0}\langle\sqrt{g(\varepsilon)}G^\alpha(\varepsilon),\bar{v}_\alpha\rangle=\int_\Omega\left\{\frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}a^{\alpha\beta}a^{\sigma\tau}+\mu(a^{\alpha\sigma}a^{\beta\tau}+a^{\alpha\tau}a^{\beta\sigma})\right\}e_{\sigma\|\tau}\gamma_{\alpha\beta}(\upsilon)\sqrt{a}dx-\int_\Omega f^i\upsilon_i\sqrt{a}dx.$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\langle\sqrt{g(\varepsilon)}G^\alpha(\varepsilon),\bar{v}_\alpha\rangle=\int_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau}\gamma_{\sigma\tau}(\bar{u})\gamma_{\alpha\beta}(\bar{v})\sqrt{a}dy-\int_\omega\left\{\int_{-1}^1f^idx_3\right\}\bar{v}_i\sqrt{a}dy$$

L'application : $\bar{v}_\alpha\rightarrow\int_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau}\gamma_{\sigma\tau}(\bar{u})\gamma_{\alpha\beta}(\bar{v})\sqrt{a}dy-\int_\omega\left\{\int_{-1}^1f^idx_3\right\}\bar{v}_i\sqrt{a}dy$
est une forme linéaire sur $H_0^1(\omega)$, donc il existe $\varphi\in H^{-1}(\omega)$ telle que :

$$\int_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau}\gamma_{\sigma\tau}(\bar{u})\gamma_{\alpha\beta}(\bar{v})\sqrt{a}dy-\int_\omega\left\{\int_{-1}^1f^idx_3\right\}\bar{v}_i\sqrt{a}dy=\langle\varphi,\bar{v}_\alpha\rangle$$

φ représente la limite faible -* de $\sqrt{g(\varepsilon)}G^\alpha(\varepsilon)$ dans $H^1(\omega)$ on l'a note $\sqrt{a}G^\alpha(0)$

$$\sqrt{g(\varepsilon)}G^\alpha(\varepsilon)\rightharpoonup\sqrt{a}G^\alpha(0)\quad dans\quad H^{-1}(\omega)faible-*$$

et vérifie

$$\int_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau}\gamma_{\sigma\tau}(\bar{u})\gamma_{\alpha\beta}(\bar{v})\sqrt{a}dy=\int_\omega\left\{\int_{-1}^1f^idx_3\right\}\bar{v}_i\sqrt{a}dx+\langle\sqrt{a}G^\alpha(0),\bar{v}_\alpha\rangle$$

$$\langle\sqrt{g(\varepsilon)}G^3(\varepsilon),\bar{v}_3\rangle=\int_\Omega A^{ijkl}(\varepsilon)e_{k\|l}e_{i\|j}(\varepsilon,\upsilon)\sqrt{g(\varepsilon)}dx-\int_\Omega f^i\upsilon_i\sqrt{g(\varepsilon)}dx-\langle\sqrt{g(\varepsilon)}G^\alpha(\varepsilon),\bar{v}_\alpha\rangle$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\langle\sqrt{g(\varepsilon)}G^3(\varepsilon),\bar{v}_3\rangle=\int_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau}\gamma_{\sigma\tau}(u)\gamma_{\alpha\beta}(\upsilon)\sqrt{a}dy-\int_\omega\left\{\int_{-1}^1f^idx_3\right\}\upsilon_i\sqrt{a}dy-\langle\sqrt{a}G^\alpha(0),\bar{v}_\alpha\rangle$$

L'application : $v_3 \to \int_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau}\gamma_{\sigma\tau}(\bar{u})\gamma_{\alpha\beta}(\bar{v})\sqrt{a}dy - \int_\omega \left\{\int_{-1}^{1} f^i dx_3\right\}\bar{v}_i\sqrt{a}dy - \langle\sqrt{a}G^\alpha(0), \bar{v}_\alpha\rangle$ est une forme linéaire sur $H_0^2(\omega)$, donc il existe $\varphi \in H^{-2}(\omega)$ telle que :

$$\int_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau}\gamma_{\sigma\tau}(u)\gamma_{\alpha\beta}(v)\sqrt{a}dy - \int_\omega \left\{\int_{-1}^{1} f^i dx_3\right\} v_i\sqrt{a}dy - \langle\sqrt{a}G^\alpha(0), \bar{v}_\alpha\rangle = \langle\varphi, \bar{v}_3\rangle$$

φ représente la limite faible -* de $\sqrt{g(\varepsilon)}G^3(\varepsilon)$ dans $H^2(\omega)$ on l'a note $\sqrt{a}G^3(0)$

$$\sqrt{g(\varepsilon)}G^3(\varepsilon) \rightharpoonup \sqrt{a}G^3(0) \quad dans \quad H^{-2}(\omega) faible - *$$

et vérifie

$$\int_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau}\gamma_{\sigma\tau}(\bar{u})\gamma_{\alpha\beta}(\bar{v})\sqrt{a}dy = \int_\omega \left\{\int_{-1}^{1} f^i dx_3\right\}\bar{v}_i\sqrt{a}dx + \langle\sqrt{a}G^i(0), \bar{v}_i\rangle$$

Laquelle nous pouvons l'écrire aussi (les deux fonctions u et v sont indépendantes de x_3) sous la forme

$$\int_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau}\gamma_{\sigma\tau}(\bar{u})\gamma_{\alpha\beta}(\bar{v})\sqrt{a}dy = \int_\omega \left\{\int_{-1}^{1} f^i dx_3\right\}\bar{v}_i\sqrt{a}dx + \langle\sqrt{a}G^i(0), \bar{v}_i\rangle.$$

On postule : $a_*^0(u, v) =\in_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau}\gamma_{\sigma\tau}(\bar{u})\gamma_{\alpha\beta}(\bar{v})\sqrt{a}dy$. On prend maintenant dans (3.4), $v_3 = d$ puis $v_3 = 2u(\varepsilon) - d$ on trouve

$$\langle\sqrt{g(\varepsilon)}G^3(\varepsilon), d - u_3(\varepsilon)\rangle = 0$$

puisque $d \in H_0^1(\omega)$ donc :

$$\lim_{\epsilon\to 0}\langle\sqrt{g(\varepsilon)}G^3(\varepsilon), u_3(\varepsilon)\rangle = \lim_{\epsilon\to 0}\langle\sqrt{g(\varepsilon)}G^3(\varepsilon), d\rangle = \langle\sqrt{a}G^3(0), d\rangle.$$

Par ailleurs, nous avons :

$$\langle\sqrt{g(\varepsilon)}G^3(\varepsilon), \bar{v}_3 - \bar{u}_3(\varepsilon)\rangle \geq 0; \forall v \in K(\Omega)$$

Pour $v = \eta \in K(\Omega)$, il vient que :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{\epsilon\to 0}\langle\sqrt{g(\varepsilon)}G^3(\varepsilon), \bar{v}_3 - \bar{u}_3(\varepsilon)\rangle \\ 0 &\leq \lim_{\epsilon\to 0}\langle\sqrt{g(\varepsilon)}G^3(\varepsilon), \bar{v}_3\rangle - \lim_{\epsilon\to 0}\langle\sqrt{g(\varepsilon)}G^3(\varepsilon), \bar{u}_3(\varepsilon)\rangle \\ 0 &\leq \langle\sqrt{a}G^3(0), \bar{v}_3\rangle - \langle\sqrt{a}G^3(0), d\rangle \\ &\leq \langle\sqrt{a}G^3(0), \bar{v}_3\rangle - \langle\sqrt{a}G^3(0), \bar{u}_3\rangle \\ &= \langle\sqrt{a}G^3(0), \bar{v}_3 - \bar{u}_3\rangle \end{aligned}$$

Par la même argumentation utilisée pour prouver :

$$\langle \sqrt{a}G(0), \bar{\eta}_\alpha - \bar{u}_\alpha \rangle + \langle \nu |G^3(0)|, |\bar{\upsilon}_\tau| - |\bar{u}_\tau| \rangle \geq 0$$

On remarque que la limite de la sous suite $\{u(\varepsilon)\}$ est solution d'un problème de contact unilatéral avec conditions de Signorini avec frottement. On sait que ce type de problème n'admet pas de solutions uniques en général, par conséquent on peut pas dire que toute la suite $u(\varepsilon)$ tend vers u. Donc, la convergence forte qu'on établira par la suite est uniquement pour la sous suite considérée auparavant pour simplifier l'écriture, on garde la même notation.

- On va établir $\sqrt{g(\varepsilon)}G^i(\varepsilon) \to \sqrt{g(0)}G^i(0)$ dans $H^{-2}(\omega)$.

On a pour tout $\upsilon = \eta \in K_M(\omega)$

$$\langle \sqrt{g(\varepsilon)}G^i(\varepsilon), \eta_i \rangle = \int_\Omega A^{ijkl}(\varepsilon) e_{k\|l}(\varepsilon) e_{i\|j}(\eta) \sqrt{g(\varepsilon)} dx - \int_\Omega f^i \upsilon_i \sqrt{g(\varepsilon)} dx$$

$$\langle \sqrt{g(0)}G^i(o), \eta_i \rangle = \int_\Omega A^{ijkl}(0) e_{k\|l} e_{i\|j}(\eta) \sqrt{g(0)} dx - \int_\Omega f^i \eta_i \sqrt{g(0)} dx$$

d'où :

$$\langle \sqrt{g(\varepsilon)}G^i(\varepsilon) - \sqrt{g(0)}G^i(0), \eta_3 \rangle = \int_\Omega [A^{ijkl}(\varepsilon) e_{k\|l}(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} - A^{ijkl}(0) e_{k\|l} \sqrt{g(0)}] e_{i\|j}(\eta) dx$$

$$- \int_\Omega f^i \eta_i (\sqrt{g(\varepsilon)} - \sqrt{g(0)}) dx$$

Il vient que :

$$\|\sqrt{g(\varepsilon)}G^i(\varepsilon) - \sqrt{g(0)}G^i(0)\|_{-2,\omega} \leq \sup_{\eta_i \in L^2(\Omega)} \frac{\langle \sqrt{g(\varepsilon)}G^i(\varepsilon) - \sqrt{g(0)}G^i(0), \eta_i \rangle}{\|\eta_i\|_{0,\omega}}$$

$$\leq C \left(\|A^{ijkl}(\varepsilon) e_{k\|l}(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} - A^{ijkl}(0) e_{k\|l} \sqrt{g(0)}\|_{0,\omega} + \|\sqrt{g(\varepsilon)} - \sqrt{g(0)}\|_{0,\omega} \right)$$

D'où : $\sqrt{g(\varepsilon)}G^i(\varepsilon) \to \sqrt{g(0)}G^i(0)$ dans $H^{-2}(\omega)$

v) On va établir que $e_{i\|j}(\varepsilon) \to e_{i\|j}$ dans $L^2(\Omega)$.

Nous prenons $\upsilon = u(\varepsilon)$ dans les équations du problème variationnel $P(\varepsilon, \Omega)$ nous déduisons en premier lieu que :

$$C_e^{-1} g_0^{\frac{1}{2}} \sum_{i,j} |e_{i\|j}(\varepsilon) - e_{i\|j}|^2_{0,\Omega} \leq \Lambda(\varepsilon),$$

où

$$\Lambda(\varepsilon) := \int_\Omega A^{ijkl}(\varepsilon)(e_{k\|l}(\varepsilon) - e_{k\|l})(e_{i\|j}(\varepsilon) - e_{i\|j})\sqrt{g(\varepsilon)}dx$$
$$= \int_\Omega f^i u_i(\varepsilon)\sqrt{g(\varepsilon)}dx + \langle \sqrt{g(\varepsilon)}G^i(\varepsilon), u_i(\varepsilon)\rangle - \int_\Omega A^{ijkl}(\varepsilon)(2e_{k\|l}(\varepsilon) - e_{k\|l})e_{i\|j}\sqrt{g(\varepsilon)}dx$$

$$\begin{aligned}\Lambda := \lim_{\epsilon\to 0}\Lambda(\varepsilon) &= \int_\Omega f^i u_i\sqrt{a}dx + \langle \sqrt{a}G^3(0), d\rangle - \int_\Omega A^{ijkl}(0)e_{k\|l}e_{i\|j}\sqrt{a}dx \\ &= \int_\Omega f^i u_i\sqrt{a}dx + \langle \sqrt{a}G^3(0), \bar{u}_3\rangle - \int_\Omega A^{ijkl}(0)e_{k\|l}e_{i\|j}\sqrt{a}dx\end{aligned}$$

Utilisant les expressions des fonctions $A^{ijkl}(0)$ (voir [6, Theorem 3.3.2]) et $e_{i\|3}$ (partie iii) nous obtenons finalement

$$\int_\Omega A^{ijkl}(0)e_{k\|l}e_{i\|j}\sqrt{a}dx = \int_\Omega \left\{\lambda a^{\alpha\beta}a^{\sigma\tau} + \mu(a^{\alpha\sigma}a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau}a^{\beta\sigma})\right\} e_{\sigma\|\tau}e_{\alpha\|\beta}\sqrt{a}dx + \int_\Omega \lambda a^{\alpha\beta}e_{3\|3}e_{\alpha\|\beta}\sqrt{a}dx$$
$$+ \int_\Omega 4\mu a^{\alpha\sigma}e_{\sigma\|3}e_{\alpha\|3}\sqrt{a}dx + \int_\Omega \{\lambda a^{\sigma\tau}e_{\sigma\|\tau} + (\lambda+2\mu)e_{3\|3}\}e_{3\|3}\sqrt{a}dx$$
$$= \int_\Omega \{\frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}a^{\alpha\beta}a^{\sigma\tau} + \mu(a^{\alpha\sigma}a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau}a^{\beta\sigma})e_{\sigma\|\tau}e_{\alpha\|\beta}\sqrt{a}dx = \int_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau}\gamma_{\alpha\beta}(\bar{u})\gamma_{\sigma\tau}(\bar{u})\sqrt{a}dx$$
$$= \int_\Omega f^i\bar{u}_i\sqrt{a}dx + \langle \sqrt{a}G^i(0), \bar{u}_i\rangle$$

On déduit que $\Lambda = 0$ alors $e_{i\|j}(\varepsilon) \to e_{i\|j}$ dans $L^2(\Omega)$.

vi) On va établir que : $\bar{u}_\alpha(\varepsilon) \to \bar{u}_\alpha$ dans $H^1(\omega)$ et $\bar{u}_3(\varepsilon) \to \bar{u}_3$ dans $L^2(\omega)$. D'après l'inégalité de Korn sur une surface elliptique ; (voir [6, Theorem 2.7.3]) prouver que ces convergences sont fortes est équivalent à :

$$\gamma_{\alpha\beta}(\bar{u}(\varepsilon)) \to \gamma_{\alpha\beta}(\bar{u}) = \bar{e_{\alpha\|\beta}} \quad dans \quad L^2(\Omega),$$

Puisque $\gamma_{\alpha\beta}(u) = e_{\alpha\|\beta}$ d'après (iii). Mais comme $e_{\alpha\|\beta}(\varepsilon) \to e_{\alpha\|\beta}$ dans $L^2(\Omega)$ (partie (v)) nous concluons :

1. $\bar{e_{\alpha\|\beta}}(\varepsilon) \to \bar{e_{\alpha\|\beta}}$ dans $L^2(\omega)$ (voir [6, Theorem 4.2.1, (a)]).
2. $(\bar{e_{\alpha\|\beta}}(\varepsilon) - \gamma_{\alpha\beta}(\bar{u}(\varepsilon))) \to 0$ dans $L^2(\omega)$ (voir[6, Theorem 4.2.1, (d)]).

De (1) et (2), on déduit que ; $\gamma_{\alpha\beta}(\bar{u}(\varepsilon) \to \gamma_{\alpha\beta}(\bar{u}) = e_{\bar{\alpha\|\beta}}$ dans $L^2(\omega)$
Alors : $\bar{u_\alpha}(\varepsilon) \to \bar{u_\alpha}$ dans $H^1(\omega)$ et $\bar{u_3}(\varepsilon) \to \bar{u_3}$ dans $L^2(\omega)$
vii) La convergence faible $u_3(\varepsilon) \rightharpoonup u_3$ dans $L^2(\Omega)$ établie dans la partie (i) est forte : $u_3(\varepsilon) \to u_3$ dans $L^2(\Omega)$.

En premier, nous avons $\partial_3 u_3(\varepsilon) = \varepsilon e_{3\|3}(\varepsilon) \to 0$ dans $L^2(\Omega)$; ensuite, nous avons déjà montré dans (vi) que $\bar{u}_3(\varepsilon) \to \bar{u}_3$ dans $L^2(\omega)$. D'où la conclusion d'après [6, Theorem 4.2.1,(c)] et le fait que la fonction u_3 est indépendante de x_3.
viii) Il reste à montrer que les convergences faibles, $u_\alpha(\varepsilon) \rightharpoonup u_\alpha$ dans $H^1(\Omega)$ établies en partie (i) sont fortes, c-à-d, $u_\alpha(\varepsilon) \to u_\alpha$ dans $H^1(\Omega)$.

A cette fin, nous observons que l'utilisation de l'inégalité de Korn 3D classique en coordonnées cartésiennes montre que le problème est équivalent à prouver :

$$e_{ij}(\acute{u}(\varepsilon)) \to e_{ij}(\acute{u}) \quad dans \quad L^2(\Omega),$$

Où :

$$e_{ij}(v) := \frac{1}{2}(\partial_j v_i + \partial_i v_j) \quad et \quad \acute{u}(\varepsilon) := (u_1(\varepsilon), u_2(\varepsilon), 0), \acute{u} := (u_1, u_2, 0).$$

Puisque : $e_{\alpha\|\beta} = e_{\alpha\beta}(\acute{u}(\varepsilon)) - \Gamma^P_{\alpha\beta}(\varepsilon)u_P(\varepsilon)$ les partiès (iii) et (v) impliquent que : $e_{\alpha\|\beta}(\varepsilon) \to \{e_{\alpha\beta}(\acute{u}) - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}u_\sigma - b_{\alpha\beta}u_3\} = e_{\alpha\|\beta}$ dans $L^2(\Omega)$. Le comportement asymptotique des fonctions $\Gamma^P_{\alpha\beta}(\varepsilon)$ et les convergences fortes $u_i(\varepsilon) \to u_i$ dans $L^2(\Omega)$ établies dans les parties (i) et (vii) impliquent que : $e_{\alpha\beta}(\acute{u}(\varepsilon)) \to e_{\alpha\beta}(\acute{u})$ dans $L^2(\Omega)$, $e_{33}(\acute{u}(\varepsilon)) = e_{33}(\acute{u}) = 0$
On a $\partial_3 u_\alpha(\varepsilon) = 2e_{\alpha 3}(\acute{u}(\varepsilon)) \to 0 = 2e_{\alpha 3}(\acute{u})$ dans $L^2(\Omega)$
$(\partial_3 u_\alpha = 0)$
Où d'une façon équivalente

$$\partial_3 u_\alpha(\varepsilon) \to 0 \quad dans \quad H^{-1}(\Omega) \quad et \quad \partial_i\partial_3 u_\alpha(\varepsilon) \to 0 \quad dans \quad H^{-1}(\Omega)$$

L'équivalence entre les deux dernières relations est une conséquence du lemme de Lions [6, Theorem 1.7.1], avec le théorème du graphe fermé, implique que :

$$v \in l^2(\Omega) \to (v, \partial_1 v, \partial_2 v, \partial_3 v) \in H^{-1}(\Omega)$$

est un isomorphisme.

Puisque

$$\partial_3 u_\alpha(\varepsilon) = 2\varepsilon\left(e_{\alpha\|3}(\varepsilon) + \Gamma^\sigma_{\alpha 3}(\varepsilon)u_\sigma(\varepsilon)\right) - \varepsilon\partial_\alpha u_3(\varepsilon), \quad pour \quad tout \quad \varphi \in D(\Omega)$$

$$\int_\Omega \partial_3 u_\alpha(\varepsilon)\varphi dx = \varepsilon\int_\Omega \left\{2(e_{\alpha\|3}(\varepsilon) + \Gamma^\sigma_{\alpha 3}(\varepsilon)u_\sigma(\varepsilon))\varphi + u_3(\varepsilon)\partial_\alpha\varphi\right\} dx.$$

Et par conséquent, il existe d'après (i) une constante indépendante de ε telle que $\|\partial_3 u_\alpha(\varepsilon)\|_{-1,\Omega} \leq C_1\varepsilon$

D'où $\partial_3 u_\alpha(\varepsilon) \to 0$ dans $H^{-1}(\Omega)$.

Par ailleurs, nous avons :

$$\begin{aligned}\partial_\beta\partial_3 u_\alpha(\varepsilon) &= \partial_3 e_{\alpha\beta}(\acute{u}(\varepsilon)) + \partial_\beta(\varepsilon e_{\alpha\|3}(\varepsilon) + \varepsilon\Gamma^\sigma_{\alpha 3}(\varepsilon)u_\sigma(\varepsilon)) \\ &= \partial_\alpha(\varepsilon e_{\beta\|3}(\varepsilon) + \varepsilon\Gamma^\tau_{\beta 3}(\varepsilon)u_\tau(\varepsilon)) \quad dans \quad \mathfrak{D}'(\Omega).\end{aligned}$$

Les convergences $e_{\alpha\beta}(\acute{u}(\varepsilon)) \to e_{\alpha\beta}(u)$ dans $L^2(\Omega)$ impliquent que :

$$\partial_3 e_{\alpha\beta}(\acute{u}(\varepsilon)) \to \partial_3 e_{\alpha\beta}(\acute{u}) = 0 \quad dans \quad H^{-1}(\Omega).$$

Puisque $\partial_3\partial_\beta u_\alpha = 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Notons par $\langle ., .\rangle$ la dualité entre $\mathfrak{D}'(\Omega)$ et $\mathfrak{D}(\Omega)$, pour tout $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ on a :

$$\langle\partial_\beta\left(\varepsilon e_{\alpha\|3}(\varepsilon) + \varepsilon\Gamma^\sigma_{\alpha 3}(\varepsilon)u_\sigma(\varepsilon)\right), \varphi\rangle = -\varepsilon\int_\Omega \left\{e_{\alpha\|3}(\varepsilon) + \Gamma^\sigma_{\alpha 3}(\varepsilon)u_\sigma(\varepsilon))\right\}\partial_\beta\varphi dx,$$

Et par conséquent, il existe C_2 indépendant de ε telle que :

$$\|\partial_\beta\left(\varepsilon e_{\alpha\|3}(\varepsilon) + \varepsilon\Gamma^\sigma_{\alpha 3}(\varepsilon)u_\sigma(\varepsilon)\right)\|_{-1,\Omega} \leq C_2\varepsilon; \text{d'après (i)}.$$

Le dernier terme dans l'expression $\partial_\beta\partial_3 u_\alpha(\varepsilon)$ est traité d'une manière analogue.

D'où

$$\partial_\beta\partial_3 u_\alpha(\varepsilon) \to 0 \quad dans \quad H^{-1}(\Omega).$$

Finalement, nous avons pour tout $\varphi \in D(\Omega)$,

$$\begin{aligned}\langle\partial_3\partial_3 u_\alpha(\varepsilon), \varphi\rangle &= -\int_\Omega \partial_3 u_\alpha(\varepsilon)\partial_3\varphi dx \\ &= -2\varepsilon\int_\Omega \left\{e_{\alpha\|3}(\varepsilon) + \Gamma^\sigma_{\alpha 3}(\varepsilon)u_\sigma(\varepsilon))\right\}\partial_3\varphi dx + \varepsilon^2\int_\Omega e_{3\|3}(\varepsilon)\partial_\alpha\varphi dx.\end{aligned}$$

Et par conséquent, il existe d'après (i) une constante C_3 indépendante de ε telle que :

$$\|\partial_3\partial_3 u_\alpha(\varepsilon)\|_{-1,\Omega} \leq C_3\varepsilon.$$

D'où

$$\partial_3\partial_3 u_\alpha(\varepsilon) \to 0 \quad dans \quad H^{-1}(\Omega).$$

ce qui achève la preuve.

ix)

Soit $X(\Omega) := \{v \in L^2(\Omega); \partial_3 v \in L^2(\Omega)\}$ ($\partial_3 v$ est la dérivée au sens des distributions). Alors la trace $v(., s)$ de toute fonction $v \in X(\Omega)$ est bien définie comme une fonction dans $L^2(\omega)$ pour tout $s \in [-1, 1]$ et l'opérateur de trace défini de cette façon est continu.En particulier il existe une constante C_4 tel que $\|v\|_{L^2(\Gamma_+\cup\Gamma_-)} \leq C_4\{|v|^2_{0,\Omega} + |\partial_3 v|^2_{0,\Omega}\}^{\frac{1}{2}}$.

Par conséquent, il existe une constante C_5 tel que :

$$\|v_3\|_{L^2(\Gamma_+\cup\Gamma_-)} \leq C_5 \left\{\sum_{i,j} |e_{ij}(\varepsilon; v)|^2_{0,\Omega}\right\}^{\frac{1}{2}}, \forall\ v\ \in X(\Omega)$$

Soit $v \in X(\Omega), \forall y \in \omega, et \forall s \in [-1, 1]$, on peut écrire

$$v(y, -1) = v(y, s) - \int_{-1}^{s} \partial_3 v(y, x_3)dx_3.$$

Par conséquent ;

$$\begin{aligned}|v(., -1)|^2_{0,\omega} &\leq 2\int_\omega |v(y, s)|^2 dy + 2\int_\omega |\int_{-1}^{s} \partial_3 v(y, x_3)dx_3|^2 dy \\ &\leq 2\int_\omega |v(y, s)|^2 dy + 2\int_\omega (1 + s)\left\{\int_{-1}^{s} |\partial_3 v(y, x_3)|^2 dx_3\right\} dy \\ &\leq 2\int_\omega |v(y, s)|^2 dy + 4|\partial_3 v|^2_{0,\Omega}.\end{aligned}$$

En intégrant la dernière inégalité par rapport à $s \in [-1, 1]$ on obtient :

$$\|v\|_{L^2(\Gamma_-)} \leq \left\{|v|^2_{0,\Omega} + 4|\partial_3 v|^2_{0,\omega}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Comme $\|v\|_{L^2(\Gamma_+)}$ est également borné, la première inégalité est prouvée.
Pour $v = (v_i) \in V(\Omega)$:

$$\begin{aligned}\|v_3\|_{L^2(\Gamma_+\cup\Gamma_-)} &\leq C_4 \left\{|v_3|^2_{0,\Omega} + |\partial_3 v_3|^2_{0,\Omega}|\right\}^{\frac{1}{2}}\\ &\leq C_4 \left\{|v_3|^2_{0,\Omega} + |e_{3\|3}(\varepsilon, v)|^2_{0,\Omega}\right\}^{\frac{1}{2}}\\ &\leq C_4(C+1)\left\{\sum_{i,j} |e_{i\|j}(\varepsilon, v)|^2_{0,\Omega}\right\}^{\frac{1}{2}};\end{aligned}$$

par l'inégalité de Korn 3D une coque elliptique menbranaire (voir[6, Theorem 4.3.1])
x) Considération des forces de surface :

Nous supposons désormais que seulement des forces de surface sont appliquées à la coque c-à-d, le problème variationnel $P(\varepsilon, \Omega)$ prend la forme :

$$u(\varepsilon) \in K(\varepsilon) = \{v = (v_i) \in V(\Omega); v_3 < d\}$$

$$V(\Omega) = \{v = (v_i) \in \mathbf{H}_1(\Omega); v = 0 \quad sur \quad \gamma \times [-1, 1]\}$$

$$\int_\Omega A^{ijkl}(\varepsilon)e_{k\|l}(\varepsilon)e_{i\|j}(\varepsilon, v)\sqrt{g(\varepsilon)}dx = \int_{\Gamma_-} h^i v_i\sqrt{g(\varepsilon)}d\Gamma + \langle\sqrt{g(\varepsilon)}G^i(\varepsilon), \bar{v_i}\rangle$$

pour tout $v \in V(\Omega)$. La réalisation d'une analyse asymptotique de $u(\varepsilon)$ quand $\varepsilon \to 0$ implique les mêmes étapes (i) à (ix) que celles étudièes précedemment pour le cas avec forces de volumes. Nous indiquons seulement les modifications qu'on a besoin pour manier le nouveau côté droit dans les équations variationnelles de $P(\varepsilon, \Omega)$.

Étape (i) :

$C_M^{-2}\left\{\sum_\alpha \|u(\varepsilon)\|^2_{1,\Omega} + \|u_3(\varepsilon)\|^2_{0,\Omega}\right\} \leq \sum_{i,j} |e_{i\|j}(\varepsilon)|^2_{0,\Omega}$
$\leq C_e g_0^{\frac{-1}{2}}\left(\int_{\Gamma_-} h^\alpha u_\alpha(\varepsilon)\sqrt{g(\varepsilon)}d\Gamma + \int_{\Gamma_-} h^3 u_3(\varepsilon)\sqrt{g(\varepsilon)}d\Gamma + \langle\sqrt{g(\varepsilon)}G^i(\varepsilon), \bar{v_i}\rangle\right)$
$\leq C_e g_0^{\frac{-1}{2}}\left(\int_{\Gamma_-} h^\alpha u_\alpha(\varepsilon)\sqrt{g(\varepsilon)}d\Gamma + \int_{\Gamma_-} h^3 u_3(\varepsilon)\sqrt{g(\varepsilon)}d\Gamma\right)$
$\leq C_e g_0^{\frac{-1}{2}} g_1^{\frac{1}{2}}\left(\|h^\alpha\|_{L^2(\Gamma_-)}\|u_\alpha(\varepsilon)\|_{L^2(\Gamma_-)} + \|h^3\|_{L^2(\Gamma_-)}\|u_3(\varepsilon)\|_{L^2(\Gamma_-)}\right)$
$\leq C_e g_0^{\frac{-1}{2}} g_1^{\frac{1}{2}}\left(C_6\left\{\sum_\alpha \|u_\alpha(\varepsilon)\|^2_{1,\Omega}\right\}^{\frac{1}{2}} + C_5\|h^3\|_{L^2(\Gamma_-)}\left\{\sum_{i,j} |e_{i\|j}(\varepsilon)|^2_{0,\Omega}\right\}^{\frac{1}{2}}\right)$
$\leq C_e g_0^{\frac{-1}{2}} g_1^{\frac{1}{2}}\left(C_6 C_M + C_7\right)\left\{\sum_{i,j} \|e_{i\|j}(\varepsilon)\|^2_{0,\Omega}\right\}^{\frac{1}{2}}$

Étape (ii) : est la même.

Étape (iii) :

$$\int_\Omega A^{ijkl}(\varepsilon)e_{k\|l}(\varepsilon)\left\{\varepsilon e_{i\|j}(\varepsilon,\upsilon)\right\}\sqrt{g(\varepsilon)}dx = \varepsilon\int_{\Gamma_-} h^i v_i\sqrt{g(\varepsilon)}d\Gamma + \varepsilon\langle\sqrt{g(\varepsilon)}G^i(\varepsilon),\bar{v}_i\rangle \tag{4.7}$$

On choisit toujours dans (4.7) $\bar{v}_i = 0$. On obtient après passage à la limite

$$\int_\Omega \left\{2\mu a^{\alpha\sigma}e_{\sigma\|3}\partial_3 v_\alpha + \left(\lambda a^{\sigma\tau}e_{\sigma\|\tau} + (\lambda+2\mu)e_{3\|3}\right)\partial_3 v_3\right\}\sqrt{a}dx = 0.$$

On déduit $e_{\sigma\|3} = 0$ et $e_{3\|3} = \frac{-\lambda}{\lambda+2\mu}a^{\alpha\beta}e_{\alpha\|\beta}$ dans $L^2(\Omega)$.

Étape (iv) :

$v = (v_i) \in V(\Omega)$ indépendant de x_3;

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_-} h^i v_i\sqrt{g(\varepsilon)}d\Gamma = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_-} h^i v_i\sqrt{a}dy = \int_\omega h^i\bar{v}_i\sqrt{a}dy$$

$$\langle\sqrt{g(\varepsilon)}G^\alpha(\varepsilon),\bar{v}_\alpha\rangle = \int_\Omega A^{ijkl}(\varepsilon)e_{k\|l}e_{i\|j}(\varepsilon,\upsilon)\sqrt{g(\varepsilon)}dx - \int_\Omega h^i v_i\sqrt{g(\varepsilon)}d\Gamma - \langle\sqrt{g(\varepsilon)}G^3(\varepsilon),\bar{v}_3\rangle$$

$$= \int_\Omega \{A^{\alpha\beta\sigma\tau}(\varepsilon)e_{\sigma\|\tau}(\varepsilon) + A^{\alpha\beta 33}(\varepsilon)e_{3\|3}(\varepsilon)\}\{e_{\alpha\|\beta}(\varepsilon,\upsilon)\}\sqrt{g(\varepsilon)}dx$$

$$+\int_\Omega \{4A^{\alpha 3\sigma 3}(\varepsilon)e_{\sigma\|3}(\varepsilon)\}\{e_{\alpha\|3}(\varepsilon,\upsilon)\}\sqrt{g(\varepsilon)}dx + \int_\Omega \{A^{33\sigma\tau}(\varepsilon)e_{\sigma\|\tau}(\varepsilon)$$

$$+A^{3333}(\varepsilon)e_{3\|3}(\varepsilon)\}\{e_{3\|3}(\varepsilon,\upsilon)\}\sqrt{g(\varepsilon)}dx - \int_\Omega h^i v_i\sqrt{g(\varepsilon)}d\Gamma - \langle\sqrt{g(\varepsilon)}G^3(\varepsilon),\bar{v}_3\rangle$$

On prend maintenant $\bar{v}_3 = 0$. Par passage à la limite, on trouve :

$$\lim_{\epsilon\to 0}\langle\sqrt{g(\varepsilon)}G^\alpha(\varepsilon),\bar{v}_\alpha\rangle = \int_\Omega\left\{\frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}a^{\alpha\beta}a^{\sigma\tau} + \mu(a^{\alpha\sigma}a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau}a^{\beta\sigma})\right\}e_{\sigma\|\tau}\gamma_{\alpha\beta}(\upsilon)\sqrt{a}dx - \int_\omega h^i\bar{v}_i\sqrt{a}dy.$$

$$\lim_{\epsilon\to 0}\langle\sqrt{g(\varepsilon)}G^\alpha(\varepsilon),\bar{v}_\alpha\rangle = \int_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau}\gamma_{\sigma\tau}(u)\gamma_{\alpha\beta}(\upsilon)\sqrt{a}dy - \int_\omega h^i\bar{v}_i\sqrt{a}dy$$

L'application : $v_\alpha \to \int_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau}\gamma_{\sigma\tau}(u)\gamma_{\alpha\beta}(\upsilon)\sqrt{a}dy - \int_\omega h^i\bar{v}_i\sqrt{a}dy$
est une forme linéaire sur $H_0^1(\omega)$, donc il existe $\varphi \in H^{-1}(\omega)$ telle que :

$$\int_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau}\gamma_{\sigma\tau}(u)\gamma_{\alpha\beta}(\upsilon)\sqrt{a}dy - \int_\omega h^i\bar{v}_i\sqrt{a}dy = \langle\varphi,\bar{v_\alpha}\rangle$$

φ représente la limite faible -* de $\sqrt{g(\varepsilon)}G^\alpha(\varepsilon)$ dans $H^1(\omega)$ on lá note $\sqrt{a}G^\alpha(0)$

$$\sqrt{g(\varepsilon)}G^\alpha(\varepsilon) \rightharpoonup \sqrt{a}G^\alpha(0) \quad dans \quad H^{-1}(\omega) faible - *,$$

et vérifie

$$\int_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau}\gamma_{\sigma\tau}(u)\gamma_{\alpha\beta}(\upsilon)\sqrt{a}dy = \int_\omega h^i\bar{\upsilon}_i\sqrt{a}dy + \langle\sqrt{a}G^\alpha(0),\bar{\upsilon_\alpha}\rangle$$

$$\langle\sqrt{g(\varepsilon)}G^3(\varepsilon),\bar{\upsilon_3}\rangle = \int_\Omega A^{ijkl}(\varepsilon)e_{k\|l}e_{i\|j}(\varepsilon,\upsilon)\sqrt{g(\varepsilon)}dx - \int_\Omega h^i\upsilon_i\sqrt{g(\varepsilon)}d\Gamma - \langle\sqrt{g(\varepsilon)}G^\alpha(\varepsilon),\bar{\upsilon_\alpha}\rangle$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\langle\sqrt{g(\varepsilon)}G^3(\varepsilon),\bar{\upsilon_3}\rangle = \int_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau}\gamma_{\sigma\tau}(u)\gamma_{\alpha\beta}(\upsilon)\sqrt{a}dy - \int_\omega h^i\bar{\upsilon}_i\sqrt{a}dy - \langle\sqrt{a}G^\alpha(0),\bar{\upsilon_\alpha}\rangle$$

L'application : $\upsilon_3 \to \int_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau}\gamma_{\sigma\tau}(u)\gamma_{\alpha\beta}(\upsilon)\sqrt{a}dy - \int_\omega h^i\bar{\upsilon}_i\sqrt{a}dy - \langle\sqrt{a}G^\alpha(0),\bar{\upsilon_\alpha}\rangle$
est une forme linéaire sur $H_0^2(\omega)$, donc il existe $\varphi \in H^{-2}(\omega)$ telle que :

$$\int_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau}\gamma_{\sigma\tau}(u)\gamma_{\alpha\beta}(\upsilon)\sqrt{a}dy - \int_\omega h^i\bar{\upsilon}_i\sqrt{a}dy - \langle\sqrt{a}G^\alpha(0),\bar{\upsilon_\alpha}\rangle = \langle\varphi,\bar{\upsilon_3}\rangle$$

φ représente la limite faible -* de $\sqrt{g(\varepsilon)}G^3(\varepsilon)$ dans $H^2(\omega)$ on l'a note $\sqrt{a}G^3(0)$

$$\sqrt{g(\varepsilon)}G^3(\varepsilon) \rightharpoonup \sqrt{a}G^3(0) \quad dans \quad H^{-2}(\omega) faible - *,$$

et vérifie

$$\int_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau}\gamma_{\sigma\tau}(u)\gamma_{\alpha\beta}(\upsilon)\sqrt{a}dy = \int_\omega h^i\bar{\upsilon}_i\sqrt{a}dx + \langle\sqrt{a}G^i(0),\bar{\upsilon}_i\rangle$$

Laquelle nous pouvons l'écrire aussi (les deux fonctions u et v sont indépendantes de x_3)

$$\int_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau}\gamma_{\alpha\beta}(\bar{u})\gamma_{\sigma\tau}(\bar{\upsilon})\sqrt{a}dy = \int_\omega h^i\bar{\upsilon}_i\sqrt{a}dy + \langle\sqrt{a}G^i(0),\bar{\upsilon}_i\rangle.$$

La suite est la même.

Étape (v) : nous avons maintenant ;

$$\Lambda(\varepsilon) = \int_{\Gamma_-} h^i u_i\sqrt{g(\varepsilon)}d\Gamma + \langle\sqrt{g(\varepsilon)}G^i(\varepsilon),u_i(\varepsilon)\rangle - \int_\Omega A^{ijkl}(\varepsilon)\left(2e_{k\|l}(\varepsilon) - e_{k\|l}\right)e_{i\|j}\sqrt{g(\varepsilon)}dx.$$

Comme toute application linéaire fortement continue est aussi continue par rapport aux topologies faibles (voir, par exemple, Brezis [1983,p39]),

$u_\alpha(\varepsilon) \rightharpoonup u_\alpha$ dans $H^{\bar{1}}(\Omega)$ implique $u_\alpha(\varepsilon) \rightharpoonup u_\alpha$ dans $L^2(\Gamma_+ \cup \Gamma_-)$

Donc :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_-} h^\alpha u_\alpha(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} d\Gamma = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_{\Gamma_-} h^\alpha u_\alpha(\varepsilon) (\sqrt{g(\varepsilon)} - \sqrt{a}) + \int_{\Gamma_-} h^\alpha u_\alpha(\varepsilon) \sqrt{a} d\Gamma \right\}$$

$$= \int_{\Gamma_-} h^\alpha u_\alpha \sqrt{a} d\Gamma = \int_\omega h_-^\alpha \bar{u}_\alpha \sqrt{a} dy$$

d'un côté.

Pour la même raison les convergences faibles $u_3(\varepsilon) \rightharpoonup u_3$ dans $L^2(\Omega)$ et $\partial_3 u_3(\varepsilon) = \varepsilon e_{3\|3}(\varepsilon) \rightharpoonup 0 = \partial_3 u_3$ dans $L^2(\Omega)$ (cf, (i) et (ii)) et la première inégalité dans (ix). Ensemble impliquent :

$$u_3(\varepsilon)(., \pm 1) \rightharpoonup u_3(., \pm 1) \;\; dans \;\; L^2(\Omega)$$

Par conséquent ;

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_-} h^3 u_3(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} d\Gamma = \int_\omega h^3 \bar{u_3} \sqrt{a} dy$$

de l'autre côté.

On conclut que $\Lambda = 0$.

Les étapés (**vi**), (**vii**) et (**viii**) restent inchangées ce qui achève la démonstration. ■

Conclusion

On conclut de ce travail, dans le cas des coques minces, en utilisant la méthode des développements asymptotiques formelles que dans le cas sans frottement, on trouve un problème bidimensionnel de Signorini sans frottement et dans le cas avec frottement de Coulomb, on trouve un problème bidimensionnel de Signorini avec frottement. Donc, dans chaque cas, on dérive un problème bidimensionnel de même type. Et ceci en utilisant l'étude asymptotique formelle. Ce qui n'est pas le cas pour les plaques et les coques peu-profondes (shellow shells) où on perd les forces de frottements dans le problème bidimensionnel, ce qui répond à la question de Paumier [18]. Ensuite dans le chapitre 4, on a validé ce résultat à l'aide de la méthode de convergence et ceci pour le cas particulier : une coque membranaire elliptique totalement encastrée et uniquement dans le cas sans frottement. Pour le cas avec frottement, on a pas pu avoir un résultat de convergence pour toute la suite $u(\varepsilon)$ parce qu'on dispose pas d'un résultat d'unicité pour le problème limite en général. La question qui se pose, qu'est ce qui se passe pour les autres modèles de coques, membrane généralisée, flexion, membrane-flexion, modèle de Naghdi et modèle de Koiter. La question se pose aussi pour les modèles non linéarisés et pour les modèles dynamiques.

Annexe A

Élasticité tridimensionnelle

A.1 Les équations d'équilibre

Soit Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^3$ de frontière $\Gamma = \partial\Omega$ suffisamment réguliére et soit $\overline{\Omega}$ l'adhérence de Ω dans $\mathbb{R}^3$. Dans tout la suite, l'ensemble $\overline{\Omega}$ représentra le volume occupé par un solide "non déformé" et sera appelé configuration de référence. Nous noterons x un point courant de l'ensemble $\overline{\Omega}$, de composantes x_i dans la base canonique $\{e_i\}$ de $\mathbb{R}^3$, et $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ la dérivée partielle par rapport à la variable x_i.

La structure est encastrée sur une partie de sa frontière $\Gamma_0 \subset \Gamma$ de $\partial\Omega$- mesure non nulle et est soumise à une disribution surfacique de force h sur Γ_- de telle sorte que $\Gamma_0 \cap \Gamma_- = \emptyset$, et de densité de force volumique f.

Les aspects mécaniques du probléme sont de deux sortes ; les équations d'équilibre sont déduites de principes mécaniques généraux ne faisant pas intervenir la nature du matériau,les lois de comportement dépendent du matériau considéré et traduisent les relations "contraintes-déformations"

Nous appellerons déformation de la configuration de référence une application $\varphi : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ suffisamment réguliére, injective, et préservant l'orientation, c'est à dire vérifiant (voir Ciarlet P.G.[8]) :

$$det\nabla\varphi(x) > 0, \ \forall x \in \overline{\Omega}. \tag{A.1}$$

A tout déformation φ, nous associons un déplacement$u$, qui est le champ de vecteurs $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ défini par la relation :

$$\varphi = I_d + u. \tag{A.2}$$

L'ensemble $\overline{\Omega}^{\varphi} = \varphi(\overline{\Omega})$ est appelé configuration déformé, sa frontière $\Gamma^{\varphi} = \varphi(\Gamma)$, et notons $F : \overline{\Omega} \longrightarrow M_3^+$ le gradient de la déformation $\varphi, F = \nabla\varphi = I_3 + \nabla u.$

Si φ est une déformation dérivable au point $x \in \overline{\Omega}$, le tenseur des déformations de Cauchy-Green à droite $C = \nabla\varphi^T\nabla\varphi$, apparaît en formant la quantité :

$$|\varphi(x + \delta x) - \varphi(x)|^2 = \delta x^T \nabla\varphi^T(x)\nabla\varphi(x)\delta(x) + o(|\delta x|^2), \quad x, x + \delta x \in \overline{\Omega}, \tag{A.3}$$

il joue un rôle fondamental en théorie de l'élasticité.

On dit que φ est une déformation rigide, si $\nabla\varphi(x) = Q, \forall x \in \overline{\Omega}$, telle que Q est une matrice orthogonale et $detQ > 0$, on a alors $C = I_3$ dans $\overline{\Omega}$(voir théorème 1.1.2, ciarlet P.G.[8]).

Lemme Soit $V \subset \Omega$ un ouvert, de frontiére ∂V suffisamment réguliére, et soit$A \subset \partial V$, alors :

pour$V^{\varphi} = \varphi(V)$,

$$\int_{V^{\varphi}} dx^{\varphi} = \int_V |det\nabla\varphi(x)|dx, \tag{A.4}$$

élément de volume,

et pour$A^{\varphi} = \varphi(A)$,

$$\int_{A^{\varphi}} da^{\varphi} = \int_A |Cof\nabla\varphi(x)n(x)|da, \tag{A.5}$$

oú :

n : le vecteur normal extérieur unitaire le long de ∂V.

Preuve. . voir([10],Théoréme 1.3-1). ■

Théorème A.1 *Soit $T^{\varphi} : \overline{\Omega}^{\varphi} \to \mathbb{M}^3$ champ de tenseurs, et soit $T((x) = T^{\varphi}(x^{\varphi})Cof\nabla\varphi(x)$ la transformée de Piola, alors :*

$$divT(x) = det\nabla\varphi(x)div^{\varphi}T^{\varphi}(x^{\varphi}), \tag{A.6}$$

avec :

$$div^{\varphi} = \sum \frac{\partial}{\partial x_i^{\varphi}},$$

et donc :

$$\int_{\partial V} T.nda = \int_V divTdx = \int_{V^\varphi} div^\varphi T^\varphi dx^\varphi = \int_{\partial V^\varphi} T^\varphi.n^\varphi da^\varphi. \qquad \text{(A.7)}$$

Preuve. . voir ([11],Théoréme 1.7-1). ■

Introduisons enfin le tenseur des déformations de Green-Saint-Venant E (voir ciarlet P.G. et Rabier P. [11])

$$E(u) = \frac{1}{2}(C - I_3) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T) + \nabla u.\nabla u^T, \qquad \text{(A.8)}$$

mésurant l'écart entre une déformation donnée et une déformation rigide. Le tenseur E est symétrique $E_{ij} = E_{ji}$.

Dans le tenseur des déformations apparait une patie linéair (parrapport au déplacement$u$) et une partie non linéaire. La partie linéaire :

$$e_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i), \qquad \text{(A.9)}$$

est appelée tenseur linéarisé des déformations et intervient dans la théorie linéaire de l'élasticité (dans le cadre des petites déformations).

Nous supposons que le corps occupant une configuration déformée $\overline{\Omega}^\varphi$ est soumis à deux types de forces appliquées, forces appliquées de volume, correspondant à un champ de vecteurs $f^\varphi : \Omega^\varphi \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et forces appliquée de surfaces définies sur une portion $\Gamma_-^\varphi = \varphi(\Gamma_-)$ de la frontière Γ^φ, correspondant à un champ de vecteurs h^φ : $\Gamma_-^\varphi \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

Remarque 1 Pour des questions de compatibilité avec le point de vue mécanique, il est nécessaire que φ soit un difféomorphisme global de Ω sur $\varphi(\Omega)$ et que φ préserve l'orientation, une condition à imposer est donc que :

$$det\nabla\varphi(x) > 0 \textit{ Pour tout } x \in \overline{\Omega}. \qquad \text{(A.10)}$$

Réciproquement, la condition $det\nabla\varphi(x) > 0$ entraîne que localement, φ est un difféomorphisme qui préserve l'orientation, mais cette seule hypothése est insuffisante pour obtenir un résultat d'inversibilité global (voir [11] théorème 1.2-2).

D'après le théorème de Cauchy qui est lui-même une conséquence de l'axiome connu sous le nom de principe des contraintes d'Euler-Cauchy, l'état d'équilibre statique de la configuration déformée est traduite par, il existe :

$$t^{\varphi} : \overline{\Omega}^{\varphi} \times S_2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \tag{A.11}$$

tel que :
Pour tout $A^{\varphi} \subset \Omega^{\varphi}$,

$$\int_{A^{\varphi}} f^{\varphi} dx^{\varphi} + \int_{\partial A^{\varphi}} t^{\varphi}(x^{\varphi}, n^{\varphi}(x^{\varphi})) da^{\varphi} = 0, \tag{A.12}$$

$$\int_{A^{\varphi}} x^{\varphi} \wedge f^{\varphi} dx^{\varphi} + \int_{\partial A^{\varphi}} x^{\varphi} \wedge t^{\varphi}(x^{\varphi}, n^{\varphi}(x^{\varphi})) da^{\varphi} = 0, \tag{A.13}$$

$$t^{\varphi}(x^{\varphi}, n^{\varphi}(x^{\varphi})) = h^{\varphi}(x^{\varphi}), \tag{A.14}$$

pour $\partial\Omega^{\varphi}$ - presque partout $x^{\varphi} \in \partial A^{\varphi} \cap \Gamma_{-}^{\varphi}$, où :
$n^{\varphi}(x^{\varphi})$ est le vecteur normal extérieur unitaire le long de ∂A^{φ} en x^{φ}, ($n^{\varphi}(x^{\varphi})$ existe dx^{φ} -presque partout $x^{\varphi} \in \partial A^{\varphi}$),

$$S_2 = \{\upsilon \in \mathbb{R}^3; |\upsilon| = 1\}.$$

Théorème A.2 *Si* $t^{\varphi}(., n^{\varphi}) : \overline{\Omega}^{\varphi} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *est de classe* C^1 *pour tout* $n^{\varphi} \in S_2$, $t^{\varphi}(x^{\varphi}, .) : S_2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$*est continue pour tout* $x^{\varphi} \in \overline{\Omega}^{\varphi}$, *et* $f^{\varphi} : \overline{\Omega}^{\varphi} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *est continue.*
Alors :
$t^{\varphi} : \overline{\Omega}^{\varphi} \times S_2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *est linéaire pour la duxiéme variable.*

Preuve. (voir [11] .,théorème 2.3-1). ■

Autrement dit,il existe $T^{\varphi} : \overline{\Omega}^{\varphi} \longrightarrow \mathbb{M}^3$ de classe C^1 tel que :

$$t^{\varphi}(x^{\varphi}, n^{\varphi}) = T^{\varphi}(x^{\varphi}) n^{\varphi}, \tag{A.15}$$

pour tout $x^{\varphi} \in \overline{\Omega}^{\varphi}$ et pour tout $n^{\varphi} \in S_2$,
T^{φ} est appelé tenseur des contraintes de Cauchy.

Les équations d'équilibre dans la configuration déformée $\overline{\Omega}^{\varphi}$ doivent être satisfaites :

Théorème A.3

$$- \, divT^{\varphi}(x^{\varphi}) = f^{\varphi}(x^{\varphi}) \quad pour \quad tout \quad x^{\varphi} \in \Omega^{\varphi}, \tag{A.16}$$

$$T^{\varphi}(x^{\varphi})n^{\varphi}(x^{\varphi}) = h^{\varphi}(x^{\varphi}) \quad pour \quad tout \quad x^{\varphi} \in \Gamma_{-}^{\varphi}, \tag{A.17}$$

$$T^{\varphi}(x^{\varphi}) \in \mathbb{S}^{3} \quad pour \quad tout \quad x^{\varphi} \in \Omega^{\varphi} \tag{A.18}$$

Preuve. voir [11].,théorème 2.4-1]). ■

Pour passer à la variable $x \in \overline{\Omega}$ $(x^{\varphi} = \varphi(x))$tout en préservant autant que possible la forme "de divergence" des équations, on introduit la transformée de Piola du champ de tenseurs T^{φ} : c'est le champ de tenseurs $T = (t_{ij}) : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{M}^{3}$.
On a :

$$dx^{\varphi} = |det\nabla\varphi(x)|dx, \tag{A.19}$$

$$n^{\varphi}da^{\varphi} = Cof\nabla\varphi(x)n(x)da, \tag{A.20}$$

et on définie $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{3}$ *et* $h : \Gamma_{-} \longrightarrow \mathbb{R}^{3}$, par :

$$f^{\varphi}(x^{\varphi})dx^{\varphi} = f(x)dx, \tag{A.21}$$

$$h^{\varphi}(x^{\varphi})da^{\varphi} = h(x)da. \tag{A.22}$$

On fera désormais l'hypothése que les forces appliquèes sont "mortes", dans le sens que les champs $f^{\varphi}, h^{\varphi}, f, h$ sont indépendants de la déformation φ.

En supposant que φ suffisamment régulière et utilisant le changement de variables dans (2.15), on déduit que :
pour tout $A \subset \Omega$,

$$\int_{A} f(x)dx + \int_{\partial A} T^{\varphi}(\varphi(x))Cof\nabla\varphi(x)n(x)da = 0. \tag{A.23}$$

On définie T par :

$$T(x) = T^{\varphi}(\varphi(x))Cof\nabla\varphi(x) \; pour \; tout \; x \in \overline{\Omega}, \tag{A.24}$$

est appelé en élasticité le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff.

Donc :

$$\int_A f(x)dx + \int_{\partial A} T(x)n(x)da = 0. \tag{A.25}$$

Alors, T vérifie les équations d'équilibre dans la configuration de réfèrence $\overline{\Omega}$:

$$-\,divT(x) = f(x) \; pour \; tout \; x \in \Omega, \tag{A.26}$$

$$T(x)n(x) = h(x) \; pour \; tout \; x \in \Gamma_-. \tag{A.27}$$

$$\nabla\varphi(x)^{-1}T(x) \in \mathbb{S}^3 \; pour \; tout \; x \in \Omega \tag{A.28}$$

où :

$$\Gamma_- \subset \partial\Omega \; et \; \Gamma_-^{\varphi} = \varphi(\Gamma_-). \tag{A.29}$$

Un inconvénient du premier tenseur de Piola-Kirchhoff est son absence de symétrie, alors que le tenseur de Cauchy est symétrique. On peut "récupérer " cette symétrie en intoduisant le champ de tenseur $\Sigma = (\sigma_{ij})$:$\overline{\Omega} \to \mathbb{S}^3$ définis par :

$$\Sigma(x) = \nabla\varphi(x)^{-1}T(x) \; pour \; tout \; x \in \Omega. \tag{A.30}$$

Le tenseur Σ, appelé en élasticité le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff, est évidemment symétrique ; on déduit en efft immédiatement de (2.29) − (2.31)les équations suivantes, qui représentent l'autre forme des équatios d'équilibre dans la configuration de référence $\overline{\Omega}$:

$$-\,div(\nabla\varphi(x)\Sigma(x)) = f(x) \; pour \; tout \; x \in \Omega, \tag{A.31}$$

$$(\nabla\varphi(x)\Sigma(x))n(x) = h(x) \; pour \; x \in \Gamma_-, \tag{A.32}$$

$$\Sigma \in \mathbb{S}^3 \; pour \; tout \; x \in \Omega, \tag{A.33}$$

Ce qui équivaut :

$$-\,\partial_j(\sigma_{ij}) = f_i \; dans \; \Omega, \tag{A.34}$$

$$(\sigma_{ij})n_j = h_i \; sur \; \Gamma_-, \tag{A.35}$$

en utilisant les relations :

$$\partial_j\varphi_i = \delta_{ij} + \partial_j u_i. \tag{A.36}$$

A.2 Les lois de comportement

Les lois de comportement expriment les relations qui existent entre le second tenseur de Piola-Kirchhoff σ et le tenseur des déformations de Green Saint-Venant e, ces relations dépendent de la nature du matériau.

On suppose dans toute la suite que l'ensemble $\overline{\Omega}$ dans la configuration de référence est occupé par un matériau élastique.

Définition 1 : On dit qu'un matériau occupant l'ensemble $\overline{\Omega}$ dans la configuration initiale est élastique s'il existe une fonction $\widehat{T}$:$\overline{\Omega} \times \mathbb{M}^3_+ \to \mathbb{M}^3$, tel que :

$$T(x) = \widehat{T}(x, \nabla\varphi(x)) \; pour \; tout \; x \in \overline{\Omega}, \tag{A.37}$$

$\widehat{T}$: *est dite loi de comportement du premier tenseur de* $Piola - Kirchhoff$.

Ce qui équivaut, il existe une fonction $\widehat{\Sigma} : \overline{\Omega} \times \mathbb{M}^3_+ \to \mathbb{S}^3$, tel que :

$$\Sigma(x) = \widehat{\Sigma}(x, \nabla\varphi(x)) \;\; pour \;\; tout \;\; x \in \overline{\Omega}, \tag{A.38}$$

$\widehat{\Sigma}$: est dite loi de comportement du second tenseur de Piola -Kirchhoff.

Remarque 1 : Les identités (2.40) et (2.41) sont les équations constitutives du matériau qu'elles décrivent.

Théorème A.4 *: Un matériau élastique satisfait le principe de l'indifférence matérielle si et seulement si :*

$$\widehat{T}(x, QF) = Q\widehat{T}(x, F) \tag{A.39}$$

pour tout $x \in \overline{\Omega}, Q \in \mathbb{O}^3_+$ *et* $F \in \mathbb{M}^3_+$
Ce qui équivaut :

$$\widehat{\Sigma}(x, QF) = \widehat{\Sigma}(x, F), \tag{A.40}$$

pour tout $x \in \overline{\Omega}, Q \in \mathbb{O}^3_+$ *et* $F \in \mathbb{M}^3_+$.

Preuve. (voir [11] ,Thèorème 3.3.1) ■

De (2.43),on déduit que :
$\widehat{\Sigma}$ dépend de F uniquement par la matrice $U = (F^T F)^{\frac{1}{2}} \in \mathbb{S}^3_>$.

D'oú en déduire que :

$$\widehat{\Sigma}(x, F) = \widehat{\Sigma}(x, U), \tag{A.41}$$

pour tout $x \in \overline{\Omega}$ et $F = RU \in \mathbb{M}^3_+$.

Cela implique que, le second tenseur des contraintes de Piola - Kirchhoff Σ dèpond de φ uniquement par le tenseur métrique $C = \nabla\varphi^T \nabla\varphi$.

Donc :

$$\Sigma(x) = \widetilde{\Sigma}(x, C(x)) \;\; pour \;\; tout \;\; x \in \overline{\Omega}, \tag{A.42}$$

où :
$\widetilde{\Sigma} : \overline{\Omega} \times S^3_> \to S^3$ est d éfinit par :

$$\widetilde{\Sigma}(x, C) = \widehat{\Sigma}(x, C^{\frac{1}{2}}), \tag{A.43}$$

pour tout $x \in \overline{\Omega}$ *et* $C \in \mathbb{S}^3_>$.

Définition 2 : Un matériau est isotrope en $x \in \overline{\Omega}$ si les propriétés du matériau "sont les mêmes dans toutes les directions" ; il s'agit donc d'une caractéristique d'un matériau donné, mais vaisiblement"raisonnable" pour certains matériaux, c'est une propriété de symétrie matérielle.

Remarque 2 Un matériau occupant la configuration de référence $\overline{\Omega}$ est isotrope s'il est isotrope en tout les points de $\overline{\Omega}$.

Théorème A.5 *: Un matériau élastique occupant la configuration de référence* $\overline{\Omega}$ *est isotrope si et seulement si :*

$$\widehat{T}(x, FQ) = \widehat{T}(x, F)Q, \tag{A.44}$$

pour tout $x \in \overline{\Omega}, Q \in \mathbb{O}^3_+$ *et* $F \in \mathbb{M}^3_+$.
Ce qui équivaut :

$$\widehat{\Sigma}(x, FQ) = Q^T \widehat{\Sigma}(x, F)Q, \tag{A.45}$$

pour tout $x \in \overline{\Omega}, Q \in \mathbb{O}^3_+$ *et* $F \in \mathbb{M}^3_+$.

Preuve. . voir [11], théorème 3.4-1]). ■

Définition 3 : Un matériau élastique occupant la configuration de référence $\overline{\Omega}$ est hmogéne si sa loi de comportement est indépendante du point$x \in \overline{\Omega}$ cosidéré.

Ce équivaut :
ils existent ; $\widehat{T}$:$\mathbb{M}^3_+ \to \mathbb{M}^3$ et$\widehat{\Sigma}$:$\mathbb{M}^3_+ \to \mathbb{M}^3$ et $\widehat{\Sigma}$:$\mathbb{M}^3_+ \to \mathbb{S}^3$,tel que :

$$\widehat{T}(x, F) = \widehat{T}(F), \tag{A.46}$$

et

$$\widehat{\Sigma}(x, F) = \widehat{\Sigma}(F), \tag{A.47}$$

pour tout $x \in \overline{\Omega}$ *et* $F \in \mathbb{M}^3_+$.

La configuration de référence$\overline{\Omega}$ est un état naturel (les contraintes sont libres), si

$$\widehat{T}(x, I) = 0 \ pour\ tout\ x \in \overline{\Omega}. \tag{A.48}$$

Ce qui équivaut :

$$\widehat{\Sigma}(x, I) = 0 \ pour\ tout\ x \in \overline{\Omega}. \tag{A.49}$$

Théorème A.6 *Si un matériau est isotrope et satisfait le principe de l'indifférence matérielle, alor il existe des fonctions* $\gamma_i^\sharp : \Omega \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, *telle que :*

$$\sum(x) = \gamma_0(x)I + \gamma_1(x)C(x) + \gamma_2(x)C^2(x) \quad pour \quad tout \quad x \in \overline{\Omega}. \tag{A.50}$$

Où :

$$\gamma_i(x) = \gamma_i^\sharp(x, trC, tr(CofC), detC)$$

Preuve. . voir [11], théorème 3.7-1]). ■

Bibliographie

[1] Adams R.A., *Sobolev space*, Academic, New York, 1975.1

[2] A. Léger, B. Miara, *the obstacle problem for shallow shells in curvilignes coordinates* . C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 2010

[3] A. Léger, B. Miara, *Mathematical justification of the obstacle problem in the case of a shallow shell.* J. Elasticity. Vol. 90, 2008,Pages 241-257.

[4] A.Signorini. *Questioni de elasticita non linearizzata e semi-linearizzata.* Rend de Matematica, Rome, 1959

[5] Brezis. H, *Analyse fonctionnelle théories et applications.* Dunod 1999.

[6] Ciarlet P.G., *Mathematical Elasticity, vol III, Theory of Shells*, North-Holland, Amsterdam, 1999.

[7] Ciarlet P.G. and Miara B., *Justification of the two-dimensional equations of a linearly elastic shallow shell*, Comm. Pure Appl. Math, **45** (1992), 327-360.

[8] Ciarlet,P.G., *Élasticité Tridimensionnelle, Masson,Paris New York,1986.*,

[9] Ciarlet P.G., *Mathematical Elasticity, vol II, Theory of Plates*, North-Holland, Amsterdam, 1997.

[10] Ciarlet P.G., *An introduction to differential geometry with applications to elasticity*, J. Elast, **78-79** (2005), 1-215.

[11] Ciarlet P.G., *Mathematical Elasticity, vol I, Three-Dimensional Elasticity*, North-Holland, Amsterdam, 1988.

[12] Ciarlet P.G. and Mardare C., *An introduction to shell theory*, Lectures notes series 9, Liu Bie centre for mathematical sciences, university of Hong Kong, 2007.

[13] Ciarlet P.G., *Plates and junctions in elastic multistructures*, Masson, 1990

[14] D.A. Chacha, A. Bensayah, *Asymptotic modeling of a Coulomb frictional Signorini problem for the von Kármán plates.* C.R. Mecanique, Vol.336(2008),846-850.

[15] Eck et Jarusek., *Existence results for the static contact problém with Coulomb friction,Math.*, Models Methods Appl. Sci., 8,445-468(1998).

[16] G.Duvaut,. *Mécanique du milieu continu.* Dunod 1998.

[17] G.Duvant,J.L.Lions, *Les inéquations en mécanique et en physique.* , Dunod 1972

[18] J.C.Paumier, Modélisation asymptotique d'un problème de plaque mince en contact unilatèral avec frottement sur un obstacle rigide. Rapport technique LMC-IMAG,juillet 2002[$http : //www - lmc.imag.fr\tilde{/}pamier/signoplaque.ps$]

[19] G. Fichera *Problemi elastostatici con vincoli unilaterali.* II Problema di Signorini con ambique condizioni al contorno, Mem. Accad. Naz. Lincei, S. VIII, Vol. VII, Sez. I., 5, 1964

[20] *J.Jarušek. Contact Problem with Bounded Friction : Coercive case, Coercive case, Czechoslovak.*Math. J.,33(108), 237-261(1983).

[21] H.B.Dhia, *Equilibre d'une plaque mince élastique avec contact unilatéral et frottement de type Coulomb,* C. R. Acad. Sci. Paris, Scr. I, 308 (1989) 293-296.

[22] Kikuchi, Oden, *Contact problems in elasticity : a study of variaional inequalities and finite element methodes, SIAM, Studies in applied mathematics, 1988.*

[23] Lion et Magenes, *Problémes aus limites non homogénes et applications,vol.1et 2,Dunod 1968.*

[24] R. Hassani, P.Hild et I.Ionescu, *Sufficient conditions of non-uniqueness for the Coulomb friction problem.*Math. Meth. Appli. Sci. 2004 ; 27 :47-67.

[25] Nécas Jarusek et Haslinger., *On the solution of the variational inequality to the signorini probléme with small friction,Boll.U.M.I. 5(17B), 796-811 (1980),*

[26] M.Bernadou., *Méthodes d'éléments finis pour les problémes de coques minces,* **1994** Masson (Paris Milan Barcelone)

[27] Y.Kato, *Signorini Problem with friction in linear elasticity, J. Appl.Math.,*4,237-268(1987).

[28] Y. Renard. *A uniqueness criterion for the Signorini problem with Coulomb friction.*4th Contact Mechanics International Symposium, Hannover, 2005.

[29] P.G.Cialet, P.Destuynder : *A justification of the two dimensional plate model,* J. Mécanique,18 (1989) 315-344.